MAXIMILIEN MARIE

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 329-340.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__329_1>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (¹).

11. La section complète d'un lieu $f(x, y, z) = 0$ par un plan réel se compose de la section, par ce plan, de la surface réelle et des sections effectives, par ce même plan, de toutes les conjuguées du lieu dont les cordes réelles lui sont parallèles.

Les sections par le plan considéré des conjuguées du lieu qu'il peut couper sont, dans ce plan, les conjuguées de la section de la surface réelle, si elle est effectivement coupée; et la section de la surface réelle est l'enveloppe réelle des sections des conjuguées que le plan coupe.

Ces dernières sections ont le plus souvent une autre enveloppe, imaginaire; mais cette seconde enveloppe n'est généralement pas la section par le plan considéré de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu proposé.

(¹) *Voir* t. X, p. 276.

Ainsi, par exemple, l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

est l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

représenté par les solutions de la forme

$$x=\beta\sqrt{-1},\qquad y=\beta'\sqrt{-1},\qquad z=\beta''\sqrt{-1}$$

de l'équation; mais, si l'on coupe le lieu par un plan $z=h$, les conjuguées de la section ont pour enveloppe imaginaire l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

qui n'appartient pas à la surface enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu.

Cela tient à ce que celles des cordes réelles de la surface enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu, qui seraient parallèles au plan sécant, ne seront généralement pas dans ce plan, ou ne s'y trouveront qu'en nombre limité.

Ainsi, dans l'exemple, les cordes réelles de la surface enveloppe imaginaire, qui seraient parallèles au plan $z=h$, seraient comprises dans le plan $z=0$, deux points imaginaires conjugués de la surface enveloppe imaginaire étant les extrémités d'un même diamètre de la surface.

En un point $x=\beta\sqrt{-1}$, $y=\beta'\sqrt{-1}$, $z=h$ de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1-\frac{h^2}{c^2},$$

$\frac{f'_x}{f'_y}$ est bien réel, mais ni $\frac{f'_x}{f'_z}$ ni $\frac{f'_y}{f'_z}$ ne le sont : en effet,

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\frac{\beta\sqrt{-1}}{a^2}}{\frac{\beta'\sqrt{-1}}{b^2}}$$

est bien réel, mais

$$\frac{f'_x}{f'_z} = \frac{\frac{\beta\sqrt{-1}}{a^2}}{\frac{h}{c^2}} \quad \text{et} \quad \frac{f'_y}{f'_z} = \frac{\frac{\beta'\sqrt{-1}}{b^2}}{\frac{h}{c^2}}$$

ne le sont pas.

12. Lorsqu'un plan sécant réel donne, dans la surface réelle, une section comprenant, entre autres branches, un anneau fermé, si le plan se déplace parallèlement à lui-même, cet anneau se réduit à un point au moment où le plan devient tangent à la nappe fermée de la surface réelle, et est ensuite remplacé par un anneau d'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section.

13. Le plan tangent à une conjuguée (C, C', C'') d'un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ en un point (x, y, z) de cette conjuguée est la conjuguée (C, C', C'') de l'onglet de plans

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0.$$

14. Si le premier membre de l'équation d'un lieu est décomposé en groupes de termes homogènes et représenté par

$$\varphi(X, Y, Z) + \psi(X, Y, Z) + \chi(X, Y, Z) + \ldots,$$

l'équation générale des plans asymptotes à la surface réelle et à ses conjuguées est

$$\varphi'_\alpha X + \varphi'_\beta Y + \varphi'_\gamma Z + \psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

α, β, γ formant une solution réelle ou imaginaire de l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Les conjuguées des cônes asymptotes des surfaces du second degré sont les cônes asymptotes des conjuguées de ces surfaces.

15. Le contour apparent d'une surface $f(X, Y, Z) = 0$, par rapport au plan des xy et parallèlement à l'axe des z, a pour équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad f'_z(x, y, z) = 0,$$

qui, par l'élimination de z, fourniraient l'équation

$$F(X, Y) = 0$$

du contour apparent proprement dit.

Le lieu $F(X, Y) = 0$, construit dans le plan des $[X, Y]$, se composera en général d'une courbe réelle et de toutes ses conjuguées. La courbe réelle formera le contour apparent proprement dit de la surface réelle représentée par l'équation $f(X, Y, Z) = 0$; mais les conjuguées de cette courbe $F(X, Y) = 0$ ne seront pas les contours apparents des conjuguées de la surface $f(X, Y, Z) = 0$, parce que dans les solutions correspondantes des équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad f'_z(x, y, z) = 0,$$

le rapport $\frac{\beta'}{\beta}$ des parties imaginaires de x et de y sera bien constant, mais non pas les rapports $\frac{\beta''}{\beta}$ et $\frac{\beta''}{\beta'}$ (¹).

16. Toutes celles des conjuguées d'une même surface qui la touchent en un même point (ce sont celles dont les cordes réelles sont parallèles au plan tangent en ce point) y ont pour indicatrices les conjuguées de l'indicatrice de la surface réelle au même point.

Les autres questions relatives à la courbure des surfaces imaginaires se résolvent par les mêmes méthodes que l'on emploie pour les surfaces réelles.

17. *De la cubature des surfaces, et des périodes des intégrales doubles.* — On trouvera, dans le second Volume de la *Théorie des fonctions de variables imaginaires,* tous les théorèmes préliminaires qui permettent d'établir l'équivalence des chemins qui peuvent se substituer les uns aux autres sans que la valeur de l'intégrale double soit altérée.

Ces propositions ne présentent d'autre intérêt que celui de rendre possible la démonstration *a priori* d'un

---

(¹) Si l'on coupait un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ par une série de plans réels, parallèles entre eux et à l'axe des z, les points critiques de chaque section seraient les points d'intersection, par les plans considérés, du contour apparent de la surface $f(X, Y, Z) = 0$, par rapport au plan des $[X, Y]$: et pour instituer, relativement aux intégrales doubles, une méthode analogue à celle que Cauchy a fondée pour les intégrales simples, il faudrait faire jouer au contour apparent de la surface à cuber le même rôle factice que Cauchy avait attribué aux contours apparents, par rapport à l'axe des x, des courbes à quarrer.

J'ai réalisé cette idée en 1872, dans un Mémoire qui a paru, vers 1874, dans le XLIVᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* et que l'on trouvera dans le troisième Volume de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires.*

fait que l'on peut regarder comme évident : c'est qu'une intégrale double est déterminée, à des constantes près, par ses limites, tandis qu'elle serait complètement indéterminée si elle variait d'une manière continue avec le chemin superficiel suivi pour rejoindre les limites.

Nous omettons ici ces théorèmes et nous réduisons toute la théorie à sa plus simple expression.

La quadratrice de la section d'un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ par un plan réel admet : 1°, comme périodes réelles, ω, ω', ω'', ... les aires des anneaux fermés de la section de la surface réelle, lorsqu'elle existe et qu'elle est effectivement coupée par le plan réel considéré; 2°, comme périodes imaginaires, $\omega_1\sqrt{-1}$, $\omega'_1\sqrt{-1}$, $\omega''_1\sqrt{-1}$ les produits par $\sqrt{-1}$ des aires des anneaux fermés des sections faites dans les conjuguées du lieu dont les cordes réelles sont parallèles au plan sécant, mais les aires de tous ceux de ces anneaux fermés qui sont compris entre les deux mêmes branches de la section réelle sont égales; 3°, comme périodes généralement mixtes, $\omega_2 + \omega_3\sqrt{-1}$, $\omega'_2 + \omega'_3\sqrt{-1}$, ... les valeurs de l'intégrale quadratrice, acquises dans le parcours des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section; 4° enfin, comme périodes cycliques, $\pi d^2\sqrt{-1}$, $\pi d'^2\sqrt{-1}$, $\pi d''^2\sqrt{-1}$, ... les produits par $\sqrt{-1}$ des aires des parties elliptiques évanouissantes des conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles aux asymptotes de la section.

18. Si l'on a coupé le lieu par une série de plans parallèles entre eux et distants les uns des autres de la quantité dh et que Ω soit l'une des périodes de la quadratrice de la section, $\Omega\,dh$ sera un élément d'une des périodes de la cubatrice de la surface et, pour obtenir cette période, il faudra prendre l'intégrale $\int\Omega\,dh$, entre

deux valeurs de h pour lesquelles Ω s'annule, c'est-à-dire entre deux plans tangents au lieu $f(X, Y, Z) = 0$.

19. Si la période considérée est l'aire d'un anneau fermé de la section réelle, elle engendrera un volume enveloppé par une nappe de la surface réelle, fermée dans tous les sens parallèles au plan sécant; et, si cette nappe se ferme encore dans un nouveau sens, non parallèle au plan sécant, la période engendrée sera le volume enfermé par une nappe sphéroïdale de la surface réelle.

20. Si la période considérée est le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire d'un anneau fermé de conjuguée de la section et si cet anneau engendre une nappe fermée de conjuguée de la surface proposée, la période engendrée sera le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enfermé dans la nappe fermée de la conjuguée en question.

21. *Toutes les conjuguées fermées d'une même surface, inscrites dans la même nappe de la surface réelle, enveloppent des volumes égaux.* — En effet, comparons d'abord entre elles celles de ces conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles à un même plan parallèle à l'axe des z : d'une part, les sections faites dans toutes ces conjuguées par un même plan quelconque, parallèle au plan considéré, auront toutes même aire et, d'autre part, ces sections s'évanouiront toutes dans les mêmes plans; car les courbes de contact de toutes ces conjuguées avec la surface réelle ne seront autre chose que les courbes de contact, avec cette même surface réelle, de tous les cylindres qui lui seraient inscrits parallèlement aux cordes réelles de toutes les conjuguées considérées, c'est-à-dire à toutes les droites parallèles à un même plan. Or, toutes ces courbes se couperont aux mêmes points de

la surface réelle, lesquels seront les points de contact avec cette surface réelle de ses plans tangents parallèles au plan considéré; de sorte que, déjà, toutes les conjuguées en question envelopperont des volumes égaux et, en particulier, égaux au volume enveloppé par la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles à l'axe des z.

Mais un plan parallèle à l'axe des z pourra être dirigé parallèlement aux cordes réelles d'une conjuguée quelconque, non comprise parmi les précédentes, et le volume enveloppé par cette nouvelle conjuguée fermée sera encore égal au volume enfermé par la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles à l'axe des z.

La démonstration du théorème énoncé s'étend donc à toutes les conjuguées.

Il en résulte que le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enveloppé par l'une quelconque des conjuguées fermées d'une surface réelle $f(x, y, z) = 0$, inscrites dans la même nappe réelle de cette surface, est l'une des périodes de l'intégrale cubatrice de cette surface.

Ces propositions se trouvaient déjà dans mon Mémoire de 1853 et Cauchy les énonce dans son Rapport de 1854 sur ce Mémoire.

22. Si la période considérée correspond au parcours d'un anneau fermé de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section faite dans la surface par le plan réel qui se déplace parallèlement à lui-même, cette période s'annulera lorsque le plan sécant deviendra tangent soit à la surface réelle et à l'enveloppe imaginaire des conjuguées de cette surface, si elles coexistent, soit à celle qui subsistera seule. D'ailleurs l'intégrale $\int \Omega\, dh$, évaluée entre deux valeurs de h pour lesquelles le plan mobile deviendrait tangent, soit à la surface réelle, soit à l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées, fournira une période, généralement imaginaire, de l'intégrale cubatrice du lieu considéré.

Ainsi, par exemple, si l'on rapporte un hyperboloïde à deux nappes à trois de ses diamètres conjugués, dont l'un, l'axe des z, soit le diamètre transverse, l'équation de la surface sera

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=-1.$$

Si l'on coupe la surface par un plan $z=h$, compris entre les plans tangents

$$z=-c' \qquad \text{et} \qquad z=+c',$$

la section totale aura pour équation

$$\frac{a^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=\frac{h^2}{c'^2}-1,$$

et cette équation représentera une infinité d'hyperboles ayant pour enveloppe imaginaire une courbe qui, réalisée, sera l'ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1-\frac{h^2}{c'^2};$$

la période, réelle dans ce cas, de la quadratrice de la section sera

$$\Omega=\pi a'b'\sin(\mathrm{XOY}),$$

et la période de la cubatrice du lieu, engendrée par cette période superficielle, sera

$$\int_{-c'}^{+c'}\pi a'b'\sin(xoy)\,dh\sin(\mathrm{Z},\mathrm{XOY}),$$

c'est-à-dire le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$

ou

$$\frac{4}{3}\pi abc,$$

a, b, c désignant les axes de l'hyperboloïde proposé; car tous les ellipsoïdes, tels que $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$, seront équivalents, en volume, comme on le sait.

De sorte que, dans ce cas particulier, le fait, analogue à celui de l'équivalence en volume des conjuguées fermées d'une même surface, inscrites dans une même nappe de cette surface, se présente de lui-même relativement aux lieux des enveloppes imaginaires des sections faites dans la surface par des plans parallèles de direction arbitraire; dans le cas particulier qui vient d'être examiné, les nappes fermées, lieux de ces enveloppes, entourent des volumes égaux.

Cette proposition pourrait être généralisée. Elle n'est pas indiquée dans ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires,* où la question des intégrales doubles a été prise à un tout autre point de vue.

23. Enfin, si la période considérée est une des périodes cycliques de la quadratrice de la section faite dans la surface par le plan mobile, c'est-à-dire le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire d'une ellipse indéfiniment allongée dans un sens et indéfiniment aplatie dans l'autre, elle s'annulera dans deux plans, et l'intégrale correspondante

$$\int \pi\, d^2\, dh$$

évaluée entre ces deux plans prendra une valeur numérique qui sera le produit par $\sqrt{-1}$ du volume fini d'un ellipsoïde ayant un axe infini, un axe fini et un axe infiniment petit.

J'ai donné le nom de *périodes sphériques* à ce genre de périodes de l'intégrale cubatrice d'une surface.

Soit

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) + \chi(x, y, z) + \ldots = 0$$

l'équation de la surface la plus générale de degré m, décomposée en groupes de termes homogènes, de sorte que φ, ψ, χ, ... soient des polynômes homogènes de degrés m, $m-1$, $m-2$, ...

Soient d'ailleurs

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$$

les équations d'une direction asymptotique, de sorte que

$$\varphi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

et

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z}{1}$$

soient les équations d'une parallèle à cette direction : si l'on veut avoir les intersections de cette parallèle avec la surface, on pourra remplacer dans l'équation proposée x, y et z par

$$x_0 + \alpha\rho, \quad y_0 + \beta\rho \quad \text{et} \quad \rho,$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned} &\rho^m \varphi(\alpha, \beta, 1) + \rho^{m-1}[(x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1)] \\ &\quad + \frac{\rho^{m-2}}{1.2}[x_0^2\varphi''_{\alpha^2} + 2x_0y_0\varphi''_{\alpha\beta} + y_0^2\varphi''_{\beta^2} \\ &\qquad\qquad + 2x_0\psi'_\alpha + 2y_0\psi'_\beta + 2\chi(\alpha, \beta, 1)] + \ldots = 0; \end{aligned}$$

mais le terme en ρ^m disparaîtra de lui-même, $\varphi(\alpha, \beta, 1)$ étant nul par hypothèse.

Si l'on veut exprimer que la droite

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z}{1}$$

est elle-même une asymptote, il faudra poser

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

ce qui donnera une relation entre les coordonnées x_0, y_0 de la trace sur le plan des xy d'une asymptote parallèle à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$, d'où l'on voit que les asymptotes parallèles à une même direction asymptotique sont généralement dans un même plan.

Si l'on voulait déterminer les asymptotes, parallèles à la même direction, qui rencontrent la surface en trois points situés à l'infini, il faudrait poser la nouvelle condition

$$x_0 \varphi''_{\alpha^2} + 2x_0 y_0 \varphi''_{\alpha\beta} + y_0^2 \varphi''_{\beta^2} + 2x_0 \psi'_{\alpha} + 2y_0 \psi'_{\beta} + 2\chi(\alpha, \beta, 1) = 0;$$

d'où l'on voit, comme cela avait été annoncé, que, parmi toutes les asymptotes parallèles à une même direction, il y en aura généralement deux, et deux seulement, qui rencontreront la surface en trois points situés à l'infini, ou, ce qui revient au même, que, si un plan quelconque se déplace parallèlement à lui-même, chacune des périodes cycliques de la quadratrice de la section de la surface par ce plan mobile s'annulera deux fois et deux fois seulement. (*A suivre.*)