

## Points imaginaires, droites isotropes, points cycliques

### 1/ Points imaginaires :

Plaçons nous d'abord en géométrie plane et utilisons un repère orthonormé Oxy, chaque point M étant donc représenté par son abscisse x et son ordonnée y.

En géométrie élémentaire (dans les années 1960, jusqu'en classe de "math-élèm", la terminale d'alors, le point M était "réel" (c'est-à-dire qu'on pouvait le dessiner avec un crayon sur un papier et donc le visualiser), ses coordonnées x et y étaient donc des "nombres réels" (on apprenait l'année suivante ce qu'est un nombre réel, par opposition à un nombre rationnel, par exemple).

On disposait donc d'une correspondance bi-univoque entre tous les points réels du plan et tous les couples (x,y) de nombres réels, à tel point qu'on écrivait cela

$$M=(x,y)$$

Considérons maintenant on considère non plus des nombres réels, mais des nombres complexes, donc de la forme

$$x = a + i.b$$

et

$$y = c + i.d$$

formules dans lesquelles les 4 nombres a, b, c, d sont réels et i est le nombre complexe dont le carré vaut (-1) d'argument (+p/2).

Sauf s'il on n'a

$$b=d=0,$$

un couple (x,y) ne correspond plus "un point réel du plan", mais on dira alors qu'on a à faire à un point M imaginaire (puisqu'il faut faire preuve d'imagination pour se le représenter).

L'apport de cette extension de la notion de point est qu'elle simplifie, dans certains cas, beaucoup de questions en évitant d'avoir à multiplier les "cas de figure" ; par exemple, étudiant 2 cercles, on n'aura plus à devoir étudier les 3 cas : 2 cercles distincts et non tangents seront toujours sécants en 2 points (réels ou imaginaires). C'est un peu comme avec les équations du second degré à coefficients réels : sans introduction des nombres complexes, on doit distinguer 3 cas (elles ont 2 racines, 0 racine) ; en introduisant les nombres complexes, on peut dire qu'elles ont 2 racines dans tous les cas (réelles ou complexes).

### 2/ Droites imaginaires :

Il est alors facile de définir le concept de droite imaginaire comme l'ensemble des points à coordonnées complexes liés par une relation du 1er degré, par exemple :

$$A.x + B.y + C = 0$$

dans laquelle les coefficients A, B, C sont des nombres complexes.

C'est ainsi que la droite d'équation

$$2.i.x - y + (3 - 2.i) = 0$$

est une droite imaginaire ; on note au passage qu'elle passe par un point réel, le point P (1,0) ; ceci est d'ailleurs une propriété générale puisque les coefficients A, B, C s'écrivant par exemple sous la forme :

$$A = a_1 + i.a_2$$

$$B = b_1 + i.b_2$$

$$C = c_1 + i.c_2$$

l'équation de la droite peut alors s'écrire sous la forme :

$$(a_1.x + b_1.y + c_1) + i.(a_2.x + b_2.y + c_2) = 0$$

ce qui entraîne simultanément  $(a_1.x + b_1.y + c_1) = 0$  et  $(a_2.x + b_2.y + c_2) = 0$

ce qui représente donc les équations de 2 droites, donc leur point d'intersection, situé à l'infini si elles sont

parallèles (cf. paragraphe suivant).

### 3/ Droites imaginaires et points à l'infini, droites isotropes, points cycliques, asymptotes à un cercle :

Adoptons maintenant les coordonnées homogènes, ce qui permet de traiter simplement le cas des points à l'infini et de ramener le cas de droites parallèles à celui de droites sécantes. On substitue donc les 3 coordonnées (X,Y,T) aux 2 coordonnées (x,y).

On passe du système (x,y) à l'autre de la façon suivante :

T quelconque non nul

$$X = x.T$$

$$Y = y.T$$

Et on passe du système (X,Y,T) à l'autre de la façon suivante :

si T n'est pas nul

$$x = X/T$$

$$y = Y/T$$

si T est nul, on dit alors que le point (X,Y,0) est à l'infini dans la direction de la droite d'équation

$$Y.x + X.y = 0$$

L'ensemble des points de la forme (X,Y,0) est appelé "droite de l'infini" puisque cela correspond à l'équation T=0 qui est du premier degré. Cette droite contient en particulier tous les points imaginaires ayant pour X ou pour Y un nombre complexe.

### 3/ Droites isotropes :

On appelle ainsi les droites ayant pour coefficient angulaire (+i) ou (-i). Elles ont des propriétés amusantes dont voici quelques-unes (dans ce qui suit, on va s'intéresser aux deux droites isotropes passant par l'origine, mais les propriétés trouvées seront générales à toutes les isotropes) :

- la distance de 2 points quelconques d'une même droite isotrope est nulle :

Soient  $M_1(x_1, y_1)$  et  $M_2(x_2, y_2)$  ces deux points : leur distance d est donnée par la formule :

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (i.y_1 - i.y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = 0 \text{ c.q.f.d.}$$

- les droites isotropes font le même angle avec n'importe quelle autre droite du plan (d'où leur nom) :

Soit la droite d'équation  $y = k.x$ , donc de coefficient angulaire  $k = \tan(a)$  et appelons b l'angle qu'elle fait avec la droite isotrope.

D'après la relation trigonométrique classique

$$\tan(a-b) = (\tan(a) - \tan(b)) / (1 + \tan(a).\tan(b))$$

on obtient ici :

$$\tan(b) = (\tan(a) - i) / (1 + \tan(a).i) = -i \text{ qui est indépendant de } k = \tan(a), \text{ c.q.f.d.}$$

- les points à l'infini des droites isotropes sont communs à tous les cercles du plan (appelés points cycliques)

Puisqu'on parle de points à l'infini, on utilise les coordonnées homogènes, et les points à l'infini des droites isotropes sont alors les points de coordonnées

(1, i, 0) pour le premier point

(1, -i, 0) pour le second point

Un cercle quelconque du plan a pour équation homogène ;

$$X^2 + Y^2 + a.X.T + b.Y.T + c.T^2 = 0$$

Il coupe donc la droite de l'infini, dont l'équation est T=0, en les 2 points vérifiant la relation :

$$X^2 + Y^2 = 0$$

$$\text{Or, } X^2 + Y^2 = (X + i.Y).(X - i.Y)$$

Donc, les points cherchés ont pour coordonnées  $(1, i, 0)$  et  $(1, -i, 0)$  c.q.f.d.

- tout cercle admet 2 asymptotes qui sont les droites isotropes issues de son centre :

Considérons le cercle centré en O et ayant R pour rayon ; son équation est donc :

$$X^2 + Y^2 - R^2 \cdot T^2 = 0$$

Son intersection avec l'une ou l'autre des deux droites isotropes conduit donc à

$$T^2 = 0$$

équation admettant une racine double, ce qui signifie que les deux points sont confondus et donc que la droite isotrope est tangente en ce point au cercle ; or, une tangente à l'infini à une courbe est ce qu'on appelle une asymptote, ce qui achève la démonstration.

- toute conique est tangente aux droites isotropes issues de ses foyers (de son foyer dans le cas de la parabole) :

Ceci se démontre très simplement, sur le modèle de ce qui précède, en écrivant l'équation de la conique dans un repère ayant un foyer pour origine ; on trouve alors une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + (a \cdot x + b \cdot y + c)^2 = 0$$

L'intersection de cette conique par une des deux droites isotropes issue du centre conduit alors à ;

$$(a \cdot x + b \cdot y + c)^2 = 0$$

ce qui donne un point double, donc la droite isotrope est bien tangente à la conique, c.q.f.d. démonstration.

4/ Relation dite de Laguerre entre l'angle de 2 droites et le birrapport de ces droites avec les droites isotropes :



## Relation entre l'angle de 2 droites et leur birapport avec les 2 droites isotropes issues de leur point de concours

Sont  $D$  et  $D'$  deux droites concourantes en  $O$ , et  $I$  et  $I'$  les deux droites isotropes issues de  $O$ .

On prend pour axe  $Ox$  la droite  $D$  (cf. figure). Soit  $\alpha = (D, D')$ .

On prend  $H$  tel que  $\overline{OH} = 1$ .

$$\text{On a donc } \begin{cases} \overline{HA} = \operatorname{tg} \alpha \\ \overline{HI} = i \\ \overline{HJ} = -i \end{cases}$$

Donc, le birapport  $(D', D, I, J)$  vaut

$$\begin{aligned} R(D', D, I, J) &= \frac{\overline{AI}}{\overline{AJ}} : \frac{\overline{HI}}{\overline{HJ}} = \frac{i - \operatorname{tg} \alpha}{i + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(i - \operatorname{tg} \alpha)^2}{-1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2i \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ &= \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = e^{2i\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } & R\{D', D, I, J\} = e^{2i\alpha} \\ \text{ou } & \alpha = \frac{1}{2i} \cdot \operatorname{Log} \{D', D, I, J\} \end{aligned}$$

Ces relations, dues à Laguerre, permettent de définir analytiquement l'angle de 2 droites imaginaires.

En particulier, quand  $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R\{D', D, I, J\} = -1$   
 $\Rightarrow$  2 droites perpendiculaires sont conjuguées harmoniques par rapport aux 2 droites isotropes.

### 5/ Généralisation à l'espace à 3 dimensions :

La généralisation à l'espace à 3 dimensions conduit notamment à la notion de plan à l'infini, de cône isotrope, et au fait que toutes les sphères coupent le plan de l'infini suivant un même cercle.