P. HEEGAARD (Oslo - Norvegia)

LA REPRÉSENTATION DES POINTS IMAGINAIRES DE SOPHUS LIE ET SA VALEUR DIDACTIQUE

Je désirerais, dans cette courte communication, attirer l'attention sur un mémoire écrit par le mathématicien norvégien SOPHUS LIE dans sa jeunesse. Ce mémoire a paru dans le journal de Crelle 1869 (t. 70, p. 346) sous le titre « Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie ». Le mémoire est à présent presque complètement tombé dans l'oubli.

Quand on rencontre dans la géométrie analytique des points avec coordonnées imaginaires, on peut naturellement dire: Cela signifie que le problème est impossible, sans solution. D'un autre côté, sur les sommets de la science, on peut traiter la géométrie analytique comme une algèbre camouflée. Alors les points imaginaires ne causent pas de difficultés. Mais il y a dans l'enseignement un point de vue intermédiaire où il est nécessaire de se former une idée distincte de ces points imaginaires. N'importe si cela se passe dans le gymnase ou dans l'université, le problème pédagogiqùe est le même.

On parle souvent sans façon de ces points imaginaires comme « existant ». L'élève se demande: « Où sont-ils ? ». Et quand plus tard il apprend les qualités paradoxales des lignes isotropes, il devient très sceptique. C'est dommage pour la théorie si belle de la métrique projective générale. La théorie de v. STAUDT, les recherches si belles de LAGUERRE, de STOLTZ, de STUDY, de JUEL et de bien d'autres, sont trop difficiles pour le commençant. Mais l'idée de SOPHUS LIE est incroyablement simple et aisée à comprendre, même pour un débutant.

SOPHUS LIE se procure une variété à quatre dimensions. Il munit les points de l'espace ordinaire de cotes. Il regarde les points de l'espace ordinaire comme projections sur notre espace de points cotés. C'est comme en géométrie descriptive, où l'on traite la stéréométrie à l'aide des points cotés d'un plan.

Eh bien! Supposons un plan xy et un point réel ou imaginaire (x_1+ix_2, y_1+iy_2). Ce point sera représenté de cette manière: *Dans un système tri-rectangle* $\mathrm{O}-\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{y}_1$ *on munit le point* B: $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{y}_1)$ *de la cote* y_2. Le vecteur $[OA]$, où A est le point $(x_1, x_2, 0)$, a la valeur $x=x_1+ix_2$. Le plan X_1X_2 est la représentation de l'axe des x. Les points du plan X_1Y_1 avec la cote 0, sont les points ordinaires réels.

Si on a donné l'équation d'une ligne droite $x=a+by$, on peut trouver par des calculs bien simples la représentation de l'ensemble de ses points imaginaires. La projection sur notre espace ordinaire est un plan, et les lignes qui passent par des points avec les même cotes, sont les lignes de plus grande pente. LIE les appelle les raies. La connexione entre les coordonnées (a, b) de la ligne droite et la figure est celle-çi: On construit dans le plan X_1X_2 les deux vecteurs $[OA]=a$ et $[AB]=b$. Alors la raie de zéro passe par A et par le point C, qui est au-dessus du point B dans l'hauteur 1. On obtient la trace dans le plan x_1x_2 de la raie avec cote 1, en tournant $[AB]$ 90° autour de A. Toute la figure est déterminée par sa raie de zéro.

SOPHUS LIE transforme les théorèmes de la géométrie plane en des théorèmes sur les lignes droites de l'espace. Cela est pourtant trop difficile pour le commençant. Mais par un petit changement la représentation peut être rapprochée de la théorie ordinaire des quantités imaginaires dans le plan de Gauss.

Je représente dans le plan XY la ligne droite imaginaire $x=a+by$ par le vecteur $[AB]=b$, aboutissant du point A, où $[OA]=a$. J'appelle le vecteur $[AB]$ le vecteur caractéristique de la ligne droite. Quelle valeur a l'ordonnée y pour un point de la ligne et avec l'abscisse $x=[OP]$? On a l'équation

$$\frac{y}{x-a}=\frac{1}{b}.$$

Cela veut dire: si on construit le vecteur $[PQ]=y$ et le vecteur $[BC]=1$, *les deux triangles APQ et ABC seront semblables.*

Je représente le point (x, y) par le vecteur $[PQ]$. Les triangles « sous lesquels on voit » tous les vecteurs représentant les points de la ligne droite, sont semblables au triangle caractéristique ABC de la ligne droite. C'est la même image que donne aussi une transformation d'homothétie avec rotation autour de A.

De la même manière on obtiendra, dualistiquement, que tous les vecteurs représentant les lignes droites d'un faisceau (sommet (x, y)) seront vus du point $P([OP]=x)$ sous un triangle de forme constante. Tous les triangles sont semblables au triangle PQR, où $[PQ]=x$ et $[QR]=-1$.

La distance entre les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Soient $[OA]=x_1$, $[AB]=y_1$, $[OC]=x_2$, $[CD]=y_2$. Je construis le parallélogramme $ACDE$. Alors $[AC]=x_2-x_1=[ED]$ et $[BE]=y_2-y_1$. Cela veut dire

$$d^2=[DE]^2+[EB]^2.$$

Je finirai par chercher la distance entre deux points sur une ligne isotrope. Soit $[OI]=-i$, le vecteur caractéristique de la ligne isotrope $y=ix$. Son triangle caractéristique OIK est isoscèle et rectangle. Soient $[P_1Q_1]$ et $[P_2Q_2]$, deux vecteurs représentant deux points sur la ligne isotrope. Je tire $P_2Q_3=$ et $\mp P_1Q_1$. Alors $Q_1Q_3=Q_3Q_2$ et $\angle Q_2Q_3Q_1=90^{\circ}$. Mais alors on a $[Q_1Q_3]^2+[Q_3Q_2]^2=0$.

Je crois que l'élève comprendra mieux le sens et le contenu vrai du théorème sur la distance zéro entre deux points sur une ligne isotrope, quand il aura vu cette démonstration. L'apparence de paradoxe disparaîtra.

En somme je pense qu'il serait bon d'apprendre aux élèves du gymnase que l'on peut se figurer les points imaginaires comme des points cotés dans l'espace. Dans l'enseignement élémentaire des universités on peut rapprocher la théorie des quantités imaginaires dans le plan de Gauss de la géométrie analytique de la manière que je viens d'indiquer.