ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE

DE LA

PARATAXIE

ET DES

CYCLIDES

PAR

R. DONTOT

Inspecteur général
de l'Enseignement secondaire.

LIBRAIRIE VUIBERT
63, Boulevard Saint-Germain, PARIS

1945

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE

DE LA

PARATAXIE

ET DES

CYCLIDES

PAR

R. DONTOT

Inspecteur général
de l'Enseignement secondaire.

LIBRAIRIE VUIBERT

63, Boulevard Saint-Germain, PARIS

—

1945

Cette étude élémentaire de la parataxie et des cyclides a été revue et complétée par M. Maillard, professeur de spéciales au lycée Hoche à Versailles, auquel je suis heureux d'adresser ici mes très vifs remerciements.

R. DONTOT.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE DE LA PARATAXIE ET DES CYCLIDES

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DES CERCLES PERPENDICULAIRES A DEUX CERCLES DONNÉS. PARATAXIE

CHAPITRE PREMIER

ÉTUDE DES QUADRIQUES (S)

1. Notations. — Soit (O) une quadrique donnée, que nous appellerons la *quadrique directrice* ou la *directrice* tout court. Dans cette première partie, la directrice (O) est une quadrique non développable, dont l'équation dans un système d'axes quelconques est à coefficients réels.

Nous désignerons par *quadriques* (H) des quadriques non développables engendrées par des droites réelles. Nous désignerons par des lettres françaises, en général la lettre (D), avec ou sans indice, et entre parenthèses, les génératrices d'un système de la quadrique (H), appelé premier système, et par des lettres grecques (Δ) les génératrices de l'autre système de la quadrique (H), appelé le second.

Nous réserverons la notation (D') avec un accent pour désigner la droite conjuguée de la droite (D) par rapport à la quadrique directrice (O). De même, (Δ') représentera la droite conjuguée, par rapport à (O), d'une droite (Δ).

2. Rappel des propriétés de deux droites conjuguées. — Observons que si une droite (D) est une génératrice d'une quadrique (H), la droite (D') est, en général, distincte de la droite (D) : le seul cas où il n'en serait pas ainsi est le cas où la droite (D) serait commune à la quadrique (H) et à la directrice (O).

Lorsque la droite (D') est distincte de la droite (D), ces deux droites ne sont pas, en général, dans un même plan : le seul cas où il n'en serait pas ainsi est le cas où la droite (D) serait tangente à la quadrique directrice (O), en un point à distance finie ou infinie.

En particulier, si deux droites conjuguées par rapport à la directrice (O) sont deux génératrices (D) et (D') distinctes d'une même quadrique (H), elles ne sont pas dans un même plan; aucune d'elles n'est donc tangente à la directrice (O). Autrement dit, la droite (D'), par exemple, rencontre la directrice en deux points P et Q nécessairement distincts.

3. Définition des quadriques (S). — Il est clair que, si la droite (D) est une génératrice d'une certaine quadrique (H), la droite (D') n'est pas, en général, une génératrice du même système de la quadrique (H). Mais il peut arriver qu'il en soit ainsi, soit exceptionnellement pour une génératrice (D) particulière, soit de façon constante pour toutes les génératrices (D) d'un même système de la quadrique (H).

Nous dirons qu'une quadrique (H) est une quadrique (S) pour exprimer que les droites (D') conjuguées par rapport à la directrice (O) des génératrices (D) du premier système de (H) sont des génératrices du même système de cette quadrique.

Une génératrice (Δ) du second système de (H) rencontrant toutes les génératrices (D), la conjuguée (Δ') par rapport à (O) de la droite (Δ) rencontre toutes les droites (D') conjuguées des droites (D); si la quadrique (H) est une quadrique (S), les droites (D') sont des génératrices du premier système de la quadrique (H) et les droites (Δ'), qui les rencontrent toutes, sont les génératrices du deuxième système de cette quadrique.

Les quadriques (S) sont des quadriques *autopolaires* par rapport à la quadrique directrice (O), c'est-à-dire des quadriques confondues avec les quadriques polaires réciproques de celles-ci par rapport à la directrice (O). Nous rappelons que la réciproque de cette proposition est fausse; il existe des quadriques (H) autopolaires par rapport à une quadrique donnée (O) et telles que les droites (D') conjuguées par rapport à (O) des génératrices d'un système donné (D) soient des génératrices de l'autre système. Ces quadriques ne s'introduisent pas dans l'étude qui va suivre; elles sont circonscrites à la directrice (O) en tous les points d'une courbe plane.

L'objet de cette première partie est de démontrer qu'il existe des quadriques (S) et de les définir. Nous démontrerons d'abord deux théorèmes.

4. Théorème I. — **S'il existe, sur une quadrique (H), deux couples distincts de génératrices d'un même système, (D'_1), conjuguée par rapport à la directrice (O) de (D_1), (D'_2), conjuguée de (D_2), et si trois de ces quatre génératrices sont distinctes, la quadrique (H) est une quadrique (S).**

Une génératrice (Δ) du second système de la quadrique (H) rencontre les génératrices (D_1), (D'_1), (D_2), (D'_2) du premier système. La droite (Δ'), conjuguée par rapport à la directrice (O) de la droite (Δ), rencontre les quatre droites conjuguées par rapport à cette directrice des droites précédentes; elle rencontre donc les droites (D'_1), (D_1), (D'_2), (D_2). Or ces droites sont des génératrices du premier système de la quadrique (H); trois d'entre elles au moins sont, par hypothèse, distinctes; la droite (Δ'), qui les rencontre, est donc une génératrice du second système de la quadrique (H), et cette quadrique est, par conséquent, une quadrique (S).

Cette démonstration est en défaut lorsque trois des quatre droites (D_1), (D'_1), (D_2), (D'_2), ne sont pas distinctes; mais, dans ce cas, la proposition est inexacte. En effet, (D_1) est alors confondue avec sa conjuguée (D'_1), et (D_2) avec (D'_2) : les génératrices (D_1) et (D_2) sont des génératrices communes à la quadrique (H) et à la directrice (O); ces deux quadriques se coupent suivant quatre génératrices : (D_1), (D_2), (Δ_1), (Δ_2).

5. Théorème II. — **S'il n'existe sur une quadrique (H) qu'un seul couple de génératrices du premier système, (D_1) et (D'_1), conjuguées par rapport à la directrice (O), il existe un couple et un seul, (Δ_1), (Δ'_1), du second système, conjuguées par rapport à (O).**

Il n'existe pas deux couples distincts de génératrices du deuxième système conjuguées par rapport à la directrice (O), sinon la quadrique (H), ou bien serait une quadrique (S), ou bien couperait la quadrique (O) suivant quatre génératrices. Dans un cas comme dans l'autre, il y aurait deux couples distincts de génératrices (D) du premier système conjuguées par rapport à (O). Nous allons démontrer qu'il en existe un, composé de deux droites (Δ_1) et (Δ'_1), distinctes ou confondues.

Soit (D_2) une génératrice de la quadrique (H). Sa conjuguée (D'_2), n'étant pas, par hypothèse, une génératrice de cette quadrique (H), la rencontre en deux points, P et Q. Il passe par le point P une génératrice (Δ); celle-ci rencontrant (D_1), (D'_1), (D_2), (D'_2), sa conjuguée (Δ') rencontre aussi ces quatre droites : c'est donc la génératrice du second système qui passe par le point Q. Les droites (Δ) et (Δ') constituent le couple unique de génératrices du second système conjuguées par rapport à la directrice (O). Elles sont distinctes ou confondues suivant que les points P et Q sont distincts ou confondus.

6. Intersection d'une quadrique (S) et de la directrice (O). — Supposons qu'il existe une quadrique (S). Soit (D) une génératrice de cette quadrique qui coupe la directrice (O) en deux points (nécessairement distincts), P et Q; soit (Δ) une génératrice de cette quadrique du second système qui coupe (D) en M; soit (Δ') sa conjuguée qui coupe (D) en M'. Le point M' est conjugué harmonique de M par rapport à la directrice (O), c'est-à-dire par rapport aux points P et Q.

Par un point M de (D), passe une génératrice (Δ) et une seule; par le conjugué M', passe une génératrice (Δ') et une seule. Lorsque M tend vers P, M' tend aussi vers P; les droites (Δ) et (Δ') tendent vers l'unique génératrice (Γ_1) du second système qui passe par le point P; cette génératrice (Γ_1) est, par conséquent, sa propre conjuguée par rapport à la directrice (O); c'est donc une génératrice de cette quadrique (O).

La quadrique (S), si elle existe, a donc en commun avec la quadrique directrice (O) les deux génératrices (Γ_1) et (Γ_2) du second système qui passent, la première par le point P, la seconde par le point Q. Elle coupe donc cette quadrique suivant deux autres génératrices, (G_1) et (G_2), du premier système.

Nous pouvons donc affirmer que : **Si une quadrique (S) existe, elle a, avec la quadrique directrice (O), quatre génératrices communes.**

7. La réciproque de cette proposition n'est pas exacte. Soit (H) une quadrique ayant avec la quadrique (O) quatre génératrices communes. Si la quadrique (H) est une quadrique (S), elle est, par rapport à la directrice (O), sa propre polaire réciproque. Or la quadrique polaire réciproque (H') a bien avec la quadrique (H) quatre génératrices communes, mais elle est en général distincte de celle-ci. Il est même possible de préciser que ces deux quadriques font partie d'un même faisceau linéaire et que les paramètres qui les définissent se correspondent, en général, involutivement; il existe, par conséquent, deux quadriques (H) correspondant aux valeurs doubles de l'involution, qui sont confondues avec leur polaire réciproque (H'). L'une de celles-ci étant la quadrique (O) elle-même, il est donc possible de dire que, en général, une seule quadrique (H) qui a avec la directrice (O) quatre génératrices communes est sa propre polaire réciproque par rapport à (O) et par conséquent peut être une quadrique (S).

Ce raisonnement séduisant n'est évidemment qu'approximatif, car la relation involutive entre les paramètres qui définissent les quadriques (H) et (H') pourrait être décomposée. Un calcul, d'ailleurs très simple, montre qu'il n'en est rien.

8. Conclusion générale. — Nous allons démontrer que : **Toute quadrique, qui coupe la quadrique directrice (O) suivant quatre génératrices et qui est sa propre polaire réciproque par rapport à cette quadrique (O), est une quadrique (S).**

Soit (D) une génératrice quelconque de cette quadrique : cette droite rencontrant les génératrices (Γ_1), (Γ_2) communes à la quadrique et à la directrice (O), sa conjuguée (D') les rencontre aussi; mais, la quadrique étant sa propre polaire réciproque par rapport à la directrice (O), (D') est une génératrice de cette quadrique : elle rencontre (Γ_1), (Γ_2); elle est donc comme (D) du premier système.

Il existe sur la quadrique donnée une infinité de couples de génératrices d'un même système conjuguées, donc (2) la quadrique est une quadrique (S).

Par quatre génératrices de la quadrique directrice formant un quadrilatère gauche, il passe donc une seule quadrique (S).

9. Détermination des quadriques (S) passant par une droite donnée. — Nous allons démontrer le théorème suivant :

Par une droite (D) donnée, qui coupe la quadrique directrice (O) en deux points P et Q distincts, il passe une infinité de quadriques (S), formant deux faisceaux linéaires.

La droite (D'), conjuguée de (D), doit être une génératrice du premier système des quadriques cherchées : en outre, celles-ci doivent couper la directrice (O) suivant quatre génératrices. Faisons choix arbitrairement de deux génératrices de la directrice (O) de même système (Γ_1), (Γ_2), passant la première par P, la seconde par Q; ces génératrices rencontrent en P' et en Q' la droite (D'). Les quadriques (S) que nous cherchons ne peuvent être que des quadriques passant par l'un des deux quadrilatères gauches formés par (D), (D') et par un des couples (Γ_1), (Γ_2).

Nous allons démontrer que toute quadrique (H) passant par un de ces quadrilatères est une quadrique (S).

Toute quadrique passant par (D) et (D') peut être engendrée par une droite (Δ) qui joint un point M de la droite (D) à un point M' de la droite (D'), ces deux points se correspondant homographiquement.

Nous obtiendrons, en particulier, la quadrique (H) qui passe par (Γ_1), (Γ_2) et par une droite particulière (Δ_1) ou $M_1M'_1$, arbitrairement choisie, en choisissant la relation homographique entre M et M′, définie par l'égalité

$$(1) \qquad (M, M_1, P, Q) = (M', M'_1, P', Q').$$

Soit (Δ') la droite conjuguée de (Δ); elle rencontre en N la droite (D) et en N′ la droite (D′); les points N et M d'une part, N′ et M′ d'autre part, sont conjugués par rapport à la directrice (O); N et M étant conjugués, par conséquent, par rapport aux points P et Q, la relation

$$(M, M_1, P, Q) = -(N_1, M_1, P, Q)$$

est satisfaite; on a de même

$$(M', M'_1, P', Q') = -(N', M'_1, P', Q').$$

Ces deux égalités entraînent

$$(N, M_1, P, Q) = (N', M'_1, P', Q'),$$

ce qui démontre que la droite NN′ est une génératrice de la quadrique (H). La quadrique (H) est donc bien (2) une quadrique (S).

10. Réalité des génératrices de (S) lorsque la directrice (O) est une sphère. — Nous n'avons pas cherché, au cours des démonstrations précédentes, à distinguer si les quadriques (S) dont nous avons parlé avaient bien leurs génératrices réelles, comme l'impose la définition. Nous allons chercher à quelle condition la quadrique (S) définie au § 9 remplit cette condition *lorsque la directrice* (O) *est une sphère.*

Les droites (D) et (D′) sont, par hypothèse, réelles; les points M_1 et M'_1 sont également réels par hypothèse. Les droites (D) et (D′) étant conjuguées par rapport à (O), nous sommes amené à distinguer deux cas :

1° *Sphère directrice* (O) *réelle.* — P et Q peuvent être supposés réels, et P′, Q′ imaginaires conjugués. Il est impossible, dans ce cas, de faire correspondre à un point M réel un point M′ réel de manière que l'égalité

$$(1) \qquad (M, M_1, P, Q) = (M', M'_1, P', Q')$$

soit satisfaite, puisque le premier membre est réel et le second complexe ou égal à 1. La quadrique définie au § 9 n'est donc pas réelle.

2° *Sphère directrice* (O) *imaginaire.* — P et Q sont imaginaires conjugués; P′ et Q′ le sont également. Supposons que M soit un point réel : les nombres complexes $\dfrac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}$, $\dfrac{\overline{M_1P}}{\overline{M_1Q}}$, $\dfrac{\overline{M'_1P'}}{\overline{M'_1Q'}}$ ont pour module 1; donc le nombre complexe $\dfrac{\overline{M'P'}}{\overline{M'Q'}}$, défini par l'égalité (1), a également pour module 1, et, comme P′ et Q′ sont imaginaires conjugués, le point M′ est réel. La droite MM′, réelle, engendre dans ce cas une quadrique (S) à génératrices réelles.

La condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique (S) définie au § 9 soit réelle est que la sphère directrice (O) soit imaginaire.

11. Exercice I : *Trouver les quadriques* (S) *relatives à une directrice donnée* (O), *d'équation (axes rectangulaires)* : $x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0$.

Choisissons, comme axes, des axes parallèles aux directions principales des quadriques inconnues (S), dont l'équation sera par conséquent de la forme

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0.$$

Nous supposerons d'abord a, a', a'' différents de zéro.

Écrivons d'abord que la quadrique (S) est sa propre polaire réciproque par rapport à la sphère (O); pour cela, écrivons que le premier membre de l'équation tangentielle de la quadrique cherchée

$$\left(\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{a'} + \frac{w^2}{a''}\right)\left(\frac{c^2}{a} + \frac{c'^2}{a'} + \frac{c''^2}{a''} - d\right) - \left(\frac{cu}{a} + \frac{c'v}{a'} + \frac{c''w}{a''} - h\right)^2 = 0$$

et le premier membre de l'équation tangentielle de la polaire réciproque

$$(au^2 + a'v^2 + a''w^2)R^4 + 2(cu + c'v + c''w)R^2h + dh^2 = 0$$

sont proportionnels.

Ceci nous amène à supposer $c = 0$, $c' = 0$ et $c'' \neq 0$. Les égalités

$$\frac{\dfrac{c''^2}{a''} - d}{a^2R^4} = \frac{\dfrac{c''^2}{a''} - d}{a'^2R^4} = \frac{-d}{a''^2R^4} = \frac{1}{a''R^2} = \frac{-1}{d},$$

qui expriment la proportion, entraînent elles-mêmes, φ étant un paramètre variable,

$$a'' = a\sin\varphi, \quad c'' = aR\cos\varphi, \quad d = -aR^2\sin\varphi, \quad a' = \pm a.$$

Les seules quadriques à génératrices réelles dont les coefficients satisfont à ces égalités ont pour équation

$$(2) \qquad x^2 - y^2 + z^2 \sin\varphi + 2Rz\cos\varphi - R^2\sin\varphi = 0;$$

ce sont des hyperboloïdes, $\sin\varphi$ étant différent de zéro par hypothèse, qui coupent la directrice, ainsi qu'on le vérifiera sans peine, suivant quatre génératrices, isotropes naturellement, et qui sont autopolaires par rapport à la directrice (O). Ce sont donc bien des quadriques (S).

L'hypothèse $c = 0$, $c' = 0$, $c'' = 0$ conduit à des quadriques dont l'équation s'obtient en faisant, dans l'équation (2), $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

L'hypothèse $a'' = 0$ conduirait de même au cas $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.

Autrement dit, *l'équation* (2) *représente toutes les quadriques* (S) *relatives à la sphère directrice* (O) *donnée, rapportée à des axes particuliers.* Elles dépendent donc de quatre paramètres, savoir φ et les trois paramètres qui fixent la position du trièdre $Oxyz$.

12. Exercice II : *La quadrique* (O) *ayant pour équation*

$$\text{(O)} \qquad x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0,$$

trouver toutes les quadriques (S) *contenant* Ox.

Suivons les indications du nº **9**. Ox jouant le rôle de (D), la droite conjuguée (D') sera la droite de l'infini du plan yOz :

$$\text{(D')} \quad \begin{cases} x = 0, \\ t = 0, \end{cases} \qquad \text{(D)} \quad \begin{cases} z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

En outre, les surfaces (S) passeront par les génératrices de même système issues des points de rencontre de Ox avec (O). Pour l'un des systèmes, l'on trouve les génératrices (Γ_1) et (Γ_2), d'équations

$$(\Gamma_1) \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = z, \end{cases} \qquad (\Gamma_2) \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -z. \end{cases}$$

Finalement, on obtient le faisceau de quadriques (S_1) :

$$(S_1) \qquad zx - y + \lambda(xy - z) = 0.$$

En prenant l'autre système de génératrices, on trouve les quadriques (S_2) :

$$(S_2) \qquad zx + y + \lambda'(xy + z) = 0.$$

Si l'on prend, en particulier, la quadrique

$$(S_0) \qquad xz - y = 0,$$

on peut vérifier facilement que son intersection avec (O) se compose de quatre génératrices, et que la droite conjuguée de la génératrice G_h

$$\begin{cases} z = h, \\ y = hx \end{cases}$$

est la génératrice $G_{\frac{1}{h}}$.

CHAPITRE II

ÉTUDE DES SPHÈRES ET DES CERCLES ORTHOGONAUX A UNE SPHÈRE DONNÉE

13. Notations. — Soit (O) une sphère donnée, dont l'équation, rapportée à des axes rectangulaires, est

$$x^2 + y^2 + z^2 + c = 0.$$

Cette sphère est appelée la *directrice* d'un système de sphères et de cercles qui lui sont orthogonaux et que nous nous proposons d'étudier.

Une sphère orthogonale à la directrice est définie quand on se donne son centre A : nous la représenterons par la notation : sphère (A). Cette sphère est réelle, sauf lorsque, la directrice étant réelle, le point A est à l'intérieur de la directrice. (Le point A est, par hypothèse, un point réel.)

Un cercle orthogonal à la directrice est défini quand on se donne son axe (D). La droite (D) est supposée réelle; le plan du cercle est le plan mené par O perpendiculaire à (D); il est donc réel. Le centre du cercle est aussi réel; mais le cercle n'est réel que si la droite (D) ne coupe pas la directrice, ce qui se produit soit quand la directrice est imaginaire, soit quand elle est réelle et que la droite (D) est extérieure à la directrice.

Les sphères passant par un cercle (D) *orthogonal à* (O) sont définies par leurs centres, qui sont des points de la droite (D). En particulier, les sphères de rayons nuls (P) et (Q) passant par ce cercle sont représentées par les points P et Q réels ou imaginaires, où la droite (D) coupe la directrice.

Les cercles d'une sphère (A) *orthogonale à* (O) sont représentés par leurs axes (D) qui sont des droites passant par A. La condition pour que deux cercles (D) et (Δ) orthogonaux à (O) soient sur une même sphère est que les droites (D) et (Δ) aient un point commun A; la condition pour qu'ils soient dans un même plan est que (D) et (Δ) soient parallèles.

14. Angle de deux sphères (A) et (B). — Nous appellerons angle V de deux sphères sécantes le plus petit angle positif V que font les droites joignant un point commun M aux centres A et B de ces deux sphères.

Soient P et Q les points où la droite AB coupe la directrice; ces points sont les centres des sphères de rayons nuls qui passent par le cercle commun aux sphères sécantes (A) et (B); les droites MP, MQ, rayons de ces sphères, sont des droites isotropes, et par conséquent *le birapport* (A, B, P, Q) *a pour valeur soit* $\cos 2V + i \sin 2V$, *soit* $\cos 2V - i \sin 2V$.

En particulier, **la condition nécessaire et suffisante pour que deux sphères (A) et (B) soient orthogonales est que leurs centres soient conjugués par rapport à la directrice.**

15. Angle d'une sphère (A) et d'un cercle (D) sécants. — Nous appellerons angle u d'une sphère (A) et d'un cercle (D) ayant deux points communs M et M', le plus petit angle positif que fait en M ou en M' la tangente au cercle avec le plan tangent à la sphère. Une inversion de pôle M transforme la sphère (A) en un plan (α) et le cercle (D) en une droite (δ) : l'angle u est un des angles de la droite (δ) et du plan (α). Pour calculer cet angle, menons par (δ) un plan (β) (le plan, s'il n'y en a qu'un) perpendiculaire au plan (α) et un plan (γ) perpendiculaire au plan (β). L'angle u est alors un des angles des plans (α) et (γ); les plans (β) et (γ) sont les figures inverses de sphères (B) et (C) et, en définitive, l'angle u est un des angles des sphères (A), et (C). Nous allons construire le point C.

Le point B, centre d'une sphère (B) orthogonale par construction à la sphère (A) et passant par le cercle (D), est le point commun à la droite (D) et au plan polaire du point A par rapport à la sphère (O) (**14**). Le point C, centre de la sphère (C) orthogonale par construction à la sphère (B) et passant par le cercle (D), est le point d'intersection de la droite (D) et du plan polaire du point B par rapport à la sphère (O).

Les plans polaires de A et de C passant alors par B, la droite conjuguée de AC rencontre donc (D); il en résulte que AC rencontre (D'), conjuguée de (D). Le point C est, en définitive, le point commun à la droite (D) et à la droite qui passe par A et rencontre (D) et (D').

Nous énoncerons ce résultat en disant que :

L'angle u de la sphère (A) et du cercle (D) sécants est égal à l'un des angles des sphères (A) et (C), C étant le point de la droite (D) tel que la droite AC rencontre (D) et la droite (D') conjuguée de l'axe (D) du cercle.

On trouvera une application de ce résultat aux nos **121** et **122**.

En particulier, **la condition nécessaire et suffisante pour que le cercle (D) et la sphère (A) soient orthogonaux est que le centre A de la sphère soit sur la droite (D') conjuguée de l'axe (D) du cercle.**

16. Cercles perpendiculaires. — Nous appellerons angle de deux cercles situés sur une même sphère et sécants, le plus petit angle positif que font, en un des deux points communs, les tangentes à ces deux cercles.

Deux cercles (D) et (Δ) situés sur une même sphère (A) sont définis par deux droites (D) et (Δ) qui se coupent en A. On peut démontrer sans aucune difficulté que l'angle de ces deux cercles est égal à l'angle des sphères (B) et (C), B et C étant les points où les droites (D) et (Δ) rencontrent le plan polaire de A par rapport à la directrice (O). Nous ne donnons pas cette démonstration, car le calcul de l'angle de deux cercles d'une même sphère est lié aux calculs faits aux §§ **14** et **15**, ainsi que nous l'établirons plus loin. D'ailleurs, nous nous bornons pour le moment à chercher la condition de perpendicularité de deux cercles, c'est-à-dire la condition pour que leur angle soit droit.

Nous dirons que deux cercles sont perpendiculaires, pour exprimer :

1° *qu'ils ont deux points communs, réels et distincts;*

2° *qu'en ces points leur angle est droit.*

La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles (D) et (Δ) réels soient perpendiculaires est que l'axe (Δ) de l'un rencontre l'axe (D) du second et sa droite conjuguée (D') par rapport à la directrice (O).

La condition est nécessaire. Par hypothèse, les cercles (D) et (Δ) ont deux points communs, M et M'. Une inversion de centre M les transforme en droites perpendiculaires (d) et (δ); il existe donc un plan passant par (δ) perpendiculaire à (d); cette propriété entraîne qu'il existe une sphère passant par le cercle (Δ) et orthogonale au cercle (D). Le centre de cette sphère est sur la droite (Δ) et (**15**) sur la droite (D'), conjuguée de (D). La condition est donc bien nécessaire.

La condition est suffisante. Par hypothèse, la droite (Δ) rencontre en A la droite (D) et en B la droite (D') : soit C le point de la droite (D) conjugué du point A. Les cercles (D) et (Δ) étant réels par hypothèse, les points A, B, C sont extérieurs à la directrice si celle-ci est réelle; les sphères (A), (B), (C) sont donc réelles. Ces trois sphères sont deux à deux orthogonales; elles se coupent donc en deux points M et M' réels, qui sont aussi deux points communs aux cercles (D) et (Δ). Une inversion de centre M transforme la figure formée par les trois sphères en un trièdre trirectangle et, par conséquent, les cercles (D) et (Δ) en droites rectangulaires. Ces cercles sont donc bien perpendiculaires, puisqu'ils sont sécants et que leur angle est droit.

17. Étude de la figure formée par deux cercles (D_1) et (D_2) qui ne sont ni dans un même plan, ni sur une même sphère et par un cercle (Δ) commun à deux sphères (A_1) et (A_2) passant, la première par le cercle (D_1), la seconde par le cercle (D_2). — Le point A_1 est un point, d'ailleurs quelconque, de la droite (D_1); le point A_2 est un point, quelconque aussi, de la droite (D_2), et la droite (Δ) est la droite A_1A_2. Nous supposerons que les cercles (D_1) et (Δ) d'une part, (D_2) et (Δ) d'autre part sont sécants, et nous aurons à faire intervenir cinq angles, savoir :

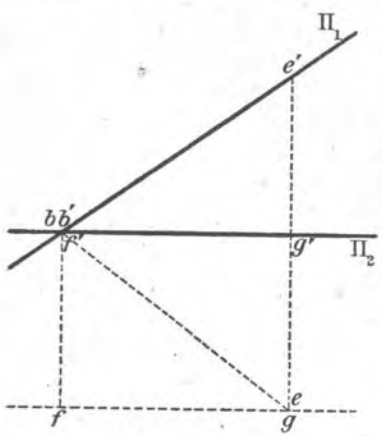
1° l'angle V des sphères (A_1) et (A_2),

2° l'angle u du cercle (D_1) et de la sphère (A_2),

3° l'angle v du cercle (D_2) et de la sphère (A_1),

4° l'angle α du cercle (D_1) et du cercle (Δ),

5° l'angle β du cercle (D_2) et du cercle (Δ).



Ces cinq angles ne dépendent que des deux paramètres qui permettent de préciser, sur les droites (D_1) et (D_2) données, les positions des points A_1 et A_2. Il existe donc entre eux trois relations indépendantes de ces paramètres; nous allons en établir deux qui sont particulièrement simples.

Soit M un point commun aux cercles (D_1) et (Δ); une inversion de pôle M transforme le cercle (D_1) en une droite BE, le cercle (Δ) en une droite BF, la sphère (A_1) en un plan (Π_1), la sphère (A_2) en un plan (Π_2). La figure inverse est représentée par une épure exécutée en supposant le plan (Π_2) horizontal et le plan (Π_1) de bout; la droite EF est, par hypothèse, de front.

Les égalités (voir la figure).

$$e'g' = \text{BE} \sin u = e'b' \sin \text{V},$$
$$e'b' = \text{BE} \sin \alpha$$

entraînent une des relations cherchées :

$$\boxed{\sin u = \sin \alpha \sin \text{V}.}$$

On obtiendrait de même

$$\boxed{\sin v = \sin \beta \sin \text{V}.}$$

Ces relations sont un cas particulier d'une formule connue de trigonométrie sphérique : proportionnalité des sinus des angles des faces et des dièdres d'un trièdre. Il suffit, en effet, de considérer le trièdre B(EGF), où l'angle dièdre d'arête BG est droit, et l'on a

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin u}{\sin \text{V}},$$

d'où

$$\sin u = \sin \alpha \sin \text{V}.$$

CHAPITRE III

ANNEAU ORTHOGONAL. ANNEAU PARATACTIQUE

18. Sphère orthogonale à deux cercles. — Nous nous proposons d'étudier les propriétés qui se conservent par inversion de la figure formée par deux cercles réels (C_1) et (C_2) dont les rayons ne sont pas nuls. Nous écarterons de notre étude le cas où les deux cercles sont dans un même plan, celui où ils sont sur une même sphère et celui où ils ont un point commun. Nous supposerons en outre que les plans des cercles (C_1) et (C_2) se coupent; les propriétés établies avec cette hypothèse qui se conservent par inversion seront encore vraies lorsque les plans des deux cercles seront parallèles.

Il existe en général, sur la droite d'intersection des plans des deux cercles, un point O et un seul qui a même puissance c par rapport à ces deux cercles. Nous supposerons encore que ce point O est à distance finie. La sphère (O), de centre O et de rayon ρ différent de zéro défini par $\rho^2 = c$, est orthogonale aux cercles (C_1) et (C_2) : nous la choisirons comme sphère directrice de cercles et de sphères orthogonaux que nous allons introduire au cours de notre étude.

Le centre O de la sphère directrice est un point réel; mais cette sphère n'est réelle que si le nombre c est positif : lorsqu'il est négatif, c'est-à-dire lorsque la directrice est imaginaire, les cercles (C_1) et (C_2) forment une figure qui rappelle la disposition des anneaux d'une chaîne. Nous dirons qu'ils forment un *anneau. La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles réels forment un anneau et, par conséquent, pour que leur directrice soit imaginaire, est que les points où l'un d'eux* (C_1) *coupe le plan du second* (C_2) *soient de part et d'autre de ce cercle.*

La figure inverse d'un anneau est évidemment un anneau.

Nous désignerons par (D_1) et (D_2) les axes des cercles (C_1) et (C_2); par conséquent, au cours des démonstrations et d'après les conventions faites au § **13**, ces cercles seront aussi désignés par les notations « cercle (D_1) », « cercle (D_2) ». Les droites (D_1) et (D_2), par hypothèse, ne sont pas dans un même plan; la droite (D_1) coupe la sphère directrice aux

points P_1 et Q_1, centres des sphères de rayon nul qui passent par le cercle (C_1); la droite (D_2) coupe la directrice aux points P_2 et Q_2.

19. Congruence de cercles définis par les cercles de base (C_1) et (C_2). — Une sphère variable passant par le cercle (C_1) fait partie d'un faisceau linéaire de sphères dépendant d'un paramètre λ. De même, une sphère variable passant par le cercle (C_2) fait partie d'un faisceau linéaire de sphères dépendant d'un paramètre μ. Les cercles communs à ces deux sphères dépendent donc de deux paramètres indépendants, λ et μ : nous dirons qu'ils appartiennent à la *congruence* $[C_1.C_2]$, dont les cercles de base sont les cercles (C_1) et (C_2).

Un cercle (Δ) de la congruence $[C_1.C_2]$ est orthogonal à la directrice (O) relative à ces deux cercles. Il est donc défini (**13**) par son axe (Δ); les droites (Δ) sont les droites qui joignent (notations du n° **17**) un point A_1 de la droite (D_1) à un point A_2 de la droite (D_2).

Lorsque les paramètres λ et μ sont liés par une relation donnée, les cercles (Δ) ne dépendent plus que d'un seul paramètre; nous dirons qu'ils forment un faisceau issu de la congruence $[C_1.C_2]$; la droite (Δ) engendre, dans ce cas, une surface réglée que nous appellerons la *déférente* du faisceau de cercles dont les axes sont les génératrices de cette surface.

20. Recherche des cercles perpendiculaires aux cercles (C_1) et (C_2). — Les cercles perpendiculaires aux cercles (C_1) et (C_2) sont, par définition (**16**), des cercles communs à une sphère (A_1) passant par (C_1) et à une sphère (A_2) passant par (C_2). Ils appartiennent donc à la congruence $[C_1.C_2]$. Soit (Δ) l'un d'eux. La condition nécessaire et suffisante pour que le cercle (Δ) soit perpendiculaire, d'une part, au cercle (C_1) et d'autre part, au cercle (C_2) est que (**16**) la droite (Δ) rencontre les axes (D_1) et (D_2) de ces deux cercles et les droites (D'_1), (D'_2), conjuguées de ces axes par rapport à la sphère directrice (O).

Le problème de la recherche des cercles perpendiculaires à deux cercles donnés est donc ramené au problème de la recherche des droites rencontrant quatre droites données. Nous allons étudier ce dernier problème.

1^er^ cas : *La droite* (D_2) *est la conjuguée par rapport à la directrice* (O) *de la droite* (D_1). — Toute droite (Δ) qui rencontre en A_1 la droite (D_1) et en A_2 la droite (D_2) rencontre évidemment en ces mêmes points les droites (D'_1), confondue avec (D_2), et (D'_2), confondue avec (D_1). Ces droites sont les axes d'une famille de cercles perpendiculaires aux deux cercles donnés dépendant de *deux paramètres.*

2^e^ cas : *Les droites* (D_1), (D_2), (D'_1), (D'_2) *sont quatre génératrices distinctes de même système d'une quadrique* (S) *définie au chapitre I.* —

Les droites (Δ) qui les rencontrent sont des génératrices du deuxième système de cette quadrique et toute génératrice du deuxième système est une droite (Δ). Ces droites sont les axes d'une famille de cercles perpendiculaires aux deux cercles donnés dépendant d'*un seul paramètre*.

3[e] cas : *Les droites* (D_1), (D_2), (D'_1), (D'_2) *sont distinctes, mais ne sont pas quatre génératrices de même système d'une quadrique* (S). — Écartons le cas simple où la droite (D_1) a un point commun avec la droite (D'_2) : il existe dans ce cas, évidemment, deux droites (Δ) distinctes rencontrant les quatre droites données.

Supposons donc que (D_1), (D_2) et (D'_1) soient trois génératrices de même système d'une quadrique (H) : toute droite (Δ) qui les rencontre sera une génératrice du second système de cette quadrique. La droite (D'_2), n'étant pas, par hypothèse, une génératrice de la quadrique (H), la rencontre, en général, en deux points P et Q; les droites (Δ) qui rencontrent les quatre droites (D_1), (D_2), D'_1), (D'_2) sont les génératrices du deuxième système (Δ) et (Δ') de la quadrique (H) qui passent, l'une par P et l'autre par Q. Ce sont (**5**) deux droites conjuguées par rapport à la directrice (O). Nous verrons ultérieurement que ceci entraîne qu'elles sont réelles et distinctes (**29**).

21. Définitions de l'anneau orthogonal, de l'anneau paratactique et des cercles aparatactiques. — Nous dirons que deux cercles (C_1) et (C_2), remplissant les conditions imposées au n° **18**, forment un **anneau orthogonal** lorsqu'il existe une famille de cercles à deux paramètres perpendiculaires à ces deux cercles.

Nous dirons que deux cercles (C_1) et (C_2) forment un **anneau paratactique** lorsque les cercles perpendiculaires à ces deux cercles dépendent d'un seul paramètre.

Nous dirons que deux cercles sont **aparatactiques** pour exprimer qu'il existe seulement deux cercles (ou un seul) perpendiculaires à ces deux cercles.

Il va de soi que dans les énoncés précédents le mot cercle désigne un cercle ou exceptionnellement une droite; moyennant cette convention, on peut dire que :

La figure transformée par inversion soit d'un anneau orthogonal, soit d'un anneau paratactique, soit de deux cercles aparatactiques est une figure de même espèce.

Les trois cas étudiés au § **20** nous ont amené à des conclusions différentes; ceci nous permet d'énoncer les propriétés suivantes, contenant chacune la proposition directe et sa réciproque.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles forment un anneau orthogonal est que leurs axes soient deux droites conjuguées par rapport à leur directrice.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles forment un anneau paratactique est que les axes (D_1), (D_2) de ces cercles soient deux génératrices de même système d'une quadrique (S) non conjuguées par rapport à leur directrice.

22. Étude de l'anneau orthogonal. — Soient (C_1) et (C_2) deux cercles réels formant un anneau orthogonal; les axes (D_1) et (D_2) de ces deux cercles ne coupent pas la directrice (O); or ce sont deux droites conjuguées par rapport à celle-ci; la directrice (O) est donc imaginaire et il y a anneau au sens du n° **18**.

Toute sphère (A_1) *passant par le cercle* (C_1) *est orthogonale au cercle* (C_2), puisque (**15**) le centre A_1 de la sphère est sur la droite conjuguée de l'axe (D_2) du cercle (C_2).

Une sphère quelconque (A_1) *passant par le cercle* (C_1) *est orthogonale à une sphère quelconque* (A_2) *passant par le cercle* (C_2), puisque (**14**) A_1 et A_2 sont conjugués par rapport à la sphère directrice.

Les cercles (Δ) *de la congruence* $[C_1 . C_2]$ *sont les cercles perpendiculaires aux cercles* (C_1) *et* (C_2).

Les plans des cercles (C_1) et (C_2), perpendiculaires aux droites conjuguées (D_1) et (D_2), sont rectangulaires; la droite d'intersection de ces deux plans est un diamètre commun aux deux cercles, parce que chacun de ces cercles est orthogonal au plan de l'autre; elle coupe le cercle (C_1) en A et B, le cercle (C_2) en A' et B' et l'on a $(A.B.A'.B') = -1$, parce que les sphères passant par (C_1) coupent (C_2) orthogonalement.

On retrouve bien les propriétés de l'anneau orthogonal qui servent à le définir en géométrie élémentaire.

23. Remarque. — Il résulte du raisonnement fait au n° **20** (3[e] cas) et de la condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles forment un anneau orthogonal (**21**), que l'on peut énoncer la propriété suivante :

Si deux cercles sont aparatactiques, les deux cercles qui leur sont perpendiculaires forment un anneau orthogonal.

CHAPITRE IV

ÉTUDE DE LA PARATAXIE

24. Rappel de certains résultats. — Soient (C_1) et (C_2) deux cercles *réels*. La condition nécessaire et suffisante pour qu'ils forment un anneau paratactique est que leurs axes (D_1) et (D_2) soient deux génératrices de même système d'une quadrique (S) non conjuguées par rapport à leur sphère directrice : les droites conjuguées (D_1') et (D_2') sont alors deux génératrices du même système de cette quadrique (S).

Nous avons vu (**10**) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des quadriques (S) engendrées par des droites réelles, est que la directrice (O) soit imaginaire : les deux cercles (C_1) et (C_2) forment donc un anneau au sens du n° **18**.

Nous dirons que deux cercles sont *paratactiques*, pour dire rapidement qu'ils forment un anneau paratactique.

La quadrique (S), attachée aux cercles paratactiques (C_1) et (C_2), est entièrement définie par la donnée de ces deux cercles, puisqu'elle passe par leurs axes (D_1) et (D_2) et par les droites conjuguées (D_1') et (D_2') de ces axes par rapport à la quadrique directrice (O). Notons qu'il a été établi (**6**) que la quadrique (S) coupe la directrice (O) suivant quatre génératrices; deux seront appelées (G_1) et (G_2), elles appartiennent au système des génératrices (D_1) et (D_2), appelé le premier; les deux autres, (Γ_1) et (Γ_2), appartiennent au second système de génératrices, qui est le système des génératrices (Δ), axes des cercles perpendiculaires aux cercles (C_1) et (C_2) donnés.

25. Angle de la parataxie. — Une génératrice variable (Δ) de la quadrique (S) rencontre aux points A, B, P, Q les quatre génératrices fixes (D_1), (D_2), (G_1), (G_2) de cette quadrique; le birapport (A, B, P, Q) de ces quatre points est égal au birapport (D_1, D_2, G_1, G_2) de ces génératrices, donc constant. Comme P et Q sont les points où la droite (Δ) rencontre la directrice (O) et que par conséquent ce birapport est celui qui sert (**14**) à définir l'angle des sphères (A) et (B), l'angle de ces deux sphères a une valeur constante θ. Nous énoncerons cet important résultat en disant :

Théorème : L'angle sous lequel se coupent les sphères qui passent par un cercle perpendiculaire à deux cercles (C_1) et (C_2) d'un anneau paratactique et par l'un quelconque de ces deux cercles est constant.

La valeur θ de cet angle constant est, par définition, l'*angle de la parataxie.*

Par le point A, arbitrairement choisi sur (D_1), il passe une génératrice (Δ) et une seule qui rencontre les droites (D_2) en B et qui rencontre aussi (D_2'). Si nous nous reportons au résultat établi à la fin du § **15**, nous constatons que l'angle sous lequel la sphère (A) coupe le cercle (C_2) est égal à l'angle sous lequel se coupent les sphères (A) et (B), c'est-à-dire à l'angle de parataxie. Autrement dit :

Théorème : L'angle sous lequel une sphère variable qui passe par un des deux cercles (C_1) d'un anneau paratactique coupe le second cercle (C_2) de cet anneau est égal à l'angle de parataxie.

Les réciproques de ces théorèmes seront établies ultérieurement (**32**) On en trouvera au n° **131** une démonstration analytique.

26. Conséquences. Famille des cercles (II). — Ce résultat en entraîne d'autres importants. Soient (notations du § **17**) A_1 un point quelconque de la droite (D_1), A_2 un point également quelconque de la droite (D_2) et (Δ) la droite A_1A_2, qui n'est pas, en général, une génératrice de la surface (S). Nous adoptons pour les angles les notations du § **17** : l'angle u de la sphère variable (A_1) et du cercle (C_2) est égal à l'angle θ de la parataxie; l'angle v de la sphère variable (A_2) et du cercle (C_1) est aussi égal à l'angle θ de la parataxie; les égalités $\sin u = \sin \alpha \sin V$, $\sin v = \sin \beta \sin V$ entraînent, dans ces conditions, $\alpha = \beta$. Nous énoncerons :

Les cercles de la congruence [$C_1 . C_2$] définie par deux cercles paratactiques (C_1) et (C_2) coupent ces deux cercles sous le même angle.

Choisissons, *en particulier*, pour droite (Δ) une génératrice d'une quadrique (T), autre que la quadrique (S), passant par les droites (D_1), (D_2), (Γ_1) et (Γ_2). Cette quadrique, qui a avec la directrice deux génératrices communes de même système, la coupe suivant deux autres génératrices (g_1) et (g_2). Les points p et q où la droite (Δ) coupe la directrice sont l'un p sur (g_1), l'autre q sur (g_2). Le birapport (A_1, A_2, p, q) est égal au birapport des quatre génératrices fixes (D_1, D_2, g_1, g_2) de la quadrique (T). Ce birapport étant celui qui permet de calculer l'angle des sphères (A_1) et (A_2), cet angle V est constant; l'égalité $\sin\theta = \sin\alpha\sin V$ montre que l'angle α et l'angle β sont par conséquent constants. Donc :

La famille de cercles (Π), issue de la congruence $[C_1 . C_2]$ définie par deux cercles paratactiques (C_1) et (C_2), dont les axes engendrent une quadrique (T) passant par les axes (D_1) et (D_2) de ces deux cercles et qui coupe la directrice suivant quatre génératrices isotropes, est une des familles de cercles qui coupent les cercles (C_1) et (C_2) sous un même angle constant.

Nous établirons ultérieurement (**39**) la réciproque de cette proposition.

27. Conditions de parataxie. — Nous appellerons *conditions de parataxie* les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux cercles réels donnés (C_1) et (C_2) forment un anneau paratactique. Nous désignerons par P_1 et Q_1 les points où l'axe (D_1) du premier cercle (C_1) coupe la directrice (O); ces points sont les centres des sphères de rayon nul qui passent par le cercle (C_1) : nous les appellerons *foyers* du cercle (C_1). Nous désignerons par P_2 et Q_2 les foyers du cercle (C_2).

Nous allons établir le théorème suivant :

Les deux conditions de parataxie de deux cercles réels donnés (C_1) et (C_2) qui ne forment pas un anneau orthogonal s'obtiennent en écrivant que la distance d'un foyer du premier P_1 et d'un foyer du second P_2 est nulle.

La quantité $\overline{P_1P_2}^2$, distance de deux points imaginaires, est un nombre complexe : l'égaler à zéro, c'est bien écrire *deux* conditions; c'est pourquoi nous disons que *les* conditions de parataxie sont... Il est évident que l'égalité $\overline{P_1P_2}^2 = 0$ entraîne aussi $\overline{Q_1Q_2}^2 = 0$.

Les conditions sont nécessaires. Par hypothèse, les cercles (C_1) et (C_2) sont paratactiques; il existe donc une quadrique (S) dont (D_1) et (D_2) sont deux génératrices du premier système (**21**); cette quadrique (S) coupe la directrice (O) suivant quatre génératrices isotropes; celles de ces génératrices (Γ_1), (Γ_2) qui sont du second système de la quadrique (S) coupent les droites (D_1) et (D_2) aux points de ces droites situés sur la directrice (O). Nous pouvons donc supposer que P_1 et P_2 sont sur (Γ_1), Q_1 et Q_2 sur (Γ_2); ces génératrices étant isotropes, $\overline{P_1P_2}^2 = 0$ et $\overline{Q_1Q_2}^2 = 0$.

Les conditions sont suffisantes. Par hypothèse, $\overline{P_1P_2}^2 = 0$ et $\overline{Q_1Q_2}^2 = 0$. La droite joignant les points distincts P_1 et P_2 de la sphère directrice étant, par hypothèse, isotrope, est une génératrice (Γ_1) de la sphère directrice (O); de même la droite Q_1Q_2 est une génératrice isotrope (Γ_2) de la directrice (O). Les droites (Γ_1) et (Γ_2) sont par conséquent leurs propres conjuguées par rapport à la directrice (O), et puisqu'elles rencontrent la droite (D_1), elles rencontrent aussi la droite (D'_1), conjuguée de (D_1) par rapport à la directrice (O).

Il en résulte d'abord que les droites (D_2) et (D'_1) ne sont pas dans un même plan, car cette hypothèse entraînerait que (D_1) et (D_2) sont dans un même plan, cas que nous avons écarté. Ceci entraîne ensuite qu'il existe une quadrique (H) bien déterminée dont les droites (D_1), (D_2) et (D'_1) sont trois génératrices du premier système et (Γ_1) et (Γ_2) deux génératrices du second. La quadrique (H) coupe par conséquent la directrice suivant quatre génératrices, (Γ_1) et (Γ_2) d'une part, (G_1) et (G_2) d'autre part. Il en résulte que, si (Δ) est une génératrice du second système de la quadrique (H), qui coupe par conséquent les génératrices (D_1), (D'_1), (G_1), $G_2)$, la droite (Δ'), conjuguée de (Δ), coupe les droites conjuguées des précédentes, c'est-à-dire (D'_1), (D_1), (G_1), (G_2); la droite (Δ') est donc une génératrice de la quadrique (H) et cette dernière est une quadrique (S).

Les axes (D_1) et (D_2) des cercles (C_1) et (C_2) sont par conséquent deux génératrices de même système d'une quadrique (S) et les cercles forment (**21**) un anneau paratactique.

28. Exercice : *Trouver l'équation cartésienne de la surface* (W) *engendrée par les cercles perpendiculaires à deux cercles paratactiques donnés.*

La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles (C_1) et (C_2) forment un anneau paratactique est qu'il existe une quadrique (S) dont les axes (D_1) et (D_2) de ces deux cercles sont deux génératrices de même système; les axes (Δ) des cercles perpendiculaires sont les génératrices du second système de cette quadrique.

Nous supposerons les axes choisis de manière que l'équation de la sphère directrice (O) soit

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0$$

et celle de la quadrique (S) (**11**)

$$x^2 - y^2 + z^2 \sin\varphi + 2Rz \cos\varphi - R^2 \sin\varphi = 0.$$

Il est commode de faire tourner les axes de 45° autour de Oz, c'est-à-dire de supposer que l'équation de la quadrique (S) est

$$2xy + z^2 \sin\varphi + 2Rz \cos\varphi - R^2 \sin\varphi = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\text{(S)} \qquad xy + \left(z \cos\frac{\varphi}{2} - R \sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(z \sin\frac{\varphi}{2} + R \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Une génératrice (Δ) de cette surface aura, λ étant un paramètre variable, pour équations

$$z \cos\frac{\varphi}{2} - R \sin\frac{\varphi}{2} = \lambda x,$$

$$z \sin\frac{\varphi}{2} + R \cos\frac{\varphi}{2} = -\frac{y}{\lambda}.$$

Le cercle, orthogonal à la sphère (O), dont cette génératrice est l'axe aura pour équations

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) + 2Rx \sin\frac{\varphi}{2} + 2\lambda^2 Ry \cos\frac{\varphi}{2} = 0,$$

$$x \cos\frac{\varphi}{2} - \lambda^2 y \sin\frac{\varphi}{2} + \lambda z = 0.$$

Ce cercle variable est perpendiculaire aux deux cercles paratactiques (C_1) et (C_2) qui ont servi pour définir la quadrique (S); il engendre la surface

$$[(x^2+y^2+z^2-R^2)^2 - 4R^2z^2)]\sin\varphi + 4Rz(x^2+y^2+z^2-R^2)\cos\varphi = 8R^2xy.$$

Nous nous bornerons, pour le moment, à signaler qu'elle est algébrique, du quatrième degré. Nous soulignerons également que cette solution du problème n'est pas simple : elle exige la recherche préalable de la quadrique (S), définie par les génératrices (D_1) et (D_2), de ses directions principales, qui ont été choisies pour directions d'axes. Analytiquement, elle est donc insuffisante.

CHAPITRE V

CERCLES PERPENDICULAIRES A DES CERCLES APARATACTIQUES. TRANSFORMATION PAR INVERSION DE LA FIGURE FORMÉE PAR DEUX CERCLES

29. Réalité des cercles perpendiculaires à des cercles aparatactiques. — Soient (C_1) et (C_2) deux cercles aparatactiques réels. Nous avons vu (**20** : 3e cas) qu'il existe deux droites (Δ), au maximum, rencontrant les axes (D_1) et (D_2) des deux cercles donnés et les droites (D'_1) et (D'_2), conjuguées de celles-ci par rapport à la directrice. Ces droites (Δ) et (Δ') définissent les cercles perpendiculaires aux deux cercles donnés; ce sont évidemment deux droites conjuguées par rapport à la directrice (O).

Il en résulte d'abord qu'elles sont distinctes. En effet, les deux points A et A' où la droite (Δ) coupe la droite (D'_2) sont les deux points où cette même droite (D'_2) (**20** : 3e cas) coupe une quadrique réelle (H); si (Δ) était confondue avec (Δ'), A serait confondu avec A' et par suite réel. Le raisonnement fait avec les points A et A' d'intersection avec (D'_2) peut être répété avec une autre des quatre droites, (D_1), par exemple. Autrement dit, si (Δ) et (Δ') étaient confondues, ces droites seraient réelles; or elles sont conjuguées et l'on sait qu'il n'existe aucune droite réelle qui soit sa propre conjuguée par rapport à une sphère : les droites (Δ) et (Δ') sont donc distinctes.

Il en résulte ensuite qu'elles sont réelles. En effet, si les droites (Δ) et (Δ') étaient imaginaires, les points A et A' d'intersection de ces droites avec une quelconque des quatre droites (D_1), (D_2), (D'_1), (D'_2) étant imaginaires conjugués, ces droites seraient imaginaires conjuguées et leurs paramètres de direction seraient, pour l'une, $\alpha + i\beta$, $\alpha' + i\beta'$, $\alpha'' + i\beta''$, et, pour l'autre, $\alpha - i\beta$, $\alpha' - i\beta'$, $\alpha'' - i\beta''$. Puisque les droites (Δ) et (Δ') sont conjuguées par rapport à une sphère, elles sont orthogonales; les nombres réels, α, β, ... devraient donc satisfaire à l'égalité

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 0,$$

ce qui est impossible; les droites (Δ) et (Δ') sont donc bien réelles.

Les cercles perpendiculaires à deux cercles aparatactiques donnés (C_1) et (C_2) sont donc représentés par deux droites réelles (Δ) et (Δ'), conjuguées par rapport à la sphère directrice (O). Ceci entraîne que :

Les deux cercles perpendiculaires à deux cercles aparatactiques réels (C_1) et (C_2) formant un anneau sont les deux cercles réels d'un anneau orthogonal.

Les deux cercles perpendiculaires à deux cercles aparatactiques (C_1) et (C_2) ne formant pas un anneau sont deux cercles, l'un réel, l'autre imaginaire, d'un anneau orthogonal.

30. Condition de parataxie d'un cercle et d'une droite. — La comparaison des résultats établis dans la recherche des cercles perpendiculaires permet d'affirmer qu'il existe toujours, au minimum, un cercle (Σ) réel perpendiculaire à deux cercles donnés (C_1) et (C_2). Nous nous bornons, bien entendu, à l'étude du cas où les cercles (C_1) et (C_2) n'ont aucun point commun, réel ou imaginaire, bien que cette proposition soit vraie dans tous les cas.

Soit ω un point de ce cercle (Σ). Une inversion de pôle ω et de puissance quelconque transforme le cercle (Σ) en une droite, et par conséquent les cercles (C_1) et (C_2) en deux cercles ayant un diamètre commun. Deux cercles perpendiculaires ayant deux points réels communs, il est possible de choisir le pôle ω d'inversion à la fois sur le cercle (Σ) et sur le cercle (C_1). Cette inversion transforme alors la figure formée par deux cercles (C_1) et (C_2) en une figure classique formée par une droite (D) et un cercle (C), dont les équations, par rapport à un système de coordonnées rectangulaires bien choisies, sont

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - r^2 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} x = a, \\ y \sin\theta - z \cos\theta = 0; \end{cases}$$

avec $a > 0$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; $\quad r > 0$.

Nous retrouverons la condition de parataxie (27) du cercle (C) et de la droite (D) en écrivant qu'un des foyers du cercle (C), de coordonnées 0, 0, ir, est dans un des plans isotropes passant par la droite (D) : $y \sin\theta - z \cos\theta - i(x - a) = 0$. Cette condition est :

$$a = r \cos\theta,$$

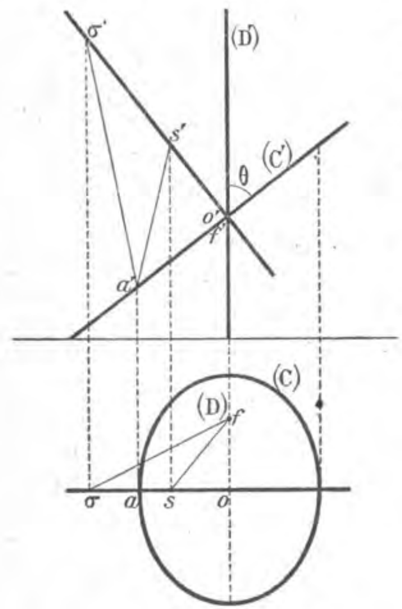
étant données les conditions de signes imposées aux nombres a, r, et θ.

Propriétés des droites (D). — La droite (D) porte parfois le nom de *droite focale* du cercle (C). Il est facile d'établir des propriétés intéressantes de cette droite.

1° Si l'on projette orthogonalement le cercle (C) sur un plan perpendiculaire à la droite (D), les demi-axes de l'ellipse-projection ont pour longueurs r et $r \sin\theta$. La demi-distance focale est donc

$$r \cos\theta = a.$$

Il en résulte que le pied de la droite (D) sur le plan de projection est un foyer de la projection. La réciproque est immédiate. Nous énoncerons donc :



Pour qu'une droite (D) soit focale d'un cercle (C), il faut et il suffit que les plans tangents menés par (D) à (C) soient isotropes.

La figure ci-contre montre un cercle (C) et une droite (D) perçant le plan de (C) en F (f, f') : l'épure est faite en supposant (D) verticale et le plan de (C) de bout.

2° Si l'on considère une sphère (S) de centre (s, s') passant par (C), l'angle φ de la sphère et de (D) est donné par la formule

$$\cos\varphi = \frac{sf}{s'a'}.$$

Or on a

$$of = o'a' \cos\theta, \quad os = o's' \cos\theta,$$

et par suite, $\dfrac{of}{os} = \dfrac{o'a'}{o's'}$.

Les deux triangles ofs et $f'a's'$ sont alors semblables et l'on a

$$\cos\varphi = \frac{sf}{s'a'} = \frac{of}{o'a'} = \cos\theta.$$

L'angle φ est donc constant, et l'on retrouve, par ce procédé élémentaire, le résultat du n° 25.

3° Le même raisonnement va nous donner le moyen d'interpréter l'angle de deux sphères (S) et (Σ) passant par le cercle (C). Sur la même épure, l'angle (S, Σ) est marqué en $s'a'\sigma'$. D'après la similitude des triangles précités signalée plus haut (2°), on peut écrire

$$\widehat{s'a'\sigma'} = \widehat{sf\sigma},$$

ce qui s'énonce :

L'angle de deux sphères passant par un cercle (C) est égal à l'angle du dièdre dont l'arête est une focale du cercle et dont chacune des faces contient le centre d'une sphère.

31. Problème. Transformer par inversion deux cercles en deux cercles concentriques. — Nous avons écarté de notre étude (**18**) la figure formée par deux cercles (C_1) et (C_2) concentriques; une inversion ramène ce cas particulier au cas général; il devrait donc exister deux cercles perpendiculaires à ces deux cercles formant un anneau orthogonal : le premier est le diamètre commun aux deux cercles; on constatera sans aucune peine que le second n'existe pas (il est rejeté à l'infini).

Ceci posé, proposons-nous de découvrir les inversions qui transforment deux cercles (C_1) et (C_2) donnés en deux cercles concentriques : une telle inversion, si elle existe, transformera les cercles perpendiculaires aux cercles (C_1) et (C_2) en une droite et un cercle à l'infini; le pôle d'inversion doit donc être un point d'un cercle perpendiculaire (Σ) à ces deux cercles et un foyer du second cercle perpendiculaire (Σ') à ces deux cercles, et cela suffit. Or, les deux cercles (Σ) et (Σ') formant un anneau orthogonal, les foyers de (Σ') sont effectivement sur (Σ); ils ne sont réels que si (Σ') est imaginaire, ce qui se produit quand la directrice (O) est réelle, c'est-à-dire quand les cercles donnés (C_1) et (C_2) ne forment pas un anneau. Nous pouvons donc énoncer que :

Il existe deux pôles d'inversion réels et deux seulement qui permettent de transformer deux cercles (C_1) et (C_2), *qui ne forment pas un anneau, en deux cercles concentriques.*

32. Propriété caractéristique des sphères passant par un des cercles d'un anneau paratactique ou orthogonal. — Nous continuerons l'étude de la figure formée par deux cercles (C_1) et (C_2) en nous aidant de quelques calculs simples effectués sur la figure inverse, dans le système d'axes choisis au § **30**, les notations étant celles du § **17**.

La figure inverse du cercle (C_1) est la droite (D); la figure inverse du cercle (C_2) est le cercle (C); la figure inverse d'une sphère (A_2) est une sphère (a_2), d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\mu rz - r^2 = 0.$$

L'angle u sous lequel la sphère (A_2) coupe le cercle (C_1) est aussi celui sous lequel la sphère (a_2) coupe la droite (D). Le carré de la distance du centre de la sphère (a_2) à la droite (D) est $a^2 + \mu^2r^2\cos^2\theta$; le cosinus de l'angle u est égal au quotient de cette distance par le rayon de la sphère (a_2); nous aurons donc

$$\cos^2 u = \frac{a^2 + \mu^2r^2\cos^2\theta}{r^2(1+\mu^2)}, \qquad \sin^2 u = \frac{r^2 - a^2 + \mu^2r^2\sin^2\theta}{r^2(1+\mu^2)}.$$

La figure inverse d'une sphère (A_1) est un plan (a_1), d'équation

$$\lambda(x - a) + y\sin\theta - z\cos\theta = 0.$$

L'angle v, sous lequel la sphère (A_1) coupe le cercle (C_2), est aussi celui sous lequel le plan (a_1) coupe le cercle (C). Les coordonnées d'un point M commun au plan (a_1) et au cercle (C) sont ($r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, 0), φ et λ étant liés par la relation

$$\lambda(r\cos\varphi - a) + r\sin\varphi\sin\theta = 0. \tag{3}$$

L'angle v, complément de l'angle de la tangente en M au cercle (C), ($-\sin\varphi$, $\cos\varphi$, 0) avec la normale au plan (a_1), (λ, $\sin\theta$, $-\cos\theta$), est défini par l'égalité

$$\sin^2 v = \frac{(-\lambda\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)^2}{1+\lambda^2}.$$

Observons que l'identité

$$(-\lambda\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)^2 + (\lambda\cos\varphi + \sin\varphi\sin\theta)^2 = \lambda^2 + \sin^2\theta$$

est toujours satisfaite; puisque $\lambda\cos\varphi + \sin\varphi\sin\theta$ est égal (3) à $\frac{\lambda a}{r}$, l'expression de $\sin^2 v$ peut s'écrire

$$\sin^2 v = \frac{\lambda^2(r^2 - a^2) + r^2\sin^2\theta}{r^2(1+\lambda^2)}.$$

On passe de l'expression qui donne $\sin^2 u$ à celle qui donne $\sin^2 v$ en remplaçant μ^2 par $\frac{1}{\lambda^2}$. Si donc la première est indépendante de μ, la seconde est indépendante de λ.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\sin^2 u$, fonction homographique de μ^2, soit indépendante de μ^2 est

$$a^2 = r^2\cos^2\theta,$$

c'est-à-dire, puisque a, r, $\cos\theta$ sont positifs,

$$a = r\cos\theta.$$

C'est la condition de parataxie. Nous énoncerons donc la proposition suivante, qui contient la réciproque de la proposition énoncée au § **25** :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles (C_1) et (C_2) forment un anneau paratactique ou orthogonal est que toute sphère passant par l'un d'eux coupe l'autre sous un angle constant.

(Voir une démonstration analytique au n° **131**.)

33. Angle d'une sphère passant par un cercle (C_1) et d'un autre cercle (C_2) aparatactique avec (C_1). — Supposons que les cercles (C_1) et (C_2) soient aparatactiques et *forment un anneau.*

Toute sphère passant par l'un de ces cercles coupe l'autre; par conséquent tout plan passant par la droite (D) coupe le cercle (C), ce qui se traduit par la condition $a < r$. Nous poserons donc $a = r \cos\theta'$, et le fait que (C_1) et (C_2) sont aparatactiques se traduira par $\theta' \neq \theta$.

Les expressions de $\sin^2 u$ et $\sin^2 v$ deviennent, avec ces notations,

$$\sin^2 u = \frac{\sin^2\theta' + \mu^2 \sin^2\theta}{1+\mu^2}, \qquad \sin^2 v = \frac{\sin^2\theta + \lambda^2 \sin^2\theta'}{1+\lambda^2}.$$

Il résulte de ces égalités que $\sin^2 u$ et $\sin^2 v$ peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre $\sin^2\theta$ et $\sin^2\theta'$. Les valeurs maxima et minima correspondent à λ ou μ soit nuls, soit infinis, c'est-à-dire au cas où les plans (a_1) et les sphères (a_2) passent par les cercles perpendiculaires à la droite (D) et au cercle (C). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Lorsque deux cercles (C_1) et (C_2) forment un anneau aparatactique, les sphères qui passent par l'un d'eux coupent le second sous un angle variable compris entre un maximum et un minimum. Les sphères qui coupent sous l'angle maximum ou minimum passent par les cercles perpendiculaires aux cercles (C_1) et (C_2).

(Voir solution analytique au n° **134.**)

Supposons que les cercles (C_1) *et* (C_2) *ne forment pas un anneau.* Il existe par conséquent des sphères passant par le cercle (C_1) qui ne coupent pas le cercle (C_2); ceci entraîne que a est supérieur à r. Les expressions écrites pour $\sin^2 u$ et $\sin^2 v$ varient, quand λ et μ prennent toutes les valeurs possibles, entre $\frac{r^2 - a^2}{r^2}$, nombre négatif, et $\sin^2\theta$. Le valeurs négatives de $\sin^2 u$ et $\sin^2 v$ correspondent à des sphères qui ne coupent pas les cercles donnés. Nous pouvons donc dire que $\sin^2 u$ et $\sin^2 v$ prennent toutes les valeurs comprises entre 0 et $\sin^2\theta$.

Lorsque deux cercles (C_1) et (C_2) ne forment pas un anneau, les sphères qui passent par l'un d'eux coupent le second sous un angle variable, inférieur à un maximum. Les sphères qui correspondent à ce maximum passent par l'unique cercle perpendiculaire aux deux cercles donnés.

CHAPITRE VI

DÉFINITION ET ÉTUDE DES CERCLES (Π)

34. Définition des familles de cercles (Π). — Soient (C_1) et (C_2) deux cercles n'ayant aucun point réel ou imaginaire commun : nous utiliserons la nomenclature définie au § 27. Nous désignerons par P_1 et Q_1 les foyers du cercle (C_1), par P_2 et Q_2 ceux du cercle (C_2). Lorsque les cercles (C_1) et (C_2) sont aparatactiques, les foyers sont arbitrairement dénommés P_1 ou Q_1; il en est de même dans le cas où les cercles forment un anneau orthogonal, car dans ce cas P_1P_2, Q_1Q_2, P_1Q_2, P_2Q_1 sont toutes isotropes; par contre, lorsque les deux cercles sont paratactiques, les points P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont choisis de manière que P_1P_2 soit une droite isotrope et Q_1Q_2 également.

Nous dirons qu'une famille de cercles appartenant à une congruence $[C_1 . C_2]$ est *une famille de cercles* (Π) lorsque les axes (Δ) des cercles de cette famille seront les génératrices d'un système bien déterminé d'une quadrique (H) fixe passant par les quatre droites (D_1), (D_2), P_1P_2 et Q_1Q_2.

Les cercles d'une famille (Π) dépendent d'un seul paramètre : ce sont les cercles d'une famille bien déterminée d'une cyclide dont la déférente est la quadrique (H) et la directrice la sphère (O).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite variable (Δ), rencontrant la droite (D_1) en A_1 et la droite (D_2) en A_2, soit une génératrice d'une quadrique (H) passant par P_1P_2 et Q_1Q_2 est que les points A_1 et A_2 se correspondent dans une homographie dont les couples de points P_1, P_2 et Q_1, Q_2 sont des couples de points homologues. Les cercles (Π) sont donc des cercles communs à des sphères (A_1) et (A_2) dont les centres se correspondent comme il vient d'être dit.

Il est par suite très simple de former l'équation des cercles (Π). L'équation d'une sphère (A_1) étant de la forme $f_1(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) = 0$ et celle d'une sphère (A_2), $f_2(x, y, z) + \mu g_2(x, y, z) = 0$, on déterminera les valeurs α_1 et β_1 de λ qui correspondent aux sphères de rayon nul (P_1) et (Q_1) et les valeurs α_2 et β_2 de μ qui correspondent aux sphères (P_2) et (Q_2). λ_0 et μ_0 étant des valeurs particulières de λ et μ, arbitrairement choisies, la condition nécessaire et suffisante pour que les cercles d'intersection des sphères (A_1) et (A_2) soient les cercles d'une famille (II) s'exprime par l'égalité

$$(\lambda, \lambda_0, \alpha_1, \beta_1) = (\mu, \mu_0, \alpha_2, \beta_2).$$

35. Figure inverse d'une famille de cercles (II). — L'inverse d'une sphère (A_1) passant par le cercle (C_1) est une sphère (a_1) passant par le cercle (c_1), inverse du cercle (C_1) (nous laissons au lecteur le soin de corriger le texte lorsqu'il est nécessaire d'écrire *plan* pour *sphère* et *droite* pour *cercle*); les centres A_1 et a_1 sont deux points de deux droites fixes, les axes (D_1) et (d_1) des cercles (C_1) et (c_1), alignés avec le pôle ω d'inversion. Les inverses des sphères (P_1) et (Q_1) sont des sphères (p_1) et (q_1) de rayons nuls; les points a_1 et A_1 se correspondent donc dans une homographie dont p_1 et P_1, q_1 et Q_1 sont des points homologues. Des constatations analogues peuvent être faites pour les centres A_2 et a_2 de la sphère (A_2) et de la sphère inverse.

Le cercle (Σ) d'intersection des sphères (A_1) et (A_2) sera un cercle d'une famille (II) si A_1 et A_2 se correspondent dans une homographie dont les couples de points P_1, P_2 et Q_1, Q_2 sont des couples de points homologues. Mais cette hypothèse, rapprochée des résultats établis au paragraphe précédent, entraîne que a_1 et a_2 se correspondent dans une homographie dont les couples de points p_1, p_2 et q_1, q_2 sont des couples de points homologues : le cercle (σ) d'intersection des sphères (a_1) et (a_2), cercle inverse du cercle (Σ), appartient donc à une famille de cercles (II). Nous énoncerons donc :

La figure inverse d'une famille de cercles (II) est une famille de cercles (II).

36. Application. — Soit Σ un cercle de la congruence $[C_1 . C_2]$; l'inversion déjà utilisée au § **32** transforme le cercle (Σ) en un cercle (σ), défini par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\mu Rz - R^2 = 0,$$
$$\lambda(x - a) + y \sin\theta - z\cos\theta = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les cercles (Σ) appartiennent à une famille (II) est que les cercles inverses (σ) appartiennent à une famille (II), c'est-à-dire que λ et μ se correspondent homographiquement de manière que les valeurs $+i$ ou $-i$ de λ qui correspondent aux plans isotropes soient homologues des valeurs $+i$ ou $-i$ de μ qui correspondent aux sphères de rayon nul.

Si les cercles (C_1) *et* (C_2) *ne forment pas un anneau paratactique*, ou bien $\lambda = +i$ correspond à $\mu = +i$, ou bien $\lambda = +i$ correspond à $\mu = -i$; λ et μ sont alors liés par une des deux relations

$$(4) \qquad A(\lambda\mu - 1) + B(\lambda + \mu) = 0,$$
$$(5) \qquad A(\lambda\mu + 1) + B(\lambda - \mu) = 0,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Si les cercles (C_1) *et* (C_2) *forment un anneau paratactique*, c'est que l'on a $a = R\cos\theta$, et $\lambda = +i$ correspond à $\mu = -i$; la relation entre λ et μ est alors

$$(4) \qquad A(\lambda\mu - 1) + B(\lambda + \mu) = 0.$$

37. Cercles coupant sous le même angle deux cercles aparatactiques. — Supposons d'abord que (C_1) et (C_2) soient aparatactiques. La condition nécessaire et suffisante (**32**) pour que $\sin^2 u = \sin^2 v$ est $\lambda^2\mu^2 = 1$, puisqu'on passe de l'expression qui donne $\sin^2 u$ à celle qui donne $\sin^2 v$ en remplaçant μ^2 par $\frac{1}{\lambda^2}$ et que ces expressions sont des fonctions homographiques de λ^2 et μ^2. Or la condition $\sin^2 u = \sin^2 v$ entraîne $u = v$ et (**17**) à cause des égalités

$$\sin u = \sin\alpha \sin V, \qquad \sin v = \sin\beta \sin V, \qquad \alpha = \beta;$$

réciproquement d'ailleurs, si $\alpha = \beta$, $u = v$.

La condition nécessaire et suffisante pour que le cercle (Σ) du § **36** coupe sous le même angle les cercles (C_1) et (C_2) se décompose en deux relations, qui sont

$$\lambda\mu - 1 = 0,$$
$$\lambda\mu + 1 = 0.$$

Ces relations sont un cas particulier des relations (4) et (5), celui dans lequel à la valeur $\lambda = 0$ correspond μ infini, ou bien à λ infini $\mu = 0$.

Nous observerons que les systèmes de valeurs $\lambda = 0$, $\mu = \infty$, ou $\lambda = \infty$, $\mu = 0$ définissent les cercles (σ) perpendiculaires au cercle (C) et à la droite (D). Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Les cercles qui coupent sous le même angle deux cercles aparatactiques (C_1) *et* (C_2) *forment deux familles de cercles* (II) *définis par l'un ou l'autre des cercles perpendiculaires à ces deux cercles* (voy. nos **135** et **147**).

Ces deux familles de cercles sont parfaitement définies.

38. Il est aisé (notations du § 32) de calculer l'angle V des sphères (A_1) et (A_2). Il est égal à l'angle V des figures inverses : le plan (a_1) et la sphère (a_2); le cosinus de cet angle est égal au quotient de la distance du centre de la sphère (a_2) au plan (a_1) et du rayon de cette sphère : il est défini par l'égalité

$$\cos^2 V = \frac{(\lambda a + \mu r \cos\theta)^2}{r^2(1+\mu^2)(1+\lambda^2)}.$$

Cette expression, lorsque, par hypothèse, les cercles (C_1) et (C_2) sont paratactiques, devient $(a = r\cos\theta)$:

$$\cos^2 V = \frac{(\lambda+\mu)^2}{(1+\mu^2)(1+\lambda^2)}\cos^2\theta,$$

ou encore

$$\cos^2 V = \frac{(\lambda+\mu)^2}{(1-\lambda\mu)^2+(\lambda+\mu)^2}\cos^2\theta.$$

Nous constatons donc que la condition nécessaire et suffisante pour que l'angle V soit constant est que λ et μ soient liés par une relation de la forme (4).

39. Cercles coupant sous le même angle constant deux cercles paratactiques. — Soient (C_1) et (C_2) deux cercles paratactiques. Nous avons vu (**26**) que les cercles (Σ) de la congruence $[C_1 . C_2]$ coupaient sous le même angle les cercles (C_1) et (C_2) et que cette valeur commune $\alpha = \beta$ est déterminée par l'égalité $\sin\theta = \sin\alpha \sin V$. La condition nécessaire et suffisante pour que α demeure constant est donc que V soit constant, c'est-à-dire que λ et μ soient liés par la relation (4); or ceci exprime (**36**) que les cercles (σ), et par conséquent les cercles inverses (Σ), sont des cercles d'une famille (II).

Nous énoncerons donc la propriété suivante, qui complète la proposition qui termine le § **26** :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle variable (Σ) *de la congruence définie par les cercles* (C_1) *et* (C_2) *d'un anneau paratactique coupe les cercles* (C_1) *et* (C_2) *sous des angles constants (et égaux) est que ce cercle appartienne à une famille* (II).

On vérifiera d'ailleurs qu'à une valeur donnée α de cet angle constant supérieure à l'angle θ de parataxie, il correspond, en général, deux familles de cercles (II) distincts. Il en correspond une seule dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Les cercles perpendiculaires à deux cercles (C_1) *et* (C_2) *formant un anneau paratactique font partie de la famille unique de cercles* (II) *définie par un quelconque d'entre eux.*

40. Équation de la surface (W) (n° **28**). — L'extrême simplicité avec laquelle on peut définir analytiquement une famille de cercles (II)

peut être utilisée, dans la plupart des cas, pour trouver avec un minimum de calculs les cercles perpendiculaires ou isogonaux à deux cercles donnés. Nous allons en donner un exemple en reprenant, dans un cas particulier, le problème, déjà résolu au § **28**, de la recherche de la surface (W) engendrée par les cercles perpendiculaires à deux cercles paratactiques donnés (C_1) et (C_2).

Nous avons vu (**30**) qu'une inversion permet de transformer ces deux cercles en deux cercles ayant un diamètre commun. Supposons cette inversion faite et soient (C_1) et (C_2) les cercles donnés, d'équations

$$(C_1)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2rz\operatorname{cotg}\varphi - r^2 = 0,\\ y\cos\omega - x\sin\omega = 0;\end{cases}$$

$$(C_2)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2rz\operatorname{cotg}\varphi' - r^2 = 0,\\ y\cos\omega' - x\sin\omega' = 0.\end{cases}$$

L'axe des z est le diamètre commun; le cercle $z = 0$, $x^2+y^2-r^2=0$ est le cercle perpendiculaire aux cercles (C_1) et (C_2) qui forme avec Oz un anneau orthogonal.

Les coordonnées du foyer P_1 du cercle (C_1) seront, par exemple, $-ir\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}$, $ir\frac{\cos\omega}{\sin\varphi}$, $r\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Celles du foyer P_2 du cercle (C_2) sont $-ir\frac{\sin\omega'}{\sin\varphi'}$, $ir\frac{\cos\omega'}{\sin\varphi'}$, $r\frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'}$. La condition de parataxie $P_1P_2 = 0$ se réduit à

$$\cos(\varphi-\varphi') = \cos(\omega-\omega'),$$

ce qui entraîne soit $\varphi-\varphi' = \omega-\omega'+2k\pi$, soit $\varphi-\varphi' = \omega'-\omega+2k\pi$. Les nombres $\omega, \omega', \varphi, \varphi'$ sont des paramètres; mais, les axes choisis pouvant être remplacés par d'autres déduits des premiers par une rotation autour de Oz, ω est à notre disposition : si l'on a $\varphi-\varphi' = \omega-\omega'+2k\pi$, nous choisirons $\omega = \varphi$ et par conséquent $\omega' = \varphi'$; si l'on a $\varphi-\varphi' = \omega'-\omega+2k\pi$, nous choisirons $\omega = -\varphi$ et $\omega' = -\varphi'$. Il est évident que ces deux cas ne sont pas distincts; nous nous bornerons donc au cas $\omega = \varphi$, $\omega' = \varphi'$.

Un cercle (Σ) de la congruence $[C_1 . C_2]$ est défini par les équations

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2\lambda rx - 2\lambda ry\operatorname{cotg}\varphi - 2rz\operatorname{cotg}\varphi - r^2 = 0,\\ x^2+y^2+z^2+2\mu rx - 2\mu ry\operatorname{cotg}\varphi' - 2rz\operatorname{cotg}\varphi' - r^2 = 0.\end{cases}$$

La valeur $\lambda = i$ correspond à la sphère (P_1) et $\mu = i$ correspond à la sphère (P_2).

La condition nécessaire et suffisante pour que le cercle (Σ) soit un cercle (II) est que λ et μ se correspondent dans une homographie dont i et $-i$ sont les valeurs doubles, c'est-à-dire soient liés par la relation

$$A(\lambda\mu + 1) + B(\lambda - \mu) = 0,$$

A et B étant des constantes données. Les cercles (Σ) correspondants coupent les cercles (C_1) et (C_2) sous un angle constant α.

Pour que les cercles (Σ) soient perpendiculaires aux cercles donnés, il suffit que A et B soient choisis de manière que l'un d'eux soit un cercle perpendiculaire; or le système de valeurs $\lambda = 0$, $\mu = 0$ en définit un : il suffit donc que $A = 0$ et que par conséquent $\lambda = \mu$.

La surface (W) engendrée par les cercles perpendiculaires aux cercles (C_1) et (C_2) a pour équation cartésienne

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 2rz \operatorname{cotg} \varphi}{x - y \operatorname{cotg} \varphi} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 2rz \operatorname{cotg} \varphi'}{x - y \operatorname{cotg} \varphi'}.$$

Ces deux expressions sont deux valeurs d'une même fonction homographique pour des valeurs distinctes $\operatorname{cotg} \varphi$ et $\operatorname{cotg} \varphi'$ de la variable; cette fonction est donc décomposée et l'équation de la surface (W) est

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)y = 2rxz.$$

Elle est indépendante de φ et de φ'.

La surface engendrée par les cercles perpendiculaires à deux cercles paratactiques donnés (C_1) *et* (C_2) *est par conséquent la surface inverse d'une surface fixe.*

Cet important résultat sera précisé ultérieurement.

Les inversions dont il est question dans cet énoncé sont celles qui transforment un couple de cercles perpendiculaires dans le cercle (C) et la droite (D) : la puissance d'inversion permet de donner à la constante r une valeur donnée, choisie à l'avance.

41. L'étude de la figure formée par deux cercles réels, que nous avons entreprise et poursuivie dans les paragraphes précédents, n'a nécessité jusqu'ici qu'un appareil analytique modeste : nous avons raisonné le plus possible sur des figures de géométrie réelle, transformées par des inversions réelles, en n'introduisant les éléments imaginaires que pour énoncer simplement les résultats. Cette étude nous conduit, d'une façon à peu près inévitable, à l'étude des cercles (Π). Ces cercles, dont les axes engendrent une quadrique (H) réglée et qui sont orthogonaux à une sphère fixe (O) imaginaire, mais de centre réel, sont les cercles générateurs d'une surface bien connue de ceux de nos lecteurs qui ont étudié la géométrie analytique. La surface engendrée appartient à la famille des cyclides; mais elle n'est pas une cyclide quelconque : il conviendrait de l'identifier.

Nous pourrions procéder à cette identification en utilisant quelques résultats classiques ou réputés tels sur les cyclides et terminer l'étude précédente en nous bornant à démontrer géométriquement que la condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles soient paratactiques est qu'ils soient inverses de deux cercles d'Yvon Villarceau d'un tore.

Nous avons préféré supposer que nos lecteurs ignorent ou ont oublié lesdits résultats classiques sur les cyclides; nous allons donc consacrer les chapitres suivants à les établir et à montrer que l'étude patiente, méthodique et logique des cyclides aurait dû conduire les géomètres à l'étude de la parataxie, alors qu'en fait c'est une étude logique de la parataxie qui nous a ramené aux cercles (Π) et par eux aux cyclides.

L'étude des surfaces cyclides, bien qu'elle ait une origine géométrique, est une étude analytique.

DEUXIÈME PARTIE

CYCLIDES : PROPRIÉTÉS ET CLASSIFICATION

CHAPITRE VII

FAISCEAU QUADRATIQUE ET CONGRUENCE LINÉAIRE DE SPHÈRES

42. Notations. — Les axes de coordonnées sont, par hypothèse, les arêtes d'un trièdre trirectangle $Oxyz$. Nous désignons par p l'un des nombres naturels 1, 2, 3, 4; nous appellerons a_p, c_p, c'_p, c''_p, d_p des constantes qui, sauf spécification contraire, sont des constantes réelles.

Nous désignerons par S_p le polynome

$$S_p = a_p(x^2 + y^2 + z^2) + 2c_px + 2c'_py + 2c''_pz + d_p.$$

La surface (S_p) dont l'équation est

$$S_p = 0$$

est, lorsque a_p est différent de zéro, une sphère dont le centre est réel : lorsque a_p est nul, cette surface est, en général, un plan.

Effectuons un changement d'axes de coordonnées quelconques, de manière que les nouveaux axes soient rectangulaires; nous désignerons par S'_p le polynome obtenu en remplaçant dans S_p les coordonnées x, y, z par leurs valeurs en fonction de coordonnées nouvelles, en sorte que

$$S'_p = 0$$

sera l'équation de la surface (S_p) dans les nouveaux axes.

Les formules qui, dans le système d'axes donnés $Oxyz$, donnent les coordonnées d'un point M (x, y, z) en fonction des coordonnées du point inverse M' (X, Y, Z) dans l'inversion de pôle O et de puissance k sont

$$x = \frac{kX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad y = \frac{kY}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad z = \frac{kZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Il en résulte que l'équation de la surface (Σ_p) inverse de la sphère (S_p) dans l'inversion précédente est

$$a_p k^2 + 2kc_p X + 2kc'_p Y + 2kc''_p Z + d_p(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Nous désignerons par Σ_p le polynome écrit dans le premier membre, en sorte que l'équation de la sphère (Σ_p) inverse soit

$$\Sigma_p = 0.$$

43. Faisceau quadratique de sphères. — Soient

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 0$$

les équations de trois sphères (S_1), (S_2), (S_3), le mot sphère désignant, comme d'usage en analytique, une sphère ou un plan. Nous supposerons essentiellement que les sphères (S_1), (S_2), (S_3) ne sont pas trois sphères d'un faisceau linéaire et que deux quelconques d'entre elles ne sont pas confondues.

Dans ces conditions, nous appellerons *faisceau quadratique de sphères* dont les sphères de base sont les sphères (S_1), (S_2), (S_3) les sphères (Σ) variables dont l'équation est

$$S_1 t^2 + 2S_2 t + S_3 = 0.$$

La propriété d'une sphère (Σ) *d'appartenir à un faisceau quadratique est indépendante du choix des axes.*

En effet, effectuons (42) un changement d'axes de coordonnées rectangulaires; l'équation de la sphère (Σ) dans les nouveaux axes sera

$$S'_1 t^2 + 2S'_2 t + S'_3 = 0.$$

Ceci démontre la proposition.

La figure inverse d'un faisceau quadratique est un faisceau quadratique.

Effectuons un changement d'axes préalable, de manière que l'origine des coordonnées soit le pôle de l'inversion donnée; soit

$$S_1 t^2 + 2S_2 t + S_3 = 0$$

l'équation de la sphère (Σ) dans ces nouveaux axes. L'équation de la sphère (Σ'), inverse de (Σ), sera (42)

$$\Sigma_1 t^2 + 2\Sigma_2 t + \Sigma_3 = 0.$$

Les sphères (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) sont les sphères inverses des sphères de base; celles-ci, par hypothèse, sont distinctes et ne sont pas des sphères d'un faisceau linéaire; les sphères inverses sont, par conséquent, également

distinctes et ne sont pas les sphères d'un faisceau linéaire. La sphère (Σ'), dont l'équation est

$$\Sigma_1 t^2 + 2\Sigma_2 t + \Sigma_3 = 0,$$

appartient, par conséquent, à un faisceau quadratique.

44. Lieu des centres. — Nous nous proposons de dégager les propriétés géométriques des sphères d'un faisceau quadratique. Nous écarterons le cas où, a_1, a_2, a_3 étant nuls tous les trois, il s'agit de plans qui sont, en général, tangents soit à un cône, soit à un cylindre du deuxième degré; nous écarterons également le cas où les centres des sphères de base sont alignés. Dans ce cas, les centres des sphères (Σ) du faisceau sont alignés et l'interprétation géométrique n'est pas simple.

Nous bornerons donc notre étude au cas où les centres des sphères de base (S_1), (S_2), (S_3) ne sont pas alignés.

Nous remarquerons, géométriquement, que les sphères (Σ) sont extraites du réseau linéaire défini par les trois sphères (S_1), (S_2), (S_3). Nous pouvons donc affirmer que les sphères (Σ) demeurent orthogonales aux sphères du faisceau linéaire orthogonal. Le calcul qui suit a pour objet de préciser la condition supplémentaire qui les caractérise.

Les centres des trois sphères (S_1), (S_2), (S_3), n'étant pas alignés, déterminent un plan (P); en outre, ces sphères ont un axe radical. Nous choisirons cet axe radical pour axe Oz et le plan (P) pour plan xOy; nous désignerons par k la puissance commune de l'origine O par rapport aux sphères (S_1), (S_2), (S_3). L'équation, par rapport à ce système d'axes, des sphères (Σ) sera

$$\begin{aligned}(a_1t^2 + 2a_2t + a_3)(x^2 + y^2 + z^2 + k) - 2(c_1t^2 + 2c_2t + c_3)x \\ - 2(c'_1t^2 + 2c'_2t + c'_3)y = 0.\end{aligned}$$

Nous constatons que les sphères (Σ) sont orthogonales aux sphères d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z - k = 0,$$

λ étant un paramètre arbitrairement choisi, et que leur centre décrit la conique dont l'équation, en coordonnées paramétriques, est

$$x = \frac{c_1t^2 + 2c_2t + c_3}{a_1t^2 + 2a_2t + a_3}, \qquad y = \frac{c'_1t^2 + 2c'_2t + c'_3}{a_1t^2 + 2a_2t + a_3}, \qquad z = 0.$$

Cette conique est une conique non décomposée; en effet, puisque les centres des sphères (S_1), (S_2), (S_3) ne sont pas alignés, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. La conique lieu des centres est donc une ellipse ou une hyperbole si $a_2^2 - a_1 a_3$ est différent de zéro, et une parabole si cette quantité est nulle.

Les sphères (Σ) orthogonales aux sphères d'un faisceau linéaire peuvent être caractérisées par la propriété d'être orthogonales à un cercle (C) du plan (P) dont les équations sont

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - k = 0.$$

Elles passent donc par deux points fixes P et Q, réels et distincts si k est négatif, imaginaires conjugués si k est positif, exceptionnellement confondus.

Si P et Q sont réels, le cercle (C), dont le centre est réel, est imaginaire. Le faisceau quadratique inverse du faisceau donné dans une inversion de pôle P est un faisceau quadratique de plans tangents à un cône; et réciproquement, le faisceau quadratique inverse du faisceau quadratique de plans, que nous avons écarté de notre étude (cas où a_1, a_2, a_3 sont nuls), est, en général, un faisceau quadratique de sphères passant par deux points fixes défini comme ci-dessus.

Si P et Q sont imaginaires conjugués, le cercle (C) est réel. La figure inverse du faisceau quadratique donné, dans une inversion dont le pôle I est un point du cercle (C), est un faisceau quadratique de sphères orthogonales à une droite fixe (D), dont les centres sont, par conséquent, alignés. Réciproquement, la figure inverse d'un faisceau quadratique de sphères dont les centres sont alignés sur une droite (D), faisceau que nous avons écarté de notre étude, dans une inversion dont le centre n'est pas sur la droite (D), est un faisceau quadratique défini comme ci-dessus.

Nous résumerons l'étude précédente en énonçant le résultat suivant :

Les sphères d'un faisceau quadratique sont, en général, des sphères dont le centre décrit une conique réelle non décomposée et qui sont orthogonales à une sphère fixe.

La conique lieu des centres est, par définition, la *déférente* du faisceau; les sphères du faisceau sont orthogonales à une sphère fixe et au plan, également fixe, de la déférente; elles sont donc orthogonales à un faisceau linéaire de sphères fixes. L'une quelconque de celles-ci est, par définition, la *directrice* du faisceau.

45. Réciproque. — La réciproque de la proposition précédente est la suivante :

Les sphères (Σ) dont le centre décrit une conique réelle non décomposée et qui restent orthogonales à une sphère fixe sont les sphères d'un faisceau quadratique.

Nous choisirons pour plan xOy le plan de la conique, pour axe Oz la perpendiculaire à ce plan menée par le centre de la sphère orthogonale, centre qui, par hypothèse, est un point réel. Les coordonnées d'un point de la conique, lieu du centre de la sphère variable (Σ), peuvent être exprimées en fonction rationnelle d'un paramètre t :

$$x = \frac{c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3}{a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3}, \qquad y = \frac{c'_1 t^2 + 2c'_2 t + c'_3}{a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3}, \qquad z = 0.$$

L'équation de la sphère variable (Σ) sera donc de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\frac{c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3}{a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3}x - 2\frac{c'_1 t^2 + 2c'_2 t + c'_3}{a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3}y + \lambda = 0,$$

λ étant une inconnue déterminée par la condition que la sphère (Σ) est orthogonale à une sphère fixe, d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2zz_0 - k = 0.$$

Cette condition est

$$\lambda = k.$$

L'équation de la sphère (Σ) est par conséquent, dans le système d'axes choisis,

$$(a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3)x$$
$$- 2(c'_1 t^2 + 2c'_2 t + c'_3)y + k(a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3) = 0.$$

Les sphères (Σ) sont donc bien les sphères d'un faisceau quadratique.

46. Enveloppe. — Les sphères (Σ) d'un faisceau quadratique

$$S_1 t^2 + 2\,S_2 t + S_3 = 0$$

ont, lorsque les sphères (S_1), (S_2), (S_3) ne sont pas trois sphères d'un faisceau linéaire, une enveloppe (E), dont l'équation est

$$(S_2)^2 - S_1 S_3 = 0.$$

Le polynome $(S_2)^2 - S_1 S_3$ est de degré inférieur ou égal à 4 :

$$\begin{aligned}(S_2)^2 - S_1 S_3 = {} & (a_2^2 - a_1 a_3)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ & + 2(x^2 + y^2 + z^2)\,P \\ & + \text{des termes de degré inférieur à trois.}\end{aligned}$$

$$P \equiv 2a_2(c_2 x + c'_2 y + c''_2 z) - a_1(c_3 x + c'_3 y + c''_3 z) - a_3(c_1 x + c'_1 y + c''_1 z)$$

L'enveloppe (E) est donc une surface algébrique. Si cette surface est du quatrième degré, l'ombilicale en est une ligne de points doubles; si elle est de degré trois, l'ombilicale en est une ligne de points simples; elle peut exceptionnellement être du second degré. Les sphères (Σ) touchent leur enveloppe en tous les points d'une ligne caractéristique qui est un cercle : la surface (E) engendrée par des cercles est dite *cercée*.

Il est possible de préciser que, lorsque le faisceau quadratique est défini par une déférente et une directrice, l'enveloppe (E) est du quatrième degré lorsque la déférente est une conique à centre et du troisième lorsque la déférente est une parabole. Les axes des cercles de contact des sphères (Σ) avec leur enveloppe sont tangents à la déférente et, par conséquent, le plan de la déférente est un plan de symétrie pour la surface (E).

Lorsque l'enveloppe (E) est du second degré, elle est de révolution (nous écartons toujours le cas $a_1 = a_2 = a_3 = 0$); les centres des sphères (Σ) décrivent une droite, et l'absence de déférente nous indique que les centres des sphères (S_1), (S_2), (S_3) sont alignés; mais lorsque les centres de ces sphères sont alignés, l'enveloppe (E) n'est pas nécessairement du second degré.

47. Congruence bilinéaire de sphères. Définition. — Les axes et les notations étant les mêmes qu'au § **42**, soient

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 0, \qquad S_4 = 0$$

les équations de quatre sphères (S_1), (S_2), (S_3), (S_4), le mot sphère continuant à désigner, comme d'usage, une sphère ou un plan.

Rappelons tout d'abord que, α, β, γ étant des paramètres variables, on appelle *congruence linéaire ou réseau de sphères* défini par trois sphères (S_1), (S_2), (S_3) distinctes et n'appartenant pas à un faisceau linéaire, la famille de sphères dont l'équation peut être mise sous la forme

$$\alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3 = 0.$$

Les sphères (S_1), (S_2), (S_3) sont, par définition, les bases de la congruence linéaire. On vérifiera que la propriété pour une sphère d'appartenir à une congruence linéaire est indépendante du choix des axes et que l'inverse d'une congruence linéaire de sphères est une congruence linéaire de sphères. Les sphères d'une congruence linéaire sont, en général, orthogonales à un cercle fixe et, partant, à toutes les sphères qui passent par ce cercle, exceptionnellement à une droite fixe. Dans le premier ce ces deux cas, elles ont en commun deux points, réels ou imaginaires, généralement distincts.

Nous dirons qu'*une sphère variable (Σ) est une sphère d'une congruence bilinéaire définie par les sphères de base (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) distinctes et n'appartenant ni à un faisceau linéaire de sphères, ni à une congruence linéaire de sphères, lorsque son équation sera de la forme*

$$S_1\lambda\mu + S_2\lambda + S_3\mu + S_4 = 0.$$

Dans cette équation, λ et μ sont deux variables indépendantes qui peuvent être remplacées par deux valeurs arbitrairement choisies.

La propriété d'une sphère (Σ) d'appartenir à une congruence bilinéaire est indépendante du choix des axes.

En effet, effectuons (**36**) un changement d'axes de coordonnées rectangulaires : l'équation de la sphère (Σ) dans les nouveaux axes sera

$$S_1'\lambda\mu + S_2'\lambda + S_3'\mu + S_4' = 0.$$

Cela démontre la proposition.

La figure inverse d'une congruence bilinéaire de sphères est une congruence bilinéaire.

Effectuons un changement d'axes préalable, de manière que l'origine des coordonnées soit le pôle de l'inversion donnée; soit (**42**)

$$\Sigma_1\lambda\mu + \Sigma_2\lambda + \Sigma_3\mu + \Sigma_4 = 0$$

l'équation de la sphère (Σ'), inverse de la sphère (Σ) d'une congruence bilinéaire donnée (C). Si les sphères (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3), (Σ_4) n'étaient pas distinctes ou si elles appartenaient soit à un faisceau, soit à une congruence linéaire, il en serait de même des sphères inverses (S_1), (S_2), (S_3), $S_4)$, ce qui n'est pas conforme aux hypothèses faites. Il n'en est doncpas ainsi, et les sphères (Σ') sont les sphères d'une congruence (C') bilinaire.

48. Lieu des centres. — Nous nous proposons de dégager les propriétés géométriques des sphères d'une congruence bilinéaire. Nous écarterons le cas où, a_1, a_2, a_3, a_4 étant tous nuls, il s'agit d'une congruence bilinéaire de plans tangents à une quadrique réglée non développable. Nous écarterons également le cas où les centres des sphères de base sont dans un même plan : dans ce cas, les centres des sphères (Σ) de la congruence sont dans un plan et l'interprétation géométrique n'est pas simple.

Nous bornerons donc notre étude au cas où, les centres des sphères (S), (S_2), (S_3), (S_4) n'étant pas dans un même plan, le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1' & c_2' & c_3' & c_4' \\ c_1'' & c_2'' & c_3'' & c_4'' \end{vmatrix}$$

et différent de zéro ($\delta \neq 0$). Les axes sont supposés rectangulaires deux à deux, mais quelconques.

Le centre d'une sphère (Σ) dont les coordonnées sont

$$x = \frac{c_1\lambda\mu + c_2\lambda + c_3\mu + c_4}{a_1\lambda\mu + a_2\lambda + a_3\mu + a_4}, \qquad y = \frac{c_1'\lambda\mu + c_2'\lambda + c_3'\mu + c_4'}{a_1\lambda\mu + a_2\lambda + a_3\mu + a_4},$$

$$z = \frac{c''_1\lambda\mu + c''_2\lambda + c''_3\mu + c''_4}{a_1\lambda\mu + a_2\lambda + a_3\mu + a_4}$$

est un point d'une quadrique (H) réglée, non développable, puisque, par hypothèse, δ est différent de zéro.

D'autre part, les centres des quatre sphères (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) n'étant pas, par hypothèse, alignés, il existe un point O, centre radical de ces sphères, dont la puissance par rapport aux quatre sphères a la même valeur k. La puissance de ce point par rapport à la sphère (Σ) est la valeur que prend le rapport

$$\frac{S_1\lambda\mu + S_2\lambda + S_3\mu + S_4}{a_1\lambda\mu + a_2\lambda + a_3\mu + a_4}$$

lorsqu'on y remplace x, y, z par les coordonnées du point O; comme, pour ces valeurs, S_1 prend la valeur ka_1, S_2 la valeur ka_2, etc., le rapport prend la valeur k. Les sphères (Σ) sont par conséquent orhogonales à une sphère de centre O, dont le rayon R est défini par l'égalité

$$R^2 = k.$$

Dans le cas présent, les coefficients $a_1, \ldots, d_1$ étant réels, O est un point réel et k un nombre réel, et la sphère orthogonale est une sphère dont l'équation cartésienne est à coefficients réels. Nous énoncerons ces résultats en disant :

Les sphères d'une congruence bilinéaire sont, en général, des sphères dont le centre décrit une quadrique réglée non développable et qui demeurent orthogonales à une sphère fixe.

La quadrique (H), lieu des centres, est appelée la *déférente* de la congruence, et la sphère orthogonale la *directrice.*

49. Réciproque.— La réciproque de cette proposition est la suivante :

Les sphères (Σ) dont le centre est un point quelconque d'une quadrique réglée non développable et qui demeurent orthogonales à une sphère fixe sont les sphères d'une congruence bilinéaire.

Les coordonnées d'un point d'une quadrique réglée non développable peuvent être exprimées en fonction des paramètres λ et μ qui définissent les génératrices de la surface par les équations

$$x_0 = \frac{c_1\lambda\mu + c_2\lambda + c_3\mu + c_4}{a_1\lambda\mu + a_2\lambda + a_3\mu + a_4}, \qquad y_0 = \frac{c'_1\lambda\mu + c'_2\lambda + c'_3\mu + c'_4}{a_1\lambda\mu + a_2\lambda + a_3\mu + a_4},$$

$$z_0 = \frac{c''_1\lambda\mu + c''_2\lambda + c''_3\mu + c''_4}{a_1\lambda\mu + a_2\lambda + a_3\mu + a_4}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la sphère variable (Σ), d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + h = 0,$$

soit orthogonale à une sphère fixe, d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + k = 0,$$

est que l'égalité

$$2\alpha x_0 + 2\beta y_0 + 2\gamma z_0 = h + k$$

soit satisfaite. Cette égalité définit la valeur de h, et celle-ci est évidemment de la forme

$$h = \frac{d_1\lambda\mu + d_2\lambda + d_3\mu + d_4}{a_1\lambda\mu + a_2\lambda + a_3\mu + a_4}.$$

L'équation de la sphère (Σ) est par conséquent de la forme

$$S_1\lambda\mu + S_2\lambda + S_3\mu + S_4 = 0.$$

Nous pourrons en conclure que la sphère (Σ) est une sphère d'une congruence bilinéaire, lorsque nous nous serons assuré que les sphères de base (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) sont distinctes et n'appartiennent ni à un faisceau, ni à une congruence linéaire. On constatera qu'il n'en est pas ainsi en vérifiant que l'une quelconque de ces hypothèses entraîne que le lieu des centres des sphères (Σ) est soit une droite, soit un plan; or ce lieu est, par hypothèse, une quadrique réglée. La sphère (Σ) est donc bien une sphère d'une congruence bilinéaire.

50. Cas particuliers. — 1° Il peut arriver que le rayon R (**48**) de la sphère directrice orthogonale aux sphères (Σ) soit nul. Les sphères (Σ) passent alors par un point fixe réel O (lorsque $a_1, a_2, \ldots, c''_4$ sont réels). Une inversion de pôle O transforme dans ce cas la congruence bilinéaire de sphères en une congruence bilinéaire de plans.

Réciproquement, la figure inverse d'une congruence bilinéaire de plans [cas $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ écarté de notre étude (**48**)] est une congruence bilinéaire de sphères étudiée plus haut (**48**) et définie géométriquement lorsque le pôle d'inversion n'est pas le point commun à tous ces plans.

2° Lorsque la sphère directrice (O) est réelle, une inversion dont le pôle est sur cette sphère transforme les sphères de base et les sphères (Σ) en des sphères dont les centres sont dans un même plan.

Réciproquement, considérons la congruence (C) bilinéaire de sphères définie par des sphères de base dont les centres sont dans un même plan (P) [ce cas a été (**48**) écarté de notre étude]. Une inversion dont le centre I n'est pas dans le plan (P) transforme les sphères de base de la congruence (C) en quatre sphères (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3), (Σ_4). Les centres de ces quatre sphères ne sont pas dans un même plan. En effet, si les centres des sphères (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3), (Σ_4) étaient dans un même plan, ce plan serait orthogonal à ces quatre sphères, et les quatre sphères inverses (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) seraient orthogonales soit à une sphère, soit à un plan différent du plan (P). Ces quatre sphères, orthogonales à la fois soit au plan (P) et à une sphère, soit à deux plans, seraient quatre sphères d'une congruence linéaire; il n'en est pas ainsi, par hypothèse, puisque les sphères (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) sont les sphères de base d'une congruence bilinéaire.

Nous pouvons donc affirmer que l'inverse d'une congruence bilinéaire (C) de sphères définie par des sphères de base dont les centres sont dans un même plan, lorsque le pôle d'inversion n'est pas dans ce plan, est une congruence bilinéaire définie (**48**) par une déférente et une directrice.

L'inversion ramène l'étude des cas exclus à celle du cas général.

51. Enveloppe. — Les sphères (Σ) d'une congruence bilinéaire

$$S_1\lambda\mu + S_2\lambda + S_3\mu + S_4 = 0$$

ont, lorsque les sphères (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) sont distinctes et ne sont pas quatre sphères d'un faisceau linéaire ou d'une congruence linéaire, une enveloppe (E) dont l'équation est

$$S_1S_4 - S_2S_3 = 0.$$

Le polynôme $S_1S_4 - S_2S_3$ est de degré inférieur ou égal à 4 :

$$\begin{aligned} S_1S_4 - S_2S_3 = {} & (a_1a_4 - a_2a_3)(x^2+y^2+z^2)^2 \\ & + 2(x^2+y^2+z^2)\mathrm{P} \\ & + \text{des termes de degré inférieur à trois.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \equiv {} & a_1(c_4x + c'_4y + c''_4z) + a_4(c_1x + c'_1y + c''_1z) \\ & - a_2(c_3x + c'_3y + c''_3z) - a_3(c_2x + c'_2y + c''_2z) \end{aligned}$$

L'enveloppe (E) est donc une surface algébrique; si cette surface est du quatrième degré, l'ombilicale en est une ligne de points doubles; si cette surface est du troisième degré, l'ombilicale en est une ligne de points simples; elle peut, exceptionnellement, être du second degré. Ces propriétés des surfaces enveloppes (E) sont aussi celles (**46**) des enveloppes des sphères des faisceaux quadratiques; mais dans le cas des congruences, les sphères (Σ) touchent leur enveloppe en deux points seulement, tandis que dans le cas des faisceaux, les sphères (Σ) touchent l'enveloppe en tous les points d'un cercle.

Lorsque le paramètre μ varie seul, les sphères (Σ) passent par un cercle fixe (λ), dont les équations sont

$$(\lambda) \qquad \begin{cases} S_1\lambda + S_3 = 0, \\ S_2\lambda + S_4 = 0. \end{cases}$$

Ce cercle est une courbe tracée sur l'enveloppe (E), puisqu'en éliminant λ entre les deux équations précédentes on trouve

$$S_1S_4 - S_2S_3 = 0,$$

équation de l'enveloppe (E).

Lorsque λ varie seul, les sphères (Σ) passent par un cercle fixe (μ), dont les équations sont

$$(\mu) \qquad \begin{cases} S_1\mu + S_2 = 0, \\ S_3\mu + S_4 = 0, \end{cases}$$

qui est aussi tracé sur l'enveloppe (E).

Les sphères (Σ) touchent leur enveloppe aux deux points communs aux cercles (λ) et (μ).

Par un point de la surface (E), il passe, en général, un cercle (λ) et un seul et un cercle (μ) et un seul. Ces deux cercles sont distincts; les cercles (λ) sont donc les cercles d'une famille à un paramètre, que nous appellerons *cercles du premier système de la génération* : les cercles (μ) sont alors les cercles d'une autre famille à un paramètre, que nous appellerons *cercles du second système de la génération.* Nous disons système de la génération et non pas système de la surface (E), parce que le mode de génération met en évidence ces deux familles de cercles, mais qu'il existe (nous le constaterons ultérieurement) sur la surface (E) des cercles qui ne sont ni des cercles (λ), ni des cercles (μ).

Il est évident que : *deux cercles de systèmes différents sont sur une même sphère* ou dans un même plan.

On vérifiera que : *Lorsque la congruence bilinéaire est définie par une directrice* (O) *et une déférente* (H), *les cercles* (λ) *et* (μ) *sont orthogonaux à la sphère directrice et leurs axes sont les génératrices de systèmes différents de la déférente* (H).

Réciproquement, d'ailleurs, un cercle orthogonal à la sphère directrice (O) et dont l'axe est une génératrice de la déférente est soit un cercle (λ), soit un cercle (μ) de la surface (E).

52. Définition des cyclides. — Nous appellerons *cyclides* les surfaces algébriques du quatrième degré admettant l'ombilicale comme ligne de points doubles et les surfaces algébriques du troisième degré admettant l'ombilicale comme ligne de points simples.

L'équation d'une cyclide est, en axes rectangulaires,

$$\begin{aligned} & \mathrm{A}(x^2+y^2+z^2)^2 + (\mathrm{B}x + \mathrm{C}y + \mathrm{D}z)(x^2+y^2+z^2) \\ & + ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'zx + 2byz + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0. \end{aligned}$$

A, B, C, D sont des constantes qui ne sont pas toutes nulles; a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', d sont des constantes. Nous n'étudierons que des surfaces cyclides dont l'équation est à coefficients réels.

La propriété, pour une surface, d'être une cyclide est une propriété métrique, indépendante, par conséquent, du choix des axes, à condition qu'ils soient les arêtes d'un trièdre trirectangle.

L'inverse d'une cyclide est une cyclide ou une quadrique. L'équation de l'inverse de la cyclide définie par l'équation précédente, dans l'inversion (O, k), est

$$\mathrm{A}k^4 + (\mathrm{B}x + \mathrm{C}y + \mathrm{D}z)k^3 + (ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'zx + 2byz)k^2 + (2cx + 2c'y + 2c''z)(x^2 + y^2 + z^2)k + d(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

La proposition est donc démontrée; en outre,

Lorsque le pôle d'inversion n'est pas un point de la cyclide, l'inverse est une cyclide de degré quatre. Lorsque le pôle est un point simple, l'inverse est de degré trois. Lorsque le pôle est un point double, l'inverse est une quadrique.

En particulier, *l'inverse d'une quadrique est une cyclide ayant un point double au moins.*

Constatons que l'enveloppe (E) des sphères d'un faisceau quadratique (**46**) est une cyclide; l'enveloppe (E) des sphères d'une congruence bilinéaire (**51**) est une cyclide. Les surfaces engendrées par les cercles (Π) définis (**40**) dans le chapitre VI sont les cercles d'une même famille d'une cyclide (W); la déférente du mode de génération est la quadrique (H) et la directrice est la sphère (O). Les cercles (C_1) et (C_2) sont deux cercles de l'autre famille de cercles de cette génération.

CHAPITRE VIII

GÉNÉRATION DES SURFACES CYCLIDES. POINTS MULTIPLES

53. Recherche des sphères bitangentes ou inscrites. — Étant donnée une cyclide, nous nous proposons de trouver les sphères qui sont soit bitangentes, soit inscrites dans cette surface. Nous procéderons à cette recherche, d'ailleurs classique, dans le but de démontrer qu'il existe soit des congruences bilinéaires de sphères bitangentes, soit des faisceaux quadratiques de sphères inscrites, de former leurs équations et de les dénombrer.

Pour former leurs équations, il faut opérer sur une cyclide quelconque et, par conséquent, résoudre le problème pour la cyclide du quatrième degré, puis pour la cyclide du troisième degré. Pour les dénombrer, il suffit d'opérer sur la cyclide du quatrième degré, par exemple, puisque (**52**) l'inverse d'une cyclide, lorsque le pôle d'inversion n'est pas un point de la cyclide, est de degré quatre.

Nous nous bornerons, les méthodes de recherche étant les mêmes dans les deux cas, à résoudre le problème pour la cyclide du quatrième degré dont l'équation (**52**) est

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + (\mathrm{B}x + \mathrm{C}y + \mathrm{D}z)(x^2 + y^2 + z^2) + f(x, y, z) = 0,$$

l'équation $f(x, y, z) = 0$ étant l'équation d'une quadrique (Q) quelconque, en général. Nous choisirons pour origine O des axes de coordonnées le point $\left(-\frac{\mathrm{B}}{4}, -\frac{\mathrm{C}}{4}, -\frac{\mathrm{D}}{4}\right)$ et pour axes Ox, Oy, Oz trois parallèles aux directions principales, ou à des directions principales s'il y en a plus de trois, de la quadrique (Q). L'équation de la cyclide, par rapport à ces nouveaux axes, sera l'équation

$$(1)\qquad (x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0.$$

Soit (Σ) une sphère, dont l'équation est

$$(2)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + h = 0.$$

α, β, γ, h sont des constantes arbitraires. L'intersection de la cyclide et de la sphère se compose de l'ombilicale et d'une biquadratique (B) définie par les deux équations

$$\begin{cases} (2\alpha x+2\beta y+2\gamma z-h)^2+ax^2+a'y^2+a''z^2+2cx+2c'y+2c''z+d=0, \\ x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+h=0. \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la sphère (Σ) soit ou bien bitangente à la cyclide ou bien inscrite est que, dans le faisceau linéaire de quadriques passant par la biquadratique

$$(3) \quad \begin{aligned} &(2\alpha x+2\beta y+2\gamma z-h)^2+(a+\lambda)x^2+(a'+\lambda)y^2+(a''+\lambda)z^2 \\ &+2(c-\alpha\lambda)x+2(c'-\beta\lambda)y+2(c''-\gamma\lambda)z+d+\lambda h=0, \end{aligned}$$

on trouve ou bien deux plans distincts ou bien deux plans confondus. Le problème de la recherche des sphères (Σ) est donc lié à celui de la recherche des points multiples de la quadrique d'équation (3).

Pour procéder à cette recherche, il sera commode d'introduire une inconnue nouvelle u, en posant

$$2\alpha x+2\beta y+2\gamma z-h=u.$$

Les équations qui définissent les coordonnées, s'ils existent, des points doubles de la quadrique d'équation (3) seront les cinq équations suivantes

$$\begin{aligned} 2\alpha u+(a+\lambda)x+c-\alpha\lambda&=0, \\ 2\beta u+(a'+\lambda)y+c'-\beta\lambda&=0, \\ 2\gamma u+(a''+\lambda)z+c''-\gamma\lambda&=0, \\ 2\alpha x+2\beta y+2\gamma z-h-u&=0, \\ -hu+(c-\alpha\lambda)x+(c'-\beta\lambda)y+(c''-\gamma\lambda)z+d+\lambda h&=0. \end{aligned}$$

Ce système est équivalent au système suivant

$$(4) \quad \begin{cases} 2\alpha u+(a+\lambda)x+c-\alpha\lambda=0, \\ 2\beta u+(a'+\lambda)y+c'-\beta\lambda=0, \\ 2\gamma u+(a''+\lambda)z+c''-\gamma\lambda=0, \\ 2\alpha x+2\beta y+2\gamma z-h-u=0, \\ 2cx+2c'y+2c''z-\lambda u-2hu+\lambda h+2d=0. \end{cases}$$

Il reste à discuter ce système, en considérant λ et u comme des inconnues auxiliaires, x, y, z étant les inconnues dont le ou les systèmes de solutions permettront de préciser le nombre des points doubles.

54. On trouvera en fin de volume (NOTE I) les détails de la discussion de ce système. Pour faciliter la lecture de l'exposé, nous donnerons ci-dessous les résultats obtenus : cela permettra au lecteur de poursuivre l'étude des chapitres suivants sans avoir à suivre les détours d'une discussion souvent intéressante, mais parfois longue.

55. Un premier résultat mis en évidence est que les cyclides enveloppes de sphères d'un faisceau quadratique (**46**) et les cyclides enveloppes de sphères d'une congruence bilinéaire (**51**) ne sont pas nécessairement des surfaces distinctes. Une cyclide donnée peut être en même temps une enveloppe de sphères à deux paramètres et une enveloppe de sphères à un paramètre, le second cas étant, *a priori*, moins commun que le premier.

Nous conviendrons d'appeler :

génération normale d'une cyclide la génération comme enveloppe de sphères (Σ) dont l'équation dépend de deux paramètres indépendants, et

génération exceptionnelle, la génération comme enveloppe de sphères (Σ) dont l'équation dépend d'un paramètre.

56. Générations normales. — Si l'on écrit

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = {}& 4c^2(a'+\lambda)(a''+\lambda)+4c'^2(a''+\lambda)(a+\lambda) \\ &+4c''^2(a'+\lambda)(a+\lambda)+(\lambda^2-4d)(a+\lambda)(a'+\lambda)(a''+\lambda), \end{aligned}$$

nous conviendrons d'appeler racines *singulières* de cette équation les racines $\lambda=-a$, $\lambda=-a'$, $\lambda=-a''$ (lorsque, naturellement, ces nombres sont racines).

La discussion conduit alors aux résultats généraux suivants :

1° A toute racine de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ correspond une génération normale, sauf si cette racine est singulière et multiple.

2° Les sphères (Σ) d'une génération normale sont toujours des sphères d'une congruence bilinéaire; donc :

a) elles sont orthogonales à une sphère directrice (O);

b) leurs centres décrivent une quadrique (H);

c) elles touchent leur enveloppe, en général, en deux points M et M'; il y a exception si la sphère (O) a un rayon nul; la cyclide (W) a alors un point double, et les sphères (Σ) d'une certaine génération passent par ce point et touchent la cyclide en un deuxième point.

Exceptionnellement, les centres de (Σ) peuvent être dans un plan (O), que l'on appelle *plan directeur* : cela arrive uniquement dans le cas d'une racine singulière et simple. Ce plan est évidemment un plan de symétrie pour (W). Il peut arriver que les trois générations normales soient à plans directeurs.

57. Générations exceptionnelles. — La discussion conduit aux résultats généraux suivants :

1° A toute racine singulière multiple de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ correspond soit une génération exceptionnelle, soit un cas de décomposition;

2° **Lorsque la racine est double, la génération est exceptionnelle et les sphères (Σ) sont toujours des sphères d'un faisceau quadratique ;** d'où l'on conclut que :

a) elles sont orthogonales à un cercle directeur fixe de rayon non nul;

b) leurs centres décrivent une conique déférente dont le plan est celui du cercle directeur (ce plan est un plan de symétrie pour la cyclide);

c) elles touchent leur enveloppe, en général, en tous les points sauf deux, au maximum, d'un cercle caractéristique.

Exceptionnellement, les centres de (Σ) peuvent être alignés; les sphères (Σ) sont orthogonales à la droite (D), lieu des centres; la cyclide est alors une cyclide de révolution d'axe (D). Cela arrive uniquement lorsque deux ou moins des coefficients a, a', a'' sont égaux.

58. Racine singulière triple. — La discussion conduit aux résultats suivants :

A toute racine singulière au moins triple correspond soit une génération exceptionnelle avec un cercle directeur de rayon nul, soit une cyclide décomposée.

Le dernier cas ne peut se produire que lorsque la cyclide se décompose en deux sphères et par conséquent *une cyclide qui n'est pas de révolution n'est pas décomposée.*

59. Classification des cyclides. — Nous nous proposons, dans cette partie de notre exposé, de classer en familles les cyclides dont l'équation est *à coefficients réels*, en n'utilisant pour les distinguer que des propriétés anallagmatiques (qui se conservent par inversion). Nous pourrons, par exemple, distinguer les cyclides par le nombre des générations exceptionnelles et par le nombre des générations normales; nous utiliserons aussi le nombre des points multiples; ce nombre est d'ailleurs lié comme nous allons le voir au nombre des générations

Les inversions que nous utiliserons sont des inversions dont le pôle est un point réel et la puissance un nombre réel.

60. Recherche des points multiples à distance finie. — Les équations qui donnent les coordonnées des points multiples à distance finie, s'ils existent, de la cyclide (W), d'équation

$$(x^2+y^2+z^2)^2+ax^2+a'y^2+a''z^2+2cx+2c'y+2c''z+d=0,$$

sont les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x(x^2+y^2+z^2)+\ ax+c\ =0,\\ 2y(x^2+y^2+z^2)+a'y+c'=0,\\ 2z(x^2+y^2+z^2)+a''z+c''=0,\\ ax^2+a'y^2+a''z^2+3cx+3c'y+3c''z+2d=0. \end{array}\right.$$

Nous remplacerons ce système par le système équivalent obtenu en introduisant l'inconnue auxiliaire $\lambda = 2(x^2+y^2+z^2)$:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x(a\ +\lambda)\ +c\ =0,\\ y(a'\ +\lambda)+c'\ =0,\\ z(a''+\lambda)+c''=0,\\ x^2+y^2+z^2-\dfrac{\lambda}{2}=0,\\ (a+\lambda)x^2+(a'+\lambda)y^2+(a''+\lambda)z^2+3cx+3c'y+3c''z-\dfrac{\lambda^2}{2}+2d=0. \end{array}\right.$$

61. Résultats. — Nous prions le lecteur de se reporter à la Note II, à la fin de l'ouvrage, pour les calculs, d'ailleurs faciles, qui permettent de résoudre ce système. Nous énoncerons ci-dessous les résultats que l'on obtient :

1° On est conduit, dans la recherche des points multiples à distance finie d'une cyclide (W), à distinguer deux cas : *cyclides non de révolution, cyclides de révolution*;

2° **La condition nécessaire et suffisante pour qu'une cyclide (W) non de révolution ait des points multiples est que l'équation $\varphi(\lambda)=0$ (56) ait des racines multiples;**

3° **A une racine multiple non singulière de l'équation $\varphi(\lambda)=0$, correspond un point multiple à distance finie;**

4° **A une racine multiple singulière de l'équation $\varphi(\lambda)=0$, correspondent deux points multiples (distincts *si la racine est double*, confondus *si elle est au moins triple*), réels ou imaginaires;**

5° **La condition nécessaire et suffisante pour qu'une cyclide (W) de révolution, non décomposée, ait un point multiple est que l'équation $\varphi(\lambda)=0$ ait une racine multiple non singulière.**

Il convient d'observer qu'à toute racine singulière double de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ correspond, d'une part (**57**), une génération exceptionnelle et d'autre part, deux points multiples (**61**), sauf si la cyclide (W) est de révolution. Autrement dit, *la présence d'une génération exceptionnelle entraîne soit que la cyclide* (W) *a deux points multiples, soit que la cyclide* (W) *est de révolution.*

Nous expliquerons plus loin le fait suivant, qui, *a priori*, peut paraître curieux : si (W) est une cyclide de révolution, sans points multiples à distance finie, la cyclide inverse (W'), dans une inversion quelconque (I) dont le pôle n'est pas sur l'axe de révolution, admet comme la cyclide (W) une génération exceptionnelle et par conséquent deux points multiples. L'inversion (I) a donc fait naître des points multiples; l'inversion qui permet de passer de (W') à (W) les ferait disparaître.

Nous conviendrons, pour cette raison, de dire que : *la propriété, pour une cyclide* (W), *d'être de révolution est, au point de vue anallagmatique, équivalente à la propriété de posséder deux points multiples.*

62. Ordre des points multiples. — Nous avons, dans les paragraphes précédents, parlé de points multiples d'une cyclide (W). Il est nécessaire de préciser leur ordre : cet ordre est inférieur au degré 4 de la cyclide; il est donc égal soit à 3, soit à 2.

Supposons qu'un point multiple ω soit *triple.* Joignons ω à un point variable M de l'ombilicale; la droite ωM, coupant en cinq points la cyclide (W), est une droite de cette surface; or cette droite ωM, lorsque M varie, engendre le cône isotrope ou sphère-point (ω). La cyclide (W) est donc décomposée en (ω) et en une autre sphère (S) qui passe par ω. La sphère (S) est évidemment réelle, puisqu'elle est coupée par une droite réelle passant par ω en un seul point réel distinct de ω. Nous avons donc démontré la proposition suivante :

Toute cyclide (W) *qui admet un point triple est décomposée en une sphère réelle* (S) *et en une sphère-point dont le centre est sur* (S).

Il est intéressant de former l'équation de la cyclide (W) qui admet un point triple; les coordonnées de ce point triple doivent annuler les dérivées secondes du premier membre de l'équation de (W); parmi les solutions possibles, choisissons le point dont les coordonnées sont $(0, 0, \alpha)$; les équations du problème de la recherche de (W) se réduisent aux suivantes

$$a + 2\alpha^2 = 0, \qquad a' + 2\alpha^2 = 0, \qquad a'' + 6\alpha^2 = 0,$$
$$c = 0, \qquad c' = 0, \qquad 2a''\alpha + 3c'' = 0, \qquad 3c''\alpha + 4d = 0,$$

et l'équation de la cyclide à point triple est

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2\alpha^2(x^2 + y^2) - 6\alpha^2 z^2 + 8\alpha^3 z - 3\alpha^4 = 0.$$

L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ de cette cyclide s'écrit

$$(\lambda - 2\alpha^2)^5 = 0.$$

Elle admet par conséquent une racine multiple d'ordre 5.

Puisque toute cyclide (W) qui admet un point triple à distance finie est décomposée, *les points multiples à distance finie d'une cyclide* (W) *non décomposée sont des points doubles.*

63. Recherche des modes de génération d'une cyclide donnée (W). — Les différents modes de génération trouvés précédemment sont les générations normales et les générations exceptionnelles : les générations normales sont les générations de la cyclide comme enveloppes de sphères (Σ) appartenant à une congruence bilinéaire et qui touchent leur enveloppe en deux points variables en général, exceptionnellement en un seul; les générations exceptionnelles sont les générations de la cyclide comme enveloppe de sphères (Σ) appartenant à un faisceau quadratique et qui touchent leur enveloppe en tous les points d'un cercle, à l'exception de deux, au maximum.

Nous avons vu (**47**) que la figure inverse d'une congruence bilinéaire de sphères est une congruence bilinéaire, le mot « sphère » étant utilisé, comme d'usage, pour désigner soit une sphère, soit un plan; nous avons vu aussi (**43**) que la figure inverse d'un faisceau quadratique de sphères est un faisceau quadratique.

Soit (I) une inversion de pôle I; bien que le choix du pôle soit indifférent, bornons-nous, pour plus de clarté, au seul cas où le pôle I n'est pas sur la cyclide (W). La figure inverse de la cyclide (W) est une cyclide (W'); la figure inverse d'une génération normale de (W) est une génération normale de (W'), et la figure inverse d'une génération exceptionnelle de (W) est une génération exceptionnelle de (W'). Il en résulte que le nombre des générations d'une cyclide (W) est égal au nombre des générations de même nature de la cyclide inverse (W').

Cela posé, rappelons qu'il existe deux sortes de générations normales : les unes correspondent aux racines non singulières de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$, les centres des sphères (Σ) de ces générations sont les points d'une quadrique (Q) appelée *déférente* et ces sphères sont orthogonales à une sphère fixe (O), appelée *directrice*; les autres correspondent aux racines singulières simples de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$; les centres des sphères (Σ) de ces générations sont dans un plan (P) et le rayon de ces sphères est déterminé par une condition qu'il est malaisé de définir géométriquement. Les sphères (Σ) étant encore orthogonales au plan (P), qui par conséquent remplace la directrice des autres générations normales, nous conviendrons de dire que le plan (P) est la *directrice* ou le *plan directeur* de la génération correspondante.

Rappelons aussi (**50**) que l'inverse d'une congruence bilinéaire à *plan directeur*, dans une inversion dont le pôle I n'est pas dans ce plan directeur, est une congruence bilinéaire à sphère directrice.

Rappelons également qu'il existe deux sortes de générations exceptionnelles. Pour les unes, les centres des sphères (Σ) de la génération sont en général les points d'une conique appelée *déférente* et ces sphères, orthogonales aux sphères d'un faisceau linéaire, sont orthogonales au cercle fixe de ce faisceau. Nous conviendrons d'appeler ce cercle le *cercle directeur* de la génération. Pour les autres, les centres des sphères (Σ) décrivent une droite (D), ces sphères remplissant en outre une condition qu'il est malaisé de définir géométriquement : la cyclide correspondante est alors de révolution autour de la droite (D). Comme les sphères (Σ) sont orthogonales à la droite (D), nous conviendrons encore d'appeler cette droite le cercle directeur ou la *droite directrice* de la génération.

Nous avons démontré (**44**) que la figure inverse d'un faisceau quadratique de sphères dont les centres sont alignés, dans une inversion dont le centre n'est pas sur la droite directrice, est un faisceau quadratique de sphères à cercle directeur.

Si la cyclide W, dont nous voulons caractériser les diverses générations, admet une ou plusieurs générations normales à plan directeur ou bien une génération exceptionnelle à droite directrice, nous la transformerons préalablement par une inversion dont le pôle I est un point qui n'est situé ni sur une des sphères ou plans directeurs, ni, s'il en existe, sur un des cercles directeurs ou sur une des droites directrices d'une des générations de la cyclide (W). La cyclide (W'), inverse de la cyclide (W) dans l'inversion (I), n'aura plus de plans directeurs et ne sera certainement pas de révolution. Nous substituerons à l'étude des générations de la cyclide (W) l'étude des générations de la cyclide (W'). Nous diminuons, par cette convention, le nombre des cas particuliers à étudier.

64. Cas où la cyclide n'a pas de génération exceptionnelle. — *Nous supposerons donc, dans les paragraphes suivants, que la cyclide* (W) *n'a pas de plans directeurs et n'est pas de révolution.* Puisqu'elle n'a pas, par hypothèse, de plans directeurs, l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ qui lui correspond n'a pas de racines singulières simples.

Nous supposerons d'abord (1[er] cas) que la cyclide W n'admet pas de génération exceptionnelle, c'est-à-dire que l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ n'a non plus aucune racine singulière multiple. Cette hypothèse se traduit par l'inéquation

$$(a - a')(a - a'')(a' - a'')cc'c'' \neq 0.$$

L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ est par conséquent du cinquième degré et ses racines sont les racines de l'équation équivalente $u(\lambda) = 0$, obtenue en posant

$$u(\lambda) = \frac{4c^2}{a+\lambda} + \frac{4c'^2}{a'+\lambda} + \frac{4c''^2}{a''+\lambda} + \lambda^2 - 4d.$$

Nous allons étudier sommairement la réalité des racines de l'équation $u(\lambda) = 0$.

Supposons que l'on ait

$$a < a' < a''.$$

L'équation a une ou trois racines réelles dans chacun des intervalles suivants :

$$(-\infty, -a''), \qquad (-a'', -a'), \qquad (-a', -a),$$

et zéro ou deux dans l'intervalle

$$(-\infty, \ +a).$$

Désignons par λ_1, λ_2, λ_3 trois racines réelles et distinctes choisies dans chacun des trois premiers intervalles. Si ces trois racines sont simples, l'équation $u(\lambda) = 0$ a deux autres racines, réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues, donc, au maximum, une racine double. Si l'une de ces trois racines, λ_1 par exemple, est double, il y a dans le premier intervalle une racine λ_1' réelle, distincte de λ_1 : l'équation $u(\lambda) = 0$ a donc une racine double, λ_1, et trois racines nécessairement simples et distinctes, λ'_1, λ_2, λ_3. Si l'une de ces trois racines, λ_1 par exemple, est triple, l'équation a une racine triple, λ_1, et deux simples, λ_2 et λ_3.

En résumé, l'équation $u(\lambda) = 0$ ou l'équation équivalente $\varphi(\lambda) = 0$ a au minimum trois racines réelles et distinctes et au maximum une racine multiple; celle-ci, quand elle existe, étant seule de son ordre de multiplicité, est une racine réelle.

Nous désignerons plus loin par λ_1, λ_2, λ_3 trois racines réelles et distinctes de l'équation $u(\lambda) = 0$. Lorsque cette équation n'a pas de racine triple, il est possible de choisir ces racines de manière que $u'(\lambda_1)$, $u'(\lambda_2)$, $u'(\lambda_3)$ soient trois nombres négatifs : ce choix peut être réalisé immédiatement par l'examen de la courbe représentative de la fonction $u(\lambda)$. Lorsque l'équation $u(\lambda) = 0$ a une racine triple λ_1, les deux autres racines réelles sont λ_2 et λ_3; $u'(\lambda_1)$ est nul et $u'(\lambda_2)$, $u'(\lambda_3)$ sont négatifs.

A chaque racine λ de l'équation $u(\lambda) = 0$ correspond (**56**) un mode de génération normale; les centres des sphères (Σ) de ce mode de génération décrivent une quadrique (H) particulière appartenant au faisceau linéaire tangentiel de quadriques dont l'équation cartésienne est

$$\frac{4x^2}{a+\lambda} + \frac{4y^2}{a'+\lambda} + \frac{4z^2}{a''+\lambda} + 1 = 0. \quad \text{(Voy. Note I, § 1.)}$$

Les sphères (Σ) sont orthogonales à une sphère directrice (O) de centre O, dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2cx}{a+\lambda} + \frac{2c'y}{a'+\lambda} + \frac{2c''z}{a''+\lambda} + \frac{\lambda}{2} = 0. \quad \text{(Note I, § 1.)}$$

Le rayon R de la sphère directrice (O) est défini par l'équation

$$4R^2 = -u'(\lambda).$$

Les sphères directrices (O) et (O'), qui correspondent à deux valeurs distinctes λ et λ' du paramètre sont *orthogonales*; en effet, la condition d'orthogonalité de ces sphères,

$$\frac{c^2}{(a+\lambda)(a+\lambda')} + \frac{c'^2}{(a'+\lambda)(a'+\lambda')} + \frac{c''^2}{(a''+\lambda)(a''+\lambda')} - \frac{\lambda+\lambda'}{4} = 0,$$

peut s'écrire

$$\frac{u(\lambda)-u(\lambda')}{4(\lambda-\lambda')}=0,$$

et elle est évidemment vérifiée.

Les résultats ci-dessus, établis par le calcul, sont analytiques, valables quelles que soient les valeurs réelles ou complexes des racines λ et λ' distinctes de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ ou $u(\lambda)=0$. Nous allons les interpréter géométriquement.

Supposons d'abord que l'équation $u(\lambda)=0$ n'ait pas une racine triple. Aux trois valeurs λ_1, λ_2, λ_3, choisies comme il a été dit plus haut, correspondent trois générations normales, dont les sphères directrices sont (O_1), (O_2), (O_3); les centres de ces sphères sont trois points réels puisque λ_1, λ_2, λ_3 sont des nombres réels, et non alignés puisque ces nombres sont distincts; les rayons de ces sphères, définis par des équations analogues à

$$4R_1^2=-u'(\lambda_1),$$

sont des nombres réels, puisque $-u'(\lambda_1)$, $-u'(\lambda_2)$, $-u'(\lambda_3)$ sont des nombres positifs. Ces trois sphères sont deux à deux orthogonales : elles ont donc deux points communs réels et distincts. L'équation $u(\lambda)=0$, ayant trois racines réelles et distinctes, a en outre une racine double au maximum; la cyclide (W) a par conséquent (**61**) un point double au maximum; un des deux points communs aux trois sphères directrices (O_1), (O_2), (O_3) n'est donc pas un point double de (W). Nous désignerons par I ce point et, s'il y en a deux, l'un quelconque de ceux-ci.

Le point I n'est pas un point de la cyclide (W) : en effet, si le point I était un point de la cyclide (W), ce serait un point simple de celle-ci; en ce point simple, il y aurait un plan tangent et ce plan tangent passerait par O_1, O_2, O_3; or ces trois points ne sont pas alignés; le point I n'est donc pas un point de la cyclide (W).

Les cyclides (W) étudiées jouissent donc de la propriété suivante : trois de leurs sphères directrices ont un point commun non situé sur la cyclide. Cette propriété se conserve par inversion, les sphères directrices pouvant être, par cette inversion, transformées en plans directeurs. Il est nécessaire de faire cette observation, car (**63**) il est possible que la cyclide (W) soit non pas la cyclide à étudier, mais une transformée de celle-ci par une inversion préalable.

Puisque l'équation $u(\lambda)=0$ n'a, par hypothèse, pas de racine triple, elle a quatre ou cinq racines distinctes auxquelles correspondent des générations normales. Par conséquent, une cyclide quelconque W_0, n'admettant aucune génération exceptionnelle (l'indice 0 rappelle cette particularité) et admettant plus de trois générations normales, possède trois sphères ou plans directeurs, deux à deux rectangulaires, qui ont en commun un point I, réel et non situé sur la cyclide. Une inversion de pôle I transforme cette cyclide en une cyclide à trois plans directeurs de degré quatre, dont l'équation est de la forme (NOTE I, § **11**)

$$(x^2+y^2+z^2)^2+ax^2+a'y^2+a''z^2+d=0.$$

Ce résultat s'énonce ainsi :

Toute cyclide W_0, *sans générations exceptionnelles, qui admet quatre générations normales au moins, est l'inverse, dans une inversion réelle, d'une cyclide dont l'équation peut être mise sous la forme, que nous appellerons forme réduite,*

$$(x^2+y^2+z^2)^2+ax^2+a'y^2+a''z^2+d=0,$$

a, a', a'', d étant des constantes telles que l'inéquation

$$(a-a')(a'-a'')(a''-a)(a^2-4d)(a'^2-4d)(a''^2-4d)\neq 0$$

soit satisfaite.

L'équation $\varphi(\lambda)$ de la cyclide à forme réduite est

$$(a+\lambda)(a'+\lambda)(a''+\lambda)(\lambda^2-4d)=0.$$

Si d est différent de zéro, elle a cinq racines simples, auxquelles correspondent cinq générations normales; si d est nul, elle a trois racines simples et une double, donc quatre générations normales et un point double; ce point double est l'origine : il est commun aux plans directeurs.

Les cyclides W_0, *sans générations exceptionnelles, qui admettent quatre générations normales seulement, sont des cyclides ayant un seul point double*; ce point double est naturellement commun aux sphères ou plans directeurs.

Etudions maintenant les cyclides (W_0) *sans générations exceptionnelles, admettant trois générations normales seulement.* L'équation $\varphi(\lambda)$ de ces cyclides a une racine triple et deux racines simples : la cyclide admet donc un point double réel ω. On vérifiera sans peine qu'elle est l'inverse d'un paraboloïde non de révolution.

65. Cas d'une cyclide non de révolution et admettant une génération exceptionnelle. — Nous étudierons dans ce paragraphe (2e cas) les cyclides W_1 qui n'ont pas de plans directeurs, qui ne sont pas de révolution et qui admettent une seule génération exceptionnelle. L'équation $\varphi(\lambda)=0$ de ces cyclides admet une seule racine singulière multiple; nous admettrons que c'est $-a$. Ces hypothèses se traduisent par les conditions

$$c=0,\qquad \frac{4c'^2}{a'-a}+\frac{4c''^2}{a''-a}+a^2-4d=0,$$

$$c'c''(a''-a')(a''-a)(a'-a)\neq 0.$$

Nous supposerons $a' < a''$.

L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ s'écrit alors

$$4c'^2(a''+\lambda)(a+\lambda)+4c''^2(a+\lambda)(a'+\lambda)+(\lambda^2-4d)(a+\lambda)(a'+\lambda)(a''+\lambda)=0.$$

Nous poserons

$$u(\lambda) = \frac{4c'^2}{a'+\lambda} + \frac{4c''^2}{a''+\lambda} + \lambda^2 - 4d.$$

Les racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ sont la racine singulière $-a$, double au moins, et les racines différentes de $-a$ de $u(\lambda) = 0$. L'équation $u(\lambda) = 0$ admet une ou trois racines réelles dans chacun des intervalles

$$(-\infty, -a''), \qquad (-a'', -a'),$$

et deux racines ou zéro dans l'intervalle

$$(-a', +\infty).$$

Nous conseillons au lecteur de représenter graphiquement les variations de la fonction $u(\lambda)$ pour suivre les explications suivantes. Lorsque l'équation $u(\lambda) = 0$ n'admet pas une racine λ_1 triple, différente de $-a$, elle admet au moins une racine simple λ_1, différente de $-a$, et pour laquelle $u'(\lambda)_1$ est négatif.

Nous aurons donc, à la fin de ce paragraphe, à examiner deux cas, savoir :

1° Il existe une racine simple au moins, λ_1, différente de $-a$, pour laquelle $u'(\lambda_1)$ est négatif;

2° Il n'en existe pas, et λ_1 est alors une racine triple, réelle, différente de $-a$.

Nous avons à étudier maintenant les générations de la cyclide (W_1).

A la racine singulière multiple $-a$, correspond une génération exceptionnelle. Les sphères (Σ) de cette génération sont orthogonales **(55)** à un cercle directeur (C), d'équations (Note I, § 2)

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 + \frac{2c'y}{a'-a} + \frac{2c''z}{a''-a} - \frac{a}{2} = 0.$$

Nous ne nous préoccuperons pas du lieu de leurs centres, qui est une conique du plan de ce cercle (C), appelée déférente. Le rayon ρ du cercle directeur (C) est donné par l'équation

$$4\rho^2 = -u'(-a).$$

66. 1° $(-a)$ est racine double de $\varphi(\lambda) = 0$. — Si donc $-a$ est une **racine double** de $\varphi(\lambda) = 0$ et simple de $u(\lambda) = 0$ par conséquent, ce rayon ρ n'est pas nul, et le cercle directeur (C) est soit un cercle réel, soit un cercle dont le centre et le plan sont réels et le rayon complexe pur; nous dirons, par abréviation, qu'il est imaginaire.

Nous avons vu **(61)** que l'existence d'une racine multiple singulière $-a$ de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ entraîne l'existence de deux points multiples P et Q, définis par les équations (Note II, § 3)

$$y = \frac{-c'}{a'-a}, \qquad z = \frac{-c''}{a''-a}, \qquad x^2 + \frac{c'^2}{(a'-a)^2} + \frac{c''^2}{(a''-a)^2} + \frac{a}{2} = 0.$$

La troisième de ces équations s'écrit $x^2 + \rho^2 = 0$.

Nous constatons donc que :

Les points doubles P *et* Q, *de la cyclide* W_1, *dont la présence est liée à l'existence d'une génération exceptionnelle à cercle directeur* (C), *sont les foyers de ce cercle.* On appelle ainsi les centres des sphères de rayon nul qui passent par le cercle (C); on les appelle aussi *points de Poncelet* du cercle (C).

Puisque, par hypothèse, $-a$ est une racine double, les deux points P et Q sont distincts : *ils sont réels si le cercle* (C) *est imaginaire et imaginaires si le cercle* (C) *est réel.*

67. 2° $(-a)$ est racine triple de $\varphi(\lambda) = 0$. — Examinons maintenant le cas particulier où $-a$ est une **racine au moins triple** de $\varphi(\lambda) = 0$, donc double au moins de $u(\lambda) = 0$. La quantité $u'(-a)$ est alors nulle et le cercle directeur (C) réduit à un point P; les centres des sphères (Σ) sont dans un plan fixe et ces sphères passent par un point P de ce plan. Ce point P est l'unique point double de la cyclide (W_1) attaché à la génération exceptionnelle; nous ne nous attarderons pas à l'étude d'un cas aussi particulier; une inversion de centre P transforme la cyclide (W_1) en un cylindre, non de révolution.

68. Orthogonalité des sphères directrices. — Aux racines λ et λ', non singulières, distinctes entre elles et distinctes de $-a$ correspondent des générations normales, à sphères directrices (O) et (O'). L'équation de la sphère (O) est (Note I, § 1)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{c'y}{a'+\lambda} + 2\frac{c''z}{a''+\lambda} + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Son rayon R est donné par l'équation $4R^2 = -u'(\lambda)$. La condition d'orthogonalité de cette sphère et de la sphère (O'),

$$\frac{c'^2}{(a'+\lambda)(a'+\lambda')} + \frac{c''^2}{(a''+\lambda)(a''+\lambda')} - \frac{\lambda+\lambda'}{4} = 0,$$

peut s'écrire

$$\frac{u(\lambda) - u(\lambda')}{4(\lambda'-\lambda)} = 0.$$

Elle est vérifiée, et les sphères (O) et (O') sont orthogonales.

La condition d'orthogonalité de la sphère (O) et d'une sphère directrice quelconque passant par le cercle directeur (C) n'est autre que la condition précédente, dans laquelle on fait $\lambda' = -a$ et, comme $u(-a)$ est nul, cette condition est aussi vérifiée. La sphère (O) est donc orthogonale au cercle directeur (C).

Ces résultats valent d'être énoncés :

Les sphères directrices des générations normales d'une cyclide (W_1) ayant une génération exceptionnelle à cercle directeur (C) sont orthogonales entre elles et orthogonales au cercle directeur (C).

Cet énoncé garde un sens même si le cercle (C) est un cercle point.

69. Conclusions. — Il nous est maintenant possible de conclure. Nous distinguerons les cas suivants :

1° *Cyclides ayant une seule génération exceptionnelle à cercle directeur imaginaire, donc ayant au moins deux points doubles réels* P *et* Q.

Nous reprendrons les différentes représentations graphiques de la fonction $u(\lambda)$; celles qui correspondent au cas envisagé doivent couper l'axe des λ au point d'abscisse $-a$, et en ce point $u'(-a)$ doit être positif. On constate que cette hypothèse entraîne l'existence de trois autres racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, distinctes de $-a$ et distinctes entre elles, telles que $u'(\lambda_1)$, $u'(\lambda_2)$, $u'(\lambda_3)$ soient négatifs.

Autrement dit :

Les cyclides ayant une seule génération exceptionnelle à cercle directeur imaginaire ont trois générations normales distinctes à sphères directrices réelles.

Ces sphères directrices ont deux points réels communs puisqu'elles sont orthogonales, et aucun de ces points, I par exemple, n'est un point de la cyclide. Nous conclurons comme nous l'avons fait au § **63** : après avoir constaté que tous les résultats trouvés sont anallagmatiques et s'appliquent aux cyclides ayant, au lieu de sphères directrices, des plans directeurs, nous effectuerons une inversion de pôle I pour pouvoir énoncer encore que :

Les cyclides (W_1) *ayant une seule génération exceptionnelle à cercle directeur imaginaire sont les inverses d'une cyclide à forme réduite*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + d = 0.$$

Si $-a$ est la racine de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ qui correspond à la génération exceptionnelle, on aura $d = \frac{a^2}{4}$ et $(a - a')(a - a'') \neq 0$ $(a \neq 0)$.

2° *Cyclides ayant une seule génération exceptionnelle à cercle directeur* (C) *réel et deux générations normales distinctes, au moins.*

L'équation $u(\lambda) = 0$ admet la racine $-a$ simple et une racine réelle λ_1 distincte de $-a$, au moins : l'examen des représentations graphiques montre qu'une de ces valeurs, λ_1 par exemple, est telle que $u'(\lambda_1)$ soit négatif. Donc :

Les cyclides ayant une seule génération exceptionnelle à cercle directeur réel et plusieurs générations normales distinctes en admettent une au moins à sphère directrice réelle.

Soit (O_1) cette sphère directrice réelle : elle est orthogonale au cercle directeur (C) réel; elle le coupe donc en deux points réels et distincts. Ces cyclides ont, au maximum, un point double réel, provenant, le cas échéant, d'une racine λ_1 ou λ_2 double : donc un des deux points communs au cercle (C) et à la sphère (O) n'est pas un point double de la cyclide.

Soit I ce point. Le point I n'est pas un point simple de la cyclide, car s'il était un point simple de celle-ci le plan tangent en I à la cyclide existerait et serait à la fois normal au cercle (C) et à la sphère (O) ; ceci est impossible; donc I n'est pas sur la cyclide.

Observons encore, avant de conclure, que les propriétés ci-dessus (existence d'une génération exceptionnelle à cercle directeur réel et d'une génération normale à sphère directrice réelle) se conservent par inversion, la sphère directrice (O) pouvant être remplacée par un plan, ou le cercle directeur (C) par une droite.

Ceci dit, effectuons une inversion de pôle I. Le cercle directeur (C) devient une droite (D), la cyclide devient une cyclide de révolution d'axe (D), la sphère (O) devient un plan directeur perpendiculaire à la droite (D). Nous choisirons la droite (D) comme axe Oz, et le plan directeur pour plan xOy; on vérifiera sans peine que l'équation d'une cyclide ayant Oz comme axe de symétrie et de révolution et xOy comme plan de symétrie est

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + a(x^2 + y^2) + a''z^2 + d = 0.$$

Nous pouvons donc encore énoncer le résultat suivant :

Les cyclides (W_1) *ayant une seule génération exceptionnelle à cercle directeur réel et plusieurs générations normales et distinctes sont les inverses d'une cyclide à forme réduite.*

3° *Cyclides ayant une seule génération exceptionnelle à cercle directeur réel et une seule génération normale.*

C'est le cas où l'équation $u(\lambda) = 0$ admet la racine simple $-a$ et une racine triple λ_1. La cyclide admet alors un seul point multiple I, réel et situé sur le cercle (C) : une inversion de centre (I) transforme la cyclide (W) en surface de révolution n'ayant qu'une génération normale et une exceptionnelle, c'est-à-dire en paraboloïde de révolution.

Nous avons examiné, plus haut, le cas où le cercle (C) est un cercle de rayon nul.

70. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une cyclide soit l'inverse d'une surface de révolution. — Il n'est pas inutile d'étudier avec soin les inversions qui transforment une cyclide (W) donnée en une cyclide ou une quadrique de révolution (W') ou inversement.

1° *La condition est nécessaire* : L'hypothèse est : (W') est de révolution, donc les sphères d'une génération exceptionnelle, sphères inscrites le long des parallèles, sont orthogonales à une droite, l'axe; la surface inverse (W) admet donc une génération exceptionnelle à cercle directeur réel, savoir le cercle inverse de l'axe.

2° *La condition est suffisante* : L'hypothèse est : la cyclide (W) est une cyclide à cercle (C) directeur réel, enveloppe, par conséquent, des sphères (Σ) à un paramètre orthogonales au cercle (C). Soit I un point de ce cercle; la surface (W'), dans une inversion de pôle I, est une surface enveloppe de sphères à un paramètre dont les centres sont alignés, donc une surface de révolution.

Nous énoncerons :

Pour qu'une cyclide (W) soit l'inverse d'une surface de révolution (W'), il faut et il suffit qu'elle admette une génération exceptionnelle à cercle directeur réel.

71. Remarque. — Il faut noter qu'à la génération exceptionnelle de la cyclide (W) à laquelle correspond le cercle directeur (C) réel sont liés deux points doubles imaginaires P et Q; ces points doubles disparaissent dans l'inversion de pôle I comme points doubles à distance finie, parce que, P et Q étant les foyers du cercle (C) et le point I un point de ce cercle, les droites IP, IQ sont isotropes : les inverses de P et Q sont donc rejetés à l'infini.

72. Cyclides (W_2) qui n'ont pas de plan directeur, ne sont pas de révolution et admettent deux générations exceptionnelles. — L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ de ces cyclides admet deux racines singulières multiples distinctes; nous admettrons que ce sont $-a$ et $-a'$. Les hypothèses précédentes se traduisent par les conditions

$$c = c' = 0, \qquad \frac{4c''^2}{a'' - a} + a^2 - 4d = 0, \qquad \frac{4c''^2}{a'' - a'} + a'^2 - 4d = 0,$$
$$c''(a - a'')(a' - a'')(a - a') \neq 0.$$

L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ s'écrit alors

$$4c''^2(a + \lambda)(a' + \lambda) + (\lambda^2 - 4d)(a + \lambda)(a' + \lambda)(a'' + \lambda) = 0.$$

Nous poserons

$$u(\lambda) = \frac{4c''^2}{a'' + \lambda} + \lambda^2 - 4d.$$

Les racines de l'équation $\varphi(\lambda)$ sont les racines singulières $-a$, $-a'$, au moins doubles, et les racines de $u(\lambda)$ distinctes de $-a$ et de $-a'$. Il y en a une, au maximum.

A chacune des racines singulières $-a$, $-a'$, multiples, correspondent des générations exceptionnelles; soit (C) le cercle directeur de la première, d'équations (Note I, § 2)

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 + \frac{2c''z}{a'' - a} - \frac{a}{2} = 0.$$

Soit (C') le cercle directeur de la seconde :

$$y = 0, \qquad x^2 + z^2 + \frac{2c''z}{a'' - a'} - \frac{a'}{2} = 0.$$

La condition d'orthogonalité d'une sphère directrice passant par (C) et d'une sphère directrice passant par (C') est

$$\frac{c''^2}{(a'' - a)(a'' - a')} + \frac{a + a'}{4} = 0.$$

Elle s'écrit

$$\frac{u(-a) - u(-a')}{4(a - a')} = 0,$$

et, comme $u(-a)$ et $u(-a')$ sont nuls, elle est vérifiée. Les deux cercles (C) et (C') forment donc un anneau orthogonal : l'un d'eux au moins est donc un cercle réel. Nous énoncerons ce résultat en disant :

Les deux cercles directeurs des cyclides à deux générations exceptionnelles forment un anneau orthogonal. L'un de ces deux cercles est un cercle réel.

Notons que, si les racines singulières sont doubles, l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ admet une racine simple λ_1, distincte de $-a$ et de $-a'$; nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la sphère directrice (O_1) de la génération normale correspondante est orthogonale aux cercles directeurs (C) et (C') : elle est donc imaginaire s'ils sont tous deux réels, et réelle si l'un d'eux est imaginaire.

Si l'une des racines singulières, $-a'$ par exemple, est triple, la seconde $-a$ est double; le cercle (C') est un cercle point, dont l'axe, droite réelle, est tangente au cercle (C); le cercle (C) est, dans ce cas, un cercle réel.

Il sera possible, par conséquent, de choisir dans tous les cas un pôle d'inversion I situé sur un cercle directeur et qui ne soit pas un point de la surface (W); **il** sera, par conséquent, toujours possible de transformer par une **inversion** les cyclides à étudier en cyclides de révolution.

73. Cyclides à deux générations exceptionnelles et de révolution. — Les cyclides de révolution sont obtenues (Voir Note I, §§ **8** et **10**) dans les seuls cas où existe une génération exceptionnelle avec directrice rectiligne. L'équation de ces cyclides peut être mise sous la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + a(x^2 + y^2) + a''z^2 + 2c''z + d = 0.$$

La présence de deux générations exceptionnelles entraîne celle de deux racines singulières; donc

$$a'' - a \neq 0.$$

La racine singulière $-a''$ doit être double; donc

$$c'' = 0, \qquad a''^2 - 4d = 0.$$

L'équation des cyclides étudiées est, par conséquent,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + a(x^2 + y^2) + a''z^2 + \frac{a''^2}{4} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Les cyclides (W) *à deux générations exceptionnelles sont les inverses de cyclides dont l'équation est mise sous la forme réduite.*

Observons que les cyclides de révolution à deux générations exceptionnelles sont engendrées par la rotation autour de Oz de la courbe d'équations

$$x = 0, \qquad (y^2 + z^2)^2 + ay^2 + a''z^2 + \frac{a''^2}{4} = 0,$$

qui peuvent s'écrire

$$x = 0, \qquad \left(y^2 + z^2 + \frac{a''}{2}\right)^2 = (a'' - a)y^2.$$

Ces courbes méridiennes sont deux cercles symétriques par rapport à l'axe Oz. S'ils sont réels et s'ils coupent cet axe en deux points réels P et Q, ils engendrent un *pseudo-tore* ($a'' \leqslant 0$); s'ils sont réels et ne coupent pas cet axe en des points réels, ils engendrent un *tore* ($a'' > 0$). On distingue le pseudo-tore du tore par la présence des points multiples réels. *Le pseudo-tore a deux points multiples réels, distincts ou confondus, à distance finie; le tore n'en a aucun.*

74. Conclusion générale. — Nous voici au terme d'une étude laborieuse, et la conclusion en est d'une précision et d'une simplicité remarquables. Elle résume les résultats établis (**64** à **73**) :

Les cyclides (W) dont l'équation cartésienne est du quatrième degré et à coefficients réels sont soit des surfaces à équation réduite :

$$\mathbf{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + d = 0,}$$

soit des surfaces inverses dans une inversion réelle des précédentes, soit des surfaces inverses dans une inversion réelle d'un cylindre ou d'un paraboloïde.

CHAPITRE IX

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS ÉTABLIS CLASSIFICATION DES CYCLIDES

75. Équation d'une cyclide. — Il nous paraît indispensable, parvenus au terme de cette étude, de résumer et de mettre en ordre les résultats les plus importants établis. Les axes $Oxyz$ étant supposés rectangulaires, l'équation d'une cyclide (W), du quatrième degré, est de la forme (52) :

$$(1)\quad (x^2+y^2+z^2)^2+(Bx+Cy+Dz)(x^2+y^2+z^2)+f(x,y,z)=0.$$

L'équation $f(x, y, z)$ est l'équation d'une quadrique ou d'un plan, ou une constante.

On choisit pour nouveaux axes des axes ayant pour origine le point O $\left(-\frac{B}{4},-\frac{C}{4},-\frac{D}{4}\right)$, formant un trièdre de directions principales pour la surface $f(x, y, z)=0$. Dans ce système d'axes, l'équation de la cyclide est

$$(2)\quad (x^2+y^2+z^2)^2+ax^2+a'y^2+a''z^2+2cx+2c'y+2c''z+d=0.$$

On dira que *l'équation de la cyclide est réduite* lorsque $c=c'=c''=0$, c'est-à-dire lorsqu'elle a la forme

$$(3)\qquad (x^2+y^2+z^2)^2+ax^2+a'y^2+a''z^2+d=0.$$

On vérifiera que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) d'une cyclide (W) soit réduite à la forme (3) est que les plans de coordonnées soient des plans de symétrie droite de cette cyclide.

76. Équation $\varphi(\lambda)=0$. — Nous appellerons équation $\varphi(\lambda)=0$ d'une cyclide (W) mise sous la forme (2) l'équation

$$4c^2(a'+\lambda)(a''+\lambda)+4c'^2(a+\lambda)(a''+\lambda)$$
$$+4c''^2(a+\lambda)(a'+\lambda)+(\lambda^2-4d)(a+\lambda)(a'+\lambda)(a''+\lambda)=0.$$

Cette équation a *cinq racines*.

Nous appellerons racines *non singulières* de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ les racines distinctes de $-a$, $-a'$, $-a''$, et *racines singulières*, s'il y en a, les racines égales à l'un de ces trois nombres.

77. Générations normales et exceptionnelles. — Nous appellerons sphères (Σ) d'une *génération normale* les sphères (Σ) appartenant à une congruence bilinéaire

$$\Sigma_1\lambda\mu+\Sigma_2\lambda+\Sigma_3\mu+\Sigma_4=0,$$

dont l'enveloppe, quand λ et μ varient, est la cyclide donnée (W).

Les sphères d'une génération normale coupent la cyclide suivant deux cercles distincts.

Nous appellerons sphères (Σ) d'une *génération exceptionnelle* les sphères (Σ) appartenant à un faisceau quadratique

$$\Sigma_1\lambda^2+2\Sigma_2\lambda+\Sigma_3=0,$$

dont l'enveloppe, quand λ varie, est la cyclide donnée (W).

Les sphères d'une génération exceptionnelle sont tangentes à la cyclide, en général, en tous les points d'un cercle.

Pour déterminer le nombre de générations, il suffit d'étudier l'équation $\varphi(\lambda)=0$:

1° **A chaque racine non singulière de l'équation et à chaque racine, s'il y en a, singulière simple, correspond une génération normale;**

2° **A chaque racine singulière multiple correspond une génération exceptionnelle.**

Nous supposerons toujours la cyclide à étudier (W) non décomposée; rappelons que *la condition pour qu'une cyclide soit décomposée est qu'elle soit de révolution autour de* Oz, *par exemple, et que la racine singulière* $-a$ *soit au moins racine triple de* $\varphi(\lambda)=0$.

Nous ferons des cyclides à coefficients réels non décomposées une première classification d'après le nombre des générations exceptionnelles.

78. Convention. — Nous désignerons par les symboles W_0, W_1, W_2 les cyclides à coefficients réels non décomposées; l'indice 0, 1, 2 indique le nombre des générations exceptionnelles.

79. Éléments d'une génération normale. — Deux cas à distinguer :

1° La génération normale correspond à une racine non singulière λ de l'équation $\varphi(\lambda)=0$.

Elle est définie par deux éléments : la *quadrique déférente*, d'équation

$$\frac{4x^2}{a+\lambda}+\frac{4y^2}{a'+\lambda}+\frac{4z^2}{a''+\lambda}+1=0,$$

et la *sphère directrice*, d'équation

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2cx}{a+\lambda}+\frac{2c'y}{a'+\lambda}+\frac{2c''z}{a''+\lambda}+\frac{\lambda}{2}=0.$$

Les sphères (Σ) *de la génération ont pour centre un point de la déférente et sont orthogonales à la directrice.*

2° La génération normale correspond à une racine singulière simple de l'équation $\varphi(\lambda)=0$.

Seul subsiste le *plan directeur*, qui est un des plans de coordonnées. Cet unique élément ne permet plus de définir les sphères (Σ) : on sait seulement qu'elles sont orthogonales au plan directeur. Celui-ci est un plan de symétrie de la cyclide.

80. Éléments d'une génération exceptionnelle. — Deux cas à distinguer :

1° La racine singulière multiple de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ est $-a$ et la surface (W) n'est pas de révolution, ou bien est de révolution autour de Ox. La génération exceptionnelle correspondante est définie par deux éléments : la *conique déférente*, d'équations

$$x=0,\qquad \frac{4y^2}{a'-a}+\frac{4z^2}{a''-a}+1=0,$$

et le *cercle directeur*, d'équations

$$x=0,\qquad y^2+z^2+\frac{2c'y}{a'-a}+\frac{2c''z}{a''-a}-\frac{a}{2}=0.$$

Les sphères (Σ) *de la génération ont leur centre sur la déférente et sont orthogonales au cercle directeur.*

Les sphères passant par le cercle directeur sont des *sphères directrices*.

2° La racine singulière double de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ est $-a$ et la surface (W) est de révolution autour de Oz, par exemple.

Seul subsiste l'axe de révolution, qui joue le rôle de *droite directrice*. Cet unique élément ne permet plus de définir les sphères (Σ) : on sait seulement qu'elles sont orthogonales à la droite directrice.

Les plans méridiens sont alors des *plans directeurs*. Ils sont des plans de symétrie pour la cyclide.

Nous rappelons que *deux sphères directrices quelconques, un plan directeur et une sphère directrice, ou deux plans directeurs sont orthogonaux.* En particulier, s'il existe un cercle directeur, il est orthogonal aux sphères directrices et aux plans directeurs ; s'il en existe deux, ils forment un anneau orthogonal.

81. Points multiples. — Les points multiples sont des points doubles. Ils sont de deux espèces, qui se distinguent par leur origine.

Nous dirons qu'un point double est *accidentel* lorsqu'il provient de la présence d'une racine non singulière multiple dans l'équation $\varphi(\lambda)=0$. Nous dirons qu'un point double est *permanent*, lorsqu'il provient de la présence d'une racine singulière multiple dans l'équation $\varphi(\lambda)=0$.

Une cyclide admet au maximum un point double accidentel. Sa présence coïncide naturellement avec la disparition d'une génération normale ; les cyclides (W_0) et (W_1) peuvent avoir des points doubles accidentels.

Les points doubles permanents accompagnent toujours les cercles directeurs des générations exceptionnelles. Ils vont par deux, distincts ou confondus : distincts si le cercle directeur n'est pas de rayon nul, confondus dans le cas contraire.

Les points doubles permanents sont les foyers (ou points de Poncelet) des cercles directeurs.

82. Inverses de cyclides. — Les propriétés anallagmatiques, c'est-à-dire qui se conservent par inversion, des cyclides (W) s'étudient sur la surface inverse (W') dans une inversion bien choisie.

Le fait dominant est que, en général, *il est possible de choisir l'inversion de manière que la cyclide* (W') *ait trois plans directeurs formant un trièdre trirectangle ; on choisit ce trièdre pour trièdre de référence et l'équation de la cyclide* (W') *a alors la forme réduite* (**75**)

$$(x^2+y^2+z^2)^2+ax^2+a'y^2+a''z^2+d=0.$$

Il n'y a d'exception que pour les cyclides inverses d'un cylindre ou d'un paraboloïde.

Nous rappellerons :

1° que la surface inverse d'une cyclide (W) ayant au moins un point double réel est une quadrique lorsque le pôle d'inversion est le point double ;

2° que la surface inverse d'une cyclide (W_1) à cercle directeur réel, lorsque le pôle d'inversion est un point de ce cercle directeur, est une surface de révolution ;

3° que la surface inverse d'une cyclide (W_2), lorsque le pôle d'inversion est un point non double du cercle directeur réel, est un tore ou un pseudo-tore.

Nous n'utiliserons pas, en général, ces inversions, qui sont citées pour mémoire.

CHAPITRE X

ÉTUDE DES FOCALES

83. Focale d'une génération normale. — *Nous ne considérerons dans ce chapitre que des générations normales à plan directeur, ou des générations normales dont la sphère directrice n'est pas de rayon nul.*

Nous appellerons focale d'une génération normale de la cyclide (W) le lieu des centres des sphères (Σ) de rayon nul de cette génération.

Les sphères (Σ'), inverses des sphères (Σ) d'une génération normale, sont les sphères d'une génération normale de la cyclide (W'), inverse de (W) dans la même inversion. L'inverse d'une sphère de rayon nul dans une inversion réelle étant une sphère de rayon nul, nous pouvons énoncer que **l'inverse d'une focale d'une cyclide (W) est une focale de la cyclide inverse (W').**

Lorsqu'une génération normale est définie par ses deux éléments, savoir : une quadrique déférente et une sphère directrice, la focale correspondante est la courbe d'intersection de cette quadrique et de cette sphère. Sa recherche est plus difficile lorsque la génération normale est à plan directeur.

84. Focales d'une cyclide dont l'équation est sous forme réduite. — Nous allons chercher les focales de la cyclide (W) dont l'équation est

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + d = 0.$$

Il sera commode de poser

$$d = \frac{\delta^2}{4},$$

δ étant un nombre réel ou complexe pur. L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ de la cyclide (W) s'écrit alors

$$(a + \lambda)(a' + \lambda)(a'' + \lambda)(\lambda^2 - \delta^2) = 0.$$

Elle a cinq racines : $-a$, $-a'$, $-a''$, δ, $-\delta$.

Nous supposons d'abord δ différent de zéro (ce qui entraîne que la cyclide (W) n'a pas de point double accidentel), différent de $-a$, $-a'$, $-a''$:

$$\delta(\delta + a)(\delta + a')(\delta + a'') \neq 0.$$

δ est alors racine simple, non singulière, de $\varphi(\lambda) = 0$, et il lui correspond une génération normale définie par ses deux éléments : la déférente (H) :

$$\frac{4x^2}{a + \delta} + \frac{4y^2}{a' + \delta} + \frac{4z^2}{a'' + \delta} + 1 = 0,$$

et la sphère directrice (O) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{\delta}{2} = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la directrice (O) soit tangente en deux points au moins à la déférente (H) est que le carré de son rayon $-\frac{\delta}{2}$ soit égal à l'un quelconque des axes de la déférente, par exemple que l'on ait

$$-\frac{\delta}{2} = -\frac{a + \delta}{4},$$

c'est-à-dire que $\delta = a$.

Nous aurons donc à envisager les cas suivants :

1° *La cyclide* (W) *n'a pas de génération exceptionnelle.* L'équation $\varphi(\lambda)$ n'a donc pas de racines singulières multiples :

$$(\delta - a)(\delta - a')(\delta - a'') \neq 0.$$

La sphère directrice (O) n'est pas tangente à la déférente (H) et, par conséquent, *la focale* (F) *est une biquadratique sphérique sans points multiples.*

Notons que la cyclide (W) est, dans ce cas, une (W_0) sans points multiples.

2° *La cyclide* (W) *a une seule génération exceptionnelle.* Deux cas peuvent se présenter :

a) Si la cyclide (W) n'est pas de révolution,

$$(a - a')(a' - a'')(a'' - a) \neq 0,$$

la racine singulière multiple, $-a$ par exemple, ne peut être égale qu'à $-\delta$. Donc $\delta = a$ et la directrice (O), étant bitangente à la déférente (H), la coupe suivant deux cercles distincts, dont les plans ont pour équation

$$\frac{a - a'}{a + a'}\, y^2 + \frac{a - a''}{a + a''}\, z^2 = 0.$$

La focale (F) *est décomposée en deux cercles distincts de rayons non nuls.*

b) Si la cyclide (W) est de révolution, nous aurons, par exemple, $a = a'$. La racine singulière $-a$, n'étant pas (Note II, § 4) racine triple de $\varphi(\lambda) = 0$, sera distincte de $-a''$ et de $-\delta$; en outre, l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ n'ayant que la seule racine double $-a$, $-a''$ sera différent de $-\delta$. Nous aurons donc

$$(a - a'')(\delta - a)(\delta - a'') \neq 0.$$

La sphère (O) coupe alors la déférente (H) suivant deux cercles distincts, dont les plans ont pour équation

$$4z^2 \frac{a - a''}{a'' + \delta} + a - \delta = 0.$$

Aucun de ces deux plans n'étant tangent à la sphère (O), *la biquadratique* (F) *est décomposée encore en deux cercles distincts de rayons non nuls.*

3° *La cyclide* (W) *admet deux générations exceptionnelles.* Nous aurons, par exemple, dans ce cas,

$$a = a'.$$

L'équation $\varphi(\lambda)$ aura une seconde racine singulière double, distincte de $-a$: ce ne peut être que $-a''$; nous aurons donc

$$(a - a'') \neq 0, \qquad \delta = a''.$$

Comme (NOTE I, § **9**) $-a$ n'est pas racine triple de $\varphi(\lambda) = 0$ puisque (W) n'est pas décomposée, nous aurons en outre

$$\delta - a \neq 0.$$

La sphère (O) coupe, dans ces conditions, la déférente (H) suivant deux cercles distincts, dont les plans ont pour équation

$$2z^2 \frac{a - a''}{a''} + a - a'' = 0,$$

c'est-à-dire, puisque $a - a'' \neq 0$,

$$z^2 + \frac{a''}{2} = 0.$$

Ce sont deux plans tangents à la directrice (O) et, dans ce cas, *la focale* (F) *est décomposée en quatre droites isotropes.*

Ces résultats remarquables sont résumés ci-dessous.

Soit une cyclide (W) dont l'équation est mise sous forme réduite. Soit (F) une focale relative à l'une des deux générations normales à sphère directrice.

Si la cyclide est une (W_0) (sans points doubles, par hypothèse), la focale (F) est une biquadratique sans points multiples;

Si la cyclide est une (W_1), la focale (F) se décompose en deux cercles distincts, de rayons non nuls;

Si la cyclide est une (W_2), la focale (F) est un quadrilatère isotrope.

Rappelons que les indices de W indiquent le nombre des générations exceptionnelles (**78**).

85. Recherche des focales situées dans un plan directeur. — Nous allons chercher maintenant les focales (F) situées dans les plans directeurs, dans le plan yOz par exemple.

Il faut, pour le faire, reprendre les calculs de la NOTE I, § **2**, en supposant

$$c = c' = c'' = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad \lambda = -a.$$

Ces calculs ont pour but de déterminer si la sphère (Σ), d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\beta y - 2\gamma z + h = 0,$$

coupe la cyclide (W) suivant deux cercles. Dans la recherche de la focale, cette sphère a pour rayon zéro; donc

$$h = \beta^2 + \gamma^2.$$

L'hypothèse faite,

$$(a - a')(a - a'') \neq 0,$$

est une conséquence directe du fait que la génération qui correspond à la racine $-a$ de $\varphi(\lambda) = 0$ est, par hypothèse, la génération normale dont nous cherchons la focale.

Transcrivons, en tenant compte des hypothèses, les expressions appelées A, B, A′, B′ :

$$\mathrm{A} = \frac{2a\beta^2}{a' - a} + \frac{2a\gamma^2}{a'' - a} + \beta^2 + \gamma^2,$$

$$\mathrm{B} = \frac{4\beta^2}{a' - a} + \frac{4\gamma^2}{a'' - a} + 1,$$

$$\mathrm{A}' = a(\beta^2 + \gamma^2) - \frac{\delta^2}{2},$$

$$\mathrm{B}' = -a + 2(\beta^2 + \gamma^2).$$

Les équations de la focale se déduisent des conditions

$$\alpha = 0, \qquad \mathrm{AB}' - \mathrm{BA}' = 0,$$

imposées aux données pour que la sphère (Σ) soit bitangente à la cyclide (W). Ces deux conditions s'écrivent

$$\alpha = 0, \qquad (\beta^2 + \gamma^2)^2 + \frac{\delta^2 - aa'}{a' - a}\beta^2 + \frac{\delta^2 - aa''}{a'' - a}\gamma^2 + \frac{\delta^2}{4} = 0.$$

Elles expriment que le centre de la sphère de rayon nul est un point de la courbe (F)

$$x = 0, \qquad (y^2 + z^2)^2 + \frac{\delta^2 - aa'}{a' - a} y^2 + \frac{\delta^2 - aa''}{a'' - a} z^2 + \frac{\delta^2}{4} = 0.$$

Ce sont donc les équations de la focale (F).

86. Étude des points multiples des focales situées dans un plan directeur. — Il n'est peut-être pas inutile, avant de tenter une étude de la quartique bicirculaire plane (F), de rappeler quelques résultats relatifs aux quartiques dont l'équation est de la forme

$$(y^2 + z^2)^2 + Ay^2 + Bz^2 + C = 0.$$

La recherche des points multiples à distance finie conduit à la résolution du système suivant

$$[2(y^2 + z^2) + A]y = 0,$$
$$[2(y^2 + z^2) + B]z = 0,$$
$$Ay^2 + Bz^2 + 2C = 0.$$

Ce système n'a de solutions que dans les trois cas suivants :
1° $C = 0$,
2° $A^2 - 4C = 0$,
3° $B^2 - 4C = 0$.

Dans le 1er cas, si A et B ne sont pas nuls tous les deux, la quartique admet à l'origine un point double.

Dans le 2e cas, l'équation de la quartique s'écrit

$$\left(y^2 + z^2 + \frac{A}{2}\right)^2 = (A - B)z^2.$$

Elle se décompose donc en deux cercles égaux. Ces deux cercles ne sont des cercles de rayons nuls que si $A + B = 0$.

Le 3e cas est analogue au 2e.

Pour étudier la focale (F), formons d'abord les quantités

$$C = \frac{\delta^2}{4}, \qquad A^2 - 4C = \frac{(\delta + a)(\delta - a)(\delta + a')(\delta - a')}{(a' - a)^2},$$

$$B^2 - 4C = \frac{(\delta - a)(\delta + a)(\delta - a'')(\delta + a'')}{(a'' - a)^2},$$

$$A - B = \frac{(\delta - a)(\delta + a)(a'' - a')}{(a' - a)(a'' - a)},$$

puis examinons les différents cas possibles.

D'abord, par hypothèse, $-a$ est une racine simple de $\varphi(\lambda) = 0$, condition pour que la génération soit normale; donc

$$(a' - a)(a'' - a)(\delta + a)(\delta - a) \neq 0.$$

Nous distinguerons ensuite les cas suivants :

1° *La cyclide* (W) *n'a pas de générations exceptionnelles, ni de points doubles* (*accidentels*). — L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ n'a, dans ce cas, que des racines simples, et

$$(a'' - a')\,\delta(\delta + a')(\delta + a'')(\delta - a')(\delta - a'') \neq 0.$$

Aucune des quantités C, $B^2 - 4C$, $A^2 - 4C$, $A - B$ n'étant nulle, la focale (F) est une quartique bicirculaire non décomposée sans points multiples à distance finie.

2° *La cyclide* (W) *n'a pas de générations exceptionnelles, mais elle a un point double accidentel.* — Ces conditions se traduisent par

$$\delta = 0, \qquad (\delta - a')(\delta + a')(\delta - a'')(\delta + a'')(a' - a'') = 0.$$

C est nul; A et B sont différents de zéro, puisque $B^2 - 4C$ et $A^2 - 4C$ le sont. La focale (F) est donc une quartique bicirculaire non décomposée ayant un point double à tangentes distinctes à distance finie.

3° *La cyclide* (W) *admet une seule génération exceptionnelle.* — Deux cas peuvent se présenter :

a) Le premier est celui où la cyclide (W) n'est pas de révolution; cette hypothèse se traduit en écrivant

$$a'' - a' \neq 0.$$

Soit $-a'$ la racine singulière à laquelle correspond la génération exceptionnelle; cette racine est multiple, ce qui s'exprime en écrivant

$$(\delta - a')(\delta + a') = 0.$$

A la racine singulière $-a''$ correspond une génération normale; cette racine est donc simple, et l'on a

$$(\delta - a'')(\delta + a'') \neq 0.$$

Ces différentes conditions entraînent

$$A^2 - 4C = 0, \qquad B^2 - 4C \neq 0, \qquad A - B \neq 0.$$

L'identité

$$(A^2 - 4C) - (B^2 - 4C) = (A - B)(A + B)$$

entraîne en outre $A + B \neq 0$.

La focale (F) est, par conséquent, décomposée en deux cercles, dont aucun n'est de rayon nul.

b) Le second cas est celui où la cyclide (W) est de révolution; cette hypothèse entraîne

$$a' = a''.$$

La racine singulière $-a'$ n'est pas triple, car si elle l'était (**61**) la cyclide (W) serait décomposée; on aura donc

$$(\delta - a')(\delta + a') \neq 0.$$

Ces hypothèses entraînent $A - B = 0$, $A^2 - 4C \neq 0$. Il en résulte, puisque $A = B$, que la focale (F) est décomposée en deux cercles (concentriques), puisque $A^2 - 4C \neq 0$, qu'ils sont distincts et, par conséquent, qu'un seul au plus est de rayon nul.

4° *La cyclide* (W) *admet deux générations exceptionnelles.* — L'équation $\varphi(\lambda) = 0$, dans ce cas, a deux racines singulières multiples distinctes, qui ne peuvent être que $-a'$ et $-a''$. On aura donc, par exemple,

$$a' - a'' = 0, \qquad \delta + a' = 0, \qquad \delta - a'' = 0.$$

Ces conditions entraînent

$$B^2 - 4C = 0, \qquad A^2 - 4C = 0, \qquad A - B \neq 0,$$

et, par conséquent,

$$A + B = 0.$$

La focale (F) est, dans ce cas, décomposée en quatre droites isotropes.

87. Classification des focales situées dans un plan directeur. — Ces résultats remarquables doivent être rapprochés de ceux que nous avons énoncés à la fin du § **84**. Nous les résumons ci-dessous :

Soit une cyclide (W) dont l'équation est mise sous forme réduite. Soit (F) une focale relative à une génération normale à plan directeur.

Si la cyclide est une (W_0) sans point double accidentel, la focale (F) est une quartique bicirculaire sans point double à distance finie;

Si la cyclide est une (W_1), la focale (F) se décompose en deux cercles distincts, dont les rayons ne sont pas nuls tous les deux;

Si la cyclide est une (W_2), la focale (F) est un quadrilatère isotrope.

Signalons que, si la cyclide est une (W_1) sans points multiples accidentels, la focale (F) se décompose en deux cercles dont aucun n'est de rayon nul, et que, si la cyclide est une (W_1) avec un point multiple accidentel O, un des cercles de la décomposition est le cercle-point O.

88. Cas où la cyclide a un point double (accidentel ou permanent). — Nous observerons, avant de poursuivre, que *lorsqu'une cyclide admet un point double accidentel ou permanent, les focales* (F) *admettent toutes ce point comme point double.*

Le fait est évident (**86**) pour les points doubles accidentels, s'il y en a. Nous allons le vérifier pour les points doubles permanents. Les cyclides (W) qui ne sont pas de révolution, du 2e cas du § **84**, ont deux points doubles permanents, définis par

$$x^2 + \frac{\delta}{2} = 0, \qquad y = z = 0.$$

Ces deux points sont sur la directrice (O) et sur la droite Ox, intersection des deux plans des cercles dans lesquels est décomposée la focale (F). Ce sont donc les points communs à ces deux cercles, points doubles de cette focale.

Les cyclides (W) du 3e cas du § **84** sont de révolution; elles n'ont donc qu'une génération exceptionnelle à cercle directeur et par conséquent deux points doubles permanents, définis par

$$x = y = 0, \qquad z^2 + \frac{a''}{2} = 0.$$

Ce sont les deux points de contact des plans des cercles dans lesquels la focale (F) est décomposée et de la sphère directrice (O). Ce sont donc deux points doubles de la focale, sommets du quadrilatère isotrope de la décomposition.

La cyclide (W) du 3° du § **86**, lorsqu'elle n'est pas de révolution, a deux points doubles permanents, définis par

$$x = z = 0, \qquad y^2 + \frac{a'}{2} = 0.$$

La focale F se décompose en deux cercles, dont les points communs sont (**86**) définis par

$$x = z = 0, \qquad y^2 + \frac{A}{2} = 0.$$

Or, dans ce cas, comme $\delta^2 = a'^2$, on a $A = a'$. Les deux cercles de décomposition de la focale (F) passent donc par les points singuliers permanents de la cyclide (W).

Enfin la cyclide (W) du 4° du § **86** a quatre points doubles permanents, définis par

$$x = z = 0, \qquad y^2 + \frac{a'}{2} = 0,$$

$$y = x = 0, \qquad z^2 + \frac{a''}{2} = 0,$$

c'est-à-dire, puisque, dans ce cas (**86**), $a' = -\delta$ et $a'' = \delta$, par

$$x = z = 0, \qquad y^2 - \frac{\delta}{2} = 0,$$

$$x = y = 0, \qquad z^2 + \frac{\delta}{2} = 0.$$

La focale (F) a pour équations (**85**)

$$x = 0, \qquad (y^2 + z^2)^2 - \delta y^2 + \delta z^2 + \frac{\delta^2}{4} = 0.$$

Elle passe bien par ces quatre points et, comme elle est décomposée en un quadrilatère isotrope, ces quatre points sont les sommets de ce quadrilatère et des points doubles de la focale.

La proposition est donc démontrée. Nous l'énoncerons.

Lorsqu'une cyclide (W) admet un point double accidentel ou permanent, les focales (F) admettent toutes ce point comme point double.

Cette proposition n'est pas équivalente à celles qui ont été données comme conclusion des §§ **84** et **86**. En effet, si, par exemple, une cyclide (W) admet une génération exceptionnelle, deux cas peuvent se présenter : ou bien cette génération est à cercle directeur et a, en général, deux points doubles permanents : la proposition précédente permet d'affirmer que la focale (F) est soit une biquadratique, soit une quartique bicirculaire ayant deux points multiples, donc décomposée; ou bien cette génération est à droite directrice : la cyclide (W) de révolution n'a pas de points doubles permanents et cependant la biquadratique (F) se décompose.

En fait, les deux énoncés seraient équivalents si l'on admettait que le fait, pour une surface cyclide, d'être une surface de révolution équivaut à la présence de deux points doubles permanents qui sont les points cycliques des plans des parallèles. Nous avons renoncé à faire jouer à ces deux points, qui sont des points doubles de la cyclide au même titre que tous les points de l'ombilicale, un rôle particulier. Il est difficile d'expliquer, en effet, d'une façon élémentaire quelle est la véritable nature de ces points doubles et pourquoi ils se détachent de l'ombilicale dans une inversion.

Nous utiliserons donc seulement les résultats énoncés aux §§ **84** et **87**, qui envisagent l'un et l'autre la totalité des cas possibles.

89. Transformation (T). — Soient (O) une sphère donnée et I un point situé en dehors de la sphère (O). Soit (I) l'inversion de pôle I qui conserve la sphère (O) globalement, c'est-à-dire l'inversion dont la puissance est la puissance de I par rapport à la sphère (O).

Soient M un point quelconque, (Σ) la sphère de centre M orthogonale à la sphère (O). Soient (Σ') la sphère inverse de (Σ) dans l'inversion (I) et M' le centre de (Σ'). Nous appellerons (T) la transformation qui permet de passer de M à M'.

Les points M, M' et I sont alignés. I est un centre d'homothétie de (Σ) et (Σ'); soit J l'autre centre d'homothétie. La sphère de diamètre IJ fait partie du faisceau linéaire (Σ), (Σ'); donc elle est aussi orthogonale à la sphère (O). Les points I et J sont donc conjugués par rapport à (O), et J décrit le plan polaire (P) de I par rapport à la sphère (O).

La transformation est donc définie de la façon suivante : à chaque point M, distinct de I, on fait correspondre le point M' situé sur IM et conjugué de M par rapport au couple de points I, J, J étant le point de la droite IM situé dans le plan (P). Le point I est son propre homologue.

Donc : *La transformation* (T) *est une homologie harmonique de pôle* I, *de plan* (P), *plan polaire de* I *par rapport à la sphère* O :

$$(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{M}, \mathrm{M}') = -1.$$

Rappelons que l'homologie est un cas particulier de la transformation homographique. L'homologue d'une droite est une droite; celle d'un cône ou d'un cylindre est soit un cône, soit un cylindre; celle d'une quadrique est une quadrique; celle d'une quadrique à génératrices réelles non développable est une quadrique à génératrices réelles non développable.

Observons enfin que *l'homologue de la sphère* (O) *dans la transformation* (T) *est la sphère* (O).

90. Transformation par inversion d'une génération normale à sphère directrice en génération normale à sphère directrice. — Nous définirons une génération normale d'une cyclide (W) par une déférente (H), quadrique non développable, et une sphère directrice (O). Les sphères de cette génération sont des sphères (Σ) dont le centre M est sur la déférente (H) et qui sont orthogonales à la sphère (O).

Soit (I) une inversion dont le pôle I n'est pas sur la directrice (O) et dont la puissance sera choisie de manière à conserver la sphère (O). Les sphères (Σ'), inverses de (Σ), sont les sphères d'une génération normale de la cyclide (W'), inverse de (W) dans l'inversion (I) dont la déférente est une quadrique (H') et dont la directrice est (O).

Le point M', centre de la sphère (Σ'), est l'homologue, dans la transformation (T), du point M; donc

La déférente (H') de la génération normale inverse d'une génération normale dont la déférente est (H) dans l'inversion (I), est la transformée de (H) par l'homologie (T). Elle est donc non développable.

Puisque (**89**) la sphère (O) est conservée par la transformation (T), la focale (F') de la génération inverse, intersection de la déférente (H') et de la directrice (O), est la transformée par la transformation (T) de l'intersection de la déférente (H) et de la sphère (O), c'est-à-dire de la focale (F) de la génération donnée.

La focale (F') est, par conséquent, une biquadratique ayant les mêmes singularités analytiques que la focale (F), puisqu'elle se déduit de (F) par une homologie.

Les résultats trouvés dans ce paragraphe sont indépendants du choix de la puissance d'inversion. Changer la puissance équivaut, comme on sait, à effectuer sur la figure inverse une homothétie.

91. Focales d'une cyclide quelconque. — Nous rappellerons d'abord quelques résultats classiques. Ils peuvent être établis par des calculs simples, que nous ne reproduisons pas ici, ou par des considérations géométriques.

La figure inverse d'une biquadratique sphérique (F), lorsque le pôle d'inversion I est un point de la sphère réelle (O) sur laquelle elle est tracée, mais n'est pas un point double de cette biquadratique, est une quartique bicirculaire ou une cubique circulaire. La biquadratique et la quartique ou cubique ont, à distance finie, les mêmes singularités : si l'une a un point double à tangentes distinctes, l'autre aussi; si l'une d'elles se décompose en deux cercles, l'autre aussi, et les cercles inverses sont en même temps des cercles de rayons nuls.

La figure inverse d'une quartique bicirculaire (ou cubique circulaire), lorsque le pôle I de l'inversion n'est pas dans le plan de cette courbe, est une biquadratique sphérique ayant les mêmes singularités que la quartique ou cubique. On démontre aussi que toute cubique circulaire ou quartique bicirculaire est l'inverse d'une biquadratique sphérique.

La figure inverse d'une conique, lorsque le pôle I de l'inversion n'est pas dans le plan de la conique, est une biquadratique sphérique ayant un point double en I.

Cela fait, rappelons également le résultat suivant, énoncé au § **74** :

Les cyclides (W) à coefficients réels, du quatrième degré, sont soit des surfaces à équation réduite, soit des surfaces inverses dans une inversion réelle des précédentes, soit des surfaces inverses dans une inversion réelle d'un paraboloïde ou d'un cylindre.

Nous distinguerons donc les cas suivants :

1° *Les cyclides* (W) *sont des surfaces à équation réduite* (**84, 85, 87**). — Leurs focales sont soit des biquadratiques sphériques, soit des quartiques bicirculaires;

Si la cyclide est une (W_0), les focales ne sont pas décomposées;

Si la cyclide est une (W_1), les focales sont décomposées en deux cercles distincts, qui ne sont pas tous deux de rayon nul;

Si la cyclide est une (W_2), les focales sont des quadrilatères isotropes.

2° *Les cyclides* (W') *sont les inverses des cyclides* (W) *à équation réduite du cas précédent.* — Nous avons vu (**64, 65, 72**) que le pôle de l'inversion I peut être choisi en dehors de la cyclide (W'). Il n'est pas un point double des focales (F') de cette cyclide. Les focales (F) de la cyclide (W) sont les inverses des focales (F') de la cyclide (W') et, par conséquent, sont soit des biquadratiques sphériques, soit des quartiques bicirculaires, soit des cubiques circulaires qui se décomposent en même temps.

L'inverse d'une cyclide (W'_0), (W'_1), (W'_2) est une cyclide (W_0), (W_1), (W_2). Les résultats énoncés dans le premier cas sont, par conséquent, valables dans le second, un des cercles de décomposition pouvant éventuellement être remplacé par une droite.

3° *Les cyclides* (W') *sont les inverses soit d'un paraboloïde, soit d'un cylindre* (W). — Les inverses (Σ) des sphères des générations normales de (W) sont soit des plans tangents en un seul point à (W'), soit des sphères bitangentes. La sphère directrice de la génération normale de (W) qui correspond après l'inversion à une génération normale par des plans tangents en un seul point à la cyclide (W) est de rayon nul; cette génération normale est exclue de notre étude. Nous n'aurons pas à étudier les surfaces inverses d'un paraboloïde ou d'un cylindre de révolution, qui n'ont aucune focale, au sens où nous l'entendons.

Les focales des deux générations normales, non exclues de notre étude, de la surface (W'_0), inverse d'un paraboloïde (W) non de révolution, sont les inverses des deux paraboles focales de (W) : ce sont donc deux biquadratiques ou cubiques circulaires non décomposées, ayant un point double au pôle I de l'inversion.

Les focales des deux générations normales de la surface (W'_1), inverse d'un cylindre (W) non de révolution, sont les inverses des focales de ce cylindre, qui sont deux couples de droites parallèles : ce sont donc, en général, deux courbes planes ou gauches décomposées en deux cercles.

En résumé, les focales d'une cyclide quelconque sont soit des biquadratiques sphériques, soit des quartiques bicirculaires, soit des cubiques circulaires;

Lorsque la cyclide est une W_0 (pas de générations exceptionnelles), la focale n'est pas décomposée;

Lorsque la cyclide est une W_1 (une seule génération exceptionnelle), la focale est décomposée en cercles et droites ne formant pas un quadrilatère isotrope;

Lorsque la cyclide est une (W_2) (deux générations exceptionnelles), la focale est un quadrilatère isotrope.

92. Réciproques. — Tous les cas ayant été envisagés, les réciproques sont vraies. Elles n'ont d'intérêt que pour les cyclides définies par une sphère directrice (O) dont le rayon n'est pas nul et une quadrique déférente (H) non décomposée.

Lorsque la déférente (H) et la directrice (O) se coupent suivant une biquadratique sphérique non décomposée, la cyclide est une (W_0) n'ayant aucune génération exceptionnelle;

Lorsque la déférente (H) et la directrice (O) se coupent suivant deux cercles distincts qui ne sont pas tous deux de rayon nul, la cyclide est une (W_1) admettant une seule génération exceptionnelle;

Lorsque la déférente (H) et la directrice (O) se coupent suivant un quadrilatère isotrope, la cyclide est une (W_2) et admet deux générations exceptionnelles.

93. Interprétation géométrique du nombre des points doubles. — La focale (F), intersection de la déférente (H) et de la directrice (O) du § **92**, peut avoir des points multiples à distance finie. Ces points sont de deux sortes : les uns seront appelés *permanents* : ce sont soit les deux points communs aux deux cercles lorsque la focale (F) se décompose en deux cercles, soit les quatre sommets du quadrilatère isotrope lorsque la focale (F) se décompose en un quadrilatère isotrope; les autres seront appelés *accidentels.*

Nous avons vu que, lorsque la cyclide est définie par la donnée de ses deux éléments, la directrice (O) et la déférente (H), le point multiple accidentel de la focale est aussi un point multiple accidentel de la cyclide et réciproquement : les points multiples permanents de la focale sont aussi des points multiples permanents de la cyclide et réciproquement. Ces propriétés s'étendent sans aucune peine à tous les cas envisagés. Elles méritent d'être examinées et énoncées.

Pour que la biquadratique (F) d'intersection de la déférente (H) et de la directrice (O) ait un point multiple, il faut et il suffit que ces deux surfaces soient tangentes. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une cyclide définie par sa déférente (H) et sa directrice (O) ait un point double accidentel est que la déférente et la directrice soient tangentes. Le point de contact est le point double de la cyclide.

Lorsque **la déférente** (H) et la directrice (O) se coupent suivant deux cercles distincts qui ne sont pas tous deux de rayon nul, la cyclide est une (W_1). La droite (Δ) d'intersection des plans de ces deux cercles passe par les points doubles permanents de la génération exceptionnelle : cette

droite (Δ) est par conséquent l'axe du cercle directeur de la cyclide et, comme celui-ci est orthogonal à la sphère directrice (O), il est déterminé.

L'axe du cercle directeur d'une cyclide (W_1) *est la droite d'intersection des plans des deux cercles, intersection de la déférente* (H) *et de la directrice* (O).

On verrait de même que :

Les axes des cercles directeurs d'une cyclide (W_2) *sont les deux diagonales du quadrilatère isotrope, intersection de la déférente* (H) *et de la directrice* (O).

Rappelons, pour être complet, la proposition suivante, dont il existe nombre de démonstrations géométriques ou analytiques :

La condition nécessaire et suffisante pour que la cyclide définie par une déférente (H) *et une directrice* (O) *soit décomposée est que la sphère directrice soit inscrite dans la déférente.*

94. Construction des focales connaissant l'une d'entre elles. — Si soucieux que nous soyons de ne pas prolonger une étude que la simplicité des moyens mis en œuvre et la multiplicité des cas particuliers rendent déjà bien longue, il nous est impossible de ne pas signaler l'importante propriété, générale d'ailleurs, des focales qui fait que la connaissance de l'une entraîne la connaissance des autres.

Nous appellerons *focales* d'une courbe, qui pourra être une biquadratique sphérique, une quartique bicirculaire ou une cubique plane, le lieu des centres des sphères de rayon nul bitangentes à cette courbe. Nous allons montrer que *les focales d'une courbe* (F) *qui est une focale d'une cyclide* (W) *sont aussi des focales de cette cyclide.* Nous utiliserons pour le démontrer un procédé très élémentaire, que nous appliquerons à la seule focale (F) définie au § **84** par les équations

$$\text{(H)} \qquad \frac{4x^2}{a+\delta} + \frac{4y^2}{a'+\delta} + \frac{4z^2}{a''+\delta} + 1 = 0,$$

$$\text{(O)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 + \frac{\delta}{2} = 0,$$

avec les hypothèses faites dans ce paragraphe. Nous laisserons à nos lecteurs le soin de vérifier, en appliquant le même procédé aux différents cas possibles, que la proposition est générale.

La focale (F) est une biquadratique sphérique, par laquelle il passe un cône (T), de sommet O et d'équation

$$\frac{a-\delta}{a+\delta}x^2 + \frac{a'-\delta}{a'+\delta}y^2 + \frac{a''-\delta}{a''+\delta}z^2 = 0.$$

Les plans $ux + vy + wz = 0$ tangents à ce cône coupent la sphère directrice (O) suivant des cercles bitangents à la biquadratique (F), et les foyers M et M' de ces cercles (appelés aussi *points de Poncelet*) sont les centres de sphères de rayon nul passant par des cercles bitangents à la courbe (F) et sont par conséquent des foyers de la courbe (F).

La sphère de centre O et passant par M et M' est orthogonale à la sphère (O); son équation est, par conséquent,

$$(O_1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{\delta}{2} = 0.$$

La droite OMM' engendre le cône supplémentaire (T_1) du cône (T) de sommet (O), dont l'équation est

$$(T_1) \qquad \frac{a+\delta}{a-\delta}x^2 + \frac{a'+\delta}{a'-\delta}y^2 + \frac{a''+\delta}{a''-\delta}z^2 = 0.$$

La focale de la biquadratique sphérique (F) est une biquadratique sphérique (F_1), intersection du cône (T_1) et de la sphère (O_1). Les équations de (F_1) se déduisent des équations de (F) par le changement de $+\delta$ en $-\delta$; autrement dit, puisque (F) est la focale de la cyclide qui correspond à la racine $+\delta$, (F_1) sera la focale de la cyclide qui correspond à la racine $-\delta$.

La proposition est démontrée : l'une des focales de (F) est bien l'une des focales de la cyclide. Il reste à le démontrer pour les autres focales : nous l'établirons encore pour l'une d'entre elles.

La biquadratique sphérique (F) est aussi tracée sur des cylindres : par exemple, sur le cylindre d'équation

$$4y^2\frac{a-a'}{a'+\delta} + 4z^2\frac{a-a''}{a''+\delta} + a - \delta = 0.$$

Les plans tangents à ce cylindre coupent encore la sphère directrice (O) suivant des cercles bitangents, dont les foyers décrivent une focale (F_2) de la biquadratique (F). Soit

$$vy + wz + h = 0$$

l'équation de l'un des plans bitangents; v, w, h seront liés par la relation

$$\frac{a'+\delta}{a-a'}v^2 + \frac{a''+\delta}{a-a''}w^2 + 4\frac{1}{a-\delta}h^2 = 0.$$

Les coordonnées x, y, z d'un foyer du cercle d'intersection de ce plan et de la sphère directrice (O) sont définies par les égalités

$$x = 0, \quad y = \lambda v, \quad z = \lambda w, \quad \lambda^2v^2 + \lambda^2w^2 + 2\lambda h - \frac{\delta}{2} = 0,$$

et le lieu de ce point est la courbe (F_1), d'équations

$$x = 0, \qquad \left(y^2 + z^2 - \frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{(a'+\delta)(a-\delta)}{a-a'}y^2 + \frac{(a''+\delta)(a-\delta)}{a-a''}z^2 = 0.$$

Nous reconnaissons dans cette courbe (F_1) la focale de la cyclide (W) trouvée au § **85** : la focale (F_1) de la courbe (F) est donc bien une focale de la cyclide (W).

Nous généraliserons, puis, la propriété d'être une focale se conservant par inversion, nous énoncerons le résultat général suivant :

Les focales d'une cyclide (W) sont les focales de l'une d'entre elles.

Il en résulte diverses propriétés. Par exemple, soit (F) une focale d'une génération normale d'une cyclide (W); nous supposerons que (F) est une biquadratique sphérique non décomposée; il passe par cette biquadratique, en général, quatre cônes : soit O_1 le sommet de l'un quelconque de ces cônes; les plans tangents à ce cône coupent la sphère directrice (O) de la génération normale considérée suivant un cercle dont les foyers M décrivent une focale (F_1) de la cyclide; la sphère de centre O_1 et de rayon O_1M est orthogonale à la sphère (O); c'est donc une sphère fixe (O_1). Autrement dit, la focale (F_1) est une biquadratique sphérique tracée sur une sphère (O_1), de centre O_1, orthogonale à la sphère (O); la sphère (O_1) est, par conséquent, une sphère directrice. Nous retrouvons et nous complétons un résultat déjà établi :

Les sphères directrices des générations normales d'une cyclide sont orthogonales et leurs centres sont les sommets des cônes qui passent par l'une d'entre elles.

Une autre conséquence importante de la démonstration qui précède est la suivante : *Deux cyclides qui ont une focale commune ont toutes leurs focales communes.* Nous dirons qu'elles sont *homofocales.* Nous aurons l'occasion de définir et d'étudier certaines propriétés de cyclides homofocales.

TROISIÈME PARTIE

CYCLIDES DE DUPIN

CHAPITRE XI

GÉNÉRATION

95. Relation entre la parataxie et l'étude des cyclides. — Nous avons interrompu (**41**) l'étude de la parataxie après avoir constaté que des familles de cercles à un paramètre, les cercles (Π) (**34**), jouaient un rôle important dans cette étude. Ces cercles sont orthogonaux à une sphère fixe (O), de centre réel O; leurs axes sont les génératrices d'un même système d'une quadrique réglée (H) : ce sont donc des cercles d'une même famille d'une cyclide (W) dont la déférente est (H) et la directrice (O). Nous sommes en mesure maintenant de reconnaître ces cyclides (W), de les caractériser et de les étudier. L'étude des cyclides rejoint donc ici l'étude interrompue et en constitue la suite logique.

Notons d'abord que les cyclides engendrées par les cercles (Π) sont définies par les éléments d'une génération normale. Nous conviendrons donc d'écarter de notre étude les cyclides qui n'ont aucune génération normale.

Nous avons dit plus haut (**41**) que l'étude des cyclides, étude entreprise et menée à bien depuis longtemps par d'illustres géomètres, aurait dû conduire ces géomètres à la découverte de la parataxie; il est curieux de constater que c'est l'inverse qui s'est produit. La parataxie était depuis longtemps en germe dans les travaux de nombreux géomètres; son importance n'a cependant été mise en lumière que tout récemment, et c'est pour étudier la parataxie qu'a été reprise l'étude des cyclides. Nous nous sommes conduit comme, hélas! le chercheur est bien souvent obligé de le faire : un hasard heureux, une observation pertinente nous ayant révélé que nous avions quitté la bonne route, nous sommes revenu prendre le chemin abandonné.

Il peut être intéressant de chercher pour quelles raisons les premières études des cyclides, celles de Darboux, par exemple, ne font aucune allusion à la parataxie. La raison en est simple et très humaine : les cyclides les plus séduisantes pour le chercheur sont les cyclides à générations exceptionnelles et, en particulier, les (W_2) à deux générations exceptionnelles. Ces cyclides ont un mode de génération remarquable : elles sont des enveloppes de sphères à un paramètre, définies par une conique déférente et un cercle directeur. Nous verrons dans les paragraphes suivants que l'étude de cette enveloppe, au moyen de la définition donnée, est simple et conduit à des résultats suffisants pour qu'on puisse croire la question complètement résolue. Les chercheurs ont donc négligé l'humble génération normale; or c'est elle qui contenait, en germe, la parataxie.

96. Classification des cyclides (W_2). — Les cyclides (W_2) ont, par définition, deux générations exceptionnelles. Nous bornons notre étude à celles qui possèdent une génération normale, ce qui écarte (**72**) les inverses de cylindres de révolution. L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ relative à l'une de ces cyclides a deux racines singulières doubles et une racine simple : à chaque racine singulière double correspond un cercle directeur (qui peut être une droite directrice), dont le rayon n'est pas nul puisque la racine singulière n'est pas triple. Soient (C) et (C') ces cercles directeurs, l'un d'eux pouvant être une droite : ils forment (**72**) un anneau orthogonal et l'un d'eux est un cercle réel.

Si l'un des deux cercles directeurs est une droite, la cyclide est une cyclide (W) de révolution, et son équation est (**73**)

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + a(x^2+y^2) + a''z^2 + \frac{a''^2}{4} = 0.$$

Cette cyclide est soit un *tore*, soit un *pseudo-tore*.

Si aucun des deux cercles directeurs n'est une droite, la cyclide (W) n'est pas de révolution. Soit I un point du cercle directeur réel non situé sur la cyclide, ni sur la sphère directrice (O) de la génération normale. Soit (I) l'inversion de pôle I et qui conserve la sphère (O) globalement (cette inversion est l'inversion du § **89**, à laquelle correspond une homologie (T) qui sert à trouver la transformée après inversion de la déférente (H) de la génération normale). La transformée de la cyclide (W) par l'inversion (I) est une cyclide de révolution (W'); c'est donc soit un tore, soit un pseudo-tore.

Nous distinguerons donc, parmi les cyclides (W_2) admettant une génération normale, deux familles de cyclides :

Nous appellerons **cyclides de Dupin** *le tore réel et les cyclides inverses dans une inversion réelle d'un tore réel;*

Nous appellerons **pseudo-cyclides de Dupin** *le pseudo-tore réel et les cyclides inverses dans une inversion réelle d'un pseudo-tore réel.*

Les *cyclides de Dupin* sont des cyclides *réelles*, admettant deux générations exceptionnelles et une génération normale; les cercles directeurs (C) et (C') des générations exceptionnelles sont en général deux cercles réels, et par conséquent les cyclides de Dupin ont en général quatre points doubles permanents imaginaires. Il y a exception pour le tore et pour lui seul. Cette propriété est caractéristique.

Toute cyclide ayant quatre points doubles permanents imaginaires est une cyclide de Dupin qui n'est pas un tore.

97. Conditions de réalité du tore et du pseudo-tore. — Nous allons étudier d'abord le tore et le pseudo-tore. Leur équation commune est

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + a(x^2+y^2) + a''z^2 + \frac{a''^2}{4} = 0. \quad (1)$$

Nous nous préoccuperons d'abord de savoir à quelles conditions ces surfaces (W) sont réelles.

Le tore et le pseudo-tore sont engendrés par la rotation d'un cercle autour de Oz. Les équations d'une méridienne de ces surfaces sont (**73**)

$$x = 0, \qquad \left(y^2+z^2+\frac{a''}{2}\right)^2 = (a''-a)y^2.$$

Elles sont réelles si les cercles méridiens sont des cercles réels; il faut pour cela d'abord que $a'' - a$ soit positif; posons, dans ce cas,

$$a'' - a = 4k^2.$$

Les équations d'un des deux cercles méridiens seront

$$x = 0, \qquad y^2+z^2-2ky+\frac{a''}{2} = 0,$$

et ce cercle sera réel si l'inégalité

$$k^2 - \frac{a''}{2} > 0$$

est satisfaite, c'est-à-dire si l'on a

$$a'' + a < 0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces d'équation (**1**) *soient réelles sont*

$$a'' - a > 0, \qquad a'' + a < 0.$$

98. Génération normale du tore et du pseudo-tore. — L'equation $\varphi(\lambda) = 0$ de ces surfaces est

$$(a + \lambda)^2(a'' + \lambda)(\lambda^2 - a''^2) = 0.$$

La racine simple de cette équation est a''; il lui correspond une génération normale dont les éléments sont : une déférente (H), d'équation

$$\frac{4x^2}{a + a''} + \frac{4y^2}{a + a''} + \frac{2z^2}{a''} + 1 = 0,$$

et une sphère directrice (O), d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a''}{2} = 0.$$

1° *Si la cyclide* (W) *étudiée est un tore*, le cercle méridien (97) ne coupe pas l'axe Oz; donc a'' est positif; si, en outre, ce tore est réel, $a'' + a$ est négatif. Ces deux conditions entraînent les conclusions suivantes : la deférente (H) est un hyperboloïde à une nappe et la sphère directrice (O) est imaginaire.

Réciproquement, si la déférente (H) est un hyperboloïde à une nappe, a'' est positif et $a'' + a$ est négatif; il en résulte que $a'' - a$ est positif, puisque

$$a'' - a = 2a'' - (a'' + a),$$

et la cyclide (W) est un tore réel.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une cyclide (W_2) de révolution soit un tore réel est que la déférente de la génération normale soit une quadrique non développable réglée.

Cette quadrique (H), étant de révolution, est un hyperboloïde à une nappe et la sphère directrice (O) est imaginaire.

2° *Si la cyclide* (W) *est un pseudo-tore*, le cercle méridien coupe Oz (97) et a'' est négatif; la sphère directrice (O), dans ce cas, est réelle. Si cette surface est réelle, $a + a''$ est négatif, et la déférente (H) de la génération normale est un ellipsoïde.

Réciproquement, si la déférente (H) est un ellipsoïde réel, a'' et $a + a''$ sont négatifs; la sphère directrice (O) est réelle, mais, cette fois, les conditions n'entraînent plus que $a'' - a$ est positif, et le pseudo-tore n'est pas nécessairement réel. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de la réalité : le pseudo-tore, surface à points doubles réels, inverse d'un cône de révolution, ne présente pas un intérêt très grand pour la recherche entreprise.

99. Conditions pour qu'une cyclide soit une cyclide de Dupin. — Supposons que la cyclide (W) soit une cyclide de Dupin,

c'est-à-dire (**96**) soit un tore réel ou l'inverse dans une inversion réelle d'un tore réel. Cette surface, ayant deux générations exceptionnelles, est une (W_2) et (**91**) la déférente (H) et la directrice (O) ont en commun un quadrilatère isotrope.

En outre, si la cyclide (W) est un tore réel, la déférente est un hyperboloïde de révolution à une nappe, donc quadrique à génératrices réelles non développable. Si la cyclide (W) n'est pas un tore, elle est, dans une inversion (I) définie au § **96**, l'inverse d'un tore réel (W'). La déférente (H) est la transformée par une homologie (T) (**89**) de la déférente (H') du tore réel (W'), si la puissance d'inversion est convenablement choisie. Comme (H') est une quadrique réglée non développable, il en est de même de (H).

Réciproquement, supposons que la déférente (H) soit un hyperboloïde de révolution à une nappe coupant la sphère directrice (O) suivant un quadrilatère isotrope; il en résulte (**92**) que cette cyclide est une (W_2); donc, si elle est de révolution, comme sa déférente est une quadrique réglée non développable, la cyclide (**98**) est un tore réel; si elle n'est pas de révolution, une inversion (I) la transforme en une cyclide (W') de révolution; la déférente (H') de cette cyclide se déduit de (H) par l'homologie (T) si la puissance d'inversion est convenablement choisie; (H') est, par conséquent, une quadrique réglée non développable et, la cyclide (W'), inverse de (W), étant (**98**) un tore, la cyclide (W) est une cyclide de Dupin. Nous énoncerons donc le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une cyclide définie par les éléments d'une génération normale soit une cyclide de Dupin est que la déférente soit une quadrique à génératrices réelles, non développable, qui coupe la sphère directrice suivant un quadrilatère isotrope.

Nous avons énoncé la condition nécessaire et suffisante pour qu'une cyclide soit de Dupin sous une forme applicable aux cyclides de degré trois et quatre. Il est bien entendu que, pour les cyclides du 4e degré, la déférente, étant une quadrique à centre, est un hyperboloïde à une nappe.

100. Équation d'une cyclide de Dupin de degré 4. — L'équation du tore est connue. Nous nous bornerons donc à trouver l'équation générale des cyclides du 4e degré, non de révolution.

L'équation d'une pareille cyclide peut être mise sous la forme (**72**)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2c''z + d = 0.$$

Nous supposerons qu'un choix convenable des axes Ox et Oy permet de supposer que l'on a

$$a > a'.$$

La cyclide (W) est de Dupin non de révolution si les conditions

$$c''(a-a')(a''-a')(a-a'')\neq 0, \qquad \frac{4c''^2}{a''-a}+a^2-4d=0,$$

$$\frac{4c''^2}{a''-a'}+a'^2-4d=0$$

sont vérifiées.

L'équation $\varphi(\lambda)=0$ de la cyclide s'écrit

$$(a+\lambda)(a'+\lambda)\left[4c''^2+(\lambda^2-4d)(a''+\lambda)\right]=0.$$

Elle admet la racine double $-a$, la racine double $-a'$ et la racine simple $a+a'-a''$.

La déférente (H) de la génération normale a pour équation

$$\frac{4x^2}{2a+a'-a''}+\frac{4y^2}{2a'+a-a''}+\frac{4z^2}{a+a'}+1=0.$$

Les conditions de réalité de la cyclide (W) doivent exprimer que le centre O de la directrice est réel et que la déférente (H) est un hyperboloïde à une nappe; nous exprimerons donc d'abord que c'' est réel. On calcule c'' en éliminant d entre les deux équations

$$\frac{4c''^2}{a''-a}+a^2-4d=0, \qquad \frac{4c''^2}{a''-a'}+a'^2-4d=0,$$

ce qui donne

$$4c''^2=-(a+a')(a''-a)(a''-a').$$

Posons

$$\begin{aligned} 2a+a'-a''&=4\mathrm{A},\\ 2a'+a-a''&=4\mathrm{B},\\ a+a'&=4\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Deux des trois nombres A, B, C doivent être négatifs et le troisième positif pour que la déférente (H)

$$\frac{x^2}{\mathrm{A}}+\frac{y^2}{\mathrm{B}}+\frac{z^2}{\mathrm{C}}+1=0$$

soit un hyperboloïde à une nappe. En outre, pour que c''^2 soit positif il faut que l'inégalité

$$(1) \qquad \mathrm{C}(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{B})<0$$

soit satisfaite.

Si C est positif, A et B sont négatifs et l'inégalité (1) n'est pas satisfaite. Nous supposerons donc C négatif et, comme $4(\mathrm{A}-\mathrm{B})=a-a'$, nombre positif par hypothèse, nous supposerons aussi A positif et B négatif. La seule condition de réalité se réduit alors à

$$\mathrm{C}-\mathrm{B}<0.$$

Nous désignerons par λ et μ deux paramètres choisis de manière que l'on ait

$$\lambda^2<1<\mu^2,$$

et nous poserons

$$\begin{aligned} 2a+a'-a''&=4h^2(\mu^2-1),\\ 2a'+a-a''&=4h^2(\lambda^2-1),\\ a+a'&=-4h^2, \end{aligned}$$

h étant un paramètre, au même titre que λ et μ. De ces égalités, nous tirons

$$\begin{aligned} a&=2h^2(\mu^2-\lambda^2-1),\\ a'&=2h^2(\lambda^2-\mu^2-1),\\ a''&=-2h^2(\lambda^2+\mu^2+1). \end{aligned}$$

La condition de réalité est satisfaite. On choisit les signes de λ et μ de manière que

$$c''=4h^3\lambda\mu.$$

La valeur de d est alors fournie par l'égalité

$$\frac{4c''^2}{a''-a}+a^2-4d=0$$

et

$$d=h^4\left[(\mu^2-\lambda^2)^2-2(\lambda^2+\mu^2)+1\right].$$

L'équation générale des cyclides de Dupin réelles et non de révolution est donc

$$\begin{gathered} (x^2+y^2+z^2)^2+2h^2(\mu^2-\lambda^2-1)x^2+2h^2(\lambda^2-\mu^2-1)y^2\\ -2h^2(\lambda^2+\mu^2+1)z^2+8h^3\lambda\mu z+h^4\left[(\lambda^2-\mu^2)^2-2(\lambda^2+\mu^2)+1\right]=0\\ \lambda^2<1<\mu^2. \end{gathered}$$

Notons que les éléments de la génération normale sont **(79)** : la déférente (H),

$$\frac{x^2}{\mu^2-1}+\frac{y^2}{\lambda^2-1}-z^2+h^2=0,$$

et la directrice (O),

$$x^2+y^2+z^2-2h\lambda\mu z+h^2(\lambda^2+\mu^2-1)=0.$$

Les éléments des générations exceptionnelles sont : un cercle directeur (C),

$$x=0, \qquad y^2+z^2-2h\frac{\lambda}{\mu}z+h^2(\lambda^2+1-\mu^2)=0,$$

et une conique déférente (γ),

$$x=0, \qquad \frac{y^2}{\lambda^2-\mu^2}-\frac{z^2}{\mu^2}+h^2=0,$$

et, pour la seconde génération, le cercle directeur (C'),

$$y = 0, \qquad x^2 + z^2 - 2h\frac{\mu}{\lambda}z + h^2(\mu^2 + 1 - \lambda^2) = 0.$$

et la conique déférente (γ'),

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{\mu^2 - \lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda^2} + h^2 = 0.$$

Le cercle directeur (C) est bitangent à la conique déférente (γ); ce fait est la conséquence de l'identité

$$\mu^2\left[y^2 + z^2 - 2h\frac{\lambda}{\mu}z + h^2(\lambda^2 + 1 - \mu^2)\right]$$
$$\equiv \mu^2y^2 + (\mu^2 - \lambda^2)z^2 - h^2\mu^2(\mu^2 - \lambda^2) + \lambda^2\left(z - h\frac{\mu}{\lambda}\right)^2.$$

Les deux points de contact du cercle directeur (C) et de la conique (γ) sont définis par

$$x = 0, \qquad z = h\frac{\mu}{\lambda}, \qquad y^2 + z^2 - 2h\frac{\lambda}{\mu}z + h^2(\lambda^2 + 1 - \mu^2) = 0.$$

Ce sont les deux points communs à l'axe du cercle directeur (C') et à la sphère directrice (O) de la génération normale, c'est-à-dire les deux points doubles permanents de la génération exceptionnelle définie par (γ)' et (C').

Il est clair que le cercle directeur (C') est le cercle bitangent à la conique directrice (γ') aux deux points doubles permanents de la génération exceptionnelle définie par (γ) et (C). Les calculs qui le démontrent sont analogues aux précédents.

Nous résumerons les résultats précédents en précisant la position relative des éléments d'une cyclide de Dupin, non de révolution.

Les éléments d'une cyclide de Dupin non de révolution sont : d'une part une sphère directrice (O) *imaginaire, deux cercles directeurs* (C) *et* (C') *réels, et d'autre part une quadrique déférente* (H) *à génératrices réelles et deux coniques déférentes* (γ) *et* (γ') *réelles.*

Les cercles directeurs (C) *et* (C') *sont orthogonaux à la sphère directrice* (O) *et forment un anneau orthogonal.* Ils sont donc définis par la sphère (O) et leurs axes (D) et (D'); ces axes sont deux droites conjuguées par rapport à la sphère (O); ils la coupent aux points doubles permanents, I, J d'une part, I', J' d'autre part, des générations exceptionnelles.

Les deux coniques déférentes sont (notons encore une fois que nous avons écarté de notre étude les cyclides du 3e degré) **l'ellipse réelle et l'hyperbole focale de l'hyperboloïde (H), quadrique déférente de la génération normale.**

Les cercles directeurs (C) *et* (C') *des générations exceptionnelles sont des cercles bitangents réels de la famille des foyers des coniques déférentes* (γ) *et* (γ') *de ces générations. Les points de contact d'un cercle directeur* (C) *et de la conique déférente* (γ) *sont deux points doubles permanents, imaginaires,* I *et* J, *de la cyclide de Dupin.*

Les conditions de réalité, la nature des directrices sont des conséquences des hypothèses faites sur les paramètres λ et μ, hypothèses que traduisent les inégalités

$$\lambda^2 < 1 < \mu^2$$

et qui résultent de la définition précise que nous avons donnée de la cyclide de Dupin.

Bornons-nous à signaler que certains des résultats établis sont indépendants de ces hypothèses, celui-ci en particulier :

Le cercle directeur d'une génération exceptionnelle d'une cyclide (W_2) *est bitangent à la conique directrice correspondante.*

101. Coniques déférentes des générations exceptionnelles. — Proposons-nous d'examiner si une ellipse donnée, d'équations

$$x = 0, \qquad \frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad a^2 - b^2 = c^2,$$

et un cercle bitangent à celle-ci, défini par son centre, de coordonnées 0, 0, z_0, peuvent constituer les éléments d'une génération exceptionnelle d'une cyclide de Dupin.

Il faut et il suffit, pour cela, que l'ellipse soit l'ellipse (γ) du paragraphe précédent et que le cercle soit le cercle (C), c'est-à-dire que l'on puisse déterminer les paramètres λ, μ et h de manière que l'on ait

$$h^2(\mu^2 - \lambda^2) = b^2, \qquad h^2\mu^2 = a^2, \qquad h\frac{\lambda}{\mu} = z_0.$$

Ces égalités seront satisfaites si l'on choisit pour λ, μ, h les valeurs suivantes :

$$h = \frac{az_0}{c}, \qquad \lambda = \frac{c^2}{az_0}, \qquad \mu = \frac{c}{z_0}.$$

A ces valeurs correspondra une cyclide de Dupin si les inégalités

$$\lambda^2 < 1 < \mu^2$$

sont satisfaites, c'est-à-dire si

$$\frac{c^4}{a^2} < z_0^2 < c^2.$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ellipse de foyers F et F′ et un cercle soient les éléments d'une génération exceptionnelle d'une cyclide de Dupin est que le cercle soit un cercle bitangent de la famille des foyers, dont le centre est un point du segment FF′ extérieur à la développée.

Une étude analogue à la précédente conduit à la conclusion suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une hyperbole de foyers F et F′ et un cercle soient les éléments d'une génération exceptionnelle d'une cyclide de Dupin est que le cercle soit un cercle bitangent de la famille des foyers dont le centre est à l'extérieur du segment FF′ et à l'extérieur de la développée.

Nous rappelons que l'extérieur de la développée est la région d'où l'on peut mener deux tangentes réelles à cette courbe.

On peut énoncer d'une façon plus générale :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une conique et un cercle soient les éléments d'une génération exceptionnelle d'une cyclide de Dupin est que le cercle soit un cercle bitangent à la conique en deux points imaginaires et de la famille des foyers.

Il est évidemment tentant d'énoncer le résultat plus général suivant : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une conique et un cercle soient les éléments d'une génération exceptionnelle d'une cyclide* (W_2) *est que ces deux courbes soient bitangentes.*

Cette proposition est exacte : elle se démontre, lorsque la conique donnée est une conique à centre, en calculant comme précédemment λ, μ, h; le calcul conduit à des valeurs réelles pour λ^2, μ^2 et h. En portant les valeurs trouvées dans l'équation des cyclides de Dupin trouvée au paragraphe précédent (**100**), on trouve non plus, en général, une cyclide de Dupin puisque les conditions λ et μ réels et $\lambda^2 < 1 < \mu^2$ ne sont pas nécessairement remplies, mais une cyclide (W_2) dont la conique et le cercle donnés sont les éléments d'une génération exceptionnelle.

La simplicité du dernier énoncé n'est qu'apparente. Dire d'une cyclide qu'elle est une (W_2) ne renseigne ni sur sa réalité, ni sur l'existence sur la surface de cercles réels; cette affirmation ne donne donc aucune base solide pour une étude géométrique. Il n'en est pas de même lorsqu'il est possible d'affirmer que cette (W_2) est une cyclide de Dupin, avec le sens précis donné à cette dénomination.

CHAPITRE XII

PROPRIÉTÉS PARATACTIQUES DES CERCLES D'UNE CYCLIDE DE DUPIN

102. Familles de cercles d'une cyclide de Dupin. — Une cyclide de Dupin (W) admet deux générations exceptionnelles et une génération normale.

1° Les sphères (Σ) d'une des deux générations exceptionnelles sont tangentes à la cyclide (W) en tous les points d'un cercle variable (Γ). Lorsque (W) est un tore, ce cercle (Γ) appartient soit à la famille des *méridiens*, soit à celle des *parallèles* : ce cercle est donc réel. Lorsque (W) n'est pas un tore, elle est l'inverse d'un tore dans une inversion réelle et les cercles (Γ), inverses de cercles réels, sont aussi des cercles réels. *Ces cercles* (Γ) *sont les lignes de courbure de la cyclide.*

A chaque génération exceptionnelle, correspond donc une famille de cercles réels de la cyclide.

2° La génération normale est définie par une sphère directrice (O) imaginaire et une déférente (H) à génératrices réelles non développable. Soit M un point de la quadrique (H); la sphère de centre M, orthogonale à la directrice (O) imaginaire, est une sphère réelle de la famille des sphères (Σ). Cette sphère (**51**) coupe la cyclide (W) suivant deux cercles, dont les axes sont les génératrices (D) et (Δ) réelles de la déférente (H), qui passent par le point M et dont les plans passent par O. Ces deux cercles, orthogonaux à une sphère imaginaire et d'axes réels, sont des cercles réels. Nous utiliserons, pour les représenter et les étudier, les notations définies au § **13** : les génératrices (D), représentées par des lettres latines, seront dites du premier système de la quadrique (H), et les génératrices (Δ), représentées par des lettres grecques, seront dites du second système. Le cercle dont l'axe est la génératrice (D) sera le cercle (D) du premier système, par définition; le cercle (Δ) sera le cercle d'axe (Δ), donc du second système.

Il existe, en particulier, sur le tore, des cercles (D) et (Δ) dont les plans passent par le centre O du tore. Ces cercles sont connus sous la dénomination de *cercles d'Yvon Villarceau.* Ils sont égaux et leurs plans sont des plans dits bitangents au tore.

Il existe donc sur une cyclide de Dupin quatre familles de cercles, tous réels.

Les cercles de contact des sphères inscrites d'une génération exceptionnelle forment une famille dite *famille exceptionnelle de cercles de la cyclide.* Il y a deux familles exceptionnelles. On vérifiera sans peine que les plans des cercles d'une famille exceptionnelle pivotent autour d'une droite fixe : d'une façon plus précise, ces cercles passent par les deux points doubles permanents correspondants à la génération [1].

Les cercles d'intersection des sphères (Σ) de la génération normale et de la cyclide forment deux familles dites *familles normales de cercles de la cyclide.* Les cercles (D) de la première famille ont pour axes les génératrices du premier système de la déférente, et les cercles (Δ) de la deuxième famille ont pour axes les génératrices du deuxième système de la déférente.

3° Il n'y a pas sur la cyclide d'autres cercles que les cercles énumérés ci-dessus.

En effet, soit (ω) un cercle quelconque situé sur la cyclide (W). Une quelconque (Σ) des sphères qui passent par (ω) coupe la cyclide suivant un deuxième cercle, distinct ou non de (ω); cette sphère (Σ) est donc une des sphères trouvées au chapitre VIII. Elle appartient à l'une des générations de la cyclide, et le cercle (ω) est un cercle d'une des quatre familles déjà trouvées.

103. Propriétés des cercles des familles normales. — I.

Deux cercles de deux familles normales différentes sont soit sur une même sphère, soit dans un même plan.

Les axes (D) et (Δ) de deux cercles (D) et (Δ), qui sont des cercles d'une cyclide de Dupin, de deux familles normales différentes, sont deux génératrices de systèmes différents de la déférente (H). Si ces généra-

---

[1] Nous rappelons, à ce propos, la génération classique d'une cyclide de Dupin à partir de ces familles exceptionnelles :

On donne dans un plan (P) deux cercles (O) et (O′) (le lecteur étudiera facilement le cas où l'on donne un cercle et une droite), I un des centres d'inversion, M et M′ deux points inverses. Le cercle de diamètre MM′ dans le plan perpendiculaire à (P) engendre une cyclide de Dupin. On démontre aisément, et par voie purement géométrique, que tout plan passant par l'axe radical (Δ) de (O) et (O′) coupe cette cyclide suivant deux cercles.

On met ainsi en évidence les deux familles exceptionnelles. On établira que :

les deux cercles ainsi cités qui passent par un point Q de la surface s'y coupent à angle droit;

les axes de ces cercles touchent deux coniques focales;

ces cercles sont les cercles de contact avec la cyclide de sphères inscrites des générations exceptionnelles.

trices sont parallèles, les plans des cercles (D) et (Δ) sont confondus; si elles ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point M de la déférente, et la sphère (Σ) de centre M, orthogonale à la directrice (O), passe par chacun des deux cercles (D) et (Δ).

II. *Deux cercles d'une même famille normale ne sont ni sur une même sphère, ni dans un même plan.*

Les axes (D_1) et (D_2) de deux cercles d'une même famille normale d'une cyclide (W) sont deux génératrices de même système de la déférente (H). Ils ne sont donc pas dans un même plan et, par conséquent, les deux cercles (D_1) et (D_2), dont les axes ne sont pas dans un même plan, ne sont ni sur une même sphère, ni dans un même plan.

III. **Deux cercles (D_1) et (D_2) qui sont deux cercles d'une même famille normale d'une cyclide de Dupin sont, en général, paratactiques.**

Les axes (D_1) et (D_2) de ces deux cercles sont des génératrices d'un même système de la déférente (H); la déférente (H) coupe la sphère directrice (O) suivant quatre génératrices isotropes. Nous appellerons (**24**) ces génératrices (G_1), (G_2), (Γ_1), (Γ_2) : (G_1) et (G_2) sont, par hypothèse, du même système que (D_1) et (D_2). L'axe (D_1) du cercle (D_1) coupe la sphère directrice (O) en deux points P_1 et Q_1 qui sont les foyers ou points de Poncelet de ce cercle : ces points sont les points de l'axe (D_1) situés, le premier P_1 sur (Γ_1), le second Q_1 sur (Γ_2). L'axe (D_2) du cercle (D_2) coupe, de même, la directrice (O) au point P_2 situé sur (Γ_1) et au point Q_2 situé sur (Γ_2). Ces points sont les foyers ou points de Poncelet de (D_2).

Les foyers ou points de Poncelet des cercles (D_1) et (D_2) sont P_1 et P_2 sur la droite isotrope (Γ_1) et Q_1 et Q_2 sur la droite isotrope (Γ_2) : les deux cercles (D_1) et (D_2) sont, par conséquent, des cercles paratactiques (**27**), excepté s'ils forment un anneau orthogonal.

En particulier,

Deux cercles d'Yvon Villarceau d'une même famille d'un tore sont, en général, deux cercles paratactiques.

104. Cyclides de Dupin qui passent par deux cercles paratactiques donnés.

— La réciproque de la proposition démontrée plus haut : deux cercles d'une même famille normale d'une cyclide de Dupin sont paratactiques, aurait dû logiquement conduire les chercheurs à la découverte des propriétés de la parataxie. Nous allons l'étudier ici.

Soient (D_1) et (D_2) deux cercles paratactiques, c'est-à-dire deux cercles dont les foyers ou points de Poncelet P_1, Q_1 et P_2, Q_2 sont les uns, P_1, P_2, sur une droite isotrope (Γ_1), les autres, Q_1, Q_2, sur une droite isotrope (Γ_2). **Il existe une infinité de quadriques réelles non développables** passant par le quadrilatère gauche défini par (D_1), (D_2), (Γ_1) et (Γ_2). Soit (H) l'une quelconque d'entre elles.

Soit (O) la sphère orthogonale aux cercles (D_1) et (D_2) ; le centre O de cette sphère est réel et son rayon est imaginaire ; cette sphère, étant orthogonale au cercle (D_1), passe par les points P_1 et Q_1 ; étant orthogonale à (D_2), elle passe par les points P_2 et Q_2. Cette sphère, passant par P_1 et P_2, contient la droite isotrope (Γ_1) qui passe par ces deux points ; elle contient aussi la droite isotrope (Γ_2). Elle coupe par conséquent la quadrique (H) suivant deux génératrices de même système, (Γ_1) et (Γ_2) ; l'intersection de la sphère et de la quadrique se compose par conséquent de quatre génératrices : (Γ_1), (Γ_2), (G_1), (G_2), toutes isotropes.

La cyclide (W), dont la déférente est la quadrique (H) à génératrices réelles non développable et la directrice la sphère (O), est (**99**) une cyclide de Dupin, puisque la déférente et la directrice ont en commun un quadrilatère isotrope. Il est clair que, les droites (D_1) et (D_2) étant deux génératrices d'un même système de la déférente, les cercles (C_1) et (C_2) sont deux cercles d'une même famille normale de cette cyclide. Donc :

Deux cercles paratactiques donnés sont deux cercles d'une même famille normale d'un faisceau de cyclides de Dupin.

Nous entendons par faisceau de cyclides une famille de cyclides dont l'équation dépend d'un seul paramètre.

Il est aisé de se rendre compte que par deux cercles paratactiques donnés il ne passe pas d'autres cyclides de Dupin que les cyclides définies plus haut.

105. Cyclide axiale passant par deux cercles paratactiques. — La directrice (O) des cyclides (W) qui passent par deux cercles paratactiques (D_1) et (D_2) donnés est une sphère fixe. Les déférentes (H) sont les quadriques d'un faisceau linéaire ; parmi ces quadriques, il y a une quadrique (S) et une seule. Nous rappelons que les quadriques (S) ont été définies et étudiées au chapitre I : ce sont les quadriques autopolaires à la directrice (O), de manière que les droites conjuguées (D′) des génératrices (D) de l'un des systèmes soient des génératrices de ce même système.

La quadrique (S) dont il s'agit ici est définie par la donnée des droites réelles (D_1) et (D_2), par celle de la droite (D'_1) conjuguée de (D_1) par rapport à la sphère directrice (O), et par les deux génératrices isotropes (Γ_1) et (Γ_2) qui rencontrent les droites (D_1), (D_2), (D'_1) en des points P_1, P_2, P'_1 et Q_1, Q_2, P'_2. Cette quadrique est une quadrique réelle (**10**) réglée et non développable [1]. La cyclide (W) dont la déférente est la

[1] *Exemple* : si l'on prend pour (O) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, pour (D_1) et (D_2) les droites : $x = 0, y = 0$; $x = 1, y = z$, on trouve pour (S) la quadrique $xz - y = 0$, qui contient les droites : $y = \varepsilon i x$, $z = \varepsilon i$, avec $\varepsilon = \pm 1$.

quadrique (S) et la directrice la sphère (O), est dite *cyclide de Dupin axiale des deux cercles paratactiques donnés.*

Nous allons étudier la cyclide axiale.

Les droites (D_1) et (D_2) sont, par hypothèse, deux génératrices de la déférente (S) du premier système. Soit (Δ) une génératrice du second système ; il lui correspond un cercle (Δ) de la cyclide axiale. Puisque la déférente (S) est autopolaire par rapport à la directrice (O), la droite (D'_1), conjuguée de (D_1), et la droite (D'_2), conjuguée de (D_2) par rapport à cette directrice, sont des génératrices du premier système de la déférente (S). La génératrice (Δ) du second système les rencontre donc.

Rappelons que (**16**) la condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles (D_1) et (Δ) soient perpendiculaires est que l'axe (Δ) de l'un rencontre l'axe (D_1) du second et la droite conjuguée (D'_1) par rapport à la directrice. Il en résulte que les cercles (Δ) sont des cercles perpendiculaires communs aux cercles (D_1) et (D_2).

La démonstration peut être répétée à partir de deux cercles quelconques de la première famille de la cyclide ; autrement dit,

Les cercles d'une famille normale d'une cyclide axiale sont perpendiculaires aux cercles de la seconde famille normale de cette cyclide.

Les notations étant celles du § **13**, soit (A_1) une sphère quelconque passant par le cercle (D_1). Cette sphère, orthogonale à la directrice (O), est caractérisée par son centre A_1 qui est un point de la droite (D_1). Par le point A_1 de la déférente (S), il passe une génératrice (Δ) du second système de cette quadrique : cette génératrice rencontre les génératrices du premier système, et en particulier la droite (D_2), en un point A_2 et la droite (D'_2). Nous avons vu (**14**) que l'angle de la sphère (A_1) et du cercle (D_2) est égal à l'angle de la sphère (A_1) et de la sphère (A_2), le point A_2 étant le point de (D_2) choisi de manière que la droite A_1A_2 rencontre la droite (D'_2) conjuguée, par rapport à la directrice (O), de la droite (D_2).

Pour calculer cet angle (**14**), nous chercherons les points de la droite (Δ) situés sur la sphère directrice (O) : ces points P et Q sont les points communs à la droite (Δ) et aux génératrices isotropes (G_1) et (G_2), communes à la déférente (S) et à la directrice (O). L'angle θ_1 cherché, angle sous lequel une sphère quelconque (A_1) coupe le cercle (D_2), est défini par une des deux égalités

$$\cos 2\theta_1 \pm i \sin 2\theta_1 = (A_1, A_2, P, Q).$$

Le birapport (A_1, A_2, P, Q) est celui des points où une génératrice variable de la quadrique (S) coupe les quatre génératrices fixes (D_1),

(D_2), (G_1), (G_2); il est donc égal au birapport constant k de ces génératrices. Il en résulte que θ_1 est constant.

Cette démonstration a été donnée plus haut (**25**). Nous la reproduisons ici pour que le lecteur la trouve à la place qui, à notre avis, est sa place normale. Notons, avant de conclure, que l'angle θ_2 sous lequel une sphère quelconque (A_2), passant par le cercle (D_2), coupe le cercle (D_1), est défini par l'une des égalités

$$\cos 2\theta_2 \pm i \sin 2\theta_2 = (A_2, A_1, P, Q).$$

Ce birapport est égal à $\frac{1}{k}$ et, par conséquent, $\theta_2 = \theta_1$. Remarquons encore que les sphères (A_1) et (A_2) se coupent suivant un cercle (Δ) qui est perpendiculaire aux cercles (D_1) et (D_2) et que, réciproquement, si deux sphères, passant par deux cercles paratactiques (D_1) et (D_2), ont en commun un cercle (Δ) perpendiculaire à ces deux cercles, ce sont des sphères (A_1) et (A_2), dont l'angle est égal à θ_1.

Nous reconnaissons des résultats classiques déjà énoncés :

L'angle sous lequel une sphère qui passe par un des deux cercles d'un anneau paratactique coupe le second cercle de cet anneau est constant. C'est l'angle de parataxie.

L'angle sous lequel se coupent les deux sphères qui passent par les cercles d'un anneau paratactique et un cercle perpendiculaire commun est égal à l'angle de parataxie.

106. Retour sur l'étude des cercles des familles normales d'une cyclide de Dupin. — Soient (D_1) et (D_2) deux cercles d'une même famille normale d'une cyclide de Dupin donnée. Soit (Δ) un cercle de l'autre famille normale. La droite (Δ) coupe la génératrice (D_1) en A_1 et (D_2) en A_2 et les génératrices isotropes (G_1) et (G_2) du premier système de la déférente (H) en P et Q. L'angle V des sphères (A_1) et (A_2) est défini par l'une des égalités

$$\cos 2V + i \sin 2V = (A_1, A_2, P, Q),$$
$$\cos 2V - i \sin 2V = (A_1, A_2, P, Q).$$

Le birapport (A_1, A_2, P, Q) est celui de quatre génératrices fixes

$$(D_1, D_2, G_1, G_2).$$

Il demeure constant quand (Δ) varie et l'angle V des sphères (A_1) et (A_2) également.

L'angle u (**16**) du cercle (D_1) et de la sphère (A_2) est égal à l'angle θ_1 de parataxie des cercles (D_1) et (D_2) (**105**), et l'angle v du cercle (D_2) et de la sphère (A_1) également. Les angles α du cercle (D_1) et du cercle (Δ), et β du cercle (D_2) et du cercle (Δ), définis (**17**) par les égalités

$$\sin u = \sin\alpha \sin V,$$
$$\sin v = \sin\beta \sin V,$$

sont égaux, et leur valeur commune φ est définie par l'égalité

$$\sin\theta_1 = \sin\varphi \sin V.$$

Les cercles (Δ) variables coupent donc les cercles fixes (D_1) et (D_2) sous le même angle φ, constant. Si nous remplaçons (D_2) par un autre cercle (D) de la première famille, les cercles (Δ) couperont (D_1) et (D) sous le même angle, qui sera encore φ. Donc, en définitive,

Les cercles d'une famille normale d'une cyclide de Dupin coupent les cercles de la deuxième famille sous un angle constant.

107. Réciproque. — La réciproque de cette dernière propriété est très intéressante et s'énonce ainsi :

Soient (D_1) et (D_2) deux cercles paratactiques; les cercles (Δ) de la congruence $[D_1, D_2]$ (19) qui coupent les deux cercles de base sous le même angle constant sont les cercles d'une famille normale d'une cyclide de Dupin.

En effet, les cercles (Δ) (**39**) appartiennent à une famille (Π), ce qui veut dire que leurs axes (Δ) (**33**) sont les génératrices de même système d'une quadrique (H) passant par les droites (D_1) et (D_2) et par les isotropes (Γ_1) et (Γ_2) sur lesquelles se trouvent les points de Poncelet ou foyers des cercles (D_1) et (D_2). En outre, ces cercles, comme tous les cercles de la congruence, sont orthogonaux à la sphère (O) orthogonale aux cercles de base (D_1) et (D_2).

Les cercles (Δ) sont par conséquent les cercles d'une famille normale bien déterminée d'une cyclide (W) dont la directrice est (O) et dont la déférente est (H). La déférente coupe la directrice, par hypothèse, d'abord suivant les deux isotropes (Γ_1) et (Γ_2), donc suivant quatre génératrices; elle a donc avec la directrice un quadrilatère isotrope commun. La cyclide (W) est par conséquent une cyclide de Dupin.

En particulier :

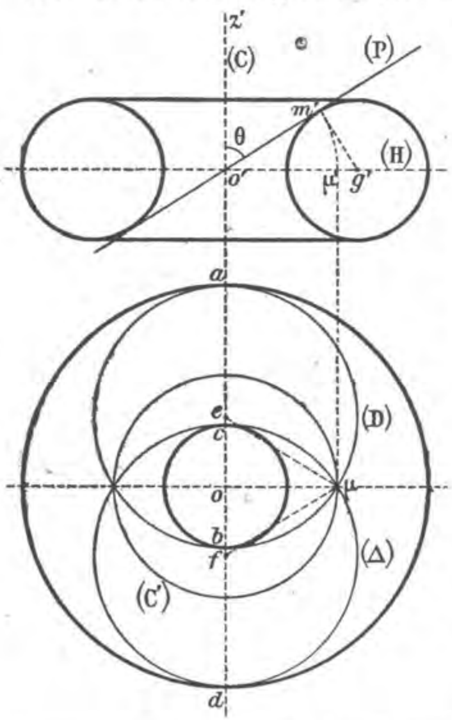
Soient (D_1) et (D_2) deux cercles paratactiques; les cercles (Δ) perpendiculaires à (D_1) et (D_2) engendrent la cyclide de Dupin axiale qui passe par ces deux cercles.

108. Figure formée par les cercles d'une famille normale et chacun des cercles directeurs. — Nous avons démontré (**93**) que les axes des cercles directeurs (C) et (C′) d'une cyclide de Dupin (W) étaient les diagonales du quadrilatère isotrope (G_1) (G_2) (Γ_1) (Γ_2), intersection de la déférente (H) et de la directrice (O). Les foyers ou points de Poncelet de ces cercles sont donc les sommets de ce quadrilatère. Soient P et Q les foyers du cercle (C), et supposons, par exemple, P sur (G_1) et sur (Γ_1) et Q sur (G_2) et sur (Γ_2).

Soit (D) un cercle d'une famille normale de cercles de la cyclide; l'axe (D) de ce cercle coupe (Γ_1) en P_1 et (Γ_2) en Q_1; les points P_1 et Q_1 sont les foyers du cercle (D); la droite P_1P est l'isotrope (Γ_1), la droite Q_1Q est l'isotrope (Γ_2). Par conséquent, les cercles (D) et (C) sont paratactiques.

Les cercles d'une famille normale d'une cyclide de Dupin forment avec chacun des cercles directeurs des anneaux paratactiques.

109. Calcul des angles de parataxie pour le tore. — Nous allons calculer les angles de ces parataxies pour le tore. Les notations sont celles de l'épure ci-jointe. Soit (D) un cercle d'une famille normale; nous choisirons les plans de projection de manière que le plan (P) de ce cercle soit de bout; ce plan (P) est bitangent au tore; un des points de contact est mm'; le centre du cercle méridien passant par ce point est gg'. Nous avons dessiné le rabattement, sur le plan horizontal (H), des cercles de section du tore par le plan bitangent : ils sont indiqués sur la figure par les lettres (D) et (Δ). Le premier (D) a pour diamètre ab et pour centre e; le second a pour diamètre cd et pour centre f; le point μ, commun à ces deux rabattements, est le rabattement du point mm'. Notons que l'on a



$$o\mu = o'm'.$$

Notons aussi que, si l'on pose $oa = R$, $ob = r$, nous aurons $oe = \dfrac{R-r}{2}$ et $g'm' = \dfrac{R-r}{2}$; donc

$$oe = g'm'.$$

Nous appellerons θ l'angle, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, que fait la verticale avec le plan P.

Le premier cercle directeur (C) est l'axe du tore; le second (C') est un cercle du plan horizontal (H), de centre o et de rayon $o\mu$ égal à $o'm'$.

Le cercle (D) *et l'axe* (C) *sont paratactiques*, ce qui veut dire que l'axe du tore est une droite focale du cercle (D), résultat connu qui équivaut au fait que le point o est le foyer de la projection sur le plan (H) du cercle (D). Pour trouver l'angle de cette parataxie, nous faisons passer par le cercle (D) une sphère (Σ); elle coupe (**104**) l'axe (D) suivant l'angle de parataxie. Choisissons pour sphère (Σ) le plan (P) : nous constatons que l'angle de la parataxie est θ.

Le cercle (D) *et le cercle directeur* (C') *sont paratactiques.* Pour en calculer l'angle, choisissons encore comme sphère passant par le cercle (D) le plan (P); l'angle du plan (P) et du cercle (C') est $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Nous constatons d'abord, fait évident pour le tore, que les angles de parataxie sont indépendants du cercle (D) ou (Δ) choisi. Notons ensuite que les égalités déjà signalées

$$o\mu = o'm', \qquad oe = g'm'$$

entraînent l'égalité des triangles rectangles $o'm'g'$ et μoe et par suite celle des angles $e\mu o$ et $g'o'm'$. Soit φ l'angle $e\mu f$; nous aurons donc

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

et par suite,

$$\varphi = \pi - 2\theta.$$

L'angle φ est celui des rayons $e\mu$ et $f\mu$ des cercles (D) et (Δ), par conséquent c'est l'un des angles de ces deux cercles. Si, pour préciser, nous appelons angle de deux cercles l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ de leurs tangentes en un des deux points communs, nous aurons : soit

$$\varphi = 2\theta,$$

soit

$$\varphi = \pi - 2\theta,$$

suivant que θ est inférieur ou supérieur à $\frac{\pi}{4}$; mais dans tous les cas l'angle sous lequel se coupent deux cercles de deux familles normales différentes du tore est double de l'un des angles d'une des parataxies définies par un quelconque de ces cercles et un cercle directeur.

En particulier, *la condition nécessaire et suffisante pour que le tore soit une cyclide axiale est que* $\varphi = \frac{\pi}{2}$, *donc que* $\theta = \frac{\pi}{4}$.

110. Angles de parataxie pour une cyclide de Dupin. — Soit (W) une cyclide de Dupin, inverse d'un tore. Les résultats précédents se conservant par inversion, il suffit de les énoncer :

Chaque cercle d'une famille normale d'une cyclide de Dupin définit avec un cercle directeur un anneau paratactique dont l'angle ne dépend pas du cercle de la famille normale choisi.

Les angles des parataxies définies par un cercle d'une famille normale avec les deux cercles directeurs sont complémentaires.

L'angle que font deux cercles, l'un d'une famille normale, l'autre de la seconde famille normale, est double de l'angle des parataxies précédentes.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une cyclide de Dupin soit axiale est que l'angle des deux parataxies précédentes soit égal à $\frac{\pi}{4}$.

Enfin, comme les sphères (Σ) d'une génération normale passent par un cercle (D) de la première famille normale et par un cercle (Δ) de la seconde,

Les sphères bitangentes à une cyclide de Dupin coupent les cercles directeurs sous deux angles constants, égaux l'un à θ, l'autre à $\frac{\pi}{2} - \theta$.

CHAPITRE XIII

SPHÈRES BITANGENTES. PLANS BITANGENTS

111. Sphères bitangentes à la cyclide. — La dernière proposition du chapitre précédent mérite un peu d'attention. Les sphères (Σ) d'une génération normale, sphères bitangentes à la cyclide (W), ont trois propriétés remarquables :

1° Elles sont orthogonales à la directrice (O);

2° Elles coupent le cercle directeur (**C**) sous un angle constant θ;

3° Elles coupent le cercle directeur (C') sous un angle constant, complémentaire du précédent.

Ces trois propriétés ne sont pas indépendantes : deux d'entre elles entraînent la troisième. Pour le démontrer, observons d'abord que les cercles (**C**) et (**C**') sont orthogonaux à la sphère (O); nous les représenterons donc, comme il a été convenu au § **13**, par leurs axes (D) et (D'); les cercles (**C**) et (C') formant un anneau orthogonal, leurs axes (D) et (D') sont deux droites conjuguées par rapport à la directrice (O).

Soit (A) une sphère orthogonale à la directrice (O). Pour calculer les angles θ et θ' sous lesquels cette sphère coupe les cercles (**C**) et (C'), nous utilisons la règle donnée au § **15**. Soit (Δ) la droite d'intersection des plans déterminés par le point A et les droites (D) et (D'); la droite (Δ) coupe (D) en B, (D') en B', et la directrice (O) en P et Q. L'angle θ de la sphère (A) et du cercle (**C**) est défini par une des égalités

$$\cos 2\theta \pm i \sin 2\theta = (A,B,P,Q),$$

et l'angle θ' de la sphère A' et du cercle (C'), par une des égalités

$$\cos 2\theta' \pm i \sin 2\theta' = (A,B',P,Q).$$

Les points B et B' sont situés sur deux droites conjuguées par rapport à la sphère directrice; ils sont donc conjugués harmoniques par rapport aux points P et Q, et les deux birapports (A,B,P,Q) et (A,B',P,Q) sont opposés. Ceci entraîne une des égalités suivantes :

$$2\theta = 2\theta' + (2k+1)\pi, \qquad -2\theta = 2\theta' + (2k+1)\pi;$$

et, comme il s'agit d'angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, la seule égalité possible est

$$\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte que

Les sphères qui sont orthogonales à la sphère directrice (O) d'un anneau orthogonal coupent les cercles de cet anneau sous des angles complémentaires.

En particulier, **les plans qui passent par O, centre de la sphère directrice d'un anneau orthogonal, coupent les cercles de cet anneau sous des angles complémentaires.**

Les réciproques de ces propositions sont les conséquences de la réciproque plus générale qui sera démontrée au paragraphe suivant.

112. Réciproque. — Les méthodes géométriques suffisent à la découverte des propositions directes et se prêtent assez mal à la démonstration des réciproques.

Nous allons donc démontrer par le calcul la proposition suivante :

Les sphères qui coupent les deux cercles réels d'un anneau orthogonal sous des angles constants et complémentaires sont les sphères de la génération normale d'une cyclide de Dupin.

Nous effectuerons une inversion préalable (I) qui transforme l'un des cercles de l'anneau en droite et nous choisirons des axes de coordonnées rectangulaires de manière que les deux cercles de l'anneau soient :

1° l'axe Oz;

2° le cercle d'équation

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Soit une sphère (Σ), dont l'équation est

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \rho^2 = 0.$$

Cette sphère, par hypothèse, coupe l'axe Oz sous l'angle θ; il faut et il suffit pour cela que la distance MH du centre M de la sphère à Oz soit égale à $\rho \cos \theta$; on aura donc

$$(1) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \rho^2 \cos^2\theta.$$

L'équation de la sphère (Σ) peut donc s'écrire

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \gamma^2 - \rho^2 \sin^2\theta = 0.$$

Nous avons exposé au § **15** le procédé qui permet de calculer l'angle d'une sphère et d'un cercle : on fait passer par le cercle une sphère (B), orthogonale à la sphère donnée (A), puis, par ce même cercle, une sphère (C), orthogonale à (B); l'angle de (A) et de (C) est égal à l'angle de (A) et du cercle.

Dans le cas présent, la sphère (A) est la sphère (Σ) donnée; la sphère (B) aura pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z - R^2 = 0$$

et sera orthogonale à la sphère (Σ). Le paramètre λ sera donc déterminé par l'équation

$$(2) \qquad 2\gamma\lambda = \gamma^2 - \rho^2 \sin^2\theta - R^2.$$

La sphère (C) aura pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\mu z - R^2 = 0$$

et sera orthogonale à la sphère (B) si

$$(3) \qquad \lambda\mu = -R^2.$$

L'angle de la sphère (Σ) et de la sphère (C) se calcule aisément. Pour qu'il soit égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$, il faut que l'on ait

$$\alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - \mu)^2 = \rho^2 + \mu^2 + R^2 - 2\varepsilon\rho\sqrt{\mu^2 + R^2}\sin\theta,$$

ε étant égal soit à $+1$, soit à -1. Cette double égalité équivaut à la suivante :

$$(4) \qquad 4\rho^2(\mu^2 + R^2)\sin^2\theta = (\rho^2\sin^2\theta + R^2 - \gamma^2 + 2\gamma\mu)^2.$$

L'élimination de ρ, λ, μ entre les équations (1), (2), (3), (4) donnera la condition à laquelle doivent satisfaire α, β, γ, et par conséquent le lieu du centre de la sphère (Σ). On procède rapidement à cette élimination en écrivant l'équation (4) sous la forme

$$\rho^2(\mu^2 + R^2)\sin^2\theta = \gamma^2(\mu - \lambda)^2;$$

et, comme $\lambda = -\frac{R^2}{\mu}$,

$$\rho^2(\mu^2 + R^2)\sin^2\theta = \frac{\gamma^2}{\mu^2}(\mu^2 + R^2)^2,$$

ou, après simplification,

$$\rho^2\mu^2\sin^2\theta = \gamma^2(\mu^2 + R^2).$$

Le calcul s'achève facilement et conduit à la relation

$$(\gamma^2 - \rho^2\sin^2\theta + R^2)^2 = 0,$$

c'est-à-dire enfin à

$$(\alpha^2 + \beta^2)\operatorname{tg}^2\theta - \gamma^2 - R^2 = 0.$$

L'égalité précédente est la condition nécessaire et suffisante pour que le centre M de la sphère (Σ) décrive un hyperboloïde de révolution (H), d'équation

$$\text{(H)} \qquad (x^2 + y^2)\,\mathrm{tg}^2\,\theta - z^2 - \mathrm{R}^2 = 0.$$

La puissance de l'origine (O) par rapport à la sphère (Σ) est égale à $\gamma^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\mathrm{tg}^2\,\theta$, c'est-à-dire à $-\mathrm{R}^2$. *Les sphères* (Σ) *sont orthogonales, par conséquent, à la sphère* (O), *d'équation*

$$\text{(O)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 + \mathrm{R}^2 = 0.$$

La quadrique (H) et la sphère (O) ont en commun le quadrilatère isotrope défini par

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad z^2 + \mathrm{R}^2 = 0.$$

Il en résulte que la sphère (Σ), dont le centre décrit un hyperboloïde de révolution (H) et qui demeure orthogonale à une sphère (O) de centre O réel, est la sphère d'une génération normale d'une cyclide (W). La déférente (H) et la directrice (O) se coupent suivant un quadrilatère isotrope; cette cyclide est donc une (W_2) et, comme elle est de révolution, c'est un tore réel.

Nous résumerons en disant : *Les sphères* (Σ) *qui coupent sous des angles constants et complémentaires un cercle* (C) *et son axe sont les sphères de la génération normale d'un tore réel.* La transformée par inversion de cette propriété est la proposition réciproque que nous nous proposions de démontrer :

Les sphères (Σ) qui coupent sous des angles constants et complémentaires les cercles d'un anneau orthogonal sont les sphères de la génération normale d'une cyclide de Dupin dont les cercles de l'anneau sont les cercles directeurs.

Toute cyclide de Dupin est l'enveloppe de sphères (Σ) définies comme il vient d'être dit.

113. Généralisation. — Le calcul précédent peut être repris dans l'hypothèse où les sphères (Σ) coupent l'axe Oz sous un angle donné θ et le cercle (C) sous un angle également donné $\frac{\pi}{2} - \theta'$. Il conduit alors aux deux conditions suivantes :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2 \cos^2\theta,$$
$$(\gamma^2 - \rho^2 \sin^2\theta + \mathrm{R}^2)^2 = 4\mathrm{R}^2\rho^2(\sin^2\theta' - \sin^2\theta).$$

Il ne peut être terminé que si θ' est supérieur ou égal à θ, c'est-à-dire si

$$\frac{\pi}{2} - \theta' + \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Les sphères (Σ) n'existent donc que si la somme des angles $\frac{\pi}{2} - \theta'$ et θ est inférieure à $\frac{\pi}{2}$. Autrement dit :

La somme des angles suivant lesquels une sphère quelconque coupe les deux cercles d'un anneau orthogonal est inférieure ou égale à un angle droit.

Résultat à rapprocher du suivant, dont la démonstration est classique :

La somme des angles sous lesquels un plan quelconque coupe deux droites orthogonales est inférieure ou égale à un angle droit.

Nous supposerons donc

$$\theta' > \theta$$

et nous poserons $\sin^2\theta' - \sin^2\theta = k^2\cos^2\theta$. Les coordonnées α, β, γ du centre de la sphère (Σ) sont alors liées par la relation

$$[(\alpha^2 + \beta^2)\,\mathrm{tg}^2\,\theta - \gamma^2 - \mathrm{R}^2]^2 = 4\mathrm{R}^2k^2(\alpha^2 + \beta^2).$$

Elle exprime que le centre M de la sphère (Σ) est sur la surface de révolution d'équation

$$[(x^2 + y^2)\,\mathrm{tg}^2\theta - z^2 - \mathrm{R}^2]^2 = 4\mathrm{R}^2k^2(x^2 + y^2),$$

dont la méridienne est une hyperbole.

La puissance de l'origine O par rapport à la sphère (Σ) est $\gamma^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\mathrm{tg}^2\theta$, c'est-à-dire

$$-\mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}k\,\rho\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad -\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}k\,\rho\cos\theta.$$

Il serait possible d'exprimer α, β, γ, ρ en fonction rationnelle de deux paramètres et d'étudier l'enveloppe de ces sphères.

114. Enveloppe des plans des cercles d'une famille normale. — Proposons-nous d'étudier maintenant les plans des cercles d'une famille normale d'une cyclide de Dupin.

Soit (P) le plan d'un cercle (D) d'une famille normale : il passe par le centre (O) de la sphère directrice et il est perpendiculaire à une génératrice (D) de la déférente (H). Les plans (P) sont par conséquent tangents à un cône (T), de sommet (O), du second degré.

Chaque plan (P) est perpendiculaire à la génératrice (Δ) de la déférente parallèle à (D); donc chaque plan (P) est aussi le plan d'un cercle (Δ) de la seconde famille normale. Les cercles (D) et (Δ) sont réels et sécants. Les deux points M et M' où ils se coupent sont des points simples de la cyclide, puisque les points multiples sont imaginaires : ce sont donc des points de contact du plan (P) avec la cyclide. Donc :

Les plans (P) des cercles d'une famille normale d'une cyclide de Dupin sont des plans bitangents à la cyclide.

Cette proposition montre d'abord qu'il existe des plans bitangents. Elle admet une réciproque :

Tout plan bitangent à une cyclide de Dupin coupe cette surface suivant deux cercles réels.

L'intersection d'un plan (P) bitangent à une cyclide en deux points M et M′ coupe cette cyclide suivant une courbe algébrique de degré 4, ayant quatre points doubles, savoir M, M′ et les deux points cycliques du plan (P), donc suivant deux cercles. Il n'y a sur la cyclide que quatre familles de cercles; on constate que les plans des cercles des familles exceptionnelles ne sont pas bitangents à la cyclide; le plan (P) ne peut donc être que le plan du cercle d'une famille normale.

Les plans bitangents à une cyclide de Dupin (W) sont des sphères particulières de la génération normale; donc (**110**) les plans bitangents à cette cyclide coupent les cercles directeurs sous deux angles constants, θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Ce résultat est remarquable, mais non pas sous cette forme, où il apparaît comme un cas particulier de la propriété générale (**110**) des sphères bitangentes.

En fait, les plans (P) sont des plans tangents à un cône (T); le sommet de ce cône est le centre O de la sphère directrice; si la cyclide est un tore, il est de révolution, sinon son équation, dans un système d'axes OXYZ déduit par translation des axes utilisés au § **100**, est (notations du § **100**)

$$(\mu^2 - 1)X^2 + (\lambda^2 - 1)Y^2 - Z^2 = 0.$$

Le cône (T) est donc un cône quelconque du second degré. L'équation d'un pareil cône peut en effet toujours s'écrire

$$a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 = 0,$$

b^2 étant inférieur à c^2; il sera de la forme précédente si l'on choisit λ et μ de manière que

$$\mu^2 - 1 = \frac{a^2}{c^2}, \qquad 1 - \lambda^2 = \frac{b^2}{c^2}.$$

Tout plan tangent au cône (T) est un plan (P), bitangent à la cyclide : il coupe donc les cercles directeurs (C) et (C′) suivant des angles constants. Le cercle (C), dans le système d'axes XOY, a pour équations

$$X = 0, \qquad Y^2 + Z^2 + 2h\frac{\lambda}{\mu}(\mu^2 - 1)Z + h^2(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1) = 0,$$

et le cercle (C′)

$$Y = 0, \qquad X^2 + Z^2 + 2h\frac{\mu}{\lambda}(\lambda^2 - 1)Z + h^2(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1) = 0.$$

Avant d'énoncer la propriété des plans (P), observons qu'ils coupent sous des angles constants θ non seulement le cercle (C), mais tous les cercles homothétiques dans des homothéties de pôle O; en outre (**110**), le fait qu'ils coupent (C) sous un angle θ et qu'ils passent par O entraîne qu'ils coupent (C′) sous un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Nous nous bornerons donc à énoncer la propriété sous la forme suivante :

Les plans tangents au cône réel (T),

$$(\mu^2 - 1)X^2 + (\lambda^2 - 1)Y^2 - Z^2 = 0 \qquad (\lambda^2 < 1 < \mu^2),$$

coupent sous un angle constant θ *les cercles d'équation*

$$X = 0, \qquad Y^2 + Z^2 + 2h\frac{\lambda}{\mu}(\mu^2 - 1)Z + h^2(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1) = 0,$$

h jouant le rôle d'un paramètre.

Cette proposition générale entraîne la proposition plus particulière déjà énoncée : les plans bitangents à une cyclide de Dupin (W) coupent sous un angle constant θ le cercle directeur (C) et sous un angle complémentaire $\frac{\pi}{2} - \theta$ le cercle directeur (C′). (Voy. la réciproque au nº **138**.)

115. Calcul de l'angle de la parataxie : cercle d'une famille normale et cercle directeur. — Il est aisé de calculer cet angle θ. Il suffit de choisir un plan tangent particulier, par exemple

$$Y\sqrt{1 - \lambda^2} + iZ = 0,$$

et de chercher sous quel angle il coupe le cercle (C). Un calcul simple donne

$$\cos^2\theta = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - \lambda^2}.$$

Ce résultat est intéressant; il s'énonce ainsi (notations du § **100**) :

L'angle θ *de la parataxie définie par un cercle d'une famille normale d'une cyclide de Dupin* (W) *et le cercle directeur* (C) *du plan* $x = 0$ *est défini par l'équation*

$$\cos^2\theta = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - \lambda^2}.$$

Nous avons vu (**110**) que l'un des angles φ que font entre eux les cercles des familles normales est égal à 2θ; son cosinus est donc donné par l'équation

$$\cos\varphi = \frac{\mu^2 + \lambda^2 - 2}{\mu^2 - \lambda^2}.$$

Ces nombres se calculent aisément en fonction des coefficients a, a', a'' de l'équation de la cyclide (notations du § **100**); on obtient le résultat suivant, par exemple :

L'un des angles φ que font entre eux deux cercles des deux familles normales d'une cyclide de Dupin dont l'équation est

$$(x^2+y^2+z^2)^2+ax^2+a'y^2+a''z^2+2c''z+d=0$$

est défini par l'équation

$$\cos\varphi = \frac{3(a+a')-2a''}{a-a'},$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que cette cyclide de Dupin soit axiale est

$$3(a+a')=2a''.$$

116. Remarque. — La réciproque de la proposition démontrée au § **114** serait la suivante :

Les plans passant par un point fixe O *et qui coupent un cercle donné* (C) *sous un angle constant enveloppent un cône du second degré.*

Nous ne la démontrerons pas pour le moment, bien que sa démonstration soit à peu près immédiate. Dans cette réciproque, en effet, la position du cercle donné (C) par rapport au point O n'est pas précisée, alors qu'elle l'est dans la proposition directe. Cette observation nous amène à nous demander si la proposition du n° **114** est complète. Nous avons dit : les plans tangents à un cône (T) coupent sous un angle constant deux familles de cercles homothétiques; il y aurait lieu d'examiner si ce sont les seules. Cet examen sera fait ultérieurement. Bornons-nous donc à constater pour le moment que :

Les plans (P) qui coupent sous des angles constants et complémentaires les cercles d'un anneau orthogonal enveloppent un cône du second degré (T) dont le sommet est le centre O de la sphère directrice de l'anneau.

Ces plans (P), en effet, sont des sphères (Σ) particulières (**112**) de la génération normale d'une cyclide de Dupin. Ce sont donc les plans bitangents à cette cyclide, et ils sont tangents à un cône (T) du second degré.

QUATRIÈME PARTIE

PARATAXIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

CHAPITRE XIV

ANGLES DE SPHÈRES ET DE CERCLES EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. PUISSANCE RÉDUITE

117. Angle de deux sphères, angle d'une sphère et d'un plan en géométrie élémentaire. — Considérons d'abord deux sphères : (O), de centre O, de rayon R, et (P), de centre P, de rayon ρ. En géométrie, l'angle de deux sphères (O) et (P) est défini dans le seul cas où ces deux sphères ont au moins un point commun M. En ce point M les plans tangents font entre eux différents angles; si l'un d'eux est θ, les autres ont pour valeur $\pi-\theta+2k\pi$ et $\theta+2k\pi$. L'un quelconque de ces angles est, par définition, l'angle V des deux sphères. L'angle V est donc défini par la valeur absolue de son cosinus, ou encore par la valeur de $\cos^2 V$.

L'angle OMP des rayons MO et MP, perpendiculaires aux plans tangents en M, est l'un quelconque des angles V. Il est défini, dans le triangle OMP, par l'égalité

$$\cos \mathrm{OMP} = \frac{R^2+\rho^2-\overline{OP}^2}{2R\rho},$$

et, en définitive, l'angle V des sphères (O) et (P) est l'un quelconque des angles définis par l'égalité

$$\cos^2 V = \left[\frac{R^2+\rho^2-\overline{OP}^2}{2R\rho}\right]^2.$$

Le mot sphère, dans les théories géométriques où intervient l'inversion, désigne en général soit une sphère, soit un plan. L'angle d'une sphère (P) et d'un plan (Q) doit donc être défini par un procédé analogue au précédent. Nous supposerons donc la sphère (P) et le plan (Q) sécants.

Soient M un point commun, H la projection orthogonale du centre P sur le plan (Q); l'angle V de la sphère et du plan est l'un quelconque des angles définis par l'égalité

$$\cos^2 V = \left[\frac{PH}{\rho}\right]^2.$$

L'angle V est invariant dans une inversion réelle (I) quelconque. Cela signifie que, si l'inversion (I) transforme la sphère (O) en une sphère (O') de rayon R' et la sphère (P) en une sphère (P') de rayon ρ', l'un des angles de la sphère (O') et de la sphère (P') sera égal à l'angle V. Cette propriété, qui se démontre géométriquement, se traduit par l'égalité

$$(1) \qquad \left[\frac{R^2+\rho^2-\overline{OP}^2}{2R\rho}\right]^2 = \left[\frac{R'^2+\rho'^2-\overline{O'P'}^2}{2R'\rho'}\right]^2.$$

Lorsque l'inversion (I) transforme la sphère (O) en un plan (Q) et la sphère (P) en une sphère (P'), l'un des angles de la sphère (P') et du plan (Q) est égal à l'angle V, propriété qui se traduit par l'égalité

$$(2) \qquad \left[\frac{R^2+\rho^2-\overline{OP}^2}{2R\rho}\right]^2 = \left[\frac{P'H'}{\rho'}\right]^2.$$

118. Angle de deux sphères ou d'une sphère et d'un plan en géométrie analytique. — Soit (I) une inversion réelle. Dans un système d'axes de coordonnées rectangulaires dont l'origine est le pôle I d'inversion, définissons par leurs équations cartésiennes deux sphères (O) et (P), la seconde (P) ne passant pas par le point I. Soient (O') et (P') les figures inverses de ces sphères dans l'inversion (I); nous supposerons d'abord que ce sont deux sphères. Les deux membres de l'égalité (1) sont des fractions rationnelles par rapport aux coefficients des équations des deux sphères; ils sont égaux pour toutes les valeurs de ces coefficients auxquelles correspondent des sphères (O) et (P) réelles et sécantes; ils sont donc égaux quels que soient ces coefficients. Si la figure inverse de la sphère (O) est un plan (Q), les deux membres de l'égalité (2) sont des fractions rationnelles par rapport aux coefficients des sphères (O) et (P), égales lorsque ces sphères sont réelles et sécantes, donc égales quels que soient ces coefficients.

Nous traduirons ces propriétés en disant que la quantité

$$\left[\frac{R^2+\rho^2-\overline{OP}^2}{2R\rho}\right]^2$$

est invariante dans l'inversion (I). Cette quantité est un invariant métrique; ceci veut dire que sa valeur est indépendante du choix des axes de coordonnées rectangulaires choisies. Nous effectuerons d'abord

un changement d'axes de coordonnées rectangulaires, de manière à prendre pour pôle d'inversion I un point quelconque, et nous constaterons ainsi que la quantité $\left(\frac{R^2+\rho^2-\overline{OP}^2}{2R\rho}\right)^2$ est invariante dans une inversion réelle quelconque.

Nous appellerons angle de deux sphères (O) *et* (P) *l'un quelconque des angles définis par l'équation*

$$\cos^2 V = \left[\frac{R^2+\rho^2-\overline{OP}^2}{2R\rho}\right]^2.$$

Si les sphères (O) et (P) sont réelles et sécantes, l'angle V ainsi défini est un des angles que font, en un point commun, les plans tangents. Si les sphères (O) et (P) ne sont pas en même temps réelles et sécantes, l'angle V est un nombre sans aucune signification géométrique.

Nous appellerons de même angle d'une sphère (P) *et d'un plan* (Q) *l'un quelconque des angles* V *définis par l'égalité*

$$\cos^2 V = \left[\frac{PH}{\rho}\right]^2.$$

Si la sphère (P) et le plan (Q) sont réels et sécants, l'angle V est un des angles des plans tangents en un point commun; s'il n'en est pas ainsi, V est un nombre sans aucune signification géométrique.

Nous avons vu plus haut que *la quantité* $\cos^2 V$ *est un invariant métrique*, d'une part, *et anallagmatique*, de l'autre : métrique parce que la valeur de ce nombre est indépendante du choix des axes, anallagmatique parce que sa valeur est la même pour deux figures et pour les deux figures inverses dans une inversion (I) réelle quelconque. Nous dirons, pour nous conformer à un usage commode, que cos V et même V sont des invariants métriques et anallagmatiques, ou encore qu'ils sont conservés par un déplacement ou une inversion, bien que cette façon abrégée d'exprimer un fait exact en soi soit incorrecte. Il faut entendre par là qu'une des valeurs de cos V ou de V relative à deux figures (sphères ou plans) (O) et (P) est égale à l'une des valeurs de ces nombres relatives aux figures inverses.

Pour éviter autant que possible toute imprécision, lorsqu'il s'agira de deux sphères ou plans réels et sécants, nous conviendrons que l'angle V de ces deux figures est celui qui est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, un de ceux que définit, par conséquent, soit l'égalité

$$\cos V = \frac{|R^2+\rho^2-\overline{OP}^2|}{2R\rho},$$

soit l'égalité

$$\cos V = \frac{PH}{\rho}.$$

119. Puissance réduite d'un point par rapport à une sphère ou à un plan. — Soient P un point donné et (O) une sphère ou un plan donné. Choisissons arbitrairement un nombre positif ρ, et soit (P) la sphère de centre P et de rayon ρ; nous désignerons par cos V l'une des deux déterminations du cosinus de l'angle des sphères (O) et (P).

Nous constaterons d'abord ceci : le produit $\rho \cos V$ tend vers une limite lorsque, la figure (O) et le point P demeurant fixes, le nombre ρ tend vers zéro. Si la figure (O) est une sphère, l'une des déterminations de cos V est, par exemple,

$$\cos V = \frac{\overline{OP}^2 - R^2 - \rho^2}{2R\rho},$$

et la limite de $\rho \cos V$, lorsque ρ tend vers zéro, a pour expression $\frac{\overline{OP}^2 - R^2}{2R}$. Si la figure (O) est un plan, l'une des déterminations de cos V est

$$\cos V = \frac{PH}{\rho}$$

et $\rho \cos V$ est égal, quel que soit ρ, à la distance PH du point P au plan.

Nous appellerons **puissance réduite d'un point P par rapport à une sphère ou à un plan** la limite du produit $\rho \cos V$ lorsque ρ tend vers zéro.

Nous venons de montrer que cette limite existe; *elle n'est définie, comme* cos V, *qu'au signe près.* Nous conviendrons, lorsqu'il s'agira d'éléments réels, que *la puissance réduite est un nombre positif.*

Nous constatons que :

La puissance réduite d'un point P *par rapport à une sphère* (O) *est le quotient de la puissance du point* P *par rapport à la sphère* (O) *par le diamètre de celle-ci ou l'opposé de ce nombre.*

Lorsque le point P *et la sphère* (O) *sont réels, la puissance réduite est, par définition, le quotient de la valeur absolue de la puissance du point* P *par rapport à la sphère* (O) *par le diamètre de celle-ci.*

La puissance réduite d'un point P *par rapport à un plan* (Q) *est la distance de ce point au plan ou le nombre opposé.*

Lorsque le point P *et le plan* (Q) *sont réels, la puissance réduite est, par définition, le nombre positif qui mesure la distance du point* P *au plan* (Q).

120. Notation de la puissance d'un point P par rapport à une sphère (O). — Nous conviendrons de représenter par le symbole

$$O(P)$$

la puissance d'un point P par rapport à une sphère (O). Nos lecteurs se rappelleront le sens de cette notation en se souvenant qu'en géométrie analytique, si l'équation d'une sphère (O) est $f(x, y, z) = 0$,

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d,$$

la puissance d'un point P (x_0, y_0, z_0) par rapport à cette sphère est le nombre que représente le symbole $f(x_0, y_0, z_0)$.

La puissance réduite du point P par rapport à la sphère (O) est, avec cette notation, $\frac{O(P)}{2R}$ ou le nombre opposé.

121. Angle d'un cercle et d'une sphère. — Nous bornerons notre étude au cas où le cercle (C) est un cercle dont le plan et le centre sont réels. Les axes $Oxyz$ seront choisis de manière que les équations de ce cercle soient

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

R étant, pour le moment, un nombre réel et positif, ultérieurement un nombre réel positif ou complexe pur.

La sphère (P), de centre P et de rayon ρ, aura pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + d = 0.$$

Les données x_0, y_0, z_0, d sont, pour le moment, choisies de manière que la sphère (P) soit réelle et coupe le cercle (C). Nous avons défini **(15)** l'angle V de la sphère (P) et du cercle (C). Soit (Σ) la sphère passant par le cercle (C) orthogonale à la sphère (P), soit (Σ') la sphère passant par le cercle (C) orthogonale à la sphère (Σ); nous avons démontré **(15)** que l'un des angles de la sphère (Σ') et de la sphère (P) était égal à l'angle V. Nous allons calculer cet angle. L'équation de (Σ) est

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{d - R^2}{z_0} z - R^2 = 0,$$

et l'équation de (Σ')

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4\frac{R^2 z_0}{d - R^2} z - R^2 = 0.$$

L'angle V des sphères (P) et (Σ') est l'un quelconque des angles définis par l'égalité

$$\cos^2 V = \frac{(d - R^2)^2 + 4R^2 z_0^2}{4R^2 \rho^2}.$$

Soient F et φ, les foyers ou points de Poncelet du cercle (C); la puissance P(F) de l'un de ces foyers F $(0, 0, iR)$ par rapport à la sphère (P) est

$$P(F) = d - R^2 - 2iRz_0.$$

L'égalité qui définit $\cos^2 V$ peut donc s'écrire sous la forme très remarquable

$$\cos^2 V = \frac{P(F).P(\varphi)}{4R^2\rho^2}.$$

Le cosinus de l'angle d'un cercle (C) et d'une sphère réels et sécants est égal au quotient de la racine carrée du produit des puissances des foyers du cercle par rapport à la sphère par le double produit des rayons.

C'est désormais en appliquant cette règle simple que nous trouverons en analytique le cosinus de l'angle d'un cercle et d'une sphère.

122. Angle d'un cercle et d'un plan. — Nous nous bornerons encore, pour le moment, au cas d'un cercle (C) réel et d'un plan réel et sécant au cercle. Soit

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation du plan (Q). Nous opérerons comme au § **121**.

L'équation de la sphère (Σ) passant par le cercle (C) et orthogonale au plan (Q) est

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{h}{w}z - R^2 = 0,$$

et l'équation de la sphère (Σ') passant par le cercle (C) et orthogonale à la sphère (Σ) est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\frac{wR^2}{h}z - R^2 = 0.$$

L'angle V du cercle (C) et du plan (P) est égal (**15**) à l'un des angles de la sphère (Σ') et de ce plan; il est donc défini par l'égalité

$$\cos^2 V = \frac{w^2R^2 + h^2}{R^2(u^2 + v^2)}.$$

Nous constatons ici que l'une des expressions de la distance FH d'un foyer F au plan (Q) est

$$FH = \frac{h + iwR}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

et que par conséquent le produit des distances des deux foyers au plan (Q) sera

$$FH.\varphi K = \frac{h^2 + w^2R^2}{u^2 + v^2}$$

(à condition que l'on choisisse pour φK le nombre imaginaire conjugué de FH et non son opposé).

L'égalité qui définit $\cos^2 V$ peut donc s'écrire

$$\cos^2 V = \frac{FH.\varphi K}{R^2}.$$

Le cosinus de l'angle d'un cercle (C) et d'une sphère sécants est égal au quotient de la racine carrée du produit des distances des foyers du cercle au plan par le rayon de ce cercle.

123. Conclusion. — Les résultats établis aux § **121** et **122** se résument en une seule proposition :

Le cosinus de l'angle d'un cercle (C) et d'une sphère réels et sécants est égal au quotient de la racine carrée des puissances réduites des foyers du cercle par rapport à la sphère par le rayon de ce cercle.

124. Angle d'un cercle ou d'une droite avec une sphère ou un plan en analytique. — Rappelons d'abord la formule qui donne le cosinus de l'angle d'une sphère (P), de centre P, de rayon ρ et d'une droite (D). Soit H la projection orthogonale du point P sur la droite (D); nous avons, lorsque la droite et la sphère sont réelles et sécantes,

$$\cos^2 V = \left(\frac{PH}{\rho}\right)^2.$$

Considérons deux figures (C) et (P); la première (C) sera baptisée cercle, mais sera, en fait, soit un cercle dont le plan, le centre, et le carré du rayon sont réels, soit une droite réelle; la seconde sera baptisée sphère, mais sera une sphère quelconque ou un plan réel. Soit (I) une inversion réelle et soient (C′) et (P′) les figures inverses des figures (C) et (P).

Plaçons-nous d'abord dans le cas où le cercle (C) et la sphère (P) sont réels et sécants; les figures inverses (C′) et (P′) sont réelles et sécantes. On démontre en géométrie que l'angle V des deux figures (C) et (P) est égal à l'un des angles des figures inverses et l'on traduit ce résultat en disant que $\cos^2 V$ est un invariant métrique et anallagmatique attaché à la figure formée par le cercle (C) et la sphère (P). Le sens de cette expression est clair : supposons, pour fixer les idées, que (C) soit un cercle de rayon R, de foyers F et φ, (P) une sphère de rayon ρ, (C′) un cercle de rayon R′, de foyers P′ et φ', (P′) une sphère de rayon ρ'; dire que $\cos^2 V$ est un invariant anallagmatique signifie que l'égalité

$$\frac{P(F).P(\varphi)}{4R^2\rho^2} = \frac{P'(F').P'(\varphi')}{4R'^2\rho'^2} \tag{3}$$

est satisfaite.

Lorsque l'inversion (I) transforme le cercle (C) en une droite ou la sphère (P) en un plan, le second membre de cette égalité est remplacé par une expression différente. Les raisonnements qui vont suivre s'appliquent au cas que nous envisageons et peuvent être étendus à tous les autres.

Les quantités $\frac{P(F).P(\varphi)}{4R^2\rho^2}$ et $\frac{P'(F').P'(\varphi')}{4R'^2\rho'^2}$ sont des fractions rationnelles par rapport aux coefficients des équations de la sphère (P) et du cercle (C); l'égalité (3) est donc équivalente à une identité entre deux polynomes; cette identité est vraie pour une infinité de valeurs des variables, celles qui correspondent aux sphères (P) et aux cercles (C) réels et sécants : elle est donc vérifiée pour toutes les valeurs des coefficients.

Ceci revient à dire que la quantité $\frac{P(F).P(\varphi)}{4R^2\rho^2}$ est un invariant anallagmatique dans une inversion quelconque.

Nous appellerons *angle d'un cercle* (C) *de rayon* R, *de foyers* F *et* φ, *et d'une sphère* (P), *de rayon* ρ, l'un quelconque des angles définis par l'équation

$$\cos^2 V = \frac{P(F).P(\varphi)}{4R^2\rho^2}.$$

Si le cercle (C) et la sphère (P) sont réels et sécants, l'angle V ainsi défini est un des angles que fait la tangente au cercle avec le plan tangent à la sphère en un point commun; si le cercle (C) et la sphère (P) ne sont pas en même temps réels et sécants, l'angle V est un nombre sans aucune signification géométrique.

Nous appellerons de même *angle d'un cercle* (C) *et d'un plan* (Q) l'un quelconque des angles définis par l'égalité

$$\cos^2 V = \frac{FH.\varphi K}{R^2}.$$

(H et K sont les projections orthogonales des foyers du cercle sur le plan et, lorsque F et φ sont imaginaires, FH et φK sont des nombres complexes conjugués.)

Nous appellerons *angle d'une droite et d'une sphère* (P) l'un quelconque des angles définis par l'égalité

$$\cos^2 V = \left(\frac{PH}{\rho}\right)^2.$$

(H est la projection orthogonale du centre P de la sphère sur la droite.)

Les angles sont ceux de la géométrie élémentaire pour des figures réelles et sécantes : ce sont des nombres sans aucune signification géométrique dans les autres cas.

La quantité $\cos^2 V$ *définie ci-dessus est un invariant métrique et anallagmatique* attaché au cercle (C) et à la sphère (P) (le cercle peut être une droite et la sphère un plan). Cela veut dire d'abord qu'elle est indépendante du choix des axes, ensuite que les valeurs de $\cos^2 V$ attachées l'une à la figure formée par (C) et (P), l'autre à la figure formée par (C') et (P'), figures inverses de (C) et de (P), sont égales.

Lorsqu'il s'agira de figures réelles et sécantes, nous conviendrons que l'angle V de ces deux figures est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Nous pourrons, dans ce cas, et sans ambiguïté, dire que cet angle est invariant dans toute inversion réelle (I).

125. Puissance réduite d'un point P par rapport à un cercle (C). — Le cercle (C) est, par hypothèse, un cercle dont le plan, le centre, le carré du rayon sont des nombres réels; ses foyers sont F et φ. Soit (P) une sphère de centre P et de rayon ρ, nombre positif arbitrairement choisi : l'angle V du cercle (C) et de la sphère (P) est défini par l'égalité

$$\cos^2 V = \frac{P(F).P(\varphi)}{4R^2\rho^2}.$$

Observons d'abord que la quantité $\rho \cos V$ a une limite lorsque ρ tend vers zéro. Cette quantité ne se distingue pas de son opposée : nous nous bornerons donc à vérifier que son carré $\rho^2 \cos^2 V$ a une limite. Le point F demeurant fixe, la puissance P(F) de ce point par rapport à la sphère (P) tend, lorsque ρ tend vers zéro, vers $\overline{PF}^2$, et par conséquent $\rho^2 \cos^2 V$ tend vers $\frac{\overline{PF}^2.\overline{P\varphi}^2}{4R^2}$.

Nous pourrons, moyennant quelques précautions pour le choix des signes, dire que $\rho \cos V$ a une limite et que cette limite est $\frac{PF.P\varphi}{2R}$.

Nous appellerons **puissance réduite du point P par rapport à un cercle (C)** la limite vers laquelle tend le rapport $\rho \cos V$ lorsque ρ tend vers zéro.

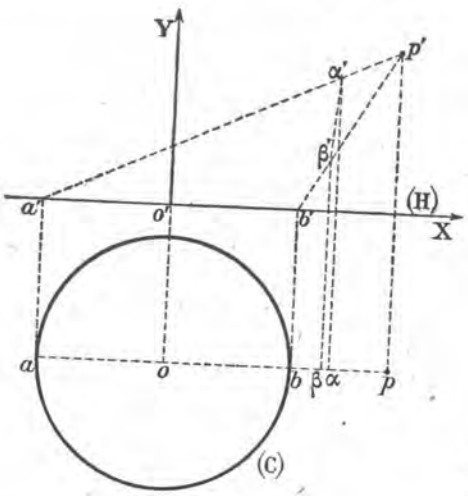
La puissance réduite d'un point P par rapport à un cercle (C) de foyers F et φ, de rayon R, est le nombre $\frac{PF.P\varphi}{2R}$ ou son opposé. Lorsque le point P et le cercle (C) sont réels, la puissance réduite est, par définition, positive.

Nous allons préciser la valeur de la puissance réduite en géométrie, c'est-à-dire pour un cercle réel et un point P réel. Sur l'épure ci-jointe, le cercle (C) est dans le plan horizontal (H); le plan frontal de projection est parallèle à la droite PO. AB est le diamètre frontal du cercle (C).

Nous utiliserons deux axes de coordonnées rectangulaires, OX et OY pour effectuer le calcul $\overline{PF}^2 . \overline{P\varphi}^2$. Soient x et y les coordonnées du point P; nous avons

$$\overline{PF}^2 . \overline{P\varphi}^2 = (x^2 + y^2 - R^2)^2 + 4R^2y^2.$$

Le second membre de cette égalité peut s'écrire



$$(x^2 + y^2 - R^2)^2 + 4R^2y^2 \equiv (x^2 + y^2 + R^2)^2 - 4R^2x^2,$$

c'est-à-dire encore

$$(x^2 + y^2 - R^2)^2 + 4R^2y^2 \equiv [(x - R)^2 + y^2] [(x + R)^2 + y^2].$$

Le produit $PF . P\varphi$ est par conséquent égal au produit PA.PB, et la puissance réduite du point P par rapport au cercle (C) est $\dfrac{PA.PB}{2R}$.

La puissance réduite d'un point P réel par rapport à un cercle (C) réel est le nombre positif $\dfrac{PA.PB}{2R}$. Les points A et B sont les extrémités du diamètre du cercle (C) situées dans le plan passant par l'axe de ce cercle et le point P, et R est le rayon du cercle.

126. Rayon du cercle inverse d'un cercle réel donné, ou de la sphère inverse d'une sphère réelle donnée dans une inversion réelle. — Soit (I) une inversion réelle de pôle I et de puissance k. Nous utiliserons encore l'épure précédente, en supposant que le pôle I de l'inversion est confondu avec le point P. Soient α et β les points inverses des points A et B. Le cercle (C'), inverse dans l'inversion (I) du cercle (C), a pour diamètre $\alpha\beta$. Or la longueur du segment $\alpha\beta$, qui joint les points inverses des extrémités du segment AB, est donnée par l'égalité

$$\alpha\beta = \frac{|k|.AB}{PA.PB},$$

qui traduit la règle simple que voici :

Le diamètre du cercle (C'), inverse d'un cercle (C), est égal au quotient de la valeur absolue de la puissance d'inversion et de la puissance réduite du pôle par rapport au cercle (C).

Ce résultat très simple s'étend presque évidemment à la sphère. Soient (O) une sphère de rayon R et (O') la sphère inverse de rayon R'; soient M et M' un couple de points inverses et μ l'antihomologue de M'. Nous avons

$$\frac{R'}{R} = \frac{IM'}{I\mu} = \frac{IM'IM}{I\mu . IM},$$

ce qui entraîne

$$2R' = \frac{|k|.2R}{I\mu . IM}.$$

Le diamètre d'une sphère (O') inverse d'une sphère donnée (O) est égal au quotient de la valeur absolue de la puissance d'inversion par la puissance réduite du pôle d'inversion par rapport à la sphère.

Notons une conséquence immédiate de ces deux propositions :

Le lieu géométrique des pôles des inversions qui transforment en deux cercles (ou deux sphères) égaux des cercles (ou des sphères) donnés est aussi le lieu géométrique des points ayant même puissance réduite par rapport à ces cercles (ou à ces sphères).

127. Puissance réduite d'un point P par rapport à une droite. — La droite (D) est supposée réelle. Soit H la projection orthogonale du point P sur la droite; soit V l'angle de la sphère (P), de centre P et de rayon ρ, et de la droite (D).

La quantité $\rho \cos V$ tend, lorsque, la droite et le point demeurant fixes, ρ tend vers zéro, vers une limite égale à PH ou au nombre opposé (**124**). Nous appellerons cette limite la puissance réduite du point P par rapport à la droite.

La puissance réduite d'un point P par rapport à une droite (D) est un nombre égal soit à la distance du point P à la droite, soit au nombre opposé.

Dans le cas où les éléments point et droite sont réels, la puissance réduite est, par définition, le nombre positif égal à la distance du point P à la droite.

128. Étude du rapport des puissances réduites d'un point P par rapport à deux figures, qui peuvent être des sphères, des plans, des cercles ou des droites. — Soient (O) une sphère, un plan, un cercle ou une droite, (O_1) une sphère, un plan, un cercle ou une droite. Soient P un point, V l'un des angles de la sphère (P), de centre P et de rayon ρ, avec la figure (O), V_1 l'un des angles de la sphère (P) et de la figure (O_1).

Soient (I) une inversion réelle, (O') et (O'_1) les figures inverses des figures (O) et (O_1); soit enfin (P_0) la sphère inverse de la sphère (P), de centre P_0 et de rayon ρ'. Nous réserverons la notation P' pour le point inverse du point P.

Notons d'abord que ρ est destiné, dans cette étude, à tendre vers zéro. Nous pourrons donc choisir ce nombre positif de manière que l'on ait

$$\rho < |\mathrm{IP}|$$

et supposer, par conséquent, que la sphère (P) ne passe pas par le pôle I de l'inversion. Son inverse (P_0) est donc bien une sphère.

Notons ensuite que, lorsque tous les autres éléments des figures (O), (O_1) et (P) demeurant fixes, ρ tend vers zéro, ρ' tend aussi vers zéro; en outre, le centre P_0 de la sphère inverse de (P) tend vers une position limite P'.

On vérifiera sans aucune peine que, dans ces conditions, les quantités $\rho' \cos V$ et $\rho' \cos V_1$ ont des limites, qui sont les puissances réduites du point P' par rapport aux figures (O') et (O'_1).

Ceci posé, observons que l'on a

$$\frac{\rho \cos V}{\rho \cos V_1} = \frac{\rho' \cos V}{\rho' \cos V_1}.$$

Lorsque ρ tend vers zéro, ρ' tend vers zéro et les quatre produits $\rho \cos V$, $\rho \cos V_1$, $\rho' \cos V$, $\rho' \cos V_1$ ont des limites; nous nous plaçons dans l'hypothèse où la limite de $\rho \cos V_1$ n'est pas nulle : dans ces conditions, chacun des deux membres de l'égalité a une limite et ces limites sont égales. Nous pouvons donc énoncer l'important résultat que voici :

Le rapport des puissances réduites d'un point P par rapport à deux figures, qui peuvent être des sphères, des plans, des droites ou des cercles, est égal au rapport des puissances réduites du point inverse P' par rapport aux figures inverses dans une inversion (I) réelle quelconque.

Autrement dit, **le rapport des puissances réduites est un invariant anallagmatique.**

Ces énoncés ont un sens précis lorsqu'il s'agit d'un point P réel et de figures réelles; lorsqu'il n'en est pas ainsi, le rapport des puissances réduites de P est seulement égal ou opposé à celui des puissances réduites de P'.

CHAPITRE XV

INVARIANTS ATTACHÉS A DEUX CERCLES

129. Sphères bissectrices de deux sphères données (O_1) et (O_2). — Nous supposerons d'abord ces sphères réelles et sécantes. Proposons-nous de trouver le lieu (L) des points M qui ont, par rapport à ces deux sphères, même puissance réduite.

Une inversion (I) réelle, dont le pôle I est l'un des points communs à ces deux sphères, les transforme en deux plans (O'_1) et (O'_2) réels et sécants; elle transforme en M' un point M quelconque du lieu (L). Le rapport des puissances réduites du point M' par rapport aux deux plans (O'_1) et (O'_2), c'est-à-dire le rapport des distances du point M' à ces plans, est égal (**128**) au rapport des puissances réduites du point M par rapport aux sphères (O_1) et (O_2). Il est donc égal à 1, et le lieu du point M' se compose des deux plans bissecteurs des plans (O'_1) et (O'_2); ces plans, (ω'_1) et (ω'_2), sont caractérisés par les deux propriétés classiques : ils sont orthogonaux et conjugués harmoniques du couple de plans (O'_1) et (O'_2). Le lieu (L) est donc composé de deux sphères (ω_1) et (ω_2) du faisceau linéaire dont les sphères de base sont les sphères (O_1) et (O_2) données : ces sphères (qui peuvent être des plans) (ω_1) et (ω_2) sont caractérisées par la double propriété suivante : elles sont orthogonales et leurs centres ω_1 et ω_2 sont conjugués harmoniques du couple de points (O_1) et (O_2). Notons que si R_1 et R_2 sont $(R_1R_2 \neq 0)$ les rayons des sphères (O_1) et (O_2), la position sur la droite O_1O_2 des points ω_1 et ω_2 est définie par les égalités

$$\frac{\overline{\omega_1 O_1}}{\overline{\omega_1 O_2}} = \frac{R_1}{R_2}, \qquad \frac{\overline{\omega_2 O_1}}{\overline{\omega_2 O_2}} = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Il est naturel d'appeler ces sphères *sphères bissectrices* des sphères (O_1) et (O_2).

Nous abandonnerons maintenant l'hypothèse que les sphères (O_1) et (O_2) sont réelles et sécantes. Nous supposerons seulement qu'aucune n'est de rayon nul. Nous supposerons également qu'une d'entre elles ou toutes les deux peuvent être des plans. L'étude analytique du problème nous conduira à effectuer, dans ce cas général, les mêmes calculs que dans le cas particulier précédent et nous conduira à formuler les mêmes conclusions; nous les énonçons ci-dessous :

Soient (O_1) et (O_2) deux sphères ou plans réels ou imaginaires, aucun d'eux n'étant une sphère de rayon nul ou un plan isotrope; le lieu géométrique des points qui ont même puissance réduite par rapport à ces deux sphères ou plans se compose de deux sphères ou plans (ω_1) et (ω_2) appartenant au faisceau linéaire de sphères dont les bases sont (O_1) et (O_2).

Ces deux sphères sont, par définition, les *sphères bissectrices* de (O_1) et de (O_2). En définitive, nous appellerons donc sphères bissectrices des deux sphères (ou plans) (O_1) et (O_2) le lieu géométrique des points qui ont même puissance réduite par rapport à ces sphères. Les deux sphères bissectrices sont orthogonales.

Lorsque les centres O_1 et O_2 sont distincts, les sphères bissectrices sont caractérisées par les propriétés suivantes :

1° Elles appartiennent au *faisceau linéaire de sphères de bases* (O_1) *et* (O_2);

2° Elles sont *orthogonales*;

3° Leurs centres ω_1 et ω_2 sont conjugués harmoniques par rapport à O_1 et O_2.

Lorsque les sphères (O_1) et (O_2) sont réelles et sécantes, il en est de même des sphères bissectrices; lorsque (O_1) et (O_2) sont réelles mais non sécantes, une seule des sphères bissectrices est une sphère réelle.

130. Angle d'un cercle réel (Σ) et des sphères d'un faisceau linéaire à points limites réels. — Soit (Σ) un cercle réel, de rayon ρ. Nous appellerons A et B ses foyers (ou points de Poncelet) : ce sont deux points imaginaires conjugués, et nous avons

$$\overline{AB}^2 = -4\rho^2.$$

Soit (O) une sphère variable d'un faisceau linéaire de sphères dont les points de Poncelet ou points limites I et J sont réels. Ces sphères passent par un cercle (C), imaginaire, et dont le rayon R est défini par l'égalité

$$\overline{IJ}^2 = -4R^2.$$

Nous choisirons des axes de coordonnés rectangulaires de manière que l'équation de la sphère (O) soit

$$x^2 + y^2 + (z-c)^2 - \lambda[x^2 + y^2 + (z+c)^2] = 0,$$

équation qui peut s'écrire encore

$$(1-\lambda)(x^2 + y^2 + z^2 + c^2) - 2(1+\lambda)cz = 0.$$

Le nombre c est un nombre réel; le paramètre λ est supposé réel. Le carré du rayon de la sphère (O) a pour valeur $\dfrac{4\lambda c^2}{(1-\lambda)^2}$: cette sphère est donc réelle lorsque λ est positif.

Proposons-nous de calculer $\cos^2 V$, V étant l'angle de la sphère (O) et du cercle (Σ).

La puissance du point A par rapport à la sphère (O) est, à cause de la forme même sous laquelle son équation est écrite, égale à $\dfrac{\overline{AI}^2 - \lambda.\overline{AJ}^2}{1-\lambda}$. La quantité $\cos^2 V$ est définie (**124**) par l'égalité

$$\cos^2 V = \frac{(\overline{AI}^2 - \lambda.\overline{AJ}^2)(\overline{BI}^2 - \lambda.\overline{BJ}^2)}{16\lambda c^2\rho^2},$$

qui peut encore s'écrire

$$\cos^2 V = -\frac{(\overline{AI}^2 - \lambda.\overline{AJ}^2)(\overline{BI}^2 - \lambda.\overline{BJ}^2)}{\lambda.\overline{IJ}^2.\overline{AB}^2}.$$

Nous avons précisé que I et J étaient des points réels et que, le cercle (Σ) étant réel, A et B sont des points imaginaires conjugués; les nombres $\overline{AI}^2$, $\overline{BI}^2$ d'une part, $\overline{AJ}^2$, $\overline{BJ}^2$ d'autre part, sont donc des nombres complexes conjugués. $\overline{IJ}^2$ et $\overline{AB}^2$ sont des nombres réels. Les coefficients du polynome en λ écrit au numérateur de la fraction sont des nombres réels, et l'étude des variations de la fonction $\cos^2 V$ de la variable λ peut être réalisée par les procédés ordinaires.

Nous désignerons, pour plus de commodité, par u la fonction suivante de λ :

$$u(\lambda) = \frac{(\overline{AI}^2 - \lambda.\overline{AJ}^2)(\overline{BI}^2 - \lambda.\overline{BJ}^2)}{\lambda},$$

et nous supposerons le produit AJ.BJ non nul : cette hypothèse signifie que le cercle (Σ) ne passe pas par le point J. Il est donc possible de choisir le point J pour qu'il en soit ainsi, excepté lorsque les cercles (C) et (Σ) forment un anneau orthogonal; dans ce cas, l'angle V est constamment droit.

La dérivée $u'(\lambda)$ de la fonction réelle $u(\lambda)$ s'annule pour les valeurs λ_1 et $-\lambda_1$, λ_1 étant le nombre réel et positif défini par l'égalité

$$\lambda_1 = \frac{AI.BI}{AJ.BJ}.$$

Les nombres complexes AI, BI, AJ, BJ étant choisis de manière qu'il en soit ainsi, la fonction $u(\lambda)$ passe par un maximum M, égal à

$$M = -(AJ.BI + AI.BJ)^2,$$

qui correspond à la valeur $-\lambda_1$ du paramètre λ, et par un minimum m :

$$m = -(\mathrm{AJ.BI} - \mathrm{AI.BJ})^2,$$

qui correspond à la valeur $+\lambda_1$ du paramètre λ.

Pour interpréter commodément ce résultat, nous nous placerons dans le seul cas qui puisse intéresser le géomètre : celui où les sphères (O) et le cercle (Σ) sont réels.

Nous supposerons donc que λ est une variable positive pour que la sphère (O) soit réelle. Le nombre λ_1 est réel et positif et la fonction $u(\lambda)$ admet un minimum m, qui est un nombre positif; $\cos^2 V$ s'obtient en multipliant $u(\lambda)$ par une constante positive, et par conséquent il admet un minimum, dont la valeur est définie par l'égalité

$$\cos^2 V = \frac{(\mathrm{AJ.BI} - \mathrm{AI.BJ})^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2 . \overline{\mathrm{IJ}}^2}.$$

Nous n'insisterons pas, pour le moment, sur un résultat qui ne présente qu'un intérêt assez mince. Nous ne l'avons établi que pour justifier les calculs du paragraphe suivant.

131. Angles d'un cercle (Σ) réel et des sphères passant par un cercle (C) réel. — Nous supposerons que le cercle (Σ) et le cercle (C) sont réels tous les deux. Les foyers ou points de Poncelet I et J du cercle (C) sont des points imaginaires conjugués; les foyers A et B du cercle (Σ) sont aussi des points imaginaires conjugués.

Il en résulte d'abord que $\overline{\mathrm{IJ}}^2$ et $\overline{\mathrm{AB}}^2$ sont des nombres réels négatifs :

$$\overline{\mathrm{IJ}}^2 = -4\mathrm{R}^2, \qquad \mathrm{AB}^2 = -4\rho^2$$

(notations du § **130**).

En outre, les nombres $\overline{\mathrm{AI}}^2$ et $\overline{\mathrm{BJ}}^2$ sont des nombres complexes conjugués; nous conviendrons de représenter par AI et BJ des *déterminations* des racines carrées de ces nombres *qui sont aussi des nombres imaginaires conjugués.* Nous conviendrons également de représenter par AJ et BI deux nombres imaginaires conjugués.

Les nombres AI.BJ et AJ.BI sont deux nombres réels et positifs qui s'introduisent dans les calculs et qui joueront un rôle important; nous poserons

$$\mathrm{AI.BJ} = d^2, \qquad \mathrm{AJ.BI} = \delta^2.$$

Les nombres réels et positifs d^2 et δ^2 sont les carrés des modules des distances d'un foyer du premier cercle à un foyer du second; notons que le calcul de ces nombres, pour deux cercles définis par leurs équations cartésiennes, est très simple.

Nous supposerons les sphères (O) réelles : elles passent par le cercle (C) réel; il suffit donc, pour qu'elles soient réelles, que leur centre le soit et, comme c est un nombre complexe pur, que $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ soit un nombre complexe pur; il faut et il suffit, par conséquent, que λ soit un nombre complexe de module 1.

Pour étudier $\cos^2 V$, nous le comparerons directement au minimum et au maximum déjà trouvés au paragraphe précédent. Un calcul simple donne les résultats suivants :

$$\cos^2 V - \frac{(\mathrm{AJ.BI} - \mathrm{AI.BJ})^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2 . \overline{\mathrm{IJ}}^2} = -\frac{(\mathrm{AI.BI} - \lambda.\mathrm{AJ.BJ})^2}{\lambda.\overline{\mathrm{AB}}^2 . \overline{\mathrm{IJ}}^2},$$

$$\cos^2 V - \frac{(\mathrm{AJ.BI} + \mathrm{AI.BJ})^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2 . \overline{\mathrm{IJ}}^2} = -\frac{(\mathrm{AI.BI} + \lambda.\mathrm{AJ.BJ})^2}{\lambda.\overline{\mathrm{AB}}^2 . \overline{\mathrm{IJ}}^2}.$$

Pour terminer et interpréter les calculs, nous poserons

$$\mathrm{AI.BI} = r(\cos\omega + i\sin\omega), \qquad \mathrm{AJ.BJ} = r(\cos\omega - i\sin\omega),$$
$$\lambda = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi;$$

r est un nombre positif; φ et ω sont des angles donnés, réels. Nous poserons encore

$$\alpha^2 = \frac{(\mathrm{AJ.BI} - \mathrm{AI.BJ})^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2 . \overline{\mathrm{IJ}}^2}, \qquad \beta^2 = \frac{(\mathrm{AJ.BI} + \mathrm{AI.BJ})^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2 . \overline{\mathrm{IJ}}^2}.$$

Nous reconnaissons, aux dénominateurs de ces deux fractions, le produit des carrés des diamètres des cercles (C) et (Σ), et aux numérateurs, le carré de la différence $d^2 - \delta^2$ et le carré de la somme $d^2 + \delta^2$. Nous aurons donc

$$\alpha^2 = \frac{(d^2 - \delta^2)^2}{16\mathrm{R}^2\rho^2}, \qquad \beta^2 = \frac{(d^2 + \delta^2)^2}{16\mathrm{R}^2\rho^2}.$$

Les nombres α et β sont par conséquent des nombres réels, et α^2 est inférieur ou égal à β^2.

Avec ces notations, les égalités précédentes s'écrivent

$$\cos^2 V - \alpha^2 = \frac{4r^2 \sin^2(\omega - \varphi)}{\overline{\mathrm{AB}}^2 . \overline{\mathrm{IJ}}^2},$$

$$\cos^2 V - \beta^2 = \frac{-4r^2 \cos^2(\omega - \varphi)}{\overline{\mathrm{AB}}^2 . \overline{\mathrm{IJ}}^2}.$$

Notons qu'elles montrent clairement que $\cos^2 V$ est un nombre réel.

Nous examinerons les cas suivants :

1° *Les cercles* (C) *et* (Σ) *forment un anneau orthogonal.* — Les points A et B sont des points du cercle C, et par conséquent

$$\mathrm{IA} = \mathrm{IB} = \mathrm{JA} = \mathrm{JB} = 0, \qquad d = \delta = 0.$$

Dans ce cas, r, α et β sont nuls; l'angle V est constant et égal à un angle droit. Nous retrouvons le résultat connu :

Toute sphère (O) *qui passe par un cercle* (C) *d'un anneau orthogonal coupe orthogonalement le deuxième cercle de l'anneau.*

2° *Les cercles* (C) et (Σ) *forment un anneau paratactique.* — Nous aurons, dans ce cas, par hypothèse,

$$\mathrm{AI}=0, \quad \mathrm{BJ}=0, \qquad d=0, \qquad \delta\neq 0.$$

Les conditions entraînent $r=0$, $\alpha=\beta$, et, par conséquent,

$$\cos^2 \mathrm{V}=\left(\frac{\mathrm{AJ.BI}}{\mathrm{AB.IJ}}\right)^2.$$

Nous retrouvons un résultat déjà trouvé (**25**) :

L'angle sous lequel une sphère variable (O), *qui passe par un des deux cercles d'un anneau paratactique, coupe l'autre est un angle constant, dit angle de parataxie.*

La valeur θ de cet angle de parataxie, nous est donnée par la formule très simple

$$\cos\theta=\frac{\delta^2}{4\mathrm{R}\rho}.$$

Notons, avant de passer au cas général, qu'il est aisé de vérifier le résultat déjà énoncé (**32**) suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles forment soit un anneau orthogonal, soit un anneau paratactique est que toute sphère qui passe par l'un d'eux coupe le second sous un angle constant.

La condition est nécessaire, car si, par hypothèse, les cercles (C) et (Σ) forment soit un anneau orthogonal, soit un anneau paratactique, $\mathrm{AI}=\mathrm{BJ}=0$ et $\cos^2\mathrm{V}$ est indépendant de λ. Elle est suffisante, car si $\cos^2\mathrm{V}$ est indépendant de λ, $\mathrm{AI.BI}=\mathrm{AJ.BJ}=0$. Cette condition entraîne : soit $\mathrm{AI}=\mathrm{BJ}=0$ avec $\mathrm{BI}=\mathrm{AJ}\neq 0$ et les cercles forment un anneau paratactique, soit $\mathrm{AI}=\mathrm{BJ}=\mathrm{BI}=\mathrm{AJ}=0$ et les cercles forment un anneau orthogonal. La valeur constante de $\cos^2\mathrm{V}$ n'est nulle que si l'anneau est orthogonal.

3° *Les cercles* (C) *et* (Σ) *sont aparatactiques.* — Nous rappelons que cela veut dire qu'ils ne forment ni un anneau orthogonal, ni un anneau paratactique, condition qui s'exprime en écrivant

$$d\delta\neq 0.$$

Dans ce cas, r est différent de zéro, α^2 est inférieur à β^2, et les inégalités

$$\alpha^2<\cos^2\mathrm{V}<\beta^2$$

sont satisfaites. Les valeurs extrêmes α^2 et β^2 sont atteintes pour les valeurs de φ définies par

$$\varphi=\omega+k\frac{\pi}{2}.$$

A ces valeurs, correspondent deux sphères (O) distinctes et réelles. La première (O_1) correspond à l'unique valeur λ_1 du paramètre λ définie par

$$\lambda_1=\frac{\mathrm{AI.BI}}{\mathrm{AJ.BJ}}.$$

La sphère (O_1) coupe le cercle (C) sous l'angle maximum V_1 défini par l'égalité

$$\cos\mathrm{V}_1=\frac{|d^2-\delta^2|}{4\mathrm{R}\rho}.$$

La seconde (O'_1) correspond à la valeur opposée $-\lambda_1$ et coupe le cercle (Σ) sous l'angle minimum V_2 défini par

$$\cos\mathrm{V}_2=\frac{d^2+\delta^2}{4\mathrm{R}\rho}.$$

Nous retrouvons globalement les résultats établis au § **33**, savoir : lorsque deux cercles (C) et (Σ) sont aparatactiques, les sphères qui passent par l'un d'eux (C) coupent le second sous un angle dont le cosinus est compris entre un maximum et un minimum. Les valeurs de ces maxima sont les nombres

$$\frac{|d^2-\delta^2|}{4\mathrm{R}\rho} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2+\delta^2}{4\mathrm{R}\rho}.$$

Ce résultat est global, en ce sens qu'il apporte une précision importante à un résultat déjà établi, en donnant les valeurs des maxima et minima du nombre positif $\cos\mathrm{V}$; mais ce nombre $\cos\mathrm{V}$ est défini par une équation qui admet une solution positive même si la sphère qui passe par le cercle (C) ne coupe pas le cercle (Σ). L'étude qui précède est donc incomplète et ses résultats doivent être précisés; nous le ferons dans le paragraphe suivant.

Notons au passage que le nombre $\cos\mathrm{V}$ est un invariant anallagmatique et métrique, attaché à une sphère et à un cercle donnés; si, pour le calculer, on transforme par une inversion réelle le cercle réel donné en une droite (D) et la sphère réelle donnée en une sphère (O), de centre O et de rayon R, $\cos\mathrm{V}$ est, par définition, égal au rapport $\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{R}}$, H étant la projection orthogonale de O sur la droite (D); $\cos\mathrm{V}$ est, par conséquent, un nombre inférieur à 1 pour une sphère et un cercle réels et sécants, et supérieur à 1 pour une sphère et un cercle réels et non sécants.

Énonçons ce résultat, que nous aurons à utiliser :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une sphère réelle et un cercle réels soient sécants est que le cosinus de leur angle soit inférieur à 1.

132. Invariants attachés à la figure formée par deux cercles. — Soient (C_1) et (C_2) deux cercles réels, de rayons R_1 et R_2. Nous appellerons d et δ les modules des distances d'un foyer de l'un des cercles à un foyer de l'autre.

Les deux nombres positifs $\cos V_1$ et $\cos V_2$:

$$\cos V_1 = \frac{|d^2 - \delta^2|}{4R_1R_2}, \qquad \cos V_2 = \frac{d^2 + \delta^2}{4R_1R_2},$$

sont deux invariants anallagmatiques (et métriques) de la figure formée par les deux cercles.

Ce sont, en effet, les valeurs maxima et minima de $\cos V$, invariant attaché à la figure formée par une sphère passant par l'un quelconque des deux cercles et le second de ceux-ci. Notons que le mot invariant anallagmatique est pris avec le sens suivant : invariant dans toute inversion réelle transformant deux cercles (C_1) et (C_2) en deux cercles. Il faudrait examiner ce que deviennent les nombres $\cos V_1$ et $\cos V_2$ lorsque l'inversion réelle choisie transforme un des cercles ou tous deux en droites.

Si les cercles (C_1) et (C_2) forment un anneau orthogonal, nous avons $d = \delta = 0$; s'ils forment un anneau paratactique, nous avons $d = 0$, $\delta \neq 0$, et dans les deux cas $\cos V_1 = \cos V_2$.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles forment un anneau orthogonal ou paratactique est que les deux invariants $\cos V_1$ et $\cos V_2$ soient égaux.

Si les cercles (C_1) et (C_2) sont aparatactiques, ces deux invariants sont inégaux. Il existe une sphère réelle (O_1) passant par un des cercles (C_1) et coupant le second sous un angle dont le cosinus est $\cos V_1$, et une sphère (O'_1) passant par (C_1) et coupant le second cercle sous un angle dont le cosinus est $\cos V_2$. Nous dirons, en abrégé, qu'il existe une sphère (O_1) passant par (C_1) qui coupe le cercle (C_2) sous l'angle maximum V_1 et une sphère (O'_1) passant par (C_1) qui coupe le cercle (C_2) sous l'angle minimum V_2. Ces sphères sont dites *principales*.

Nous appellerons donc sphères principales de la figure formée par deux cercles réels aparatactiques (C_1) et (C_2) les sphères réelles qui passent par un quelconque de ces deux cercles et coupent le second soit sous l'angle V_1, soit sous l'angle V_2.

Nous dirons que les sphères principales définies par un même angle V_1 sont associées.

133. Comparaison des invariants et du nombre 1. Interprétations géométriques. — Nous avons vu (29) qu'il existe toujours au moins un cercle réel perpendiculaire à deux cercles quelconques. Transformons la figure formée par les deux cercles réels (C_1) et (C_2) donnés, par une inversion réelle qui transforme ce cercle perpendiculaire en une droite. La figure transformée se compose de deux cercles (C'_1) et (C'_2); il est possible de choisir les axes de manière que les équations de ces cercles soient

$$(C'_1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - \mu_1)^2 - R_1^2 = 0, \\ y\cos\omega - x\sin\omega = 0; \end{cases}$$

$$(C'_2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - \mu_2)^2 - R_2^2 = 0, \\ y\cos\omega + x\sin\omega = 0 \qquad \left(0 < 2\omega < \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Nous calculerons les valeurs des invariants $\cos V_1$ et $\cos V_2$ sur la figure transformée par inversion, c'est-à-dire sur les deux cercles (C'_1) et (C'_2). Un calcul simple donne les valeurs de d^2 et δ^2 :

$$d^2 = |(\mu_1 - \mu_2)^2 - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1R_2\cos 2\omega|,$$
$$\delta^2 = |(\mu_1 - \mu_2)^2 - R_1^2 - R_2^2 - 2R_1R_2\cos 2\omega|.$$

Les deux invariants ont les valeurs suivantes :

$$\frac{|(\mu_1 - \mu_2)^2 - R_1^2 - R_2^2|}{2R_1R_2}, \qquad \text{et} \qquad \cos 2\omega;$$

l'un d'eux est $\cos V_1$ et l'autre $\cos V_2$.

La condition nécessaire et suffisante pour que le premier de ces invariants soit inférieur à 1 se traduit par la double inégalité

$$|R_1 - R_2| < |\mu_1 - \mu_2| < R_1 + R_2,$$

qui exprime que la distance des centres des cercles (C'_1) et (C'_2) est comprise entre la somme et la valeur absolue de la différence de leurs rayons.

Le second invariant, $\cos 2\omega$, est inférieur à 1, sauf si $\omega = 0$, c'est-à-dire si les cercles (C'_1) et (C'_2) sont dans un même plan.

Par conséquent, pour que les invariants $\cos V_1$ et $\cos V_2$ soient l'un et l'autre inférieurs à 1, il faut et il suffit que les cercles (C'_1) et (C'_2) forment un anneau. La propriété de deux cercles de former un anneau se conserve par inversion; nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les invariants $\cos V_1$ et $\cos V_2$ de deux cercles réels et distincts soient inférieurs à 1 est que ces cercles (C_1) et (C_2) forment un anneau.

Si les invariants sont nuls tous les deux, l'anneau est orthogonal; si les invariants sont égaux mais différents de zéro, l'anneau est paratactique et l'angle de parataxie Θ est la valeur commune $V_1 = V_2$.

Si les invariants sont distincts, l'anneau est aparatactique; chaque sphère qui passe par l'un quelconque des deux cercles coupe le second en des points réels sous un angle V compris entre un maximum V_1 et un minimum V_2.

Pour que l'un des invariants, $\cos 2\omega$, soit inférieur à 1 et le second supérieur à 1, il faut et il suffit que les cercles (C'_1) et (C'_2) ne soient pas dans un même plan, n'aient aucun point commun et ne forment pas un anneau. Ils sont, dans ce cas, forcément aparatactiques. Toutes ces conditions se conservent par inversion. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Si deux cercles réels qui n'ont aucun point commun réel ou imaginaire ne forment pas un anneau, un seul de leurs invariants, $\cos V_1$, est inférieur à 1. Les sphères réelles qui passent par l'un d'eux ne coupent pas nécessairement le second; lorsqu'elles le coupent en deux points réels, l'angle V de la sphère et du cercle est inférieur à un maximum V_1.

Il reste à examiner deux cas : *Primo*, celui où les deux cercles (C'_1) et (C'_2) ont un seul point commun, qui n'est pas un point de contact; dans ce cas, $\cos 2\omega$ est inférieur à 1 et le second invariant est égal à 1; *Secundo*, celui où les cercles (C'_1) et (C'_2) sont dans un même plan : l'invariant $\cos 2\omega$ est alors égal à 1 et le second est inférieur, égal, ou supérieur à 1 suivant que les cercles (C'_1) et (C'_2) sont sécants, sont tangents, ou n'ont aucun point réel commun. Ces résultats se transforment aisément par inversion. Nous pouvons donc énoncer ce dernier résultat :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles réels et distincts, (C_1) et (C_2), aient un ou deux points réels communs est que l'un des invariants soit égal à 1 et le second inférieur à 1.

Notons qu'il y a contact dans le seul cas où les deux invariants sont égaux à 1, et que les deux cercles (C_1) et (C_2) sont sur une même sphère mais non sécants dans le seul cas où un invariant est égal à 1 et le second supérieur à 1.

134. Recherche des sphères principales. — Nous opérerons encore sur la figure formée des cercles (C'_1) et (C'_2) du paragraphe précédent, inverses des cercles (C_1) et (C_2) donnés.

L'équation d'une sphère (S') passant par le cercle (C'_1) sera

$$x^2 + y^2 + (z - \mu_1)^2 - R_1^2 + 2R_1 \operatorname{cotg} \varphi_1 (x \sin \omega - y \cos \omega) = 0.$$

L'angle de cette sphère (S') avec le plan (P_1) du cercle (C'_1) est égal à φ_1. L'angle u du cercle (C'_2) et de la sphère (S') est donné par l'égalité

$$\cos^2 u = \frac{[(\mu_2 - \mu_1)^2 - R_1^2 - R_2^2]^2 + 4R_1^2R_2^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi_1 \cos^2 2\omega}{\dfrac{4R_1^2R_2^2}{\sin^2 \varphi_1}},$$

obtenue en écrivant (**121**) en numérateur le produit des puissances des foyers du cercle (C'_2) par rapport à la sphère (S') et en dénominateur le quadruple produit des carrés des rayons de ce cercle et de cette sphère.

Cette égalité s'écrit plus simplement, en introduisant les invariants $\cos V_1$ et $\cos V_2$ des cercles (C'_1) et (C'_2) calculés au § **133** :

$$\cos^2 u = \cos^2 V_1 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 V_2 \cos^2 \varphi_1.$$

A une valeur donnée du paramètre φ_1, c'est-à-dire à une sphère (S') donnée, correspond une valeur de $\cos^2 u$ et une seule. Réciproquement, à une valeur donnée u de l'angle u correspond une valeur et une seule de $\operatorname{cotg}^2 \varphi_1$:

$$\operatorname{cotg}^2 \varphi_1 = \frac{\cos^2 u - \cos^2 V_1}{\cos^2 V_2 - \cos^2 u}.$$

Cette valeur est positive lorsque $\cos u$ est compris entre les deux invariants; il lui correspond, dans ce cas, deux valeurs réelles et opposées de $\operatorname{cotg} \varphi_1$, c'est-à-dire deux sphères (S') réelles et distinctes.

A la valeur $u = V_1$ correspond une seule sphère (S'_1) réelle, qui, dans l'exemple traité, a pour équation

$$(S'_1) \qquad x^2 + y^2 + (z - \mu_1)^2 - R_1^2 = 0,$$

et à la valeur $u = V_2$ correspond une seule sphère (S'_2) réelle, qui, dans l'exemple traité, est le plan (P_1) du cercle (C'_1), d'équation

$$(S'_2) \qquad x \sin \omega - y \cos \omega = 0.$$

Les sphères (S'_1) et (S'_2) sont les sphères principales passant par le cercle (C'_1). Elles sont orthogonales.

Il passe par le cercle (C'_1) deux sphères imaginaires qui coupent le cercle (C'_2) sous un angle droit; elles correspondent aux valeurs de $\operatorname{cotg} \varphi_1$ égales à $i\dfrac{\cos V_1}{\cos V_2}$ et $-i\dfrac{\cos V_1}{\cos V_2}$. Soient (S'_3) et (S'_4) ces deux sphères. Les deux couples de sphères (S'_1), (S'_2) et (S'_3), (S'_4) correspondent aux couples de valeurs 0, ∞ et $i\frac{\cos V_1}{\cos V_2}$, $-i\frac{\cos V_1}{\cos V_2}$ du paramètre $\operatorname{cotg}\varphi_1$; ces couples de valeurs sont conjugués; les centres des sphères principales sont par conséquent conjugués harmoniques des centres des sphères (S'_3) et (S'_4); ces sphères principales sont en outre orthogonales entre elles; elles sont par conséquent bissectrices des sphères (S'_3) et (S'_4) (**129**).

Soit (Σ') une sphère variable passant par le cercle (C'_2), d'équation

$$x^2 + y^2 + (z - \mu_2)^2 - R_2^2 - 2R_2 \operatorname{cotg}\varphi_2(x \sin\omega + y\cos\omega) = 0.$$

L'angle ψ sous lequel elle coupe le cercle (C'_1) est défini par l'égalité

$$\cos^2\psi = \cos^2 V_1 \sin^2\varphi_2 + \cos^2 V_2 \cos^2\varphi_2.$$

Par ce cercle (C'_2), il passe deux sphères principales : la première (Σ'_1) coupe le cercle (C'_1) sous l'angle V_1 et correspond à la valeur $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; son équation est

$$(\Sigma'_1) \qquad x^2 + y^2 + (z - \mu_2)^2 - R_2^2 = 0;$$

la seconde (Σ'_2) coupe le cercle (C'_1) sous l'angle V_2 et correspond à $\varphi_2 = 0$: c'est le plan du cercle C'_1, et son équation est

$$(\Sigma'_2) \qquad x \sin\omega + y\cos\omega = 0.$$

Les sphères principales (S'_1) et (Σ'_1) qui correspondent à un même angle V_1 se coupent suivant un cercle perpendiculaire aux deux cercles (C'_1) et (C'_2); de même, les sphères (S'_2) et (Σ'_2), réduites ici à des plans, se coupent suivant la droite qui est le deuxième cercle perpendiculaire aux cercles (C'_1) et (C'_2).

Notons, avant de conclure, la formule qui donne l'un des angles V des deux sphères (S') et (Σ') définies par les données des angles φ_1 et φ_2 :

$$\cos V = \frac{R_1^2 + R_2^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 - 2R_1R_2 \cos 2\omega \operatorname{cotg}\varphi_1 \operatorname{cotg}\varphi_2}{2R_1R_2} |\sin\varphi_1 \sin\varphi_2|.$$

Cette formule est très précise; elle fournit avec son signe, dans le cas de deux sphères sécantes (S') et (Σ'), l'angle des rayons aboutissant à un point commun aux deux sphères.

Pour l'interpréter, nous sommes amené à sacrifier un peu de sa précision. En analytique, les deux sphères (S') et (Σ') ne sont pas toujours sécantes; cos V est alors, par définition (**118**), le nombre positif égal à la valeur absolue du second membre. Lorsque (S') ou (Σ') sont des plans, l'angle V n'est plus défini avec la même précision et cos V est encore, par définition, un nombre positif. D'autre part, les angles φ_1 et φ_2 sont les angles des sphères (S') et (Σ') avec les sphères de base, c'est-à-dire avec deux sphères principales (S'_2) et (Σ'_2); or la donnée de l'angle d'une sphère (S') et de la sphère (S'_2) définit deux sphères (S'), correspondant aux valeurs φ_1 et $\pi - \varphi_1$ du paramètre; nous ne désirons pas faire les conventions délicates qui permettraient de distinguer entre ces deux sphères, pour les mêmes raisons qui nous ont conduit (**117** et **118**) à ne pas préciser l'angle de deux sphères. Nous sommes donc amenés à écrire la formule qui donne cos V sous la forme

$$\cos V = \varepsilon \cos V_1 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \varepsilon' \cos V_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2,$$

dans laquelle ε et ε' sont des nombres égaux soit à $+1$, soit à -1, choisis de manière que cos V soit positif. L'angle V ainsi défini est l'un des angles que font l'une des deux sphères (Σ') qui fait avec la sphère de base (Σ'_2) l'angle φ_2, avec l'une des deux sphères (S') qui fait avec la sphère de base (S'_2) l'angle φ_1.

Les résultats établis et les données se conservant par inversion, nous allons les énoncer pour deux cercles quelconques (C_1) et (C_2) :

Soient (C_1) et (C_2) deux cercles réels, aparatactiques. Il existe une sphère (S_1) et une seule, réelle, passant par le cercle (C_1) et qui coupe le cercle (C_2) sous l'angle maximum V_1, et il existe une sphère (Σ_1) et une seule, réelle, passant par le cercle (C_2) et coupant le cercle (C_1) sous le même angle V_1.

Il existe de même une sphère et une seule (S_2), réelle, qui passe par le cercle (C_1) et qui coupe le cercle (C_2) sous l'angle minimum V_2 et une sphère (Σ_2) et une seule qui passe par le cercle (C_2) et qui coupe le cercle (C_1) sous le même angle V_2.

Ces sphères sont les sphères principales.

Les deux sphères principales passant par un des cercles donnés sont orthogonales et les deux sphères principales associées qui correspondent à un angle donné V_1 ou V_2 se coupent suivant l'un des cercles perpendiculaires aux deux cercles donnés.

Ces résultats ont déjà été trouvés (**33**); mais nous sommes en mesure maintenant (**132**) de calculer les invariants $\cos V_1$ et $\cos V_2$; en outre, les règles suivantes donnent le moyen de trouver analytiquement les sphères principales et par conséquent les cercles perpendiculaires à deux cercles donnés.

Les sphères (S_3) et (S_4) qui passent par un cercle (C_1) et par les foyers du second coupent ce dernier sous un angle droit.

Ce résultat évident d'après la définition du § **124** peut être démontré sur la figure composée des cercles (C'_1) et (C'_2), inverses des cercles (C_1) et

(C_2). La sphère (S') qui passe par l'un des foyers du cercle (C_2') est définie par la valeur du paramètre $\operatorname{cotg}\varphi_1$, donnée par :

$$\operatorname{cotg}\varphi_1 = \pm i \frac{R_2^2 + R_1^2 - (\mu_2 - \mu_1)^2}{2R_1R_2\cos 2\omega};$$

c'est une des deux valeurs $\pm i \dfrac{\cos V_1}{\cos V_2}$ qui définissent (**134**) les sphères (S_3') et (S_4') qui coupent sous un angle droit le cercle (C_2'). Notons qu'il s'agit de sphères imaginaires et que ce résultat ne correspond à aucune réalité géométrique.

Les sphères principales (S_1) et (S_2) qui passent par un cercle (C_1) sont les bissectrices des sphères qui, passant par ce cercle, coupent le second sous un angle droit.

135. Angles des cercles et sphères attachés à deux cercles donnés aparatactiques. — Nous avons déjà dit (**17**) qu'à la figure formée par deux cercles donnés (C_1) et (C_2) s'attachent cinq angles, dépendant de deux paramètres, donc liés par trois relations ; ce sont :

1° l'angle V des sphères (S) et (Σ) passant (S) par (C_1) et (Σ) par (C_2) ;

2° l'angle u de la sphère (Σ) et du cercle (C_1) ;

3° l'angle v de la sphère (S) et du cercle (C_2) ;

4° l'angle α du cercle (γ), intersection des sphères (S) et (Σ), avec le cercle (C_1) ;

5° l'angle β de ce même cercle avec le cercle (C_2).

Les formules

$$\sin u = \sin\alpha \sin V,$$
$$\sin v = \sin\beta \sin V,$$

établies en géométrie, c'est-à-dire pour des éléments réels et sécants, sont évidemment générales. Nous en avons tiré des résultats intéressants.

Lorsque les cercles (C_1) et (C_2) forment un anneau orthogonal, $u = v = V = \dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{2}$. Les cercles de la congruence $[C_1 . C]_2$ sont les cercles perpendiculaires aux cercles donnés.

Lorsque l'anneau (C_1), (C_2) est paratactique, si θ est l'angle deparataxie, $u = v = \theta$ et par conséquent $\alpha = \beta$: les cercles de la congruence $[C_1 . C_2]$ coupent les cercles (C_1) et (C_2) sous le même angle, et cet angle est constant si V est constant. Il nous est possible de compléter ce dernier résultat en utilisant les calculs faits au § **134**. Soient (S_1) et (Σ_1) deux sphères particulières, passant la première par le cercle (C_1), la seconde par le cercle (C_2) ; ces sphères sont principales, puisque l'anneau est paratactique. Une sphère variable (S) est définie (sous les réserves déjà faites) par l'angle φ_1 qu'elle fait avec (S_1), et une sphère (Σ) par l'angle φ_2

qu'elle fait avec (Σ_2). L'angle V des sphères (S) et (Σ) sera donné par la formule

$$\cos V = \cos\theta\,(\varepsilon \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \varepsilon' \cos\varphi_1 \cos\varphi_2);$$

il sera égal à l'angle des deux sphères (S_1) et (Σ_1) si la valeur de $\cos V$ est égale à $\varepsilon' \cos\theta$, c'est-à-dire si $\varphi_1 = \pm \varphi_2$. Les cercles ($\gamma$) correspondant à l'une de ces solutions, $\varphi_1 = \varphi_2$ par exemple, sont les cercles d'une même famille d'une cyclide bien déterminée, qui est d'ailleurs une cyclide de Dupin, passant par les cercles (C_1') et (C_2'). C'est la réciproque de la propriété établie au § **39** :

Les cercles qui coupent sous un même angle constant deux cercles (C_1) *et* (C_2) *paratactiques sont les cercles d'une famille normale d'une cyclide de Dupin passant par ces deux cercles. Ils sont les cercles communs aux sphères passant par* (C_1) *et aux sphères passant par* (C_2) *dont l'angle* V *est constant.*

Lorsque les cercles (C_1) et (C_2) sont aparatactiques, une sphère (S) passant par le cercle (C_1) peut être définie (avec les réserves déjà faites) par l'angle φ_1 que fait cette sphère avec la sphère principale (S_2), et une sphère (Σ) par l'angle φ_2 que fait cette sphère avec la sphère principale (Σ_2). Les angles u, v, V sont alors donnés par les formules

$$\cos^2 u = \cos^2 V_1 \sin^2\varphi_1 + \cos^2 V_2 \cos^2\varphi_1,$$
$$\cos^2 v = \cos^2 V_1 \sin^2\varphi_2 + \cos^2 V_2 \cos^2\varphi_2,$$
$$\cos V = \varepsilon \cos V_1 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \varepsilon' \cos V_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2.$$

L'élimination de φ_1 et de φ_2 fournirait la troisième relation qui existe *a priori* entre les cinq angles α, β, u, v, V.

De ces relations, nous tirons quelques résultats simples :

1° A une valeur donnée de u, satisfaisant aux conditions

$$\cos V_1 < \cos u < \cos V_2,$$

il correspond une valeur réelle et positive de $\operatorname{cotg}^2\varphi_1$, donc deux sphères (S) réelles. Ce résultat s'énonce ainsi :

Par un cercle (C_1) réel, il passe deux sphères réelles qui coupent le cercle (C_2) sous un angle donné dont le cosinus est compris entre les deux invariants des cercles (C_1) et (C_2), supposés aparatactiques.

2° La condition nécessaire et suffisante pour que $u = v$ ou $\alpha = \beta$ est $\varphi_1 = \pm \varphi_2 + k\pi$. Nous retrouvons ainsi le résultat déjà établi (**37**) :

Les cercles (γ) *qui coupent sous des angles égaux mais variables deux cercles aparatactiques sont les cercles d'une même famille d'une cyclide.*

136. Angle de deux cercles qui ont au moins un point commun. — Soient (C_1) et (C_2) deux cercles ayant un seul point commun. Les cercles inverses (C_1') et (C_2') du § **133** ont un point commun seulement : leurs plans sont donc différents, et l'invariant $\cos 2\omega$, inférieur à 1, est le cosinus de l'angle des tangentes à ces deux cercles au point commun réel; le second invariant est égal à 1.

Lorsque les cercles (C_1) et (C_2) sont sur une même sphère, leurs inverses (C'_1) et (C'_2) sont dans un même plan; l'invariant $\cos 2\omega$ est égal à 1, et le second $\dfrac{|R_1^2 + R_2^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2|}{2R_1R_2}$ est égal au cosinus de l'angle des deux cercles. Il est inférieur, égal ou supérieur à 1 lorsque les cercles sont sécants, tangents ou non sécants.

Nous compléterons les résultats établis au § 133 en énonçant le résultat suivant :

Le cosinus de l'angle de deux cercles (C_1) et (C_2) qui ont au moins un point commun est égal à celui des invariants, s'il en existe un, différent de 1.

Soient (C_1) et (C_2) deux cercles qui ont un point commun réel, non de contact, ou bien deux points communs réels. L'invariant de ces deux cercles, égal à 1, est alors le plus grand; nous avons donc

$$4R_1R_2 = d^2 + \delta^2.$$

L'angle V des deux cercles est défini, en supposant $\delta < d$, par l'égalité

$$\cos V = \frac{d^2 - \delta^2}{4R_1R_2}.$$

Cette égalité, en tenant compte de la précédente, s'écrit

$$\cos V = \frac{d^2 - \delta^2}{d^2 + \delta^2},$$

ou encore

$$\operatorname{tg}\frac{V}{2} = \frac{\delta}{d}.$$

Par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles (C_1) et (C_2) réels aient au moins un point commun réel est

$$d^2 + \delta^2 = 4R_1R_2$$

et l'angle V de ces cercles est défini par l'égalité

$$\operatorname{tg}\frac{V}{2} = \frac{\delta}{d} \qquad (\delta \leqslant d).$$

137. Interprétation du résultat. — Nous désirons attirer l'attention de nos lecteurs sur ce dernier résultat. Désignons par I et J les foyers du cercle (C_1), par A et B ceux du cercle (C_2), et rappelons que IA et JB sont, par hypothèse, des nombres conjugués, de même que IB et JA. Nous avons donc

$$IA.JB = d^2, \qquad IB.JA = \delta^2,$$

et la condition

$$d^2 + \delta^2 = 4R_1R_2$$

peut s'écrire

$$(1) \qquad IA.JB + IB.JA = IJ.AB.$$

Lorsque les points A, B, I, J sont réels, on démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère ABIJ soit inscriptible est (théorème de Ptolémée) que le produit AB.IJ des diagonales soit égal à la somme IA.JB + IB.JA des produits des côtés opposés, c'est-à-dire que l'égalité (1) soit satisfaite. La démonstration usuelle de ce théorème résulte de la transformation de la figure par une inversion dont le pôle est un des sommets, donc un point réel; elle fait intervenir, dans son énoncé même qui distingue diagonales et côtés, les positions des sommets les uns par rapport aux autres. Cette démonstration ne peut donc pas être étendue au cas où les quatre points sont imaginaires.

La proposition à démontrer n'est d'ailleurs pas la même. Il faut, pour l'énoncer, admettre qu'on appellera *diagonales* du quadrilatère ABIJ les droites réelles joignant les sommets imaginaires conjugués, et *côtés* les droites imaginaires.

L'égalité (1) exprime alors encore que le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, avec cette réserve que les mesures des côtés opposés sont des nombres imaginaires conjugués. Cette égalité exprime soit que les deux cercles (C_1) et (C_2) ont un point commun réel, ce qui revient à dire que la sphère passant par A, B, I, J est de rayon nul, soit que ces cercles sont sur une même sphère, ce qui revient à dire que le quadrilatère ABIJ est inscriptible.

Le théorème de Ptolémée, pour un quadrilatère dont les sommets sont imaginaires conjugués, est sensiblement différent du même théorème pour un quadrilatère à sommets réels. Il s'énonce ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère à sommets imaginaires conjugués soit inscriptible dans un cercle ou dans une sphère de rayon nul est que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés.

Nous saisissons volontiers cette occasion pour souligner que, lorsqu'une propriété a été démontrée par des raisonnements faits sur une figure réelle, il ne faut la généraliser au cas où certains de ses éléments deviennent imaginaires qu'avec beaucoup de prudence. Pour bien comprendre ce qui se passe dans un exemple comme le précédent, il faudrait reconstituer la démonstration analytique, à partir d'une figure réelle, du théorème de Ptolémée, puis appliquer cette démonstration à la figure complexe. Ces deux démonstrations sont bien les mêmes, mais leurs interprétations changent avec les hypothèses.

CHAPITRE XVI

APPLICATIONS DIVERSES

Nous avons donné, dans le chapitre précédent, des procédés permettant d'effectuer les calculs des valeurs des cosinus d'angles de droites et de cercles. Nous nous proposons de les appliquer à la résolution de quelques problèmes.

138. Problème : Trouver les cercles (C) réels qui coupent les plans tangents à un cône (T) réel, suivant un angle donné θ. — Ce problème est une réciproque, en quelque sorte, de la proposition énoncée au § **114**.

Soit
$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 = 0$$
l'équation tangentielle du cône (T) qui a pour sommet l'origine O. Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des foyers du cercle réel (C) de rayon R : x_1 et x_2, y_1 et y_2, z_1 et z_2 sont des nombres conjugués et R est défini par
$$-4R^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$
Le plan, d'équation cartésienne
$$ux + vy + wz = 0,$$
fait avec le cercle (C) l'angle θ défini par (**124**)
$$\cos^2\theta = \frac{(ux_1 + vy_1 + wz_1)(ux_2 + vy_2 + wz_2)}{R^2(u^2 + v^2 + \omega^2)}.$$
Pour que le cercle (C) soit coupé par tous les plans tangents au cône (T) sous l'angle donné θ, il faut et il suffit que l'équation tangentielle
$$u^2(x_1x_2 - R^2\cos^2\theta) + v^2(y_1y_2 - R^2\cos^2\theta) + w^2(z_1z_2 - R^2\cos^2\theta)$$
$$+ vw(y_1z_2 + z_1y_2) + wu(z_1x_2 + x_1z_2) + uv(x_1y_2 + y_1x_2) = 0$$
soit identique à l'équation tangentielle de ce cône
$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 = 0.$$

Il faut et il suffit, pour cela, que les égalités suivantes soient satisfaites :
$$y_1z_2 + z_1y_2 = 0, \quad z_1x_2 + x_1z_2 = 0, \quad x_1y_2 + y_1x_2 = 0,$$
$$\frac{x_1x_2 - R^2\cos^2\theta}{a} = \frac{y_1y_2 - R^2\cos^2\theta}{a'} = \frac{z_1z_2 - R^2\cos^2\theta}{a''}.$$

L'étude des trois premières égalités conduit à la conclusion que l'un des couples de valeurs (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) est nul. Nous supposerons $y_1 = y_2 = 0$. Nous poserons alors
$$x_1 = \rho(\cos\omega + i\sin\omega), \quad x_2 = \rho(\cos\omega - i\sin\omega),$$
$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

La condition
$$x_1z_2 + z_1x_2 = 0$$
entraîne
$$\rho r\cos(\omega - \varphi) = 0.$$

Nous choisirons $\varphi = \omega + \frac{\pi}{2}$: on vérifie sans peine que les autres solutions ne diffèrent pas de celle-ci. Nous aurons par conséquent
$$z_1 = r(-\sin\omega + i\cos\omega), \quad z_2 = r(-\sin\omega - i\cos\omega).$$

Les deux dernières équations du problème sont
$$\frac{\rho^2 - R^2\cos^2\theta}{a} = \frac{-R^2\cos^2\theta}{a'} = \frac{r^2 - R^2\cos^2\theta}{a''},$$
auxquelles il faut joindre
$$R^2 = \rho^2\sin^2\omega + r^2\cos^2\omega.$$

De ces équations nous tirons les deux équations équivalentes

(1) $$a'\sin^2\theta + \cos^2\theta(a\sin^2\omega + a''\cos^2\omega) = 0,$$

(2) $$\frac{\rho^2}{r^2} = \frac{a' - a}{a' - a''}.$$

L'équation (1) nous définit ω lorsque θ est donné; nous la discuterons ultérieurement. L'équation (2) nous donne la valeur du rapport $\frac{\rho}{r}$. Il faut observer ici que, si un cercle (C) répond aux conditions de l'énoncé, tous les cercles déduits de (C) par une homothétie de pôle O et de rapport variable répondent aussi à la question : nous pourrons donc choisir soit ρ, soit r arbitrairement, et la donnée de $\frac{\rho}{r}$ définit, en fait, une famille (C) de cercles. Les différentes familles sont homothétiques.

La discussion est aisée. Il faut, pour que $\frac{\rho^2}{r^2}$ soit positif, que a' soit le plus grand ou le plus petit des nombres a, a', a''; il faut en outre, pour que ω existe, que $\operatorname{tg}^2\theta$ soit compris entre les deux nombres $-\frac{a}{a'}$ et $-\frac{a''}{a'}$.

Il résulte de cette discussion sommaire que deux seulement des hypothèses $x_1 = x_2 = 0$, et $y_1 = y_2 = 0$, $z_1 = z_2 = 0$ conduiront à des familles de cercles réels. Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans les hypothèses du § **114** :

$$a = \frac{1}{\mu^2 - 1}, \qquad a' = \frac{1}{\lambda^2 - 1}, \qquad a'' = -1, \qquad (\lambda^2 < 1 < \mu^2)$$

qui entraînent

$$a' < a'' < a.$$

Les hypothèses $y_1 = y_2 = 0$ fourniront des cercles (C) réels; il en sera de même de $x_1 = x_2 = 0$; mais l'hypothèse $z_1 = z_2 = 0$ n'en fournit pas.

Nous allons préciser les résultats obtenus en étudiant une famille de cercles (C) particulière; les autres s'en déduiront par homothétie.

Nous supposons $y_1 = y_2 = 0$ et $a' < a'' < a$. Le centre M du cercle (C) a pour coordonnées

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = 0, \qquad z = -r \sin \omega.$$

Nous choisirons pour ρ le nombre positif solution de l'équation

$$\rho^2 = a - a';$$

r est alors une des solutions de

$$r^2 = a'' - a',$$

et le point M un point de l'ellipse (E) :

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{a - a'} + \frac{z^2}{a'' - a'} - 1 = 0.$$

Le plan du cercle (C) a pour équation

$$x\rho \sin \omega + zr \cos \omega + (r^2 - \rho^2) \sin \omega \cos \omega = 0\,;$$

c'est donc le plan normal en M à l'ellipse (E). Le rayon R du cercle est défini par l'équation

$$R^2 = \rho^2 \sin^2 \omega + r^2 \cos^2 \omega\,;$$

il est égal à la longueur du demi-diamètre OM′ conjugué de OM dans l'ellipse (E). Nous reconnaissons cette famille de cercles; si l'on porte sur la normale à l'ellipse (E) deux longueurs MA = MB = OM′, les points A et B décrivent les deux cercles de Chasles de l'ellipse, et OB et OA sont symétriques par rapport aux axes.

Nous résumons ci-dessous les résultats trouvés :

Soit un cône (T) *réel, d'équation tangentielle*

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 = 0 \qquad (a' < a'' < a).$$

Soit (E) *l'ellipse d'équations*

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{a - a'} + \frac{z^2}{a'' - a'} - 1 = 0.$$

Soient A *et* B *deux points choisis sur les cercles de Chasles de cette ellipse de manière que* $(\widehat{Ox, OA}) = -(\widehat{Ox, OB})$. *Les plans tangents au cône* T *coupent sous un même angle constant le cercle de diamètre* AB *et tous les cercles homothétiques dans une homothétie de pôle* O. *Les plans de ces cercles sont normaux au plan de l'ellipse.*

L'ellipse (E) *peut être remplacée par l'ellipse* (E′), *d'équations*

$$x = 0, \qquad \frac{y^2}{a - a'} + \frac{z^2}{a - a''} - 1 = 0.$$

Il n'existe pas de cercles réels autres que les cercles définis ci-dessus qui soient coupés par les plans tangents au cône (T) *sous un angle constant.*

Tous les cercles des deux familles précédentes ne sont pas des cercles réels coupés par les plans tangents en des points réels.

Nous avions établi au § **114** l'existence d'un cercle (C); nous constatons qu'il n'est pas le seul. Il correspond aux données suivantes :

$$a = \frac{1}{\mu^2 - 1}, \qquad a' = \frac{1}{\lambda^2 - 1}, \qquad a'' = -1, \qquad \omega = \frac{\pi}{2},$$
$$r = h\frac{\lambda}{\mu}(\mu^2 - 1), \qquad \rho^2 = h^2 \frac{(\mu^2 - 1)(\mu^2 - \lambda^2)}{\mu^2}.$$

Le cercle (C) trouvé dans l'exercice précédent a pour équations

$$\rho x \sin \omega + rz \cos \omega + (r^2 - \rho^2) \sin \omega \cos \omega = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho x \cos \omega + 2rz \sin \omega + (\rho^2 - r^2) \cos 2\omega = 0.$$

Ce cercle et les cercles homothétiques dans une homothétie de pôle O sont sur un cône de sommet O dont on forme aisément l'équation. Celle-ci s'écrit, après une légère transformation,

$$\frac{x^2}{(a - a'') \cos^2 \omega} + \frac{y^2}{a' - a'' \cos^2 \omega - a \sin^2 \omega} + \frac{z^2}{(a'' - a) \sin^2 \omega} = 0.$$

Ce cône est un cône homofocal au cône (T), dont l'équation est de la forme

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{a' - \lambda} + \frac{z^2}{a'' - \lambda} = 0,$$

λ ayant la valeur

$$\lambda = a \sin^2 \omega + a'' \cos^2 \omega.$$

Le résultat trouvé plus haut peut, par conséquent, s'énoncer brièvement sous la forme suivante :

Les plans tangents à un cône (T) coupent sous un angle constant les sections circulaires des cônes homofocaux.

En outre, nous pouvons ajouter que ces sections circulaires sont les seuls cercles qui soient coupés sous un angle constant par les plans tangents au cône (T).

139. Cyclides homofocales. — Rappelons qu'une cyclide (W) donnée peut être définie comme enveloppe de sphères d'une congruence bilinéaire (la génération est dite alors normale), ou comme enveloppe de sphères d'un faisceau quadratique (la génération est dite alors exceptionnelle) (**55**).

A chaque génération normale correspond une focale, lieu des centres des sphères de la génération de rayon nul; cette focale est une biquadratique sphérique, une quartique bicirculaire ou une cubique si la cyclide est une (W_0); elle se compose de deux cercles si c'est une (W_1) et de quatre droites isotropes si c'est une (W_2). Rappelons que les indices dans la notation W indiquent le nombre des générations exceptionnelles (**78**). Rappelons également que les focales ont été étudiées au chapitre X.

A chaque génération exceptionnelle correspondent des foyers; ce sont les centres des sphères de rayon nul de la génération. Nous n'avons pas procédé à une étude systématique des foyers; bornons-nous à indiquer qu'en général une génération exceptionnelle est définie par une déférente et un cercle directeur; les foyers sont les points communs à ces deux courbes. Il y en a quatre pour une génération exceptionnelle d'une (W_1), deux pour une génération exceptionnelle d'une (W_2), sauf si ces cyclides admettent des points multiples accidentels.

La figure inverse de la focale d'une cyclide (W) est une focale de la cyclide inverse (W'), et l'inverse d'un foyer, lorsqu'il est à distance finie, est un foyer de la cyclide (W').

Considérons, pour fixer les idées, une cyclide (W) définie par une génération normale, c'est-à-dire par la donnée d'une quadrique déférente (H) et d'une sphère directrice (O). La focale de cette génération est la biquadratique intersection de ces deux quadriques (H) et (O). Remplaçons la déférente (H) par une déférente (H'), quadrique du faisceau linéaire défini par les quadriques de base (H) et (O) : la cyclide (W) est remplacée par une nouvelle cyclide (W'). La cyclide (W') et la cyclide (W) ont une focale commune, savoir la biquadratique commune aux quadriques (H), (H') et (O). Il est possible (**94**) de démontrer que ces deux cyclides ont les mêmes focales et, le cas échéant, les mêmes foyers.

Considérons de même une cyclide (W) définie par une conique déférente (H) et par un cercle directeur (C). Les foyers de la génération exceptionnelle correspondante sont les points communs à la conique (H) et au cercle (C). Remplaçons la déférente (H) par une conique (H') du faisceau linéaire dont les coniques de base sont la déférente (H) et le cercle directeur (C). Il lui correspond une cyclide (W'). Il est possible de démontrer qu'elle a non seulement les mêmes foyers que la cyclide (W) déjà connus, mais encore mêmes foyers et mêmes focales.

Nous conviendrons de dire que deux cyclides sont *homofocales* lorsqu'elles ont mêmes focales et, le cas échéant, mêmes foyers. Nous admettrons que lorsque deux cyclides sont homofocales elles peuvent être définies par une même directrice et par deux déférentes qui sont, soit deux quadriques, soit deux coniques qui définissent un faisceau linéaire auquel appartient la directrice. La figure inverse de deux cyclides homofocales est une figure formée de deux cyclides homofocales.

140. Propriétés des cercles des générations normales et des sphères des générations exceptionnelles des cyclides (W_1) et (W_2). — Nous désignons par (W_1) les cyclides qui ont une seule génération par sphères inscrites dite exceptionnelle, et par (W_2) celles qui en ont deux.

Les sphères (Σ) de la génération exceptionnelle d'une cyclide (W_1), par exemple, sont orthogonales à un cercle directeur (C); les foyers I et J de ce cercle (C) sont les points doubles permanents de la cyclide (W_1).

Supposons d'abord que ces points soient réels et distincts. Une inversion (I), de pôle I, transforme la cyclide (W_1) en un cône réel (T) et les cyclides homofocales en des cônes homofocaux au cône (T). Les cercles des cônes homofocaux au cône (T) coupent sous le même angle les plans tangents à ce cône et sont les seuls qui jouissent de cette propriété. Les inverses de ces cercles sont les cercles des générations normales des cyclides homofocales à la cyclide (W_1); les inverses des plans tangents au cône (T) sont les sphères de la génération exceptionnelle de (W_1). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Un cercle d'une génération normale des cyclides homofocales à une cyclide (W_1) ou (W_2), admettant au moins une génération exceptionnelle, coupe sous un angle constant les sphères de la génération exceptionnelle de cette cyclide. Ils sont les seuls qui jouissent de cette propriété.

Supposons maintenant que les foyers du cercle directeur (C) soient imaginaires. Nous choisirons comme inversion (I) une inversion dont le pôle I est un point arbitrairement choisi sur le cercle directeur (C). Elle transforme la cyclide (W_1) donnée en une cyclide (W'_1) de révolution; nous appellerons $z'z$ l'axe de la cyclide de révolution (W'_1) : c'est la droite inverse du cercle (C).

Les focales des générations normales de la cyclide (W'_1) sont des biquadratiques sphériques décomposées en deux cercles (**91**) ayant l'un et l'autre $z'z$ pour axe.

Choisissons une génération normale; soient (F'_1) et (F'_2) les deux cercles qui constituent la focale; une génératrice de la déférente (H') de de la cyclide (W'_1) coupe le cercle (F'_1) en P et le cercle (F'_2) en Q. Le cercle dont les foyers sont P et Q est un cercle d'une famille normale de la génération choisie.

Soit (Σ') une sphère inverse de l'une quelconque des sphères (Σ); cette sphère (Σ') a son centre sur l'axe de révolution $z'z$ et est inscrite dans la cyclide (W'_1). Comme elle est inscrite dans la cyclide, les courbes tracées sur cette cyclide sont tangentes à cette sphère; en particulier, le cercle de foyers P et Q fait avec cette sphère un angle nul. Pour traduire ce résultat par une équation, nous appellerons ρ le rayon de la sphère inscrite (Σ'), et, les notations $\Sigma'(P)$, $\Sigma'(Q)$ représentant, comme il a été convenu (**120**), les puissances, par rapport à la sphère (Σ'), des points P et Q, nous écrirons

$$\Sigma'(P)\Sigma'(Q) = -\rho^2\overline{PQ}^2;$$

cette égalité exprime que le carré du cosinus de l'angle du cercle de foyers P et Q et de la sphère (Σ') est égal à 1, en utilisant une formule donnée au § **121**.

Nous obtiendrons une cyclide homofocale à la cyclide (W'_1) en choisissant une déférente quelconque qui passe par les deux cercles (F'_1) et (F'_2); une génératrice de cette déférente coupera en P'_1 et Q'_1 les cercles (F') et (F'_2), et le cercle de foyers P'_1 et Q'_1 sera un cercle de cette cyclide, homofocale à la cyclide (W'_1) donnée. L'angle θ de ce cercle et de la sphère (Σ') est donné par l'égalité (**121**)

$$\cos^2\theta = \frac{\Sigma'(P'_1).\Sigma'(Q'_1)}{-\rho^2.(P'_1Q'_1)^2}.$$

Or les puissances des points P et P'_1 du cercle (F'_1) dont l'axe est $z'z$, par rapport à une sphère (Σ') dont le centre est sur cet axe, sont égales; pour une raison analogue, les puissances $\Sigma'(Q)$, $\Sigma'(Q'_1)$ sont égales. Remplaçons, dans l'expression de $\cos^2\theta$, le numérateur par la quantité égale $\Sigma'(P).\Sigma'(Q)$, c'est-à-dire par $-\rho^2\overline{PQ}^2$; nous obtenons

$$\cos^2\theta = \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{P'_1Q'_1}^2}.$$

Cette quantité est indépendante de la sphère (Σ') choisie; nous pouvons

donc dire qu'un cercle appartenant à une famille normale d'une cyclide homofocale à la cyclide (W'_1) coupe toutes les sphères (Σ') sous le même angle.

Ce résultat se conserve par inversion; donc :

Un cercle d'une génération normale d'une cyclide homofocale à une cyclide (W_1) ou (W_2), admettant au moins une génération exceptionnelle, coupe sous un angle constant les sphères de cette génération.

C'est le résultat déjà énoncé plus haut; observons qu'il n'est pas suivi, cette fois, de l'affirmation, exacte d'ailleurs, que ces cercles sont les seuls qui jouissent de cette propriété. Cette certitude nous manque, parce qu'à une démonstration analytique, assez laborieuse à vrai dire, nous avons substitué une démonstration géométrique, élégante, mais sommaire.

141. Interprétation du résultat précédent. — Soit une cyclide (W_1) ou (W_2) admettant au moins une génération exceptionnelle par sphères (Σ) inscrites et une génération normale. A cette génération normale, correspondent une sphère directrice (O), une quadrique déférente (H), une focale (F), intersection de ces deux surfaces; la focale (F), puisqu'il s'agit de cyclides (W_1) ou (W_2), est décomposée en deux cercles, qui peuvent être eux-mêmes décomposés en droites : nous désignerons ces cercles par (F_1) et (F_2).

Nous choisirons la génération normale de manière que les équations de la sphère (O) et de la quadrique (H) soient réelles [génération correspondant à une racine réelle de $\varphi(\lambda) = 0$ (**79**)]; les cercles (F_1) et (F_2) sont alors soit des cercles réels, soit des cercles imaginaires conjugués. Nous supposerons, dans ce paragraphe, qu'ils sont imaginaires conjugués : leurs plans se coupent suivant une droite (Δ) réelle qui ne coupe pas la sphère directrice (O).

Nous supposerons qu'il existe des quadriques réglées dans le faisceau linéaire de quadriques dont les quadriques de base sont la directrice (O) et la déférente (H). Soient (C_1), (C_2), (C_3) trois cercles réels dont les axes sont des génératrices de l'une quelconque de ces quadriques; nous désignerons par (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3) les foyers de ces cercles. Les points P_1, P_2, P_3 sont trois points du cercle (F_1) et les points Q_1, Q_2, Q_3 sont trois points du cercle (F_2). Les cercles (C_1), (C_2), (C_3) sont orthogonaux à la sphère directrice (O).

Les cercles (C_1), (C_2), (C_3) sont trois cercles des générations normales des cyclides homofocales à la cyclide (W_1) ou (W_2) donnée. Soit (Σ) une sphère d'une génération exceptionnelle de cette cyclide, inscrite par conséquent dans la cyclide (W_1) ou (W_2). L'angle V_1 sous lequel les sphères (Σ) coupent le cercle (C_1) ne dépend pas de (Σ); il en est de même des angles V_2 et V_3 sous lesquels les cercles (C_2) et (C_3) coupent les sphères (Σ).

Les angles V_1, V_2 et V_3 ne sont pas quelconques. Proposons-nous de préciser leurs valeurs.

Soit (C) le cercle d'axe (Δ) orthogonal à la sphère directrice (O); ce cercle (C) est réel, puisque, par hypothèse, la droite (Δ) ne coupe pas la sphère (O); il forme avec les cercles (F_1) et (F_2) deux anneaux orthogonaux.

Soit I un point quelconque du cercle (C); nous appellerons p_1, p_2, p_3 les puissances réduites du point I par rapport aux cercles (C_1), (C_2), (C_3). Soit (I) une inversion de centre I et de puissance positive arbitraire k; nous représenterons par des lettres accentuées les figures inverses des figures représentées par des lettres sans accent.

L'inverse du cercle (C) est une droite (C') ou $z'z$; les inverses (F'_1) et (F'_2) des cercles (F_1) et (F_2) qui formaient avec le cercle (C) des anneaux orthogonaux forment encore avec la droite (C') des anneaux orthogonaux; cela veut dire que la droite (C') est l'axe des cercles (F'_1) et (F'_2). Les inverses (C'_1), (C'_2), (C'_3) des cercles (C_1), (C_2), (C_3) sont des cercles dont les foyers P'_1, P'_2, P'_3 sont sur (F'_1), et Q'_1, Q'_2, Q'_3 sont sur (F'_2); les diamètres de ces cercles sont donnés par la règle énoncée au **§ 126** : ils sont égaux à $\frac{k}{p_1}$, $\frac{k}{p_2}$, $\frac{k}{p_3}$.

Soit (Σ') une sphère inverse de l'une quelconque des sphères (Σ) de la génération exceptionnelle de la cyclide (W_1) ou (W_2) donnée; elle coupe les cercles (C'_1), (C'_2), (C'_3) respectivement sous les angles V_1, V_2, V_3. Le calcul de l'angle V_1 a été fait au paragraphe précédent : si l'on désigne par P et Q les foyers d'un cercle de la cyclide (W'_1), inverse de la cyclide donnée, foyers situés sur les cercles (F'_1) et (F'_2), la quantité $\cos^2 V_1$ a pour valeur

$$\cos^2 V_1 = \frac{(PQ)^2}{(P'_1Q'_1)^2}.$$

Il en résulte que l'on a

$$(P'_1Q'_1)^2 \cos^2 V_1 = (P'_2Q'_2)^2 \cos^2 V_2 = (P'_3Q'_3)^2 \cos^2 V_3.$$

La quantité $(P'_1Q'_1)^2$ est l'opposée du carré du diamètre du cercle (C'_1) : elle est donc égale à $-\frac{k^2}{(p_1)^2}$, et, par conséquent, les égalités précédentes entraînent

$$\frac{\cos V_1}{p_1} = \frac{\cos V_2}{p_2} = \frac{\cos V_3}{p_3}.$$

Pour énoncer ce résultat, nous observerons d'abord que, l'inverse du cercle (C) étant l'axe de la cyclide de révolution (W'_1) ou (W'_2), inverse de la cyclide (W_1) ou (W_2) donnée, ce cercle (C) est un cercle directeur de cette cyclide. Nous dirons donc :

Soit une cyclide (W_1) *ou* (W_2) *admettant au moins une génération exceptionnelle par sphères inscrites* (Σ), *orthogonales à un cercle directeur* (C) *réel. Soient* (C_1), (C_2), (C_3) *trois cercles réels dont les foyers sont sur une même focale de la cyclide* (et qui, par conséquent, sont des cercles d'une génération normale d'une cyclide homofocale, expression qui n'a pas la précision de la précédente).

1° *Les puissances réduites* p_1, p_2, p_3 *d'un point* I *quelconque du cercle directeur* (C) *par rapport aux cercles* (C_1), (C_2), (C_3) *demeurent proportionnelles à des nombres fixes lorsque* I *varie sur le cercle* (C);

2° *Les sphères* (Σ) *de la génération exceptionnelle coupent les cercles* (C_1), (C_2), (C_3) *sous des angles constants* V_1, V_2, V_3, *et l'on a* :

$$\frac{\cos V_1}{p_1} = \frac{\cos V_2}{p_2} = \frac{\cos V_3}{p_3}.$$

La propriété (1°) se démontre très simplement et l'étude élémentaire permet de préciser la valeur des nombres proportionnels à p_1, p_2, p_3.

La droite P_1P_2 coupe, en général, en A_3 la droite (Δ) et il passe une sphère (A_3), de centre A_3, par le cercle (C); cette sphère, orthogonale au cercle (F_1), est le lieu géométrique des points dont le rapport des distances aux points P_1 et P_2 est une constante k_1 dont le carré est égal au rapport $\frac{A_3P_1}{A_3P_2}$; nous aurons donc, quel que soit le point I choisi sur le cercle (C),

$$\frac{(IP_1)^4}{(IP_2)^4} = \frac{(A_3P_1)^2}{(A_3P_2)^2}.$$

Nous aurons de même, en appelant B_3 le point où la droite Q_1Q_2 coupe la droite (Δ),

$$\frac{(IQ_1)^4}{(IQ_2)^4} = \frac{(B_3Q_1)^2}{(B_3Q_2)^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{(IP_1 . IQ_1)^4}{(IP_2 . IQ_2)^4} = \frac{(A_3P_1 . B_3Q_1)^2}{(A_3P_2 . B_3Q_2)^2}.$$

Le rapport des puissances réduites $\frac{p_1}{p_2}$ du point I, par rapport aux cercles (C_1) et (C_2), de rayons R_1 et R_2, est défini par l'égalité

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_2}{R_1}\frac{IP_1 . IQ_1}{IP_2 . IQ_2}.$$

Il est clair que ce rapport est alors un nombre positif constant, dont la valeur peut être précisée.

142. Étude d'une figure formée par trois cercles réels orthogonaux à une même sphère (O). — Soient trois cercles réels (C_1), (C_2), (C_3), orthogonaux à une même sphère (O) d'équation réelle; les notations sont celles du paragraphe précédent. Les foyers P_1, P_2, P_3 des cercles (C_1), (C_2), (C_3) (on choisit arbitrairement, pour chaque cercle, un foyer) définissent un plan, qui coupe la sphère (O) suivant un cercle (F_1); les foyers Q_1, Q_2, Q_3 définissent de même un cercle (F_2); les plans des cercles (F_1) et (F_2) se coupent suivant une droite réelle (Δ). Soit (C) le cercle orthogonal à la sphère directrice (O) et d'axe (Δ); nous supposerons ce cercle réel.

Les sphères (Σ), orthogonales au cercle (C) et qui coupent le cercle (C_1) sous un angle donné V_1, forment une famille à un paramètre que nous allons étudier. Nous transformerons, en vue de cette étude, la figure par l'inversion (I) du paragraphe précédent. Les sphères (Σ'), inverses des sphères (Σ), peuvent être étudiées analytiquement; nous choisirons comme axe des z la droite (C'), inverse du cercle (C), comme centre des coordonnées le centre O' de la sphère (O'), inverse de la sphère (O), comme axes $O'x$, $O'y$ deux axes perpendiculaires entre eux et à l'axe $z'z$. Les équations des cercles (F'_1) et (F'_2), inverses des cercles (F_1) et (F_2), seront

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$
$$(z - a)(z - b) = 0.$$

R est un nombre réel ou imaginaire pur; a et b sont des nombres réels ou complexes conjugués. L'équation de la sphère (Σ') sera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z + \mu = 0.$$

Les foyers du cercle (C'_1), inverse du cercle (C_1), sont deux points, l'un du cercle (F'_1), l'autre du cercle (F'_2); la puissance du premier par rapport à la sphère (Σ') a pour valeur

$$R^2 - 2\lambda a + \mu.$$

Le carré du cosinus de l'angle V_1 que fait le cercle (C'_1), de rayon R'_1, avec la sphère (Σ'), est égal **(124)** au quotient du produit des puissances des foyers de ce cercle par rapport à la sphère (Σ'), par $4R'^2_1(\lambda^2 - \mu)$. Les paramètres λ et μ sont par conséquent liés par la relation

$$(1) \qquad (R^2 - 2\lambda a + \mu)(R^2 - 2\lambda b + \mu) = 4R'^2_1 \cos^2 V_1 (\lambda^2 - \mu).$$

L'égalité (1) définit l'angle V_1 de la sphère (Σ') avec un cercle (C'_1), de rayon R'_1, dont les foyers sont deux points *quelconques* des cercles (F'_1)

et (F'_2). Une égalité analogue définit donc l'angle V_2 de la sphère (Σ') avec le cercle (C'_2), de rayon R'_2, inverse du cercle (C_2), et une autre l'angle V_3 de cette sphère et de (C'_3), inverse de (C_3). Ces trois égalités entraînent

$$(R'_1)^2 \cos^2 V_1 = (R'_2)^2 \cos^2 V_2 = (R'_3)^2 \cos^2 V_3.$$

Les sphères (Σ') coupent donc, par hypothèse, le cercle (C'_1) sous l'angle constant V_1 et les cercles (C'_2) et (C'_3), par construction, sous les angles constants V_2 et V_3, mais non arbitraires.

La relation (1) entre λ et μ étant quadratique, les sphères (Σ') sont les sphères d'un faisceau quadratique; les sphères (Σ) sont donc aussi les sphères d'un faisceau quadratique, et par conséquent elles sont les sphères de la génération exceptionnelle d'une cyclide (W_1) ou (W_2) dont le cercle directeur est le cercle (C) et dont une focale est décomposée en deux cercles, qui sont (F_1) et (F_2); ces sphères coupent donc les cercles (C_2) et (C_3) sous des angles V_2 et V_3 constants et bien déterminés, mais non arbitraires.

Il existe quatre façons d'associer trois à trois les foyers (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3) des cercles (C_1), (C_2), (C_3) et, tout au moins dans le cas particulier où la sphère (O) est imaginaire, les quatre cercles (C) qui correspondent à ces quatre cas sont des cercles réels. Nous pouvons, en nous bornant à ce cas particulier, énoncer le résultat suivant :

Il existe en général quatre familles de sphères qui coupent trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) *donnés, orthogonaux à une même sphère imaginaire, sous des angles* V_1, V_2, V_3 *constants, l'un de ces angles étant arbitrairement choisi. Ces sphères sont les sphères d'une génération exceptionnelle d'une cyclide* (W_1) *ou* (W_2).

Il serait intéressant d'examiner s'il existe d'autres familles de sphères remplissant ces conditions ou d'étudier les familles de sphères qui coupent trois cercles donnés sous des angles donnés. Cette étude sort des limites que nous désirons nous imposer; notons donc simplement un dernier résultat :

Les sphères (Σ) orthogonales à un cercle (C) et qui coupent sous un angle donné un cercle (C_1) donné enveloppent une cyclide (W_1) ou (W_2).

Notons encore qu'une des focales des cyclides (W_1) ou (W_2), enveloppe des sphères (Σ), est connue dans chacun des deux cas précédents. Lorsque les sphères (Σ) coupent sous des angles constants les cercles (C_1), (C_2), (C_3), la focale se compose des deux cercles définis par les six foyers; la cyclide sera donc une (W_2) si ces cercles sont décomposés; les cercles (C_1), (C_2), (C_3) sont, dans ce cas, des cercles paratactiques deux à deux; mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante. Si les sphères (Σ) sont orthogonales à un cercle (C) et coupent sous un angle constant un cercle (C_1), de foyers P_1 et Q_1, la focale se compose des cercles passant par P_1 ou par Q_1 qui forment avec (C) un anneau orthogonal; dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que la cyclide soit une (W_2) est que les cercles (C) et (C_1) soient paratactiques.

143. Cyclides admettant au moins une génération exceptionnelle et passant par deux cercles réels donnés, (C_1) et (C_2). — *Nous nous bornerons au cas où les cercles réels donnés* (C_1) *et* (C_2) *n'ont aucun point commun.* Soient P_1, Q_1 et P_2, Q_2 leurs foyers. Les cercles (C_1) et (C_2) n'ayant, par hypothèse, aucun point commun, il existe une sphère (O) passant par P_1, P_2, Q_1, Q_2. Cette sphère est la sphère orthogonale aux cercles (C_1) et (C_2); elle n'est pas de rayon nul. Soit (H) une quadrique réglée passant par les droites réelles P_1Q_1 et P_2Q_2; soit (W) la cyclide dont la déférente est la quadrique (H) et la directrice la sphère (O). Cette cyclide (W) passe par les cercles (C_1) et (C_2). Nous allons montrer qu'il est possible de choisir (H) de manière que cette cyclide soit une (W_1) ou une (W_2), c'est-à-dire une cyclide ayant, au moins, une génération exceptionnelle de cercle directeur (C).

Supposons d'abord que les cercles donnés (C_1) *et* (C_2) *soient paratactiques.* Soient (Γ_1) la droite isotrope P_1P_2 et (Γ_2) la droite isotrope Q_1Q_2. Choisissons pour (H) une quadrique réelle passant par le quadrilatère $P_1P_2Q_1Q_2$. La quadrique (H), déférente de la cyclide (W), a, avec la sphère directrice (O), deux génératrices communes (Γ_1) et (Γ_2); elle la coupe donc suivant quatre génératrices isotropes, et la cyclide (W) est une cyclide (W_2). Cette cyclide réelle admet deux cercles directeurs formant un anneau orthogonal; l'un de ces deux cercles au moins est un cercle (C) réel.

Supposons ensuite que les cercles (C_1) *et* (C_2) *ne soient pas paratactiques.* Les droites (Γ_1) et (Γ_2) ne sont pas isotropes. Faisons passer par (Γ_1) un plan quelconque (Π_1); ce plan coupe la sphère (O) suivant un cercle (F_1), non décomposé, qui passe par P_1 et P_2. Choisissons pour quadrique déférente (H) la quadrique qui passe par P_1P_2, Q_1Q_2 et par le cercle (F_1); il y en a une et une seule. Elle coupe la sphère directrice (O) suivant deux cercles : l'un d'eux est (F_1), le second est un cercle (F_2) passant par Q_1, Q_2, dont le plan (Π_2) pivote autour de la droite Q_1Q_2. La cyclide (W), de déférente (H) et de directrice (O), est dans ce cas une (W_1), qui admet une génération exceptionnelle et par conséquent un cercle directeur (C), dont l'axe est d'ailleurs la droite d'intersection (Δ) des plans (Π_1) et (Π_2).

Lorsque les cercles (C_1) et (C_2) ne sont pas paratactiques, la quadrique (H), définie par deux génératrices réelles et un cercle dont le plan est imaginaire, n'est pas, en général, une quadrique réelle. Lorsqu'elle l'est, les plans (Π_1) et (Π_2) sont imaginaires conjugués et la droite (Δ) d'intersection de ces plans est une droite réelle. L'axe du cercle directeur (C) de la cyclide est alors réel et ce cercle est soit réel, soit imaginaire.

Sous les réserves qui précèdent, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Par deux cercles (C_1) et (C_2) qui n'ont aucun point commun, passent une infinité de cyclides (W_1) ou (W_2) ayant au moins une génération exceptionnelle à cercle directeur (C).

Lorsque les cercles (C_1) et (C_2) sont paratactiques, les cyclides sont des (W_2) ayant deux générations exceptionnelles.

144. Lieu des cercles directeurs (C), des cyclides (W_1) ou (W_2) qui passent par deux cercles donnés réels (C_1) et (C_2). — Observons d'abord que la construction de l'axe (Δ) du cercle (C), donnée dans le cas où les cercles (C_1) et (C_2) sont aparatactiques, s'étend sans modifications au cas où ils sont paratactiques. Cet axe est l'intersection de plans (Π_1) et (Π_2) qui se correspondent homographiquement; il engendre donc une quadrique (K) passant par les droites P_1P_2 et Q_1Q_2. Le cercle directeur (C), orthogonal à la sphère (O) et dont l'axe engendre une quadrique (K), est un cercle d'une génération normale d'une cyclide, en général. Donc :

Les cercles directeurs (C) des cyclides (W_1) ou (W_2) admettant une génération exceptionnelle au moins, qui passent par deux cercles réels donnés, (C_1) et (C_2), sans points communs, engendrent, en général, une cyclide que nous appellerons la directrice des cercles (C_1) et (C_2).

Nous préciserons ce résultat dans le cas où les cercles (C_1) et (C_2) sont paratactiques. Dans ce cas, la déférente (H) de l'une quelconque des cyclides (W_2) qui passent par (C_1) et (C_2) peut être supposée réelle, et l'axe (Δ) du cercle (C) engendre une quadrique réelle (K), qui passe par les droites P_1P_2 et Q_1Q_2, qui sont des génératrices isotropes de la sphère directrice (O). Cette quadrique (K) coupe par conséquent la directrice (O) suivant quatre génératrices isotropes : elle est donc la déférente d'une cyclide (W_2). La cyclide directrice des cercles (C_1) et (C_2) est donc une cyclide à deux générations exceptionnelles, dont la déférente est réelle. Elle sera de Dupin, puisque la sphère directrice (O) des cercles paratactiques réels (C_1) et (C_2) est imaginaire.

En outre, les deux cercles directeurs de l'une des cyclides (W_2), qui passent par les cercles (C_1) et (C_2), se trouvent sur la cyclide directrice de ces deux cercles. Les axes de ces cercles sont des droites conjuguées par rapport à la sphère directrice (O); la quadrique déférente (K) est par conséquent une quadrique (S) autopolaire par rapport à la sphère (O), avec conservation des génératrices d'un même système. Nous avons dénommé *cyclide axiale* **(105)** la cyclide qui correspond à une pareille déférente. Donc :

La cyclide directrice de deux cercles réels (C_1) et (C_2) paratactiques, c'est-à-dire la cyclide lieu des cercles directeurs des cyclides (W_2) qui passent par ces deux cercles, est une cyclide de Dupin axiale.

145. Lieu géométrique des points d'égale puissance réduite par rapport à deux cercles (étude géométrique). — Nous supposerons, dans ce paragraphe, que les cercles (C_1) et (C_2) réels donnés n'ont aucun point commun, et qu'il existe des cyclides (W_1) ou (W_2) passant par ces deux cercles, qui admettent un cercle directeur (C) réel.

Soit I un point de ce cercle directeur (C) réel. L'inversion (I), de pôle I et de puissance arbitraire positive k, transforme la cyclide (W), dont (C) est le cercle directeur et qui passe par (C_1) et (C_2), en une cyclide (W') de révolution. Les cercles (C_1') et (C_2'), inverses des cercles donnés (C_1) et (C_2) dans l'inversion (I), sont deux cercles d'une même famille normale de (W'), donc se déduisent l'un de l'autre par une rotation; ces cercles sont donc égaux et leurs rayons sont des nombres égaux. Or **(126)** le diamètre du cercle (C_1') est égal au quotient de la puissance d'inversion k par la puissance réduite du pôle I par rapport au cercle (C_1); les diamètres des cercles (C_1') et (C_2') étant égaux, les puissances réduites de I par rapport aux cercles (C_1) et (C_2) sont égales. Donc tout point d'un cercle réel de la cyclide directrice des cercles (C_1) et (C_2) a même puissance réduite par rapport à ces deux cercles.

Réciproquement, soit I un point réel qui, par hypothèse, a même puissance réduite par rapport aux deux cercles (C_1) et (C_2). L'inversion (I), de pôle I et de puissance k, transforme ces deux cercles en deux cercles égaux (C_1') et (C_2'); soit $z'z$ l'un des deux axes des rotations qui permettent de superposer les cercles égaux (C_1') et (C_2'). La cyclide (W'), obtenue en faisant tourner un de ces deux cercles autour de $z'z$, passe par (C_1') et (C_2') : elle est de révolution; l'inversion (I) transforme cette cyclide en une cyclide (W), passant par (C_1) et par (C_2), et admettant une génération exceptionnelle dont le cercle directeur (C), inverse de l'axe $z'z$, passe par le point I. Le point I est donc un point d'un cercle réel de la cyclide directrice des cercles (C_1) et (C_2).

Nous pouvons donc conclure, en gros, en disant que *la cyclide directrice de deux cercles réels* (C_1) *et* (C_2) *donnés, non sécants, est le lieu des points d'égale puissance réduite par rapport à ces deux cercles.* La démonstration est une démonstration géométrique; elle suppose qu'il

existe une cyclide directrice réelle, admettant des familles de cercles réels. Cela se produit toujours dans le cas de deux cercles paratactiques. Nous énoncerons donc :

Le lieu géométrique des points ayant même puissance réduite par rapport à deux cercles paratactiques est la cyclide de Dupin axiale, directrice de ces deux cercles.

146. Étude analytique. — Soient (C_1) et (C_2) deux cercles réels; soit M un point qui a même puissance réduite par rapport à ces deux cercles. Soient (I) une inversion réelle quelconque, (C_1'), (C_2') et M' les inverses des cercles (C_1) et (C_2) et du point M; le rapport des puissances réduites de M' par rapport aux cercles ou droites (C_1') et (C_2') est **(128)** égal au rapport des puissances réduites du point M par rapport aux cercles (C_1) et (C_2), donc égal à 1.

1° *Supposons d'abord que les cercles* (C_1) *et* (C_2) *aient deux points réels communs,* I *et* J. Choisissons I pour pôle de l'inversion (I). Les figures inverses (C_1') et (C_2') des cercles donnés sont des droites concourantes, et le lieu du point M', qui, ayant même puissance réduite par rapport à ces droites, est à la même distance de celles-ci, est un système de deux plans. Le lieu du point M se compose de deux sphères.

2° *Supposons ensuite que les cercles* (C_1) *et* (C_2) *aient un seul point commun réel* I, que nous choisirons comme pôle de l'inversion (I). Les figures inverses (C_1') et (C_2') des cercles (C_1) et (C_2) sont, dans ce cas, des droites non concourantes, et le lieu du point M' équidistant de ces deux droites est une quadrique : le lieu du point inverse M est donc une cyclide. Nous passons sur ces cas particuliers.

3° *Nous supposerons que les cercles* (C_1) *et* (C_2) *n'ont aucun point réel commun.* Dans ce cas, il existe au moins un cercle réel perpendiculaire commun à ces deux cercles. L'inversion dont le pôle I est un point de ce cercle transforme les cercles (C_1) et (C_2) en deux cercles (C_1') et (C_2') ayant un diamètre commun. Nous allons chercher analytiquement le lieu des points M' qui ont même puissance réduite par rapport aux cercles (C_1') et (C_2'). L'inverse de ce lieu dans l'inversion (I) sera le lieu cherché. Nous avons, dans la recherche analytique, supprimé les accents qui servent à indiquer que les cercles et les points sont des inverses de cercles ou points donnés.

Nous choisirons pour axe $z'z$ le diamètre commun aux cercles donnés (C_1) et (C_2); les axes de ces cercles sont perpendiculaires en A et B à l'axe $z'z$; nous choisirons l'origine O de manière que

$$\frac{\overline{OA}}{R^2}=\frac{\overline{OB}}{R'^2},$$

R étant le **rayon** du cercle (C_1) et R' celui du cercle (C_2); nous supposerons ces **rayons** différents. Les plans xOz et yOz sont, par hypothèse, rectangulaires et font avec les plans des cercles (C_1) et (C_2) des angles égaux. Ces conditions définissent, si $R' \neq R$, un système unique d'axes rectangulaires.

Dans ce système, les coordonnées des foyers P_1 et Q_1 du cercle (C_1) sont

$$iR\cos\theta, \qquad iR\sin\theta, \qquad \frac{R^2}{\rho},$$
$$-iR\cos\theta, \qquad -iR\sin\theta, \qquad \frac{R^2}{\rho},$$

θ étant un angle donné et ρ une longueur donnée.

Les coordonnées des foyers P_2 et Q_2 du cercle (C_2) sont

$$iR'\sin\theta, \qquad iR'\cos\theta, \qquad \frac{R'^2}{\rho},$$
$$-iR'\sin\theta, \qquad -iR'\cos\theta, \qquad \frac{R'^2}{\rho}.$$

La puissance réduite d'un point $M(x, y, z)$ par rapport au cercle (C_1) est $\dfrac{MP_1.MQ_1}{2R}$ **(125)**. L'équation du lieu (W) du point M est, par conséquent,

$$\frac{1}{R^2}\left[x^2 + y^2 - R^2 + \left(z - \frac{R^2}{\rho}\right)^2\right]^2 + 4(x\cos\theta + y\sin\theta)^2$$
$$= \frac{1}{R'^2}\left[x^2 + y^2 - R'^2 + \left(z - \frac{R'^2}{\rho}\right)^2\right]^2 + 4(x\sin\theta + y\cos\theta)^2,$$

c'est-à-dire

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2c''z + d = 0,$$

avec

$$a = 2R^2R'^2\left(\frac{2\cos 2\theta}{R'^2 - R^2} - \frac{1}{\rho^2}\right),$$
$$a' = -2R^2R'^2\left(\frac{2\cos 2\theta}{R'^2 - R^2} + \frac{1}{\rho^2}\right),$$
$$a'' = -\frac{6R^2R'^2}{\rho^2},$$
$$c'' = \frac{2R^2R'^2}{\rho^3}(R^2 + R'^2 - \rho^2),$$
$$d = -\frac{R^2R'^2}{\rho^4}[(R^2 + R'^2 - \rho^2)^2 - R^2R'^2].$$

Pour étudier cette cyclide (W), nous formerons l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ **(76)** :

$$(a + \lambda)(a' + \lambda)\left[4c''^2 + (\lambda^2 - 4d)(a'' + \lambda)\right] = 0.$$

Elle admet deux racines singulières λ_1 et λ_2, en évidence :

$$\lambda_1 = -a = 2R^2R'^2\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{2\cos 2\theta}{R'^2 - R^2}\right),$$
$$\lambda_2 = -a' = 2R^2R'^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2\cos 2\theta}{R'^2 - R^2}\right),$$

plus trois autres racines. L'équation

$$4c''^2 + (\lambda^2 - 4d)(a'' + \lambda) = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{4R^2R'^2}{\rho^4}(R^2 + R'^2 - \rho^2)^2\left(\lambda - \frac{2R^2R'^2}{\rho^2}\right) + \left(\lambda^2 - \frac{4R^4R'^4}{\rho^4}\right)\left(\lambda - \frac{6R^2R'^2}{\rho^2}\right) = 0.$$

Elle admet la racine réelle λ_3,

$$\lambda_3 = \frac{2R^2R'^2}{\rho^2},$$

et les deux racines λ_4 et λ_5 de l'équation du second degré $u(\lambda) = 0$:

$$u(\lambda) \equiv \frac{4R^2R'^2}{\rho^4}(R^2 + R'^2 - \rho^2)^2 + \left(\lambda + \frac{2R^2R'^2}{\rho^2}\right)\left(\lambda - \frac{6R^2R'^2}{\rho^2}\right).$$

Pour reconnaître si les racines λ_1, λ_2, λ_3 sont simples ou multiples, nous formerons les quantités suivantes :

$$\lambda_3 - \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{4R^2R'^2\cos 2\theta}{R'^2 - R^2},$$
$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{8R^2R'^2\cos 2\theta}{R'^2 - R^2},$$
$$u(\lambda_1) = u(\lambda_2) = \frac{4R^2R'^2}{\rho^4}(R + R' - \rho)(R + R' + \rho)(R - R' - \rho)(R - R' + \rho) + \frac{16R^4R'^4}{(R'^2 - R^2)^2}\cos^2 2\theta,$$
$$u(\lambda_3) = \frac{4R^2R'^2}{\rho^4}(R + R' - \rho)(R + R' + \rho)(R - R' - \rho)(R - R' + \rho).$$

Écartons d'abord de cette étude le cas simple où $\cos 2\theta = 0$: c'est celui où les deux cercles donnés (C_1) et (C_2) sont dans un même plan; dans ce cas, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. La cyclide (W) est alors de révolution autour de Oz; l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ a en outre une racine singulière triple; elle est par conséquent **(58)** décomposée en deux sphères. On peut aisément trouver les équations de celles-ci.

Nous supposerons désormais : $\cos 2\theta \neq 0$. Observons que $u(\lambda_3)$ est différent de zéro, car, par hypothèse, les cercles (C_1) et (C_2) n'ont aucun point réel commun; il en résulte que λ_3 est distinct de λ_4 et de λ_5 et, comme $\cos 2\theta$ n'est pas nul, de λ_1 et de λ_2. La racine λ_3 de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ est donc une racine non singulière et simple de cette équation : il lui correspond une génération normale dont la déférente (K) est un hyperboloïde à une nappe, qui **(79)** a pour équation

$$(x^2 - y^2)(R'^2 - R^2) + \cos 2\theta (R^2R'^2 - \rho^2 z^2) = 0.$$

La directrice de cette génération normale est la sphère (O), dont le rayon n'est pas nul, d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z}{\rho}(R^2 + R'^2 - \rho^2) + \frac{R^2R'^2}{\rho^2} = 0.$$

Cette sphère passe par les foyers (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) des cercles (C_1) et (C_2) : c'est donc la sphère orthogonale à ces deux cercles. La génération normale qui correspond à la racine λ_3 est la génération découverte par le raisonnement géométrique; la solution analytique précise et complète ce raisonnement, en affirmant que la déférente (K) est une quadrique réelle dans tous les cas.

Il reste à examiner la condition $u(\lambda_1) = u(\lambda_2) = 0$. Cherchons pour cela la condition de parataxie des cercles (C_1) et (C_2) : cette condition s'exprime en écrivant

$$P_1P_2 . P_1Q_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{(R'^2 - R^2)^2}{\rho^2} - R^2 - R'^2\right]^2 - 4R^2R'^2 \sin^2 2\theta = 0,$$

ou encore, en remplaçant $\sin^2 2\theta$ par $1 - \cos^2 2\theta$ et en effectuant quelques transformations,

$$\frac{(R'^2 - R^2)^2}{\rho^4}(R + R' - \rho)(R + R' + \rho)(R - R' - \rho)(R - R' + \rho) + 4R^2R'^2\cos^2 2\theta = 0.$$

Autrement dit, la condition de parataxie est

$$u(\lambda_1) = u(\lambda_2) = 0.$$

Supposons d'abord que les cercles (C_1) *et* (C_2) *soient aparatactiques.* L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ a deux racines singulières seulement en général, (trois, si $\rho^2 = R^2 + R'^2$), dont aucune n'est double; donc **(77)** la cyclide (W) n'a aucune génération exceptionnelle; on vérifiera sans peine que les racines λ_4 et λ_5 de l'équation $u(\lambda) = 0$ sont distinctes et par conséquent, puisque les cinq racines de $\varphi(\lambda)$ sont simples, la cyclide (W) n'a aucun point multiple **(81)**.

Donc :

Le lieu géométrique des points dont les puissances réduites par rapport à deux cercles (C_1) et (C_2) aparatactiques, sans points communs, sont égales est une cyclide admettant cinq générations normales, sans points multiples, par conséquent.

Supposons maintenant que les cercles (C_1) *et* (C_2) *soient paratactiques* : $u(\lambda_1) = u(\lambda_2) = 0$. Les deux racines λ_1 et λ_2 de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ sont doubles; la cyclide (W) a, par conséquent, deux générations exceptionnelles; la sphère directrice (O) de la génération normale, orthogonale à ces deux cercles, est imaginaire; la cyclide (W) est donc une cyclide de Dupin. Les coefficients a, a', a'' vérifient la relation

$$3(a + a') = 2a'';$$

donc **(116)** cette cyclide est axiale.

Le lieu géométrique des points dont les puissances réduites par rapport à deux cercles paratactiques (C_1) et (C_2) sont égales est une cyclide de Dupin axiale.

147. Compléments géométriques à l'étude précédente. — L'étude analytique, à partir de données réelles, fournit des résultats d'une remarquable précision; elle permet d'affirmer, en particulier, la réalité, tout au moins sous certaines réserves, du lieu trouvé. Cette étude est malheureusement assez laborieuse; il est nécessaire qu'une recherche géométrique l'éclaire et la guide. Nous allons compléter l'étude analytique précédente par quelques compléments géométriques; nous ne supposerons plus, pour le faire, les éléments du problème réels; mais, pour simplifier l'exposé, nous rédigerons ce paragraphe comme s'ils l'étaient. Nous laissons donc au lecteur le soin de le traduire en langage analytique pour lui donner son véritable sens.

I. Soient (C_1) et (C_2) deux cercles aparatactiques, de foyers (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) (nous ne précisons plus si ces points sont réels ou imaginaires). Nous allons étudier les propriétés de certaines figures attachées à ces deux cercles.

Tout d'abord, une sphère (S_1) passant par le cercle (C_1) est le lieu géométrique des points M tels que

$$\frac{MP_1}{MQ_1} = k_1.$$

Le centre O_1 de la sphère S_1, est le point de P_1Q_1 défini par

$$\frac{\overline{O_1P_1}}{\overline{O_1Q_1}} = k_1^2;$$

cette égalité n'a de sens que si on la traduit analytiquement.

Soient (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) quatre sphères passant par le cercle (C_1); elles sont caractérisées par les données des quatre nombres k_1, k_2, k_3, k_4. Proposons-nous de chercher la condition pour que (S_3) et (S_4) soient bissectrices (**129**) des sphères (S_1) et (S_2); il faut, pour cela,

1° qu'elles soient orthogonales, c'est-à-dire que leurs centres O_3 et O_4 soient conjugués harmoniques par rapport aux foyers P_1 et Q_1 :

$$k_3^2 + k_4^2 = 0;$$

2° que leurs centres O_3 et O_4 soient conjugués harmoniques des centres O_1 et O_2 des deux premiers :

$$k_1^2 k_2^2 = k_3^4.$$

Les sphères bissectrices des sphères (S_1) et (S_2) sont donc celles pour lesquelles

$$k_3^2 = k_1 k_2,$$

le signe à mettre devant k_1k_2 étant soit $+$, soit $-$.

Cherchons maintenant les sphères principales (**134**) qui passent par le cercle (C_1). Pour cela, cherchons d'abord les sphères (S_1) et (S_2) qui passent par les foyers P_2 et Q_2 du cercle (C_2) : elles sont caractérisées par

$$k_1 = \frac{P_2P_1}{P_2Q_1}, \qquad k_2 = \frac{Q_2P_1}{Q_2Q_1}.$$

Les sphères principales bissectrices de celles-ci sont donc caractérisées par le nombre k_3, tel que

$$k_3^2 = \frac{P_2P_1}{P_2Q_1} \cdot \frac{Q_2P_1}{Q_2Q_1}.$$

Nous énoncerons ce résultat en disant :

Les sphères passant par le cercle (C_1), *de foyers* P_1 *et* Q_1, *principales par rapport au cercle* (C_2), *de foyers* P_2 *et* Q_2, *sont les lieux des points* M *tels que*

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{MQ}^2} = \frac{P_2P_1 \cdot Q_2P_1}{P_2Q_1 \cdot Q_2Q_1}.$$

Nous avons signalé (**134**) que les cercles perpendiculaires à deux cercles aparatactiques donnés sont les cercles communs à deux sphères principales associées; on aura donc, si M est un point de ces cercles, à la fois

$$\frac{\overline{MP}_1^2}{\overline{MQ}_1^2} = \frac{P_2P_1 \cdot Q_2P_1}{P_2Q_1 \cdot Q_2Q_1}$$

et

$$\frac{\overline{MP}_2^2}{\overline{MQ}_2^2} = \frac{P_2P_1 \cdot Q_1P_2}{P_1Q_2 \cdot Q_2Q_1}.$$

Ces égalités entraînent

$$\frac{\overline{MP}_1^2 \cdot \overline{MP}_2^2}{\overline{MQ}_1^2 \cdot \overline{MQ}_2^2} = \frac{(P_2P_1)^2}{(Q_2Q_1)^2},$$

ce qui s'écrit, moyennant des conventions convenables de signes,

$$\frac{MP_1 \cdot MP_2}{P_2P_1} = \frac{MQ_1 \cdot MQ_2}{Q_2Q_1}.$$

Nous traduirons cette égalité en disant (pour plus de commodité, les cercles sont désignés par leurs foyers) :

Les puissances réduites d'un point M *d'un cercle perpendiculaire à deux cercles aparatactiques* (P_1, Q_1) *et* (P_2, Q_2), *par rapport aux deux cercles* (P_1, P_2) *et* (Q_1, Q_2), *sont égales.*

II. La cyclide (W) du § **146** est le lieu des points M tels que l'on ait

$$\frac{MP_1 \cdot MQ_1}{P_1Q_1} = \frac{MP_2 \cdot MQ_2}{P_2Q_2}.$$

Constatons d'abord que l'égalité précédente est vérifiée pour

$$MP_1 = MP_2 = 0, \qquad MP_1 = MQ_2 = 0,$$
$$MQ_1 = MP_2 = 0, \qquad MQ_1 = MQ_2 = 0.$$

Cela veut dire que les quatre cercles (P_1, P_2), (P_1, Q_2), (Q_1, P_2) et (Q_1, Q_2) font partie du lieu.

Supposons d'abord que les cercles donnés (C_1) *ou* (P_1, Q_1) *et* (C_2) *ou* (P_2, Q_2) *sont des cercles réels aparatactiques* sans points communs. Nous savons, d'après l'étude analytique (**146**), que la cyclide (W) admet une génération normale dont la sphère directrice (O) est circonscrite au quadrilatère $P_1P_2Q_1Q_2$ et à laquelle correspond une déférente réelle et réglée (K). L'étude géométrique (**144**) nous apprend que (K) passe par les droites P_1P_2 et Q_1Q_2; les cercles (P_1, P_2), (P_1, Q_2), (Q_1, P_2) et (Q_1, Q_2) sont des cercles de la cyclide (W), orthogonaux à la sphère directrice (O) : ils sont donc des cercles de la génération normale correspondante. Nous en concluons que la quadrique (K) passe, non seulement par les droites P_1P_2 et Q_1Q_2, mais aussi par les droites P_1Q_2 et P_2Q_1.

Utilisons maintenant le résultat établi au I (les notations ont changé). Les cercles perpendiculaires aux cercles (P_1, P_2) et (Q_1, Q_2) sont sur le lieu géométrique des points ayant même puissance réduite par rapport aux cercles (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2); ils sont orthogonaux à la sphère (O) et appartiennent par conséquent à la génération normale correspondante de la cyclide (W). Appelons (Δ) et (Δ') les axes de ces cercles. La déférente (K) de la cyclide (W) est maintenant déterminée; la déférente (K) est l'hyperboloïde passant par les côtés P_1P_2, P_2Q_1,

Q_1Q_2 et Q_2P_1 du quadrilatère dont les sommets sont les foyers et par une des droites (Δ) ou (Δ').

La cyclide (W), lieu géométrique des points ayant même puissance réduite par rapport aux deux cercles aparatactiques réels (C_1) ou (P_1, Q_1) et (C_2) ou (P_2, Q_2) peut être définie :

1° par la sphère directrice (O) passant par P_1, Q_1, P_2, Q_2, orthogonale aux cercles (C_1) et (C_2);

2° par la déférente (K), hyperboloïde passant par les côtés P_1P_2, P_2Q_1, Q_1Q_2, Q_2P_1 du quadrilatère dont les sommets sont les foyers P_1, Q_1, P_2, Q_2 et par l'axe d'un cercle perpendiculaire aux cercles (P_1,P_2) et (Q_1, Q_2).

Ce résultat précis peut être traduit avec le langage utilisé au chapitre VI. Un cercle de la génération normale de la cyclide (W), définie par la sphère directrice (O) et par la déférente (K), a pour axe une génératrice de cette déférente; supposons que cette génératrice coupe P_1P_2 en M et Q_1Q_2 en M'; les points M et M' se correspondent homographiquement de manière qu'à P_1 corresponde Q_2 et à P_2 corresponde Q_1. Les cercles de la génération sont donc des cercles (Π) de la congruence définie par les deux cercles imaginaires $C'_1(P_1, P_2)$ et $C'_2(Q_1, Q_2)$; comme cette famille de cercles (Π) est définie par l'un des cercles perpendiculaires à (C'_1) et à (C'_2), elle est celle qui a été étudiée au § **37**; ces cercles coupent donc les cercles (C'_1) et (C'_2) sous des angles égaux.

La cyclide (W), *lieu géométrique des points ayant même puissance réduite par rapport à deux cercles aparatactiques* (P_1, Q_1) *et* (P_2, Q_2), *est aussi le lieu des cercles qui coupent sous le même angle les cercles* (P_1, P_2) *et* (Q_1, Q_2).

Supposons maintenant que les cercles donnés (C_1) *et* (C_2) *sont paratactiques.* Les cercles (P_1, P_2), (P_1, Q_2), (P_2, Q_1), (Q_1, Q_2) sont toujours sur la cyclide (W); la déférente (K) passe donc encore par les côtés du quadrilatère $P_1P_2Q_1Q_2$: elle est définie par la propriété qu'elle possède d'être autopolaire par rapport à la sphère directrice (O).

La cyclide (W), lieu géométrique des points ayant même puissance par rapport à deux cercles paratactiques (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2), peut être définie :

1° par la sphère directrice (O) passant par P_1, Q_1, P_2, Q_2;

2° par la quadrique (H) passant par les côtés du quadrilatère $P_1Q_1P_2Q_2$ et autopolaire par rapport à la sphère (O).

Cette cyclide est une cyclide de Dupin.

148. Généralisation. — Lieu géométrique des points dont le rapport des puissances réduites par rapport à deux cercles réels est constant. — Nous nous bornerons à une étude très sommaire. Ce lieu étant défini par

$$MP_1.MQ_1 = k.MP_2.MQ_2,$$

k étant une constante, les points des cercles (P_1, P_2), (P_1, Q_2), (P_2, Q_1), (Q_2, Q_1) sont des points du lieu. Celui-ci est une cyclide (W) (le calcul en fait foi) qui admet une génération normale dont la sphère directrice est la sphère (O), circonscrite au quadrilatère $P_1P_2Q_1Q_2$. Ce fait, dans l'étude analytique, permettra de trouver la racine correspondante de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$. La déférente de la génération normale passe encore par les côtés du quadrilatère $P_1P_2Q_1Q_2$. Il en résulte que, lorsque les cercles donnés sont paratactiques, la déférente (H) a avec la sphère (O) deux génératrices P_1P_2 et Q_1Q_2 communes et que par conséquent la cyclide (W) est une (W_2). On vérifiera que c'est une cyclide de Dupin.

NOTE I

GÉNÉRATION DES SURFACES CYCLIDES

1. Cas général. — Nous allons reprendre, dans l'exposé de cette note, les détails des calculs qui nous ont permis d'énoncer les résultats des § **55, 56, 57, 58.**

L'équation de la cyclide à étudier est

$$(1)\qquad (x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la sphère (Σ) d'équation

$$(2)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + h = 0$$

soit ou bitangente à la cyclide ou inscrite est que dans le faisceau linéaire de quadriques

$$(3)\qquad \begin{aligned}&(2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z - h)^2 + (a + \lambda)x^2 + (a' + \lambda)y^2 + (a'' + \lambda)z^2\\ &\quad + 2(c - \alpha\lambda)x + 2(c' - \beta\lambda)y + 2(c'' - \gamma\lambda)z + d + \lambda h = 0\end{aligned}$$

on trouve deux plans distincts ou confondus. Nous chercherons donc les points multiples des quadriques (3) en posant

$$2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z - h = u.$$

Le système à résoudre et à discuter est (**53**) :

$$(4)\qquad \begin{cases} 2\alpha u + (a + \lambda)x + c - \alpha\lambda = 0,\\ 2\beta u + (a' + \lambda)y + c' - \beta\lambda = 0,\\ 2\gamma u + (a'' + \lambda)z + c'' - \gamma\lambda = 0,\\ 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z - h - u = 0,\\ 2cx + 2c'y + 2c''z - \lambda u - 2hu + \lambda h + 2d = 0.\end{cases}$$

Nous supposerons, dans ce paragraphe, que l'inconnue λ n'est égale à aucun des nombres $-a$, $-a'$, $-a''$.

Des trois premières équations du système (4), nous tirons les valeurs suivantes de x, y, z :

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha\lambda - c - 2\alpha u}{a + \lambda},\\[2mm] y = \dfrac{\beta\lambda - c' - 2\beta u}{a' + \lambda},\\[2mm] z = \dfrac{\gamma\lambda - c'' - 2\gamma u}{a'' + \lambda}.\end{cases}$$

Nous portons ces valeurs de x, y, z dans les deux dernières équations, qui deviennent

$$(6)\qquad \begin{cases} A + Bu = 0,\\ A' + B'u = 0,\end{cases}$$

en posant

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{2\alpha(c - \lambda\alpha)}{a + \lambda} + \frac{2\beta(c' - \lambda\beta)}{a' + \lambda} + \frac{2\gamma(c'' - \lambda\gamma)}{a'' + \lambda} + h,\\ B &\equiv \frac{4\alpha^2}{a + \lambda} + \frac{4\beta^2}{a' + \lambda} + \frac{4\gamma^2}{a'' + \lambda} + 1,\\ A' &\equiv \frac{2c(c - \lambda\alpha)}{a + \lambda} + \frac{2c'(c' - \lambda\beta)}{a' + \lambda} + \frac{2c''(c'' - \lambda\gamma)}{a'' + \lambda} - \lambda h - 2d,\\ B' &\equiv \frac{4c\alpha}{a + \lambda} + \frac{4c'\beta}{a' + \lambda} + \frac{4c''\gamma}{a'' + \lambda} + \lambda + 2h.\end{aligned}$$

Supposons d'abord que λ ne soit pas une solution commune aux deux équations

$$B = 0, \qquad B' = 0.$$

Pour que le système (4) ait des solutions, il faut alors que les deux équations (6), du premier degré en u, aient une solution commune, c'est-à-dire que λ soit une solution de l'équation

$$AB' - BA' = 0.$$

λ et u sont alors déterminés et le système de solutions qui correspond à ces valeurs, x, y, z, est unique. La quadrique (3) admet un seul point double, et la sphère (Σ), tangente à la cyclide, n'est ni bitangente à celle-ci, ni inscrite. Cette solution est à écarter.

Supposons alors que λ soit une solution commune aux deux équations

$$B = 0, \qquad B' = 0.$$

Pour que le système (4) ait des solutions, il faut en outre que les deux équations (6) soient vérifiées, c'est-à-dire que λ soit aussi une solution commune aux deux nouvelles équations

$$A = 0, \qquad A' = 0.$$

S'il existe donc une valeur de λ, solution commune aux quatre équations

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad B = 0, \quad B' = 0,$$

λ étant déterminé et u arbitraire, la quadrique (3) admet une ligne de points doubles, déterminée par les équations (5), et la sphère (Σ) est bitangente à la cyclide.

Ce système d'équations est équivalent au suivant :

$$B = 0, \qquad B' = 0, \qquad 2A' + \lambda B' = 0, \qquad 2A + \lambda B - B' = 0.$$

La dernière de ces équations est vérifiée quel que soit λ; les trois autres forment un système remarquable, que nous transcrivons ci-dessous :

$$(7)\qquad \frac{4c^2}{a + \lambda} + \frac{4c'^2}{a' + \lambda} + \frac{4c''^2}{a'' + \lambda} + \lambda^2 - 4d = 0,$$

$$(8)\qquad \frac{4\alpha^2}{a + \lambda} + \frac{4\beta^2}{a' + \lambda} + \frac{4\gamma^2}{a'' + \lambda} + 1 = 0,$$

$$(9)\qquad \frac{4c\alpha}{a + \lambda} + \frac{4c'\beta}{a' + \lambda} + \frac{4c''\gamma}{a'' + \lambda} + \lambda + 2h = 0.$$

L'équation (7) donne, en fonction de a, a', a'', c, c', c'', d, coefficients de l'équation de la cyclide, les valeurs de l'inconnue λ. La valeur de λ, réelle ou imaginaire, solution de l'équation (7), étant choisie, l'équation (8) exprime que le centre de la sphère (Σ) doit se trouver sur une quadrique à centre, d'équation

$$\frac{4x^2}{a+\lambda}+\frac{4y^2}{a'+\lambda}+\frac{4z^2}{a''+\lambda}+1=0,$$

que nous appellerons la **déférente** relative au mode de génération qui correspond à la racine λ. L'équation (9) exprime que la sphère (Σ) est orthogonale à la sphère fixe

$$x^2+y^2+z^2+2\frac{cx}{a+\lambda}+2\frac{c'y}{a'+\lambda}+2\frac{c''z}{a''+\lambda}+\frac{\lambda}{2}=0,$$

que nous appellerons la **directrice** relative à ce mode de génération.

A chacune des racines de l'équation (7), correspond donc un mode de génération de la cyclide comme *enveloppe de sphères à deux paramètres dont le centre décrit une quadrique déférente et qui restent orthogonales à une sphère directrice fixe* (Cf. **56**).

Nous aurons à examiner quel est le nombre de ces générations, si les déférentes sont des quadriques réelles et si ces quadriques sont réglées. Cette étude sera faite ultérieurement.

2. Résolution dans le cas singulier ($\lambda = -a$). — Dans ce paragraphe, nous supposerons le nombre a distinct des nombres a' et a''; nous nous proposons d'examiner s'il est possible de résoudre le système des équations (4) en donnant à l'inconnue λ la valeur particulière $-a$.

La première équation du système (4) est alors

$$2\alpha u + c - \alpha\lambda = 0.$$

Si α est différent de zéro, u est défini par cette équation, y par la seconde, z par la troisième et x par la quatrième. Si le système (4) a des solutions, ces solutions correspondent au cas où, les valeurs de x, y, z étant uniques, la quadrique d'équation (3) admet un seul point double; la sphère (Σ) n'est donc, dans ce cas, ni bitangente à la cyclide, ni inscrite dans celle-ci.

Nous supposerons donc $\alpha = 0$. La première équation du système (4) devient

$$c = 0.$$

Les deux suivantes nous donnent les valeurs de y et de z:

$$(10)\qquad y=\frac{\beta\lambda-c'-2\beta u}{a'+\lambda},\qquad z=\frac{\gamma\lambda-c''-2\gamma u}{a''+\lambda}.$$

Nous portons ces valeurs de y et de z dans les deux dernières équations, qui deviennent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} A+Bu&=0,\\ A'+B'u&=0,\end{aligned}\right.$$

en posant, cette fois,

$$\begin{aligned}
A&=\frac{2\beta(c'-\lambda\beta)}{a'+\lambda}+\frac{2\gamma(c''-\lambda\gamma)}{a''+\lambda}+h,\\
B&=\frac{4\beta^2}{a'+\lambda}+\frac{4\gamma^2}{a''+\lambda}+1,\\
A'&=\frac{2c'(c'-\lambda\beta)}{a'+\lambda}+\frac{2c''(c''-\lambda\gamma)}{a''+\lambda}-\lambda h-2d,\\
B'&=\frac{4c'\beta}{a'+\lambda}+\frac{4c''\gamma}{a''+\lambda}+\lambda+2h.
\end{aligned}$$

λ ayant, par hypothèse, la valeur fixe $-a$.

1° Supposons d'abord que $-a$ ne soit pas une racine commune aux deux équations

$$B=0,\qquad B'=0.$$

Pour que le système (4) ait des solutions, il faut alors que les deux valeurs de u, solutions des équations (11), soit égales; il faut, pour cela, que $-a$ soit une racine de l'équation

$$AB'-BA'=0.$$

Lorsqu'il en est ainsi, u est déterminé et la quadrique (3) admet une ligne de points doubles, définie par les équations (10), puisque x demeure arbitraire. Les sphères (Σ) correspondantes sont bitangentes à la cyclide.

Ainsi donc, lorsque $c = 0$, et dans ce cas seulement, les sphères (Σ) dont les coefficients α, β, γ, h sont liés par les deux relations

$$\alpha=0,\qquad AB'-BA'=0\qquad(\lambda=-a)$$

forment *une famille de sphères à deux paramètres bitangentes à la cyclide*. Leurs centres sont dans un plan fixe. Nous compléterons par une étude plus précise les propriétés de cette famille de sphères (**5**).

2° Supposons ensuite que $-a$ soit une racine commune aux deux équations

$$B=0,\qquad B'=0.$$

Pour que le système (4) ait des solutions, il faut alors que $-a$ soit aussi une racine commune aux deux équations (11),

$$A=0,\qquad A'=0.$$

Lorsqu'il en est ainsi, la valeur de u étant arbitraire, les équations (10) définissent un plan de points doubles, et la sphère (Σ) est inscrite dans la cyclide.

Le système d'équations

$$A=0,\qquad A'=0,\qquad B=0,\qquad B'=0$$

est équivalent au système suivant :

$$B=0,\qquad B'=0,\qquad 2A'+\lambda B'=0,\qquad 2A+\lambda B-B'=0.$$

La dernière de ces équations étant vérifiée quel que soit λ, restent les trois équations que nous allons écrire. Elles se déduisent des équations (7), (8) et (9), en faisant $c = 0$ et en remplaçant ensuite λ par $-a$. Pour ne pas masquer cette similitude d'aspect, nous transcrirons ces équations sans remplacer λ par $-a$:

$$(12)\qquad \frac{4c'^2}{a'+\lambda}+\frac{4c''^2}{a''+\lambda}+\lambda^2-4d=0,$$

$$(13)\qquad \frac{4\beta^2}{a'+\lambda}+\frac{4\gamma^2}{a''+\lambda}+1=0,$$

$$(14)\qquad \frac{4c'\beta}{a'+\lambda}+\frac{4c''\gamma}{a''+\lambda}+\lambda+2h=0.$$

L'égalité (12),

$$\frac{4c'^2}{a'-a}+\frac{4c''^2}{a''-a}+a^2-4d=0,$$

est une condition imposée aux coefficients de la cyclide. Lorsque cette condition et la condition $c = 0$ sont vérifiées toutes les deux, et dans ce cas seulement, les sphères (Σ) dont les coefficients α, β, γ, h sont liés par les deux relations (13) et (14), λ étant remplacé par $-a$, forment *une famille de sphères à un paramètre, inscrites dans la cyclide.*

Le centre de ces sphères décrit la conique dont les équations sont

$$x = 0, \qquad \frac{4y^2}{a'-a} + \frac{4z^2}{a''-a} + 1 = 0$$

(conditions $\alpha = 0$ et 13), qui est, par définition, la **déférente** du mode de génération correspondant.

Ces sphères sont orthogonales à une infinité de sphères fixes, d'équations

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\mu x + \frac{2c'y}{a'-a} + \frac{2c''z}{a''-a} - \frac{a}{2} = 0$$

(condition 14). Une quelconque de ces sphères, obtenue en donnant au paramètre μ une valeur quelconque, est, par définition, **la sphère directrice** de la génération. L'intersection de la sphère directrice et du plan de la déférente est un cercle, dont les équations sont indépendantes de μ : nous l'appellerons **cercle directeur** de la génération. Les sphères (Σ) sont orthogonales à ce cercle directeur.

3. Conclusion. — Il est commode, pour interpréter les résultats établis dans les paragraphes précédents **1** et **2**, d'écrire l'équation (7),

$$\frac{4c^2}{a+\lambda} + \frac{4c'^2}{a'+\lambda} + \frac{4c''^2}{a''+\lambda} + \lambda^2 - 4d = 0,$$

sous la forme

$$\varphi(\lambda) = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) \equiv\; & 4c^2(a'+\lambda)(a''+\lambda) + 4c'^2(a''+\lambda)(a+\lambda) + 4c''^2(a'+\lambda)(a+\lambda) \\ & + (\lambda^2 - 4d)(a+\lambda)(a'+\lambda)(a''+\lambda).\end{aligned}$$

L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ n'admettant pas, en général, les racines $-a$, $-a'$, $-a''$, nous conviendrons, lorsqu'elle les admet, de dire que ces racines sont des racines *singulières* de cette équation.

Toute racine de l'équation (7) est une racine non singulière de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$, et toute racine non singulière de $\varphi(\lambda) = 0$ est une racine de l'équation (7). Nous indiquons par le tableau ci-contre dans quels cas l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ admet la racine singulière $-a$:

Le résultat établi au § **1** peut s'énoncer en disant :

A chacune des racines non singulières de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ correspond un mode de génération de la cyclide comme enveloppe de sphères à deux paramètres (cf. 56).

et les résultats établis au § **2** peuvent s'énoncer en disant :

Lorsque $(a'-a)(a''-a)$ est différent de zéro, à la racine singulière $-a$ correspond un mode de génération comme enveloppe de sphères à deux paramètres si la racine singulière est simple, et comme enveloppe de sphères à un paramètre si la racine singulière est multiple (cf. 56 et 57).

$(a''-a)(a'-a) \neq 0$	$c \neq 0$		$-a$ n'est pas racine
	$c = 0$	$\frac{4c'^2}{a'-a} + \frac{4c''^2}{a''-a} + a^2 - 4d \neq 0$	$-a$ est racine simple
		$\frac{4c''^2}{a'-a} + \frac{4c'^2}{a''-a} + a^2 - 4d = 0$	$-a$ est racine multiple
$a = a'$; $(a''-a) \neq 0$	$c^2 + c'^2 \neq 0$		$-a$ est racine simple
	$c = c' = 0$	$\frac{4c''^2}{a''-a} + a^2 - 4d \neq 0$	$-a$ est racine double
		$\frac{4c''^2}{a''-a} + a^2 - 4d = 0$	$-a$ est au moins triple
$a = a' = a''$	$c^2 + c'^2 + c''^2 \neq 0$		$-a$ est racine double
	$c = c' = c'' = 0$		$-a$ est au moins triple

Lorsque la racine singulière $-a$ est multiple, les sphères (Σ) sont orthogonales à un cercle fixe, le cercle directeur, dont les équations sont (**55**)

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 + \frac{2c'y}{a'-a} + \frac{2c''z}{a''-a} - \frac{a}{2} = 0.$$

L'axe de ce cercle directeur est réel et son rayon R est donné par l'équation

$$R^2 = \frac{c'^2}{(a'-a)^2} + \frac{c''^2}{(a''-a)^2} + \frac{a}{2}.$$

Si nous posons

$$u(\lambda) \equiv \frac{4c'^2}{a'+\lambda} + \frac{4c''^2}{a''+\lambda} + \lambda^2 - 4d,$$

nous aurons

$$u'(\lambda) = -\frac{4c'^2}{(a'+\lambda)^2} - \frac{4c''^2}{(a''+\lambda)^2} + 2\lambda.$$

Nous supposons encore $(a'-a)(a''-a)$ différent de zéro. Lorsque la racine singulière $-a$ est racine double de $\varphi(\lambda) = 0$, elle est racine simple de $u(\lambda) = 0$ et $u'(-a)$ est différent de zéro ; dans ce cas, le rayon R du cercle directeur n'est pas nul. Lorsque $-a$ est racine au moins triple, ce rayon est nul.

4. Génération normale : Premier cas. — Avant d'étudier les cas particuliers qui n'ont encore fait l'objet d'aucun examen, il est nécessaire d'approfondir et de préciser les premiers résultats que nous venons d'énoncer.

Nous avons déjà convenu (**55**) d'appeler *génération normale* d'une cyclide la génération comme enveloppe de sphères (Σ) dont l'équation dépend de deux paramètres indépendants, et *génération exceptionnelle* la génération comme enveloppe de sphères (Σ) dont l'équation dépend d'un paramètre.

Nous avons raisonné dans les paragraphes précédents comme si toute sphère (Σ) dont l'équation dépend d'un ou deux paramètres avait une enveloppe. Nous savons que, s'il en est ainsi en général, il y a des cas d'exception; nous avons explicitement indiqué, par exemple, (**46**) que les sphères d'un faisceau quadratique ont une enveloppe dans le cas où les sphères de base ne sont pas des sphères d'un faisceau linéaire, et (**59**) que les sphères d'une congruence bilinéaire ont une enveloppe dans le cas où les sphères de base ne sont pas des sphères d'un faisceau ou d'une congruence linéaire. L'étude à laquelle nous allons procéder a pour but d'établir aussi nettement que possible que les générations découvertes aux paragraphes précédents correspondent bien à des familles de sphères ayant des enveloppes.

Il en est ainsi, évidemment, pour certaines générations du § **1**. Les sphères (Σ) sont les sphères d'une génération normale; leur centre ω décrit une quadrique (H) et elles sont orthogonales à une sphère directrice (O). Lorsque la quadrique (H) est réelle et que les sphères (Σ) sont réelles, une étude géométrique classique permet de démontrer que la sphère (Σ) est tangente à la cyclide enveloppe en deux points M et M', réels ou imaginaires; ces points sont situés sur la perpendiculaire abaissée du centre O, supposé réel, de la sphère directrice sur le plan tangent en ω à la quadrique (H). On pourra s'assurer que, dans le cas simple où $(a-a')(a-a'')(a'-a'')cc'c''$ est différent de zéro, l'équation (7) a trois racines réelles, auxquelles correspondent trois modes de génération normale; les déférentes de ces générations sont un ellipsoïde réel, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes. Pour chacun de ces modes de génération, l'étude géométrique précédente permet de conclure.

Il est même possible de préciser davantage pour celle de ces générations dont la déférente est un hyperboloïde à une nappe. Les sphères (Σ) de la génération normale correspondante sont les sphères d'une congruence bilinéaire : la sphère (Σ), de centre ω, coupe la cyclide (**51**) suivant deux cercles, réels ou imaginaires, dont les plans passent par la droite OMM' et sont perpendiculaires aux plans des génératrices (D) et (Δ) de la quadrique (H) qui passent par ω.

L'une des infériorités de la méthode géométrique est que, se bornant à l'étude de certaines propriétés réelles des figures, elle n'embrasse pas toujours la totalité des cas possibles et multiplie, en tout cas, le nombre des cas particuliers. L'étude analytique de certains problèmes déjà résolus géométriquement s'impose donc pour compléter l'étude géométrique et la simplifier. L'un des objets de la géométrie analytique est de donner une existence à des êtres qui sont dits, bien que ces mots jurent d'être accouplés, géométriques imaginaires. L'avantage de cette généralisation est de rassembler sous un même énoncé des propriétés d'aspect différent, d'économiser les démonstrations, de soulager la mémoire et de stimuler l'imagination, d'une part en classant les propriétés trouvées, d'autre part en indiquant des généralisations possibles. L'inconvénient de cette généralisation est qu'elle utilise le langage de la géométrie pure pour définir des êtres qui n'ont aucune existence géométrique et qu'elle propose des démonstrations, d'aspect géométrique, qui n'ont d'autre sens qu'en analytique.

L'application de ces considérations générales au problème particulier résolu au § **1** conduit à examiner s'il n'est pas possible d'exprimer les coefficients α, β, γ, h du premier membre de l'équation de la sphère (Σ) en fonction rationnelle

de deux paramètres λ et μ. Nous utiliserons, pour le faire, le résultat suivant : les coordonnées d'un point d'une quadrique (H), non développable mais quelconque, dont l'équation est à coefficients réels ou complexes, peuvent être exprimées, en fonction de deux variables indépendantes λ et μ, par les formules

$$(15)\qquad x=\frac{c_1\lambda\mu+c_2\lambda+c_3\mu+c_4}{a_1\lambda\mu+a_2\lambda+a_3\mu+a_4},\qquad y=\frac{c'_1\lambda\mu+c'_2\lambda+c'_3\mu+c'_4}{a_1\lambda\mu+a_2\lambda+a_3\mu+a_4},$$
$$z=\frac{c''_1\lambda\mu+c''_2\lambda+c''_3\mu+c''_4}{a_1\lambda\mu+a_2\lambda+a_3\mu+a_4},$$

a_1, a_2, a_3, a_4, etc. étant des constantes *réelles ou complexes*. Il est par conséquent possible de répéter mot pour mot la démonstration donnée au § **49** et d'en conclure que l'équation de la sphère (Σ) est, dans ce cas, de la forme

$$S_1\lambda\mu+S_2\lambda+S_3\mu+S_4=0.$$

Nous conviendrons de généraliser les définitions et les démonstrations données (Chapitre VII) dans tous les cas où ces définitions et démonstrations sont analytiques, au cas où a_1, a_2, etc., sont des nombres réels ou complexes. Moyennant cette convention, et sous les réserves d'interprétation faites ci-dessus, nous pouvons dire que :

A chacune des racines non singulières de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ correspond un mode de génération normale. Les sphères (Σ) correspondantes sont les sphères d'une congruence bilinéaire, bitangentes à la cyclide en deux points réels ou imaginaires, distincts ou confondus.

Cet énoncé précis est en défaut dans le seul cas où le rayon de la sphère directrice est nul : nous verrons plus loin que, dans ce cas, la cyclide admet un point double, et que les sphères (Σ) passent par ce point double et touchent la cyclide en un seul point.

5. Deuxième cas. — Nous nous placerons, dans ce paragraphe, dans le cas où $c=0$ et où, en outre, $(a-a')(a-a'')$ est différent de zéro. Nous examinerons d'abord le cas où, la quantité

$$\frac{4c'^2}{a'-a}+\frac{4c''^2}{a''-a}+a^2-4d$$

étant différente de zéro, l'équation $\varphi(\lambda)$ admet la racine simple $-a$, à laquelle correspond un mode de génération normale que nous allons étudier.

Reprenons, dans ces hypothèses, le système des équations (4). λ ayant la valeur $-a$ et α étant nul, la première équation est toujours satisfaite. La seconde et la troisième nous donnent, puisque u, étant une variable indépendante, n'est pas constamment égal à $-\frac{a}{2}$, des expressions de β et de γ en fonction de u, y et z :

$$\beta=\frac{c'+(a'+\lambda)y}{\lambda-2u},\qquad \gamma=\frac{c''+(a''+\lambda)z}{\lambda-2u}.$$

La cinquième nous donne h :

$$h=\frac{\lambda u-2c'y-2c''z-2d}{\lambda-2u}.$$

Nous porterons ces valeurs de β, γ et h dans la quatrième équation, ce qui donne, en remplaçant λ par sa valeur $-a$,

$$(a'-a)y^2+(a''-a)z^2+u^2+2c'y+2c''z+au+d=0.$$

Les trois paramètres y, z, u, en fonction desquels nous avons exprimé α, β, γ et h, sont liés par cette relation, que nous écrirons

$$(16)\qquad (a'-a)\left(y+\frac{c'}{a'-a}\right)^2+(a''-a)\left(z+\frac{c''}{a''-a}\right)^2+\left(u+\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c'^2}{a'-a}+\frac{c''^2}{a''-a}+\frac{a^2}{4}-d.$$

La relation (16) exprime que le point dont les coordonnées sont

$$X=u,\qquad Y=y,\qquad Z=z$$

est un point d'une quadrique non développable.

Il en résulte que X, Y, Z et par conséquent u, y, z peuvent être exprimés en fonction de deux paramètres λ et μ par les formules (15). On en conclura aisément que les sphères (Σ) ont une équation de la forme

$$S_1\lambda\mu+S_2\lambda+S_3\mu+S_4=0,$$

les sphères (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) n'appartenant pas à un faisceau ou à une congruence linéaire.

La génération normale qui, dans le cas envisagé, correspond à la racine singulière, simple, — a de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ n'est donc pas de nature différente de celles trouvées plus haut (4). Les sphères (Σ) correspondantes sont encore les sphères d'une congruence bilinéaire.

6. Génération exceptionnelle. — Les hypothèses étant

$$c=0,\qquad (a'-a)(a''-a)\neq 0,\qquad \frac{4c'^2}{a'-a}+\frac{4c''^2}{a''-a}+a^2-4d=0,$$

l'équation $\varphi(\lambda)=0$ admet la racine multiple $-a$, à laquelle correspond une génération exceptionnelle. Les centres des sphères (Σ) de cette génération sont les points d'une conique à centre non décomposée, réelle ou imaginaire, dont le plan est réel. Nous pouvons choisir, pour sphère directrice (O) à laquelle les sphères (Σ) sont orthogonales, une sphère dont le centre est réel. Nous avons démontré (**45**) que, dans le cas où la déférente est une conique réelle, les sphères (Σ) sont les sphères d'un faisceau quadratique. Cette démonstration, sous les réserves faites, peut être étendue au cas où la déférente est une conique imaginaire. Nous pouvons donc affirmer, sous les réserves déjà faites (**4**), que :

A la racine singulière — a, racine multiple de l'équation $\varphi(\lambda)=0$, correspond un mode de génération exceptionnel. Les sphères (Σ) correspondantes sont les sphères d'un faisceau quadratique et touchent la cyclide en tous les points (sauf deux au maximun) d'un cercle, dont le plan est réel si la déférente est réelle, imaginaire si la déférente est imaginaire.

7. Étude de cas particuliers : Premier cas. — Nous terminerons la recherche des sphères bitangentes à la cyclide ou inscrites dans celle-ci en examinant les derniers cas particuliers qui peuvent se présenter.

Nous supposerons, dans ce paragraphe, que l'on a

$$a=a',\qquad a''-a\neq 0,\qquad c^2+c'^2\neq 0.$$

Dans ces conditions, l'équation $\varphi(\lambda)=0$ admet (**51**) la racine exceptionnelle $-a$ comme racine simple. Nous allons chercher s'il lui correspond un mode de génération et le caractériser.

Observons d'abord que la quadrique (Q) (notations du § **53**) est de révolution. Elle admet une infinité de systèmes de directions principales formant un trièdre trirectangle; l'une d'elles, choisie pour axe Oz, est fixe. Nous choisirons les deux autres de manière que nous puissions supposer c nul. Nous admettrons donc que l'on a

$$c=0,\qquad c'\neq 0.$$

Dans les calculs qui suivent, la valeur de λ est $-a$ par hypothèse. Nous ne remplacerons λ par sa valeur qu'une fois le calcul terminé, pour permettre au lecteur de le comparer aux calculs précédents.

Le système d'équations (4) devient, en tenant compte des hypothèses :

$$(17)\qquad \begin{cases} \alpha(2u-\lambda)=0,\\ \beta(2u-\lambda)+c'=0,\\ \gamma(2u-\lambda)+c''+(a''+\lambda)z=0,\\ 2\alpha x+2\beta y+2\gamma z-h-u=0,\\ 2c'y+2c''z-\lambda u-2hu+\lambda h+2d=0. \end{cases}$$

Puisque, par hypothèse, c' est différent de zéro, $2u-\lambda$ est aussi différent de zéro, et la première équation impose la condition :

$$\alpha=0.$$

Si cette condition est satisfaite, comme β n'est pas nul $(c'\neq 0)$, la seconde équation fixe la valeur de u; la troisième fixe la valeur de z $(a''-a\neq 0)$; les deux dernières doivent donner pour y une valeur commune; il faut, pour qu'il en soit ainsi, que les coefficients β, γ, h de la sphère (Σ) soient liés par la relation

$$(18)\qquad \frac{c'}{\beta}=\frac{2c''z-\lambda u-2hu+\lambda h+2d}{2\gamma z-h-u}.$$

Lorsque cette condition et la condition $\alpha=0$ sont satisfaites, y et z étant fixés et x demeurant arbitraire, la quadrique (3) du § **1** a une ligne de points multiples, et la sphère (Σ) est, en général, bitangente à la cyclide. Or la sphère (Σ) dépend de deux paramètres; il correspond donc à la racine simple exceptionnelle $-a$ de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ une génération normale.

Pour étudier cette génération, nous procéderons comme au § **4**. Les trois premières équations du système (17) nous donnent les valeurs de α, β, γ :

$$\alpha=0,\qquad \beta=\frac{c'}{\lambda-2u},\qquad \gamma=\frac{(a''+\lambda)z+c''}{\lambda-2u};$$

la valeur de h est alors donnée par l'équation (17) :

$$h=\frac{(a''+\lambda)z^2+u^2-d}{\lambda-2u}.$$

Remplaçons dans ces expressions λ par sa valeur $-a$ et posons

$$a''-a=-k^2,\qquad u-kz=\lambda',\qquad u+kz=\mu';$$

l'équation de la sphère (Σ) sera

$$-\lambda'\mu' + \lambda'(x^2+y^2+z^2+kz) + \mu'(x^2+y^2+z^2-kz) + a(x^2+y^2+z^2) + 2c'y + c''z + d = 0.$$

Elle est bien, λ' et μ' étant deux paramètres, de la forme

$$S_1\lambda'\mu' + S_2\lambda' + S_3\mu' + S_4 = 0.$$

C'est donc une sphère d'une congruence bilinéaire, dont les sphères de bases ne sont les sphères ni d'un faisceau, ni d'une congruence linéaire.

La génération normale qui correspond aux conditions choisies et à la racine singulière — a, de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$, n'est donc pas de nature différente de celles trouvées plus haut (4). Les sphères (Σ) correspondantes sont encore les sphères d'une congruence bilinéaire.

8. Deuxième cas. — Nous supposerons, dans ce paragraphe, que les conditions suivantes sont réalisées :

$$a = a', \qquad a'' - a \neq 0, \qquad c = c' = 0, \qquad \frac{4c''^2}{a''-a} + a^2 - 4d \neq 0.$$

C'est le cas d'une cyclide de révolution autour de Oz. Les conditions imposées sont choisies de manière que $-a$, racine singulière de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$, soit racine double de cette équation. Nous allons chercher s'il lui correspond un mode de génération et le caractériser.

Dans les calculs qui suivent, la valeur de λ est $-a$ par hypothèse; nous ne remplacerons λ par cette valeur qu'une fois les calculs terminés pour ne pas masquer les analogies qu'ils présentent avec des calculs déjà faits.

Le système d'équations (4) devient

$$(19)\qquad \begin{cases} \alpha(2u-\lambda) = 0, \\ \beta(2u-\lambda) = 0, \\ \gamma(2u-\lambda) + c'' + (a''+\lambda)z = 0, \\ 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z - h - u = 0, \\ \qquad 2c''z - \lambda u - 2hu + \lambda h + 2d = 0. \end{cases}$$

Observons d'abord que la solution commune aux deux premières équations,

$$2u - \lambda = 0,$$

est à rejeter; en effet, remplaçons λ par $-a$ et u par $-\dfrac{a}{2}$ dans les équations du système (19) : la troisième et la cinquième de ces équations deviennent

$$c'' + (a''-a)z = 0,$$

$$2c''z - \frac{a^2}{2} + 2d = 0,$$

et le résultat de l'élimination de z entre ces deux équations est

$$\frac{4c''^2}{a''-a} + a^2 - 4d = 0.$$

Cette condition n'étant pas réalisée, le système (19) n'a pas, dans ce cas, de solutions.

Nous supposerons par conséquent que $2u - \lambda$ n'est pas nul; les deux premières équations du système (19) nous donnent les deux conditions

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

La troisième donne la valeur de z :

$$z = \frac{\lambda\gamma - c'' - 2\gamma u}{a''+\lambda}.$$

Nous remplacerons z par cette valeur dans les premiers membres des deux dernières équations; celles-ci deviennent

$$(20)\qquad \begin{cases} A + Bu = 0, \\ A' + B'u = 0, \end{cases}$$

en posant, cette fois,

$$A \equiv \frac{2\gamma(c''-\lambda\gamma)}{a''+\lambda} + h, \qquad B \equiv \frac{4\gamma^2}{a''+\lambda} + 1,$$

$$A' \equiv \frac{2c''(c''-\lambda\gamma)}{a''+\lambda} - \lambda h - 2d, \qquad B' \equiv \frac{4c''\gamma}{a''+\lambda} + \lambda + 2h$$

(rapprocher ces calculs de ceux que nous avons effectués aux § **1** et **2**).

Si, pour la valeur de λ égale à $-a$, B et B' étaient nuls tous deux, le système (19) n'aurait de solutions que si A et A' étaient aussi nuls; or ces quatre nombres ne peuvent être nuls à la fois, car la quantité $2A' + \lambda B'$,

$$2A' + \lambda B' \equiv \frac{4c''^2}{a''+\lambda} + \lambda^2 - 4d,$$

est, par hypothèse, différente de zéro quand λ est égal à $-a$.

Nous supposerons donc que, B et B' n'étant pas nuls tous les deux, les deux équations (20) ont une solution commune en u. Il faut, pour qu'il en soit ainsi, que les coefficients γ et h de la sphère (Σ) soient liés par la relation

$$AB' - BA' = 0.$$

Lorsque les trois conditions

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad AB' - BA' = 0$$

sont satisfaites, le système (19), qui n'est autre que le système (4), a des solutions; la valeur de u et celle de z sont déterminées, x et y restent arbitraires. La quadrique (3) a un plan de points doubles, et la sphère (Σ) est en général inscrite dans la cyclide. Or la sphère (Σ) dépend d'un seul paramètre; il correspond donc, à la racine double singulière $-a$ de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$, une génération *exceptionnelle*.

Pour étudier cette génération, nous procéderons comme aux § **5** et **6**. Les trois premières équations du système (19) nous donnent les valeurs de α, β, γ :

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \frac{c'' + (a''+\lambda)z}{\lambda - 2u},$$

et la cinquième, la valeur de h :

$$h = \frac{\lambda u - 2c''z - 2d}{\lambda - 2u}.$$

Nous porterons dans la quatrième équation les valeurs trouvées, après avoir remplacé λ par sa valeur $-a$, et nous obtiendrons la relation

$$u^2 + z^2(a''-a) + au + 2c''z + d = 0,$$

qui lie les deux paramètres u et z. Cette relation s'écrit

$$(21) \qquad \left(u+\frac{a}{2}\right)^2+(a''-a)\left(z+\frac{c''}{a''-a}\right)^2=\frac{c''^2}{a''-a}+\frac{a^2}{4}-d.$$

Le second membre étant, par hypothèse, différent de zéro, elle exprime que le point de coordonnées $X=u$ et $Y=z$ décrit une conique à centre non décomposée. Les coordonnées d'un point de cette conique peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre t, et γ et h s'expriment aussi rationnellement en fonction de t. Le calcul est simple; il peut, dans l'hypothèse où la conique d'équation (21) est réelle, seul cas intéressant en pratique, être conduit sans intervention de nombres complexes; nous opérerons ici sans nous soucier de la nature des nombres introduits, notre seul but étant de montrer que la génération correspondant à la racine $\lambda=-a$ est une génération exceptionnelle, par sphères inscrites d'un faisceau quadratique.

Posons donc

$$a''-a=-k^2, \qquad u+\frac{a}{2}-k\left(z+\frac{c''}{a''-a}\right)=rt,$$

$$u+\frac{a}{2}+k\left(z+\frac{c''}{a''-a}\right)=\frac{r}{t},$$

$$\frac{c''^2}{a''-a}+\frac{a^2}{4}-d=r^2.$$

L'équation de la sphère (Σ) sera, t étant le paramètre variable,

$$[2k(x^2+y^2+z^2)+2k^2z+ak-2c'']t^2-4krt+2k(x^2+y^2+z^2)-2k^2z+ak+2c''=0.$$

Cette équation est bien de la forme

$$S_1t^2+2S_2t+S_3=0,$$

et les sphères (S_1), (S_2), (S_3) ne sont pas des sphères d'un faisceau linéaire.

Il en résulte que **la génération exceptionnelle qui correspond, dans le cas envisagé, à la racine singulière double $-a$ de l'équation $\varphi(\lambda)=0$, n'est pas de nature différente des générations exceptionnelles déjà trouvées (6). Les sphères (Σ) de cette génération sont les sphères d'un faisceau quadratique;** elles sont tangentes à la cyclide en tous les points d'un parallèle d'une surface de révolution; leurs centres sont des points de l'axe de la surface.

9. Troisième cas. — Lorsque les hypothèses sont

$$a=a', \qquad a''-a\neq 0, \qquad c=c'=0, \qquad \frac{4c''^2}{a''-a}+a^2-4d=0,$$

$-a$ est une racine au moins triple de l'équation $\varphi(\lambda)=0$.

Nous allons montrer que, lorsqu'il en est ainsi, la cyclide est *décomposée.* Remplaçons, dans l'équation de la cyclide, d par sa valeur; l'équation s'écrit alors

$$\left(x^2+y^2+z^2+\frac{a}{2}\right)^2+(a''-a)\left(z+\frac{c''}{a''-a}\right)^2=0.$$

La cyclide est donc bien décomposée, et la sphère (Σ) est soit indéterminée, soit fixe.

10. Quatrième cas. — Nous supposerons maintenant

$$a=a'=a'', \qquad c^2+c'^2+c''^2\neq 0.$$

L'équation $\varphi(\lambda)=0$ admet alors la racine singulière $-a$ double; nous nous proposons d'étudier si le système (4) a des solutions lorsque λ est remplacé par $-a$.

La quadrique (Q) du § **53** est alors une sphère; tous les trièdres trirectangles sont des trièdres de directions principales de cette quadrique; nous pouvons donc choisir les axes Ox, Oy, Oz de manière que c et c' soient nuls.

Supposons donc

$$c=c'=0, \qquad c''\neq 0.$$

Le système (4) s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha(2u-\lambda)=0,\\ \beta(2u-\lambda)=0,\\ \gamma(2u-\lambda)+c''=0,\\ 2\alpha x+2\beta y+2\gamma z-h-u=0,\\ 2c''z-\lambda u-2hu+\lambda h+2d=0.\end{array}\right.$$

Nous ne remplaçons pas, pour le moment, λ par sa valeur $-a$; il suffira de faire ce remplacement lorsque les calculs seront terminés.

Puisque, par hypothèse, c'' est différent de zéro, $2u-\lambda$ et γ sont tous deux différents de zéro. Les deux premières équations imposent les conditions

$$\alpha=0, \qquad \beta=0.$$

La troisième donne la valeur de u; la quatrième et la cinquième, deux valeurs de z qui doivent être égales, ce qui impose une troisième condition aux coefficients γ et h de la sphère (Σ) :

$$\frac{\gamma}{c''}=\frac{h+u}{\lambda u+2hu-\lambda h-2d}.$$

Lorsque ces trois conditions sont satisfaites, la quadrique (3) du § **1** a un plan de points doubles, et la sphère (Σ), dont l'équation ne dépend que d'un seul paramètre, est en général inscrite dans la cyclide.

Nous formerons l'équation des sphères (Σ) en calculant γ et h en fonction du paramètre u; cette équation sera

$$u^2-2u(x^2+y^2+z^2)-a(x^2+y^2+z^2)-2c''z-d=0.$$

Elle est de la forme

$$S_1u^2+2S_2u+S_3=0,$$

les sphères (S_1), (S_2), (S_3) n'étant pas des sphères d'un faisceau linéaire. Par conséquent, **la génération exceptionnelle qui, dans le cas envisagé, correspond à la racine double singulière $-a$ de l'équation $\varphi(\lambda)=0$, n'est pas de nature différente des générations exceptionnelles déjà trouvées. Les sphères (Σ) de cette génération sont les sphères d'un faisceau quadratique, tangentes à la cyclide de révolution le long d'un parallèle; leurs centres décrivent l'axe de révolution.**

11. Cinquième cas. — Nous supposerons enfin

$$a=a'=a'', \qquad c=c'=c''=0.$$

L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ admet la racine singulière $-a$, et cette racine est au moins triple. Dans ce cas, l'équation de la cyclide est

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + a(x^2 + y^2 + z^2) + d = 0$$

et la cyclide est *décomposée.*

12. Conclusion générale sur les générations normales. — Cette première étude des générations d'une cyclide donnée (W) est nécessairement un peu confuse, à cause de la multiplicité des cas particuliers qu'il a fallu envisager. Elle met cependant en lumière certains résultats simples, de caractère général, que nous allons dégager et énoncer.

Occupons-nous d'abord des *générations normales. Les sphères* (Σ) *de ces générations sont toujours des sphères d'une congruence bilinéaire.* Par conséquent, en général, ces sphères sont orthogonales à une sphère directrice (O) et leurs centres décrivent une quadrique (H). Exceptionnellement, leurs centres sont dans un plan (O) auquel elles sont orthogonales et que nous appelons, pour cette raison, **plan directeur**. Ces sphères touchent leur enveloppe, en général, en deux points M et M'. Nous verrons qu'il y a parfois exception; la cyclide (W) a alors un point multiple, et les sphères (Σ) d'une certaine génération passent par ce point et touchent la cyclide en un deuxième point.

L'examen des résultats établis dans les paragraphes précédents met en évidence le fait que la présence d'une génération exceptionnelle est liée à la présence d'une racine singulière multiple. Nous énoncerons donc l'important résultat suivant :

A toute racine de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ correspond une génération normale, sauf si cette racine est singulière et multiple.

Ce même examen permet de préciser que la présence d'une génération normale à plan directeur est liée à la présence d'une racine simple et singulière. Or le tableau du § **3** indique dans quels cas l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ a la racine simple $-a$. Ces cas sont : 1° $c = 0$ et 2° $a = a'$, $(a'' - a) \neq 0$, $c^2 + c'^2 \neq 0$. Ce second cas a été étudié au § **7**, et nous avons montré qu'un choix convenable des axes permettrait encore de supposer $c = 0$. Autrement dit, lorsque la cyclide (W) admet une génération normale à plan directeur, $c = 0$; or, lorsque $c = 0$, le plan directeur $x = 0$ est un plan de symétrie. Ce résultat n'a en soi rien de très surprenant : l'enveloppe des sphères d'une congruence bilinéaire dont le centre décrit un plan (O) admet évidemment ce plan comme plan de symétrie; ce qui est intéressant, c'est que ce plan de symétrie soit un des plans de coordonnées. Rappelons que ceux-ci ont été choisis au § **53** et rien *a priori* ne permet de supposer que, lorsqu'il y a un plan directeur, c'est un des plans de coordonnées.

Nous examinerons le cas particulier très important où la cyclide (W) a trois générations normales à plans directeurs. L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ a, dans ce cas, trois racines singulières simples distinctes; il en résulte que $(a - a')(a - a'')(a' - a'')$ est différent de zéro et que $c = c' = c'' = 0$. L'équation de la cyclide (W) est alors

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + d = 0,$$

et l'équation $\varphi(\lambda) = 0$

$$(a + \lambda)(a' + \lambda)(a'' + \lambda)(\lambda^2 - 4d) = 0,$$

avec

$$(a^2 - 4d)(a'^2 - 4d)(a''^2 - 4d) \neq 0.$$

13. Conclusion générale sur les générations exceptionnelles. — Occupons-nous ensuite des *générations exceptionnelles. Les sphères* (Σ) *des générations exceptionnelles sont toujours des sphères d'un faisceau quadratique.* Par conséquent, ces sphères sont en général orthogonales à un cercle directeur fixe et leurs centres décrivent une conique déférente dont le centre est dans le plan de ce cercle directeur : ce plan est un plan de symétrie pour la cyclide. Exceptionnellement, les centres sont alignés; les sphères (Σ) sont orthogonales à la droite (D), lieu des centres, qui remplace le cercle directeur et peut être appelée **droite directrice** : la cyclide est alors une cyclide de révolution d'axe (D). Les sphères (Σ), dans les deux cas, touchent en général leur enveloppe en tous les points sauf deux, au maximum, d'un cercle caractéristique; il y a exception lorsque la cyclide est décomposée.

La présence d'une génération exceptionnelle de la cyclide (W) coïncide avec la présence d'une racine singulière multiple de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$; soit $-a$ cette racine. Lorsque cette racine est double, nous avons trouvé soit (**6**) une génération exceptionnelle avec un cercle directeur dont le rayon (on le vérifiera) n'est pas nul, soit une génération exceptionnelle par sphères inscrites le long des parallèles d'une surface de révolution. Lorsque cette racine est triple au moins, nous avons trouvé soit (**8**) une génération exceptionnelle, avec un cercle directeur de rayon nul, soit (**9**) une cyclide décomposée.

Nous résumerons ces résultats en disant :

A toute racine singulière multiple de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ correspond soit une génération exceptionnelle, soit un cas de décomposition.

Lorsque la cyclide (W) se décompose, elle se décompose en deux sphères; elle est donc de révolution; par conséquent :

Une cyclide qui n'est pas de révolution n'est pas décomposée.

On constatera que :

Une cyclide de révolution autour de Oz est décomposée quand $-a$ est une racine singulière triple au moins de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$.

NOTE II

POINTS MULTIPLES DES CYCLIDES

1. Le système à résoudre et discuter est (**60**) :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &x(a+\lambda)+c=0,\\ &y(a'+\lambda)+c'=0,\\ &z(a''+\lambda)+c''=0,\\ &x^2+y^2+z^2-\frac{\lambda}{2}=0,\\ &(a+\lambda)\,x^2+(a'+\lambda)\,y^2+(a''+\lambda)\,z^2+3cx+3c'y+3c''z-\frac{\lambda^2}{2}+2d=0.\end{aligned}\right.$$

Nous sommes tout naturellement conduit à distinguer plusieurs cas.

2. Premier cas : L'inconnue λ n'est égale à aucun des nombres $-a$, $-a'$, $-a''$. — Les trois premières équations donnent les valeurs de x, y, z :

$$x=\frac{-c}{a+\lambda},\qquad y=\frac{-c'}{a'+\lambda},\qquad z=\frac{-c''}{a''+\lambda}.$$

Nous porterons ces valeurs dans les deux autres équations, qui deviendront

$$(2)\qquad \frac{c^2}{(a+\lambda)^2}+\frac{c'^2}{(a'+\lambda)^2}+\frac{c''^2}{(a''+\lambda)^2}-\frac{\lambda}{2}=0,$$

$$(3)\qquad \frac{4c^2}{a+\lambda}+\frac{4c'^2}{a'+\lambda}+\frac{4c''^2}{a''+\lambda}+\lambda^2-4d=0.$$

L'équation (3) est l'équation $\varphi(\lambda)=0$:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)\equiv{}&4c^2(a'+\lambda)(a''+\lambda)+4c'^2(a+\lambda)(a''+\lambda)+4c''^2(a'+\lambda)(a+\lambda)\\ &+(\lambda^2-4d)(a+\lambda)(a'+\lambda)(a''+\lambda).\end{aligned}$$

Le premier membre de l'équation (2) est proportionnel à la dérivée du premier membre de l'équation (3); les racines communes aux équations (2) et (3) sont donc les racines multiples de l'équation (3), c'est-à-dire les racines multiples non singulières de l'équation $\varphi(\lambda)=0$.

Nous constatons donc que la cyclide (W) ne peut avoir de points multiples que dans les hypothèses suivantes : ou bien λ est une racine multiple non singulière de l'équation $\varphi(\lambda)=0$, ou bien λ est égal à un des nombres $-a$, $-a'$, $-a''$. Dans le premier cas, la cyclide admet un point multiple; le second cas n'a pas encore été étudié : il le sera dans le paragraphe suivant.

Nous résumerons ce premier résultat en disant :

A toute racine non singulière multiple de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ correspond un point multiple de la cyclide (W).

3. Deuxième cas : L'inconnue auxiliaire λ est égale à l'un des trois nombres $-a$, $-a'$, $-a''$. — Supposons, par exemple, que nous ayons

$$\lambda=-a.$$

La première des équations du système (1) impose alors la condition :

$$c=0.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, le système (1) n'a pas de solutions: la cyclide (W) n'a pas de points multiples.

Si cette condition est satisfaite, le système (1) peut avoir des solutions. Nous allons étudier s'il en est ainsi.

Nous supposerons d'abord que a est différent de a' et de a''. Notons d'abord que les hypothèses :

$$c=0,\qquad (a-a')(a-a'')\neq 0$$

expriment, dans le cas envisagé, la condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda=-a$ soit une racine singulière de l'équation $\varphi(\lambda)=0$ (n° **3** de la NOTE I).

Supposons cette condition remplie : la deuxième et la troisième équation du système (1) donnent alors

$$y=\frac{-c'}{a'-a},\qquad z=\frac{-c''}{a''-a}.$$

Nous porterons ces valeurs de y et de z dans les deux dernières équations. La quatrième nous donnera la valeur de x^2 :

$$x^2+\frac{c'^2}{(a'-a)^2}+\frac{c''^2}{(a''-a)^2}+\frac{a}{2}=0,$$

et la cinquième, une condition imposée aux coefficients de la cyclide :

$$(4)\qquad \frac{4c'^2}{a'-a}+\frac{4c''^2}{a''-a}+a^2-4d=0.$$

Si la condition (4) n'est pas remplie, la cyclide (W) n'a pas de points multiples (pour la valeur $-a$ du paramètre λ); si cette condition est remplie, elle a deux points multiples, distincts ou confondus, réels ou imaginaires.

Nous interpréterons et préciserons ce résultat en observant que la condition (4) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\frac{4c'^2}{a'+\lambda}+\frac{4c''^2}{a''+\lambda}+\lambda^2-4d=0$$

admette la racine $-a$. Lorsque cette racine est simple, la quantité

$$\frac{c'^2}{(a'-a)^2}+\frac{c''^2}{(a''-a)^2}+\frac{a}{2}$$

est différente de zéro; la cyclide (W) a donc deux points doubles distincts, et lorsqu'elle est multiple, la cyclide (W) a deux points doubles confondus.

Puisque, par hypothèse, $c=0$, l'équation $\varphi(\lambda)=0$ peut s'écrire

$$(a+\lambda)\,[4c'^2(a''+\lambda)+4c''^2(a'+\lambda)+(\lambda^2-4d)(a'+\lambda)(a''+\lambda)]=0.$$

Les deux équations

$$\frac{4c'^2}{a'+\lambda} + \frac{4c''^2}{a''+\lambda} + \lambda^2 - 4d = 0,$$
$$4c'^2(a''+\lambda) + 4c''^2(a'+\lambda) + (\lambda^2 - 4d)(a'+\lambda)(a''+\lambda) = 0$$

admettent en même temps la racine $-a$ et au même ordre de multiplicité, puisque, par hypothèse, on a $(a'-a)(a''-a) \neq 0$; la condition (4) exprime donc, en somme, la condition nécessaire et suffisante pour que $-a$ soit une racine double au moins de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$, et nous pouvons résumer l'étude précédente en énonçant les résultats suivants :

Lorsque le produit $(a'-a)(a''-a)$ *est différent de zéro, la condition nécessaire et suffisante pour que la cyclide* (W) *ait des points multiples qui correspondent à la valeur* $-a$ *du paramètre* λ *est que* $-a$ *soit une racine singulière au moins double de l'équation* $\varphi(\lambda) = 0$. *Si cette racine est double, la cyclide* (W) *a deux points multiples distincts; si elle est au moins triple, la cyclide* (W) *a deux points multiples confondus.*

4. Troisième cas : $a = a'$, $a - a'' \neq 0$. — Nous avons, au paragraphe précédent, supposé a différent de a' et de a''. Nous supposerons dans celui-ci qu'il n'en est pas ainsi, et par exemple

$$a = a', \qquad a - a'' \neq 0.$$

Nous cherchons toujours si le système (1) peut avoir des solutions lorsqu'on donne à λ la valeur $-a$. Les deux premières équations de ce système deviennent

$$c = c' = 0;$$

donc, si c et c' ne sont pas nuls tous les deux, la cyclide n'a pas de points multiples (correspondants aux hypothèses faites).

Notons que la condition $c = c' = 0$ est aussi, dans le cas envisagé, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ admette la racine $-a$ comme racine singulière multiple; nous rappelons, pour justifier cette affirmation, que notre étude ne porte que sur les cyclides à coefficients réels.

Il résulte de cela que, si la racine $-a$ n'est pas racine multiple de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$, la cyclide (W) n'a pas de points multiples.

Nous supposerons donc $c = c' = 0$. La troisième équation du système (1) donne la valeur de z :

$$z = -\frac{c''}{a''-a};$$

la quatrième donne la valeur de $x^2 + y^2$:

$$x^2 + y^2 + \frac{c''^2}{(a''-a)^2} + \frac{a}{2} = 0,$$

et la cinquième, une condition imposée aux coefficients de la cyclide :

$$(5) \qquad \frac{4c''^2}{a''-a} + a^2 - 4d = 0.$$

Si la condition (5) n'est pas remplie, la cyclide n'a pas de points multiples. Si elle est remplie, la cyclide a un cercle de points multiples; observons que, dans ce dernier cas, elle est décomposée; on vérifiera, en effet, que son équation peut s'écrire

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a}{2}\right)^2 + (a''-a)\left(z + \frac{c''}{a''-a}\right)^2 = 0.$$

Notons que, étant données les hypothèses faites, qui sont

$$a = a', \qquad c = c' = 0, \qquad a'' - a \neq 0,$$

l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ s'écrit

$$(a+\lambda)^2[4c''^2 + (a''+\lambda)(\lambda^2 - 4d)] = 0,$$

et que la condition (5) est la condition nécessaire et suffisante pour que $-a$ soit racine triple au moins de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$.

5. Quatrième cas : $a = a' = a''$. — Nous cherchons encore si le système (1) a des solutions lorsqu'on donne à λ la valeur $-a$. Les trois premières équations du système (1) nous donnent alors : $c = c' = c'' = 0$.

Si ces conditions ne sont pas remplies, la cyclide (W) n'a pas de points multiples à distance finie; si elle l'est, la cyclide est décomposée. Notons que, étant données les hypothèses faites,

$$a = a' = a'',$$

l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ peut s'écrire

$$(a+\lambda)^2(4c^2 + 4c'^2 + 4c''^2) + (\lambda^2 - 4d)(a+\lambda)^3 = 0.$$

Elle admet toujours la racine singulière multiple $-a$.

6. Les résultats de cette étude ont été énoncés au § **61**.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DES CERCLES PERPENDICULAIRES A DEUX CERCLES DONNÉS. PARATAXIE

DEUXIÈME PARTIE

CYCLIDES. PROPRIÉTÉS ET CLASSIFICATION

TROISIÈME PARTIE

CYCLIDES DE DUPIN

QUATRIÈME PARTIE

PARATAXIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Imprimé en FRANCE, chez Brodard et Taupin, imprimeurs, Coulommiers-Paris.
C.O.L. n° 31-1202 — 34781-4-1945.
172. — Dépôt légal : 2e trim. 1945.