NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 14-21.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__14_1>

MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE (*);

PAR M. LAGUERRE.

I. *Généralités sur les surfaces à génératrices circulaires.*

1. On sait, depuis les travaux de Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite de l'infini. Je désignerai par I et J ces deux points remarquables que, dans une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (janvier 1865), j'ai proposé de nommer *ombilics du plan*. J'appelle *droite isotrope* toute droite du plan considéré qui passe par l'un des points I et J; l'ensemble de ces droites forme deux systèmes bien distincts, l'un composé de droites parallèles entre elles et passant par le point I, l'autre de droites également parallèles et passant par le point J.

Par tout point d'un plan passent deux droites isotropes de systèmes différents, dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Dans un plan réel, toute droite isotrope renferme un point réel et n'en renferme évidem-

(*) Une Note de l'auteur, sur le même sujet, a paru dans le journal *l'Institut*, n° 1898.

ment qu'un; c'est le point où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée (*).

Si, par un point fixe, réel ou imaginaire, on mène divers plans, chacun de ces plans contient deux droites isotropes passant par le point fixe. Les droites ainsi obtenues sont situées sur un même cône du second degré, que l'on peut aussi considérer comme une sphère de rayon nul ayant pour centre le point fixe et qui jouit de toutes les propriétés de la sphère. Ainsi, par exemple, toute section plane de ce cône est un cercle, et le centre du cercle est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le plan.

Je désignerai sous le nom de *cône isotrope* le cône ainsi formé par toutes les droites isotropes qui passent par un même point. Tous les cônes isotropes coupent le plan de l'infini suivant une même conique, commune à toutes les sphères tracées dans l'espace et que l'on peut appeler l'*ombilicale*.

Par une droite, on peut généralement mener deux plans tangents à l'ombilicale; j'appellerai ces plans *plans isotropes*. Le couple de plans isotropes, passant par une droite donnée, est coupé par un plan perpendiculaire à cette droite suivant deux droites isotropes. Par une droite isotrope, on ne peut faire passer qu'un seul plan isotrope, puisque cette droite coupe le plan de l'infini en un point de l'ombilicale.

(*) Je dis que deux points sont imaginairement conjugués, lorsque leurs coordonnées, prises par rapport à un système d'axes réels quelconque, sont des quantités imaginaires conjuguées. Un point réel est à lui-même son conjugué.

Deux courbes sont imaginairement conjuguées, lorsque les équations de chacune d'elles se déduisent des équations de l'autre en changeant le signe du symbole imaginaire i.

Une courbe réelle est à elle-même sa propre conjuguée.

2. Ces définitions établies, concevons un point imaginaire de l'espace a, et le point a' qui lui est imaginairement conjugué. Par chacun de ces points passe un cône isotrope; les deux cônes ainsi obtenus se coupent suivant un cercle réel A, dont le plan est perpendiculaire à la droite réelle qui joint les deux points imaginairement conjugués a et a'; le centre de ce cercle est le point réel O, qui est le milieu du segment aa', et, la distance Oa étant représentée par Ri, son rayon a pour valeur la grandeur réelle R.

Il est clair que les deux points imaginaires a et a' déterminent complétement le cercle A; réciproquement, étant donné le cercle réel A, par ce cercle on ne peut faire passer que deux cônes isotropes dont les sommets sont les points a et a'. La position de ce cercle dans l'espace détermine donc complétement ces deux points.

Je dirai que le cercle réel A, ainsi déterminé, est le *cercle représentatif* du couple de points imaginaires a et a', couple que je désignerai par la notation (A); réciproquement, le cercle A, déterminé comme précédemment par les deux points a et a', sera désigné par la notation (a, a').

Le cercle A ou (a, a') représente ainsi l'ensemble des deux points imaginaires conjugués a et a'; dans certaines questions, il est nécessaire de pouvoir distinguer ces deux points l'un de l'autre. A cet effet, on peut imaginer que le cercle A soit décrit dans un certain sens par un point mobile; le sens dans lequel il sera supposé décrit déterminera celui des deux points a et a' dont il sera la représentation. Afin de fixer les idées, supposons que dans un système de coordonnées quelconque, mais d'ailleurs réel, les coordonnées d'un point m soient respectivement

$$x = a + \alpha i, \quad y = b + \beta i, \quad z = c + \gamma i;$$

le sens dans lequel on supposera décrit le cercle représentatif du point m sera tel qu'un spectateur, ayant l'œil placé à l'origine des coordonnées, voie le point mobile, décrivant le cercle, se mouvoir dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ou en sens inverse, suivant que la quantité $a\alpha + b\beta + c\gamma$ est positive ou négative.

Il est évident d'ailleurs que, si cette quantité a un signe donné pour le point m, elle aura le signe contraire pour le point imaginairement conjugué m', dont les coordonnées sont

$$x = a - \alpha i, \quad y = b - \beta i, \quad z = c - \gamma i.$$

3. Dans la plupart des recherches de géométrie, on a à considérer, par couples, des points réels ou qui ne sont pas imaginairement conjugués. J'étendrai à ce cas les notions établies précédemment. Ainsi, a et b désignant deux points quelconques de l'espace, je désignerai par (a, b) le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes ayant pour sommets ces deux points ; ce cercle sera généralement imaginaire et ne deviendra réel que dans le cas, examiné précédemment, où les points considérés sont imaginairement conjugués. De même, C désignant un cercle quelconque de l'espace, je dénoterai par le symbole (C) les deux points qui sont les sommets des cônes isotropes passant par ce cercle.

4. Considérons dans l'espace une courbe géométrique quelconque, réelle ou du moins (pour le moment, je me restreindrai à ce cas de beaucoup le plus intéressant) définie par des équations réelles ; c'est-à-dire telle que, lorsqu'elle passe par un point imaginaire, elle passe également par le point imaginairement conjugué.

Étant donné un cercle réel de l'espace, ce cercle représente un couple de points imaginairement conjugués; et, pour que ces points appartiennent à la courbe donnée, il est nécessaire que le cercle satisfasse à certaines conditions déterminées par la nature de la courbe et dont l'étude forme, pour ainsi dire, un prolongement géométrique de la théorie de cette courbe elle-même. Pour éclaircir ces considérations générales et montrer les diverses questions auxquelles elles se rattachent, j'en ferai tout d'abord, et avec quelques détails, l'application aux courbes gauches qui résultent de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, en m'appuyant sur les propriétés connues des surfaces *anallagmatiques*.

5. M. Moutard a appelé surfaces anallagmatiques du quatrième ordre des surfaces qui peuvent être regardées comme l'enveloppe de sphères mobiles qui coupent orthogonalement une sphère fixe, tandis que leurs centres décrivent une surface du second degré; dans tout ce qui suit, je les désignerai simplement sous le nom de surfaces anallagmatiques; leur degré, qui est, en général, le quatrième, peut d'ailleurs s'abaisser au troisième, lorsque la surface lieu des centres des sphères mobiles est un paraboloïde, et même au second, puisque les surfaces du second degré sont comprises dans la famille des surfaces anallagmatiques.

La définition donnée ci-dessus peut être légèrement modifiée de la façon suivante. Étant donnés une sphère fixe S et un plan quelconque P coupant cette sphère suivant un cercle C, on peut, par ce cercle, faire passer deux cônes isotropes. Soient p et p' les sommets de ces cônes; ces deux points, qui, d'après ce que j'ai dit ci-dessus, pourraient être représentés par la notation (C), sont réciproques par rapport à la sphère S; pour abréger le discours, je dirai que ces deux points sont associés au plan P et, réciproquement, que le plan P est le plan associé aux points p et p' (*).

Cela posé, on peut définir une surface anallagmatique donnée R comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S, des différents plans que l'on peut mener tangentiellement à une surface du second degré A. L'intersection des surfaces S et A est une biquadratique F qui est l'une des cinq focales de la surface; les quatre autres focales correspondent aux quatre modes de génération dont la surface est susceptible (**). En chaque point m de la surface anallagmatique, la normale passe par le point où le plan associé au point m touche la surface A.

Soit G une génératrice rectiligne de cette dernière surface, et soient a, a' les points où cette génératrice s'appuie sur la focale F. On voit facilement que, tandis que le plan mobile qui sert à décrire la surface se déplace le long de la droite G en tournant autour de cette droite, les points associés au plan tangent dans ses diverses positions décrivent un cercle; et ce cercle est précisément l'intersection des deux cônes isotropes ayant pour sommets les points a et a', cercle que nous pouvons désigner par la notation (a, a'). A chaque génératrice rectiligne de A correspond donc une génératrice circulaire de R; et, comme chacun des plans tangents à la surface A passe par une génératrice rectiligne de même système que G, on voit que la surface anallagmatique peut être considérée comme engendrée par les différents cercles correspondant aux génératrices du même système que G. Aux génératrices rectilignes de A, du système différent de

(*) Voir, *Bulletin de la Société Philomathique* (mars 1868), ma Note sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques.

(**) Voir, *Bulletin de la Société Philomathique* (janvier 1868), ma Note sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques.

celui de G, correspond un autre système de sections circulaires de R; les deux systèmes ainsi obtenus forment un groupe de cercles que, pour plus de clarté, je dirai appartenir au mode de génération défini par la focale F, ou simplement à la focale F. A chacun des quatre autres modes de génération de la surface correspond un autre groupe de cercles situés sur la surface et appartenant à la focale définissant le mode de génération considéré. On peut donc définir, de la façon suivante, les surfaces anallagmatiques au moyen de leurs sections circulaires.

Étant donnée une biquadratique sphérique F, si l'on fait passer par cette courbe une surface du second degré quelconque et si, pour chaque génératrice rectiligne d'un système donné de cette surface, on construit le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes, ayant pour sommets les points où cette génératrice s'appuie sur la courbe, le lieu des cercles ainsi obtenus est une surface anallagmatique ayant F pour focale; et le système formé par ces cercles appartient à cette focale.

6. Dans ce qui précède, je n'ai fait aucune hypothèse sur la nature de la surface A, non plus que sur sa position relative par rapport à la sphère S. Les génératrices rectilignes de A peuvent être imaginaires, ou bien, étant réelles, elles peuvent traverser la sphère et la couper en deux points réels. Dans ces deux cas, les sections circulaires correspondantes de l'anallagmatique sont imaginaires. Pour qu'un cercle C, correspondant à une génératrice rectiligne, soit réel, il faut et il suffit évidemment que cette génératrice soit réelle et extérieure à la sphère; elle coupe alors cette sphère en deux points imaginairement conjugués de la focale F, et le cercle C est ce que j'ai appelé le *cercle représentatif* de ces deux points.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un système de sections circulaires d'une surface anallagmatique, appartenant à une focale F de cette surface, est réel, les points imaginaires représentés par ces cercles sont situés sur la courbe F.

Si l'on imagine toutes les surfaces anallagmatiques, qui ont pour focale une biquadratique sphérique donnée F, et toutes les sections circulaires réelles de ces surfaces qui appartiennent à F, on obtiendra les cercles représentatifs de tous les points imaginaires de la courbe F. En effet, si un cercle C représente un point imaginaire de F, la droite réelle qui joint les points imaginaires (C), détermine avec la courbe F un hyperboloïde à une nappe, et cet hyperboloïde détermine une surface anallagmatique ayant F pour focale et passant par le cercle C. D'où la conclusion suivante :

Pour qu'un cercle réel représente un couple de points imaginaires situés sur une biquadratique sphérique donnée F, *il faut et il suffit que ce cercle soit situé sur une surface anallagmatique ayant* F *pour focale et qu'il appartienne au mode de description caractérisé par cette focale.*

(*La suite prochainement.*)