NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Sur l'emploi des imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 163-175.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__163_0>

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE;

PAR M. LAGUERRE (*).

DÉFINITION DES DROITES ISOTROPES ET DES OMBILICS. — COORDONNÉES ISOTROPES. — REPRÉSENTATION D'UN POINT IMAGINAIRE. — DISTANCE DE DEUX POINTS IMAGINAIRES.

1. Dans tout ce qui suit, je considérerai toujours un plan *réel* et les figures tracées dans ce plan. Plus tard, en traitant de la Géométrie de l'espace, j'examinerai quelles modifications et quelles restrictions on doit apporter aux résultats obtenus, quand on veut les appliquer à des plans imaginaires et aux figures tracées dans ces plans.

Considérons donc un plan réel, et dans ce plan deux axes rectangulaires réels Ox et Oy, auxquels nous rapporterons les points du plan suivant la méthode de Descartes.

Soient A un point quelconque de ce plan, α et β ses coordonnées réelles ou imaginaires.

L'équation d'un cercle ayant ce point pour centre et la longueur ρ pour rayon sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2.$$

Si nous supposons que le rayon ρ décroisse indéfiniment jusqu'à devenir nul, la courbe représentée par l'équation précédente variera de forme, en demeurant toujours un cercle. A la limite, pour $\rho=0$, elle représentera un

(*) Nous reproduisons ici la première leçon du cours de Géométrie supérieure, professé cette année par M. Laguerre à la salle Gerson, et dont nous devons la rédaction à l'obligeance de l'auteur.

cercle de rayon nul; remarquons que, dans ce cas, le premier membre de son équation se décompose en deux facteurs

$$(y-\beta)+(x-\alpha)i$$

et

$$(y-\beta)-(x-\alpha)i;$$

en sorte que, en réalité, le cercle de rayon nul ayant pour centre le point réel ou imaginaire dont les coordonnées sont α et β se décompose en deux droites dont les équations sont

$$(y-\beta)=i(x-\alpha)$$

et

$$(y-\beta)=-i(x-\alpha).$$

Ces droites remarquables, en lesquelles se décompose un cercle lorsque son rayon devient nul, sont caractérisées évidemment par cette propriété très-simple d'avoir respectivement $+i$ et $-i$ pour coefficient angulaire.

Si donc l'on imagine tracées dans le plan toutes les droites analogues que l'on obtiendrait en considérant tous les cercles de rayon nul ayant pour centres les différents points du plan, l'on voit que toutes ces droites formeront dans le plan deux systèmes de droites parallèles.

Pour l'un de ces systèmes, le coefficient angulaire est $+i$, en sorte que la droite de ce système qui passe par le point (α, β) a pour équation

$$(y-\beta)=(x-\alpha)i;$$

je dirai que cette droite est la droite *isotrope du premier système* passant par le point (α, β). Toutes les droites isotropes du premier système étant parallèles entre elles concourent en un même point de l'infini, qui est défini par le coefficient angulaire commun à ces droites; dans tout ce qui suit, je désignerai constamment ce point de la droite de l'infini par la lettre **I**.

Pour l'autre système, le coefficient angulaire est $-i$, en sorte que la droite de ce système qui passe par le point (α, β) a pour équation

$$(y-\beta)=-i(x-\alpha);$$

je dirai que cette droite est la droite *isotrope du second système* passant par le point (α, β). Toutes les droites de ce second système concourent en un même point de la droite de l'infini, que je désignerai constamment par la lettre J.

2. Il était nécessaire, vu l'importance des droites remarquables que je viens de mentionner, de leur donner un nom spécial, bref et expressif. L'expression de droite *isotrope*, n'ayant pas encore de signification en Géométrie, m'a paru convenable pour atteindre ce but; elle se justifie en remarquant que l'équation d'une quelconque de ces droites, comme il est facile de le vérifier, ne change pas de forme lorsque, conservant la même origine pour les axes, on passe du système d'axes primitif à un autre système d'axes rectangulaires quelconques.

Une propriété essentielle de droites isotropes, et qui pourrait servir à les définir, est la suivante : la distance entre deux points quelconques d'une droite isotrope *situés à distance finie dans le plan* est nulle. En d'autres termes, ces droites satisfont à l'équation différentielle

$$ds=0.$$

Sur une surface quelconque, on peut étudier les courbes qui satisfont à cette équation différentielle; ces courbes sont des lignes géodésiques de la surface, et nous leur donnerons aussi le nom de *lignes isotropes*.

Les deux points remarquables de la droite de l'infini vers lesquels convergent les deux systèmes de droites isotropes d'un plan, et que nous avons désigné par les lettres I et J, méritent aussi, vu leur fréquent usage, une dénomination simple et concise; je les désignerai sous le nom d'*ombilics du plan*; ces points jouent, en effet, dans le plan, le même rôle que jouent, dans la théorie des surfaces du second ordre, les ombilics de ces surfaces situés à l'infini.

3. De ce qui précède, il résulte que par chaque point du plan réel ou imaginaire passent deux droites isotropes, l'une du premier système et l'autre du second système, et que ces droites peuvent être obtenues en joignant le point donné aux deux ombilics du plan.

Les deux droites isotropes passant ainsi par un point A forment, dans leur ensemble, un cercle de rayon nul qui jouit de toutes les propriétés du cercle. Voici celles de ces propriétés sur lesquelles je m'appuierai principalement :

« Si une droite menée par un point B du plan coupe, aux points m et m', les deux droites isotropes issues d'un point A, le produit des segments Bm et Bm' est égal au carré de la longueur BA.

» Les choses étant posées comme précédemment, la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite Bmm' a pour pied le point milieu du segment mm'. »

Le cercle ainsi formé par les deux droites isotropes passant par un point A ne contient évidemment d'autre point réel que le point A, si ce point est réel. Examinons ce qui se passe lorsque le point A est imaginaire.

On peut d'abord remarquer que toute droite imaginaire du plan contient un point réel. En effet, son équation, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire, peut se mettre sous la forme

$$P + Qi = 0.$$

D'où l'on voit que le point réel, qui est l'intersection des deux droites réelles $P = o$ et $Q = o$, se trouve sur la droite proposée. Toute droite imaginaire contient donc toujours un point réel, qui peut être à l'infini, lorsque les droites $P = o$ et $Q = o$ sont parallèles; dans ce cas, la droite imaginaire passe par un point réel de la droite de l'infini, ou, autrement dit, a une direction réelle. Il est d'ailleurs évident qu'une droite imaginaire ne peut contenir qu'un seul point réel.

Je dirai que deux points sont *imaginairement conjugués* lorsque leurs coordonnées sont respectivement des quantités imaginairement conjuguées; que deux droites sont imaginairement conjuguées, lorsque l'on peut passer de l'équation de l'une à l'équation de l'autre en changeant $+i$ en $-i$, et réciproquement.

De cette définition, il résulte immédiatement que:

1° Si un point se trouve sur une droite imaginaire D, le point qui lui est imaginairement conjugué se trouve sur la droite imaginairement conjuguée à D;

2° Deux droites imaginairement conjuguées se coupent en un point réel;

3° Deux points imaginairement conjugués sont toujours situés sur une même droite réelle, et cette droite est évidemment la seule droite réelle qu'on puisse faire passer par chacun des deux points.

Cela posé, si, par un point A on mène une droite isotrope du premier système, cette droite contient un point réel a, qui sera d'ailleurs à distance finie, puisque la droite isotrope a une direction imaginaire et coupe la droite de l'infini à l'ombilic I; de même la droite isotrope du second système, passant par le point A, contient un point réel a', situé également à distance finie.

On voit que le point A détermine complétement les deux points a et a'; réciproquement, ces deux derniers points déterminent sans ambiguïté le point A, car ce dernier point est l'intersection de la droite isotrope du premier système passant par a avec la droite isotrope du second système passant par a'.

Nous pourrons donc fixer sans ambiguïté la position d'un point imaginaire dans le plan, par la position des deux points réels a et a', ou, si l'on veut, par la position du segment aa'; nous dirons que aa' est le *segment représentatif* du point imaginaire A, que a est l'origine de ce segment, et que a' en est l'extrémité.

Il est très-important d'établir que ce segment représentatif d'un point est toujours le même, quels que soient les axes du plan auxquels on l'ait rapporté.

Soient, à cet effet, α et β les coordonnées imaginaires d'un point A, et, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire,

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' i,$$
$$\beta = \beta' + \beta'' i.$$

La droite isotrope du premier système passant par ce point a pour équation

$$(y - \beta' - \beta'' i) = (x - \alpha' - \alpha'' i) i;$$

les coordonnées a_0 et b_0 du point réel a situé sur cette droite sont évidemment

$$a_0 = \alpha' - \beta'',$$

et

$$b_0 = \beta' + \alpha''.$$

Changeons maintenant de système d'axes rectangulaires, en transportant leur origine au point (ξ, η) et, en les faisant tourner de l'angle ω, les formules de transformation à employer seront les suivantes :

$$X = \xi + x\cos\omega - y\sin\omega,$$
$$Y = \eta + x\sin\omega + y\cos\omega.$$

Les nouvelles coordonnées du point A seront, dans ce nouveau système

$$\xi + (\alpha' + \alpha'' i)\cos\omega - (\beta' + \beta'' i)\sin\omega$$

et

$$\eta + (\alpha' + \alpha'' i)\sin\omega + (\beta' + \beta'' i)\cos\omega.$$

Les coordonnées du point réel situé sur la droite isotrope du premier système passant par ce point seront, d'après les formules précédentes,

$$a'_0 = \xi + \alpha'\cos\omega - \beta'\sin\omega - \alpha''\sin\omega - \beta''\cos\omega$$

et

$$b'_0 = \eta + \alpha'\sin\omega + \beta'\cos\omega + \alpha''\cos\omega - \beta''\sin\omega,$$

ou bien

$$a'_0 = \xi + a_0\cos\omega - b_0\sin\omega$$
$$b'_0 = \eta + a_0\sin\omega + b_0\cos\omega.$$

L'on voit que a'_0 et b'_0 se déduisent de a_0 et de b_0 par les formules de transformation données ci-dessus; la proposition est donc démontrée.

4. Cette proposition justifie l'emploi du segment aa' pour représenter le point imaginaire A. La position de ce segment ne dépend que de la position du point imaginaire lui-même, et nullement du choix des axes coordonnés, que nous n'aurons plus dès lors à considérer que pour éclaircir et établir avec plus de sûreté quelques formules fondamentales.

Je désignerai, dans tout ce qui suit, un point imaginaire par une simple lettre, ou, lorsque l'on voudra mettre en évidence les éléments réels qui le déterminent, par son segment représentatif; en sorte qu'un point imaginaire A, ayant pour segment représentatif aa', sera représenté par la notation (a, a').

Aux considérations qui précèdent, j'ajouterai les réflexions suivantes. Quand un point est réel, les deux extrémités du segment qui le représentent se confondent avec ce point lui-même. Le cas d'un point réel est donc contenu dans le cas général d'un point imaginaire.

Soient A un point imaginaire, aa' son segment représentatif; si l'on imagine menée par a une droite isotrope du second système, cette droite sera imaginairement conjuguée à la droite $\mathrm{A}a$; de même, si par a' on mène une droite isotrope du premier système, cette droite sera imaginairement conjuguée à la droite $\mathrm{A}a'$.

Les deux droites ainsi obtenues se coupent en un point A' qui est évidemment le point imaginairement conjugué du point A, et qui sera représenté par le segment $a'a$.

D'où cette proposition : Si (a, a') désigne un point imaginaire, (a', a) désigne le point qui lui est imaginairement conjugué.

D'où encore les conséquences suivantes, que je me borne à mentionner à cause de leur simplicité :

1° La droite réelle qui joint deux points imaginairement conjugués est perpendiculaire au segment qui représente à la fois ces deux points et elle passe par le milieu de ce segment;

2° Si un point imaginaire est situé sur une droite réelle D, et si l'on connaît l'origine a de son segment représentatif, il suffira pour obtenir l'extrémité de ce segment, d'abaisser de l'origine une perpendiculaire sur D et de prolonger cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même.

5. Dans le cours de ces leçons, lorsque, pour plus de clarté ou pour développer certains points particuliers, j'aurai recours à la Géométrie analytique, j'emploierai de préférence un système de coordonnées particulier, déjà employé du reste avec succès par divers géomètres,

et que je désignerai sous le nom de *coordonnées isotropes*.

Pour le définir, considérons un point quelconque O du plan, et menons par ce point dans un sens déterminé une droite indéfinie $O\omega$, que j'appellerai l'*axe des coordonnées*, le sens positif de cet axe étant fixé par ce qui précède.

Par un point quelconque du plan A, menons une droite isotrope du premier système, et soit α le point de rencontre de cette droite avec l'axe; désignons de même par β le point de rencontre de l'axe avec la droite isotrope du second système passant par le point A. Je prendrai pour coordonnées les deux longueurs $O\alpha$ et $O\beta$, qui définissent évidemment la position du point A, et je poserai $O\alpha = u$, et $O\beta = w$.

Les formules relatives aux coordonnées isotropes sont faciles à établir; je me bornerai aux suivantes, dont je vais me servir tout à l'heure.

Si nous rapportons la figure à des axes rectangulaires, en prenant $O\omega$ pour axe des x, et la perpendiculaire en O pour axe des y, et si, de plus, nous désignons par x et y les coordonnées du point A dans ce nouveau système, l'on voit immédiatement que l'on a

$$u = x + yi,$$
$$w = x - yi.$$

Soient deux points du plan a et a', et ici je les suppose *essentiellement réels*; soient respectivement x, y et x', y', u, w et u', w' leurs coordonnées dans les deux systèmes.

On a les formules connues

$$x' - x = aa' \cos\lambda,$$
$$y' - y = aa' \sin\lambda,$$

formules dans lesquelles aa' est *essentiellement positif*, et où λ désigne l'angle qu'il faut faire décrire au segment aa', en le faisant tourner autour du point a, dans le sens des aiguilles d'une montre (*), jusqu'à ce que la *direction positive* de cette droite devienne parallèle à la *direction positive* de l'axe $O\alpha$. J'entends ici par direction positive de la droite aa', la direction dans laquelle se mouvrait un point mobile allant du point a au point a', sans passer par l'infini.

Il est clair que par la définition qui précède, l'angle λ est défini à un multiple près d'une circonférence entière.

Multiplions maintenant la deuxième des relations précédentes par i, ajoutons-la à la première; retranchons-les ensuite l'une de l'autre, on obtiendra les deux équations fondamentales suivantes :

$$(1) \qquad u' - u = aa' \,.\, e^{\lambda i},$$

$$(2) \qquad w' - w = aa' \,.\, e^{-\lambda i},$$

équations où aa' et λ ont le sens que j'ai fixé précédemment.

Des deux équations précédentes découlent les deux qui suivent :

$$(3) \qquad \frac{u' - u}{w' - w} = e^{2\lambda i},$$

$$(4) \qquad (u' - u)(w' - w) = \overline{aa'}^2 .$$

Je ferai remarquer, en terminant, que les formules précédentes subsistent même quand les points a et a' sont imaginaires, mais alors il est très-délicat de fixer la valeur précise de l'angle λ.

La formule (4) seule peut être employée sans ambiguïté, car elle détermine le carré de la distance des deux

(*) C'est ce que, durant tout ce Cours, j'appellerai le *sens direct de rotation*.

points, carré qui a par lui-même une valeur parfaitement déterminée.

6. *Évaluation de la distance de deux points imaginaires.*

Soient deux points imaginaires A et B, et soient respectivement u, w et u', w' leurs coordonnées isotropes. Désignons de plus par aa' le segment représentatif du point A, et par bb' le segment représentatif du point B; autrement dit, posons $A = (a, a')$ et $B = (b, b')$.

La formule (4) du paragraphe précédent pouvant être employée même pour des points imaginaires, l'on a

$$\overline{AB}^2 = (u - u')(w - w').$$

Je remarque maintenant que, pour les deux points A et a, la coordonnée u a la même valeur; il en est de même relativement aux deux points B et b; cela résulte évidemment de la définition même des points a et b. Les points a et b étant réels, on peut leur appliquer la formule (1) du paragraphe 5, et l'on a

$$u' - u = ab \,.\, e^{\lambda i},$$

ab étant pris en valeur absolue, et λ désignant l'angle dont il faut faire tourner la direction ab pour l'amener à être parallèle à la direction positive de l'axe.

De même les deux points A et a', ainsi que les deux points B et b' ayant respectivement pour la coordonnée w la même valeur, l'on a sans ambiguïté

$$w' - w = a'b' \,.\, e^{-\theta i},$$

$a'b'$ étant pris en valeur absolue, et θ désignant l'angle dont il faut faire tourner la direction $a'b'$ pour l'amener à être parallèle à la direction positive de l'axe.

Des relations précédentes, on déduit immédiatement

$$(u' - u)(\omega' - \omega) = \overline{\mathrm{AB}}^2 = ab \,.\, a'b' \,.\, e^{(\lambda-\theta)i},$$

ou en posant $\lambda - \theta = \mu$,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = ab \,.\, a'b' \,.\, e^{\mu i}.$$

Il est clair que l'angle μ est l'angle dont il faut faire tourner la direction ab, autour du point a et dans le sens direct, pour l'amener à être parallèle à $a'b'$.

On a donc la proposition fondamentale suivante :

Proposition. — *Étant donnés deux points imaginaires* $\mathrm{A} = (a, a')$ *et* $\mathrm{B} = (b, b')$, *le carré de la distance de ces deux points est une quantité imaginaire dont le module est la racine carrée du produit des longueurs* ab *et* $a'b'$, *ces longueurs étant prises positivement, et dont l'argument est l'angle dont il faut faire tourner la direction* ab, *autour du point* a *et dans le sens direct, pour l'amener à être parallèle à* $a'b'$.

Remarque. La proposition précédente s'applique évidemment au cas où l'un des deux points donnés est réel, les deux extrémités du segment qui le représente se confondant alors avec ce point lui-même.

7. Deux points A et B, réels ou imaginaires, étant donnés dans un plan, on peut, comme on vient de le voir, déterminer facilement et sans ambiguïté le carré de la distance AB.

Quant à la distance AB elle-même, elle n'est déterminée qu'au signe près; ou, si l'on veut, l'argument de la quantité imaginaire qui exprime sa valeur n'est déterminé qu'à un multiple près de π.

Un segment de droite isolé ne peut, en effet, comporter par lui-même aucun signe; mais quand il se trouve sur une droite déterminée, réelle ou imaginaire, et quand on a préalablement fixé le sens que l'on est convenu de regarder comme positif sur cette droite, le segment a lui-même une valeur bien déterminée.

C'est à la détermination de cette valeur que je consacrerai la leçon suivante.