

**H.S.M. COXETER et S.L. GREITZER**

# REDÉCOUVRONS LA GÉOMÉTRIE



**ÉDITIONS  
JACQUES GABAY**



**REDÉCOUVRONS  
LA GÉOMÉTRIE**

## *Extrait du catalogue*

Emil ARTIN	<i>Algèbre géométrique</i>
Paul BARBARIN	<i>La géométrie non euclidienne</i>
Michel CHASLES	<i>Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie</i>
Michel CHASLES	<i>La dualité et l'homographie</i>
Gaston DARBOUX	<i>Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal</i> + <i>Sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes</i> + <i>Principes de géométrie analytique</i>
Robert DELTHEIL et Daniel CAIRE	<i>Géométrie et Compléments</i>
René DESCARTES	<i>La Géométrie</i>
Ernest DUPORCQ	<i>Premiers principes de géométrie moderne</i>
Federigo ENRIQUES	<i>Leçons de géométrie projective</i>
F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)	<i>Exercices de géométrie</i>
F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)	<i>Géométrie descriptive – Éléments et Exercices</i>
F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)	<i>Trigonométrie – Éléments, Compléments et Exercices</i>
Pierre FERMAT	<i>Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante</i> , par Émile BRASSINNE
D. GERLL et G. GIRARD	<i>Les Olympiades internationales de mathématiques</i>
Lucien GODEAUX	<i>Les Géométries</i>
F. GOMES TEIXEIRA	<i>Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches</i>
Jacques HADAMARD	<i>Leçons de géométrie élémentaire</i>
David HILBERT	<i>Les fondements de la géométrie</i>
Félix KLEIN	<i>Le programme d'Erlangen</i>
Trajan LALESCO	<i>La géométrie du triangle.</i>
Henri LEBESGUE	<i>Leçons sur les constructions géométriques</i>
Henri LEBESGUE	<i>Les coniques</i>
C. LEBOSSE et C. HEMERY	<i>Géométrie</i> (classe de Mathématiques)
Charles MICHEL	<i>Compléments de géométrie moderne</i> + <i>Exercices de géométrie moderne</i> , par Julien LEMAIRE + <i>Les correspondances algébriques</i> , par Gaston SINGIER
Gaspard MONGE	<i>Géométrie descriptive</i>
Georges PAPELIER	<i>Exercices de géométrie moderne</i> <i>précédés de l'exposé élémentaire des principales théories</i>
Julius PETERSEN	<i>Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques</i>
Henri POINCARÉ	<i>Œuvres</i> , t. VI – <i>Géométrie. Analysis situs (Topologie)</i>
Jean-Victor PONCELET	<i>Traité des propriétés projectives des figures</i>
E. ROUCHÉ et C. de COMBEROUSSE	<i>Traité de géométrie</i>
Joseph-Alfred SERRET	<i>Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique</i>

**H.S.M. COXETER et S.L. GREITZER**

# REDÉCOUVRONS LA GÉOMÉTRIE



**ÉDITIONS  
JACQUES GABAY**

**Traduction de l'ouvrage publié  
en langue anglaise sous le titre**

**GEOMETRY REVISITED**

**par Random House, Inc., New York**

**Cet ouvrage porte le n° 19 dans la « New mathematical library », collection de monographies publiées par Random House, Inc. et L.W. Singer Company pour le School Mathematics Study Group. Ce groupe, qui représente toutes les branches professionnelles des mathématiques aux Etats-Unis, a pour but l'amélioration de l'enseignement des mathématiques dans les établissements d'enseignement de ce pays.**

**Réimpression autorisée de la traduction française, © Dunod, 1971.**

**© 1997, Éditions Jacques Gabay**

**Tous droits réservés. Aucun extrait de ce livre ne peut-être reproduit, sous quelque forme ou quelque procédé que ce soit, sans le consentement préalable de l'Éditeur.**

**ISBN 2-87647-134-5**

# **REDÉCOUVRONS LA GÉOMÉTRIE**

**H.S.M. COXETER**

Université de Toronto

**S.L. GREITZER**

Université Rutgers

TRADUIT PAR

**R. MARCHAND**

Ingénieur E.N. et E.S.E.

**DUNOD**  
PARIS  
1971





*A nos petits enfants.*

## **Avant-Propos**

*Celui qui méprise la géométrie d'Euclide est semblable  
à un homme qui, revenant de contrées lointaines, décrit  
sa maison.*

H.G. Forder

Dans le cycle d'études secondaires, le programme de mathématiques comprend, habituellement, pendant une seule année, un cours portant soit sur la géométrie plane, soit, peut-être, sur la géométrie et les éléments de géométrie analytique : ce sont là, dit-on, les mathématiques de la dixième année <sup>(1)</sup>. Placé au début du cycle secondaire, ce cours est d'ordinaire, pour l'élève, son seul contact avec le sujet. Par contre, à celui qui a l'esprit mathématique, l'occasion est offerte d'étudier l'algèbre, élémentaire, courante ou même supérieure. Il est donc naturel de s'attendre à quelque prévention en faveur de l'algèbre aux dépens de la géométrie. De plus, des enthousiastes sans jugement conduisent l'élève à croire que la géométrie est « hors du courant essentiel des mathématiques » et qu'elle devrait être remplacée par l'analyse ou la théorie des ensembles.

Cette situation inférieure de la géométrie dans les programmes scolaires est peut-être due à ce que les éducateurs connaissent mal la nature de la géométrie et les progrès réalisés au cours du développement de cette dernière. Parmi ces progrès, figurent maints beaux résultats ; par exemple le théorème de Brianchon (voir 3.9), le théorème de Feuerbach (voir 5.6), le théorème de Petersen-Schoute (voir 4.8) et le théorème de Morley (voir 2.9). Il faut se rappeler, selon l'histoire, qu'Euclide écrivit pour des adultes se préparant à étudier la géométrie. D'autre part, jusqu'au vingtième siècle, l'une des principales raisons justifiant l'enseignement de la géométrie était que la méthode axiomatique de cette dernière constituait, croyait-on, la meilleure introduction au raisonnement déductif ; et, naturellement, en vue d'un enseignement efficace, on insistait sur cette méthode. Cependant, quand cela lui convenait, nul géomètre, ancien ou moderne, n'a hésité à utiliser des procédés moins orthodoxes.

<sup>(1)</sup> Il s'agit de l'enseignement aux Etats-Unis (N.d.T.).

Si la trigonométrie, la géométrie analytique ou les méthodes vectorielles peuvent l'aider, le géomètre y aura recours. De plus, il a inventé des techniques modernes, à la fois élégantes et puissantes, qui lui sont propres : l'une d'elles repose sur l'emploi de *transformations* telles que rotations, symétries et homothéties, qui permettent d'abrégier la démonstration de certains théorèmes, et, aussi, établissent un lien entre la géométrie, d'une part, la cristallographie et l'art, d'autre part. Le chapitre 4 est consacré à cet aspect « dynamique » de la géométrie. Une autre technique « moderne » fait appel à l'*inversion* qui traite de points et de cercles en considérant une droite comme un cercle passant par « le point à l'infini ». Le chapitre 5 en donnera quelques aperçus. Enfin, une troisième technique est celle de la *géométrie projective* qui, sans s'attacher aux distances et aux angles, met en lumière l'analyse entre points et droites (celles-ci étant infiniment étendues et non limitées à de simples segments). Ici, deux points quelconques sont joints par une droite, et deux droites quelconques se coupent en un point; de plus, deux droites parallèles sont considérées comme ayant un point commun situé sur « la droite à l'infini ». Dans le chapitre 6, on trouvera quelques indications sur ce sujet.

Aujourd'hui encore, la géométrie possède toutes les vertus que les éducateurs lui attribuaient il y a une génération : elle existe toujours dans la nature, et attend qu'on la découvre et qu'on apprécie. Pour l'élève, et surtout par ses propriétés projectives, la géométrie ne cesse de constituer une excellente introduction à l'axiomatique. Elle possède encore l'attrait esthétique qu'elle a toujours eu, et la beauté de ses résultats ne s'est pas estompée. En fait, elle est plus utile et même plus nécessaire aux savants et aux mathématiciens qu'elle ne le fut jamais : on le voit en considérant, par exemple, les formes des orbites des satellites artificiels et la géométrie à quatre dimensions dans le continu espace-temps.

Au cours des siècles, la géométrie s'est développée. De nouveaux concepts, de nouvelles méthodes d'action furent forgés : à l'élève, ils apporteront défi et surprise. Par les moyens qui nous conviendront le mieux, revenons donc à Euclide; et, pour nous-mêmes, découvrons quelques-uns des plus récents résultats. Peut-être pourrons-nous, ainsi, retrouver un peu de l'intimidation émerveillée que suscita en nous le premier contact avec la géométrie...

Les auteurs sont particulièrement reconnaissants au Dr Anneli Lax de son patient concours, et de toutes ses utiles suggestions.

H. S. M. C.

Toronto et New York.

S. L. G.

# Table des matières

<b>Chapitre 1 - Points et droites associés à un triangle</b>	<b>1</b>
1.1 - Loi des sinus	2
1.2 - Théorème de Jean de Céva	4
1.3 - Points remarquables	7
1.4 - Cercles inscrit et ex-inscrits	12
1.5 - Théorème de Steiner-Lehmus	15
1.6 - Triangle orthique	18
1.7 - Triangle complémentaire et droite d'Euler	20
1.8 - Cercle des neuf points	22
1.9 - Triangles podaires	25
<b>Chapitre 2 — Quelques propriétés des cercles</b>	<b>30</b>
2.1 - Puissance d'un point par rapport à un cercle	30
2.2 - Axe radical de deux cercles	35
2.3 - Faisceaux de cercles	39
2.4 - Complément sur les hauteurs et l'orthocentre d'un triangle	40
2.5 - Droite de Simson	46
2.6 - Théorème de Ptolémée et sa généralisation	48
2.7 - Complément sur la droite de Simson	49
2.8 - Le papillon	52
2.9 - Théorème de Morley	54
<b>Chapitre 3 - Points alignés et droites concourantes</b>	<b>58</b>
3.1 - Quadrangles; théorème de Varignon	59
3.2 - Quadrangles inscriptibles; formule de Brahmagupta	65
3.3 - Triangles de Napoléon	69
3.4 - Théorème de Ménélaüs	75
3.5 - Théorème de Pappus	77
3.6 - Triangles homologiques; théorème de Desargues	80
3.7 - Hexagones	84
3.8 - Théorème de Pascal	85
3.9 - Théorème de Brianchon	88

<b>Chapitre 4 - Transformation des figures .....</b>	<b>92</b>
4.1 - Translation .....	93
4.2 - Rotation .....	95
4.3 - Demi-tour .....	98
4.4 - Symétrie par rapport à un axe .....	100
4.5 - Problème de Fagnano .....	101
4.6 - Problème des trois vases .....	103
4.7 - Homothétie .....	109
4.8 - Similitude .....	111
4.9 - Transformations successives .....	117
 <b>Chapitre 5 - Introduction à la géométrie de l'inversion .....</b>	 <b>120</b>
5.1 - Couples de points séparés .....	120
5.2 - Rapport anharmonique .....	125
5.3 - L'inversion .....	126
5.4 - Inversion dans le plan .....	131
5.5 - Cercles orthogonaux .....	134
5.6 - Théorème de Feuerbach .....	138
5.7 - Faisceaux de cercles .....	140
5.8 - Ecart inversif .....	144
5.9 - Fonctions hyperboliques .....	149
 <b>Chapitre 6 - Introduction à la géométrie projective .....</b>	 <b>155</b>
6.1 - Réciprocité polaire .....	156
6.2 - Cercle conjugué à un triangle .....	161
6.3 - Coniques .....	162
6.4 - Foyers et directrices .....	166
6.5 - Le plan projectif .....	168
6.6 - Coniques à centre .....	171
6.7 - Projection stéréographique et projection centrale .....	175
 <b>Conseils et solutions des exercices .....</b>	 <b>180</b>
 <b>Index .....</b>	 <b>209</b>

# 1

## Points et droites associés à un triangle

*Comportant une bibliographie bien plus étendue que celles de l'arithmétique et de l'algèbre réunies, et au moins aussi vaste que celle de l'analyse, la géométrie, plus que toute autre branche des mathématiques, est un trésor riche de choses intéressantes et à demi-oubliées dont une génération pressée n'a pas le temps de jouir.*

E.T. Bell

Ce chapitre a pour but de rappeler certaines de ces choses à demi-oubliées dont le Dr Bell a parlé, d'établir quelques théorèmes nouveaux, étudiés depuis Euclide, et d'appliquer les résultats découverts à des problèmes intéressants. Pour cela, nous considérerons un triangle quelconque, ainsi que les points et droites les plus remarquables qui lui sont associés : le centre du cercle circonscrit, les médianes, le centre de gravité, les bissectrices, les centres des cercles inscrit et ex-inscrits, les hauteurs, l'orthocentre, la droite d'Euler, et le centre du cercle des neuf points.

Les bissectrices amènent naturellement à mentionner, en passant, le théorème de Steiner-Lehmus, dont, pendant une centaine d'années, la démonstration fut réputée difficile, alors qu'aujourd'hui nous la considérons comme vraiment très facile.

Enfin, à partir d'un triangle et d'un point  $P$  quelconque, nous déduisons un autre triangle ayant pour sommets les pieds des perpendiculaires abaissées de  $P$  sur les côtés du triangle initial. Cette idée conduit à des développements amusants dont certains ne seront exposés qu'au chapitre 2.

### 1.1. LOI DES SINUS

La loi des sinus est un théorème de trigonométrie auquel nous aurons souvent recours. D'ordinaire, malheureusement, on le trouve dans les ouvrages sous une forme partielle moins utile que ne pourrait l'être un théorème général. Nous nous permettons donc, tout d'abord, d'établir la loi des sinus sous la forme qui nous convient.

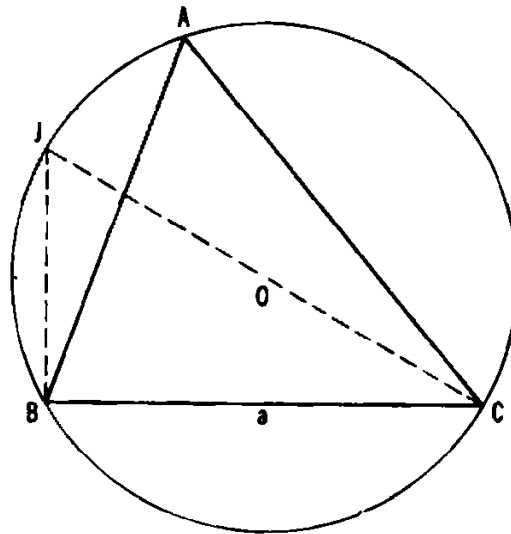


Fig. 1.1A

Soient un triangle  $ABC$  et le cercle, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , qui lui est circonscrit, comme on le voit sur les figures 1-1A et 1-1B. Traçons le diamètre  $CJ$  et la corde  $BJ$ . Dans les deux cas envisagés, l'angle  $\widehat{CBJ}$  est droit, puisqu'il est inscrit dans une demi-circonférence; et on a, dans les deux cas aussi,

$$\sin J = \frac{a}{CJ} = \frac{a}{2R}.$$

Dans la figure 1.1A, les angles  $J$  et  $A$  sont égaux comme inscrits dans le même arc de cercle; tandis que, dans la figure 1-1B, on a  $J = \pi - A$ , puisque les angles opposés d'un quadrilatère inscrit sont supplémentaires. Mais, en nous rappelant que  $\sin \theta = \sin (\pi - \theta)$ , on voit que, dans les deux cas, on a  $\sin J = \sin A$ ; et, par suite,  $\sin A = a/2R$ , d'où :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Appliquée aux autres angles du triangle  $ABC$ , la même méthode donne

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \quad \text{et} \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Nous pouvons donc énoncer ainsi la loi des sinus :

**Théorème 1.11** — Dans un triangle  $ABC$  dont le cercle circonscrit a pour rayon  $R$ , on a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

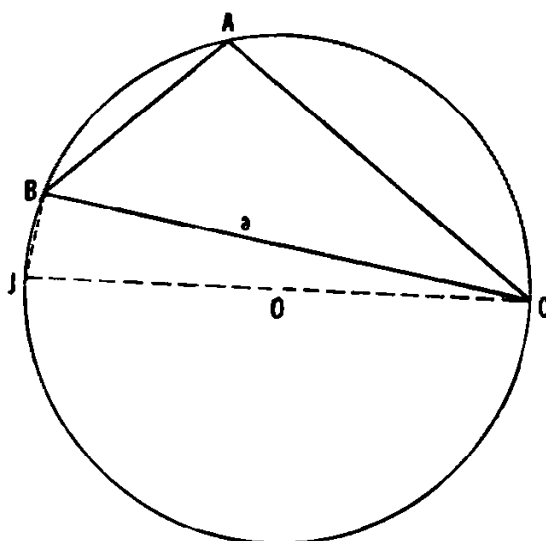


Fig. 1.1B

Dans la suite, nous représenterons l'aire d'un triangle  $ABC$  par  $S(ABC)$ , celle d'un quadrilatère  $PQRS$  par  $S(PQRS)$ ; etc.

### Exercices

- 1 - Montrer que <sup>(1)</sup>, dans tout triangle  $ABC$ , même si l'un des angles  $B$  et  $C$  est obtus, on a :  $a = b \cos C + c \cos B$ . Appliquer la loi des sinus pour établir la « formule d'addition »

$$\sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B.$$

- 2 - Dans tout triangle  $ABC$ , on a

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

<sup>(1)</sup> Dans les exercices suivants, on omettra, comme implicites, les mots « montrer que ».

3 - Dans tout triangle  $ABC$ , on a :  $S(ABC) = abc/4R$ .

4 - Si  $p$  et  $q$  sont les rayons de deux cercles passant par un point  $A$  et tangents en  $B$  et  $C$ , respectivement, à la droite  $BC$ , on a :  $pq = R^2$ ,  $R$  étant le rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

## 1.2. THÉORÈME DE JEAN DE CÉVA

Nous appellerons *segment de Ceva* le segment rectiligne joignant l'un des sommets d'un triangle à un point quelconque du côté opposé. Par exemple, si  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont des points situés respectivement sur les côtés  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  d'un triangle  $ABC$ , les segments  $AX$ ,  $BY$  et  $CZ$  sont des segments de Ceva. Cette dénomination vient du nom du mathématicien italien Jean de Ceva qui, en 1678, énonça le très utile théorème suivant :

**Théorème 1.21** — Si, dans un triangle  $ABC$ , les trois segments de Ceva  $AX$ ,  $BY$ ,  $CZ$ , sont concourants, on a :

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

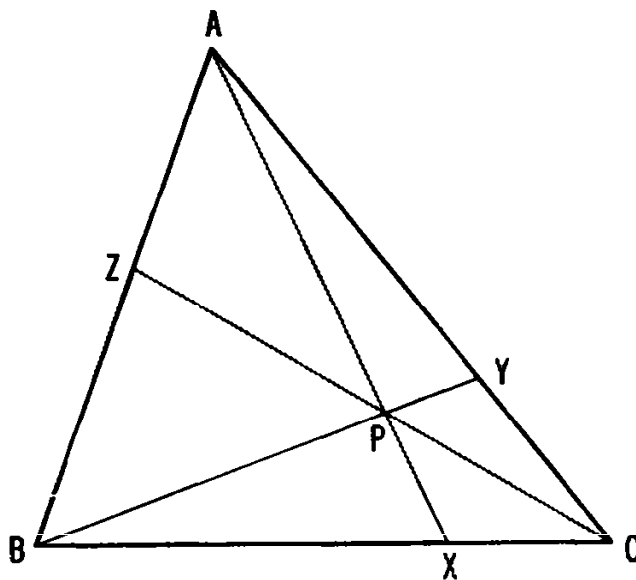


Fig. 1.2A

Des segments (ou droites) sont *concourants* s'ils passent tous par un même point  $P$ . Pour démontrer le théorème de Jean de Ceva, rappelons d'abord que si l'une des hauteurs d'un triangle est égale à l'une des hau-



teurs d'un autre triangle, les aires des deux triangles sont proportionnelles aux côtés perpendiculaires à ces hauteurs. En particulier, dans la figure 1-2A, on a

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S(ABX)}{S(AXC)} = \frac{S(PBX)}{S(PXC)} = \frac{S(ABX) - S(PBX)}{S(AXC) - S(PXC)} = \frac{S(ABP)}{S(CAP)}.$$

D'une façon analogue

$$\frac{CY}{YA} = \frac{S(BCP)}{S(ABP)}, \quad \text{et} \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{S(CAP)}{S(BCP)}.$$

En multipliant ces trois expressions membre à membre, il vient :

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{S(ABP)}{S(CAP)} \cdot \frac{S(BCP)}{S(ABP)} \cdot \frac{S(CAP)}{S(BCP)} = 1.$$

La réciproque de ce théorème est également vraie :

**Théorème 1.22** — Si trois segments de Ceva,  $AX$ ,  $BY$ ,  $CZ$ , satisfont à la relation

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1,$$

ils sont concourants.

Pour le vérifier, supposons que les deux premiers segments se coupent en  $P$ , comme plus haut, et que le troisième segment passant par  $P$  soit  $CZ'$ . D'après le théorème 1.21, on aura alors

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Mais comme, par hypothèse, on a

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1,$$

il s'ensuit que

$$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}.$$

$Z'$  coïncide donc avec  $Z$ , et nous avons ainsi démontré que  $AX$ ,  $BY$  et  $CZ$  sont concourants.

**Exercices**

- 1 - Si  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les milieux des côtés d'un triangle, les trois segments de Céva correspondants sont concourants.
- 2 - Les trois segments de Céva perpendiculaires aux côtés d'un triangle sont concourants.
- 3 - Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles non égaux dont les côtés sont respectivement parallèles, comme sur la figure 1.2B : les trois droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  (prolongées) sont concourantes. (De tels triangles sont dits *homothétiques*; nous les considérerons à nouveau en 4.7).

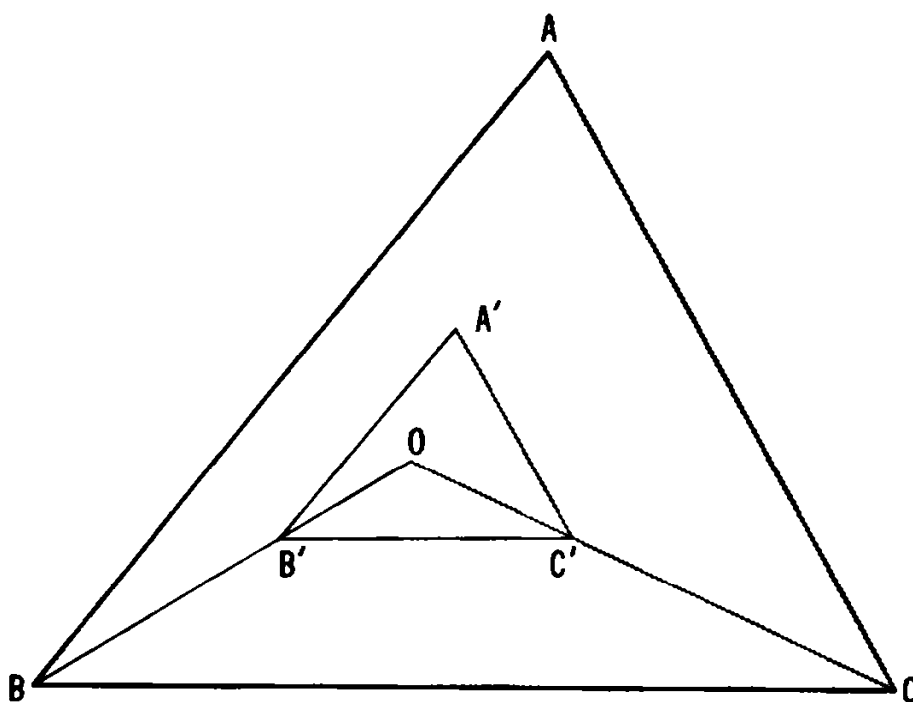


Fig. 1.2B

- 4 - Soit  $AX$  un segment de Céva, de longueur  $p$ , qui divise  $BC$  en deux segments  $BX = m$  et  $XC = n$  (voir fig. 1.2C). On a alors :

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

*Conseil.* Additionner les expressions donnant les cosinus des deux angles supplémentaires de sommet  $X$  en fonction des côtés des triangles  $ABX$  et  $ACX$ . Le résultat obtenu exprime le *théorème de Stewart*, que ce dernier énonça en 1746. Ce théorème fut probablement découvert par Archimède environ 300 ans avant J-C., mais sa première démonstration connue est due à Simson en 1751.

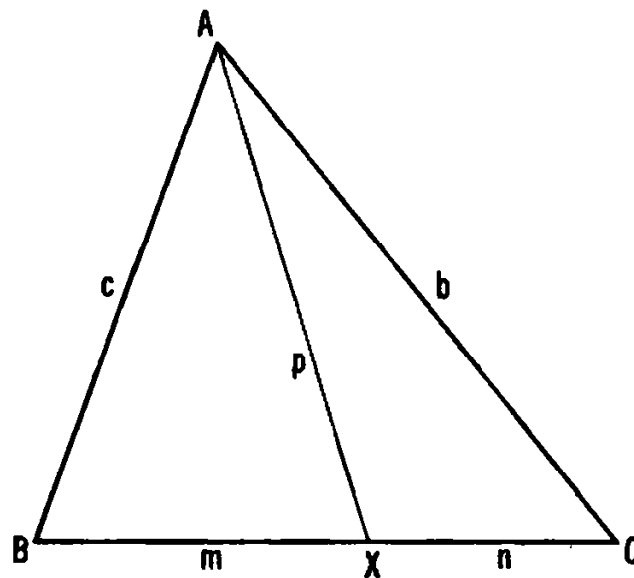


Fig. 1.2C

### 1.3. POINTS REMARQUABLES

Il existe de nombreux points et droites remarquables associés à un triangle : nous devons donc nous borner à n'en considérer que quelques-uns. L'un d'eux, que nous avons déjà mentionné, est *le centre du cercle circonscrit* à un triangle. Soit  $O$  ce point (voir fig. 1-3A); il est l'intersec-

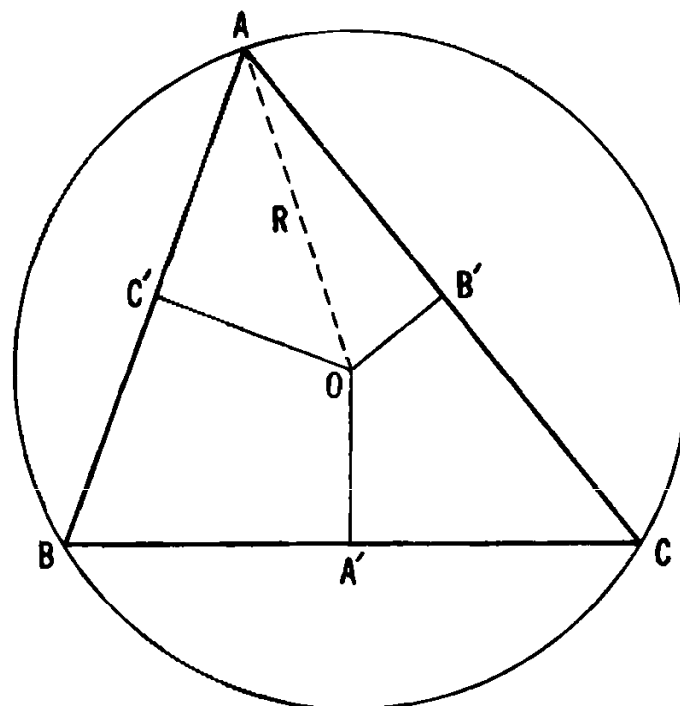


Fig. 1.3A

tion des trois perpendiculaires élevées au milieu des côtés du triangle. Le rayon du cercle circonscrit a déjà été noté  $R$ .

On appelle *médianes* les segments de Céva joignant les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés. Ainsi, sur la figure 1-3B (voir ci-dessous), les segments  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont les médianes du triangle  $ABC$ . Il s'ensuit que :  $BA' = A'C$ ,  $CB' = B'A$  et  $AC' = C'B$ . D'après le théorème 1.21, on voit que les médianes sont concourantes. Leur point commun est appelé *centre de gravité* du triangle : si ce dernier était découpé dans un matériau de densité uniforme et suspendu par un fil fixé au centre de gravité, il serait en équilibre.

Revenant à la figure 1-3B, un fait nous frappe. Les triangles  $GBA'$  et  $GA'C$ , ayant des bases égales ( $BA' = A'C$ ) et une hauteur commune, leurs aires sont égales — et représentées par la même lettre  $x$  sur la figure. Pour la même raison, on a :

$$S(GCB') = S(GB'A) = Y \quad \text{et} \quad S(GAC') = S(GC'B) = Z.$$

Mais on a également  $S(CAC') = S(CC'B)$ , c'est-à-dire  $2y + z = z + 2x$ ; donc  $x = y$ . D'une façon analogue :  $S(ABA') = S(AA'C)$ , d'où  $y = z$ . Finalement :  $x = y = z$ , d'où :

**Théorème 1.31** — *Les médianes d'un triangle partagent celui-ci en six petits triangles d'aires égales.*

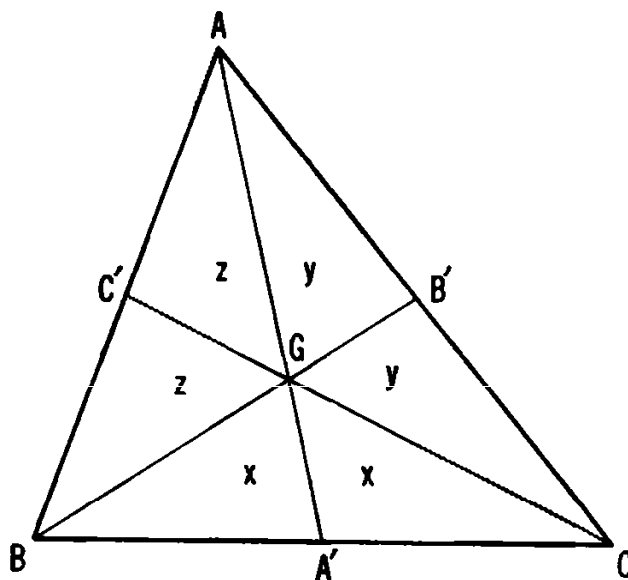


Fig. 1.3B

Poursuivant l'examen de la figure 1.3B, nous remarquons à nouveau que  $S(GAB) = 2 S(GBA')$ . Ces triangles ayant une hauteur commune (elle serait abaissée de  $B$  sur  $AA'$ ), il en résulte que  $AG = 2 GA'$ . Et on trouverait pareillement :  $BG = 2 GB'$ , et  $CG = 2 GC'$ . Ainsi :

**Théorème 1.32** — *Les médianes d'un triangle se divisent mutuellement dans le rapport 2:1 ; ou, en d'autres termes, se coupent aux deux tiers de leur longueur à partir des sommets d'où elles sont issues.*

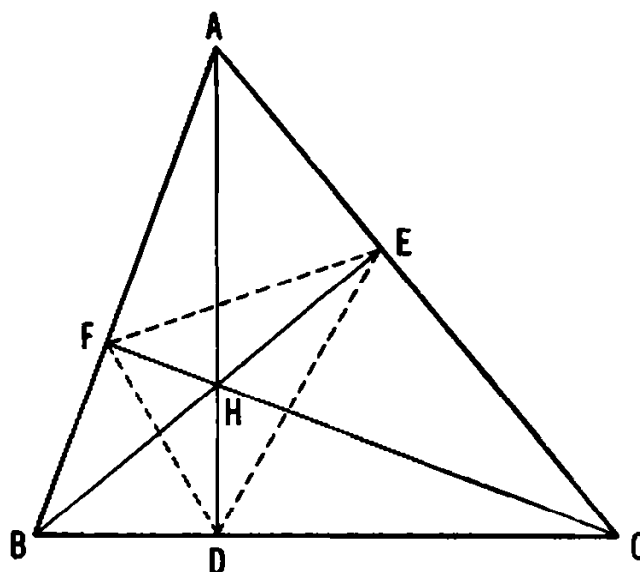


Fig. 1.3C

On appelle *hauteurs* du triangle  $ABC$  les trois segments  $AD$ ,  $BE$  et  $CF$  perpendiculaires, respectivement, aux côtés  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$ . Comme nous l'avons vu dans l'exercice 2 du paragraphe 1.2, la réciproque du théorème de Jean de Céva montre que ces hauteurs sont concourantes; leur point commun,  $H$ , est appelé l'*orthocentre* du triangle. Les points  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont les *pieds* des hauteurs; en les joignant, on obtient le *triangle orthique* <sup>(1)</sup> du triangle  $ABC$ .

Les trois bissectrices intérieures constituent un autre important ensemble de segments de Céva; on voit l'une d'elles,  $AL$ , sur la figure

(<sup>1</sup>) Voir E. ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE, *Traité de géométrie*, 7<sup>e</sup> éd., tome I et II, 1900, réédition Jacques Gabay, 1997 – Tome I, p. 448, et F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE), *Exercices de géométrie*, 6<sup>e</sup> éd., 1920, réédition Jacques Gabay, 1991 – N<sup>os</sup> 292 i et m, 664 a, 1052 et 1136.

1.3D. En appliquant le théorème 1.11 aux deux triangles  $ABL$  et  $ALC$  (dont les angles en  $L$ , étant supplémentaires, ont des sinus égaux), on a :

$$\frac{BL}{\sin A/2} = \frac{c}{\sin L} \quad \text{et} \quad \frac{LC}{\sin A/2} = \frac{b}{\sin L},$$

d'où :

$$\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}.$$

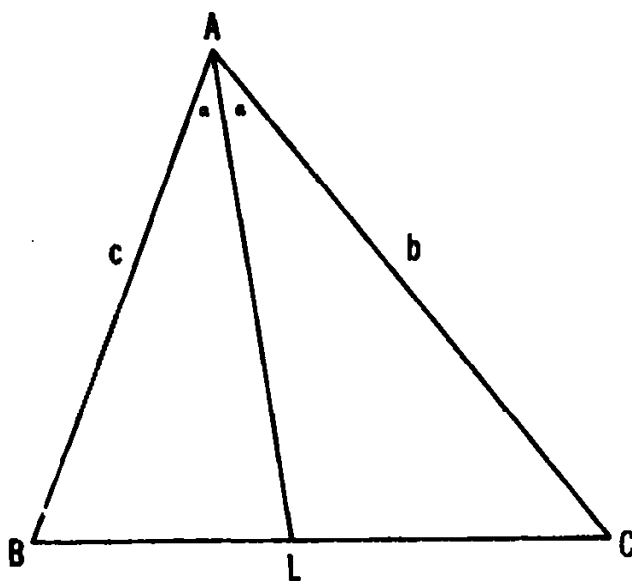


Fig. 1.3D

Des résultats analogues pouvant être établis en considérant les bissectrices intérieures des angles  $B$  et  $C$ , on a ainsi démontré le théorème suivant :

**Théorème 1.33** — *La bissectrice intérieure de l'un quelconque des angles d'un triangle divise le côté opposé en segments proportionnels aux longueurs des côtés adjacents.*

Tout point de la bissectrice  $AL$  est équidistant de  $CA$  et de  $AB$ ; et, d'une manière analogue, tout point de la bissectrice intérieure de l'angle  $B$  (non représentée sur la figure 1.3D) serait équidistant de  $AB$  et de  $BC$ . Le point  $I$ , intersection de ces deux bissectrices (voir fig. 1.3E) est donc à la même distance,  $r$ , des trois côtés :

**Théorème 1.34** — *Les bissectrices intérieures des trois angles d'un triangle sont concourantes.*

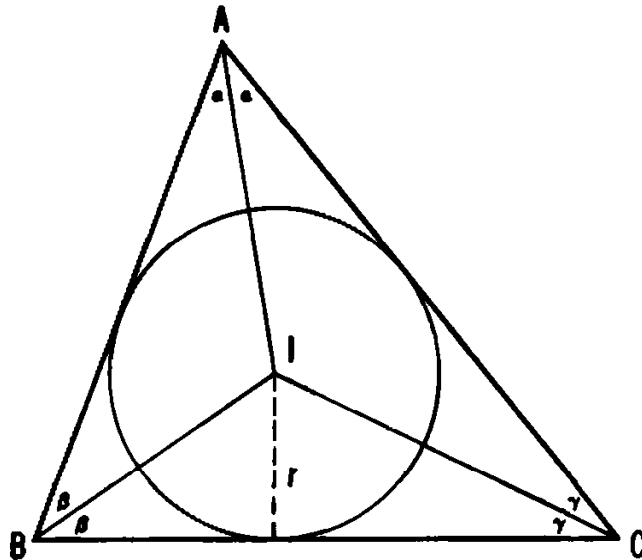


Fig. 1.3E

Le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r$  est tangent aux trois côtés du triangle : on l'appelle le *cercle inscrit*.

### Exercices

- 1 - Si un triangle a un angle obtus, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont situés à l'extérieur de ce triangle.
- 2 - Trouver le rapport de l'aire d'un triangle donné à l'aire d'un triangle dont les côtés sont égaux aux médianes du premier.
- 3 - Tout triangle ayant deux médianes égales est isocèle.
- 4 - Tout triangle ayant deux hauteurs égales est isocèle.
- 5 - Etablir une autre démonstration du théorème 1.34 en appliquant les théorèmes 1.22 et 1.33.
- 6 - Calculer la longueur de la médiane  $AA'$  (voir fig. 1.3B) en fonction des longueurs  $a, b, c$  des côtés du triangle  $ABC$ .  
*Conseil :* Appliquer le théorème de Stewart (Exercice 4 du paragraphe 1.2).
- 7 - Le carré de la longueur de la bissectrice  $AL$  (voir fig. 1.3D) a pour expression :

$$bc \left[ 1 - \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 \right].$$

- 8 - Dans un triangle rectangle de côtés 3, 4, 5, trouver la longueur de la bissectrice de l'angle droit.
- 9 - Dans un triangle, le produit de deux côtés est égal au produit du diamètre du cercle circonscrit par la hauteur correspondant au troisième côté.

#### 1.4. CERCLES INSCRIT ET EX-INSCRITS

La figure 1.4A représente le cercle inscrit tangent aux côtés  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$  en  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  respectivement. Les deux tangentes à un cercle menées par un point extérieur à ce dernier étant égales, on voit que  $AY = AZ$ ,  $BZ = BX$ ,  $CX = CY$ . D'où, avec les notations indiquées sur la figure :

$$y + z = a, \quad z + x = b, \quad x + y = c.$$

En additionnant ces expressions membre à membre, et en désignant, avec Euler, le demi-périmètre par  $s$ , on a :

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s,$$

d'où

$$x + y + z = s$$

et :

**Théorème 1.41** —  $x = s - a$ ,  $y = s - b$ ,  $z = s - c$ .

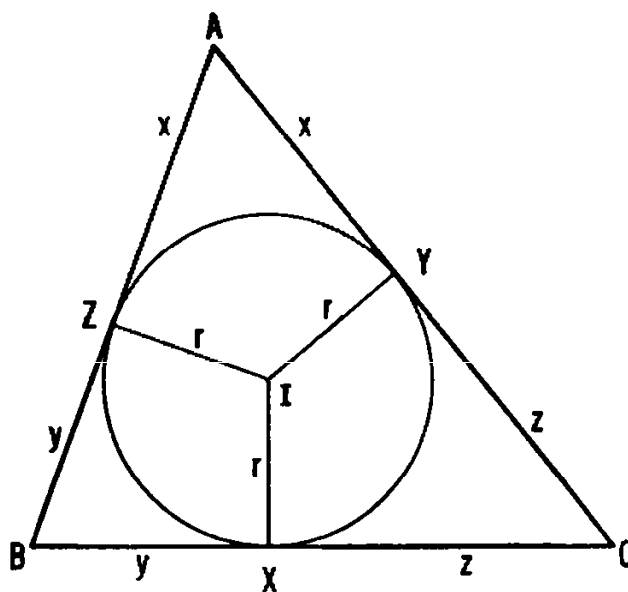


Fig. 1.4A



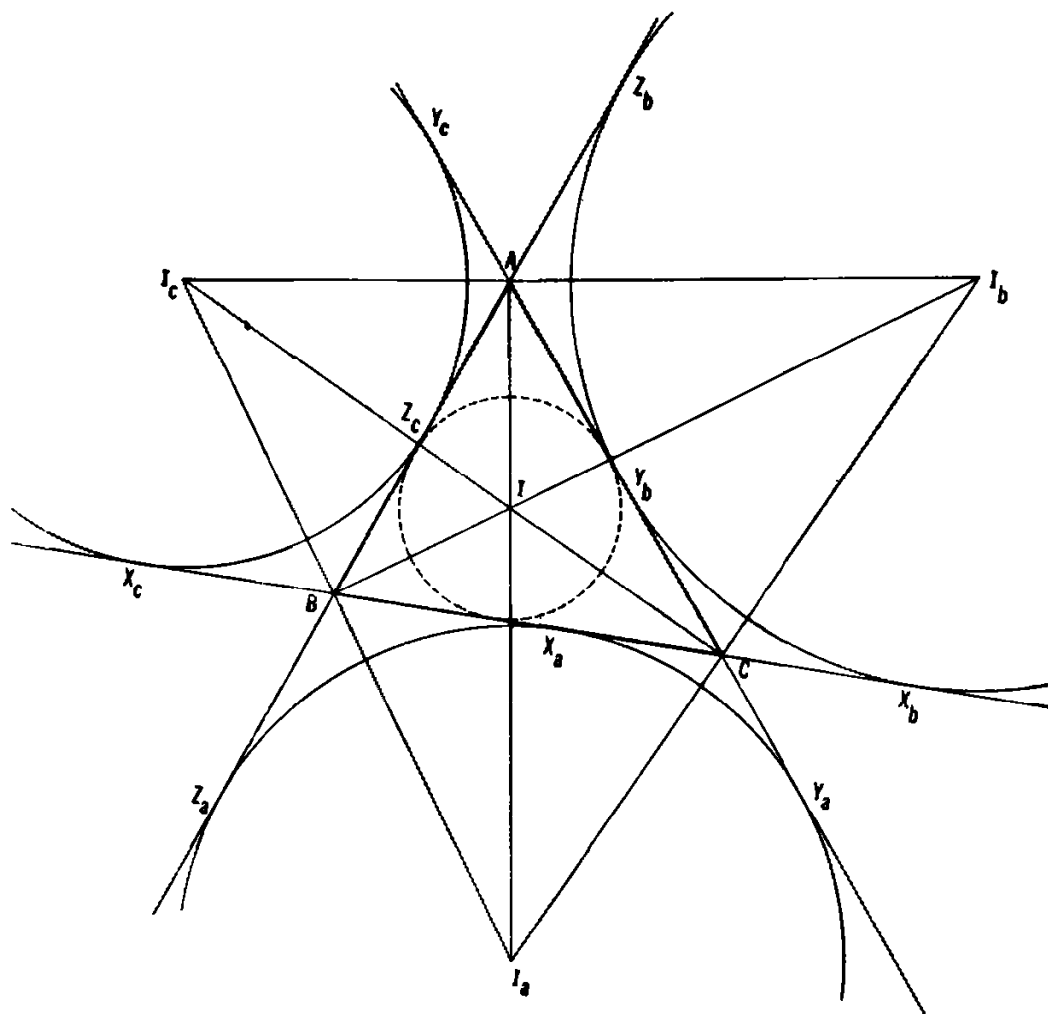


Fig. 1.4B

L'aire du triangle  $IBC$  (dont la base est  $BC = a$  et la hauteur correspondante  $r$ ) est  $S(IBC) = ar/2$ . En additionnant les expressions analogues pour les triangles  $ICA$  et  $IAB$ , on obtient;  $1/2 (a + b + c)r = sr$ . D'où :

**Théorème 1.42** —  $S(ABC) = sr$ .

Sur la figure 1.4B, le triangle  $I_a I_b I_c$  a pour côtés les bissectrices extérieures des angles  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Tout point de  $I_c I_a$ , bissectrice extérieure de l'angle  $B$ , est équidistant de  $AB$  et de  $BC$ ; et, de même, tout point de  $I_a I_b$  est équidistant de  $BC$  et de  $CA$ . Le point  $I_a$ , commun aux deux bissectrices, est donc à la même distance,  $r_a$ , des trois côtés. Etant équidistant de  $AB$  et de  $AC$ ,  $I_a$  doit donc appartenir au lieu géométrique des

points équidistants de ces droites, c'est-à-dire à  $AI$ , bissectrice intérieure de l'angle  $A$  :

**Théorème 1.43** — *Les bissectrices extérieures de deux des angles d'un triangle et la bissectrice intérieure du troisième angle sont concourantes.*

Etant tangent aux trois côtés, le cercle de centre  $I_a$  et de rayon  $r_a$  est l'un des trois *cercles ex-inscrits*. Ces derniers ont pour centre  $I_a, I_b, I_c$  et pour rayons  $r_a, r_b, r_c$ . Chaque cercle ex-inscrit est tangent à l'un des côtés du triangle et aux prolongements des deux autres. Le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits sont parfois appelés les quatre cercles *tri-tangents* du triangle.

Selon les notations des points de contact indiquées sur la figure 1.4B, on voit que les deux tangentes  $BX_b$  et  $BZ_b$  sont égales. De plus

$$\begin{aligned} BX_b + BZ_b &= BC + CX_b + Z_bA + AB \\ &= BC + CY_b + Y_bA + AB = a + b + c = 2s. \end{aligned}$$

Ainsi, les tangentes au cercle ex-inscrit de centre  $I_b$ , issues de  $B$ , ont pour longueur  $s$  : il en serait de même pour les tangentes menées par les autres sommets. Donc :

$$AY_a = AZ_a = BZ_b = BX_b = CX_c = CY_c = s.$$

Et comme  $CX_b = BX_b - BC = s - a$  (et de même pour les autres tangentes), on a :

$$\begin{aligned} BX_c &= BZ_c = CX_b = CY_b = s - a, \\ CY_a &= CX_a = AY_c = AZ_c = s - b, \\ AZ_b &= AY_b = BZ_a = BX_a = s - c. \end{aligned}$$

### Exercices

- 1 - Si trois cercles de centres  $A, B, C$  sont tels que chacun soit tangent aux deux autres, leurs rayons sont  $s - a, s - b, s - c$  ( $a, b, c$  et  $s$  étant les côtés et le demi-périmètre du triangle  $ABC$  — voir fig. 1.4A).
- 2 - En donnant à  $s, r$  et  $R$  leur sens habituel, on a :  $abc = 4srR$ .
- 3 - Les segments  $AX, BY$  et  $CZ$  de la figure 1.4A sont concourants. Leur point commun est le *point de Gergonne* du triangle  $ABC$ .
- 4 - Le triangle  $ABC$  est le triangle orthique <sup>(1)</sup> du triangle  $I_aI_bI_c$  (fig. 1.4B).

<sup>(1)</sup> Voir la définition au paragraphe 1.3 de ce chapitre (N.d.T.).

$$5 - S(ABC) = (s - a)r_a = (s - b)r_b = (s - c)r_c \text{ (Cf. théorème 1.42).}$$

$$6 - \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

### 1.5. THÉORÈME DE STEINER-LEHMUS

Il existe un certain nombre de problèmes de géométrie qui semblent exercer un attrait particulier sur quiconque a, un jour, achoppé contre leur difficulté. Même dans les siècles passés, ce fut là, semble-t-il, un trait caractéristique de la géométrie. Il suffit, en effet, de rappeler les trois célèbres problèmes de l'antiquité : duplication du cube, trisection d'un angle quelconque, et quadrature du cercle. Les tentatives faites pour les résoudre ont conduit à développer maintes branches nouvelles des mathématiques. Même actuellement, de prétendus mathématiciens envoient des « solutions » de ces problèmes et mettent le lecteur au défi de prouver qu'elles sont fausses.

Voici, notamment, un théorème qui suscite toujours de l'intérêt :

**Théorème 1.51** — *Tout triangle ayant deux bissectrices égales (comptées entre un sommet et le côté opposé) est isocèle.*

En 1840, l'énoncé de ce théorème fut envoyé au grand géomètre suisse Jacob Steiner par C. L. Lehmus (dont, sans cela, le nom aurait été oublié depuis longtemps) en demandant une démonstration purement géométrique, Steiner donna cette dernière sous une forme assez compliquée qui inspira à maints autres mathématiciens la recherche de méthodes plus simples. Sur le théorème de Steiner-Lehmus, des articles parurent dans diverses revues en 1842, 1844, 1848; puis, presque chaque année, de 1854 à 1864; enfin, assez régulièrement, pendant les cent années suivantes.

L'une des démonstrations les plus simples repose sur les deux lemmes suivants :

**Lemme 1.511** — *Si, dans un cercle, deux cordes sous-tendent des angles inscrits aigus et inégaux, le plus petit angle correspond à la plus petite corde.*

**DÉMONSTRATION** — A deux cordes égales correspondent deux angles au centre égaux et deux angles inscrits, de valeur moitié, égaux. Tandis que si deux cordes sont inégales, la moins longue, étant la plus éloignée

du centre, sous-tend un angle au centre plus petit que celui correspondant à l'autre corde, donc un angle inscrit plus petit également.

**Lemme 1.512** — Si deux des angles d'un triangle sont inégaux, au plus petit d'entre eux correspond la bissectrice intérieure la plus longue.

DÉMONSTRATION — Soit  $ABC$  un triangle tel que  $B < C$  (voir fig. 1.5A); et soient  $BM$  et  $CN$  les bissectrices des angles  $B$  et  $C$  : nous voulons démontrer que  $BM > CN$ . Soit  $M'$  le point de  $BM$  tel que  $\widehat{M'CN} = B/2$ . Cet angle étant égal à  $\widehat{M'BN}$ , il s'ensuit que les quatre points  $N, B, C, M'$  sont situés sur un cercle. Et puisque,

$$B < 1/2 (B + C) < 1/2 (A + B + C)$$

on a :

$$\widehat{CBN} < \widehat{M'CB} < \pi/2.$$

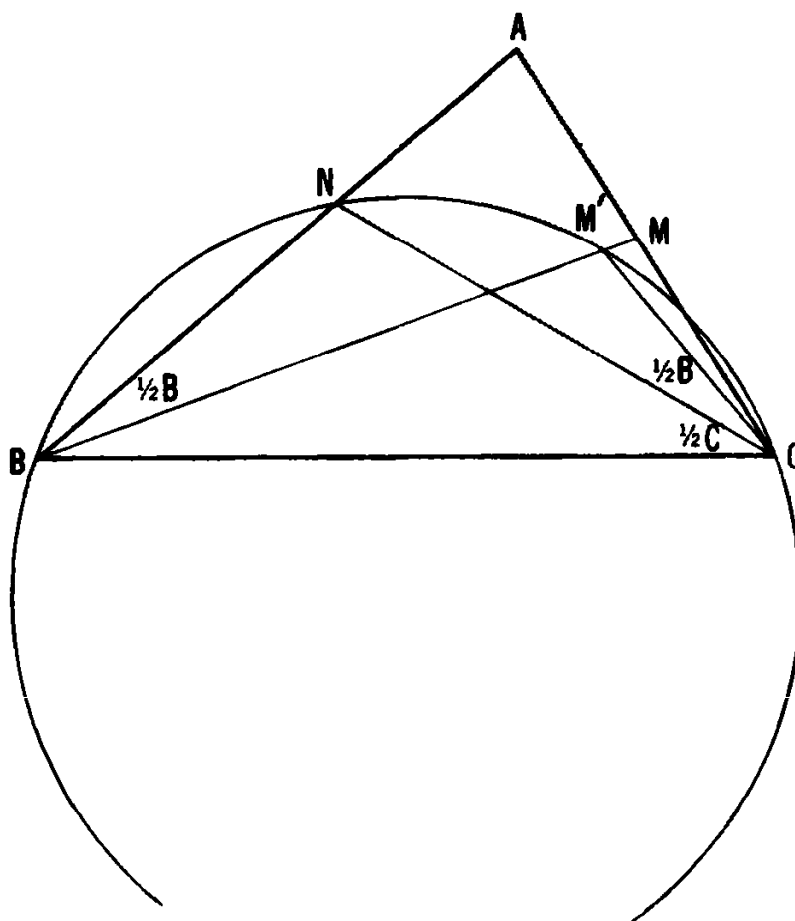


Fig. 1.5A

Or, d'après le lemme 1.511,  $CN < M'B$ . Il en résulte donc :

$$BM > BM' > CN.$$

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME** — Il arrive souvent que l'on puisse énoncer un théorème sous une forme « contraposée » équivalente. Par exemple, au lieu de dire *tous les hommes sont mortels*, on pourrait, tout aussi bien, dire *les immortels ne sont pas des hommes*. Pareillement, au lieu de démontrer le théorème 1.51 lui-même, il nous suffira de démontrer que si, dans le triangle  $ABC$ ,  $B \neq C$ , il s'ensuit que  $BM \neq CN$ . Or ceci est justement une conséquence immédiate du Lemme 1.512.

La démonstration ci-dessus a une histoire amusante. Elle fut établie par deux ingénieurs anglais, G. Gilbert et D. MacDonnell, et publiée dans la revue *American Mathematical Monthly* (1963, n° 7, pp. 79-80) avec la *Note de l'Editeur* suivante :

« Dans son compte rendu du livre de Coxeter *Introduction à la Géométrie* (Scientific American, 204, 1961, pp. 166-168), Martin Gardner a exposé ce théorème d'une manière si intéressante que des centaines de lecteurs lui envoyèrent leurs propres démonstrations. Il prit la peine de passer au crible cette masse de notes jusqu'à ce que, seul, subsistât le joyau ci-dessus. »

Certains lecteurs peuvent ne pas être satisfaits de ce que, comme la plupart des autres, la démonstration de Gilbert et MacDonnell soit « indirecte » : au lieu du théorème de Steiner-Lehmus lui-même, les auteurs démontrent, en effet, la contraposée (lemme 1.512). Si plusieurs démonstrations prétendument directes ont été proposées, chacune d'elles est, en fait, une démonstration indirecte déguisée. Pour voir que tel est bien le cas, rappelons que, dans la pratique, seuls les théorèmes les plus simples sont démontrés complètement. Les autres le sont en recourant à d'autres théorèmes déjà connus qui forment toute une suite remontant aux axiomes ; et si l'un quelconque de ces théorèmes comporte une preuve indirecte, la démonstration qui les utilise ne saurait, à bon droit, prétendre être directe. D'autre part, certains des théorèmes les plus simples et les plus fondamentaux sont démontrés de façon indirecte : si donc nous tenions absolument à n'avoir que des preuves directes, notre provision de théorèmes ne contiendrait plus que d'extrêmes banalités. Cette remarque peut-elle nous affliger en quoi que ce soit ? Comme l'a écrit le grand mathématicien anglais G. H. Hardy : « L'une des meilleures armes du mathématicien est la *preuve par l'absurde* si chère à Euclide.

Dans une partie d'échecs, il n'y a pas, de loin, de coup qui la vaille : un joueur peut risquer de perdre un pion, ou même une pièce, mais, pour le mathématicien, c'est la partie entière qui est en jeu ».

### Exercices

- 1 - Soient  $BM$  et  $CN$  les bissectrices extérieures des angles  $B = 12^\circ$  et  $C = 132^\circ$  d'un triangle  $ABC$ , chacune d'elles étant limitée au côté opposé. Comparer leurs longueurs sans recourir aux fonctions trigonométriques (O. Bottema).
- 2 - Si l'on veut appliquer le théorème 1.51 au triangle de Bottema (ci-dessus) — où nul ne peut nier que l'on ait  $B < C$  — à quel moment notre démonstration est-elle inexacte ?
- 3 - Etablir une démonstration « directe » du théorème de Steiner-Lehmus en utilisant la formule donnée dans l'exercice 7, paragraphe 1.3.

### 1.6. TRIANGLE ORTHIQUE

La figure 1.6A ci-dessous représente un triangle  $ABC$  aux angles aigus, le centre  $O$  de son cercle circonscrit, son orthocentre  $H$  et son triangle orthique <sup>(1)</sup>, en désignant ainsi le triangle dont les sommets sont

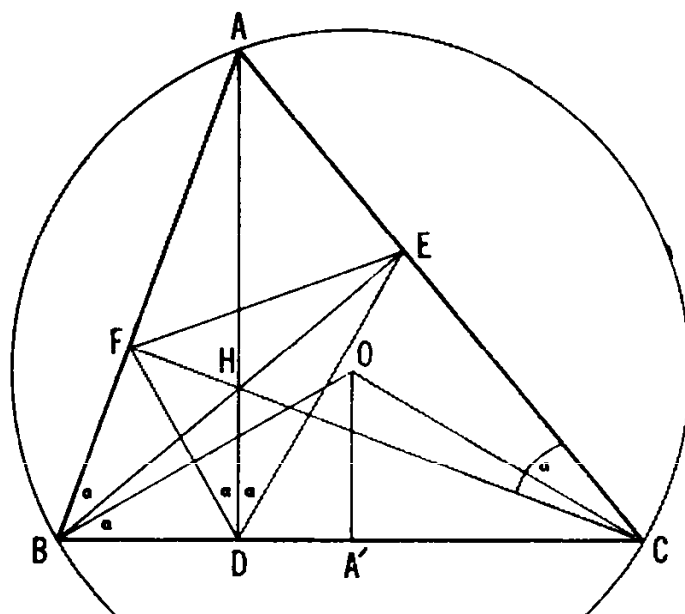


Fig. 1.6A

<sup>(1)</sup> Voir paragraphe 1.3 (N.d.T.).

les pieds,  $D, E, F$ , des hauteurs; son examen est fructueux. Précisons, tout d'abord, pourquoi la même valeur  $\alpha = \pi/2 - A$  y a été indiquée pour plusieurs angles. Le triangle  $OA'C$  étant semblable au triangle  $JBC$  de la figure 1.1A, il s'ensuit que  $\widehat{A'OC} = A$ ; les angles en  $B$  et  $C$  du triangle  $OBC$  ont donc pour valeur commune  $\pi/2 - A$ . D'autre part, dans les triangles  $ABE$  et  $ACF$ , les angles  $\widehat{EBA}$  et  $\widehat{ACF}$  sont égaux, comme compléments de  $A$ ; cette égalité aurait, d'ailleurs, pu être déduite du fait que,  $\widehat{BEC}$  et  $\widehat{BFC}$  étant des angles droits, le quadrilatère  $BCEF$  est inscriptible dans un cercle. Des remarques analogues à propos des quadrilatères  $BDHF$  et  $CEHD$  conduisent finalement aux égalités

$$\widehat{HDF} = \widehat{HBF} = \widehat{EBF} = \widehat{ECF} = \widehat{ECH} = \widehat{EDH}.$$

$HD$  est donc la bissectrice de l'angle  $\widehat{EDF}$ .

De même, les angles  $\widehat{FED}$  et  $\widehat{DFE}$  ont pour bissectrices respectives  $HE$  et  $HF$ . On obtient ainsi un premier résultat intéressant : les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles du triangle orthique; ou, en d'autres termes :

**Théorème 1.61** — *Dans un triangle dont les angles sont aigus, l'orthocentre est le centre du cercle inscrit du triangle orthique.*

Comme nous l'avons remarqué, la figure 1.6A montre que  $\widehat{HDF} = \widehat{DBO}$ .  $HD$  étant perpendiculaire à  $DB$ ,  $FD$  doit l'être aussi à  $OB$ . Pareillement,  $DE$  est perpendiculaire à  $OC$ , et  $EF$  à  $OA$ .

### Exercices

- 1 - Les triangles  $AEF$ ,  $BDF$ ,  $DEC$  et  $ABC$  sont semblables (voir fig. 1.6A).
- 2 - Représenter une figure comportant les mêmes éléments que la figure 1.6A, mais lorsque l'angle  $A$  est obtus. De nos conclusions précédentes, lesquelles faudrait-il modifier ?
- 3 - Dans un triangle ayant un angle obtus, l'orthocentre est l'un des centres des cercles ex-inscrits du triangle orthique.
- 4 -  $\widehat{HAO} = |B - C|$ .

### 1.7. TRIANGLE COMPLÉMENTAIRE ET DROITE D'EULER

Nous appellerons triangle complémentaire <sup>(1)</sup> d'un triangle donné, celui qui a pour sommets les milieux des côtés de ce dernier. Ainsi, sur la figure 1.7A, le triangle  $A'B'C'$  sera le triangle complémentaire du triangle  $ABC$  dont les milieux des côtés sont  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ ; on y voit également que  $G$  est le point commun aux deux médianes  $AA'$  et  $BB'$  de  $ABC$ , que  $H$  est le point commun aux deux hauteurs  $AD$  et  $BE$  de  $ABC$ , enfin que  $O$  est le point commun à deux hauteurs de  $A'B'C'$ . Le simple examen de la figure 1.7A fournit un nombre remarquable de résultats.

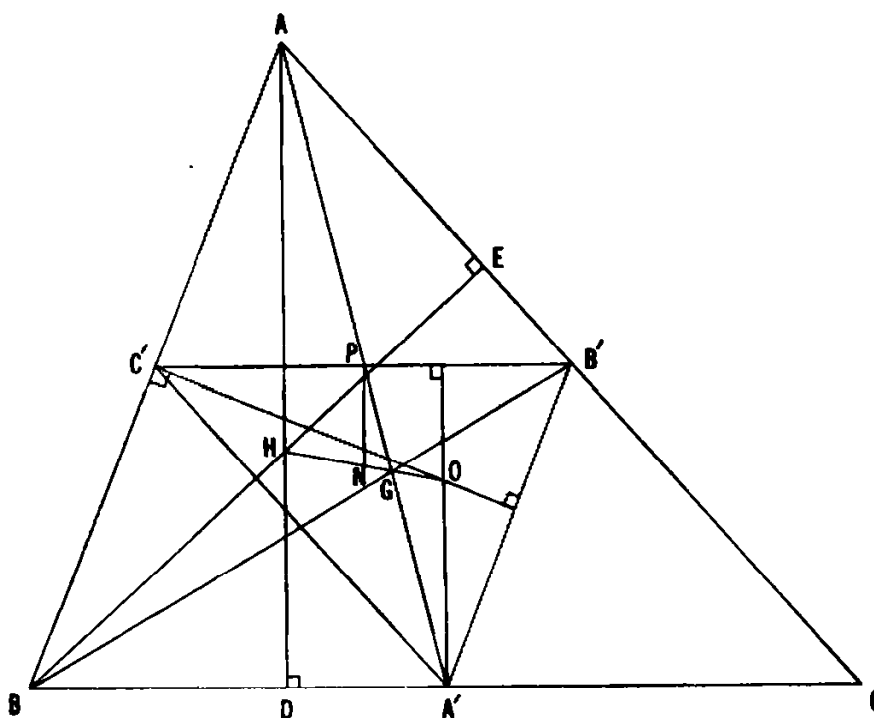


Fig. 1.7A

Tout d'abord, ayant leurs côtés parallèles, les deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont semblables. De plus  $C'B' = BC/2$ ; ainsi, le rapport entre deux segments rectilignes correspondants quelconques sera  $1/2$  (ce qui précise la simple correspondance entre côtés). En fait, les segments  $B'C'$ ,  $C'A'$  et  $A'B'$  partagent le triangle  $ABC$  en quatre triangles égaux.

On voit, de plus, que  $AC'A'B'$  est un parallélogramme; d'où il résulte que  $AA'$  coupe  $C'B'$  en son milieu. Les médianes du triangle  $A'B'C'$

(1) Voir E. ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE, *op. cit.* – Tome I, p. 447.



recouvrent donc celles du triangle  $ABC$ ; et, par suite, ces deux triangles ont pour centre de gravité le même point  $G$ . Enfin,  $P$  est, à la fois, le milieu de  $B'C'$  et de  $AA'$ .

D'autre part, les deux hauteurs du triangle  $A'B'C'$ , représentées sur la figure 1.7A sont les perpendiculaires au milieu des côtés  $AB$  et  $BC$  du triangle  $ABC$  : on en conclut que leur point d'intersection,  $O$ , est en même temps l'orthocentre de  $A'B'C'$  et le centre du cercle circonscrit à  $ABC$  — d'où il résulte que  $AH = 2OA'$ .

De plus, selon le théorème 1.32,  $AG = 2GA'$ . Et comme  $AD$  et  $OA'$  sont parallèles, comme étant perpendiculaires à  $BC$ , on a finalement, dans les triangles semblables  $HAG$  et  $OA'G$  :

$$\widehat{HAG} = \widehat{OA'G} \quad \text{et} \quad \widehat{AGH} = \widehat{A'GO}.$$

Ceci montre que les trois points  $O$ ,  $G$  et  $H$  sont alignés et que  $HG = 2GO$ .

**Théorème 1.71** — *Dans tout triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés; de plus, la distance entre l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit est divisée dans le rapport 2/1 par le centre de gravité.*

On appelle *droite d'Euler*, la droite sur laquelle ces trois points sont situés.

Observons de plus près la figure 1.7A :  $N$  désigne le point où la droite d'Euler,  $HO$ , rencontre la droite qui est issue de  $P$  en étant perpendiculaire à  $B'C'$ . Ainsi, les trois droites  $AH$ ,  $PN$  et  $A'O$ , étant perpendiculaires à  $B'C'$ , sont parallèles entre elles. De plus, puisque  $AP = PA'$ ,  $PN$  est à égale distance des deux autres; et, par suite,  $N$  est le milieu de  $HO$ .

La discussion ci-dessus a été faite en considérant le côté  $B'C'$  du triangle  $A'B'C'$ . Mais, si l'on appliquait le même raisonnement à l'un des deux autres côtés, on verrait que le segment  $HO$  reste fixe et qu'il est partagé en deux parties égales par la perpendiculaire au milieu du nouveau côté considéré. On peut donc affirmer que les perpendiculaires au milieu des trois côtés du triangle  $A'B'C'$  passent par le point  $N$ , milieu de  $HO$ . En d'autres termes,  $N$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $A'B'C'$ .

En résumé, le centre du cercle circonscrit au triangle complémentaire est situé au milieu du segment  $HO$  de la droite d'Euler du triangle initial. De plus, le triangle  $A'B'C'$ , étant semblable au triangle  $ABC$  dans le

rapport  $1/2$ , le rayon de son cercle circonscrit est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit à  $ABC$ .

Nous devons ici dire quelques mots d'Euler dont le nom revient si souvent, et dans tant de branches des mathématiques. Léonard Euler naquit à Bâle en 1707. Il fut admis à l'Académie de Saint-Petersbourg en 1727, et, en 1741, partit pour Berlin pour y occuper la chaire de mathématiques de l'Académie de Prusse. Revenu à Saint-Petersbourg en 1766, il y resta jusqu'à sa mort, en 1783.

Euler fut un travailleur infatigable; par son activité, il a enrichi tous les domaines des mathématiques. Où que l'on regarde en effet, on trouve soit un théorème ou une formule d'Euler, soit une méthode d'Euler. 473 des mémoires qu'il écrivit furent publiés pendant sa vie; 200 peu après sa mort; 61, enfin, plus tard. De plus, tous ses travaux furent exécutés dans des conditions pénibles, car, en 1735, il perdit la vue d'un œil et, en 1766, il devint tout à fait aveugle. Son adresse dans les calculs était remarquable, et sa compréhension intuitive des mathématiques prodigieuse. Maintes fois encore, dans cet ouvrage, nous retrouverons le nom d'Euler.

### Exercices

- 1 - En s'inspirant de la figure 1.1B, et non plus de 1.1A, dessiner une nouvelle figure 1.7A, et vérifier que notre démonstration du théorème 1.71 reste valable lorsque le triangle  $ABC$  a un angle obtus.
- 2 -  $\overline{OH}^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$ .
- 3 -  $DA' = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - c^2}$ .
- 4 - Si la droite d'Euler est parallèle au côté  $BC$  d'un triangle  $ABC$ , on a la relation  $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 3$ .

### 1.8. CERCLE DES NEUF POINTS

Pour faciliter un peu les choses, supprimons quelques lignes sur la figure 1.7A, puis ajoutons en quelques autres de manière à réaliser la figure 1.8A; sur cette dernière,  $K$ ,  $L$  et  $M$  sont les milieux des parties de hauteurs comprises entre les sommets et l'orthocentre, soit  $AH$ ,  $BH$  et  $CH$ . Les triangles  $ABC$  et  $HBC$  ont en commun le côté  $BC$ ; les milieux de leurs autres côtés étant respectivement  $B'$  et  $C'$  pour  $ABC$ , et  $L$  et  $M$

pour  $HBC$ , il s'ensuit que les segments  $B'C'$  et  $LM$  sont parallèles à  $BC$  et égaux à sa moitié. D'une façon analogue,  $LC'$  et  $BM'$  sont parallèles à  $AH$  et égaux à sa moitié. Le quadrilatère  $B'C'LM$  est donc non seulement un parallélogramme — comme ayant ses côtés parallèles deux à deux — mais aussi un rectangle puisque  $BC$  et  $AH$  sont perpendiculaires. On verrait pareillement que  $A'B'KL$  et  $C'A'MK$  sont aussi des rectangles. Il s'ensuit que  $A'K$ ,  $B'L$  et  $C'M$  sont trois diamètres d'un cercle, comme dans la figure 1.8B. L'angle  $\widehat{A'DK}$  étant droit (voir fig. 1.8A), le cercle ayant  $A'K$  comme diamètre passe par  $D$  (voir fig. 1.8B) et, de même, par  $E$  et  $F$ . En résumé :

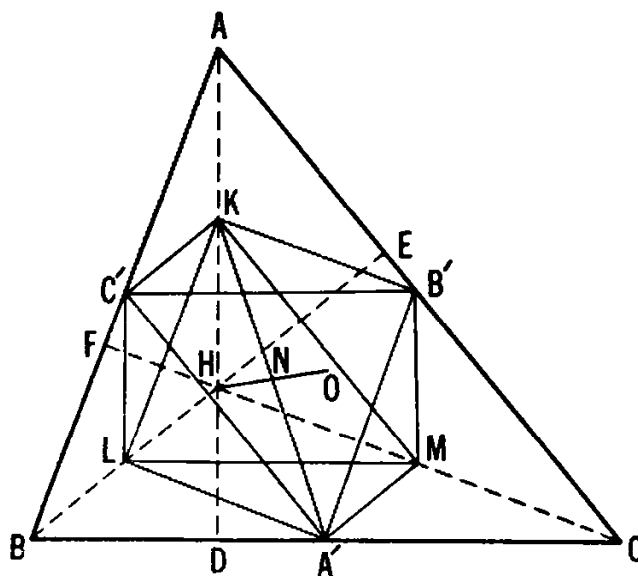


Fig. 1.8A

**Théorème 1.81** — *Dans un triangle quelconque, les milieux des trois côtés, les pieds des trois hauteurs et les milieux des segments compris entre les trois sommets et l'orthocentre sont situés sur le même cercle dont le rayon est  $R/2$  <sup>(1)</sup>.*

Avec Jean-Victor Poncelet, nous appellerons ce cercle *le cercle des neuf points* <sup>(2)</sup> du triangle. Les points  $K$ ,  $L$  et  $M$  étant diamétralement opposés aux points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , respectivement, les triangles  $KLM$  et

<sup>(1)</sup>  $R$  étant le rayon du cercle circonscrit au triangle (N.d.T.).

<sup>(2)</sup> On l'appelle également cercle d'Euler. Voir à ce sujet R. DELTHEIL et D. CAIRE, *Géométrie*, 4<sup>e</sup> éd., 1950 et *Compléments*, 1951, réédition Jacques Gabay, 1989 – G., p. 77, et E. ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE, *op. cit.*, Tome I, p. 306-307.

$A'B'C'$  peuvent se déduire l'un de l'autre par un demi-tour (c'est-à-dire une rotation de  $180^\circ$  ayant pour centre le centre de ce cercle). Il est clair que, permutant les deux triangles égaux, cette transformation doit également permuter leurs orthocentres  $H$  et  $O$ . Le centre du cercle des neuf points est donc au milieu de  $HO$ , en un point déjà désigné par la lettre  $N$  pour rappeler le nombre neuf. En d'autres termes :

**Théorème 1.82** — *Le centre du cercle des neuf points est situé sur la droite d'Euler à égale distance de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit.*

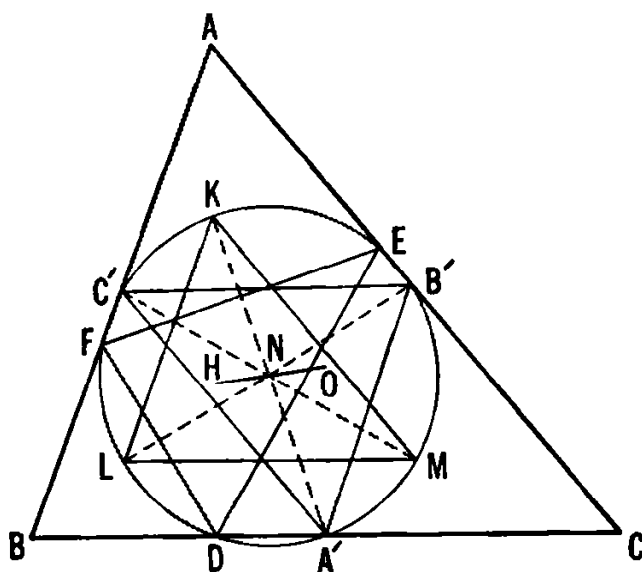


Fig. 1.8B

L'histoire des deux théorèmes n'est pas très claire. D'après un problème publié dans une revue anglaise par B. Bevan en 1804, il semble qu'ils étaient déjà connus à cette époque. C'est à tort que, parfois, on les attribue à Euler, celui-ci ayant démontré, dès 1765, que le triangle orthique et le triangle complémentaire avaient le même cercle circonscrit. En réalité, les auteurs européens parlent souvent du « cercle d'Euler ». La première démonstration complète paraît être celle que Poncelet publia en 1821. C'est plus tard encore que K. Feuerbach redécouvrit le résultat partiel d'Euler en lui adjoignant une nouvelle propriété si remarquable qu'elle a amené maints auteurs à appeler le cercle des neuf points « cercle de Feuerbach ». D'après le théorème de Feuerbach (que nous démontrons dans le paragraphe 5.6), *le cercle des neuf points est tangent aux quatre cercles inscrit et ex-inscrits.*

**Exercices**

- 1 - Le quadrilatère  $AKA'O$  (fig. 1.8A) est un parallélogramme.
- 2 - Sur le cercle des neuf points de la figure 1.8B, les points  $K$ ,  $L$  et  $M$  partagent en deux parties égales les arcs  $EF$ ,  $FD$  et  $DE$ , respectivement.
- 3 - Le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  est le cercle des neuf points du triangle  $I_a I_b I_c$  (voir fig. 1.4B).
- 4 - Soient trois cercles égaux qui passent par un même point  $P$  et se coupent en trois autres points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Démontrer que le rayon commun aux trois cercles est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , et que  $P$  est l'orthocentre de ce dernier.
- 5 - Le cercle des neuf points d'un triangle  $ABC$  coupe les côtés de ce dernier suivant les angles  $|B - C|$ ,  $|C - A|$  et  $|A - B|$ .

**1.9. TRIANGLES PODAIRES**

Le triangle podaire et le triangle complémentaire sont deux cas particuliers d'un type plus général de triangles associés à un triangle donné. Soit donc  $P$  un point quelconque situé à l'intérieur du triangle  $ABC$ ,

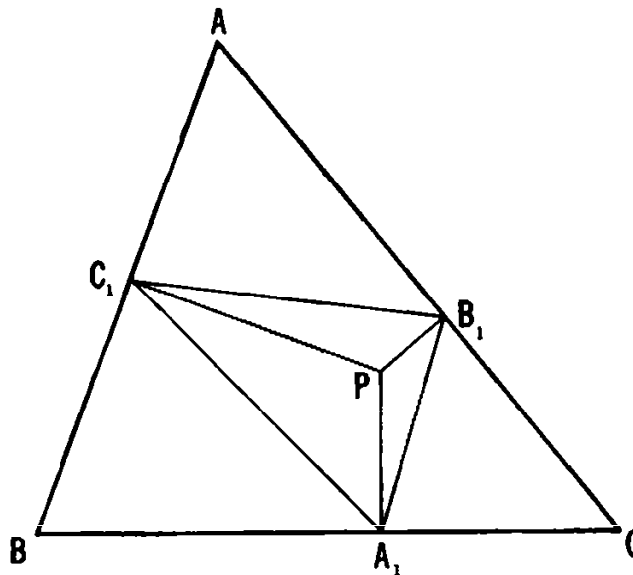


Fig. 1.9A

et  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$ , les perpendiculaires abaissées de  $P$  sur les côtés de ce dernier, comme on le voit sur la figure 1.9A. Nous appellerons le triangle  $A_1B_1C_1$  le *triangle podaire* du point  $P$  par rapport au

triangle  $ABC$  <sup>(1)</sup>. La condition, pour  $P$ , d'être à l'intérieur de  $ABC$  peut être supprimée sous réserve (comme nous le justifierons dans le paragraphe 2.5) que  $P$  ne soit pas situé sur le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Si  $P$  est confondu, soit avec l'orthocentre, soit avec le centre du cercle circonscrit, on retrouve évidemment soit le triangle podaire, soit le triangle complémentaire, respectivement.

Examinons attentivement la figure 1.9A. Les points  $B_1$  et  $C_1$  sont situés sur le cercle de diamètre  $AP$ , puisque les angles  $\widehat{PC_1A}$  et  $\widehat{PB_1A}$  sont droits; en d'autres termes,  $P$  est situé sur le cercle circonscrit au triangle  $AB_1C_1$ . Si, à ce dernier et au triangle  $ABC$ , on applique la loi des sinus, il vient

$$\frac{B_1C_1}{\sin A} = AP, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R,$$

donc

$$B_1C_1 = a \frac{AP}{2R}.$$

On aurait, de même :

$$C_1A_1 = b \frac{BP}{2R} \quad \text{et} \quad A_1B_1 = c \frac{CP}{2R}.$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

**Théorème 1.91** — *Si le point origine des perpendiculaires est situé à des distances  $x$ ,  $y$  et  $z$  des sommets du triangle  $ABC$ , les côtés du triangle podaire sont égaux à :*

$$\frac{ax}{2R}, \quad \frac{by}{2R}, \quad \frac{cz}{2R}.$$

Le cas particulier où  $x = y = z = R$  est, naturellement, bien connu.

Voici maintenant un exercice intéressant qui fait intervenir des triangles podaires successifs et constitue, en même temps, un exemple charmant d'imagination en géométrie. Pour la première fois, semble-t-il, l'éditeur J. Neuberg le donna sous forme d'un supplément à la sixième édition (1892) de l'ouvrage classique de John Casey, *A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid* <sup>(2)</sup>. La figure 1.9B représente un

(<sup>1</sup>) Voir E. ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE, *op. cit.* — Tome I, p. 455, et F. G.-M., *op. cit.* — N° 2282.

(<sup>2</sup>) Suite aux six premiers livres des *Eléments* d'Euclide.

point  $P$  situé à l'intérieur du triangle  $ABC$ , et à partir duquel on construit  $A_1B_1C_1$ , triangle podaire de  $P$  par rapport à  $ABC$ . D'une façon analogue, et toujours à partir de  $P$ , on construit  $A_2B_2C_2$  et  $A_3B_3C_3$  qui sont, respectivement, les triangles podaires de  $P$  par rapport de  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$ . Finalement, Neuberg a découvert le résultat que voici :

**Théorème 1.92** — *Le troisième triangle podaire  $A_3B_3C_3$ , est semblable au triangle initial  $ABC$ .*

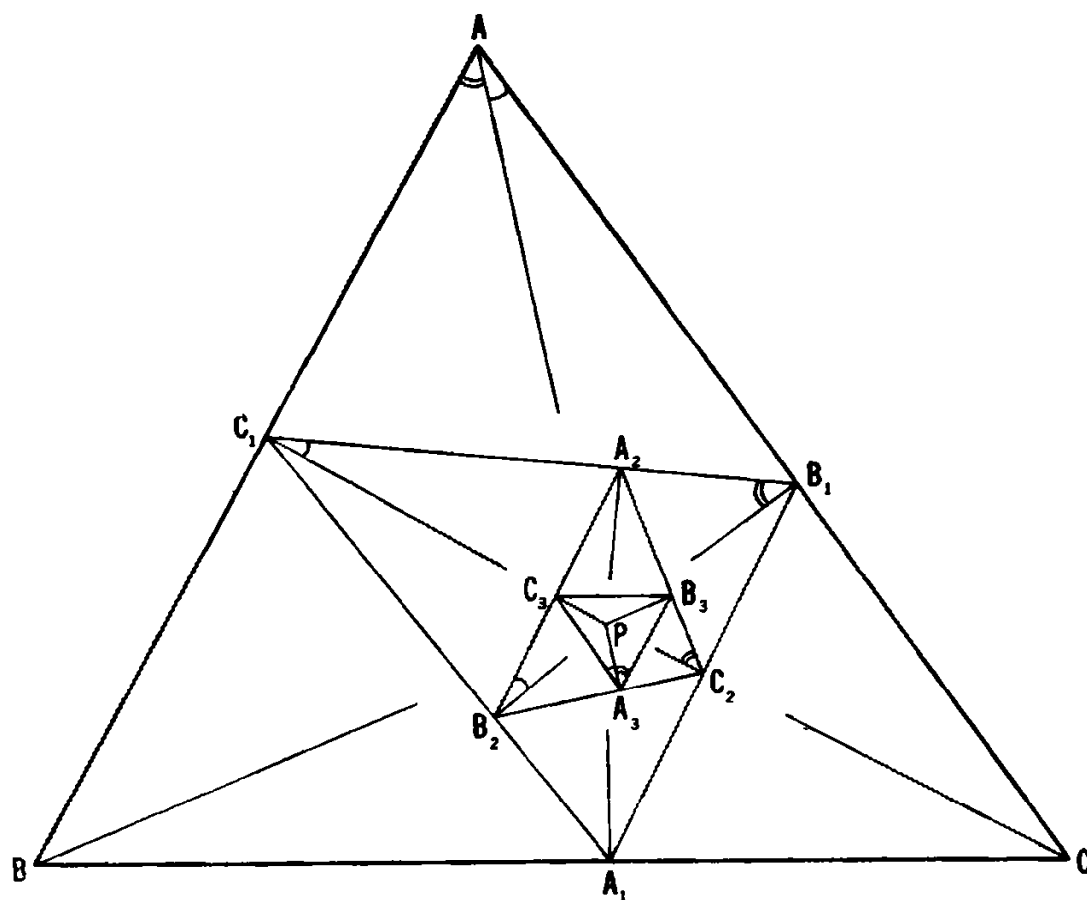


Fig. 1.9B

La démonstration est d'une simplicité surprenante. En fait, après avoir joint  $A$  à  $P$ , elle apparaît sur la figure car  $P$  est situé sur les cercles circonscrits aux triangles  $AB_1C_1$ ,  $A_2B_1C_2$ ,  $A_3B_3C_2$ ,  $A_2B_2C_1$  et  $A_3B_2C_3$ , ce qui entraîne les égalités d'angles :

$$\begin{aligned}\widehat{C_1AP} &= \widehat{C_1B_1P} = \widehat{A_2B_1P} = \widehat{A_2C_2P} \\ &= \widehat{B_3C_2P} = \widehat{B_3A_3P}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{PAB_1} &= \widehat{PC_1B_1} = \widehat{PC_1A_2} = \widehat{PB_2A_2} \\ &= \widehat{PB_2C_3} = \widehat{PA_3C_3}.\end{aligned}$$

En d'autres termes, les deux parties de l'angle  $A$  (indiquées par un arc simple et un arc double) se retrouvent en  $C_1$ , pour la première, et en  $B_1$ , pour la seconde, puis, en  $B_2$  et  $C_2$ , enfin, toutes deux, en  $A_3$ . Il s'ensuit que les triangles  $ABC$  et  $A_3B_3C_3$  ont leurs angles en  $A$  et  $A_3$  égaux. Comme il en est de même pour leurs angles en  $B$  et  $B_3$ , le théorème est démontré. Il est intéressant de suivre, sur la figure, cette sorte de « ballet » des angles lorsqu'on passe de  $A$  à  $A_3$ ; il est aussi précis que les mouvements d'une équipe bien entraînée.

Le Dr A. Oppenheim, vice-recteur chancelier de l'Université de Malaisie, à Singapour, a généralisé la propriété ci-dessus des triangles podaires successifs. Il a trouvé, en effet qu'à *partir d'un polygone à  $n$  côtés, le  $n^{\text{ème}}$  polygone podaire qu'on en déduit lui est semblable*. La vérification de ce résultat dans le cas de  $n = 4$  est très instructive.

Ici, arrêtons nos recherches après avoir fait une partie de ce que nous voulions entreprendre : partant de faits bien connus, nous avons établi quelques résultats simples mais importants. Il existe maints problèmes se prêtant à être résolus par les méthodes indiquées ci-dessus; certains, d'ailleurs, sont des « colles » bien connues que le lecteur aura peut-être déjà rencontrées. Nous terminerons ce chapitre en proposant, à titre d'exercices, cinq de ces casse-tête traditionnels.

### Exercices

- 1 - Soit un triangle équilatéral  $ABC$ . Une droite passant par  $A$ , coupe le côté  $BC$  en  $Q$  et le cercle circonscrit au triangle en  $P$ . Démontrer la relation

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$$

- 2 - Soit un carré  $ABCD$ , et, à l'intérieur de ce carré, un point  $P$  tel que (voir la fig. 1.9C) le triangle  $PAB$  soit isocèle et ait deux angles égaux à  $15^\circ$ . Démontrer que  $P$ ,  $C$  et  $D$  sont les sommets d'un triangle équilatéral.
- 3 - Soit un parallélogramme  $ABCD$  et un point  $P$  extérieur tel que  $PB$  et  $PD$  fassent des angles égaux avec les côtés  $BC$  et  $CD$ , respectivement (voir fig. 1.9D). Démontrer que les angles  $\widehat{CPB}$  et  $\widehat{DPA}$  sont égaux. (Malgré son aspect, la figure 1.9D est naturellement une figure plane).



- 4 - Soit  $ABC$  (voir fig. 1.9E) un triangle isocèle dont les deux angles égaux en  $B$  et  $C$  sont de  $80^\circ$  chacun. Les deux segments  $BD$  et  $CE$  divisent les angles en  $B$  et  $C$ , respectivement, le premier en deux angles de  $20^\circ$  et  $60^\circ$ , le second en deux angles de  $30^\circ$  et  $50^\circ$ . Trouver la valeur de l'angle  $\widehat{EDB}$ .

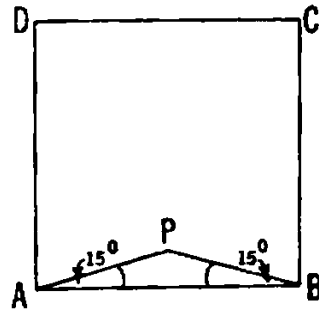


Fig. 1.9C

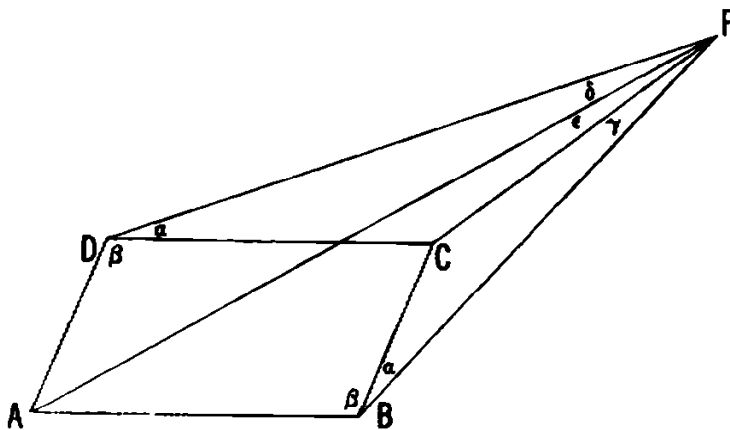


Fig. 1.9D

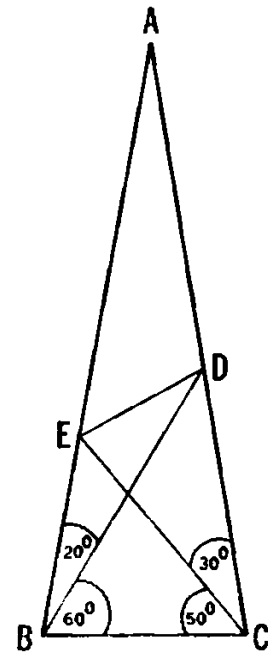


Fig. 1.9E

- 5 - Soient un triangle équilatéral  $ABC$  et le demi-cercle décrit sur  $AC$  comme diamètre à l'extérieur du triangle. Si deux droites issues du sommet  $B$  partagent ce demi-cercle en trois arcs égaux, le côté  $AC$  est lui-même partagé en trois parties égales par ces droites.

# 2

## Quelques propriétés des cercles

*Bien que les travaux des Grecs aient été féconds, non seulement en géométrie mais encore dans les domaines les plus variés des mathématiques, nous les avons cependant, aujourd'hui, dépassés en tout point, certainement même en géométrie.*

F. Klein

Au cours des siècles, on a toujours eu la plus haute considération pour le cercle dont la forme parfaite a touché tant les philosophes que les astronomes. Jusqu'à ce que Kepler énonçât ses lois, il était inconcevable que les planètes pussent se mouvoir sur des orbites autres que des cercles. Si, de nos jours, des termes tels que « carré », « droite », et d'autres analogues, ont parfois des significations incertaines, il n'en a jamais été de même pour le cercle qui, dégagé de toute superstition absurde et pseudo-scientifique, demeure aussi digne d'estime qu'il le fut toujours.

Faute de place, il nous est impossible de mentionner plus que quelques-unes des propriétés les plus intéressantes établies, depuis Euclide, à propos du cercle et de ses liens avec les triangles et d'autres polygones.

### 2.1. PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE

Rappelons, tout d'abord, deux des théorèmes d'Euclide qui concernent : l'un, les produits des segments en lesquels deux cordes d'un cercle se divisent mutuellement (c'est-à-dire, d'après la figure 2.1A,

$PA \times PA' = PB \times PB'$ ), l'autre, la comparaison d'une sécante et d'une tangente à un cercle issues d'un même point  $P$  extérieur à ce dernier (c'est-à-dire, d'après la figure 2.1B,  $PA \times PA' = \overline{PT}^2$ ). En admettant de considérer une tangente comme la position limite d'une sécante, on peut combiner comme suit les résultats précédents :

**Théorème 2.11** — *Si deux droites passant par un point  $P$  coupent un cercle, l'une en  $A$  et  $A'$  (qui peuvent coïncider), l'autre en  $B$  et  $B'$  (qui peuvent coïncider) on a :  $PA \times PA' = PB \times PB'$ .*

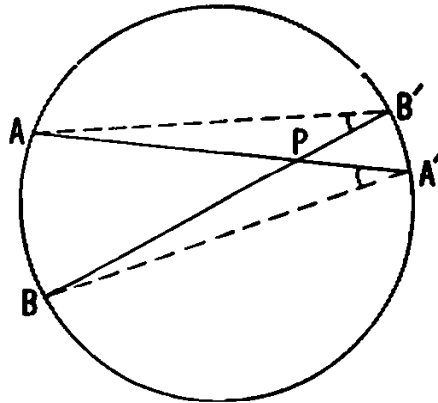


Fig. 2.1A

Pour le démontrer, il nous suffit de remarquer que, les deux triangles  $PBA'$  et  $PAB'$ , étant semblables et ayant leurs angles en  $P$  opposés par le sommet, permettent d'écrire :

$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PB}{PA'}.$$

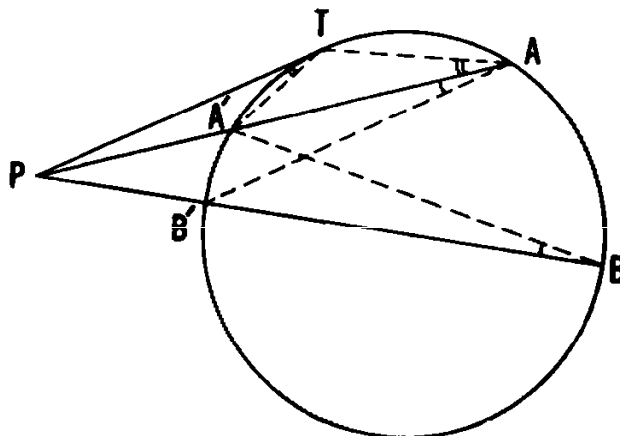


Fig. 2.1B



**Théorème 2.12** — Soient  $O$  et  $I$ , respectivement, les centres des cercles circonscrit et inscrit d'un triangle, et  $R$  et  $r$  les rayons respectifs de ces cercles. Si l'on désigne par  $d$  la distance  $OI$ , on a :

$$d^2 = R^2 - 2rR. \quad (2.12)$$

Sur la figure 2.1C on voit que la bissectrice intérieure de l'angle  $A$  est prolongée jusqu'à son intersection, en  $L$ , avec le cercle circonscrit. Soit  $LM$  le diamètre perpendiculaire à  $BC$ . En posant, par brièveté,  $\alpha = A/2$  et  $\beta = B/2$ , la figure montre que

$$\widehat{BML} = \widehat{BAL} = \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{LBC} = \widehat{LAC} = \alpha.$$

En  $I$ , l'angle extérieur du triangle  $ABI$  est

$$\widehat{BIL} = \alpha + \beta = \widehat{LBI}.$$

Il s'ensuit que  $LBI$  est isocèle, d'où  $LI = LB$ . On a donc :

$$\begin{aligned} R^2 - d^2 &= LI \times IA = LB \times IA \\ &= LM \frac{LB/LM}{IY/IA} \cdot IY = LM \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot IY \\ &= LM \times IY = 2rR. \end{aligned}$$

Par suite  $d^2 = R^2 - 2rR$ , comme nous voulions le démontrer.

Etant donné un cercle quelconque de rayon  $R$ , et un point quelconque  $P$  situé à une distance  $d$  de son centre, nous appellerons l'expression

$$d^2 - R^2$$

la *puissance* de  $P$  par rapport au cercle. Cette puissance est évidemment positive si  $P$  est extérieur au cercle, nulle si  $P$  est situé sur le cercle, et négative si  $P$  est à l'intérieur de ce dernier. Dans le premier cas, nous avons déjà obtenu l'autre expression de la puissance

$$PA \times PA',$$

dans laquelle  $A$  et  $A'$  sont deux points quelconques du cercle, alignés avec  $P$  (comme dans le théorème 2.11). Cette expression de la puissance reste d'ailleurs valable, quelle que soit la position de  $P$ , si l'on a recours, avec Newton, aux segments rectilignes *dirigés* qui constituent une sorte d'algèbre vectorielle à une dimension dans laquelle

$$\overline{AP} = -\overline{PA}.$$

Le produit (ou le quotient) de deux segments dirigés appartenant à une droite est considéré comme positif ou négatif suivant que les segments sont, ou non, de même sens. Avec cette convention, l'équation

$$d^2 - R^2 = \overline{PA} \times \overline{PA'}$$

est donc valable dans tous les cas.

Si  $P$  est à l'intérieur du cercle, on a

$$d^2 - R^2 = -(R^2 - d^2) = -\overline{AP} \times \overline{PA'} = \overline{PA} \times \overline{PA'};$$

tandis que si  $P$  est sur le cercle,  $A$  ou  $A'$  coïncide avec ce point, et l'un des deux segments est nul. En réalité, d'ailleurs, après avoir remarqué que le produit  $\overline{PA} \times \overline{PA'}$  a la même valeur pour toute sécante (ou corde) passant par  $P$ , nous aurions très bien pu prendre ce produit comme *définition* de la puissance de  $P$  par rapport au cercle.

C'est Jacob Steiner, dont on a déjà vu le nom au chapitre 1, qui, pour la première fois, a employé le mot *puissance* avec cette signification.

### Exercices

- 1 - Quelle est la plus petite valeur algébrique possible de la puissance d'un point par rapport à un cercle de rayon  $R$  donné ? Quel est le point correspondant à cette valeur minimum ?
- 2 - Quel est le lieu des points ayant, par rapport à un cercle donné, la même puissance (supérieure à  $-R^2$ ) ?
- 3 - Si  $l^2$  est la valeur positive de la puissance d'un point, donner l'interprétation géométrique de la longueur  $l$ .
- 4 - Soient  $PT$  et  $PU$  les tangentes menées par un point  $P$  à deux cercles concentriques,  $T$  étant situé sur le cercle intérieur; et soit  $Q$  le point où  $PT$  coupe le cercle extérieur. Montrer que l'on a  $\overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{QT}^2$ .
- 5 - Le rayon du cercle circonscrit à un triangle est égal à au moins deux fois le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.
- 6 - Exprimer la puissance du centre du cercle inscrit dans un triangle par rapport au cercle circonscrit à ce dernier, en fonction des rayons,  $r$  et  $R$  respectivement, des deux cercles.
- 7 - En recourant aux segments dirigés on peut exprimer le théorème de Stewart (voir paragraphe 1.2, exercice 4) sous la forme symétrique suivante : Si  $P, A, B$  et  $C$  sont quatre points dont les trois derniers sont alignés, on a  $\overline{PA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{PB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{PC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$ .

- 8 - Soit une droite passant par le centre de gravité  $G$  d'un triangle  $ABC$  et qui coupe les côtés de ce dernier aux points  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . En utilisant des segments dirigés, démontrer que

$$\frac{1}{GX} + \frac{1}{GY} + \frac{1}{GZ} = 0.$$

- 9 - En se plaçant au sommet d'une montagne haute de 1 609 mètres, et en supposant que la terre est une sphère de 12743,3 kilomètres de diamètre, à quelle distance voit-on l'horizon ?

## 2.2. AXE RADICAL DE DEUX CERCLES

Dans l'un de ses livres <sup>(1)</sup>, E.T. Bell a raconté l'anecdote suivante. Pendant son exil hors de la Bohême, la jeune princesse Elisabeth avait, un jour, abordé avec succès un problème de géométrie élémentaire en utilisant les coordonnées. Et Bell écrit : « ce problème est un bel exemple du genre qui ne se prête pas à l'emploi direct et sans nuances de la géométrie cartésienne élémentaire ». La princesse avait pour maître René Descartes (auquel les coordonnées cartésiennes doivent leur nom <sup>(2)</sup>), et celui-ci déclara « qu'il n'entreprendrait pas d'achever la solution... en un mois ! »

La leçon à tirer est claire : si elle est possible avec une certaine méthode, une solution peut très bien n'être pas, pour autant, la meilleure ou la plus rapide. Voici, en tout cas, un théorème dont la démonstration analytique, sans être en rien plus difficile que la démonstration synthétique habituelle, a quelques conséquences intéressantes :

**Théorème 2.21** — *Le lieu géométrique des points ayant même puissance par rapport à deux cercles non concentriques est une droite perpendiculaire à la ligne des centres de ces cercles.*

Exprimé en coordonnées cartésiennes, le carré de la distance  $d$  entre deux points  $(x, y)$  et  $(a, b)$  est

$$d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

<sup>(1)</sup> *Men of Mathematics.*

<sup>(2)</sup> Certains affirment qu'en fait c'est Pierre Fermat (1601-1665) qui inventa la géométrie analytique parce que, dans une lettre à Descartes, il en donna le principe essentiel.

Voir Pierre FERMAT, *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante*, 1853, réédition Jacques Gabay, 1989.

La puissance du point  $(x, y)$  par rapport au cercle dont le centre est le point  $(a, b)$  et le rayon  $r$  est donc :

$$d^2 - r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2.$$

En particulier, étant le lieu des points  $(x, y)$  de puissance nulle, le cercle lui-même a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0. \quad (2.22)$$

Mise sous la forme  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , cette même équation exprime que le cercle est le lieu des points dont les distances au point  $(a, b)$  ont la valeur constante  $r$ .

Si, maintenant, on écrit l'équation du cercle sous la forme

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \quad (2.23)$$

(avec  $c = a^2 + b^2 - r^2$ ), le premier membre de cette équation c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$

exprime encore la puissance d'un point quelconque  $(x, y)$ .

Un autre cercle, de même centre  $(a, b)$  mais de rayon différent, aura une équation de même forme,  $c$  étant naturellement différent; tandis que tout cercle n'ayant pas le même centre aura une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0, \quad (2.24)$$

dans laquelle  $a' \neq a$ , ou  $b' \neq b$ , ou les deux à la fois. Pour les deux cercles non concentriques dont il est question dans le théorème 2.21, nous pouvons donc utiliser les équations (2.23) et (2.24). Ainsi, le lieu des points  $(x, y)$  ayant même puissance par rapport à ces deux cercles sera défini par l'égalité

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c',$$

qui, après simplification, s'écrit

$$(a' - a)x + (b' - b)y = 1/2(c' - c).$$

Le lieu est donc une *droite*.

Si l'on adopte un système de référence où l'axe de  $x$  est la ligne des centres, les équations des cercles se simplifient comme suit :

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0, \quad x^2 + y^2 - 2a'x + c' = 0, \quad (2.25)$$



avec  $a' \neq a$ , et l'équation du lieu devient

$$x = \frac{c' - c}{2(a' - a)}.$$

On a donc une droite *perpendiculaire* à l'axe des  $x$ , c'est-à-dire à la ligne des centres. Or, du fait qu'elle représente l'ensemble de tous les points d'égale puissance, cette droite peut être définie géométriquement en fonction des cercles : nous aurions donc pu la prendre comme axe des  $y$ , comme sur la figure 2.2A. Les équations de deux cercles non concentriques peuvent, ainsi, se simplifier encore et s'écrire

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0, \quad x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0 \quad (2.26)$$

Le lieu est alors  $x = 0$ . Réciproquement, tout point  $(0, y)$  de la droite  $x = 0$  a la *même* puissance  $y^2 + c$  par rapport aux deux cercles.

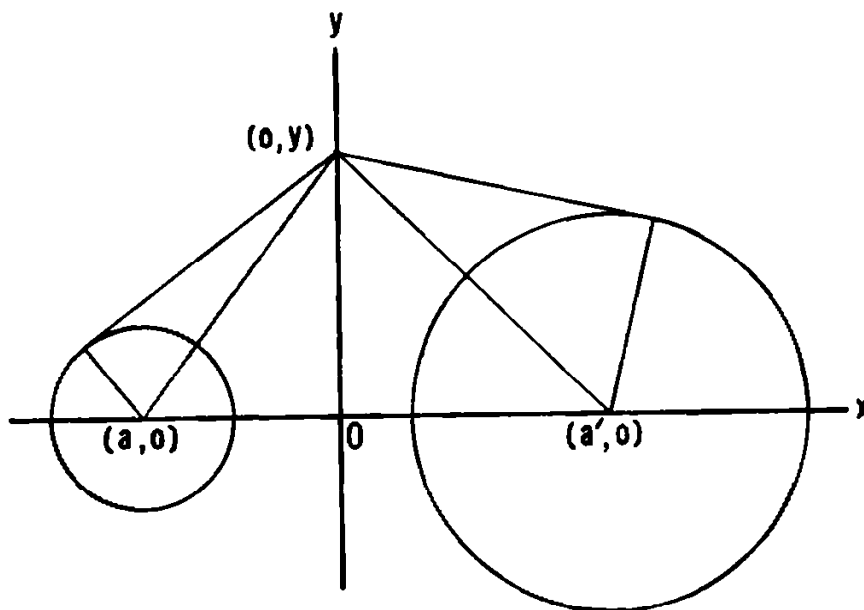


Fig. 2.2A

La remarque précédente achève la démonstration. Nous aurions pu, naturellement, abréger cette dernière en écrivant immédiatement les équations des deux cercles sous la forme (2.25); mais, dans ce cas, nous aurions omis le beau lemme suivant lequel, pour tout cercle exprimé sous la forme générale (2.23), la *puissance d'un point quelconque*  $(x, y)$  *est représenté par le premier membre de l'équation*.

Le lieu géométrique des points ayant même puissance par rapport à deux cercles non concentriques s'appelle *l'axe radical* de ces derniers. Dans le cas particulier où les deux cercles se coupent en deux points  $A$  et  $A'$  (fig. 2.2B), chacun de ces points a une puissance nulle par rapport aux deux cercles dont l'axe radical est alors la droite  $AA'$ . De même, lorsque deux cercles sont tangents (fig. 2.2C), leur axe radical est leur tangente commune au point de contact.

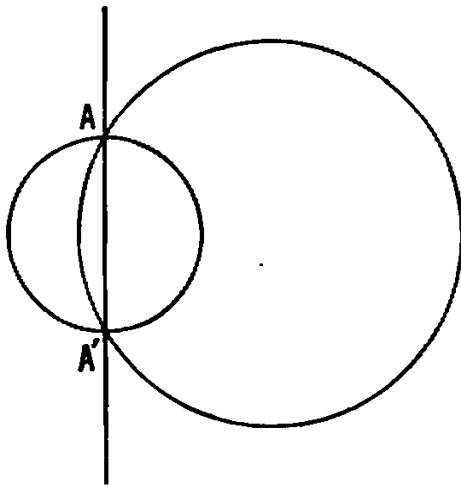


Fig. 2.2B

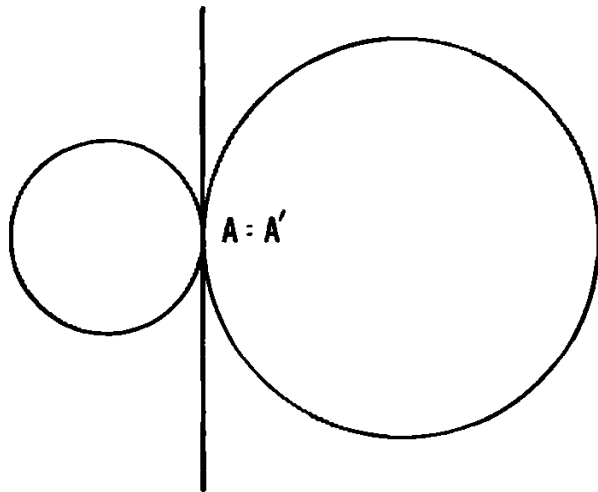


Fig. 2.2C

### Exercices

- 1 - Quel est le lieu géométrique des points tels que les tangentes menées par l'un d'eux à deux cercles donnés soient égales ?
- 2 - Lorsque la distance entre les centres de deux cercles est supérieure à la somme de leurs rayons, ces cercles ont quatre tangentes communes dont les milieux sont alignés.
- 3 - Soient  $PAB$ ,  $AQB$ ,  $ABR$ ,  $P'BA$ ,  $BQ'A$  et  $BAR'$  six triangles semblables, tous situés du même côté de  $AB$  qui leur est commun. (La figure 2.2D en représente trois, les autres pouvant s'en déduire par symétrie <sup>(1)</sup> par rapport à la perpendiculaire au milieu de  $AB$ ). Démontrer que ceux des sommets qui ne sont pas sur  $AB$  (c'est-à-dire  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$ ), appartiennent au même cercle. *Conseil* : comparer les puissances de  $A$  et  $B$  par rapport au cercle  $PQR$ .
- 4 - Si, dans l'équation (2.23),  $a$  et  $b$  sont donnés, pour quelles valeurs de  $c$  cette équation représente-t-elle un cercle ?

<sup>(1)</sup> Il est utile de recourir à la symétrie pour résoudre maints problèmes de géométrie.

- 5 - Etant donné deux cercles non concentriques, indiquer une construction de leur axe radical, telle qu'elle demeure valable lorsqu'un des cercles est intérieur à l'autre.

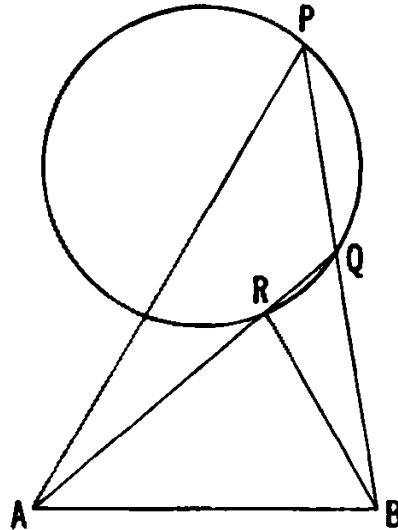


Fig. 2.2D

### 2.3. FAISCEAUX DE CERCLES

Les deux cercles de l'équation (2.26) (qui peuvent être deux cercles non concentriques quelconques) appartiennent à une famille infinie représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0,$$

dans laquelle  $c$  est constant tandis que  $a$  peut varier en prenant toutes les valeurs réelles (sauf cependant, si  $c$  est positif, celles qui sont comprises entre  $\pm \sqrt{c}$ ). Une telle famille est appelée *faisceau de cercles* parce que tout couple de ses éléments a même ligne des centres et même axe radical. Si  $c$  est négatif, tout cercle du faisceau coupe l'axe des  $y$  aux deux mêmes points  $(0, \pm \sqrt{-c})$ , et le faisceau comprend simplement *tous les cercles passant par ces deux points*. De même, lorsque  $c = 0$ , le faisceau comprend tous les cercles tangents, à l'origine, à l'axe des  $y$ . Enfin, la figure 2.3A représente le cas où  $c$  est positif.

Etant donné *trois* cercles n'appartenant pas à un même faisceau et dont deux quelconques ne sont pas concentriques, on peut les considérer deux à deux et déterminer ainsi trois axes radicaux. Tout point ayant même puissance par rapport aux trois cercles doit appartenir à ces trois

axes. Réciproquement, tout point situé à l'intersection de deux de ces derniers doit aussi appartenir au troisième. Enfin, si deux de ces axes sont parallèles, le troisième doit également leur être parallèle. En particulier :

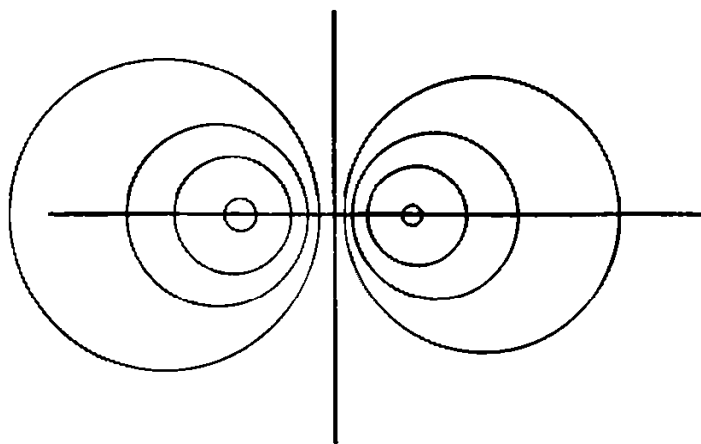


Fig. 2.3A

**Théorème 2.31** — *Si les centres de trois cercles forment un triangle, il n'existe qu'un seul point ayant même puissance par rapport aux trois cercles.*

Ce point commun aux trois axes radicaux est appelé le *centre radical* des trois cercles.

### Exercices

- 1 - Soient deux cercles tangents en  $T$ , l'un étant intérieur à l'autre, et soit  $AB$  une corde du plus grand cercle, tangente au plus petit en  $P$ . Démontrer que la droite  $TP$  est la bissectrice de l'angle  $ATB$ .
- 2 - Soit  $O$  le centre radical de trois cercles extérieurs les uns aux autres. Montrer que les six points de contact des tangentes à ces cercles issues du point  $O$  sont situés sur un même cercle.

## 2.4. COMPLÉMENT SUR LES HAUTEURS ET L'ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE

Il vaut la peine de considérer à nouveau le cercle circonscrit à un triangle, dont nous avons déjà parlé dans les chapitres précédents. Soient donc (voir la figure 2.4A)  $O$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , le diamètre  $AA_0$ , le rayon  $OL = R$ , perpendiculaire à  $BC$ , et la hauteur

$AD = h_a$ . Les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{AA_0C}$  étant égaux, les triangles  $ABD$  et  $AA_0C$  sont semblables; et l'on peut écrire :

$$\frac{h_a}{c} = \frac{b}{AA_0},$$

ou

$$h_a = \frac{bc}{2R}. \quad (2.41)$$

Si, maintenant, on retranche de l'angle  $\widehat{BAC}$  les deux angles égaux :

$$\widehat{A_0AC} = \widehat{BAD} = \pi/2 - B,$$

il reste

$$\begin{aligned} \widehat{DAA_0} &= A - 2(\pi/2 - B) = A + 2B - (A + B + C) \\ &= B - C. \end{aligned}$$

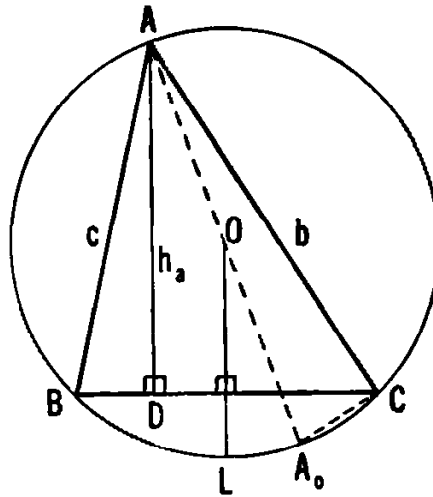


Fig. 2.4A

Cette expression de  $\widehat{DAA_0} = \widehat{DAO}$  correspond au cas où l'on a  $B > C$ . Au contraire, si l'on avait eu  $B < C$ , les deux angles égaux  $\widehat{A_0AC}$  et  $\widehat{BAD}$  auraient eu une partie commune, ce qui se serait traduit par  $\widehat{DAO} = C - B$ . On peut donc réunir ces deux cas dans une même expression

$$\widehat{DAO} = |B - C| \quad (2.42)$$

Sur la figure ci-dessous, on voit les trois hauteurs  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  prolongées jusqu'à leurs intersections avec le cercle circonscrit, en  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  respectivement; et  $H$  est l'orthocentre. De plus les angles  $\widehat{DAB}$  et  $\widehat{FCB}$  sont égaux comme compléments de  $B$  dans les triangles  $ABD$  et  $BCF$ ; ils sont notés  $\theta$  sur la figure, de même que  $\widehat{BCD'}$ , puisque  $\widehat{BCD'} = \widehat{BAD'}$ . L'égalité des triangles rectangles  $CDH$  et  $CDD'$  montre, par ailleurs, que

$$HD = DD' \quad (2.43)$$

Et on a, de même :  $HE = EE'$  et  $HF = FF'$ .

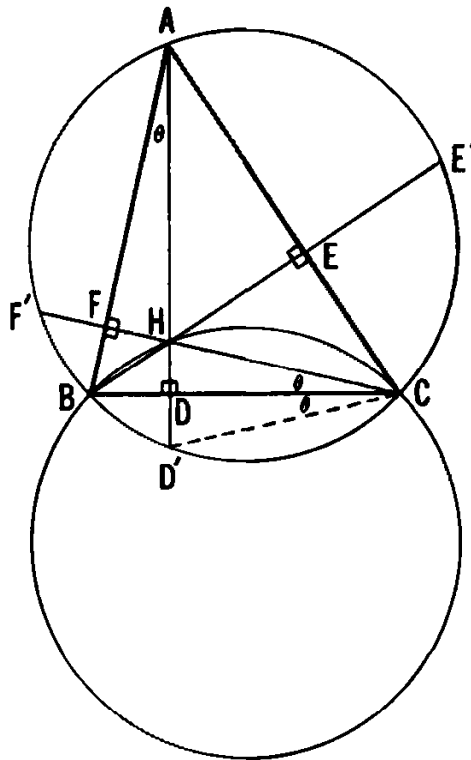


Fig. 2.4B

Le cercle de diamètre  $AB$  passant par  $D$  et  $E$ , le théorème 2.11 permet d'écrire  $HA \times HD = HB \times HE$ ; et, pareillement,  $HB \times HE = HC \times HF$ . D'où, finalement :

$$HA \times HD = HB \times HE = HC \times HF \quad (2.44)$$

Soient maintenant  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  trois points situés respectivement sur les côtés,  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  d'un triangle  $ABC$  (la figure 2.4C ci-dessous en représente deux seulement) : les cercles ayant pour diamètres les segments

de Ceva  $AX$ ,  $BY$  et  $CZ$  passeront par les pieds des hauteurs,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , issues, respectivement, de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , et les trois produits figurant dans les équations (2.44) sont les puissances de l'orthocentre  $H$  par rapport à ces trois cercles. Par suite,  $H$  est le centre radical de ces derniers, ce qui démontre les deux théorèmes suivants, proposés comme problèmes à diverses époques :

**Théorème 2.45** — *L'axe radical de deux cercles construits sur deux segments de Ceva d'un triangle comme diamètres passe par l'orthocentre  $H$  de ce triangle.*

**Théorème 2.46** — *Si, sur trois segments de Ceva d'un triangle pris comme diamètres, on construit trois cercles n'appartenant pas à un même faisceau, le centre radical de ces cercles est l'orthocentre  $H$  du triangle.*

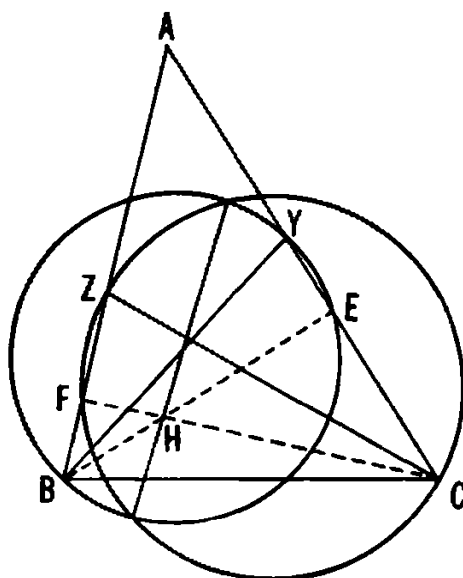


Fig. 2.4C

Les considérations simples que voici auraient pu, également, permettre d'arriver aux mêmes résultats. Si  $AD$  est la hauteur <sup>(1)</sup> issue de  $A$ , on peut dire que le faisceau des cercles passant par  $A$  et  $D$  est formé par les cercles ayant pour diamètres les segments de Ceva issus de  $A$ ,  $AB$  et  $AC$  étant, en particulier, deux de ces derniers. Ainsi, considérés deux à deux, les cercles décrits sur  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$  comme diamètres ont pour

<sup>(1)</sup> Non représentée sur la figure 2.4C.

axes radicaux les hauteurs du triangle  $ABC$ , le centre radical de ces cercles étant l'orthocentre  $H$ . (De ce point de vue, le fait que les hauteurs sont concourantes apparaît comme un cas particulier du théorème 2.31). Enfin, il s'ensuit que  $H$  a la même puissance par rapport à *tous* les cercles décrits sur des segments de Céva comme diamètres.

Dans l'énoncé du théorème 2.46, il faut remarquer les termes « n'appartenant pas à un même faisceau ». Ils impliquent, en effet, que les trois segments de Céva ne sont pas tous issus d'un même sommet du triangle  $ABC$ . Mais, comme nous le verrons à l'occasion du prochain théorème, cela va beaucoup plus loin !

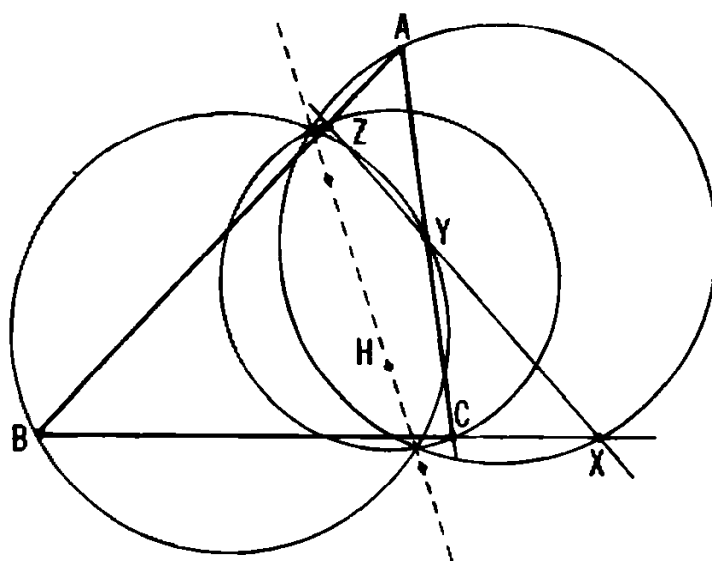


Fig. 2.4D

En faisant intervenir d'autres éléments, on peut déduire quelques problèmes amusants du théorème 2.46 lorsqu'on applique celui-ci aux segments de Céva  $AX$ ,  $BY$  et  $CZ$ . Bien que ces derniers ne soient pas nécessairement concourants, les choses se compliquent s'ils le sont. Si l'on décrit des cercles dont les diamètres sont les médianes, les hauteurs ou les bissectrices d'un triangle, nous pouvons, par exemple, nous proposer de démontrer que le centre radical de ces cercles est l'orthocentre du triangle.

Le cas le plus intéressant de segments de Céva non concourants a lieu lorsque les points  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , situés sur les côtés  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  (prolongés si nécessaire), sont *alignés*, comme sur la figure 2.4D : on peut alors, tout aussi bien, dire que sont alignés, soit les points  $X$ ,  $B$ ,  $C$  pris sur les côtés du triangle  $AYZ$ , soit les points  $Y$ ,  $C$ ,  $A$  pris sur les côtés de  $BZX$ , soit



les points  $Z, A, B$  pris sur les côtés de  $CXY$ . Il s'ensuit que les cercles décrits sur  $AX, BY, CZ$  comme diamètres sont tels que, pris deux à deux, leurs axes radicaux passent par  $H$  et aussi (pour la même raison) par les orthocentres des trois autres triangles. Comme, manifestement, ces quatre orthocentres sont distincts, les axes radicaux doivent coïncider. Nous avons donc démontré le théorème que voici :

**Théorème 2.47** — *Si quatre droites se coupent en six points  $A, B, C, X, Y, Z$  de telle sorte que les ensembles de points alignés soient  $XBC, YCA, ZAB, XYZ$ , les cercles décrits sur  $AX, BY$  et  $CZ$  comme diamètres appartiennent à un même faisceau de cercles, et les orthocentres des quatre triangles  $AYZ, BZX, CXY$  et  $ABC$  sont alignés.*

La figure 1.3C montre une autre propriété d'un triangle et de ses hauteurs. Comme on le voit, en effet, de même que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ ,  $A$  est également l'orthocentre de  $HBC$ , et, pareillement,  $B$  l'orthocentre de  $HAC$ , et  $C$ , celui de  $HAB$ . La construction  $ABCH$  s'appelle un *quadrangle orthocentrique* <sup>(1)</sup>. Elle a un certain nombre de propriétés intéressantes dont nous n'étudierons que celle-ci : *Soit  $ABCH$  un quadrangle orthocentrique, les cercles circonscrits aux quatre triangles obtenus en considérant les sommets trois par trois ont des rayons égaux.*

Pour le démontrer, le plus simple est de recourir à l'équation (2.43) et à la figure 2.4B. L'égalité des triangles  $HBC$  et  $D'BC$ , que l'on voit sur cette dernière, entraîne celle de leurs cercles circonscrits; et il en est de même pour les deux autres couples de triangles.

## Exercices

- 1 - Dans un triangle, les points où les hauteurs (prolongées) coupent le cercle circonscrit forment un triangle semblable au triangle orthique.
- 2 - On prolonge les bissectrices intérieures des angles d'un triangle  $ABC$  jusqu'à leurs points d'intersection —  $L, M, N$  respectivement — avec le cercle circonscrit. Trouver les expressions des angles du triangle  $LMN$  en fonction des angles  $A, B$  et  $C$ .

(1) Voir F. G.-M., *op. cit.* — N° 292 m et 2183 d.

## 2.5. DROITE DE SIMSON

Si, d'un point  $P$  quelconque, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle  $ABC$ , leurs pieds forment, d'ordinaire, un triangle  $A_1B_1C_1$  : c'est le triangle podaire étudié au paragraphe 1.9. Examinons maintenant le cas particulier où le point  $P$  est situé sur le cercle circonscrit au triangle, comme le montre la figure 2.5A. Par souci de clarté, nous avons situé  $P$  sur l'arc  $CA$  qui ne contient pas  $B$ , et plus près de  $A$  que de  $C$ ; les autres cas de figure pourraient, d'ailleurs, se déduire de celui-là en permutant les sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Les angles  $\widehat{PA_1C}$ ,  $\widehat{PB_1A}$  et  $\widehat{PC_1B}$  étant droits,  $P$  est situé sur les cercles circonscrits aux triangles  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$  et  $AB_1C_1$ . Par suite,

$$\widehat{APC} = \pi - B = \widehat{C_1PA_1}.$$

Si, de ce dernier, on retranche  $\widehat{APA_1}$ , il vient :

$$\widehat{A_1PC} = \widehat{C_1PA}.$$

Mais, comme les points  $A_1$ ,  $C$ ,  $P$ ,  $B_1$  sont situés sur un même cercle, on a :

$$\widehat{A_1PC} = \widehat{A_1B_1C}.$$

Pareillement, les points  $A$ ,  $B_1$ ,  $P$ ,  $C_1$  étant aussi sur un même cercle,

$$\widehat{C_1PA} = \widehat{C_1B_1A}.$$

D'où, enfin :

$$\widehat{A_1B_1C} = \widehat{C_1B_1A};$$

de sorte que les trois points  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  sont alignés : le triangle podaire relatif à  $P$  est « dégénéré ».

Réciproquement, si un point  $P$  est situé de telle sorte que le triangle podaire qui lui correspond par rapport à un triangle  $ABC$  soit dégénéré, ce point doit évidemment être situé à l'intérieur de l'un des trois angles de  $ABC$  et au-delà du côté opposé. En permutant, s'il le fallait, les lettres des sommets, on peut donc considérer que l'angle en question est  $B$  et que  $C_1$  est sur le prolongement du côté  $BA$  et au-delà de  $A$ , comme on le voit sur la figure 2.5A. On pourrait donc procéder en sens inverse dans la discussion précédente sur les angles, la conclusion étant alors que  $P$  est situé sur le cercle circonscrit. D'où :

**Théorème 2.51** — *Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les côtés d'un triangle sont alignés si, et seulement si, ce point est situé sur le cercle circonscrit au triangle.*

La droite sur laquelle sont situés les pieds des perpendiculaires issues d'un point s'appelle la *droite de Simson* du point par rapport au triangle. Robert Simson (1687-1768) a fait différents travaux tant de géométrie que d'arithmétique; il a, notamment découvert que si  $f_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  terme de la suite de Fibonacci <sup>(1)</sup> — 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... — on a la relation  $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ . La « droite de Simson » lui fut attribuée parce qu'elle semblait bien correspondre à ses conceptions géométriques, mais c'est en vain que les historiens la recherchèrent dans ses œuvres : en fait, c'est William Wallace qui la découvrit en 1797.

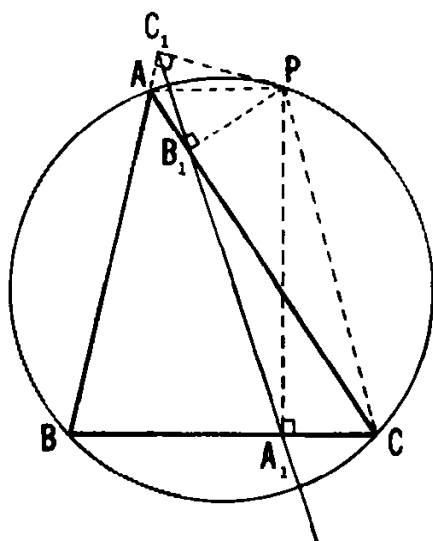


Fig. 2.5A

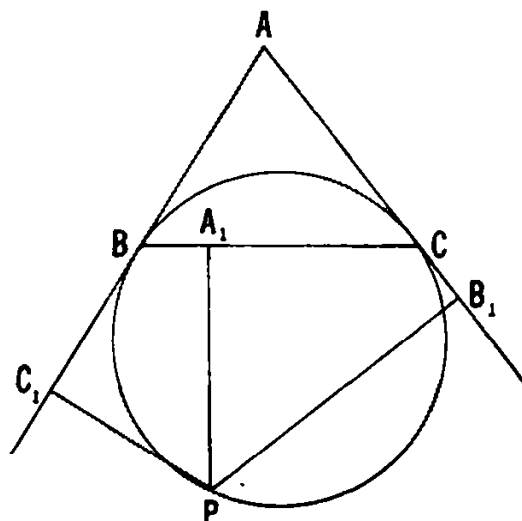


Fig. 2.5B

### Exercices

- 1 - Lorsqu'un triangle a un angle obtus, faut-il modifier sur quelque point notre démonstration du théorème 2.51 ?
- 2 - Quel est le point du cercle circonscrit dont la droite de Simson est CA ?
- 3 - Un point peut-il être situé sur sa propre droite de Simson ? Quelle est alors cette droite ?

(1) Voir F. G.-M., *op. cit.* — N° 22, 762 à 767, 1212 a, 1234, 1276 b et 1277 b.

- 4 - Soit  $A$  le point d'intersection de deux tangentes à un cercle en  $B$  et  $C$ , et soit  $A_1B_1C_1$  le triangle podaire d'un point  $P$  quelconque du cercle par rapport au triangle isocèle  $ABC$ . Démontrer la relation :

$$\overline{PA_1}^2 = PB_1 \times PC_1.$$

## 2.6. THÉORÈME DE PTOLÉMÉE ET SA GÉNÉRALISATION

On peut, comme suit, déduire un théorème très utile du concept de la droite de Simson. A ce sujet, revenons à la figure 2.5A. Bien que le triangle podaire  $A_1B_1C_1$  soit dégénéré, les longueurs de ses « côtés » restent données par le théorème 1.91 :

$$B_1C_1 = \frac{a \cdot AP}{2R}, \quad A_1C_1 = \frac{b \cdot BP}{2R}, \quad A_1B_1 = \frac{c \cdot CP}{2R}.$$

Et comme  $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$ , on en tire  $c \cdot CP + a \cdot AP = b \cdot BP$ ; c'est-à-dire :

$$AB \times CP + BC \times AP = AC \times BP.$$

$ABCP$  étant un quadrilatère inscriptible, nous avons ainsi démontré le théorème de Ptolomée :

**Théorème 2.61** — *Dans un quadrilatère inscriptible, la somme des produits des deux couples de côtés opposés est égale au produit des diagonales.*

Le théorème de Ptolomée a une réciproque que l'on peut rendre plus précise par la remarque suivante : pour toute position de  $B_1$  autre que sur le segment  $A_1C_1$ , il faut remplacer l'équation  $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$  par l'inégalité

$$A_1B_1 + B_1C_1 > A_1C_1$$

qui entraîne :

$$AB \times CP + BC \times AP > AC \times BP.$$

D'où :

**Théorème 2.62** — *Soient  $ABC$  un triangle et  $P$  un point qui ne soit pas situé sur l'arc  $CA$  du cercle circonscrit. On a l'inégalité :*

$$AB \times CP + BC \times AP > AC \times BP.$$

### Exercices

- 1 - Soit  $P$  un point quelconque situé dans le plan d'un triangle équilatéral  $ABC$ . On a alors, soit  $PC + PA = PB$ , soit  $PC + PA > PB$ , suivant que  $P$  est, ou n'est pas, situé sur l'arc  $CA$  du cercle circonscrit.
- 2 - Si un point  $P$  est situé sur l'arc  $CD$  du cercle circonscrit à un carré  $ABCD$ , il en résulte :  

$$PA(PA + PC) = PB(PB + PD).$$
- 3 - Si un cercle coupe deux côtés et une diagonale d'un parallélogramme  $ABCD$ , aux points  $P, Q$  et  $R$ , comme le montre la figure 2.6 A, on a la relation :

$$AP \times AB + AR \times AD = AQ \times AC.$$

*Conseil :* Appliquer le théorème 2.61 au quadrilatère  $PQRA$ , puis remplacer les côtés du triangle  $PQR$  par les côtés correspondants du triangle semblable  $CBA$ .

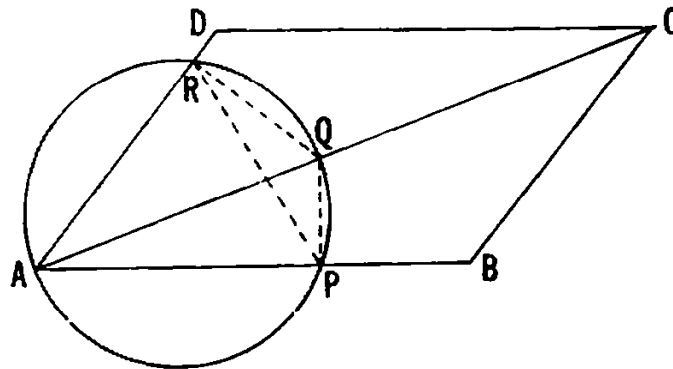


Fig. 2.6A

### 2.7. COMPLÉMENT SUR LA DROITE DE SIMSON

La droite de Simson a maintes propriétés intéressantes dont certaines méritent d'être examinées. Observons donc, tout d'abord, la figure 2.7A qui ne diffère de la figure 2.5A que par le prolongement de la perpendiculaire  $PA$ , jusqu'à son intersection, en  $U$ , avec le cercle circonscrit, et par le tracé de la droite  $AU$ .

Dans les quadrilatères inscriptibles  $PAUC$  et  $PB_1A_1C$ , on a :

$$\widehat{PUA} = \widehat{PCA} = \widehat{PCB_1} = \widehat{PA_1B_1}.$$

Il s'ensuit que la droite  $AU$  est parallèle à la droite de Simson  $A_1B_1$ .

Comparons maintenant les droites de Simson relatives au point  $P$  et à un autre point  $P'$  (situé lui aussi, naturellement, sur le cercle circonscrit). L'angle qu'elles forment est tout simplement l'angle  $\widehat{UAU'}$  que font les droites  $AU$  et  $AU'$ , celles-ci leur étant parallèles (voir fig. 2.7B). Les deux cordes  $PU$  et  $P'U'$ , étant perpendiculaires à  $BC$ , sont

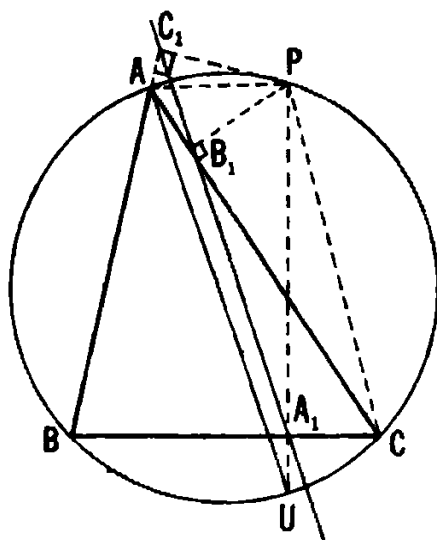


Fig. 2.7A

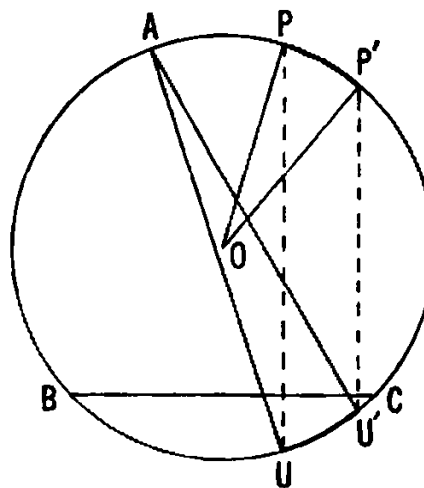


Fig. 2.7B

parallèles entre elles et déterminent des arcs égaux,  $PP'$  et  $UU'$ , sur le cercle circonscrit. On a donc :

$$\widehat{UAU'} = 1/2 \widehat{UOU'} = 1/2 \widehat{POP'},$$

ou, en distinguant les angles positifs des angles négatifs :

$$\widehat{UAU'} = 1/2 \widehat{UOU'} = - 1/2 \widehat{POP'}.$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

**Théorème 2.71** — *Les droites de Simson relatives à deux points  $P$  et  $P'$  situés sur le cercle circonscrit à un triangle font un angle dont la mesure est la moitié de l'arc  $P'P$ .*

Si nous imaginons que  $P$  décrive le cercle circonscrit avec une vitesse constante, la droite  $AU$  tournera autour de  $A$ , à vitesse angulaire également constante, de telle sorte que  $U$  décrive le cercle en sens inverse de  $P$  et que, lorsque ce point aura parcouru tout le cercle,  $AU$  ait une direction opposée à sa direction initiale. Pendant ce mouvement, la droite de Simson

Poursuivons notre étude en examinant maintenant la figure 2.7C qui combine les figures 2.4D et 2.7A en leur ajoutant les droites  $HP$ ,  $D'P$  (qui coupe  $BC$  en  $Q$ ), et  $HQ$  (prolongée jusqu'à son intersection avec  $PU$ , en  $V$ ). Les droites  $HD'$  et  $PV$  étant perpendiculaires à  $BC$ , il s'ensuit, d'après l'équation (2.43), que les triangles  $QHD'$  et  $QPV$  sont isocèles. En d'autres termes,  $HV$  est symétrique de  $D'P$  par rapport à  $BC$ . De plus, comme

$HV$  est parallèle à  $AU$  qui, nous l'avons déjà montré, est elle-même parallèle à la droite de Simson relative à  $P$ .

(<sup>1</sup>) Voir F. G.-M., *op. cit.* – N° 293 c, et F. GOMES TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, tomes I, II et III, 1908-1915, réédition Jacques Gabay, 1995 – Tome II, p. 74.

Finalement, on voit donc que cette droite,  $A_1B_1$ , étant parallèle au côté  $HV$  du triangle  $PVH$  et coupant le côté  $PV$  en son milieu  $A$ , coupera, en son milieu aussi, le troisième côté  $PH$  :

**Théorème 2.72** — *La droite de Simson relative à un point du cercle circonscrit coupe en son milieu le segment joignant ce point à l'orthocentre.*

Ce paragraphe n'est qu'une simple introduction à tout ce qui concerne la droite de Simson; celle-ci a beaucoup d'autres propriétés à propos desquelles, il nous faut, malheureusement, renvoyer le lecteur à d'autres ouvrages.

### Exercices

- 1 - Si deux points sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à un triangle, leurs droites de Simson sont perpendiculaires l'une à l'autre, et se coupent sur le cercle des neuf points du triangle.
- 2 - Soient  $ABC$  un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre  $O$ , et  $P$  un point quelconque de ce cercle : la droite de Simson relative à  $P$  coupe le rayon  $OP$  en son milieu.

## 2.8. LE PAPILLON

Pendant assez longtemps, on a mentionné, ici et là, le théorème du papillon que nous énoncerons sous la forme suivante (voir fig. 2.8A) :

**Théorème 2.81** — *Soient  $M$  le milieu de la corde  $PQ$  d'un cercle et, passant par  $M$ , deux autres cordes quelconques  $AB$  et  $CD$ . Les cordes  $AD$  et  $BC$  coupent  $PQ$  en deux points  $X$  et  $Y$  tels que le milieu du segment  $XY$  soit le point  $M$ .*

Maintes démonstrations, plus ou moins longues et difficiles, ont été données de ce théorème. Notamment, nous en avons reçu trois du Dr Zoll, du Newark State College, dont l'une, précise-t-il, fut proposée en 1815 par W.G. Horner à qui l'on doit une méthode de calcul des valeurs approchées des racines d'un polynôme. (Selon E.T. Bell, Horner aurait été devancé par un Chinois). La démonstration la plus courte fait appel à la géométrie projective. Bien qu'elle ne soit pas très brève, celle que nous donnons ci-dessous est simple et facile à se rappeler.



Des points  $X$  et  $Y$  abaissons, d'une part, sur  $AB$ , les perpendiculaires  $x_1$  et  $y_1$ , respectivement et, d'autre part, sur  $CD$ , les perpendiculaires  $x_2$  et  $y_2$ , respectivement. Si, par brièveté, on pose  $PH = MQ = a$ ,  $XM = x$  et  $MY = y$ , on voit que les couples de triangles semblables  $MXE$  et  $MYH$ ,  $MXF$  et  $MYG$ ,  $AXE$  et  $CYG$ ,  $DXF$  et  $BYH$ , permettent d'écrire :

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2}, \quad \frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY}, \quad \frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} &= \frac{x_1}{y_1} \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_2} \frac{x_2}{y_1} = \frac{AX \times XD}{CY \times YB} = \frac{PX \times XQ}{PY \times YQ} \\ &= \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1, \end{aligned}$$

et, finalement,  $x = y$ , comme nous voulions le démontrer.

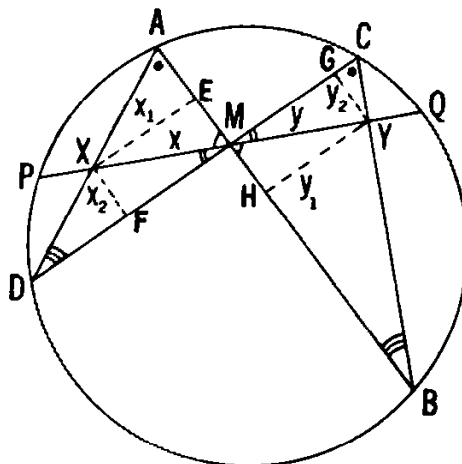


Fig. 2.8A

### Exercices

- 1 - Si, sur la figure 2.8A, on trace les droites  $AC$  et  $BD$  en les prolongeant jusqu'à leurs intersections avec  $PQ$  elle-même prolongée, les deux points obtenus, sont, comme  $X$  et  $Y$ , équidistants de  $M$ .
- 2 - Soient  $PT$  et  $PB$  deux tangentes menées par un point  $P$  à un cercle,  $AB$  le diamètre de ce cercle passant par  $B$ , et  $TH$  la perpendiculaire abaissée de  $T$  sur  $AB$ . Montrer que  $AP$  coupe  $TH$  en son milieu.
- 3 - Soient  $I$  le centre du cercle inscrit dans un triangle  $ABC$ ,  $X$  le point où  $BC$  est tangent à ce cercle, et  $A'$  le milieu de  $BC$ . Montrer que la droite  $A'I$  coupe  $AX$  en son milieu.

## 2.9. THÉORÈME DE MORLEY

Vers 1904, Frank Morley démontra l'un des théorèmes les plus extraordinaires de la géométrie élémentaire. Il le signala à des amis anglais de Cambridge, et, vingt ans plus tard, le publia au Japon. Entre temps, le théorème avait été découvert à nouveau et proposé à titre de problème par la revue Educational Times qui reçut deux solutions : l'une de celles-ci, due à M. T. Naraniengar, est plus élégante que les douzaines d'autres élaborées depuis lors, nous la donnons ci-dessous. Voici d'abord, l'énoncé du théorème.

**Théorème 2.91** — *Etant donné un triangle quelconque, dont chaque angle est partagé en trois parties égales par deux demi-droites issues de son sommet, les six demi-droites, prises deux à deux adjacentes à un même côté du triangle, se coupent aux sommets d'un triangle équilatéral <sup>(1)</sup>.*

Avant d'aborder la démonstration de Naraniengar, il faut, tout d'abord, démontrer le Lemme suivant (voir la figure 2.9A) :

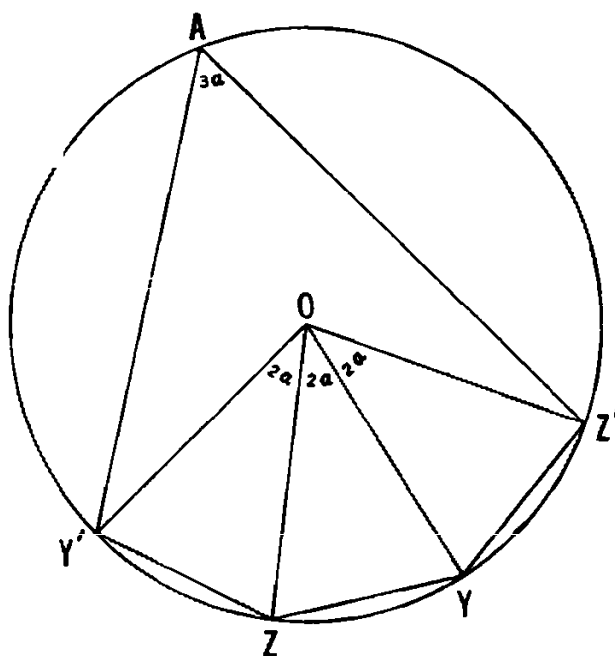


Fig. 2.9A

(<sup>1</sup>) Voir la figure 2.9B (N.d.T.).

**Lemme** — Si quatre points  $Y', Z, Y, Z'$  satisfont aux conditions

$$Y'Z = ZY = YZ',$$

et

$$\widehat{Y'ZY} = \widehat{Z'YZ} = \pi - 2\alpha > \pi/3,$$

ces points sont situés sur un même cercle. De plus, si un point  $A$ , qui n'est pas du même côté que  $Y$  par rapport à la droite  $Y'Z'$ , est tel que  $\widehat{Y'AZ'} = 3\alpha$ , ce point est aussi sur le même cercle.

Soit  $O$  (fig. 2.9A) le point où se coupent les bissectrices des angles  $\widehat{YZY'}$  et  $\widehat{Z'YZ}$ , égaux par hypothèse. Il s'ensuit que les triangles  $OY'Z$ ,  $OZY$  et  $OYZ'$  sont isocèles et égaux, leurs angles à la base étant  $\pi/2 - \alpha$ . Leurs côtés égaux  $OY'$ ,  $OZ$ ,  $OY$ ,  $OZ'$  sont les rayons d'un cercle de centre  $O$  et leurs angles au sommet commun est  $2\alpha$ . En d'autres termes, chacune des cordes égales  $Y'Z$ ,  $ZY$  et  $YZ'$  sous-tend un angle au centre  $2\alpha$ , et, par suite, sous-tend un angle inscrit  $\alpha$  ayant pour sommet tout

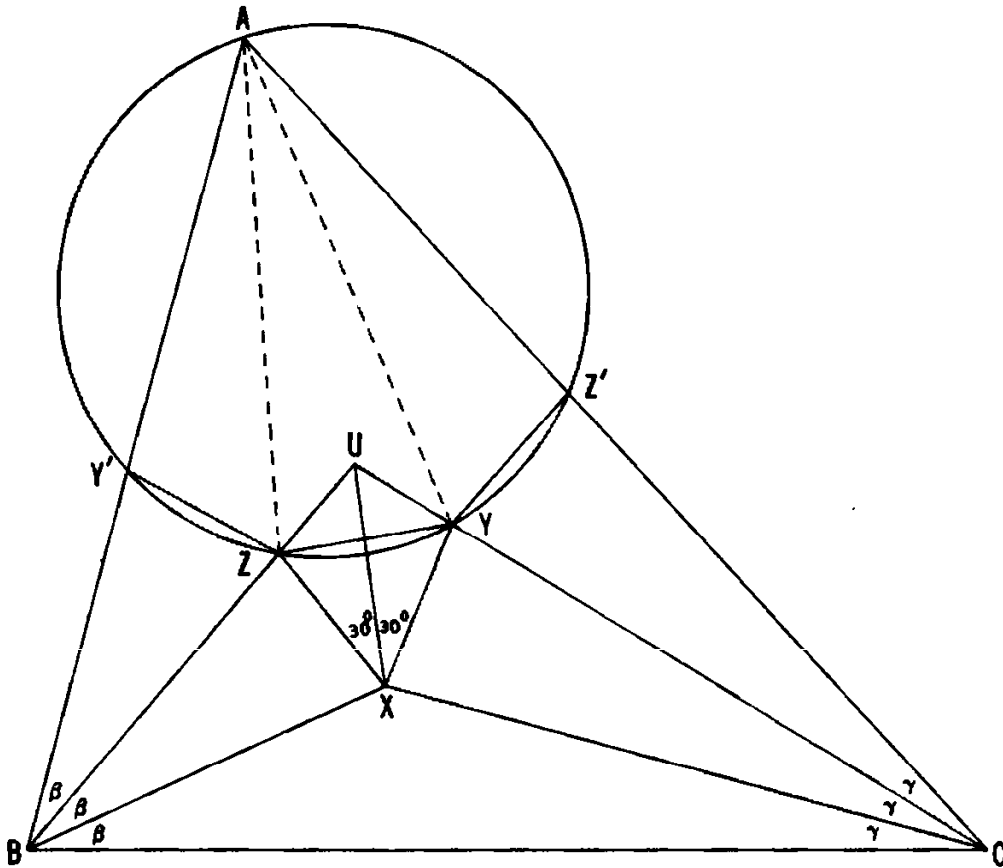


Fig. 2.9B

point de celui des deux arcs  $Y'Z'$  qui ne contient pas  $Y$ . On peut donc définir cet arc comme le lieu des points (de l'autre côté de  $Y$  par rapport à  $Y'Z'$ ) tels que la corde  $Y'Z'$  sous-tende un angle inscrit  $3\alpha$ . Etant l'un d'eux, le point  $A$  est donc sur le cercle de centre  $O$ .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.91 lui-même. Comme on le voit sur la figure 2.9B, les demi-droites partageant en trois les angles  $B = 3\beta$  et  $C = 3\gamma$  se coupent en  $U$  et  $X$ . Dans le triangle  $BCU$ , les angles en  $B$  et  $C$  ont pour bissectrices  $BX$  et  $CX$ ; le point  $X$  est donc le centre du cercle inscrit dans ce triangle, et  $UX$  est la bissectrice de l'angle en  $U$ . Si maintenant, sur  $CU$  et  $BU$ , nous déterminons deux points  $Y$  et  $Z$  tels que  $XY$  et  $XZ$  fassent avec  $XU$ , de part et d'autre, des angles égaux de  $\pi/6$ , les triangles  $UXY$  et  $UXZ$  sont égaux. Donc  $XY = XZ$ ; et comme l'angle en  $X$  est de  $\pi/3$ , le triangle  $XYZ$  est équilatéral.

De plus  $UZY$  est isocèle. Son angle en  $U$  lui est commun avec le triangle  $UBC$  dont les autres angles sont  $2\beta$  et  $2\gamma$ . Par suite, chacun des angles en  $Y$  et  $Z$  du triangle  $UYZ$  a pour expression  $\beta + \gamma$ .

En posant  $A/3 = \alpha$ , et compte tenu de ce que  $A + B + C = \pi$ , on a

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi/3 \quad \text{d'où} \quad \beta + \gamma = \pi/3 - \alpha.$$

Ainsi :

$$\widehat{YZU} = \pi/3 - \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{XZU} = 2\pi/3 - \alpha.$$

Déterminons maintenant, sur  $BA$  et  $CA$ , respectivement, les points  $Y'$  et  $Z'$  tels que  $BY' = BX$  et  $CZ' = CX$ . Les triangles  $BZX$  et  $BZY'$  sont donc égaux, comme le sont aussi les triangles  $CYX$  et  $CYZ'$ , de sorte que :

$$Y'Z = ZX = ZY = YX = YZ'.$$

Avant de pouvoir appliquer le lemme, il nous faut encore évaluer les angles  $\widehat{YZY'}$  et  $\widehat{Z'YZ}$  — ce qui est simple. Les angles égaux  $\widehat{BZY'}$  et  $\widehat{BZX}$  ayant en effet des suppléments égaux, il s'ensuit :

$$\widehat{UZY'} = \widehat{XZU} = 2\pi/3 - \alpha,$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{YZY'} &= \widehat{YZU} + \widehat{UZY'} = (\pi/3 - \alpha) + (2\pi/3 - \alpha) \\ &= \pi - 2\alpha. \end{aligned}$$

De même,  $\widehat{Z'YZ} = \pi - 2\alpha$ ; et, naturellement,  $\alpha = A/3 < \pi/3$ .

Si, maintenant, nous appliquons le lemme, il en résulte que les cinq points  $Y'$ ,  $Z$ ,  $Y$ ,  $Z'$  et  $A$  sont tous situés sur un même cercle. Les cordes égales  $Y'Z$ ,  $ZY$  et  $YZ'$  sous-tendant des angles égaux  $\alpha$  en  $A$ , les demi-droites  $AZ$  et  $AY$  partagent en trois parties égales l'angle  $A$  du triangle  $ABC$ . En d'autres termes, les points  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , que nous avons déterminés de façon à ce qu'ils soient les sommets d'un triangle équilatéral, sont, en réalité, les points mentionnés plus haut dans le théorème de Morley dont la démonstration est ainsi achevée.

### **Exercices**

- 1 - Si, sur la figure 2.9B on prolonge, d'une part,  $AZ$  et  $CX$  qui se couperont en  $V$ , d'autre part,  $BX$  et  $AY$  qui se couperont en  $W$ , les trois droites  $UX$ ,  $VY$  et  $WZ$  seront concourantes. (En termes de géométrie projective, les triangles  $UVW$  et  $XYZ$  sont homologues <sup>(1)</sup>. En général,  $UVW$  n'est pas équilatéral).
- 2 - Pour quel type de triangle  $ABC$ , le pentagone  $AY'ZYZ'$  sera-t-il régulier ?
- 3 - Lorsque le triangle  $ABC$  est équilatéral, les points  $Y'$ ,  $Z$ ,  $Y$ ,  $Z'$  sont quatre des sommets d'un polygone régulier à neuf côtés; le point  $A$  est aussi un sommet de ce polygone et il est opposé au côté  $ZY$ .
- 4 - Si  $3\alpha$ ,  $3\beta$  et  $3\gamma$  sont les angles d'un triangle dont le cercle circonscrit a le rayon  $R$ , les côtés du triangle équilatéral de Morley ont pour valeur commune  $R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ .
- 5 - Si le côté  $Z'Y'$  d'un rectangle  $BCZ'Y'$  est partagé en trois parties égales par les points  $YZ$  (de sorte que  $Z'Y = YZ = ZY'$ ), et si le centre  $X$  du rectangle forme un triangle équilatéral avec  $Y$  et  $Z$ , les droites  $BX$  et  $BZ$  partagent en trois parties égales l'angle droit en  $B$  du rectangle.

(<sup>1</sup>) Voir R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* - C., p. 265-266.

# 3

## Points alignés et droites concourantes

*Mais il ouvrit les charnières toutes grandes,  
il en poussa et tira les axes et les flancs  
jusqu'à ce qu'ils semblent tous corrés et oblongs  
comme une figure compliquée  
du second livre d'Euclide.*

C. L. Dodgson

Après avoir étudié quelques autres propriétés des triangles et quadrangles (ou quadrilatères), nous aborderons le domaine de la géométrie projective — en allant même un peu plus loin. Nous devons remettre à un autre volume l'exposé systématique de ce sujet passionnant; mais il est légitime de mentionner ici quatre de ses théorèmes essentiels parce qu'on peut les démontrer par les méthodes euclidiennes; en réalité, trois de ces derniers sont si anciens qu'à l'époque de leur découverte, on ne disposait d'aucune autre méthode. Tous les théorèmes en question concernent, soit des *points alignés*, soit des *droites concourantes*. L'esprit de la géométrie projective commence à apparaître dès que l'on observe que, dans beaucoup de cas, des droites parallèles se comportent comme si elles étaient concourantes.

### 3.1. QUADRANGLES; THÉORÈME DE VARIGNON

On peut définir un *polygone* comme étant la figure formée par un certain nombre de points appelés *sommets* et un même nombre de segments rectilignes appelés *côtés*; les points appartiennent à un même plan et constituent un ensemble ordonné périodique, ainsi que les segments rectilignes joignant les couples successifs de points; enfin trois points successifs ne peuvent être alignés. En d'autres termes, un polygone est une ligne brisée fermée sur elle-même et plane. Par exemple, le *pentagone* a cinq côtés et cinq sommets, l'*hexagone*, six, et ainsi de suite. Mais cette dénomination de forme grecque (qui, littéralement, exprime le nombre d'angles de la figure) n'est pas employée dans les cas simples de trois et quatre côtés : au lieu de « trigone » et « tétragone » (bien que « trigone » soit conservé dans le mot « trigonométrie ») on emploie alors les termes d'origine latine « triangle » et « quadrangle ». A ce propos, nous déconseillons d'appeler un quadrangle « quadrilatère » <sup>(1)</sup> : en géométrie projective, où les côtés sont des droites indéfinies et non plus de simples segments, nous devons recourir à ces deux mots avec des sens différents.

On dit que deux côtés d'un quadrangle sont *adjacents* ou *opposés* suivant qu'ils ont, ou non, un sommet commun. Et, de même, deux sommets sont adjacents ou opposés suivant qu'ils sont, ou non, situés sur un même côté. On appelle *diagonales* les droites joignant les couples de sommets opposés. Ainsi, le quadrangle  $ABCD$  a pour côtés  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , et pour diagonales  $AC$  et  $BD$ .

Sur la figure ci-après, les trois quadrangles sont de types manifestement différents : le premier est *convexe*, ses deux diagonales étant à l'intérieur du contour; le second est *concave*, une diagonale est intérieure au contour et l'autre, extérieure; le troisième est *croisé*, les diagonales étant toutes les deux extérieures.

Nous définissons naturellement l'*aire* d'un quadrangle convexe comme étant la somme des aires des deux triangles que détermine une diagonale :

$$S(ABCD) = S(ABC) + S(CDA) = S(BCD) + S(DAB).$$

(<sup>1</sup>) Rappelons à ce sujet, la définition donnée par R. DELTHEIL et D. CAIRE (voir *Géométrie*, 4<sup>e</sup> éd., 1950, p. 137, réédition Jacques Gabay, 1989) : « On donne le nom de *quadrangle* à la figure formée par quatre points du plan, réservant la dénomination de *quadrilatère*, ou même de *quadrilatère complet*, pour la figure formée par quatre droites du plan ».

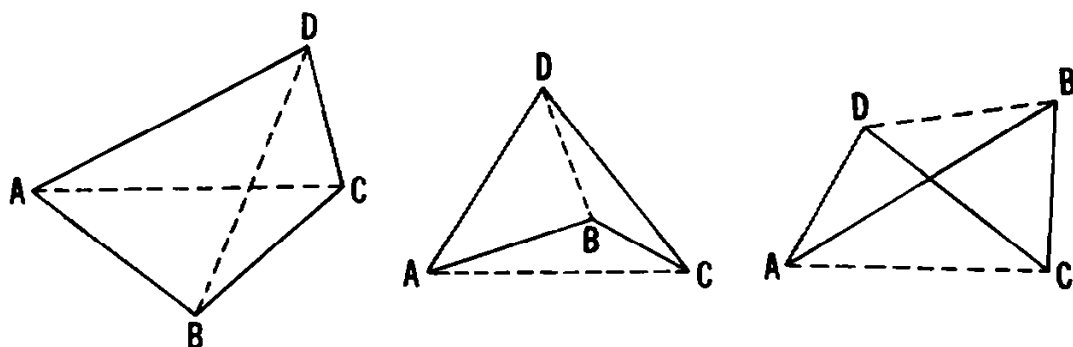


Fig. 3.1A

Pour que cette formule soit également valable dans le cas d'un quadrangle concave, nous considérerons que l'aire d'un triangle est *positive* ou *negative* suivant que les sommets sont énoncés dans un ordre correspondant au sens inverse des aiguilles d'une montre, ou dans le sens de ces aiguilles. Ainsi:

$$S(ABC) = S(BCA) = S(CAB) = -S(CBA).$$

Par exemple, le quadrangle concave situé au milieu de la figure 3.1A a pour aire :

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(BCD) + S(DAB) = S(CDA) - S(CBA) \\ &= S(CDA) + S(ABC). \end{aligned}$$

Enfin, nous devons considérer que l'aire d'un quadrangle croisé est la *différence* des aires des deux petits triangles qui paraissent la constituer.

Associée à la notion de segment dirigé (voir paragraphe 2.1), la convention  $S(ABC) = -S(CBA)$  nous permet d'étendre nos démonstrations du théorème de Jean de Céva, et de sa réciproque (voir 1.21 et 1.22) aux cas où, pour  $X$ ,  $Y$  ou  $Z$ , le rapport des segments que l'un de ces points détermine sur le côté correspondant est négatif, c'est-à-dire lorsque le point est sur le prolongement du côté.

Le théorème suivant — dû à Pierre Varignon (1654-1722) — est tellement simple que l'on s'étonne de sa publication si tardive, en 1731.

**Théorème 3.11** — *Si l'on joint les milieux des côtés d'un quadrangle, la figure obtenue est un parallélogramme dont l'aire est égale à la moitié de l'aire du quadrangle.*

Rappelons, tout d'abord, que, dans un triangle, le segment joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième et a pour longueur



la moitié de ce dernier. Soit maintenant un quadrangle  $ABCD$  dont les points  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  (voir fig. 3.1B) sont les milieux des côtés. On voit que dans les triangles  $ABC$  et  $CBD$ ,  $PS$  et  $QR$ , respectivement, sont tous deux parallèles à  $BD$  et égaux à  $BD/2$ . Par suite, le quadrangle  $PQRS$  est un parallélogramme <sup>(1)</sup> que l'on appelle souvent le *parallélogramme de Varignon* du quadrangle  $ABCD$ .

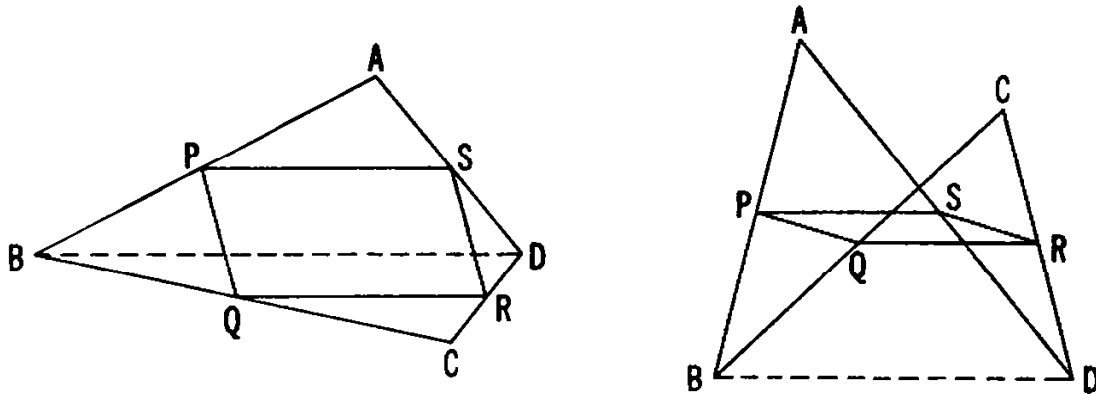


Fig. 3.1B

Quant à l'aire de  $PQRS$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 S(PQRS) &= S(ABCD) - S(PBQ) - S(RDS) - S(QCR) - S(SAP) \\
 &= S(ABCD) - 1/4 S(ABC) - 1/4 S(CDA) - 1/4 S(BCD) - \\
 &\quad - 1/4 S(DAB) \\
 &= S(ABCD) - 1/4 S(ABCD) - 1/4 S(ABCD) \\
 &= 1/2 S(ABCD).
 \end{aligned}$$

Si le lecteur représente un quadrangle concave (fig. 3.1B, droite), il verra que la décomposition ci-dessus s'applique aussi à ce cas.

Les diagonales de tout parallélogramme se coupant mutuellement en leur milieu, les milieux de  $PR$  et de  $QS$  coïncident avec le centre du parallélogramme de Varignon (c'est-à-dire le point  $O$  de la figure 3.1C). D'autre part, de même que  $AC$  et  $BD$  sont les diagonales de  $ABCD$ ,  $AD$  et  $BC$  sont aussi les diagonales de  $ABDC$ . Le milieu de  $PR$  étant unique, il s'ensuit que le parallélogramme de Varignon  $PYRX$  et le nouveau quadrangle  $ABCD$  ont le même centre  $O$ . D'où :

<sup>(1)</sup> Si  $ABCD$  était un quadrangle *gauche* (c'est-à-dire dont les quatre sommets ne sont pas dans le même plan),  $PQRS$  serait encore un parallélogramme.

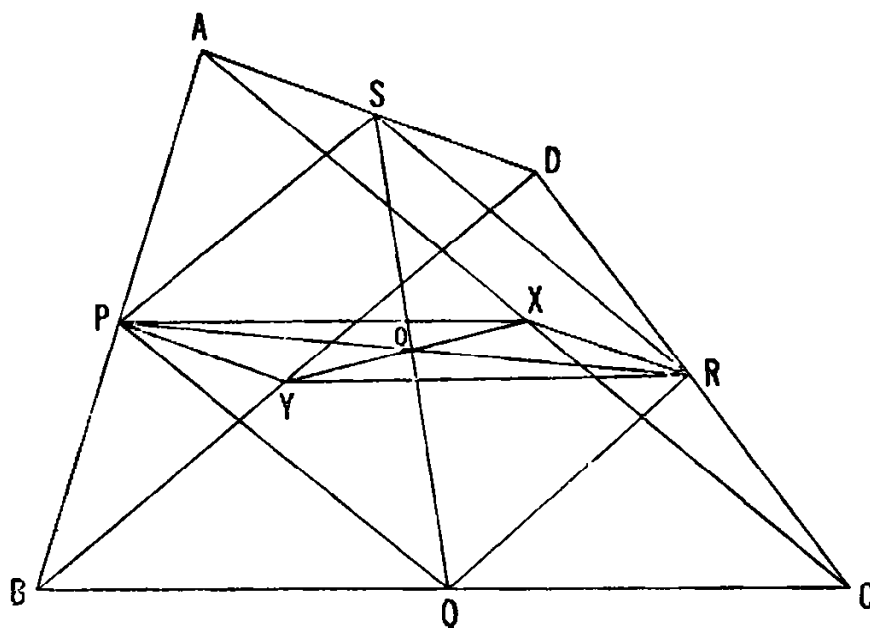


Fig. 3.1C

**Théorème 3.12** — *Dans un quadrangle, les segments joignant les milieux des couples de côtés opposés, et les segments joignant les milieux des diagonales sont concourants et se coupent mutuellement en leurs milieux.*

Tel est le premier de nos théorèmes sur les droites concourantes. Le suivant donne un résultat utile.

**Théorème 3.13** — *Si l'une des diagonales d'un quadrangle partage celui-ci en deux triangles d'aires égales, elle coupe l'autre diagonale en son milieu. Réciproquement, si l'une des diagonales coupe l'autre en son milieu, elle partage l'aire du quadrangle en deux parties égales.*

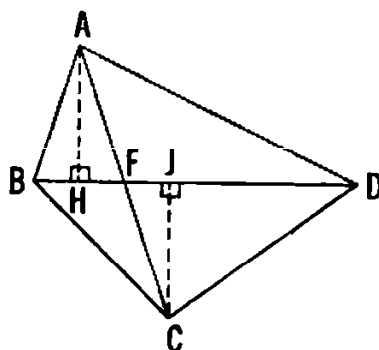


Fig. 3.1D

Pour nous en assurer, supposons, en effet que la diagonale  $BD$  partage le quadrangle  $ABCD$  en deux triangles  $DAB$  et  $BCD$  d'aires égales (voir fig. 3.1D). Ayant la même « base »  $BD$ , ces triangles doivent avoir les hauteurs correspondantes  $AH$  et  $CJ$  égales. Donc les triangles  $AHF$  et  $CJF$  sont égaux, et  $AF = CF$ . Réciproquement, si, par hypothèse,  $AF = CF$ , ces deux mêmes triangles sont égaux et  $AH = CJ$ . D'où  $S(DAB) = S(BCD)$ .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le dernier théorème de ce paragraphe :

**Théorème 3.14** — *Si les prolongements des côtés opposés  $AD$  et  $BC$  d'un quadrangle  $ABCD$  se coupent en  $W$ , et si les points  $X$  et  $Y$  sont les milieux des diagonales  $AC$  et  $BD$ , on a  $S(WXY) = 1/4 S(ABCD)$  :*

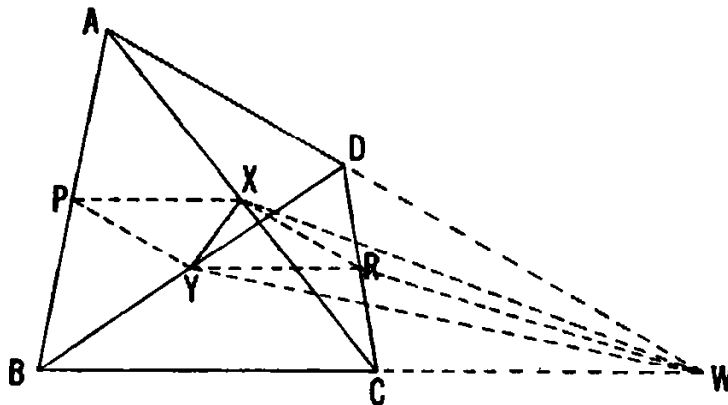


Fig. 3.1E

Marquons, tout d'abord, les milieux,  $P$  et  $R$  respectivement des côtés  $AB$  et  $CD$ ; puis traçons  $PX$ ,  $PY$ ,  $RX$ ,  $RY$ ,  $RW$ . Joignant les milieux  $Y$  et  $R$  de deux côtés du triangle  $BCD$ , le segment  $RY$  est parallèle à  $BC$  et coupe en son milieu l'autre diagonale,  $DW$ , du quadrangle  $DYWR$ . La réciproque du théorème 3.13 permet donc d'écrire :

$$S(RYW) = S(YRD) = 1/4 S(BCD) ;$$

et on trouve pareillement :

$$S(RWX) = 1/4 S(CDA).$$

De plus, en appliquant le théorème de Varignon au quadrangle  $ABDC$ , il vient :

$$\begin{aligned} S(RXY) &= 1/2 S(PYRX) = 1/4 S(ABDC) \\ &= 1/4 S(CAB) + 1/4 S(BDC) \\ &= 1/4 S(ABC) - 1/4 S(BCD). \end{aligned}$$

En ajoutant les trois expressions ci-dessus on a finalement :

$$\begin{aligned} S(WXY) &= S(RXY) + S(RYW) + S(RWX) \\ &= 1/4 S(ABC) - 1/4 S(BCD) + 1/4 S(BCD) + 1/4 S(CDA) \\ &= 1/4 S(ABC) + 1/4 S(CDA) = 1/4 S(ABCD). \end{aligned}$$

### Exercices

- 1 - Le périmètre du parallélogramme de Varignon d'un quadrangle est égal à la somme des diagonales de ce dernier.
- 2 - Etant donné un quadrangle quelconque, la somme des carrés de ses côtés est égale à la somme des carrés de ses diagonales et de quatre fois le carré du segment joignant les milieux des diagonales (voir fig. 3.1F).

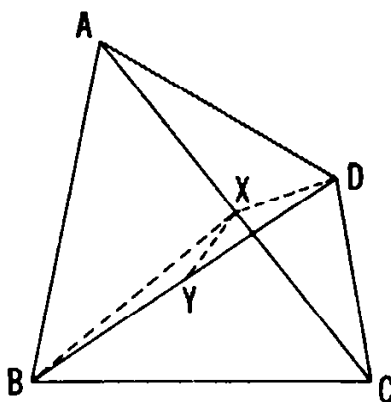


Fig. 3.1F

- 3 - Dans un parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.
- 4 - En appelant  $a$  la longueur des côtés égaux d'un trapèze isocèle dont les côtés parallèles ont les longueurs  $b$  et  $c$ , et dont les diagonales ont la longueur  $d$ , on a :  $d^2 = a^2 + bc$ .

### 3.2. QUADRANGLES INSCRIPTIBLES; FORMULE DE BRAHMAGUPTA

Soit un ensemble de  $E$  segments rectilignes joignant  $V$  points deux à deux; et considérons le comme une « armature » dont les segments sont des barres rigides articulées à leurs extrémités mais devant rester dans un même plan. Il est évident qu'un triangle ( $E = V = 3$ ) est rigide tandis qu'un quadrangle ( $E = V = 4$ ) a un degré de liberté, l'un de ses angles pouvant s'accroître ou décroître, en entraînant, pour les autres, les variations qui en résultent. On dit qu'une armature est « pseudo-rigide » si elle cesse d'être rigide quand on enlève l'une quelconque de ses barres. Sir Horace Lamb a démontré de manière simple que pour une armature, une condition nécessaire, mais non suffisante, de pseudo-rigidité est

$$E = 2V - 3.$$

Si, par exemple  $E = 5$  et  $V = 4$ , on a alors un quadrangle à une diagonale; et la suppression de cette dernière assure le degré de liberté mentionné ci-dessus.

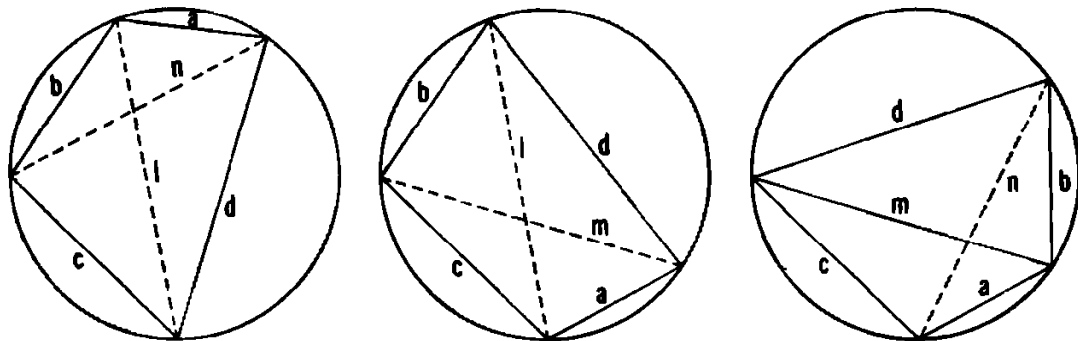


Fig. 3.2A

Les côtés d'un quadrangle convexe peuvent être constitués par quatre segments quelconques de longueurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ , pourvu que l'une de celles-ci soit inférieure à la somme des trois autres. Grâce au degré de liberté, on peut augmenter ou diminuer deux angles opposés de façon à ce qu'ils deviennent supplémentaires : les quatre sommets sont alors sur un même cercle. Supposons que les diagonales d'un tel quadrangle inscriptible soient  $l$  et  $n$ , comme on le voit la figure 3.2A, à gauche. Découpons le triangle formé par  $a$ ,  $l$  et  $d$  et, après l'avoir retourné, replaçons le près du triangle  $lbc$ , la diagonale  $l$  étant de nouveau commune (fig. 3.2A, centre) : on obtient ainsi un quadrangle  $bcad$ . En recommen-

çant sur ce dernier la même opération que ci-dessus, mais, cette fois le long de la diagonale  $m$ , on arrive, après retournement du triangle  $dbm$ , à un troisième quadrangle  $cabd$ , toujours inscrit dans le même cercle (fig. 3.2A, droite). Ce quadrangle aurait, d'ailleurs, pu être réalisé en découpant le premier le long de sa diagonale  $n$  : ses diagonales sont  $m$  et  $n$ , et aucune autre transformation du type ci-dessus n'est maintenant possible (sauf un renversement total faisant passer de  $abcd$  à  $dcba$ ). D'après le théorème de Ptolomée 2.61, on peut écrire

$$mn = bc + ad, \quad nl = ca + bd, \quad lm = ab + cd.$$

Les quadrangles envisagés ci-dessus étant convexes, on peut considérer l'aire de chacun d'eux comme étant la somme des aires positives de deux triangles, car le retournement d'un triangle de la manière indiquée ci-dessus ne modifie pas son aire positive. Nos trois quadrangles ont donc même aire — bien qu'il n'y en ait pas deux d'égaux (à moins que deux des longueurs  $a, b, c, d$  ne soient égales). L'énoncé suivant résume les remarques précédentes :

**Théorème 3.21** — *Quatre segments quelconques, de longueurs différentes et telles que chacune soit inférieure à la somme des trois autres, peuvent constituer les côtés de trois quadrangles inscriptibles différents ayant tous même aire.*

**Corollaire** — *L'aire d'un quadrangle inscriptible est une fonction symétrique de ses quatre côtés.*

C'est le mathématicien indien Brahmagupta qui, au septième siècle de notre ère, découvrit la signification précise de cette fonction.

**Théorème 3.22** — *Soit un quadrangle inscriptible de côtés  $a, b, c, d$  et de demi-périmètre  $s$ . Son aire  $K$  est donnée par la formule*

$$K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d).$$

Pour établir cette formule, l'une des méthodes les plus simples fait appel à la trigonométrie. Considérons en effet le quadrangle inscriptible de la figure 3.2B ci-dessous, dans laquelle  $E$  est le sommet commun aux côtés  $a$  et  $b$ ,  $F$  le sommet commun aux côtés  $c$  et  $d$ , et  $n$  la diagonale joignant les deux autres sommets. (Dans la suite,  $E$  et  $F$  désigneront les angles du quadrangle en  $E$  et  $F$ ). De l'égalité  $E + F = \pi$ , on déduit :

$$\cos F = -\cos E, \quad \text{et} \quad \sin F = \sin E.$$

D'autre part, on a la relation

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos E = n^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos F,$$

d'où

$$2(ab + cd) \cos E = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \quad (3.221)$$

De plus l'aire du quadrangle,  $K$ , est :

$$K = 1/2 ab \sin E + 1/2 cd \sin F = 1/2 (ab + cd) \sin E,$$

ce que l'on peut écrire :

$$2(ab + cd) \sin E = 4K. \quad (3.222)$$

Elevons au carré et additionnons les deux équations (3.221) et (3.222); il vient

$$4(ab + cd)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16K^2$$

ou encore

$$16K^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2.$$

De l'identité générale  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$  appliquée au second membre de l'équation précédente, on déduit :

$$\begin{aligned} 16K^2 &= [2ab + 2cd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] \\ &\quad \times [2ab + 2cd + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] \\ &= [c^2 + 2cd + d^2 - a^2 + 2ab - b^2] \\ &\quad \times [a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2] \\ &= [(c + d)^2 - (a - b)^2] [(a + b)^2 - (c - d)^2] \\ &= [(c + d - a + b)(c + d + a - b)] \\ &\quad \times [(a + b - c + d)(a + b + c - d)] \\ &= (2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d), \end{aligned}$$

où  $2s = a + b + c + d$ . La démonstration est ainsi achevée.

Si, dans le théorème 3.22, on pose  $d = 0$ , on obtient la formule de Héron donnant l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et son demi-périmètre  $s$  :

$$[S(ABC)]^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Bien que cette formule soit attribuée à Héron d'Alexandrie (en l'an 60 de notre ère, environ), van der Waerden pense, avec Bell, qu'elle est due à Archimède (troisième siècle avant J.C.).

Une autre découverte de Brahmagupta concerne un type particulier de quadrangle inscriptible :

**Théorème 3.23** — *Si les diagonales d'un quadrangle inscriptible sont perpendiculaires l'une à l'autre et se coupent en un point  $P$ , une droite passant par  $P$  et perpendiculaire à l'un quelconque des côtés coupe le côté opposé en son milieu.*

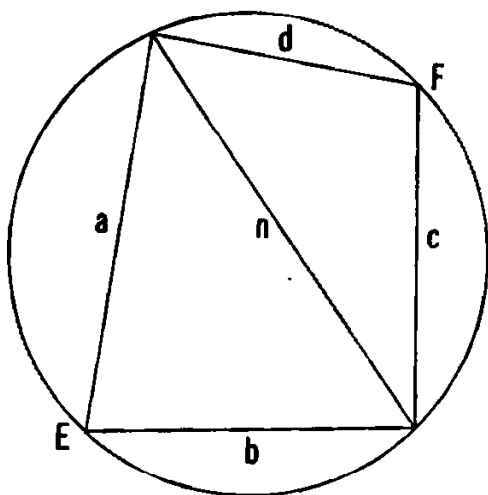


Fig. 3.2B

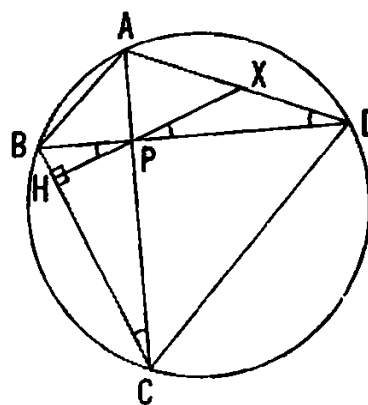


Fig. 3.2C

Soit (voir fig. 3.2C) un quadrangle inscriptible  $ABCD$  dont les diagonales  $AC$  et  $BD$  sont orthogonales et où la droite  $PH$ , perpendiculaire à  $BC$ , coupe  $DA$  en  $X$ . On peut écrire :

$$\widehat{DPX} = \widehat{BPH} = \widehat{PCH} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{XDP}.$$

Le triangle  $XPB$  est donc isocèle, et il en est de même du triangle  $XAP$ . Par suite,

$$XA = XP = XD.$$

### Exercices

- 1 - Si un quadrangle, de côtés  $a, b, c, d$ , est inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre cercle, son aire  $K$  est donnée par la formule

$$K^2 = abcd.$$

- 2 - En appliquant la formule de Héron, trouver l'aire d'un triangle ayant pour côtés

$$(a) \quad 13, 14, 15; \quad (b) \quad 3, 14, 15.$$



3 - Exprimer le rayon  $r$  du cercle inscrit dans un triangle en fonction de  $s$ ,  $s - a$ ,  $s - b$ ,  $s - c$ .

4 - En adoptant les notations du paragraphe 1.4, montrer que

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R, \quad \text{et} \quad S(I_a I_b I_c) = 2sR.$$

5 - Avec les notations de la figure 3.2A, montrer que :

$$K = \frac{lmn}{4R}.$$

6 - Si, dans l'exercice 5, on pose  $d = 0$ , comment le résultat est-il modifié ?

7 - L'aire  $K$  d'un quadrangle convexe dont les côtés sont  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , et qui est inscrit dans un cercle de rayon  $R$ , est donnée par la formule

$$K^2 = \frac{(bc + ad)(ca + bd)(ab + cd)}{16R^2}.$$

8 - Si l'on prolonge deux côtés opposés d'un quadrangle inscriptible jusqu'à leur intersection en  $V$ , et les deux autres côtés jusqu'à leur intersection en  $W$ , les bissectrices intérieures des angles en  $V$  et  $W$  sont perpendiculaires.

9 - Si l'on joint un point  $P$  quelconque du plan d'un rectangle  $ABCD$  aux sommets de ce dernier, on a la relation :

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 = 0.$$

10 - Etant donné un quadrangle inscrit dans un cercle, le produit des distances d'un point du cercle à deux côtés opposés est égal au produit des distances de ce même point aux deux autres côtés, et aussi au produit des distances du même point aux diagonales.

### 3.3. TRIANGLES DE NAPOLEON

Nous examinerons maintenant quelques figures construites à partir de triangles et de quadrangles. Il est surprenant, à ce sujet, que l'on n'ait pas porté plus d'attention au théorème simple que voici :

**Théorème 3.31** — *Si, sur les côtés d'un triangle quelconque et à l'extérieur de celui-ci, on construit des triangles tels que la somme des trois angles opposés aux côtés pris comme bases soit égale à  $180^\circ$ , les cercles circonscrits à ces triangles ont un point commun.*

Cette fois encore, il s'agit d'un théorème sur les droites concourantes ! Sa démonstration est très simple. Soient, en effet, les triangles  $CBP$ ,

$ACQ$  et  $BAR$  construits sur les côtés d'un triangle  $ABC$  donné et tels que leurs angles en  $P$ ,  $Q$ , et  $R$  satisfassent à la relation  $P + Q + R = 180^\circ$ . Les cercles circonscrits aux triangles  $CBP$  et  $ACQ$  ont deux points communs,  $C$  et  $F$ . En joignant  $F$  à  $A$ ,  $B$  et  $C$  <sup>(1)</sup>, on voit que :

$$\begin{aligned}\widehat{AFB} &= 360^\circ - (\widehat{BFC} + \widehat{CFA}) \\ &= 360^\circ - (180^\circ - P + 180^\circ - Q) \\ &= P + Q = 180^\circ - R.\end{aligned}$$

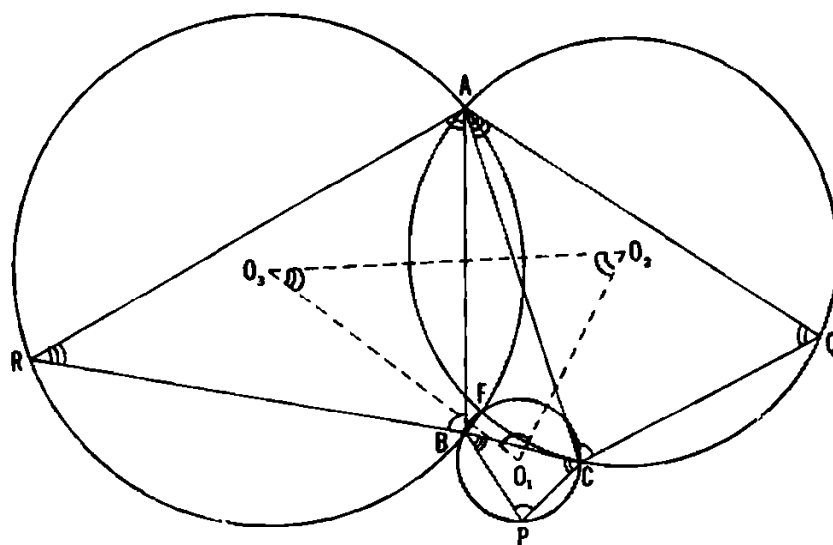


Fig. 3.3A

Il en résulte que  $F$  se trouve sur le cercle circonscrit au triangle  $BAR$ , comme il l'est aussi sur les cercles circonscrits aux deux autres triangles  $BCP$  et  $ACQ$ .

Deux cas particuliers sont intéressants :

**Théorème 3.32** — Si les sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont situés, respectivement sur les côtés  $QR$ ,  $RP$  et  $PQ$  d'un triangle  $PQR$ , les cercles circonscrits aux triangles  $CBP$ ,  $ACQ$  et  $BAR$  ont un point commun.

**Théorème 3.33** — Si, sur les côtés d'un triangle  $ABC$  et à l'extérieur de celui-ci, on construit les trois triangles semblables  $PCB$ ,  $CQA$  et  $BAR$ , les cercles circonscrits à ces trois triangles ont un point commun. (D'après

<sup>(1)</sup> Ce qui n'a pas été fait sur la figure 3.3A pour ne pas la surcharger (N.d.T.).

l'ordre dans lequel figurent les sommets des triangles semblables, on voit que les angles en  $P$ ,  $Q$  et  $R$ , ne sont *pas* correspondants).

Démontré par A. Miquel en 1838, le théorème 3.32 a été appelé théorème du *pivot* par Forder. Si, au lieu de  $P, Q, R, A, B, C$ , nous adoptons les notations  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$ , pour reprendre celles de la figure 1.9A, nous pouvons, tout aussi bien, le démontrer de la façon un peu plus développée que voici. Si  $A_1, B_1, C_1$  sont trois points quelconques situés sur les côtés  $BC, CA, AB$ , respectivement, d'un triangle  $ABC$ , les cercles circonscrits aux triangles  $AB_1C_1, A_1BC_1$ , et  $A_1B_1C$  ont un point commun  $P$ . Dans le cas particulier où  $AP, BP$  et  $CP$  sont des diamètres de ces cercles,  $A_1B_1C_1$  est alors le triangle podaire du point  $P$  par rapport au triangle  $ABC$ . En laissant fixes le triangle  $ABC$  et  $P$ , on peut faire tourner solidement les trois droites  $PA_1, PB_1$  et  $PC_1$  autour du « pivot »  $P$ , et cela d'un angle quelconque, de manière à obtenir le « triangle podaire oblique »  $A_1B_1C_1$  : il est évident que les cercles circonscrits aux triangles  $AB_1C_1, A_1BC_1$ , et  $A_1B_1C$  passent toujours par le point  $P$ .

Les points  $A_1, B_1, C_1$  ne doivent pas nécessairement former un triangle : comme dans la figure 2.5A, par exemple, ils peuvent être alignés. Dans ce cas,  $A_1, B$  et  $C$  sont trois points situés sur les droites  $B_1C_1, C_1A, AB_1$ ; et le même théorème montre que les trois cercles circonscrits aux triangles  $ABC, A_1B_1C, A_1BC_1$  ont un point commun. Et comme les seuls points communs aux deux derniers cercles sont  $A_1$  et  $P$ , nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

**Théorème 3.34** — *Si quatre droites se coupent mutuellement en six points  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$ , de sorte que les ensembles de points alignés soient  $A_1BC, AB_1C, ABC_1, A_1B_1C_1$ , les cercles circonscrits aux quatre triangles  $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, ABC$  ont un point commun.*

Dans le cas particulier où  $AP, BP, CP$  sont des diamètres des trois premiers cercles ci-dessus,  $A_1B_1$  est la droite de Simson de  $P$  par rapport au triangle  $ABC$ . Si l'on maintient fixes le triangle et le point  $P$ , on peut faire tourner solidement les trois droites  $PA_1, PB_1$  et  $PC_1$  autour de  $P$  d'un angle quelconque, de façon à obtenir une « droite de Simson oblique ». Celle-ci contient les nouveaux « pieds »  $A_1, B_1, C_1$  qui sont tels que les trois droites  $PA_1, PB_1, PC_1$  fassent des angles égaux (ayant même sens de rotation) avec les trois droites  $BC, CA$  et  $AB$ .

Un intéressant corollaire du théorème 3.33 concerne le triangle formé par les centres  $O_1, O_2$  et  $O_3$  (voir fig. 3.3A). Les côtés  $O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2$

de ce triangle étant perpendiculaires aux cordes communes (ou axes radicaux) des cercles pris deux à deux, son angle en  $O_1$  doit être le supplément de  $\widehat{BFC}$ , ce qui signifie que  $O_1 = P$ . De même,  $O_2 = Q$  et  $O_3 = R$ . Ce sont là, justement, les trois angles différents de nos trois triangles semblables. D'où :

**Théorème 3.35** — *Si, sur les côtés d'un triangle quelconque,  $ABC$ , et à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles semblables  $PCB$ ,  $CQA$ , et  $BAR$ , les centres des cercles circonscrits à ces triangles forment un triangle également semblable.*

En particulier (voir fig. 3.3B ci-dessous) :

**Théorème 3.36** — *Si, sur les côtés d'un triangle quelconque, et extérieurement à celui-ci, on construit des triangles équilatéraux, les centres des cercles circonscrits à ces derniers forment un triangle équilatéral.*

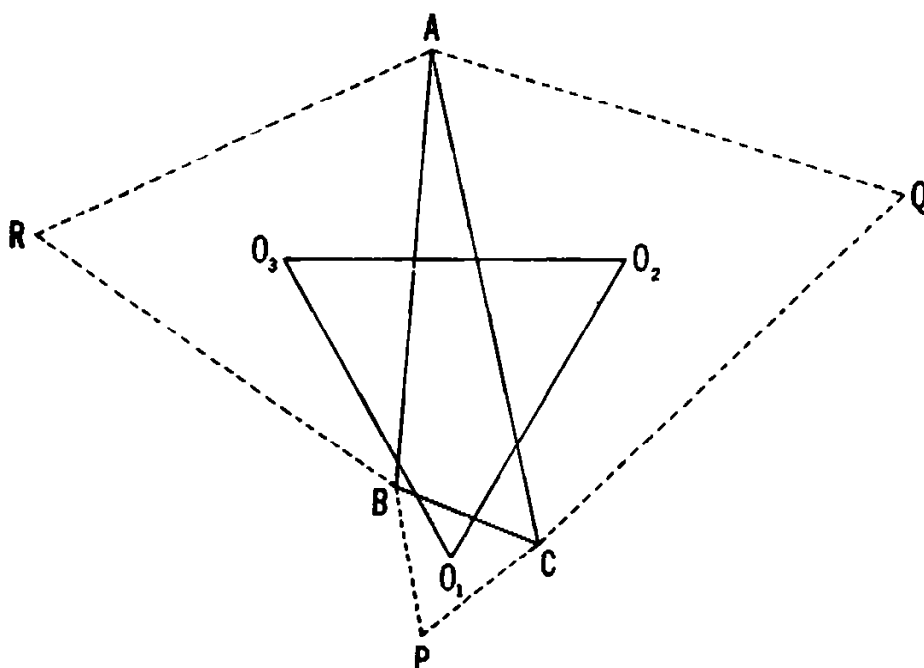


Fig. 3.3B

Napoléon Bonaparte fut, on le sait, quelque peu mathématicien et porta un vif intérêt à la géométrie. On raconte, à ce sujet, qu'avant de s'imposer à la tête de la France, il entreprit une discussion avec les grands mathématiciens Lagrange et Laplace, jusqu'à ce que ce dernier lui dise

sévèrement : « Général, une leçon de géométrie est la dernière chose que nous ayons à vous demander ». Pourtant, Laplace devint ensuite son principal ingénieur militaire.

Le théorème 3.36 a été attribué à Napoléon : on peut cependant douter que ses connaissances fussent suffisantes tant en géométrie pour obtenir ce résultat remarquable, qu'en anglais pour composer le fameux palindrome qu'on lui prête aussi

ABLE WAS I ERE I SAW ELBA <sup>(1)</sup>.

Quoi qu'il en soit, il est commode (dans le cas où les triangles  $PCB$ ,  $CQA$  et  $BAR$  sont équilatéraux) d'appeler *triangle extérieur de Napoléon* du triangle  $ABC$ , le triangle  $O_1O_2O_3$  formé par les centres des cercles circonscrits. D'une façon analogue, et dans le cas où les triangles équilatéraux sont construits à l'intérieur du triangle  $ABC$  (fig. 3.3C), nous appellerons *triangle intérieur de Napoléon* le triangle  $N_1N_2N_3$  des centres des cercles circonscrits. Avec cette convention, l'énoncé du théorème 3.36 se réduit à ceci :

*Le triangle extérieur de Napoléon est équilatéral.*

Ce résultat fut démontré par Yaglom par une autre méthode qui diffère de la nôtre, mais qui permet d'aboutir au théorème analogue que voici :

**Théorème 3.37** — *Le triangle intérieur de Napoléon est équilatéral.*

En appliquant la loi des cosinus au triangle  $AO_2O_3$  de la figure 3.3B, une autre voie amène également à un intéressant « sous-produit ». En effet,  $AO_2$  (non tracé sur la figure), étant le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral de côté  $CA = b$ , a pour longueur  $b/\sqrt{3}$ ; et, de même,  $AO_3 = c/\sqrt{3}$ . De plus,

$$\widehat{O_2AO_3} = A + 60^\circ.$$

D'où :

$$\overline{O_2O_3}^2 = 1/3 b^2 + 1/3 c^2 - 2/3 bc \cos (A + 60^\circ).$$

D'autre part, les sommets  $N_2$  et  $N_3$  du triangle intérieur de Napoléon sont les symétriques de  $O_2$  et  $O_3$  par rapport à  $CA$  et  $AB$  respectivement; et, de plus,  $\widehat{N_3AN_2} = A - 60^\circ$ . Il s'ensuit donc :

<sup>(1)</sup> Intraduisible en français par un autre palindrome. Disons seulement qu'il signifie : « J'étais puissant avant de voir l'île d'Elbe ». (N.d.T.).

$$\overline{N_2 N_3}^2 = \frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2 - \frac{2}{3} bc \cos (A - 60^\circ)$$

en soustrayant cette équation de la précédente, on a :

$$\begin{aligned} \overline{O_2 O_3}^2 - \overline{N_2 N_3}^2 &= \frac{2}{3} bc [\cos (A - 60^\circ) - \cos (A + 60^\circ)] \\ &= \frac{4}{3} bc \sin A \sin 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} bc \sin A \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} S(ABC). \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on a aussi :

$$\overline{O_1 O_2}^2 - \overline{N_1 N_2}^2 = \overline{O_3 O_1}^2 - \overline{N_3 N_1}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} S(ABC).$$

Et comme  $O_2 O_3 = O_3 O_1 = O_1 O_2$ , il vient :

$$N_2 N_3 = N_3 N_1 = N_1 N_2.$$

Finalement, en se rappelant que l'aire d'un triangle équilatéral est égale à  $\sqrt{3}/4$  fois le carré de son côté, nous pouvons exprimer comme suit notre intéressant « sous-produit » :

**Théorème 3.38** — *Pour tout triangle ABC, la différence des aires des triangles extérieur et intérieur de Napoléon est égale à  $S(ABC)$ .*

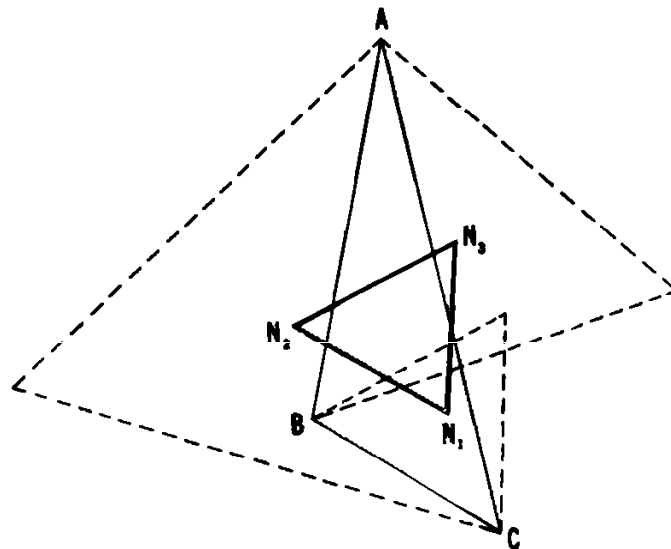


Fig. 3.3C

En réalité, comme on le voit sur la figure 3.3C, le triangle intérieur de Napoléon est « rétrograde », de sorte que son aire  $S(N_1N_2N_3)$  est négative (ou nulle). Aussi la formule exacte est, non pas :

$$S(O_1O_2O_3) - S(N_1N_2N_3) = S(ABC)$$

mais

$$S(O_1O_2O_3) - S(N_3N_2N_1) = S(ABC)$$

ou encore

$$S(O_1O_2O_3) + S(N_1N_2N_3) = S(ABC).$$

### Exercices

- 1 - Si, sur deux côtés d'un triangle, on construit des carrés, les cercles circonscrits à ces derniers se coupent sur le cercle qui a pour diamètre le troisième côté du triangle, et les centres de ces trois cercles sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle.
- 2 - En adoptant les notations de la figure 3.3B,
  - a) les droites  $PO_1$ ,  $QO_2$  et  $RO_3$  passent toutes trois par  $O$ , le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .
  - b) les droites  $AO_1$ ,  $BO_2$  et  $CO_3$  sont concourantes.
  - c) les segments  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$  sont égaux; de plus, ils passent par le point  $F$  commun aux cercles circonscrits aux trois triangles  $ACQ$ ,  $BPC$ ,  $ABR$  et se coupent mutuellement sous des angles de  $60^\circ$ . (Fermat, auquel le point  $F$  doit la lettre le désignant, a montré le premier que la somme des distances  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$  est minimum lorsqu'aucun angle du triangle  $ABC$  n'est supérieur à  $120^\circ$ ).
- 3 - Sur la figure 3.3C, les droites  $AN_1$ ,  $BN_2$ ,  $CN_3$  sont concourantes.
- 4 - Les triangles extérieur et intérieur de Napoléon ont même centre.

### 3.4. THÉORÈME DE MÉNÉLAÏS

Ménélaüs d'Alexandrie (1<sup>er</sup> siècle après J.C.), qu'il ne faut pas confondre avec Ménélaüs de Sparte, écrivit un traité appelé *Sphærica*, dans lequel il utilisait une certaine propriété d'un triangle sphérique, et comme si la propriété analogue d'un triangle plan était déjà bien connue. Peut-être en était-il ainsi; mais aucune trace antérieure de celle-ci n'a été conservée et nous nous bornerons à appeler *théorème de Ménélaüs* l'énoncé de cette propriété sous la forme suivante (voir les figures 3.4A et B) qui a recours à des segments dirigés (voir paragraphe 2.1) :

**Théorème 3.41** — Si trois points  $X, Y, Z$  situés sur les côtés  $BC, CA, AB$  (ou leurs prolongements) d'un triangle  $ABC$  sont alignés, il en résulte :

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = + 1.$$

Réciproquement, si l'on peut écrire cette équation pour des points  $X, Y, Z$  situés sur les côtés (ou leurs prolongements) d'un triangle, ces points sont alignés.

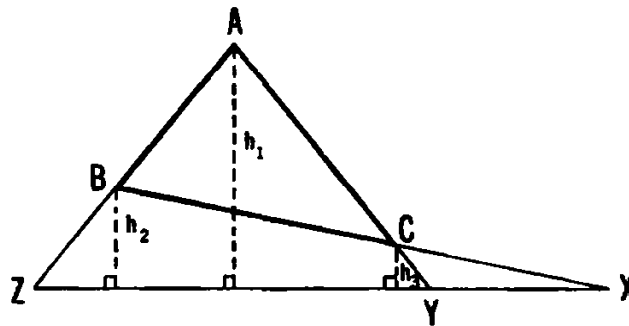


Fig. 3.4A

Soient  $X, Y, Z$  (fig. 3.4A et B) trois points alignés et  $h_1, h_2, h_3$  les longueurs des perpendiculaires abaissées de  $A, B$  et  $C$  sur la droite  $XY$ , en les considérant comme positives d'un côté de cette droite, et négatives de l'autre. En multipliant membre à membre les trois équations

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{h_3}{h_1}, \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{h_1}{h_2},$$

on a le résultat cherché. (Il faut remarquer que, pour avoir trois points  $X, Y, Z$  distincts et alignés, on doit toujours prolonger soit les trois côtés du triangle  $ABC$ , soit l'un d'eux seulement).

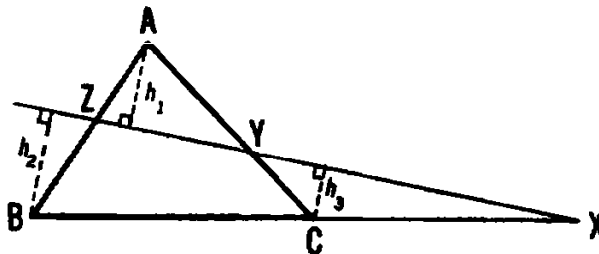


Fig. 3.4B



Réciproquement, soient les points  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  situés sur les trois côtés de telle sorte que l'on ait

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = + 1.$$

Si l'on suppose également que  $AB$  et  $XY$  se coupent en  $Z'$ , on aura

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} = + 1.$$

De ces deux équations, il résulte :

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}.$$

Ainsi,  $Z'$  coïncide avec  $Z$ , ce qui démontre que les points  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sont alignés.

Enfin, remarquons-le, le théorème de Ménélaus fournit un critère pour montrer que des points sont alignés, tout comme le théorème de Jean de Céva (voir paragraphes 1.21 et 1.22) permettait de montrer que des droites sont concourantes. Pour souligner cette différence, le théorème de Ménélaus peut être mis sous l'autre forme que voici

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = - 1.$$

### Exercices

- 1 - Etant donné un triangle scalène, les bissectrices extérieures de ses trois angles coupent les côtés respectivement opposés à ces derniers en trois points qui sont alignés.
- 2 - Etant donné un triangle scalène, les bissectrices intérieures de deux de ses angles, et la bissectrice extérieure du troisième coupent les côtés respectivement opposés à ces angles en trois points qui sont alignés.

### 3.5. THÉORÈME DE PAPPUS

Voici, maintenant, l'un des théorèmes les plus importants de la géométrie plane. S'il fut démontré pour la première fois par Pappus d'Alexandrie, environ 300 ans après J.C., ce n'est pourtant que près de

seize siècles plus tard que l'on reconnut son rôle dans les fondements de la géométrie projective. Et c'est à bon droit que Pappus fut appelé le dernier des grands géomètres de l'antiquité. On peut, de diverses manières, énoncer le théorème qui porte son nom; voici l'une d'elles :

**Théorème 3.51** — *Soient trois points  $A, C, E$  situés sur une droite, et trois autres points  $B, D, F$  situés sur une autre droite : si les droites  $AB, CD, EF$  coupent  $DE, FA, BC$ , en  $L, M$  et  $N$ , respectivement, ces trois points sont alignés.*

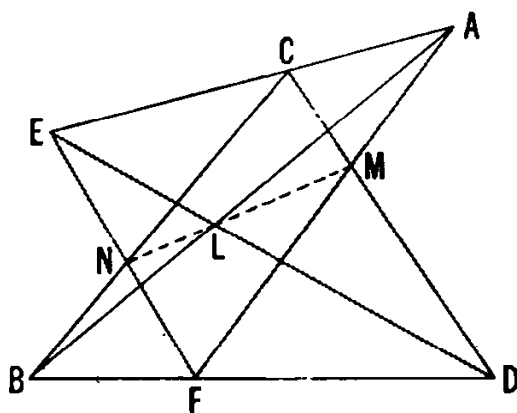


Fig. 3.5A

On reconnaît le caractère « projectif » de ce théorème au fait que celui-ci concerne uniquement une certaine disposition géométrique, sans qu'interviennent des mesures de longueurs ou d'angles, ou que l'on ait à considérer un certain *ordre* : dans chacun des ensembles de trois points alignés, il n'importe nullement, en effet, de savoir lequel des points est situé entre les deux autres. La figure 3.5A représente l'une des dispositions possibles; mais la figure 3.5B en montre une autre, tout aussi adéquate. On peut faire une permutation circulaire des lettres  $A, B, C, D, E, F$ , à condition, cependant, de déterminer correctement  $L, M$  et  $N$ . Pour éviter de considérer des points à l'infini, ce qui nous entraînerait trop loin dans le domaine de la géométrie projective, supposons donc, ici, que les trois droites  $AB, CD, EF$  forment le triangle  $UVW$  que l'on voit sur la figure 3.5C. En appliquant le théorème de Ménélaüs aux cinq ensembles de trois points chacun :

$$LDE, AMF, BCN, ACE, BDF,$$

ces points étant situés sur les côtés du triangle  $UVW$ , on a :

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{LW}} \frac{\overline{WD}}{\overline{DU}} \frac{\overline{UE}}{\overline{EV}} = -1, \quad \frac{\overline{VA}}{\overline{AW}} \frac{\overline{WM}}{\overline{MU}} \frac{\overline{UF}}{\overline{FV}} = -1, \quad \frac{\overline{VB}}{\overline{BW}} \frac{\overline{WC}}{\overline{CU}} \frac{\overline{UN}}{\overline{NV}} = -1,$$

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{AW}} \frac{\overline{WC}}{\overline{CU}} \frac{\overline{UE}}{\overline{EV}} = -1, \quad \frac{\overline{VB}}{\overline{BW}} \frac{\overline{WD}}{\overline{DU}} \frac{\overline{UF}}{\overline{FV}} = -1.$$

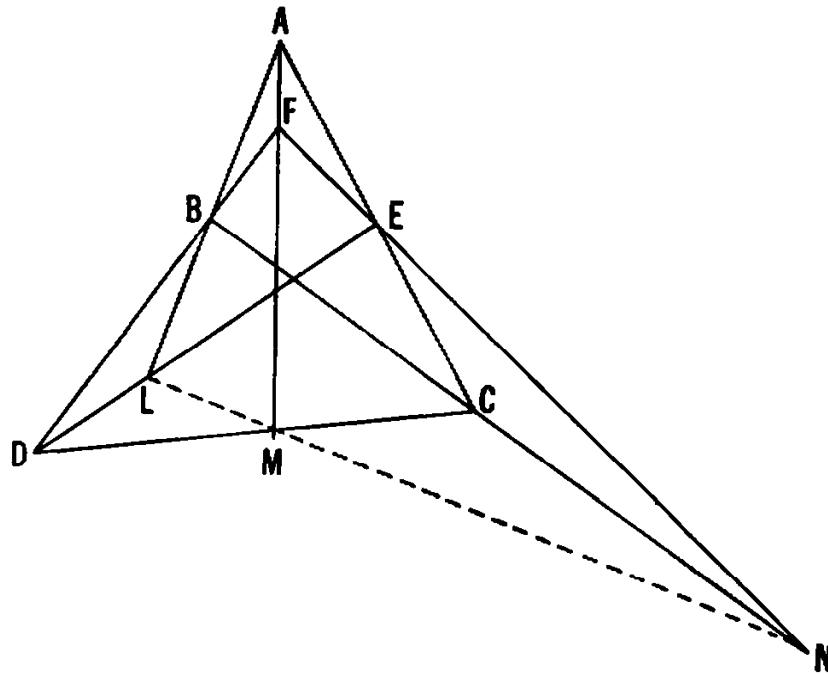


Fig. 3.5B

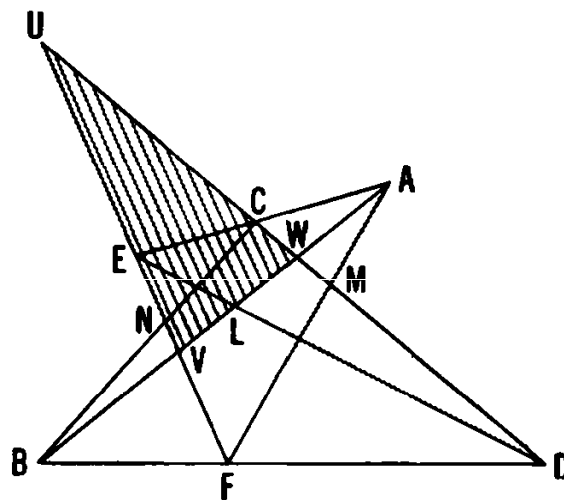


Fig. 3.5C

Divisons maintenant le produit des trois premières équations par le produit des deux autres, on obtient finalement, après de nombreuses simplifications :

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{NV}} = -1,$$

d'où il résulte que les points  $L$ ,  $M$  et  $N$  sont alignés, comme nous voulions le montrer.

### Exercices

- 1 - Soient  $A$ ,  $C$ ,  $E$  trois points situés sur une droite, et  $B$ ,  $D$ ,  $F$ , trois autres points situés sur une seconde droite. Si les droites  $AB$  et  $CD$  sont respectivement parallèles à  $DE$  et  $FA$ ,  $EF$  est parallèle à  $BC$ .
- 2 - Si les six points  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $N$ ,  $M$  sont tels que soient concourantes d'une part, les droites  $AE$ ,  $DM$ ,  $NB$  en  $P$ , et d'autre part, les droites  $AM$ ,  $DB$ ,  $NE$  en  $Q$ , que peut-on dire des droites  $AB$ ,  $DE$  et  $NM$  ?
- 3 - Soient  $C$  et  $F$  des points situés respectivement sur les côtés  $AE$  et  $BD$  d'un parallélogramme  $AEBD$ ; et soient  $M$  et  $N$  les points où se coupent respectivement, d'une part les droites  $CD$  et  $FA$ , d'autre part les droites  $EF$  et  $BC$ . En désignant par  $P$  le point où se coupent  $MN$  et  $DA$ , et par  $Q$  le point où se coupent  $MN$  et  $EB$ , on a  $AP = QB$ .
- 4 - Combien de points et de droites trouvent-on sur la figure 3.5A (ou sur la figure 3.5B) ? Combien de ces droites passent-elles par chaque point ? Combien y a-t-il de points sur chaque droite ?

### 3.6. TRIANGLES HOMOLOGIQUES; THÉORÈME DE DESARGUES

C'est l'architecte Filippo Brunelleschi (1377-1446) qui, le premier, a abordé la théorie géométrique de la perspective; on lui doit, notamment, le dôme octogonal de la cathédrale de Florence, et le Palais Pitti. Un autre architecte, Girard Desargues (1591-1661) fit ensuite une étude plus complète de cette même théorie; et, plus tard, il apparut que son théorème « des deux triangles » était tout aussi important que celui de Pappus. En réalité, on peut le déduire de ce dernier, mais d'une façon laborieuse; aussi, est-il bien plus facile de partir du théorème de Ménélaüs.

Si, entre deux figures formées de points et de droites, on peut établir une correspondance telle que les couples de points correspondants soient situés sur des droites concourantes, nous dirons que ces figures ont un

centre d'homologie <sup>(1)</sup>. Si la correspondance est telle que les couples de droites correspondantes se coupent en des points alignés, nous dirons, de même, que *les figures ont un axe d'homologie* <sup>(1)</sup>. Dans l'esprit de la géométrie projective, le théorème des deux triangles de Desargue exprime que : *si deux triangles ont un centre d'homologie, ils ont aussi un axe d'homologie*. Pour éviter les complications qui apparaîtraient s'il y avait des droites parallèles, nous nous limiterons à énoncer le théorème sous la forme suivante :

**Théorème 3.61** — *Si deux triangles sont homologues, et si les couples de leurs côtés correspondants se coupent, les trois points d'intersection sont alignés.*

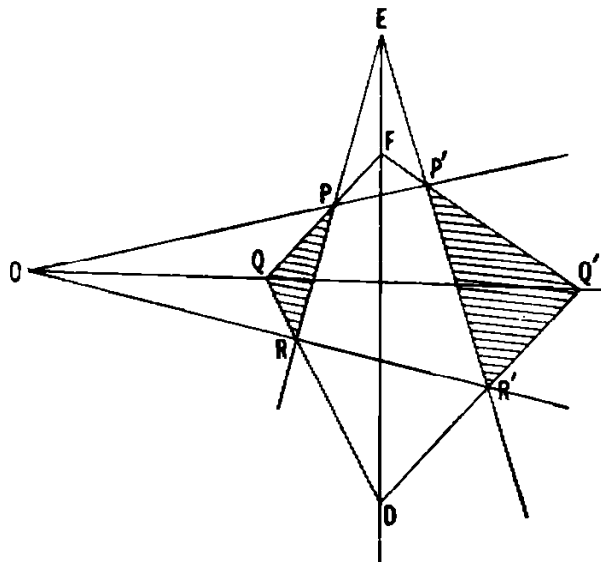


Fig. 3.6A

Ici encore, il s'agit d'un théorème concernant seulement la disposition géométrique. Les figures 3.6A et B représentent deux cas possibles, mais il y en a beaucoup d'autres : les triangles  $PQR$  et  $P'Q'R'$  sont homologues dans une homologie de centre  $O$ , et les couples de leurs côtés correspondants se coupent en  $D$ ,  $E$  et  $F$ . (Dans l'exercice 2 du paragraphe 3.3, on a déjà étudié quelques cas de triangles homologues, cas qui se présentent pour deux quelconques des triangles  $ABC$ ,  $PQR$  et  $O_1O_2O_3$ ).

<sup>(1)</sup> Voir R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* – C., p. 262-263.

Pour démontrer ce théorème, appliquons celui de Ménélaüs (3.41) aux trois ensembles de points

$$DR'Q', \quad AP'R', \quad FQ'P',$$

ces points étant situés sur les côtés des trois triangles

$$OQR, \quad ORP, \quad OPQ.$$

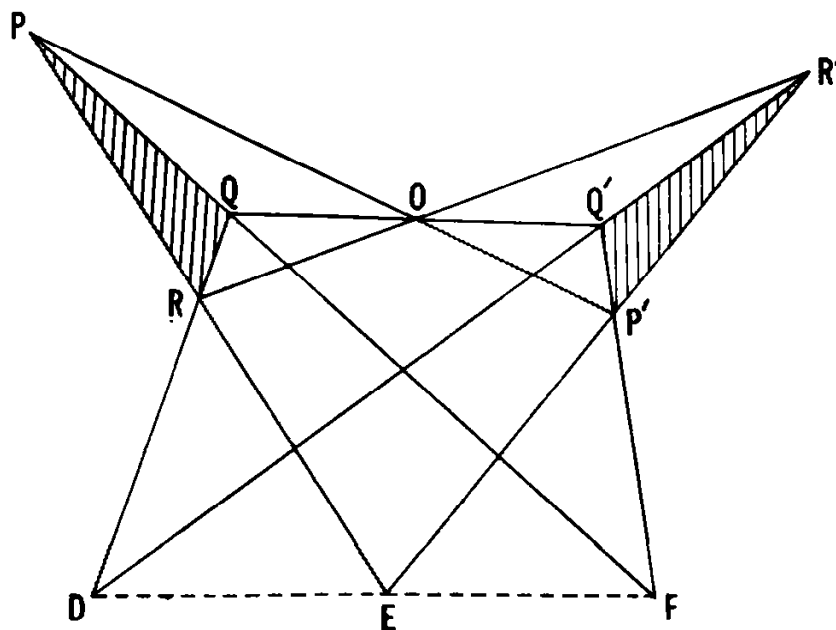


Fig. 3.6B

On a ainsi :

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}} \frac{\overline{OQ'}}{\overline{QQ'}} = +1, \quad \frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} \frac{\overline{OR'}}{\overline{RR'}} = +1, \quad \frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} \frac{\overline{OP'}}{\overline{PP'}} = +1.$$

Multiplions ces équations membre à membre; il vient, après quelques simplifications :

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} = +1.$$

Il en résulte que  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont alignés, comme nous voulions le montrer.

On voit aisément que le théorème de Desargues entraîne sa réciproque : *si deux triangles ont un axe d'homologie, ils ont un centre d'homologie*. Nous nous bornerons à exprimer cette réciproque sous la forme suivante :

**Théorème 3.62** — *Si deux triangles ont un axe d'homologie, et si l'on joint les couples de sommets correspondants par des droites qui se coupent en un point, ce point est le centre d'homologie des triangles.*

En énonçant que deux triangles  $PQR$  et  $P'Q'R'$  ont un axe d'homologie, nous voulons dire qu'il existe trois points alignés,  $D$ ,  $E$  et  $F$  tels que ces points soient respectivement les intersections des couples de droites  $QR$  et  $G'R'$ ,  $RP$  et  $R'P'$ ,  $PQ$  et  $P'Q'$ , comme on le voit sur la figure 3.6A. Si nous définissons le point  $O$  comme l'intersection des droites  $PP'$ ,  $RR'$ , nous voulons démontrer qu'il est aligné avec  $Q$  et  $Q'$ . Or, nous pouvons appliquer le théorème 3.61 à ces deux points puisque les deux triangles  $FPP'$  et  $DRR'$  présentent une homologie de centre  $E$  : il s'ensuit que les points d'intersection des couples de côtés correspondants — soit,  $O$  (droites  $PP'$ ,  $RR'$ ),  $Q'$  (droites  $P'F$ ,  $R'D$ ) et  $Q$  (droites  $FP$ ,  $DR$ ) — sont alignés comme nous voulions le montrer.

C'est là un cas de démonstration purement « projective ».

### Exercices

- 1 - Si deux triangles ont un centre d'homologie, et que deux couples de côtés correspondants soient parallèles, les deux autres côtés sont également parallèles. (Dans ce cas, que présente déjà l'exercice 3 du paragraphe 1.2, les deux triangles sont dits *homothétiques*).
- 2 - Combien la figure 3.6A (ou la figure 3.6B) comprend-elle de points et de droites ? Combien y a-t-il de points sur chaque droite ?
- 3 - Désigner deux triangles ayant comme centre d'homologie : a)  $P$ , b)  $P'$ , c),  $D$ .
- 4 - Que peut-on dire à propos des sommets et côtés des deux pentagones  $DFP'OR$  et  $EPQ'R'$  ? Y a-t-il, sur la figure, d'autres pentagones ayant les mêmes propriétés ?
- 5 - Soient deux droites non parallèles tracées sur une feuille de papier, et telles que leur intersection ne soit pas sur la feuille ; et soit un point  $P$  situé sur la partie de cette dernière comprise entre les droites. Déterminer une droite passant par  $P$  et telle que si on la prolongeait suffisamment elle passerait par le point d'intersection des droites données. Si ces dernières étaient parallèles, quel serait le résultat de la construction précédente ?

### 3.7. HEXAGONES

On dit que deux sommets d'un hexagone sont *adjacents*, *alternés* ou *opposés* suivant qu'ils sont séparés par un, deux ou trois côtés. Ainsi, par rapport au sommet  $A$  d'un hexagone  $ABCDEF$ ,  $F$  et  $B$  sont adjacents,  $E$  et  $C$  sont alternés, et  $D$  est opposé. La droite joignant deux sommets opposés s'appelle une *diagonale*. Par exemple, l'hexagone  $ABCDEF$  a trois diagonales —  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  — et trois couples de côtés opposés —  $AB$  et  $DE$ ,  $BC$  et  $EF$ ,  $CD$  et  $FA$ .

Il y a douze façons différentes de désigner un hexagone donné par les lettres  $ABCDEF$  : tout d'abord, on peut appeler  $A$  n'importe lequel des sommets; puis l'un ou l'autre des sommets adjacents peut être appelé  $B$ ; les désignations suivantes étant faites d'après l'ordre alphabétique.

Etant donné six points non alignés, on peut leur affecter les lettres  $A, B, C, D, E, F$  de  $6! = 720$  façons différentes, chacune d'elles déterminant un hexagone  $ABCDEF$  ayant les six points donnés pour sommets. Il en résulte que le nombre des hexagones distincts ainsi obtenus est

$$\frac{720}{12} = 60.$$

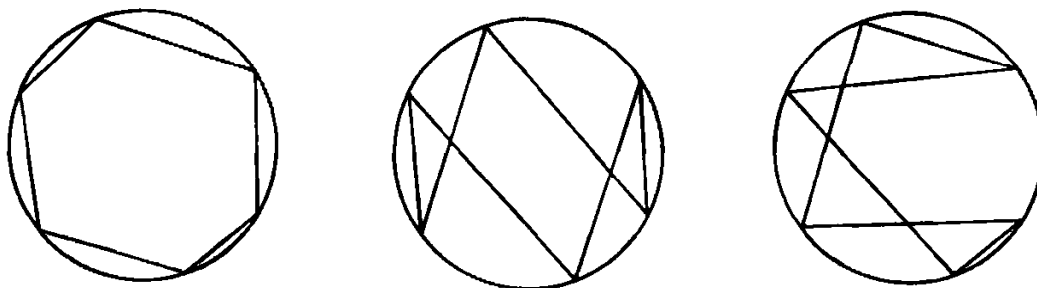


Fig. 3.7A

Sur la figure 3.7A ci-dessus, on voit trois des soixante hexagones que déterminent six points sur un cercle. Bien que le premier type (« convexe ») nous soit le plus familier, il ne nous faut pas oublier, pour autant, les cinquante neuf autres hexagones que peuvent former les mêmes six points.

Au paragraphe 3.1 nous avons souligné que, dans un polygone, l'un quelconque des ensembles de trois sommets *successifs* ne pouvait être formé de points alignés. Il est, cependant, d'autres cas où l'on peut trouver des points alignés; et, notamment, on peut énoncer le théorème de Pappus (3.51) sous la nouvelle forme suivante :



*Si chaque ensemble de trois sommets alternés d'un hexagone est formé de points alignés, et si les trois couples de côtés opposés se coupent, les trois points d'intersection sont alignés.*

### Exercices

- 1 - Soit un hexagone  $ABCDEF$  dont les côtés opposés  $BC$  et  $EF$  sont parallèles à la diagonale  $AD$  tandis que les côtés opposés  $CD$  et  $FA$  sont parallèles à la diagonale  $BE$ , et les côtés opposés  $DE$  et  $AB$  sont parallèles entre eux : la troisième diagonale  $CF$  est alors parallèle à  $AB$ , et les centres de gravité des triangles  $ACE$  et  $BDF$  coïncident.
- 2 - Soient deux ensembles de trois points alignés chacun : de combien de façons peut-on les considérer comme des ensembles de trois sommets alternés d'un hexagone ?

### 3.8. THÉORÈME DE PASCAL

A l'âge de seize ans, l'illustre philosophe et mathématicien Blaise Pascal (1623-1662) démontra le très beau théorème que voici :

**Théorème 3.81** — *Si un hexagone quelconque est inscrit dans un cercle, ses côtés opposés se coupent deux à deux en trois points alignés.*

Nul ne sait comment Pascal lui-même a démontré ce théorème, car sa démonstration n'a pas été retrouvée. Cependant G.W. Leibniz (qui, en même temps que Newton, a créé le calcul différentiel et intégral) l'avait vue et en avait fait l'éloge. Une telle situation nous incite à essayer d'établir à nouveau la démonstration perdue, et cela, en ne recourant qu'aux résultats et méthodes dont on disposait à l'époque de Pascal. C'est ce que fit Forder en utilisant seulement les trois premiers livres d'Euclide; mais ce fut un *tour de force* <sup>(1)</sup>, et il est plus vraisemblable que Pascal fit appel au théorème de Ménélaüs d'une manière analogue à celle que voici.

La figure 3.8A représente l'une des nombreuses façons dont les sommets d'un hexagone inscrit dans un cercle peuvent être disposés. (Le lecteur verra aisément comment il faut modifier la démonstration si la disposition des sommets est l'une des cinquante-neuf autres possibles).

<sup>(1)</sup> En français dans le texte (N.d.T.).

Nous voulons donc démontrer que les trois points  $L, M, N$  où se coupent respectivement les couples de droites

$$AB \text{ et } DE, \quad CD \text{ et } FA, \quad BC \text{ et } EF,$$

sont alignés.

Supposons que les trois droites  $AB, CD, EF$  forment le triangle  $UVW$  (voir fig. 3.8A); et appliquons le théorème 3.41 aux trois ensembles de trois points chacun  $LDE, AMF, BCN$ , points qui sont situés sur les côtés du triangle  $UVW$ . Il vient :

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}} \frac{\overline{WD}}{\overline{UD}} \frac{\overline{UE}}{\overline{VE}} = +1, \quad \frac{\overline{VA}}{\overline{WA}} \frac{\overline{WM}}{\overline{UM}} \frac{\overline{UF}}{\overline{VF}} = +1, \quad \frac{\overline{VB}}{\overline{WB}} \frac{\overline{WC}}{\overline{UC}} \frac{\overline{UN}}{\overline{NE}} = +1.$$

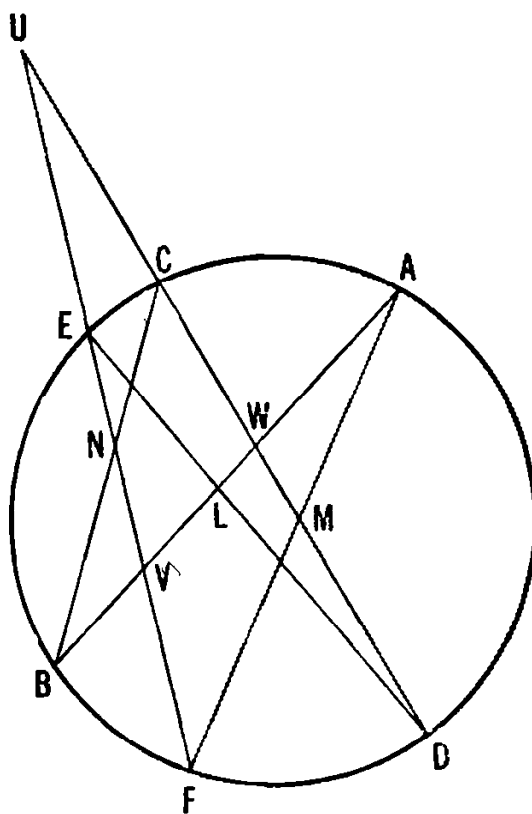


Fig. 3.8A

Multiplions ces équations membre à membre, en remarquant que, d'après le théorème 2.11 on a :

$$\frac{\overline{WD}}{\overline{UD}} \frac{\overline{UE}}{\overline{VE}} \frac{\overline{VA}}{\overline{WA}} \frac{\overline{UF}}{\overline{VF}} \frac{\overline{VB}}{\overline{WB}} \frac{\overline{WC}}{\overline{UC}} = \frac{\overline{UE} \times \overline{UF} \cdot \overline{VA} \times \overline{VB} \cdot \overline{WC} \times \overline{WD}}{\overline{UC} \times \overline{UD} \cdot \overline{VE} \times \overline{VF} \cdot \overline{WA} \times \overline{WB}} = +1.$$

Il reste finalement

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{UM}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{VN}} = +1$$

d'où l'on déduit que  $L$ ,  $M$  et  $N$  sont alignés, comme il fallait le montrer <sup>(1)</sup>.

On appelle *droite de Pascal* de l'hexagone  $ABCDEF$  la droite passant par les trois points  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.7, les mêmes six points déterminent soixante hexagones, donc (en général) autant de droites de Pascal. L'ensemble de ces dernières présente une disposition très intéressante : un certain nombre d'entre elles, en effet, sont concourantes, tandis que quelques points de concours sont alignés, etc.

Selon le bref *Essay pour les coniques* <sup>(2)</sup> qui a été conservé, Pascal savait parfaitement que son théorème s'appliquait à un hexagone inscrit dans une *conique* tout aussi bien que s'il l'eût été dans un *cercle*. Dans les manuels de Géométrie projective, on trouve le théorème réciproque qui fut démontré par William Braikenridge et Colin MacLaurin, indépendamment l'un de l'autre :

*Si les trois couples de sommets opposés d'un hexagone se coupent en trois points alignés, les six sommets de l'hexagone sont situés sur une conique qui peut dégénérer en deux droites (comme dans le théorème 3.51).*

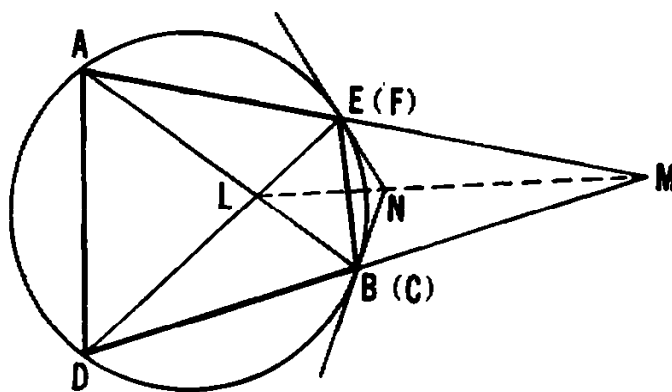


Fig. 3.8B

<sup>(1)</sup> Cette tentative pour refaire la démonstration de Pascal a paru dans la 18<sup>e</sup> édition de l'ouvrage de Théodor Spieker : *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (Potsdam, 1888). Voir, aussi, celle qui a été faite par Coxeter et Greitzer dans : *L'hexagramme de Pascal. Un essai pour reconstituer cette découverte*, le Jeune Scientifique (Joliette, Québec), 2, (1963), pp. 70-72.

<sup>(2)</sup> Voir notamment : Pascal, *Œuvres complètes*, Editions du Seuil, Paris, 1963, pp. 35-37 (N.d.T.).

Si l'on fait coïncider certains sommets de l'hexagone inscrit, on peut obtenir quelques théorèmes intéressants sur les pentagones et quadrangles inscrits. En de tels cas, le côté dont les extrémités coïncident devient un point, tandis que la droite qui le porte devient la tangente au cercle (ou à la conique) en ce même point. Considérons, par exemple, le quadrangle inscrit  $ADBE$  de la figure 3.8B. En assimilant le quadrangle croisé  $ABDE$  à un hexagone dégénéré dans lequel coïncident  $B$  et  $C$  d'une part,  $E$  et  $F$  d'autre part, on peut appliquer le théorème de Pascal et en conclure que les tangentes en  $B$  et  $E$  se coupent en  $N$ , point situé sur la droite joignant  $L$  (intersection de  $AB$  et  $DE$ ) et  $M$  (intersection de  $BA$  et  $EA$ ).

### Exercices

- 1 - Si cinq des six sommets d'un hexagone sont situés sur un cercle, et si les trois couples de côtés opposés se coupent en des points alignés, le sixième sommet est également situé sur le cercle.
- 2 - Etant donné un quadrangle  $ABCDE$  inscrit dans un cercle et n'ayant pas deux côtés parallèles, les tangentes au cercle en  $A$  et  $C$  se coupent sur la droite joignant les points d'intersection, d'une part de  $AB$  et  $CE$ , d'autre part de  $BC$  et  $EA$ .

### 3.9. THÉORÈME DE BRIANCHON

C.J. Brianchon (1760-1854) a démontré un théorème intéressant qui présente un rapport subtil avec celui de Pascal et fait intervenir un hexagone *circonscrit* à un cercle. Sa démonstration repose sur la « dualité » <sup>(1)</sup> de points et de droites, principe qui appartient au domaine de la géométrie projective. Cependant, lorsque la conique est un cercle, la recherche d'une démonstration euclidienne devint un problème excitant dont la solution a été donnée par A.S. Smogorzhevskii. Mais, avant de donner le détail de cette dernière, démontrons tous d'abord le lemme que voici :

(<sup>1</sup>) Sur le principe de dualité, voir notamment E. ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE, *op. cit.* – Tome I, p. 236, et R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* – G., p. 138.

Si  $P'$  et  $Q'$  sont deux points situés sur les tangentes en  $P$  et  $Q$  à un cercle, du même côté de la droite  $PQ$  et tels que  $PP' = QQ'$ , il existe un cercle tangent aux deux droites  $PP'$  et  $QQ'$ , en  $P'$  et  $Q'$  respectivement.

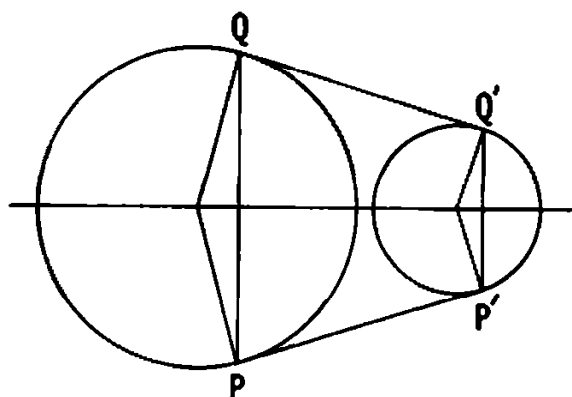


Fig. 3.9A

Toute la figure est, en fait, symétrique par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de  $PQ$  qui est à la fois la médiatrice de  $P'Q'$  et l'un des diamètres du cercle annoncé. Les perpendiculaires à  $PP'$  et  $QQ'$ , en  $P'$  et  $Q'$ , coupent cet « axe de symétrie » au même point qui est le centre du cercle cherché.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Smogorzhevskii que voici :

**Théorème 3.91** — *Si les six côtés d'un hexagone sont tangents à un cercle, les trois diagonales sont soit concourantes, soit, peut-être, parallèles.*

Soient  $R, Q, T, S, P, U$ , les six points de contact avec le cercle des six tangentes  $AB, BC, CD, DE, EF$  et  $FA$  (voir fig. 3.9B). Nous supposons, pour simplifier, que l'hexagone  $ABCDEF$  est « convexe », et que, les trois diagonales  $AD, BE, CF$  sont des sécantes du cercle inscrit ne pouvant pas être parallèles. Sur les prolongements des côtés, prenons maintenant les points  $P', Q', R', S', T', U'$  tels que :

$$PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU',$$

ces longueurs étant d'ailleurs arbitraires, et selon le lemme précédent, construisons les trois cercles : I (tangent à  $PP'$  et  $QQ'$  en  $P'$  et  $Q'$ ), II (tangent à  $RR'$  et  $SS'$  en  $R'$  et  $S'$ ), et III (tangent à  $TT'$  et  $UU'$  en  $T'$  et  $U'$ ).

Sachant que deux tangentes à un cercle issues d'un même point sont égales, on peut écrire  $AR = AU$  et  $RR' = UU'$ ; d'où, par addition,

$AR' = AU'$ . De même, on a  $DS = DT$  et  $SS' = TT'$ ; d'où, par soustraction,  $DS' = DT'$ . Il s'ensuit que les points  $A$  et  $D$  ont même puissance (voir paragraphe 2.2) par rapport aux cercles II et III, et que la droite qui les joint coïncide avec l'axe radical de ces derniers. D'une manière analogue,  $BE$  est sur l'axe radical des cercles I et II, tandis que  $CF$  est sur l'axe radical des cercles III et I. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.3, les axes radicaux de trois cercles n'appartenant pas à un même faisceau et pris deux à deux sont concourants (ou, peut-être, parallèles). Nous avons montré que les diagonales de l'hexagone pouvaient être considérées comme les axes radicaux de trois cercles : ces diagonales ne pouvant évidemment pas coïncider, les cercles n'appartiennent pas à un même faisceau, ce qui achève la démonstration.

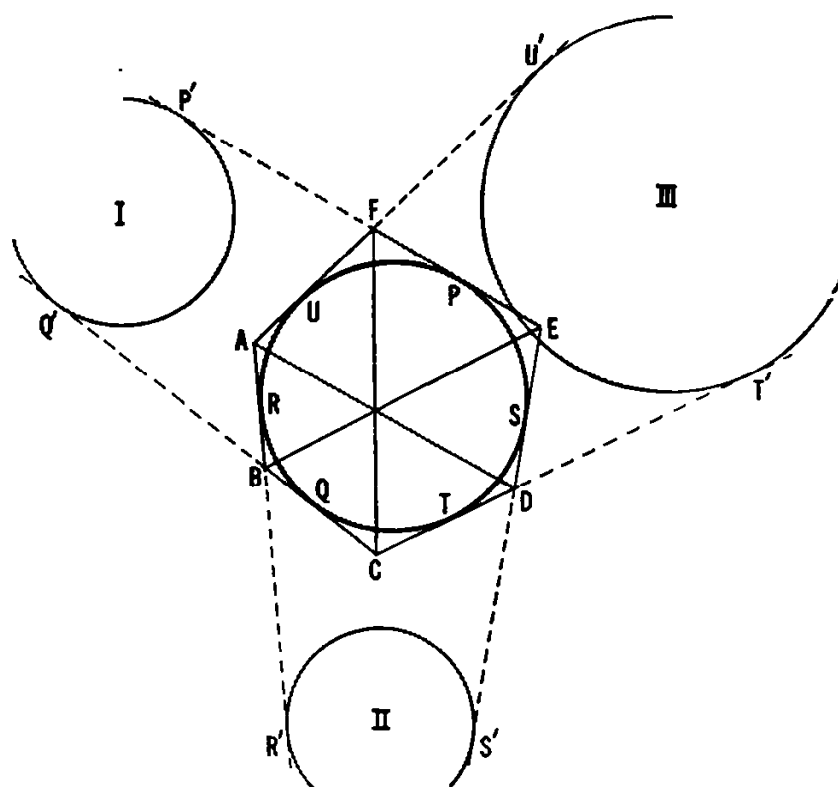


Fig. 3.9B

Voici le théorème réciproque, qui relève de la géométrie projective :

*Si les trois diagonales d'un hexagone sont concourantes, les six côtés de cet hexagone sont tangents à une conique qui peut dégénérer en un couple de points (comme, par exemple, dans l'exercice 2 du paragraphe 3.5,*

les deux points  $F$  et  $L$  où se coupent les deux couples de trois droites chacun).

Si certains côtés d'un hexagone circonscrit à un cercle se réduisent à un point, on peut obtenir quelques théorèmes intéressants relatifs à des pentagones et quadrangles circonscrits à un cercle : le sommet commun à deux côtés confondus devient alors le point de contact de ces derniers avec le cercle (ou la conique).

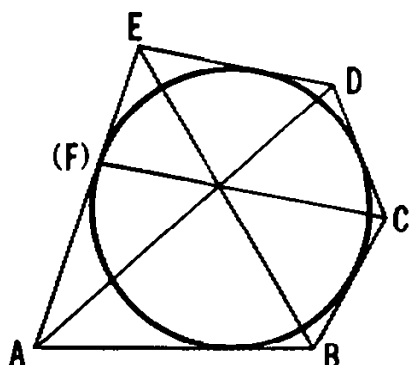


Fig. 3.9C

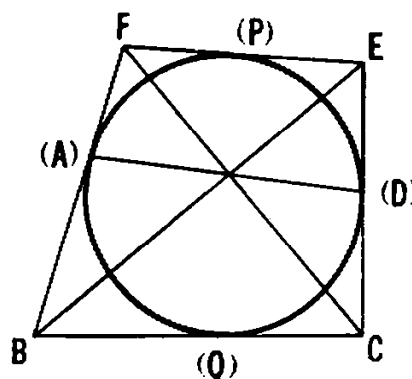


Fig. 3.9D

Considérons, par exemple, le pentagone circonscrit  $ABCDE$  de la figure 3.9C. En l'assimilant à un hexagone dégénéré  $ABCDEF$  ayant un « angle plat » en  $F$ , on peut appliquer le théorème de Brianchon et en conclure que le point de contact du côté  $EA$  du pentagone circonscrit  $ABCDE$  se trouve sur la droite joignant  $C$  au point d'intersection de  $AD$  et de  $BE$ .

D'une manière analogue, on peut considérer comme hexagone dégénéré le quadrangle circonscrit  $BCEF$  (voir fig. 3.9D) dont les côtés  $FB$  et  $CE$  sont tangents au cercle en  $A$  et  $D$ ; d'où l'on conclut que les diagonales  $BE$  et  $CF$  du quadrangle se coupent sur la droite  $AD$  qui joint les points de contact avec le cercle des côtés  $FB$  et  $CE$ .

### Exercices

- 1 - Sur la figure 3.9D, la droite  $PQ$  (non tracée) joignant les deux autres points de contact, passerait aussi par le point d'intersection des diagonales.
- 2 - Si, sur la figure 3.9D, on considère l'hexagone  $ABQCEF$ , quelles sont les nouvelles droites concourantes ?
- 3 - Le théorème de Brianchon suggère-t-il une autre méthode pour faire l'exercice 3 du paragraphe 1.4 ?

# 4

## Transformation des figures

*C'est par la foi qu'Hénoch fut transféré pour ne pas voir la mort, et on ne le trouvait pas, parce que Dieu l'avait transféré. Avant son transfert, en effet, il lui est rendu témoignage qu'il avait été agréable à Dieu.*

Épître aux Hébreux, 11, 5

A la fin du paragraphe 1.6, nous avons remarqué que l'angle droit formé par  $FD$  et  $OB$  (voir fig. 1.6A) résultait de deux rotations, d'angles  $\alpha$ , autour de  $D$  et  $B$  respectivement, des deux droites orthogonales  $HD$  et  $CB$ . Nous avons noté également, dans ce qui précède le théorème 1.71, que les deux triangles semblables  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont le même centre de gravité et que, leurs orthocentres étant  $H$  et  $O$ , il en résultait  $AH = 2OA'$ . Enfin, c'est en faisant appel à un demi-tour, après le théorème 1.81, que nous avons permuté les orthocentres des triangles égaux  $A'B'C'$  et  $KLM$ . Rotation, homothétie et demi-tour sont trois cas d'une *transformation* qui (dans le cadre de cet ouvrage) signifie l'application d'un plan sur lui-même et cela de telle sorte que tout point  $P$  de ce plan ait une image unique  $P'$ , et que tout point  $Q'$  soit l'image d'un unique point  $Q$ . Cette notion d'« application » <sup>(1)</sup> a un rôle essentiel dans maintes branches des mathématiques : par exemple, en écrivant  $y = f(x)$ , nous appliquons l'ensemble des valeurs correspondantes de  $y$ .

(1) A ce sujet, voir par exemple, E. ARTIN, *Algèbre géométrique*, 1962, réédition Jacques Gabay, 1996 – p. 1-4.



La géométrie euclidienne n'est qu'une géométrie parmi d'autres, chacune de celles-ci ayant ses concepts fondamentaux, axiomes et théorèmes propres. En 1872, dans son célèbre programme d'Erlangen, Félix Klein proposa de classer les géométries selon les groupes de transformations que l'on peut mettre en œuvre sans modifier ces concepts, axiomes et théorèmes. En particulier, la géométrie euclidienne est caractérisée par le groupe des *similitudes*, c'est-à-dire des transformations qui *conservent les angles*. Un cas important de similitude est l'*isométrie*, transformation qui *conservent les distances*, comme le font une rotation ou, notamment, un demi-tour. L'isométrie est à la base de l'idée familière d'*égalité* : deux figures sont égales si, et seulement si, on peut passer de l'une à l'autre par une isométrie.

#### 4.1. TRANSLATION

Si l'on excepte l'opération *identique* <sup>(1)</sup> dans laquelle tous les points restent dans leurs positions initiales, la transformation la plus courante est la *translation* qui conserve la distance entre deux points et la direction de la droite qui les joint.

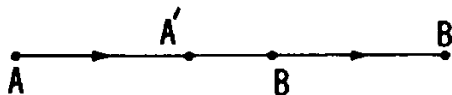


Fig. 4.1A

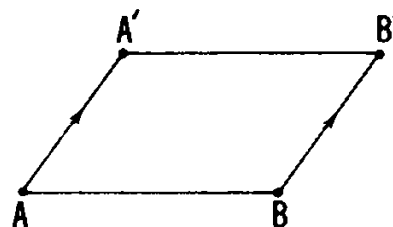


Fig. 4.1B

Si  $A'B'$  est la transformée d'un segment rectiligne  $AB$ , ou bien  $A, B, A', B'$  sont sur une même droite (fig. 4.1A), ou bien  $AA'B'B$  est un parallélogramme (fig. 4.1B). Dans le premier cas, on dit que  $AA'B'B$  est un *parallélogramme dégénéré*. Ainsi, la translation est définie par le vecteur  $\overrightarrow{AA'}$ , ou, aussi bien d'ailleurs, par une infinité d'autres vecteurs équipollents, tels que  $\overrightarrow{BB'}$ . En particulier, on peut considérer que l'opération identique est définie par le vecteur zéro.

(1) Voir R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* – G., p. 24.

Pour démontrer divers théorèmes relatifs aux aires, on utilise la propriété qu'a la translation de conserver la forme et les dimensions de toute figure. Par exemple (voir fig. 4.1C), pour établir la formule courante donnant l'aire d'un parallélogramme  $ABCD$  qui a un angle aigu en  $A$ , nous retranchons le triangle rectangle  $AHD$  et, grâce à une translation, nous l'ajoutons dans la nouvelle position  $BH'C$ , ce qui donne le rectangle  $HH'CD$ .

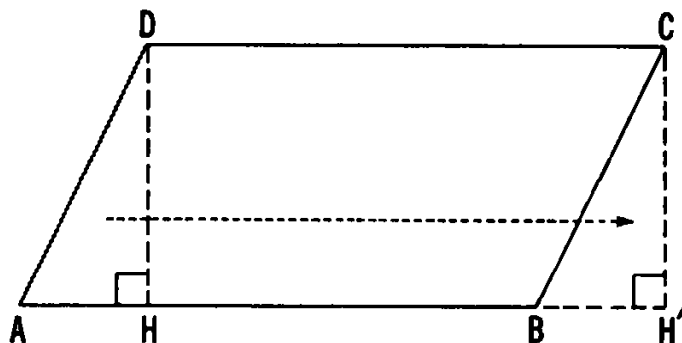


Fig. 4.1C

La figure 4.1D ci-dessous représente la solution du problème suivant : dans un cercle donné, inscrire un rectangle ayant deux côtés égaux et parallèles à un segment rectiligne donné,  $a$ . Cette solution est obtenue par une translation du cercle définie par l'un ou l'autre de deux vecteurs égaux et opposés, et de longueur  $a$ . Les points  $B$  et  $C$  où se coupent le cercle initial et le cercle qui en est la transformée, sont deux des sommets du rectangle cherché; les côtés  $AB$  et  $DC$  de ce dernier étant égaux et parallèles à  $a$ .

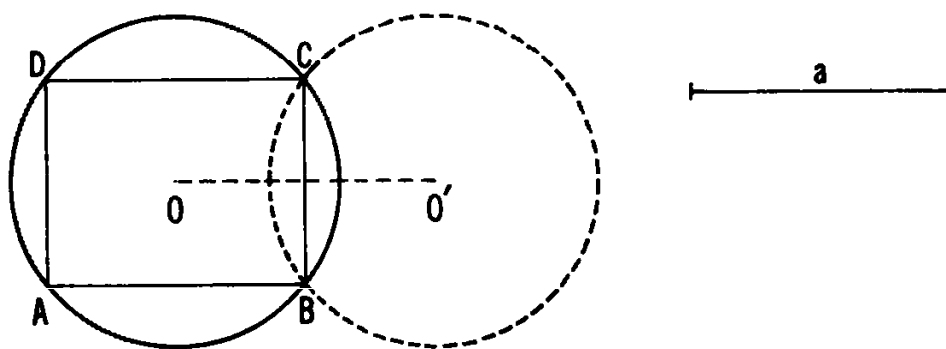


Fig. 4.1D

### Exercices

- 1 - « Inscrire », dans un triangle  $ABC$ , un segment rectiligne, égal et parallèle à un segment rectiligne donné,  $a$  (voir fig. 4.1E).

- 2 - Représenter par une figure une partie de la suite illimitée de triangles que l'on peut obtenir en appliquant à un triangle équilatéral  $ABC$  donné toutes les translations définies par la somme d'un nombre entier de fois  $AB$  et d'un nombre entier de fois  $\overrightarrow{AC}$ .

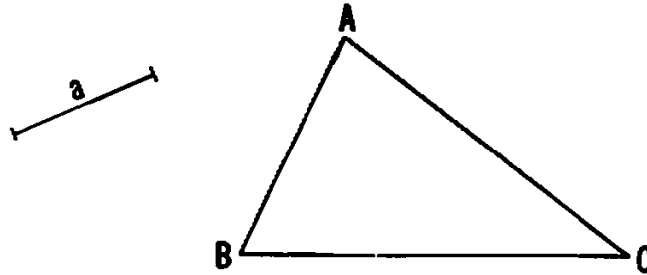


Fig. 4.1E

## 4.2. ROTATION

La *rotation* est un autre type de transformation qui conserve les distances. Elle consiste à faire tourner tout le plan autour d'un point et d'un angle donné; ainsi, les dimensions et la forme de toute figure demeurent invariables, mais tous les points de cette dernière se déplacent sur des arcs de cercles concentriques. Le seul point qui reste fixe est le centre de rotation qui, d'ailleurs, appartient ou non à la figure subissant la rotation.

Comme exemple de la manière dont on a recours aux rotations, considérons (voir fig. 4.2A) le triangle  $ABC$  et les trois triangles équilatéraux construits sur ses côtés et extérieurement, soit  $BPC$ ,  $CQA$  et  $ARB$ . Ayant tracé les droites  $BQ$  et  $CR$ , on voit qu'une rotation de  $60^\circ$  autour du point  $A$  comme centre amène le triangle  $ARC$  sur le triangle  $ABQ$ . Il s'ensuit que  $\widehat{RFB} = 60^\circ$  et  $RC = BQ$ . On montrerait, d'une façon analogue, que  $PA = CR$ . Par suite :

$$AP = BQ = CR.$$

De plus,

$$\widehat{RFB} = 60^\circ = \widehat{RAB} \quad \text{et} \quad \widehat{CFQ} = 60^\circ = \widehat{CAQ}$$

et l'on en déduit que les quadrangles  $ARBF$  et  $CQAF$  sont inscriptibles; ce qui est aussi le cas du quadrangle  $BPCF$ , puisque  $\widehat{BFC} = 120^\circ$  et  $\widehat{CPB} = 60^\circ$ . Ainsi, les cercles circonscrits aux trois triangles  $BPC$ ,  $CQA$

et  $ARB$  passent tous par le point  $F$  que l'on appelle le *point de Fermat* du triangle  $ABC$ . Après avoir défini ce dernier comme étant le point d'intersection des droites  $BQ$  et  $CR$ , nous allons voir maintenant qu'il doit aussi se trouver sur  $AP$ .

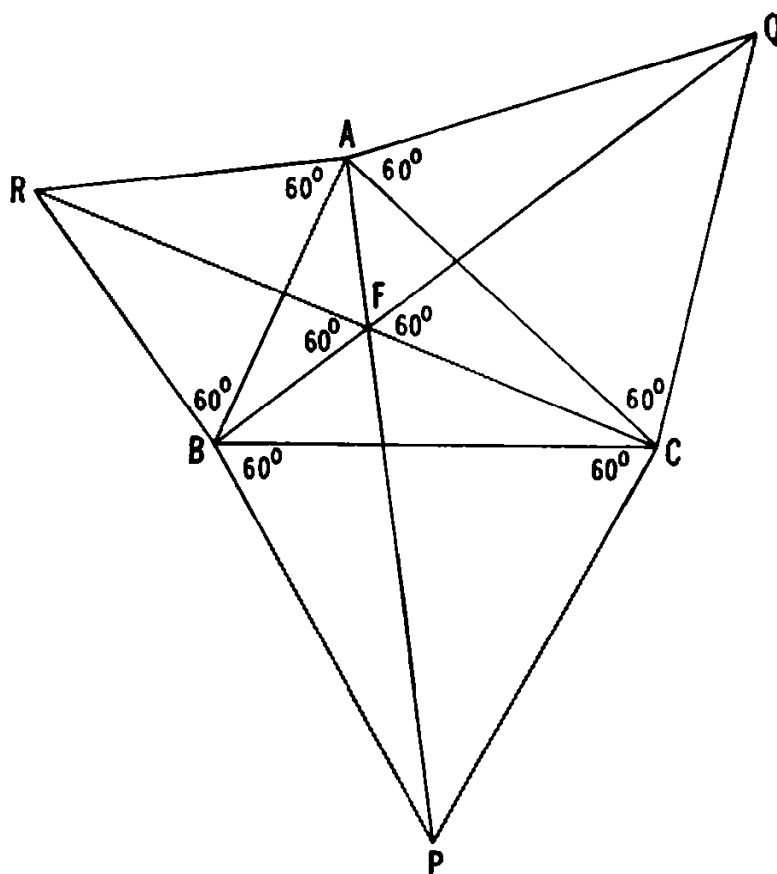


Fig. 4.2A

Dans la démonstration du théorème de Pythagore donnée par Euclide, les trois carrés  $CBIG$ ,  $ACKJ$  et  $BADE$  (voir fig. 4.2B ci-dessous) sont construits sur les côtés du triangle rectangle  $ABC$  donné, et à l'extérieur de celui-ci; de plus, le dernier de ces carrés est partagé en deux par la hauteur  $CH$ . On voit aussi que les points  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  sont les centres des carrés. Si, pour démontrer le théorème de Pythagore, il existe des méthodes plus simples que celle d'Euclide, la figure que celui-ci utilise n'en suggère pas moins beaucoup de résultats inattendus. Les droites  $AI$ ,  $BJ$ ,  $CD$  et  $CE$  étant tracées, on voit qu'une rotation de  $90^\circ$  ayant  $A$  pour centre fera coïncider le triangle  $ADC$  avec le triangle  $ABJ$ . Par suite,  $BJ = DC$  et  $BJ$  est perpendiculaire à  $DC$ . D'une manière analogue,  $AI$  et  $CE$  sont égaux et orthogonaux.

Enfin, les couples de triangles semblables,  $BCX$  et  $BKJ$  d'une part,  $CAY$  et  $GAI$  d'autre part permettent d'écrire les relations suivantes :

$$\frac{CX}{b} = \frac{CX}{KJ} = \frac{BC}{BK} = \frac{a}{a+b}, \quad \frac{CY}{a} = \frac{CY}{GI} = \frac{CA}{GA} = \frac{b}{a+b},$$

et l'on en déduit

$$CX = \frac{ab}{a+b} = CV.$$

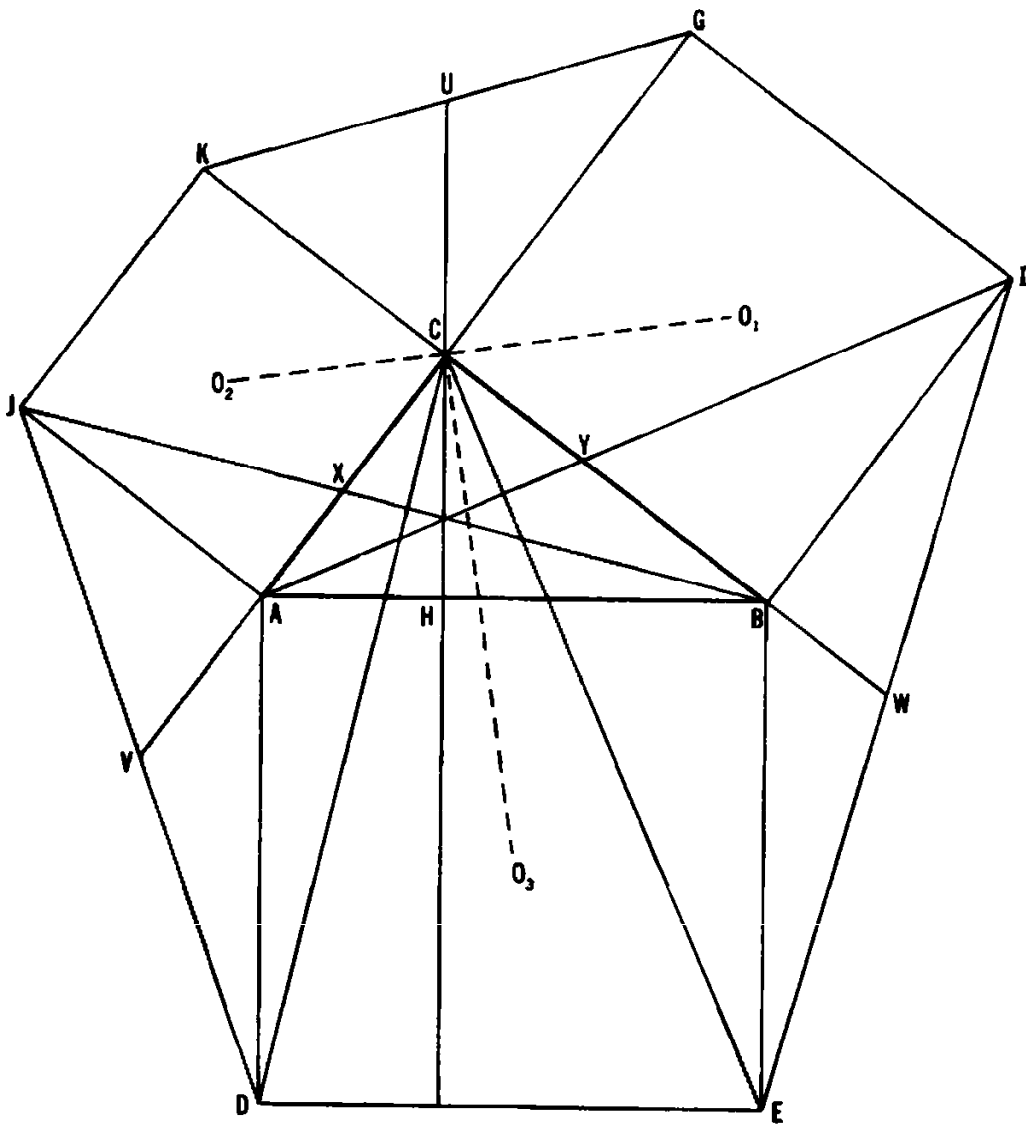


Fig. 4.2B

**Exercices**

- 1 - Si, sur les côtés d'un parallélogramme et extérieurement à celui-ci, on construit des carrés, les centres de ces derniers sont les sommets d'un carré.
- 2 - En se reportant à la figure 4.2B, montrer que a) les trois droites  $AI$ ,  $BJ$  et  $CH$  sont concourantes; b)  $O_1O_2 = CO_3$ , et ces deux segments sont orthogonaux; c)  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont les milieux de  $GK$ ,  $JD$  et  $EI$  respectivement.
- 3 - Construire un triangle équilatéral tel qu'un point donné lui soit intérieur et soit distant de 2, 3 et 4 unités de longueur de ces trois sommets.

**4.3. DEMI-TOUR**

Il existe un type de rotation qui a, comme les translations, la propriété de transformer toute droite en une droite parallèle, mais de sens inverse : c'est le *demi-tour*, ou rotation de  $180^\circ$ , qui, on le voit, est entièrement déterminé par son centre. Le résultat de deux demi-tours effectués successivement est le même que celui d'une translation, puisque celle-ci transforme une droite en une droite parallèle; plus brièvement, le « produit » <sup>(1)</sup> de deux demi-tours est une translation (qui se réduit à l'opération identique lorsque les deux demi-tours ont même centre). D'une façon plus précise, soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trois points d'une droite tels que  $B$  soit le milieu de  $AC$  : le demi-tour de centre  $A$  ne changeant pas la position de ce point, et le demi-tour de centre  $B$  amenant  $A$  en  $C$ , le produit de ces deux rotations est donc la translation  $\overrightarrow{AC}$  qui aurait été obtenue, aussi, par le produit des demi-tours successifs autour de  $B$  et  $C$ .

La figure 4.3A ci-dessous représente le produit des deux demi-tours successifs ayant  $O_1$  et  $O_2$  pour centres. Le segment linéaire  $AB$  est, tout d'abord, transformé en  $A'B'$ , de sens contraire, puis en  $A''B''$ , de même sens. Ainsi, le produit des demi-tours est la translation  $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$ .

Grâce aux demi-tours, on peut démontrer simplement maints théorèmes anciens et bien connus. Soit  $O$ , par exemple (voir fig. 4.3B), le milieu commun aux deux segments  $AC$  et  $BD$ . Le demi-tour de centre  $O$  amenant  $AB$  en  $CD$ , il s'ensuit que  $ABCD$  est un parallélogramme. De même,

(<sup>1</sup>) Sur le « produit » de deux rotations, voir notamment R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* - G., p. 33.

$M$  et  $N$  (voir fig. 4.3C) étant les milieux de  $AB$  et  $AC$ , on voit que le produit des demi-tours autour de ce point est la translation  $\vec{MM''} = \vec{BC}$  :  $MN$  est donc parallèle à  $BC$  et égal à  $\frac{BC}{2}$ .

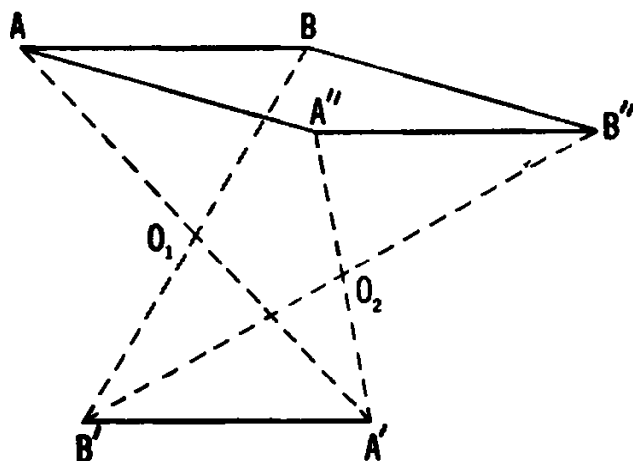


Fig. 4.3A

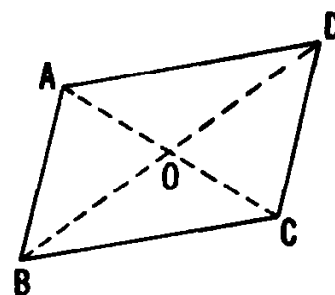


Fig. 4.3B

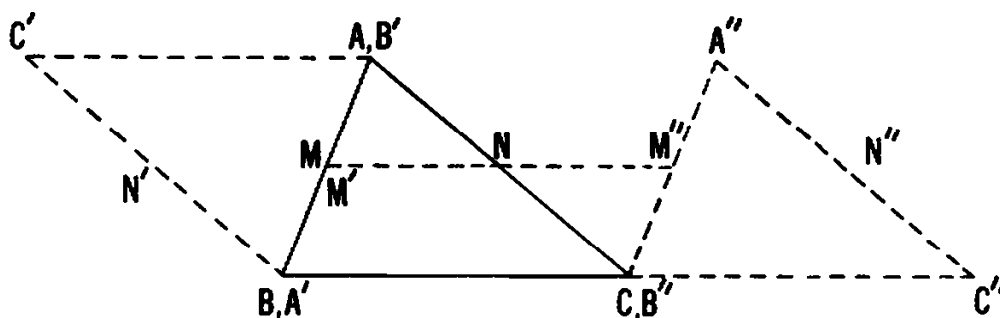


Fig. 4.3C

### Exercices

- 1 - Soit  $A$  l'un des deux points où se coupent deux cercles. Construire une droite passant par  $A$  et sur laquelle les deux cercles déterminent des segments égaux.
- 2 - Etant donné un cercle et un point  $A$  extérieur à ce cercle, construire une droite passant par  $A$  et coupant le cercle en deux points  $P$  et  $Q$  tels que  $AP = PQ$ .
- 3 - Si les côtés opposés d'un hexagone sont égaux et parallèles, ses diagonales (joignant les sommets opposés) sont concourantes.

#### 4.4. SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN AXE

Un troisième type de transformations concernant les distances est la *symétrie par rapport à un axe*. Tout point de l'axe, tel que  $H$  ou  $K$  (voir fig. 4.4A) reste fixe, et, par suite, est son propre symétrique. Si  $HK$  représente la trace d'un miroir plan perpendiculaire au plan de la figure, l'image réfléchie d'un point  $A$  extérieur au miroir est le point  $A'$  situé sur la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur le plan du miroir — c'est-à-dire sur l'axe de symétrie — et tel que  $HA' = AH$ . Sur la figure 4.4A, le segment  $AB$  a pour image le segment  $A'B'$ ; et il est aisé de montrer que l'image  $C'$  d'un point quelconque,  $C$ , de  $AB$  doit être située sur  $A'B'$ . Les diagonales  $AB'$  et  $A'B$  du trapèze  $AA'B'B$  sont les images l'une de l'autre; et leur point commun  $X$ , étant sa propre image, est situé sur l'axe de symétrie. Les angles  $\widehat{AXH}$  et  $\widehat{B'XK}$  sont égaux comme opposés par le sommet; et, dans les triangles égaux  $B XK$  et  $B'XK$ , on a  $\widehat{B'XK} = \widehat{KXB}$ . On en déduit

$$\widehat{AXH} = \widehat{KXB}.$$

Il s'ensuit donc que la ligne brisée  $AXB$  représente le chemin le plus court pour un rayon lumineux allant de  $A$  en  $B$ , en se réfléchissant sur le « miroir »  $HK$ . Si, en effet, comme on le voit sur la figure 4.4B, la réflexion avait lieu en un point  $Y$  différent de  $X$ , la trajectoire serait alors  $AY + YB = A'Y + YB$ , et elle serait plus longue que  $A'B = AX + XB$ .

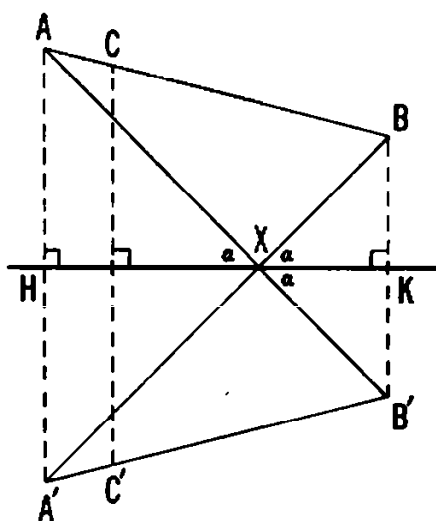


Fig. 4.4A

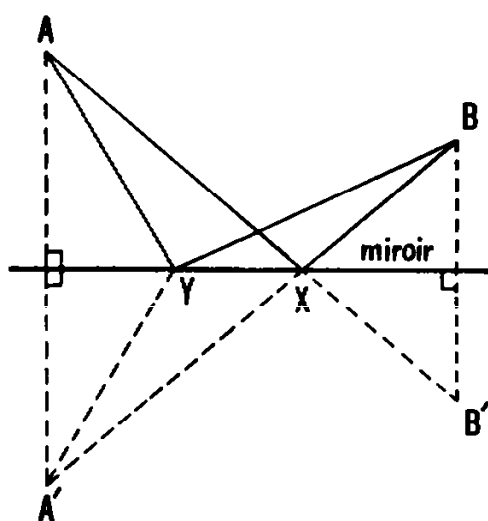


Fig. 4.4B



Ceci nous montre, en passant, comment, sans recourir au calcul, on peut résoudre géométriquement un célèbre problème d'extrémum. Selon les physiciens, la trajectoire d'un rayon lumineux issu de  $A$ , frappant le miroir et allant en  $B$ , est celle qui rend minimum le temps de parcours. Or, dans un milieu homogène, ce temps est proportionnel à la distance parcourue. Il s'ensuit donc que, pour aller de  $A$  à  $B$ , un rayon lumineux tombant sur le miroir sous un angle  $\alpha$  s'en éloignera en faisant un angle égal, puisque telle est la condition de parcours minimum. D'ordinaire, d'ailleurs, en physique, les angles sont mesurés à partir de la *normale* au miroir, au point d'incidence, plutôt que du miroir lui-même. Sur la figure 4.4C, on voit l'angle d'incidence  $i$  et l'angle de réflexion  $r$ .

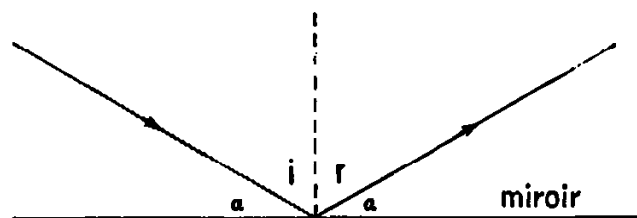


Fig. 4.4C

### Exercices

- 1 - Etant donné un triangle scalène  $ABC$ , dont les côtés peuvent réfléchir la lumière, en quel point  $P$  du côté  $AB$  faut-il placer une source lumineuse pour que, après réflexion sur les deux autres côtés, un rayon lumineux issu de  $P$  atteigne de nouveau ce même point ? *Conseil* : voir le paragraphe 1.6.
- 2 - Si un triangle a une base et une aire constantes, son périmètre sera minimum s'il est isocèle.
- 3 - Faire l'exercice 1 du paragraphe 4.3 en recourant à un axe de symétrie.

### 4.5. PROBLÈME DE FAGNANO

Pour établir maints théorèmes intéressants, d'une manière à la fois simple et frappante, on peut faire appel aux propriétés de la symétrie par rapport à un axe. Recourons donc à ces dernières pour résoudre ce problème : Construire un triangle qui soit inscrit dans un triangle

donné dont les angles sont aigus, et tel que son périmètre soit minimum. C'est le problème de Fagnano (<sup>1</sup>).

Pour trouver la solution, soit, tout d'abord, le triangle  $ABC$  (voir fig. ci-dessous) dans lequel sont inscrits deux autres : le triangle orthique de  $ABC$  (en tireté) et un triangle quelconque (en pointillé). Considérons les symétriques, par rapport au côté  $AC$ , des trois triangles précédents — ce qui donne le triangle  $ACB'$  et les deux triangles inscrits correspondants. Puis, prenons successivement les symétriques de  $ACB'$  par rapport à  $CB'$ , de  $CB'A'$  par rapport à  $B'A'$ , de  $B'A'C'$  par rapport à  $A'C'$  et, enfin, de  $A'C'B''$  par rapport à  $C'B''$ ; et examinons ce qui résulte de la « chaîne » de triangles ainsi construite.

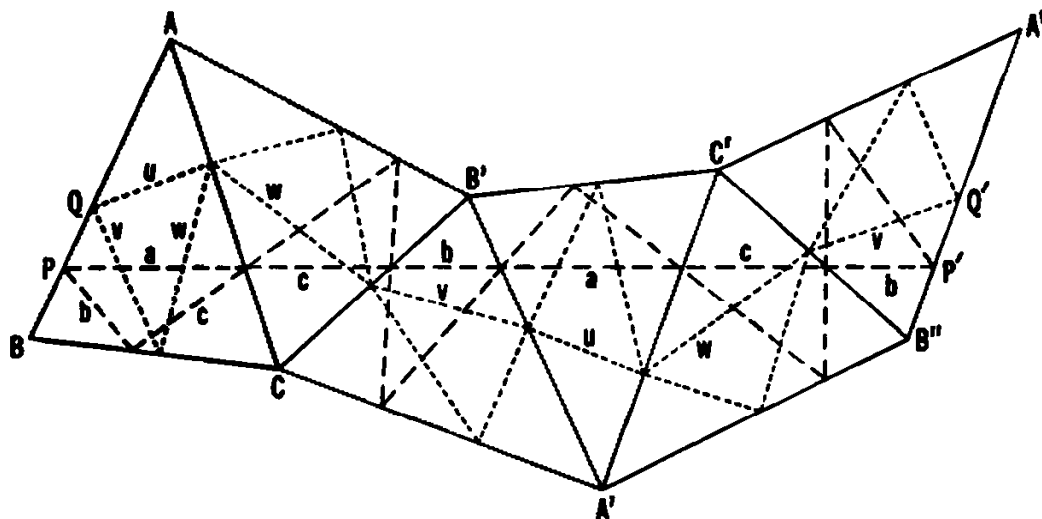


Fig. 4.5A

Si l'on ne tient pas compte des points  $C$  et  $C'$ , on voit que la ligne brisée  $BAB'A'B''A''$  présente des angles (mesurés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) :  $2A$  au point  $A$ ,  $2B$  au point  $B$ ,  $-2A$  au point  $A'$ ,  $-2B$  au point  $B''$ . La somme de ces quatre angles étant nulle, il s'ensuit que  $B''A''$  est égal à  $BA$  par *translation*; et, de plus, que les couples de points correspondants situés sur ces deux segments forment un parallélogramme tel que  $PP'Q'Q$ .

Rappelons maintenant que les hauteurs du triangle  $ABC$  sont les bissectrices des angles du triangle orthique correspondant. On en déduit

(<sup>1</sup>) C'est, en effet, Fagnano qui a proposé ce problème en 1775, et l'a résolu par le calcul. La démonstration donnée ici est due à H.A. Schwarz dont la méthode fut étendue aux polygones à  $2n + 1$  côtés par Frank Morley et F.V. Morley.

qu'après avoir effectué les symétries précédentes, les côtés du triangle orthique seront, l'un après l'autre, portés par la droite  $PP'$  de la figure 4.5A. D'une façon analogue, les côtés d'un autre triangle inscrit dans  $ABC$  — par exemple celui représenté en pointillé — formeront, dans les symétries successives, une ligne brisée allant de  $Q$ , sur  $AB$ , à  $Q'$  sur  $A''B''$ .  $PQ$  étant égal et parallèle à  $P'Q'$ , le segment rectiligne  $QQ'$  est égal à  $PP'$ , lui-même égal au double du périmètre du triangle orthique; or cette dernière longueur est manifestement inférieure à celle de la ligne brisée (en pointillé) joignant  $Q$  à  $Q'$  et égale, elle, au double du périmètre du second triangle (en pointillé) inscrit dans  $ABC$ . Finalement, c'est le triangle orthique, de côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , qui a le périmètre minimum.

#### 4.6. PROBLÈME DES TROIS VASES

Une application curieuse de la symétrie axiale consiste à résoudre des problèmes où l'on demande de partager une certaine quantité de liquide en fractions déterminées, et cela en recourant à des dispositifs de mesure qui semblent imprécis. Mais il nous faut, tout d'abord, dire quelques mots des coordonnées trilineaires dont l'emploi sera nécessaire.

On vend, parfois, du papier « triangulé » sur lequel sont tracées trois séries de droites parallèles qui partagent le plan en une mosaïque de petits triangles équilatéraux : c'est une extension commode du papier quadrillé ordinaire qui sert à représenter des points de coordonnées cartésiennes données. Un tel papier se prête bien à porter des points ayant des coordonnées *trilineaires* données par rapport aux côtés d'un triangle équilatéral assez grand. Dans le plan de ce triangle  $ABC$ , de côté  $a$  et de hauteur  $h$ , les coordonnées trilineaires d'un point  $P$  sont les distances,  $x$ ,  $y$  et  $z$  de  $P$  aux trois côtés  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$ , en les considérant comme positives lorsque  $P$  est à l'intérieur du triangle; et  $P$  est appelé le point  $(x, y, z)$ .

Or on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az &= S(PBC) + S(PCA) + S(PAB) \\ &= S(ABC) = \frac{1}{2}ah; \end{aligned}$$

d'où :

$$x + y + z = h.$$

Chaque fois que trois quantités variables ont une somme constante, l'emploi de ces coordonnées trilinéaires convient parfaitement. Lorsque l'une d'elles est constante tandis que les deux autres varient en ayant une somme invariable, le point  $(x, y, z)$  se déplace sur une droite parallèle à l'un des côtés du triangle. Et, en particulier, les trois côtés ont pour équations :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

les sommets  $A, B, C$  ayant respectivement pour coordonnées  $(h, 0, 0)$ ,  $(0, h, 0)$  et  $(0, 0, h)$ .

Les circonstances indiquées ci-dessus se présentent justement lorsque l'on répartit  $h$  litres d'un certain liquide entre trois vases de telle sorte que le premier reçoive  $x$  litres, le second  $y$  et le troisième  $z$ . Or, verser progressivement le liquide du second vase dans le troisième revient à faire déplacer le point  $(x, y, z)$  le long de la droite  $x = \text{constante}$ , dans un sens tel que  $y$  décroisse, et que  $z$  croisse de manière correspondante. Si chaque vase peut contenir  $h$  litres, chaque coordonnée pourra donc varier de 0 à  $h$ ; et l'on aura ainsi un problème banal  $[h; h, h, h]$  dans lequel le domaine d'existence des solutions est constitué par toute la surface du triangle  $ABC$ , avec les conditions :

$$0 \leq x \leq h, \quad 0 \leq y \leq h, \quad 0 \leq z \leq h.$$

Un problème bien plus intéressant est défini par  $[h; a, b, c]$  avec  $h \geq a > b > c$ . Dans ce cas, les contenances des trois vases donnés sont  $a, b$  et  $c$  litres; et l'on se propose de répartir une quantité déterminée,  $d$ , de liquide, en versant à plusieurs reprises d'un vase dans un autre, soit en vidant le premier, soit en remplissant le second (ou même en faisant les deux simultanément). Les variables ont maintenant les limites suivantes :

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c,$$

et le domaine correspondant peut être une aire hexagonale, régulière ou non, bornée par les six droites

$$x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b, \quad z = 0, \quad z = c,$$

Dans des cas particuliers, l'aire hexagonale pourra se réduire à celle d'un pentagone d'un trapèze, d'un parallélogramme, ou même, comme on l'a déjà vu, à toute la surface du triangle équilatéral de référence.

Les figures 4.6A et 4.6B, par exemple, correspondent au problème [8; 7, 6, 3] dans lequel 8 litres de liquide sont, d'abord, répartis d'une certaine façon entre des vases pouvant contenir 7, 6 et 3 litres, et où il s'agit de mesurer, en la versant, une quantité de 4 litres. Les limites des variables sont donc, ici :

$$0 \leq x \leq 7, \quad 0 \leq y \leq 6, \quad 0 \leq z \leq 3.$$

Elles déterminent une aire hexagonale bornée par les six droites :

$$x = 7, \quad z = 0, \quad y = 6, \quad x = 0, \quad z = 3, \quad y = 0;$$

et les sommets de l'hexagone sont les points :

$$(7, 1, 0), \quad (2, 6, 0), \quad (0, 6, 2), \quad (0, 5, 3), \quad (5, 0, 3), \quad (7, 0, 1),$$

ou, avec une notation abrégée : 710, 260, 062, 053, 503, 701.

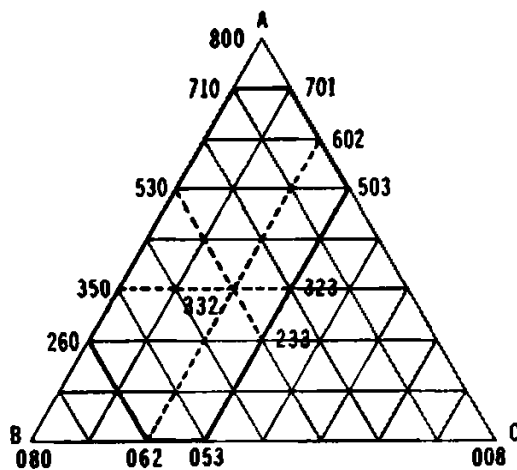


Fig. 4.6A

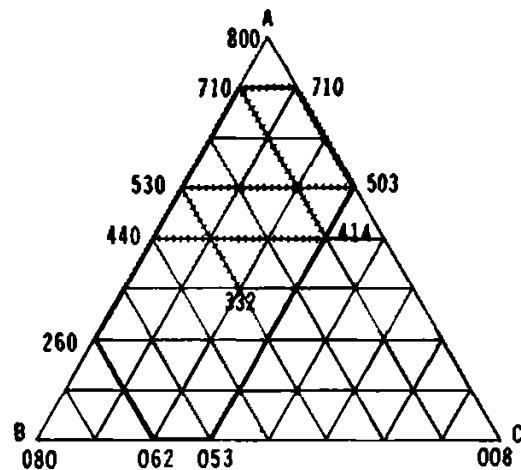


Fig. 4.6B

La figure 4.6A met en évidence le point 332 qui représente une situation particulière : il y a trois litres dans le premier vase, trois dans le second et deux dans le troisième. Les six droites en pointillé issues de ce point correspondent aux six façons possibles de verser. Passer du point 332 au point 530, par exemple, signifie que l'on vide le troisième vase (0 au lieu de 2), en versant dans le premier (5 au lieu de 3); tandis que suivre le chemin opposé allant de 332 à 233, signifie verser du premier vase dans le troisième. Et, de même, passer de 332 à 062 est réalisé en versant du premier vase dans le second qui est, ainsi, plein puisque sa contenance est de 6 litres. Sur la figure 4.6B, la ligne brisée et hachurée

allant de 332 à 440 représente l'un des nombreux chemins possibles reliant ces deux points, c'est-à-dire l'une des façons de diviser les 8 litres donnés en deux portions égales. La trajectoire brisée ne comprend que des parallèles à l'un des côtés du triangle de référence, et ne change de direction que lorsqu'elle atteint soit un côté, soit un sommet de l'hexagone limitant le domaine d'existence des variables. Si, en appliquant les mêmes règles, on poursuivait le chemin au-delà de 440, on passerait, en fait, par tous les points à coordonnées entières situés sur la frontière du domaine. Il s'ensuit donc que, dans le cas du problème [8; 7, 6, 3], on peut, en versant d'un vase dans un autre, mesurer *tout* nombre entier de litres inférieur à 8.

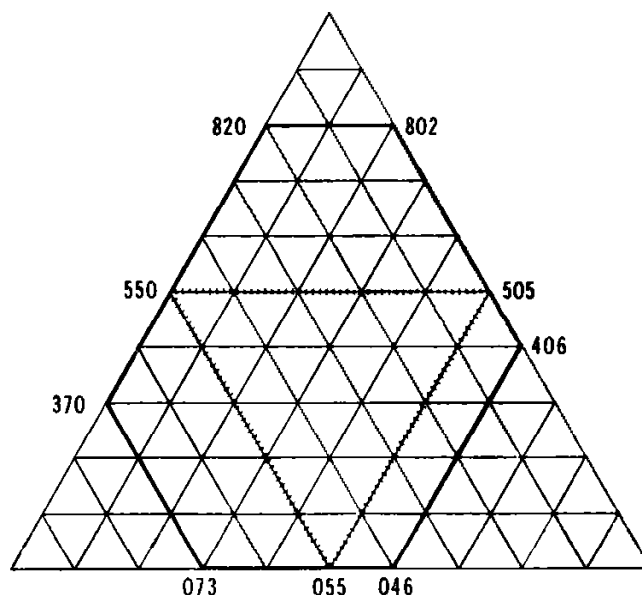


Fig. 4.6C

La figure 4.6C se rapporte au problème [10; 8, 7, 6] dans lequel il faut répartir 10 litres de liquide en utilisant des vases pouvant contenir 8, 7 et 6 litres. On pourra donc, ici, faire aisément des transferts de 1, 2, 3 ou 4 litres. Mais, sauf si l'un des vases contenait 5 litres au début, un transfert de 5 litres sera toujours impossible parce que les trois points 055, 505 et 550 forment un circuit triangulaire sans cesse fermé sur lui-même (voir la figure 4.6C) et auquel aucun autre circuit ne permet d'accéder. Une telle circonstance se produit, d'ailleurs, dans tout problème  $[h; a, b, c]$  pour lequel on a

$$h = 2d \geq a > b > c > d.$$

Le problème  $[10; 8, 6, 4]$ , que voici, présente une particularité un peu différente (voir fig. 4.6D) : les circuits passant par le point 550 constituent un réseau de petits triangles équilatéraux et d'hexagones réguliers. Ainsi est représenté le fait évident qu'avec des vases contenant tous les nombres pairs de litres, on ne pourra jamais « mesurer » une quantité exprimée par un nombre impair. On doit s'attendre à de telles difficultés dans tout problème  $[h; a, b, c]$  où les nombres  $a, b, c$  ont un diviseur commun supérieur à 1.

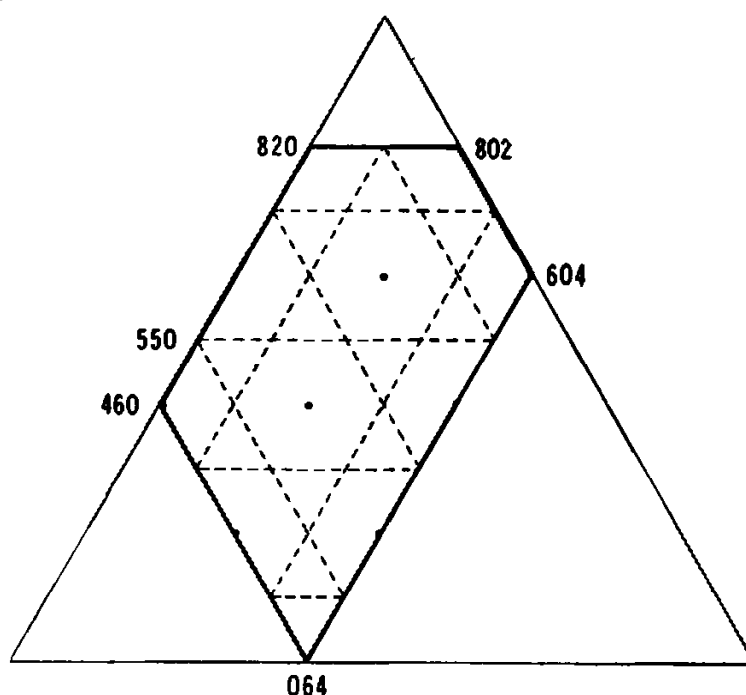


Fig. 4.6D

Les plus célèbres des problèmes  $[h; a, b, c]$  sont ceux dans lesquels on a :

$$h = a = 2d = b + c,$$

d'où il résulte que le domaine à considérer ici est borné par le parallélogramme dont les sommets sont  $a00$ ,  $cb0$ ,  $0bc$  et  $b0c$ . Deux solutions, en sept et huit étapes, de l'application numérique  $[8; 8, 5, 3]$  sont représentées par les figures 4.6E et 4.6F, la question posée pouvant s'énoncer ainsi : deux hommes ont un vase dans lequel il y a 8 litres d'un certain liquide, et deux vases vides dont les contenances sont de 5 et 3 litres; ils veulent partager les 8 litres en deux portions égales.

La première opération doit être de remplir, soit le vase de 5 litres (fig. 4.6E), soit celui de 3 litres (fig. 4.6F). Puis, chaque fois que le chemin

suivi rencontre l'une des quatre droites  $y = 0$ ,  $y = 5$ ,  $z = 0$ ,  $z = 3$ , qui sont les côtés du parallélogramme limitant le domaine d'existence des variables, nous considérerons cette droite comme un miroir. En d'autres termes, nous suivrons la trajectoire d'une boule de billard frappée de telle sorte qu'elle suive d'abord une bande du billard (supposé avoir cette forme inhabituelle !). Le processus des réflexions successives sur les bandes tient à ce que chaque segment de la ligne brisée, étant parallèle à l'un des côtés du triangle de référence, représente un transfert de liquide d'un vase dans un autre, tandis que le troisième vase ne donne lieu à aucun changement. On obtient ainsi une solution en sept opérations successives :

800, 350, 323, 620, 602, 152, 143, 440;

et une autre en huit opérations :

800, 503, 530, 233, 251, 701, 710, 413, 440.

Il est évident que l'on peut résoudre un tel problème (avec  $a = b + c$ ) lorsque les entiers  $b$  et  $c$  sont premiers entre eux, c'est-à-dire n'ont pas de diviseur commun supérieur à 1.

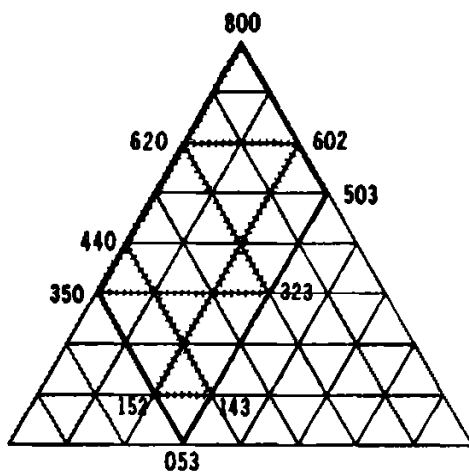


Fig. 4.6E

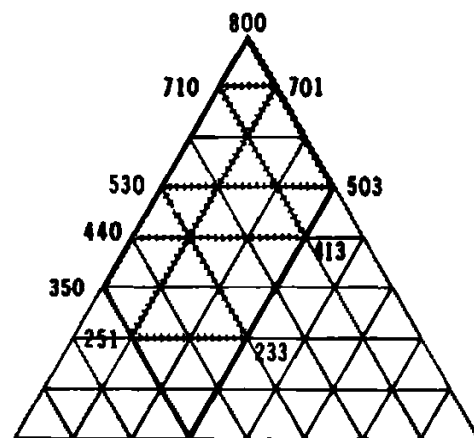


Fig. 4.6F

### Exercices

- 1 - On donne un vase dans lequel il y a 12 litres de liquide et deux vases vides pouvant contenir 9 et 5 litres. Comment peut-on réaliser deux portions égales ?



- 2 - Trois voleurs dérobent un vase contenant 24 onces de baume et s'enfuient. Puis, ayant acheté trois autres vases et arrivés en lieu sûr, ils veulent partager leur butin, mais constatent que les verres achetés contiennent respectivement 13, 11 et 5 onces. Comment pourront-ils faire trois parts égales ?
- 3 - Soient  $P$  et  $P'$  deux points dont les coordonnées trilinéaires par rapport à un triangle  $ABC$  sont respectivement  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$ . Lorsque ces coordonnées satisfont aux équations

$$xx' = yy' = zz',$$

les deux points  $P$  et  $P'$  sont dits *conjugués isogonaux* <sup>(1)</sup> et l'on a les égalités angulaires :

$$\widehat{P'AC} = \widehat{BAP}, \quad \widehat{P'BA} = \widehat{CBP}, \quad \widehat{P'CB} = \widehat{ACP}.$$

#### 4.7. HOMOTHÉTIE

Les transformations exposées précédemment ont une caractéristique commune : elles transforment une figure donnée en une figure égale. Et toutes celles qui ont cette propriété de *conserver les distances* sont appelées *isométries*.

Cependant, on peut recourir avec fruit à une transformation qui, à toute figure, fait correspondre une figure *semblable*. Une telle *similitude* conserve les angles, mais pas nécessairement les distances, celles-ci étant alors, toutes augmentées ou diminuées dans le même rapport appelé *rapport d'homothétie*. Tout segment linéaire  $AB$  est donc transformé en un segment  $A'B'$  dont la longueur est

$$A'B' = k \cdot AB,$$

le rapport  $k$  pouvant être supérieur, égal ou inférieur à 1. L'isométrie est le cas particulier de la similitude où  $k = 1$ .

On peut préciser davantage les remarques ci-dessus en définissant la similitude comme étant une *transformation qui conserve les rapports entre les distances*; car cela entraîne la conservation tant de l'alignement de points, que des angles.

Le type de similitude le plus simple est l'*homothétie*, qui transforme toute droite en une droite parallèle. Une homothétie ne se réduisant pas

(1) Ou encore *inverses*. Sur les points inverses et les droites isogonales, voir notamment E. ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE, *op. cit.* - Tome I, p. 453-454.

à une simple translation est dite homothétie *centrale* parce que toutes les droites joignant des points homologues passent par un même point que le centre d'homothétie. Pour voir pourquoi il en est ainsi, examinons les figures 4.7A et 4.7B, dans lesquelles les segments homologues  $AB$  et  $A'B'$ , portés par des droites parallèles, satisfont à l'équation vectorielle

$$\vec{A'B'} = \pm k \cdot \vec{AB}.$$

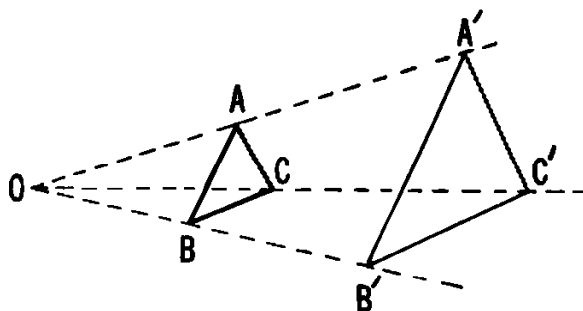


Fig. 4.7A

Tout point  $C$  formant un triangle avec  $A$  et  $B$  a un homologue  $C'$  qui est le point d'intersection de la parallèle à  $AC$  menée par  $A'$  et de la parallèle à  $BC$  menée par  $B'$ . Si l'homothétie n'est pas une simple translation (c'est-à-dire si  $k \neq 1$ ), les droites  $AA'$  et  $BB'$ , n'étant pas parallèles, se coupent en un point  $O$  tel que :

— soit

$$\vec{OA'} = k \cdot \vec{OA} \quad \text{et} \quad \vec{OB'} = k \cdot \vec{OB}$$

comme dans la figure 4.7A,

— soit

$$\vec{OA'} = -k \cdot \vec{OA} \quad \text{et} \quad \vec{OB'} = -k \cdot \vec{OB},$$

comme dans la figure 4.7B.

Des droites parallèles déterminant, sur des transversales, des segments proportionnels, on voit aisément que  $C'$  est situé sur  $OC$ ; et, plus précisément, on a :

$$\vec{OC'} = \pm k \cdot \vec{OC}.$$

Si l'on suppose que le point  $O$  s'éloigne indéfiniment vers la gauche de la figure 4.7A, on conçoit qu'une *translation* constitue la forme limite d'une homothétie centrale où  $\vec{A'B'} = k \cdot \vec{AB}$ , lorsque  $k$  tend vers 1.

Il est encore plus facile de modifier la figure 4.7B de façon à ce que  $O$  soit le milieu de  $AA'$  : l'homothétie centrale  $\vec{A'B'} = -k \cdot \vec{AB}$  a donc, comme cas particulier, le demi-tour

$$\vec{A'B'} = -\vec{AB},$$

$ABA'B'$  étant alors un parallélogramme de centre  $O$ .

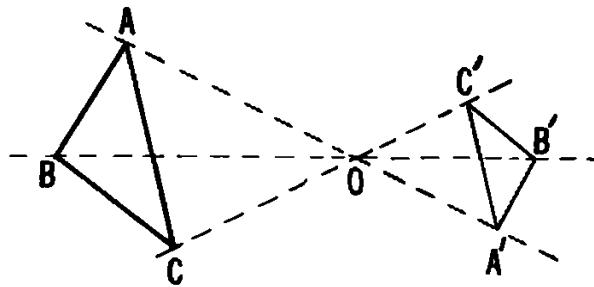


Fig. 4.7B

### Exercices

- 1 - Quel est le lieu géométrique du milieu d'un segment de longueur variable et tel que l'une de ses extrémités reste fixe, tandis que l'autre parcourt un cercle ?
- 2 - Etant donné un triangle  $ABC$  dont les angles sont aigus, construire un carré dont un côté est porté par  $BC$ , les deux autres sommets étant situés sur  $CA$  et  $AB$ .

### 4.8. SIMILITUDE

Si une figure est transformée d'abord par homothétie puis par translation, les droites homologues restent parallèles, et la figure obtenue finalement est une homothétie de la première. Plus généralement, et pour la même raison, le produit de deux homothéties est encore une homothétie. Mais si une figure est transformée d'abord par homothétie, puis par rotation, les droites homologues ne restent plus parallèles. Ainsi le produit d'une homothétie et d'une rotation (autre que la transformation identique ou un demi-tour) n'est pas une homothétie, tout en demeurant une *similitude directe* qui conserve tant la grandeur que le sens des angles.

D'une façon générale, le produit d'une homothétie et d'une rotation ayant toutes deux *même centre* s'appelle une *similitude* <sup>(1)</sup>. Cette transformation peu connue peut faciliter la solution de maints problèmes.

Si une telle similitude de centre  $O$  transforme  $AB$  en  $A'B'$  (voir fig. 4.8A), il s'ensuit que les triangles  $OAB$  et  $OA'B'$  sont directement semblables et que l'on a

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}.$$

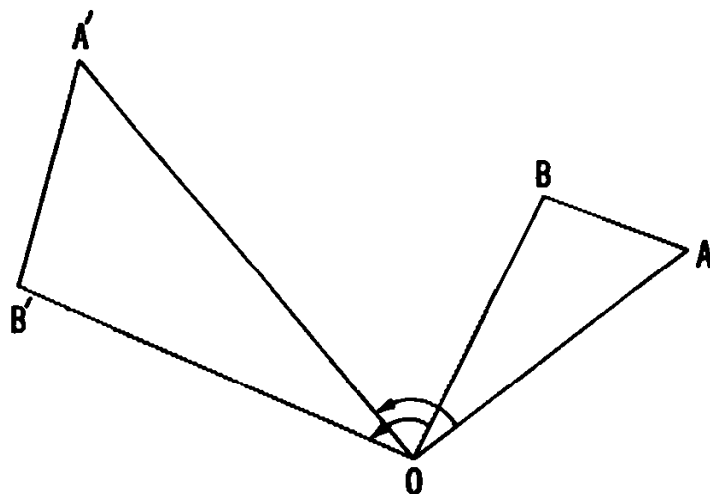


Fig. 4.8A

De plus, comme dans le cas d'une homothétie ordinaire, le rapport d'homothétie est

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Toute similitude étant complètement déterminée par son centre  $O$ , son rapport  $k$  et l'angle de rotation  $\theta$ , nous conviendrons de la représenter par la notation :

$$O(k, \theta).$$

(Comme il est d'usage, les angles de rotation seront comptés positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et négativement dans l'autre sens). Les figures 4.7A et 4.7B, par exemple, représentent respectivement les similitudes  $O(k, 0^\circ)$  et  $O(k, 180^\circ)$ ; tandis que  $O(1, \theta)$  est une simple rotation.

Pour montrer comment on utilise les similitudes, démontrons notamment le théorème que voici :

(1) R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* – G., p. 70.

**Théorème 4.81** — Si, sur les côtés  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$  d'un triangle  $ABC$ , et extérieurement à celui-ci, on construit des carrés de centres  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ , les segments rectilignes  $O_1O_2$  et  $CO_3$  sont égaux et orthogonaux.

En examinant la figure 4.8B, on voit que, par la similitude  $A (\sqrt{2}, 45^\circ)$ , le triangle  $CAO_2$  sera transformé en  $KAB$ , tandis que l'autre similitude  $C (\sqrt{2}, -45^\circ)$  transformera le triangle  $O_1CO_3$  en  $BCK$ . Or, les deux triangles obtenus par des transformations ont en commun le côté  $BK$ ,

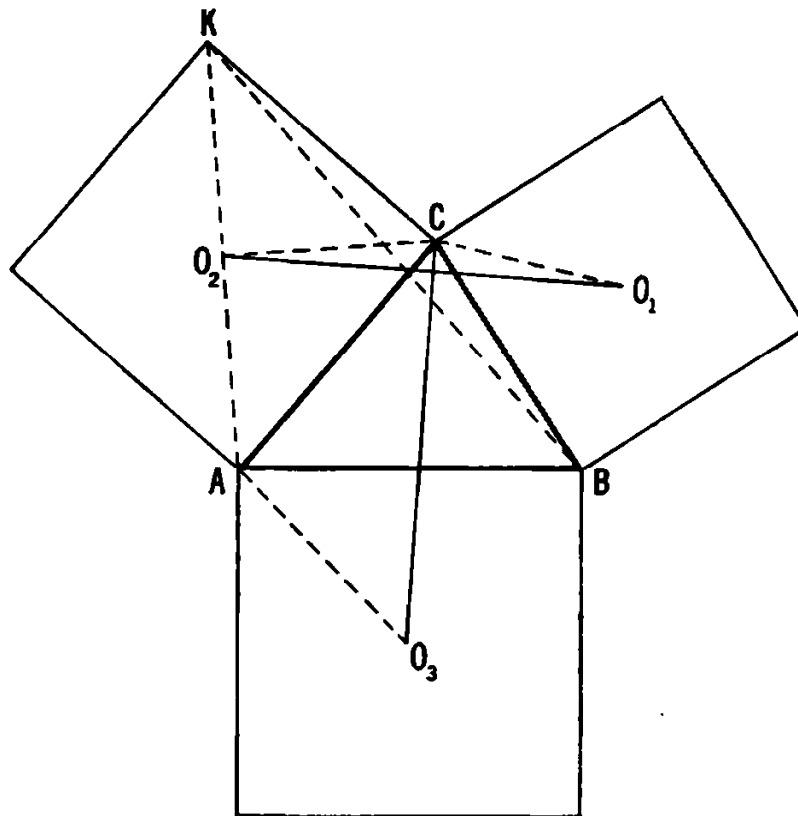


Fig. 4.8B

homologue de  $O_2C$  et  $O_1O_3$ , respectivement, dans ces dernières qui, d'autre part, ont le même rapport d'homothétie  $\sqrt{2}$  : il s'ensuit donc qu'avant leur transformation,  $O_2C$  et  $O_1O_3$  devaient être égaux. De plus, les transformations de  $O_2C$  et  $O_1O_3$  ayant été effectuées en faisant intervenir des rotations de  $45^\circ$  et  $-45^\circ$ , l'angle des transformées est nul ; les deux segments  $O_2C$  et  $O_1O_3$  devaient donc être orthogonaux initialement. Ainsi, la démonstration est achevée. (On voit que les droites  $AO_1$ ,  $BO_2$ ,  $CO_3$  sont concourantes comme étant les hauteurs du triangle  $O_1O_2O_3$  ; la dernière seule est tracée sur la figure 4.8B.)

Après avoir défini une similitude comme étant le produit d'une homothétie centrale et d'une rotation ayant toutes deux le même centre, nous sommes tout naturellement amenés à nous demander ce qu'est le produit d'une homothétie centrale et d'une rotation de centres différents. Voici la réponse, à la fois simple et surprenante : c'est encore une *similitude*, car il n'existe pas de type plus compliqué de similitude directe.

**Théorème 4.82** — *Deux figures directement semblables quelconques se correspondent soit par une translation, soit par une similitude.*

Pour le démontrer, considérons deux segments,  $AB$  et  $A'B'$ , appartenant à des figures directement semblables. Si  $A'B'$  est parallèle et égal

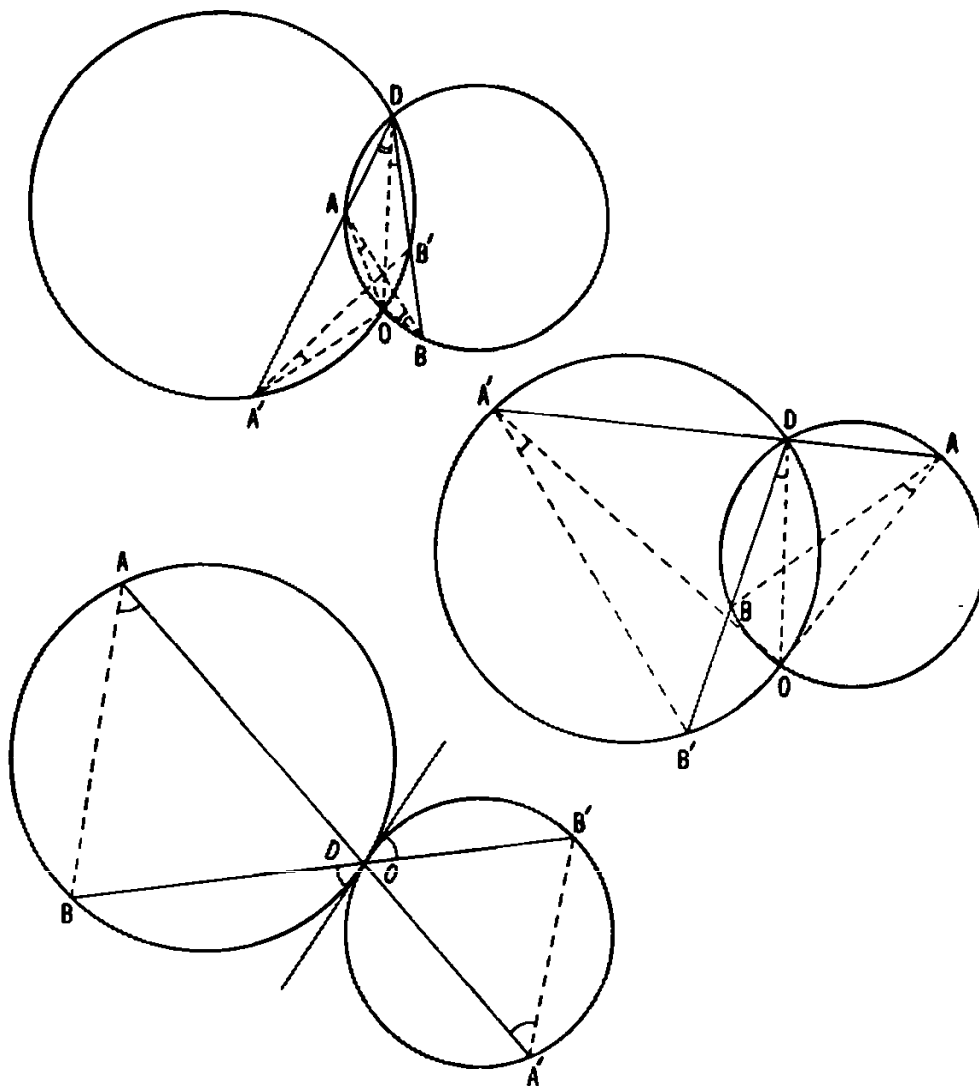
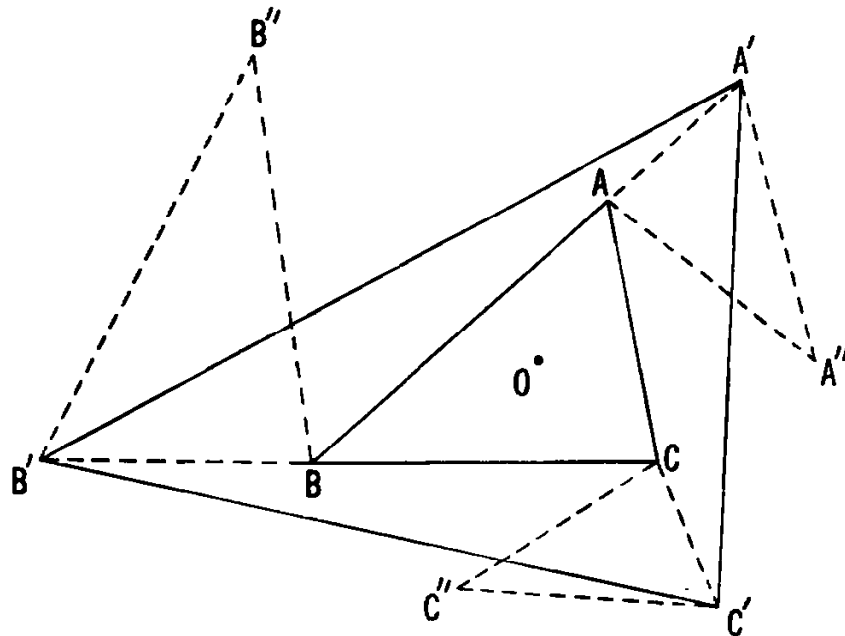


Fig. 4.8C

à  $AB$ , la transformation effectuée est alors une translation. Soient, en effet,  $C$  un point quelconque non situé sur  $AB$ , et  $C'$  son homologue. Les figures étant directement semblables, il s'ensuit que les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont égaux, leurs côtés homologues étant parallèles. Ainsi, tous les segments joignant des points à leurs homologues sont parallèles et égaux : la transformation est donc une translation.

Supposons maintenant que  $A'B'$  ne soit pas égal à  $AB$ . (Si les quatre points  $ABA'B'$  ne forment pas un quadrangle comme sur la figure 4.8D, on prendra un autre couple de segments homologues en formant un, cette fois, et en conservant les notations  $AB$ ,  $A'B'$ . Dans le cas, par exemple de la figure 4.8D, où  $B$  est sur  $AA'$ , on pourra utiliser le milieu



Flg. 4.8D

de  $AB$  au lieu de  $A$ , et le milieu de  $A'B'$  au lieu de  $A'$ ) : les droites  $AA'$  et  $BB'$  se coupent alors en  $D$  (voir fig. 4.8C). Considérons les cercles circonscrits aux triangles  $ABD$  et  $A'B'D$  : ils ont un premier point commun en  $D$ , et un second en  $O$ . La comparaison des angles  $\widehat{OAB}$ ,  $\widehat{ODB}$ ,  $\widehat{OBD}$  et  $\widehat{OA'B'}$  montre que  $\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'}$  et, de même,  $\widehat{OBA} = \widehat{OB'A'}$ . Ainsi, les triangles  $OAB$  et  $OA'B'$  et, de même,  $OBA = OB'A'$ . Ainsi, les triangles  $OAB$  et  $OA'B'$ , étant directement semblables, sont homologues dans une similitude  $O(k, \theta)$ , avec

$$k = \frac{OA'}{OA} \quad \text{et} \quad \theta = \widehat{AOA'}.$$

En d'autres termes, toute similitude directe qui n'est pas une translation a un *point fixe* et, de plus, *ce point est unique*. En effet, s'il y avait deux tels points,  $A$  et  $B$  par exemple, le segment  $AB$  serait lui-même constant, et comme on aurait

$$k = \frac{AB}{AB} = 1,$$

la similitude serait une isométrie comportant deux points fixes. Si l'on effectue une telle transformation, l'homologue d'un triangle  $ABC$  est un triangle  $ABC'$  tel que  $C'$  appartienne aux cercles de centres  $A$  et  $B$ , et de rayons  $AC$  et  $BC$ , respectivement. Les seules isométries laissant  $A$  et  $B$  fixes sont donc la transformation identique (ou translation de longueur nulle), et la symétrie axiale (qui entraîne une similitude inverse, car elle change les signes des angles).

Si, par exemple, on dessine sur du papier calque, et si l'on superpose <sup>(1)</sup>, deux cartes d'un même département à des échelles différentes, il n'y aura qu'un seul lieu représenté par le même point sur les deux cartes.

Ces considérations ont été développées par Julius Petersen (1880) et P.H. Schoute (1890), en un très beau théorème dont voici un cas particulier :

**Théorème 4.83** — *Soient, d'une part,  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles directement semblables, et, d'autre part,  $AA'A''$ ,  $BB'B''$ ,  $CC'C''$  trois triangles directement semblables : le triangle  $A''B''C''$  est alors directement semblable au triangle  $ABC$ .*

Lorsque les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont égaux par translation, la proposition est évidente. S'ils sont inégaux, soit  $O(k, \theta)$  la similitude unique transformant  $ABC$  en  $A'B'C'$ , de sorte que l'on ait

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$$

et 
$$\theta = \widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'},$$

comme dans la figure 4.8D.

<sup>(1)</sup> La superposition signifie, ici, que la carte à la plus petite échelle est entièrement contenue dans les limites de l'autre. Il est alors aisé de montrer que le centre de la similitude est effectivement situé dans le département représenté.



Il s'ensuit que les triangles

$$OAA', \quad OBB', \quad OCC',$$

sont semblables. Or, par hypothèse, tel est aussi le cas des triangles

$$AA'A'', \quad BB'B'', \quad CC'C''.$$

D'où il résulte que sont également semblables les triangles

$$OAA'', \quad OBB'', \quad OCC'';$$

et l'on a

$$\frac{OA''}{OA} = \frac{OB''}{OB} = \frac{OC''}{OC} = k'$$

$$\widehat{AOA''} = \widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = \theta'.$$

Il existe donc une similitude  $O(k', \theta')$  transformant  $ABC$  en  $A''B''C''$ .

Du théorème de Petersen-Schoute voici un autre cas particulier que l'on démontre d'une façon analogue :

**Théorème 4.84** — *Lorsque, dans une certaine similitude, tous les points  $P$  de  $AB$  ont pour homologues tous les points  $P'$  de  $A'B'$ , les points qui divisent les segments  $PP'$  dans un rapport donné, ou bien sont distincts et alignés, ou bien coïncident tous.*

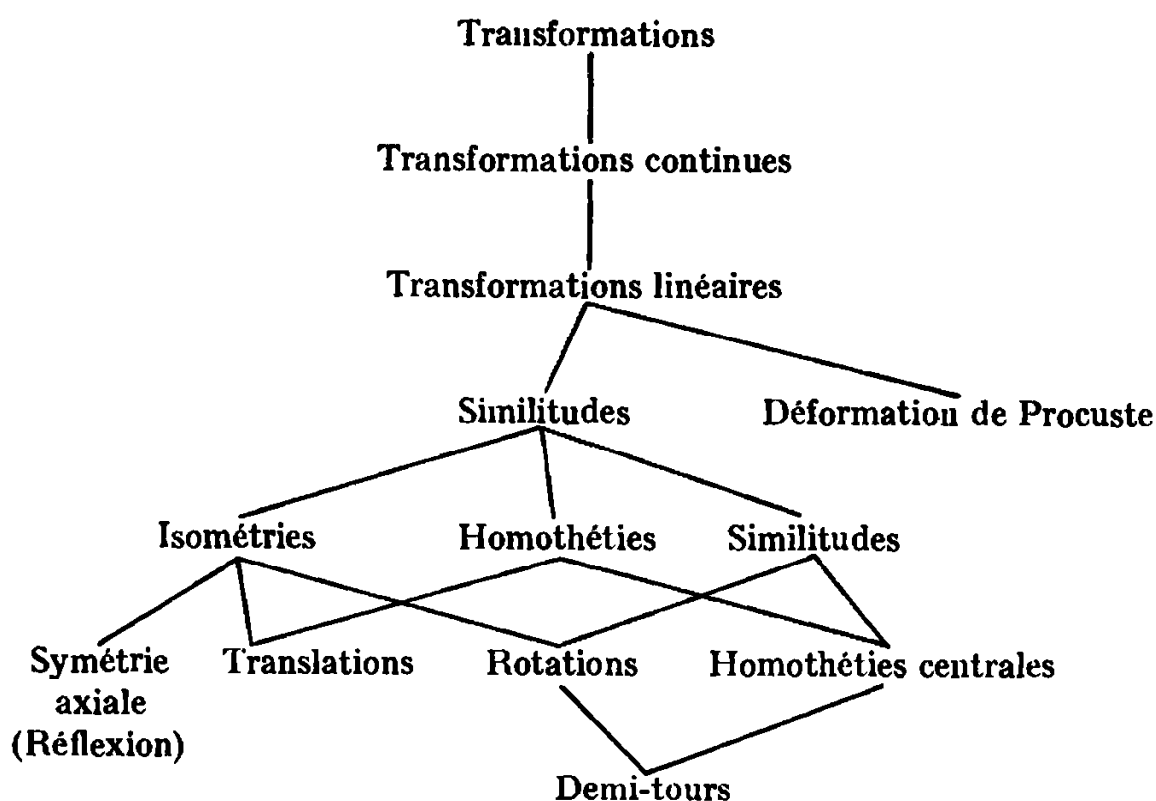
### Exercices

- 1 - Si, par une similitude ayant pour centre le sommet  $A$  d'un triangle  $ABC$ , on transforme celui-ci de façon à ce que le sommet décrive le côté  $BC$ , le sommet  $C$  décrira lui-même une droite.
- 2 - Si  $ABC$  est un triangle scalène, son triangle de Napoléon intérieur est de sens rétrograde; c'est-à-dire que le sens de son orientation est contraire à ceux des triangles  $ABC$  et  $O_1O_2O_3$  (voir le paragraphe 3.3 où l'on a simplement énoncé cette proposition sans la démontrer).

## 4.9. TRANSFORMATIONS SUCCESSIVES

Il est remarquable que toutes les transformations discutées précédemment soient des correspondances biunivoques entre tous les points dont l'ensemble forme le plan, et ces points eux-mêmes. Parmi elles, nous n'avons considéré que les *transformations continues* (ou « homo-

morphismes »), c'est-à-dire des transformations qui, à des points voisins, font correspondre des points voisins <sup>(1)</sup>. Puis, parmi ces dernières, nous avons discuté les *transformations linéaires* (ou « affinités ») qui conservent les droites et, par suite, le parallélisme de deux droites. Dans les transformations linéaires sont venues ensuite les *similitudes* qui conservent les rapports de distances; mais nous avons laissé de côté les variétés les plus singulières, notamment la « déformation de Procuste » (qui transforme un cercle en une ellipse de même aire). Les similitudes particulières que nous avons considérées sont les *isométries* qui conservent les distances, les *homothéties* qui transforment une droite en une droite parallèle, et les *similitudes* qui (comme le font certaines isométries et certaines homothéties) laissent fixe un certain point et conservent le sens de rotation (dans le sens inverse, ou direct, des aiguilles d'une montre). Ces diverses catégories se chevauchent, d'ailleurs, quelque peu : parmi les isométries, nous avons envisagé les symétries axiales (ou réflexions), les translations (qui, selon la définition ci-dessus, sont des homothéties) et les



(1) D'une façon plus précise : si  $A$  est un point et  $A'$  son homologue dans une transformation continue, l'homologue  $B'$  d'un autre point  $B$  sera situé dans un cercle arbitrairement petit entourant  $A'$  pourvu que  $B$  soit suffisamment près de  $A$ .

rotations (qui sont des similitudes de rapport 1). Les autres homothéties sont des homothéties centrales (qui sont des similitudes, à angle de rotation nul). Enfin, les demi-tours sont à la fois des rotations (de  $180^\circ$ ) et des homothéties centrales. Toutes ces relations peuvent se résumer clairement en une sorte d'« arbre généalogique » dont chaque élément représente une partie spécialisée du précédent.

### Exercices

En adoptant les coordonnées cartésiennes, une déformation de Procuste transforme un point  $(x, y)$  en un point  $(x', y')$ , avec  $x' = kx$  et  $y' = \frac{1}{k} \cdot y$ . Avec les mêmes coordonnées, écrire des expressions analogues pour les transformations suivantes :

- 1 - Translation amenant  $(0, 0)$  en  $(a, b)$ .
- 2 - Symétrie par rapport à l'axe des  $y$ .
- 3 - Symétrie par rapport à la droite  $x - y = 0$ .
- 4 - Demi-tour ayant l'origine des coordonnées comme centre.
- 5 - Homothétie centrale  $O(k, 0^\circ)$ .
- 6 - Similitude  $O(k, 90^\circ)$ .
- 7 - Une isométrie non encore citée.
- 8 - Une similitude non encore citée.
- 9 - Une transformation continue non linéaire.
- 10 - Une transformation non continue.

# 5

## **Introduction à la géométrie de l'inversion**

*Ploçons une cage sphérique dans le désert; entrons-y et fermons-la. Puis faisons une inversion par rapport à la cage. Le lion est alors à l'intérieur de la cage, et nous sommes à l'extérieur.*

H. Petard

Dans ce chapitre, nous admettrons (le moins possible, d'ailleurs) que ne plus nous limiter à des transformations biunivoques étendues à tout le plan euclidien : seul le point  $O$  ne subira aucune transformation. D'une façon plus précise, nous considérerons un cercle fixe de centre  $O$ , et nous le prendrons comme cercle d'inversion : les cercles passant par  $O$  ont alors des droites pour inverses, tandis que les autres cercles sont transformés en cercles. (Il arrive souvent que l'on puisse simplifier des problèmes en transformant certains des cercles considérés en droites; mais des figures plus compliquées changeront de forme complètement).

### **5.1. COUPLES DE POINTS SÉPARÉS**

On a estimé que le théorème suivant était assez difficile à démontrer pour être proposé, en 1965, au concours William Lowell Putnam. Notre démonstration s'inspire des diverses solutions présentées.

**Théorème 5.11** — Si quatre points  $A, B, C, D$  ne sont situés ni sur un même cercle, ni sur une même droite, il existe deux cercles sans points communs dont l'un passe par  $A$  et  $C$ , et l'autre par  $B$  et  $D$ .

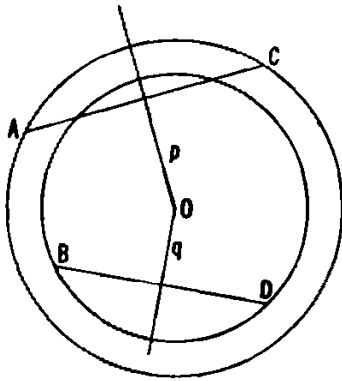


Fig. 5.1A

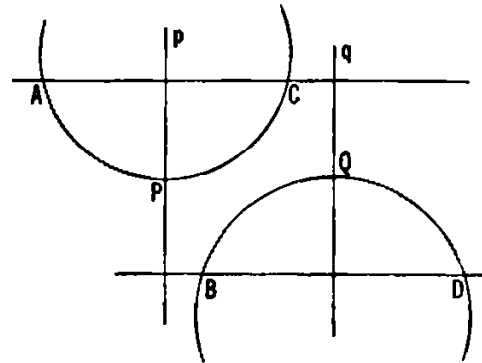


Fig. 5.1B

Pour le démontrer, remarquons, tout d'abord, que la perpendiculaire au milieu du segment  $AC$ ,  $p$ , ne peut pas coïncider avec la perpendiculaire au milieu du segment  $BD$ ,  $q$ . Si  $p$  et  $q$  se coupent (voir fig. 5.1A), leur point commun  $O$  est le centre de deux cercles *concentriques* passant, l'un par  $A$  et  $C$ , l'autre par  $B$  et  $D$ . Si, par contre,  $p$  et  $q$  sont parallèles (voir fig. 5.1B), les droites  $AC$  et  $BD$  seront, elles aussi, parallèles. Considérons, sur cette dernière figure, les points  $P$  et  $Q$  situés, respectivement, sur  $p$  et  $q$ , et à égale distance des parallèles  $AC$  et  $BD$ ; les cercles  $APC$  et  $BQD$  n'ont, évidemment, aucun point commun.

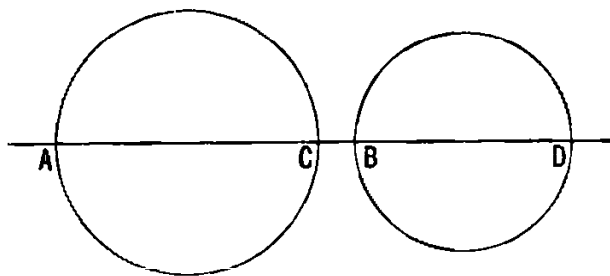


Fig. 5.1C

On dit que deux couples de points distincts,  $AC$  et  $BD$ , sont *séparés* l'un de l'autre si les points  $A, B, C, D$  sont situés sur un cercle (ou sur une droite) dans un ordre tel que l'un ou l'autre des arcs  $AC$  (ou le segment

de droite  $AC$ ) contienne l'un, et l'un seulement, des autres points,  $B$  et  $D$ . Nous exprimerons cette relation par le symbole habituel

$$AC \parallel BD$$

que l'on peut, d'ailleurs, écrire aussi de sept autres façons telles que  $AC \parallel DB$ , ou  $BD \parallel AC$ .

Si deux couples de points,  $AC$  et  $BD$ , situés sur une droite ou sur un cercle, ne sont pas « séparés » l'un de l'autre, on peut aisément décrire deux cercles sans points communs et passant, l'un par  $A$  et  $C$ , l'autre par  $C$  et  $D$ . Dans le cas de la figure 5.1C, où les quatre points sont alignés, il est possible de recourir aux cercles ayant  $AC$  et  $BD$  pour diamètres. Enfin, si les quatre points sont concycliques (fig. 5.1D), les centres des cercles pourront être les points d'intersection des tangentes en  $A$  et  $C$ , d'une part, et en  $B$  et  $D$ , d'autre part, au cercle sur lequel sont situés  $A, B, C, D$ .

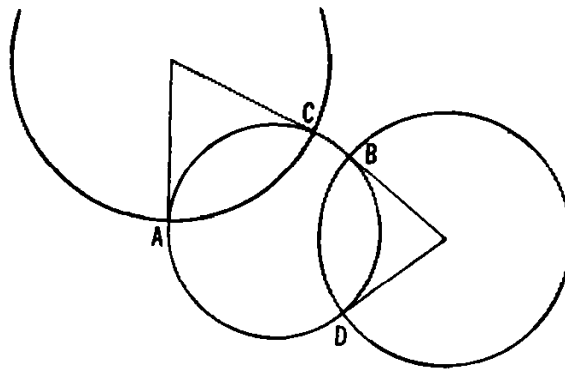


Fig. 5.1D

De plus, si l'on a la relation  $AC \parallel BD$ , tout cercle passant par  $A$  et  $C$ , mais non par  $D$ , « sépare »  $B$  et  $D$  en ce sens que l'un de ces deux points est intérieur au cercle tandis que l'autre lui est extérieur : le cercle passant par  $A$  et  $C$  coupe donc tout cercle passant par  $B$  et  $D$ .

La forme contraposée du théorème 5.11 montre que si un cercle quelconque passant par deux points donnés a au moins deux points communs avec un cercle quelconque passant par deux autres points, les quatre points envisagés doivent être soit alignés (fig. 5.1E), soit concycliques (fig. 5.1F). Dans de tels cas, nous l'avons vu, les deux couples de points se « séparent » mutuellement. Grâce aux remarques précédentes, nous pouvons définir à nouveau la notion de séparation d'une manière qui soit symétrique et sans savoir, au préalable, si les quatre points sont alignés, concycliques, ou ni l'un ni l'autre.

On dira que deux couples distincts de points,  $AC$  et  $BD$ , se *séparent* mutuellement si *tout cercle passant par  $A$  et  $C$  coupe tout cercle passant par  $B$  et  $D$ , ou coïncide avec lui*.

En fait, il existe une troisième façon de caractériser la séparation sans faire intervenir aucune cercle.

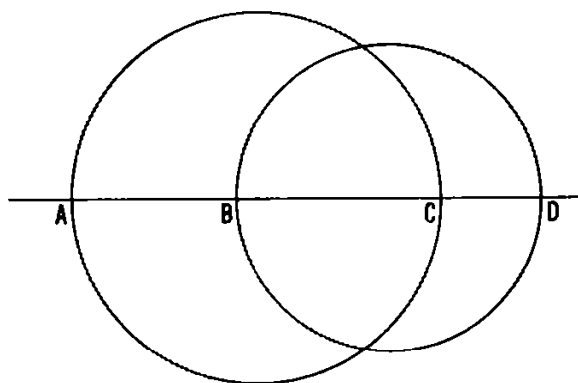


Fig. 5.1E

**Théorème 5.12** — *Les distances mutuelles de quatre points  $A, B, C, D$  satisfont à la relation*

$$AB \times CD + BC \times AD \geq AC \times BD,$$

*l'égalité n'étant réalisée que si  $AC \parallel BD$ .*

La démonstration que voici demande une certaine attention; mais elle est intéressante. Traitons, tout d'abord, le cas où les quatre points sont situés sur une même droite; nous pourrons, ainsi, recourir provisoirement à des notations vectorielles (comme au paragraphe 2.1).

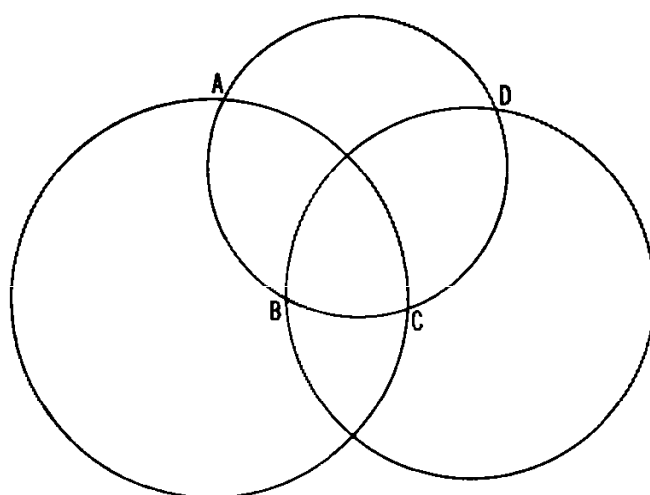


Fig. 5.1F

Posons donc :

$$\overrightarrow{AD} = x, \quad \overrightarrow{BD} = y, \quad \overrightarrow{CD} = z$$

d'où

$$\overrightarrow{AB} = x - y, \quad \overrightarrow{BC} = y - z, \quad \overrightarrow{AC} = x - z.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD} &= (x - y)z + (y - z)x = (x - z)y \\ &= \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} \end{aligned} \quad (5.121)$$

Si l'on a  $AC \parallel BD$  (comme dans la figure 5.1E), le segment  $AC$  ne comprend que l'un seulement des points  $B$  et  $D$  : il en résulte que les rapports  $\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{DC}$  sont de signes contraires ; de même, les produits  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD}$  sont également de signes contraires, tandis que les produits  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD}$  sont de même signe. Si l'on considère  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ , etc. comme des quantités positives, l'équation (5.121) reste donc valable. Maintenant, lorsque  $A$  et  $C$  ne séparent plus  $B$  et  $D$  (cas de la figure 5.1C), tous les signes précédents sont changés ; et, par exemple,  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD}$  sont de signes contraires. D'autre part, en employant des longueurs positives, nous savons, d'après (5.121) que le nombre positif  $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}$  est égal à la *différence* entre les nombres positifs  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD}$ . Leur somme étant plus grande que leur différence, il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD} > \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD},$$

ce qui achève la démonstration du théorème 5.12 dans le cas de points alignés.

Si, maintenant, l'ensemble des quatre points n'est plus situé sur une droite, il existe nécessairement un sous-ensemble de trois points formant un triangle et que, en changeant les notations si nécessaire, nous désignerons par  $A$ ,  $B$  et  $C$ , le quatrième point (qui *pourra* être sur l'un des côtés du triangle) étant  $D$ . Dans ce cas, le théorème 5.12 est alors une conséquence du théorème de Ptolomée (2.61) et de sa réciproque (2.62) : d'après ces derniers, nous savons, en effet, que les distances mutuelles de quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  (dont les trois premiers forment un triangle) satisfont à la relation

$$AB \times CD + BC \times AD \geqslant AC \times BD$$



l'égalité n'ayant lieu que si  $ABCD$  est un quadrangle inscriptible de diagonales  $AC$  et  $BD$ .

### Exercice

1 - Ecrire l'ensemble des huit symboles équivalents à  $AC // BD$ .

## 5.2. RAPPORT ANHARMONIQUE

On appelle *rapport anharmonique* de quatre points quelconques,  $A, B, C, D$ , distincts et pris dans cet ordre, le nombre  $(ABCD)$ ; en fonction de quatre des distances mutuelles de ces points, il est défini par la formule

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{BC}} \quad \left( \text{ou encore } \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} \right).$$

Si l'on divise les deux membres de la relation figurant dans le théorème 5.12 par  $AC \times BD$ , on obtient, en conservant la notation précédente :

**Théorème 5.21** — *Les rapports anharmoniques de quatre points distincts satisfont à l'égalité*

$$(ADBC) + (ABDC) = 1$$

*si, et seulement si, l'on a  $AC // BD$ .*

Ce critère de « séparation » en fonction de rapports anharmoniques nous permet de procéder à l'inverse de ce que nous avons fait plus haut : au lieu de définir la séparation en fonction de cercles, nous pouvons maintenant, en effet, définir des cercles en fonction de la séparation ! Car trois points distincts  $A, B, C$  déterminent un *cercle* (ou une droite) unique que l'on peut définir comme étant formé par ces points eux-mêmes et par tous les points  $X$  tels que :

$$BC // AX, \quad \text{ou} \quad CA // BX, \quad \text{ou} \quad AB // CX.$$

### Exercices

1 - Montrer que :

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$$

2 - Calculer  $(ADBC) + (ABDC)$  dans les cas suivants :

- a) le rapport des distances de  $B$  (situé entre  $A$  et  $C$ ) à  $A$  et à  $C$  est égal au rapport des distances de  $D$  (extérieur à  $AC$ ) à  $A$  et à  $C$ , de sorte que  $AB/BC = AD/CD$ .
- b)  $D$  est le centre du triangle équilatéral  $ABC$ .
- c)  $ABDC$  est un carré.
- d)  $ABCD$  est un carré.

### 5.3. L'INVERSION <sup>(1)</sup>

C'est L.J. Magnus qui, en 1831, découvrit la « quasi-transformation » suivante. Etant donné un cercle  $\omega$ , de centre  $O$  et de rayon  $k$  (voir la figure 5.3A), et un point  $P$  différent de  $O$ , nous définirons l'inverse de  $P$  comme étant le point  $P'$  situé sur la droite  $OP$  et à une distance  $OP'$  telle que l'on ait

$$\overline{OP} \times \overline{OP'} = k^2.$$

De cette définition il résulte donc que l'inverse de  $P'$  est  $P$  : comme le demi-tour et la symétrie axiale qui nous sont familiers, l'inversion associe les points par couples. De plus, tout point situé à l'extérieur du cercle d'inversion  $\omega$  a pour inverse un point situé à l'intérieur de ce cercle : ainsi, l'inversion « permute l'intérieur et l'extérieur du cercle ». Les seuls points qui soient leurs propres inverses sont les points appartenant à la circonférence du cercle  $\omega$ .

(<sup>1</sup>) L'attention du lecteur est attirée sur la façon dont les auteurs présentent, ici, l'inversion. Dans la plupart des ouvrages français, en effet (voir notamment R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* — p. 153-155), étant donné un point fixe  $O$  et un nombre  $\mu$ , positif ou négatif, on appelle d'abord « inversion de pôle  $O$  et de puissance  $\mu$  » la transformation associant à chaque point  $M$ , dans le plan ou dans l'espace, le point  $M'$  situé sur la droite  $OM$  et défini par la relation  $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \mu$ . Les points  $M$  et  $M'$  sont alors dits *homologues*, ou *inverses*, dans l'inversion considérée. Celle-ci est dite *positive* ou *négative* suivant que  $\mu$  est, lui-même positif ou négatif : dans le premier cas  $M$  est situé sur la demi-droite  $OM$ , tandis qu'il est sur la demi-droite opposée dans le second cas.

C'est ensuite, seulement, que, dans le cas d'une inversion *positive*, on considère le cercle d'inversion de centre  $O$  et de rayon  $R$  tel que  $\mu = R^2$ , cercle auquel est orthogonal tout cercle passant par deux points inverses.

Différant du mode d'exposition ci-dessus, les auteurs considèrent d'emblée le cercle d'inversion  $\omega$  de rayon  $k$  — ce qui revient à n'envisager que des inversions positives.

Il est rappelé, d'autre part, que, sauf dans le dernier paragraphe (6.7) sur les projections stéréographique et centrale, cet ouvrage ne concerne que la géométrie plane (N.d.T.).



Réciproquement, pour déterminer l'inverse de tout point  $P'$  extérieur à  $\omega$ , on peut décrire le cercle qui a  $OP'$  pour diamètre : si ce cercle coupe le cercle  $\omega$  en  $T$  et  $U$ , l'inverse cherché est le point  $P$  milieu de  $TU$ , c'est-à-dire le point où  $TU$  coupe  $OP'$ .

En examinant la figure 5.3B, on se rend compte que l'inverse d'une droite quelconque  $a$  ne passant pas par  $O$  est un cercle passant, lui, par  $O$  (ce point lui-même étant exclu), et que le diamètre de ce cercle passant par  $O$  est perpendiculaire à  $a$ . En voici l'explication détaillée. Soient, en effet,  $A$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $O$  sur  $a$ ,  $A'$  l'inverse de  $A$ ,  $P$  un point quelconque de  $a$ , et  $P'$  le point où  $OP$  coupe le cercle de diamètre  $OA'$ . Les deux triangles  $OAP$  et  $OP'A'$  sont donc semblables, et l'on peut écrire :

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA'}{OP'}$$

d'où :  $OP \times OP' = OA \times OA' = k^2$ .

Réciproquement, tout point  $P'$  ( $O$  étant exclu) situé sur le cercle de diamètre  $OA'$  est transformé en un point  $P$  de la droite  $a$ . Il s'ensuit que *tout cercle passant par  $O$  (ce point étant toujours exclu) a pour inverse une droite perpendiculaire au diamètre passant par  $O$ , c'est-à-dire une parallèle à la tangente en  $O$  au cercle donné.*

Ainsi, deux cercles se coupant en  $O$  et  $P$  ont pour inverses deux droites se coupant en  $P'$ , l'inverse de  $P$ ; et deux cercles tangents l'un à l'autre en  $O$  ont pour inverses deux droites parallèles.

En fait, il existe un instrument qui nous permet de tracer la figure inverse de tout lieu géométrique donné; il n'est guère plus compliqué que le compas servant à tracer des cercles. Découvert par L. Lipkin en 1781, ce mécanisme articulé fut réinventé par A. Peaucellier près de quatre-vingt-dix ans plus tard : c'est l'*inverseur de Peaucellier*. Il comprend six tiges; deux d'entre elles, de longueurs égales  $a$ , relient un point fixe  $O$  aux deux sommets opposés  $Q$  et  $R$  d'un losange  $PQP'R$  de côté  $b$  (inférieur à  $a$ ), dont les quatre sommets sont articulés par des charnières (voir fig. 5.3C). Lorsque l'on fait décrire à  $P$  une figure donnée, le sommet  $P'$ , auquel on a fixé un crayon, en décrira la figure inverse; car, si  $X$  désigne le centre du losange, on a :

$$\begin{aligned} OP \times OP' &= (OX - PX)(OX + PX) = \overline{OX}^2 - \overline{PX}^2 \\ &= \overline{OX}^2 - [\overline{PR}^2 - \overline{RX}^2] = \overline{OR}^2 - \overline{PR}^2 \\ &= a^2 - b^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire une quantité constante. Naturellement, d'après la construction même de l'inverseur, les tracés obtenus restent dans la couronne limitée par les deux cercles de centre  $O$  et de rayons  $a + b$  et  $a - b$ .

En particulier, si une septième tige  $SP$  relie  $P$  à un point fixe  $S$  dont la distance à  $O$  est égale à  $SP$ , le point  $P$  devra décrire un cercle passant par  $O$ , et, par suite,  $P'$  décrira une droite ou, plus exactement ici, un segment rectiligne. L'inverseur de Peaucellier permet donc de résoudre le vieux problème de la construction d'une droite sans recours à une règle (dont, remarquons le, la linéarité dépend théoriquement de la construction préalable d'une autre droite).

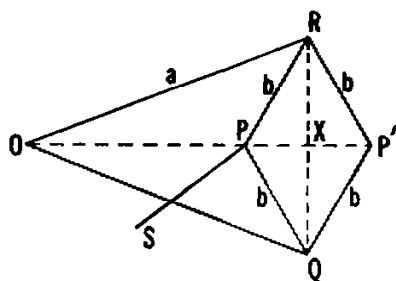


Fig. 5.3C

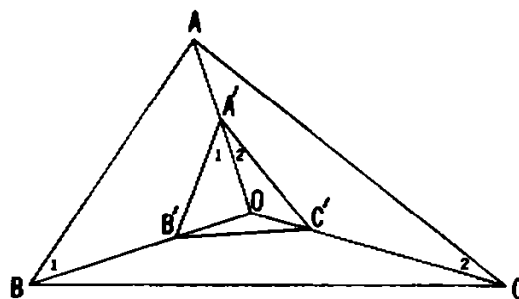


Fig. 5.3D

Un triangle a généralement pour inverse une figure bizarre composée d'arcs de trois cercles passant par  $O$ . Bornons-nous, cependant, à étudier les *sommets*  $A, B, C$  de ce triangle : si l'on désigne leurs inverses par  $A', B', C'$  (voir la figure 5.3D), il y a, entre le point  $O$  et les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$ , quelques relations intéressantes. Supposons donc, pour simplifier, que  $O$  soit situé à l'intérieur de  $ABC$ . Des égalités

$$OA \times OA' = k^2 = OB \times OB',$$

il résulte que les triangles  $OA'B'$  et  $OBA$  sont semblables et que les angles notés 1 (fig. 3.5D) sont égaux. Il en est d'ailleurs de même pour les angles marqués 2. On voit donc aisément que l'angle  $\widehat{BOC}$  est égal à la somme des angles en  $A$  et  $A'$  des triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$ , respectivement. En effet, d'une part,

$$\widehat{BOC} = 1 + \widehat{A'B'O} + 2 + \widehat{A'C'O}$$

et, d'autre part,

$$\widehat{A'B'O} = \widehat{BAO} \quad \text{et} \quad \widehat{A'C'O} = \widehat{CAO}.$$

Il s'ensuit donc que

$$\widehat{BOC} = 1 + 2 + \widehat{BAO} + \widehat{CAO} = \widehat{B'A'C'} + \widehat{BAC}.$$

On a, de même

$$\widehat{COA} = B + B'.$$

Ainsi, étant donné un triangle  $ABC$ , nous pouvons déterminer la position de  $O$  de façon à obtenir un triangle  $A'B'C'$  dont les angles  $A'$  et  $B'$  ont des valeurs choisies d'avance. Une fois le point  $O$  trouvé, on pourra faire varier  $k$ , et, par là même, les dimensions du triangle  $A'B'C'$  (voir Exercice 7). Si le point  $O$  n'était pas à l'intérieur de  $ABC$ , de petits changements suffiraient; les points  $A, B, C$  pourraient même être alignés. D'où le théorème suivant :

**Théorème 5.31** — *En prenant un cercle d'inversion de rayon convenable, les inverses de trois points  $A, B, C$ , distincts, pourront être les sommets d'un triangle  $A'B'C'$  égal à un triangle donné.*

### Exercices

- 1 - Construire la figure inverse d'un carré circonscrit au cercle d'inversion.
- 2 - Pour quelles positions de  $O$  les côtés d'un triangle donné seront-ils transformés en trois cercles égaux ?
- 3 - Etant donné le cercle d'inversion  $\omega$ , de centre  $O$ , et un point  $P$  quelconque distinct de  $O$ , construire l'inverse de  $P$  en n'utilisant que le compas, donc sans règle <sup>(1)</sup>,
  - a) lorsque  $OP > k/2$ ;
  - b) lorsque  $\frac{k}{2n} < OP \leq \frac{k}{2(n-1)}$ .
- 4 - Quelle relation y a-t-il entre un triangle  $ABC$  et son inverse  $A'B'C'$  lorsque le centre d'inversion  $O$  est :
  - a) le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ ,
  - b) l'orthocentre de  $ABC$ ,
  - c) le centre du cercle inscrit dans  $ABC$  ?
- 5 - Un point  $(x, y)$  étant situé à l'intérieur du cercle
 
$$x^2 + y^2 = k^2,$$
 trouver les coordonnées de son inverse par rapport à ce cercle.

<sup>(1)</sup> En utilisant l'inversion, on peut montrer que toutes les constructions faites avec une règle et un compas peuvent, en fait, être obtenues avec seulement un compas.

- 6 - Etant donné deux triangles  $ABC$  et  $DEF$ , indiquer sommairement la construction permettant de déterminer le centre  $O$  et le rayon  $k$  du cercle d'inversion, de telle sorte que les inverses  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  de  $A$ ,  $B$  et  $C$  forment un triangle égal à  $DEF$ .

#### 5.4. INVERSION DANS LE PLAN

Comme nous l'avons déjà vu, tout cercle passant par  $O$  (ce point étant exclu) a pour inverse une droite, et tout cercle de centre  $O$  a pour inverse un cercle concentrique. Mais il est naturel de se demander ce qui arrive lorsque le cercle occupe d'autres positions. Aussi, à titre de premier pas dans cette voie, nous allons chercher comment la distance entre deux points est modifiée par l'inversion.

**Théorème 5.41** — *Etant donné d'une part un cercle d'inversion de centre  $O$  et de rayon  $K$ , d'autre part un couple de points  $A$ ,  $B$  et le couple de leurs inverses  $A'$ ,  $B'$ , on a la relation suivante :*

$$A'B' = \frac{k^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}.$$

En effet, les triangles  $OAB$  et  $OB'A'$  étant semblables (voir fig. 5.4A), on peut écrire

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA \times OA'}{OA \times OB} = \frac{k^2}{OA \times OB}.$$

Il s'ensuit aisément que l'inversion conserve le rapport anharmonique de quatre points, comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 5.42** — *Si quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ont pour inverses respectifs  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ , on a :*

$$(A'B'C'D') = (ABCD).$$

En effet :

$$\begin{aligned} (A'B'C'D') &= \frac{\overline{A'C'} \times \overline{B'D'}}{\overline{A'D'} \times \overline{B'C'}} = \frac{\frac{k^2 \overline{AC}}{\overline{OA} \times \overline{OC}} \times \frac{k^2 \overline{BD}}{\overline{OB} \times \overline{OD}}}{\frac{k^2 \overline{AD}}{\overline{OA} \times \overline{OD}} \times \frac{k^2 \overline{BC}}{\overline{OB} \times \overline{OC}}} \\ &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{\overline{AD} \times \overline{BC}} = (ABCD). \end{aligned}$$

Ce résultat entraîne, à son tour, que l'inversion conserve la séparation de couples de points.

**Théorème 5.43** — *Si quatre points  $A, B, C, D$  ont pour inverses respectifs  $A', B', C', D'$ , et si  $AC \parallel BD$ , il en résulte  $A'C' \parallel B'D'$ .*

En recourant aux théorèmes 5.21 et 5.42, on voit que la relation  $AC \parallel BD$  implique les suivantes :

$$(A'D'B'C') + (A'B'D'C') = (ADBC) + (ABDC) = 1,$$

d'où il s'ensuit :  $A'C' \parallel B'D'$ .

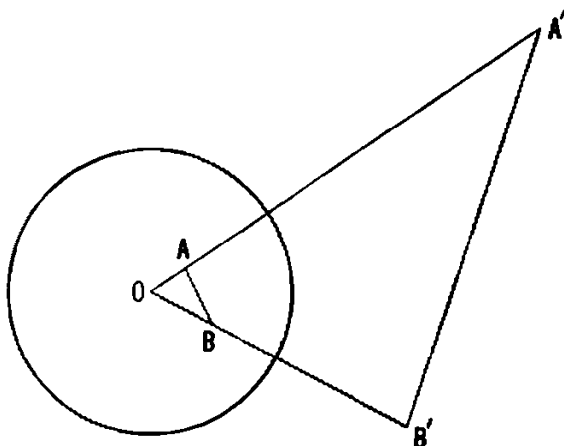


Fig. 5.4A

Nous avons vu, à la fin du paragraphe 5.2, que l'on peut définir tout cercle donné comme étant formé par trois de ses points,  $A, B, C$ , et par tous les points  $X$  satisfaisant à l'une des relations  $BC \parallel AX$ ,  $CA \parallel BX$  et  $AB \parallel CX$ . Il en résulte que l'inverse d'un cercle donné sera formé par  $A', B', C'$  et par tous les points  $X'$  satisfaisant à l'une des relations  $B'C' \parallel A'X'$ ,  $C'A' \parallel B'X'$ ,  $A'B' \parallel C'X'$ ; cet inverse est donc le cercle (ou la droite)  $A'B'C'$ , et il n'est une droite que si le cercle donné passe par  $O$ . Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

**Théorème 5.44** — *L'inverse de tout cercle ne passant pas par  $O$  est un cercle ne passant pas par  $O$ .*

La définition d'un cercle (ou d'une droite) en fonction de la séparation de couples de points suggère que nous pourrions utilement modifier notre terminologie de façon à ce qu'une *droite* soit un cas particulier d'un *cercle*, c'est-à-dire qu'elle soit considérée comme un cercle de rayon



infiniment grand. Nous conviendrons également d'ajouter au plan euclidien un seul *point à l'infini*,  $P_\infty$ , qui est l'inverse du centre de tout cercle d'inversion; et nous appellerons *plan d'inversion* ce plan ainsi complété. De plus, un cercle de centre  $O$  transformant tout cercle passant par  $O$  en une droite, nous considérerons une droite comme un cercle passant par le point  $P_\infty$ . De même, deux cercles tangents l'un à l'autre en  $O$  ayant pour inverses deux droites parallèles, deux droites parallèles seront considérées comme deux cercles tangents l'un à l'autre en  $P_\infty$ . Ces conventions étant faites, nous pouvons associer le théorème 5.44 aux résultats du paragraphe 5.3 de façon à obtenir, pour le plan d'inversion, le théorème que voici.

**Théorème 5.45** — *L'inverse de tout cercle est un cercle.*

L'addition du point  $P_\infty$  au plan euclidien nous permet maintenant d'affirmer que l'inversion est une transformation biunivoque étendue à tout le plan d'inversion : tout point (sans exception cette fois) a un inverse, et tout point est l'inverse d'un autre point.

On dit que deux cercles *se coupent*, *sont tangents* ou *ne se coupent pas* suivant que le nombre de leurs points communs est 2, 1 ou 0. Il en résulte donc qu'un couple de cercles de l'un quelconque de ces trois types a pour inverse un couple du même type — en comprenant, parmi les couples de « cercles tangents », soit un cercle et une tangente, soit, aussi bien, deux droites parallèles.

## Exercices

- 1 - Soient  $A$  un point quelconque extérieur au cercle  $\omega$ ,  $A'$  son inverse et  $P$  un point variable situé sur  $\omega$  : montrer que le rapport  $PA/PA'$  est constant. Réciproquement, soient  $B$  et  $C$  deux points situés sur la droite  $AA'$ , l'un entre  $A$  et  $A'$ , l'autre extérieur à  $AA'$ , et dont les distances à  $A$  et  $A'$  sont dans le même rapport (différent de 1, comme dans l'exercice 3a) du paragraphe 5.1) : le cercle ayant  $BC$  pour diamètre est le lieu des points dont les distances à  $A$  et  $A'$  sont aussi dans le même rapport (on appelle ce lieu le *cercle d'Apollonius*).
- 2 - Soient un point  $A$  quelconque du cercle  $\omega$  et un diamètre quelconque  $BC$  de ce cercle : si l'on joint  $A$  à  $B$  et  $C$ , les droites  $AB$  et  $AC$  coupent le diamètre perpendiculaire à  $BC$  en des points  $P$  et  $P'$  tels que  $P'$  soit l'inverse de  $P$ .
- 3 - Par deux points quelconques intérieurs à un cercle, on ne peut faire passer que deux cercles tangents au cercle donné.

- 4 - De trois points quelconques, distincts comme centres, on peut décrire trois cercles dont chacun est tangent aux deux autres. Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les distances entre ces points pris deux à deux, on voit aisément que les rayons des cercles sont  $s - a$ ,  $s - b$ ,  $s - c$  avec  $s = 1/2 (a + b + c)$ . (Les trois points ci-dessus ne forment pas nécessairement un triangle et peuvent être alignés.) Il existe alors exactement deux cercles tangents aux trois cercles précédents; ils n'ont pas de points communs (on les appelle les *cercles de Soddy*.)
- 5 - En utilisant l'inversion, donner une démonstration rapide du théorème 5.12.
- 6 - Etant donné le cercle d'inversion  $\omega$  de centre  $O$ , l'inverse d'un cercle  $\alpha$  passant par  $O$  est l'axe radical de  $\omega$  et de  $\alpha$  (voir paragraphe 2.2).
- 7 - En considérant une droite comme cas particulier d'un cercle, deux droites se coupant en un point se transforment-elles en deux cercles tangents, ou en deux cercles se coupant ? Justifier votre réponse en fonction du nombre des points communs aux droites données.

## 5.5 CERCLES ORTHOGONAUX

De la conservation des cercles, on passe immédiatement à la conservation des angles. Tout naturellement, en effet, on définit les deux angles supplémentaires formés par deux cercles qui se coupent comme étant

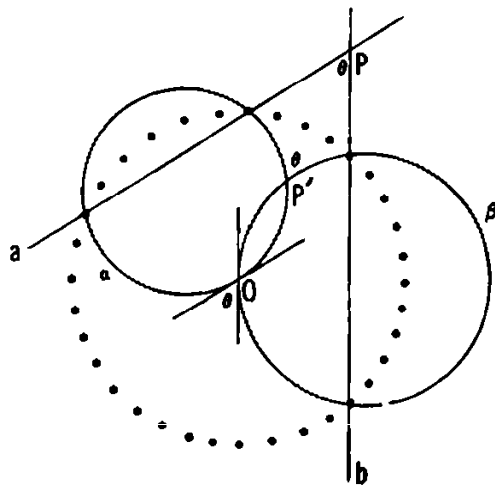


Fig. 5.5A

les angles que font leurs tangentes en l'un des points d'intersection; car, d'après la symétrie par rapport à la ligne des centres, les angles aux deux points d'intersection sont évidemment les mêmes.

Pour voir si l'inversion par rapport à un cercle de centre  $O$  modifie les angles, soit  $\theta$  l'un des angles que font deux droites  $a$  et  $b$  passant par un point  $P$  (voir fig. 5.5A). Or, précédemment, en discutant la figure 5.3B, nous avons vu que la droite  $a$  est transformée en un cercle  $d$  passant par  $O$ , et dont la tangente en  $O$  est parallèle à cette droite  $a$ . D'une manière analogue, la droite  $b$  a pour inverse un cercle  $\beta$  passant aussi par  $O$  où il a pour tangente une parallèle à  $b$ . D'autre part,  $\beta$  étant l'un des angles que font les tangentes à  $a$  et  $\beta$  en  $O$ , il est, par définition, l'un des angles sous lesquels ces deux cercles se coupent. Or, ces derniers se coupent non seulement en  $O$  mais aussi en  $P'$  qui est l'inverse de  $P$  : on retrouve donc le même angle en  $P'$ .

Si les droites  $a$  et  $b$  passaient par  $O$ , le lecteur verrait aisément comment il faut modifier la démonstration ci-dessus : dans ce cas, en effet,  $a$  et  $b$  sont leurs propres inverses, et l'invariance de  $\theta$  est évidente.

Si  $a$  et  $b$  sont les tangentes de deux cercles passant par  $P$ , les inverses de ces derniers seront tangents à  $a$  et  $\beta$ , respectivement, en  $P'$ . D'où le théorème suivant :

**Théorème 5.51** — *Si deux cercles se coupent sous un angle  $\theta$ , leurs inverses se coupent sous le même angle.*

On dit que deux cercles sont *orthogonaux* si, en leurs deux points d'intersection, ils se coupent à angle droit, leurs tangentes en ces points étant, par suite, orthogonales. Il en résulte le cas particulier suivant au théorème 5.51 :

**Théorème 5.52** — *Des cercles orthogonaux ont pour inverses des cercles orthogonaux.*

Si, sur la figure 2.1B, on admet que  $P$  est le pôle d'inversion, avec la notion habituelle  $O$ , on peut considérer le cercle représenté comme un cercle quelconque passant par deux points inverses l'un de l'autre,  $A$  et  $A'$ . Il en résulte alors :

$$k^2 = OA \times OA' = OB \times OB' = \overline{OT}^2;$$

et, par suite, toute autre sécante, telle que  $OB'B$ , déterminera un autre couple de points mutuellement inverses,  $B$  et  $B'$ . De plus, l'une ou l'autre des tangentes au cercle issues de  $O$ , par exemple  $OT$ , a un point de contact,  $T$ , qui est son propre inverse et se trouve donc, par là même, sur le cercle d'inversion  $\omega$ . D'où :

**Théorème 5.53** — *Tout cercle passant par deux points distincts, inverses l'un de l'autre par rapport au cercle  $\omega$ , est son propre inverse et est orthogonal à  $\omega$ .*

Réciproquement, tout cercle orthogonal à  $\omega$  est son propre inverse. Car s'il coupe  $\omega$  en  $T$  et que  $A$  soit un autre de ses points, la droite  $OA$  le coupe à nouveau en un point  $A'$  tel que

$$OA \times OA' = \overline{OT}^2 = k^2.$$

De plus, si deux cercles orthogonaux à  $\omega$  se coupent, leurs points communs sont les inverses l'un de l'autre. Car si  $A$  est l'un de ces points, la droite  $OA$  coupe à nouveau chaque cercle en un point  $A'$  qui est l'inverse de  $A$ .

Les remarques ci-dessus nous permettent, finalement, de donner de l'inversion cette autre définition qui fait appel aux cercles orthogonaux, et repose sur la notion d'« inverse » :

*Tout point de  $\omega$  est son propre inverse ; et l'inverse de tout autre point  $P$  est le second point d'intersection de deux cercles quelconques passant par  $P$  et orthogonaux à  $\omega$ .*

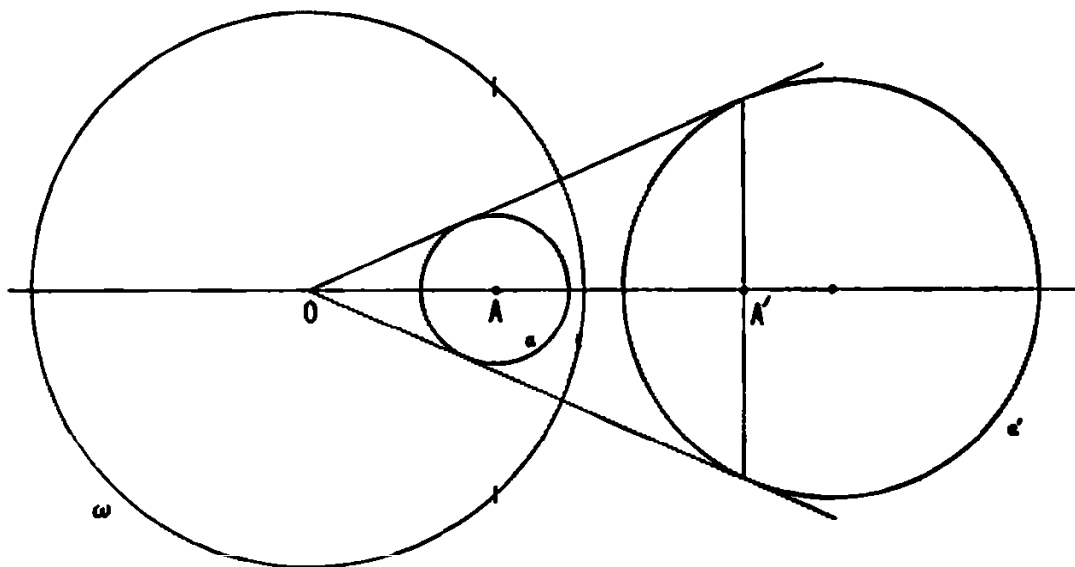


Fig. 5.5B

Si nous remplaçons  $\omega$  par une droite, nous déduisons de la définition ci-dessus que l'on est fondé à considérer la symétrie par rapport à une droite comme un cas particulier de l'inversion par rapport à un cercle.

D'après cette même définition, un cercle  $\alpha$  et deux points réciproquement inverses (par rapport à  $\alpha$ ) se transforment (par rapport à  $\omega$ ) en un cercle  $\alpha'$  et deux points inverses (par rapport à  $\alpha'$ ). Nous sommes maintenant en mesure d'associer les points de vue euclidien et « inverse » de façon à trouver comment l'inversion transforme le centre  $A$  de  $\alpha$ . Tout d'abord, nous pourrions nous attendre à ce que  $A$  ait pour inverse le centre de  $\alpha'$ ; mais ce serait vraiment trop simple ! (D'ailleurs, cela ne se produit même pas lorsque  $\alpha$  coïncide avec  $\omega$ ). En réalité,  $\alpha$  et les deux points  $A$  et  $P_\infty$  (inverses l'un de l'autre par rapport à  $\alpha$ ) sont transformés (par rapport à  $\omega$ ) en  $\alpha'$  et les deux points  $A'$  et  $O$  (réciproquement inverses par rapport à  $\alpha'$ ). Le point  $A'$  (inverse de  $A$  par rapport à  $\omega$ ) est donc, non pas le centre de  $\alpha'$  mais l'inverse de  $O$  (par rapport à  $\alpha'$ ). Voir, à ce sujet, la figure 5.5B.

### Exercices

- 1 - Etant donné un cercle  $\omega$  et un point  $A$  extérieur, construire le cercle de centre  $A$  qui est orthogonal à  $\omega$ .
- 2 - Etant donné un cercle  $\omega$ , et deux points,  $P$  et  $Q$ , qui ne sont pas les inverses l'un de l'autre, construire le cercle qui passe par  $P$  et  $Q$  en étant orthogonal à  $\omega$ .
- 3 - Etant donné un point  $P$ , et deux cercles,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , ne passant pas par  $P$ , construire le cercle qui passe par  $P$  en étant orthogonal à la fois à  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .
- 4 - Si le cercle  $\omega$  (de centre  $O$  et de rayon  $k$ ) transforme un cercle  $\alpha$  en un autre  $\alpha'$ , quelle relation y a-t-il entre les puissances de  $O$  par rapport à  $\alpha$  et  $\alpha'$  ?
- 5 - Etant donné un cercle quelconque  $\alpha$ , un point  $P$  situé sur  $\alpha$ , et un point  $O$  non situé sur  $\alpha$ , il n'existe qu'un seul cercle passant par  $O$  et tangent à  $\alpha$  en  $P$  (voir fig. 5.5C).

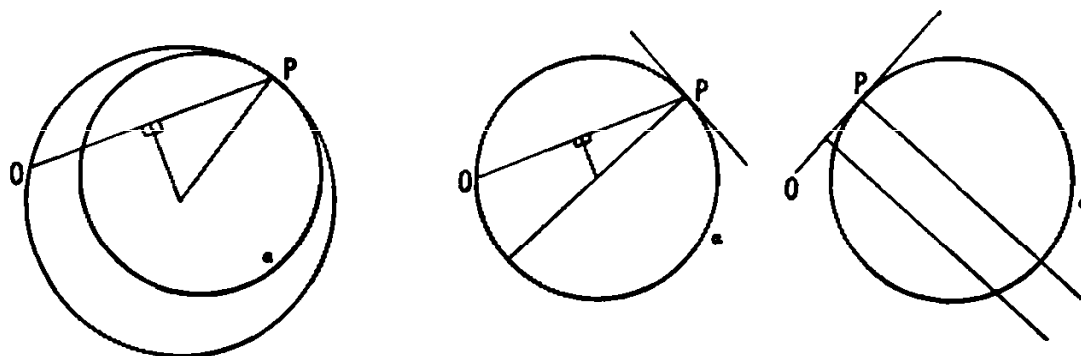


Fig. 5.5C

### 5.6. THÉORÈME DE FEUERBACH

A la fin du paragraphe 1.8, nous avons cité brièvement le théorème de Feuerbach; de trois façons, au moins, on peut utilement recourir à l'inversion pour le démontrer. Voici l'une d'elles; mais, tout d'abord, rappelons l'énoncé de ce théorème sous la forme suivante :

**Théorème 5.61** — *Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit dans ce triangle et aux trois cercles ex-inscrits.*

Sur la figure 5.6A, on voit : le triangle  $ABC$  et son triangle complémentaire  $A'B'C'$ ; le cercle inscrit, de centre  $I$ , qui est tangent à  $BC$  en  $X$ ; l'un des cercles ex-inscrits, de centre  $I_a$ , qui est tangent à  $BC$  en  $X_a$ ; enfin l'autre tangente commune,  $B_1C_1$ , à ces deux cercles qui, tous les deux, sont tangents aux trois côtés du triangle  $ABC$ . On voit également le cercle  $\omega$  décrit sur  $XX_a$  comme diamètre, et les points  $S, B'', C''$ , où  $B_1C_1$  coupe  $BC, A'B', A'C'$ , respectivement. Le cercle  $\omega$  étant orthogonal aux cercles de centres  $I$  et  $I_a$ , ces derniers sont leurs propres inverses dans une inversion par rapport à  $\omega$ . Nous allons maintenant démontrer que  $\omega$  transforme le cercle des neuf points,  $A'B'C'$ , en la droite  $B_1C_1$ .

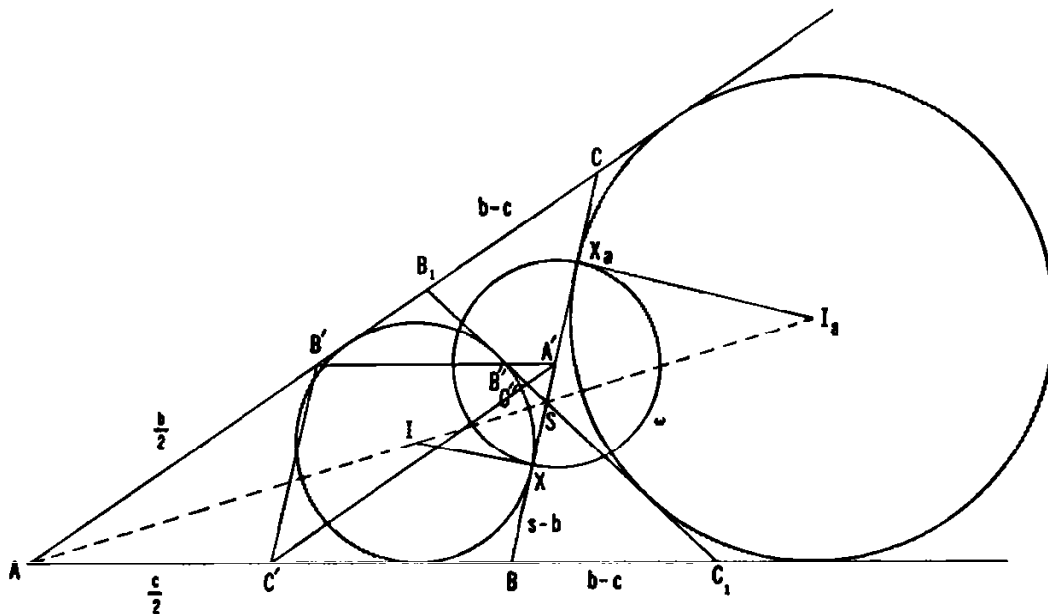


Fig. 5.6A

D'après le théorème 1.41 et les remarques qui le suivent, on a, en fonction de  $s = 1/2 (a + b + c)$  :

$$BX = X_aC = s - b.$$

Il s'ensuit que le centre de  $\omega$  est  $A'$ , milieu de  $BC$ , et que le diamètre de  $\omega$  est

$$XX_a = a - 2(s - b) = b - c.$$

(Nous supposons que cette quantité est positive; sinon il y aurait lieu de distribuer les lettres  $A, B, C$  pour qu'il en soit ainsi). Le cercle des neuf points passant par le centre  $A'$  de  $\omega$ , une inversion par rapport à  $\omega$  le transforme en une droite. Nous allons montrer que cette droite passe par  $B''$  et  $C''$  (donc par  $B_1$  et  $C_1$ ), et cela, en faisant observer que  $B''$  et  $C''$  sont les inverses, dans une transformation par rapport à  $\omega$ , des points  $B'$  et  $C'$  du cercle des neuf points.

En effet, le point  $S$  étant situé (comme, d'ailleurs,  $I$  et  $I_a$ ) sur la bissectrice de l'angle  $A$ , le théorème 1.33 indique que ce point divise le segment  $CB$  (de longueur  $a$ ) dans le rapport  $b/c$ . Par suite :

$$CS = \frac{ab}{b+c} \quad \text{et} \quad SB = \frac{ac}{b+c},$$

la demi-différence de ces deux longueurs étant

$$SA' = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}.$$

De plus :  $BC_1 = AC_1 - AB = AC - AB = b - c$ ; et, de même,  $CB_1 = b - c$ .

D'autre part, les triangles  $SA'B''$  et  $SBC_1$  sont semblables; comme le sont aussi les triangles  $SA'C''$  et  $SCB_1$ .

Il en résulte donc successivement :

$$\frac{A'B''}{b-c} = \frac{A'B''}{BC_1} = \frac{SA'}{SB} = \frac{b-c}{2c},$$

$$\frac{A'C''}{b-c} = \frac{A'C''}{CB_1} = \frac{SA'}{SC} = \frac{b-c}{2b},$$

$$A'B' \times A'B'' = \frac{c}{2} \frac{(b-c)^2}{2c} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2,$$

$$A'C' \times A'C'' = \frac{b}{2} \frac{(b-c)^2}{2b} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Le cercle  $\omega$ , dont le rayon est  $1/2(b - c)$  transforme donc  $B'$  en  $B''$  et  $C'$  en  $C''$ , comme nous voulions le montrer.

En fait, dans la transformation par rapport à  $\omega$ , le cercle inscrit et le cercle ex-inscrit sont leurs propres inverses, tandis que leur tangente commune a pour inverse le cercle des neuf points. Il en résulte que — comme cette tangente — le cercle des neuf points est tangent aux deux cercles  $I$  et  $I_a$ , et aussi, pour des raisons analogues, aux deux autres cercles ex-inscrits.

Signalons, en passant, que le cercle des neuf points est déterminé par les points  $D, E, F$  (voir fig. 2.4B), où se coupent les couples de côtés opposés du quadrangle d'orthocentrique  $ABCH$  (voir la fin du paragraphe 2.4). En d'autres termes, les triangles  $ABC, BCH, CAH, ABH$  ont tous le même cercle des neuf points, bien que chacun d'eux ait son propre ensemble des quatre cercles tritangents. Ainsi, le quadrangle orthocentrique détermine un ensemble de seize cercles, tous tangents au cercle  $DEF$ .

### Exercices

- 1 - Montrer que, dans la figure 5.6A, la droite  $B_1C_1$  coupe le côté  $BC$  sous un angle égal à  $B - C$ .
- 2 - Dans la transformation par le cercle  $\omega$ , l'inverse du point  $S$  (voir fig. 5.6A) est le point  $D$  (non représenté sur la figure), pied de la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur  $BC$ .

## 5.7. FAISCEAUX DE CERCLES <sup>(1)</sup>

Nous avons déjà vu, au paragraphe 2.3, que deux cercles non concentriques quelconques,  $\alpha$  et  $\beta$ , appartiennent à un *faisceau de cercles*  $\alpha\beta$  tel que l'axe radical de  $\alpha$  et  $\beta$  coïncide avec l'axe radical de deux cercles quelconques appartenant au faisceau. Tout point  $P$  de l'axe radical a même puissance par rapport à tous les cercles du faisceau. Si cette puissance est positive, sa racine carrée mesure la longueur des tangentes menées par  $P$  à l'un quelconque des cercles, et ces tangentes sont les rayons des cercles de centre  $P$  et orthogonaux à tous les cercles du faisceau. Deux cercles quelconques,  $\gamma$  et  $\delta$  (orthogonaux à tout cercle du

<sup>(1)</sup> A ce sujet, voir notamment, E. ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE, *op. cit.* — Tome I, p. 277-281, et R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* — G., p. 113-119.



faisceau  $\alpha\beta$ ) appartiennent à un faisceau conjugué  $\gamma\delta$  tel qu'un cercle quelconque de l'un de ces deux faisceaux et un cercle quelconque de l'autre soient orthogonaux. De plus, à chaque faisceau correspond, d'une part, un axe radical sur lequel sont situés les centres des cercles de l'autre faisceau, et, d'autre part, la droite passant par les centres des cercles qui le composent : ces deux droites sont naturellement perpendiculaires. Si nous les prenons comme axes de coordonnées, comme au paragraphe 2.3, les équations des cercles seront alors :

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2by - c = 0,$$

$c$  étant fixe, tandis que  $a$  et  $b$  sont variables. Si  $c > 0$ , le premier faisceau comprend des cercles *sans points communs*, comme dans le cas de la figure 2.3A; tandis que le second faisceau comprend des cercles *se coupant* et passant tous par les *points limites*  $(\pm \sqrt{c}, 0)$ , cercles que l'on peut considérer comme des cercles dégénérés du premier faisceau, leurs équations étant :

$$(x - \sqrt{c})^2 + y^2 = 0 \quad \text{et} \quad (x + \sqrt{c})^2 + y^2 = 0.$$

Si, maintenant, on a  $c < 0$ , la même disposition se présente, mais après rotation d'un angle droit autour de l'origine des coordonnées : les cercles du premier faisceau se coupent, tandis que ceux du second faisceau ne se coupent pas. Enfin, lorsque  $c = 0$ , on a deux faisceaux orthogonaux de cercles *tangents* qui, tous, sont tangents à l'un des axes de coordonnées, à l'origine.

L'ordre dans lequel se succèdent les cercles sans points communs d'un faisceau est déterminé par l'ordre même des points où ces cercles coupent le segment rectiligne joignant les points limites : il nous permet de dire, d'une façon précise, lequel, de trois cercles, est situé « entre » les deux autres.

En recourant à la réciprocity, on peut définir le faisceau  $\alpha\beta$  comme formé par tous les cercles orthogonaux à  $\gamma$  et  $\delta$ , et le faisceau  $\gamma\delta$  comme formé par tous les cercles orthogonaux à  $\alpha$  et  $\beta$ . En d'autres termes, le faisceau  $\alpha\beta$  comprend tous les cercles orthogonaux à deux quelconques des cercles distincts orthogonaux à  $\alpha$  et  $\beta$ .

Si deux cercles  $\gamma$  et  $\delta$  se coupent en deux points  $O$  et  $P$ , l'inversion par rapport à tout cercle de centre  $O$  donne deux droites passant par  $P'$ , l'inverse de  $P$ . Les cercles orthogonaux à ces droites forment un « faisceau » de cercles concentriques de centre  $P'$ , et le faisceau  $\gamma\delta$  a pour inverse l'ensemble des diamètres de ces derniers. En considérant deux

cercles quelconques ne se coupant pas,  $\alpha$  et  $\beta$ , on en déduirait les mêmes conséquences. Il nous est facile, en effet, de trouver deux cercles,  $\gamma$  et  $\delta$  se coupant (voir fig. 5.7A) qui soient orthogonaux à la fois à  $\alpha$  et à  $\beta$ , c'est-à-dire deux cercles de rayons convenables, dont les centres sont situés sur l'axe radical de  $\alpha$  et  $\beta$ . Il en résulte le théorème suivant :

**Théorème 5.71** — *On peut, par inversion, transformer deux cercles quelconques ne se coupant pas en deux cercles concentriques.*

Pour cette transformation, le cercle d'inversion peut être un cercle quelconque ayant pour centre l'un ou l'autre des points limites  $O$  et  $P$  du faisceau  $\alpha\beta$  de cercles non sécants. Si  $\alpha$  est antérieur à  $\beta$  dans l'ordre naturel menant de  $O$  à  $P$ , un cercle quelconque de centre  $O$  (ou  $P$ ) transformera  $\alpha$  en le plus grand (ou le plus petit) des cercles concentriques. Si l'on fait varier le rayon du cercle d'inversion en laissant son centre fixe, ou substitue, à un couple de cercles concentriques, un autre couple dont les rayons varient dans le même rapport : la nouvelle inversion équivaut, en effet, au produit de la première et d'une homothétie convenable,

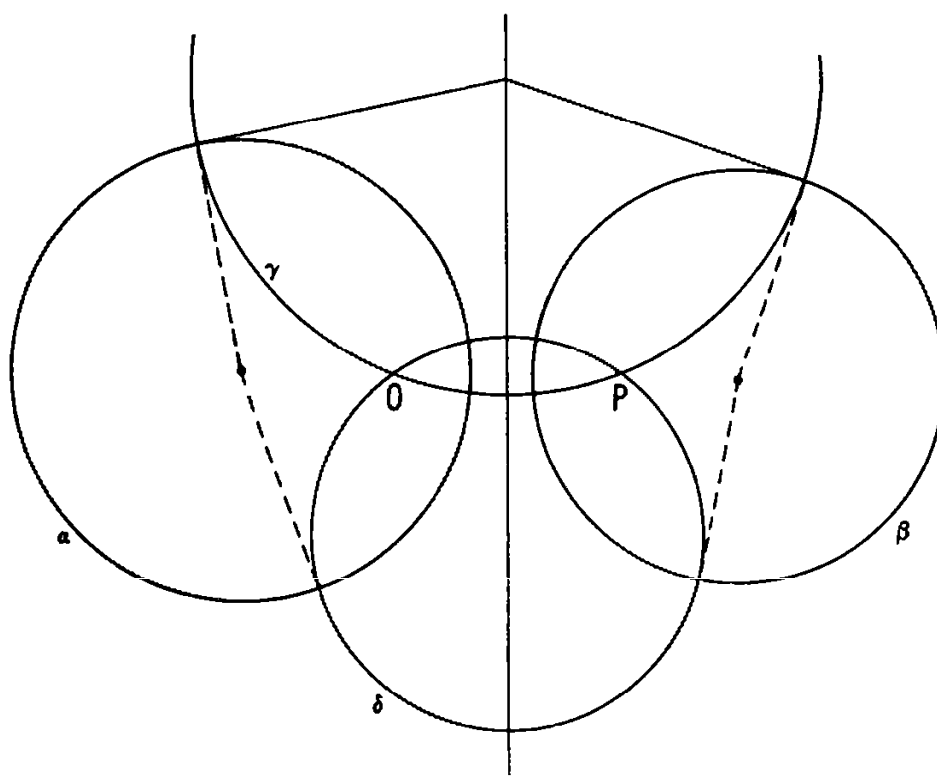


Fig. 5.7A

De plus, si le cercle d'inversion a  $P$  comme centre, au lieu de  $O$ , on substitue, à un couple de cercles concentriques, un autre couple dont les rayons sont dans le rapport inverse.

Si  $\alpha$  et  $\omega$  sont deux cercles, quelconques mais distincts, l'inverse de  $\alpha$  par rapport à  $\omega$  appartient au faisceau  $\alpha\omega$  : deux cercles quelconques orthogonaux à la fois à  $\alpha$  et à  $\omega$  sont, en effet, leurs propres inverses. Lorsque  $\alpha$  se transforme en  $\beta$ , nous dirons que  $\omega$  est un cercle « bissecteur » <sup>(1)</sup> de  $\alpha$  et de  $\beta$ , cette dénomination semblant plus naturelle que celle, employée parfois, de « cercle de similitude inverse ». Le cercle  $\beta$  appartenant au faisceau  $\alpha\omega$ ,  $\omega$  appartient au faisceau  $\alpha\beta$ . Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la réciproque suivante du théorème 5.45 :

**Théorème 5.72** — *Deux cercles quelconques ont, au moins, un cercle bissecteur : s'ils sont tangents ou ne se coupent pas, ils n'en ont qu'un ; s'ils se coupent, ils en ont deux, orthogonaux l'un à l'autre.*

En effet, si  $\alpha$  et  $\beta$  se coupent, on peut, par une inversion, les transformer en deux droites qui se coupent ; et ces dernières sont leurs symétriques réciproques par rapport à l'une ou l'autre des bissectrices des angles qu'elles forment. Une nouvelle inversion montre ensuite que les cercles  $\alpha$  et  $\beta$ , qui se coupent, ont deux cercles bissecteurs, orthogonaux l'un à l'autre, et qui sont tangents aux bissectrices des angles formés par  $\alpha$  et  $\beta$  à leurs points d'intersection.

D'autre part, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont tangents, une inversion peut les transformer en deux droites parallèles : ils n'ont donc qu'un seul cercle bissecteur.

Enfin, si  $\alpha$  et  $\beta$  ne se coupent pas, on peut les transformer en cercles concentriques de rayons  $a$  et  $b$ , par exemple. Si on transforme ces derniers par rapport à un cercle concentrique de rayon  $\sqrt{ab}$ , ils se permuteront. Une nouvelle inversion montre alors que les cercles non sécants  $\alpha$  et  $\beta$  ont (comme les cercles tangents) un seul cercle bissecteur. Et si  $\alpha$  et  $\beta$  sont égaux, leur bissecteur coïncide avec leur axe radical.

### Exercices

- 1 - Quelle relation doit-il exister entre  $c$  et  $c'$  pour que les deux cercles  

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2by + c' = 0$$
soient orthogonaux ?

<sup>(1)</sup> Voir R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* - G., p. 165 et C., p. 326.

- 2 - Le rayon du cercle bissecteur de deux cercles tangents (du même côté de leur tangente commune) est égal à la moyenne harmonique des rayons des deux cercles donnés.
- 3 - Lorsque deux faisceaux orthogonaux de cercles tangents sont transformés en prenant un cercle d'inversion dont le centre est le point commun à tous ces cercles, quelle conclusion peut-on en tirer ?
- 4 - Deux cercles quelconques peuvent être transformés en deux cercles égaux.
- 5 - L'axe radical de deux cercles égaux quelconques est un « cercle bissecteur ».
- 6 - Quatre points, quelconques mais distincts,  $A, B, C, D$ , peuvent être transformés en les sommets d'un parallélogramme  $A'B'C'D'$  (en comprenant le cas particulier d'un parallélogramme dégénéré dont les quatre sommets sont alignés, avec toujours,  $A'B' = D'C'$  et  $A'D' = B'C'$ ). *Conseil* : envisager séparément les trois cas suivants : 1°  $AC \parallel BD$ ; 2°  $AB \parallel CD$  ou  $AD \parallel BC$ ; 3°  $A, B, C, D$  ne sont pas situés sur un même cercle.
- 7 - Construire le cercle bissecteur de deux cercles non sécants donnés, de rayons différents. *Conseil* : Supposer que l'on sache comment (en recourant à l'exercice 3 du paragraphe 5.5) déterminer les points limites du faisceau de cercles  $\alpha\beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux cercles non sécants, mais de centres différents.

## 5.8. ECART INVERSIF

Des bissectrices se transformant en bissectrices, l'un ou l'autre des cercles bissecteurs de deux cercles *sécants* sera la « bissectrice » de l'un des *angles* formés par ces deux cercles. Il est donc raisonnable de se demander si, d'une manière analogue, deux cercles *non sécants* ne détermineraient pas quelque « propriété numérique » qui soit partagée également par leur unique cercle bissecteur. Une telle recherche nous oblige presque à imaginer un *écart inversif*  $(\alpha, \beta)$  caractérisant deux cercles  $\alpha$  et  $\beta$  non sécants, et tel que si un cercle  $\gamma$  appartient au faisceau  $\alpha\beta$ , et si  $\beta$  est situé entre  $\alpha$  et  $\gamma$ , on ait la relation :

$$(\alpha, \beta) + (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma). \quad (5.81)$$

Si le centre du cercle d'inversion est l'un des points limites, on obtiendra, dans une telle transformation, trois cercles concentriques dont les

rayons  $a, b, c$  satisfont à l'une des inégalités  $a > b > c$ , et  $a < b < c$ , et aussi à l'égalité

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}.$$

En observant que l'emploi des logarithmes transforme une multiplication en une addition, nous poserons :

$$(a, \beta) = \left| \lg \frac{a}{b} \right|, \quad (5.82)$$

c'est-à-dire  $\log (a/b)$  ou  $\lg (b/a)$  suivant que l'on a  $a > b$  ou  $a < b$ . Pour ces cercles concentriques, l'équation (5.81) est manifestement satisfaite.

On pourrait interpréter le signe «  $\lg$  » ci-dessus comme signifiant « logarithme de base 10 », ce qui conduirait à écrire la relation  $x = \lg y$  sous la forme  $y = 10^x$ . Cependant, l'habitude d'employer la base 10 a pour origine cette observation non mathématique que la plupart des gens ont dix doigts (pouces compris). Il est donc plus « mathématique » de remplacer 10 par le nombre transcendant

$$e = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,7182818284590 \dots;$$

de sorte que la relation  $x = \log y$  (que l'on écrit parfois  $\ln y$ , par abréviation de logarithme « naturel » de  $y$ ) signifie :

$$y = e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

et le logarithme naturel lui-même est exprimé par la série

$$\lg (1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots.$$

Convenons maintenant de définir l'écart inversif entre deux cercles non sécants quelconques comme étant *le logarithme naturel du rapport des rayons (le plus grand étant au numérateur) de deux cercles concentriques en lesquels on peut transformer les cercles donnés.*

Des cercles concentriques se transformant en cercles appartenant à un faisceau, un tel « écart » est additif, au sens de l'équation (5.81), pour les cercles d'un même faisceau. En particulier, *le cercle bissecteur de deux cercles non sécants quelconques passe à mi-écart inversif de ces derniers.*

De plus, en admettant que deux droites parallèles représentent un cas limite de deux cercles concentriques, on voit que l'on est fondé à considérer comme nulle l'écart inversif de deux cercles tangents.

Soient maintenant deux cercles non concentriques, dont l'un est intérieur à l'autre. Si l'on décrit alors d'autres cercles (voir fig. 5.8A) de telle sorte qu'ils soient tangents entre eux successivement et, à la fois, aux deux cercles donnés, il peut arriver que cette suite de  $n$  cercles se ferme sur elle-même, le premier étant tangent au dernier. Ainsi, n'importe lequel des cercles pourra être considéré comme étant le premier de la suite. Un tel résultat est connu sous le nom de *porisme de Steiner* <sup>(1)</sup>; et le théorème 5.71 permet de le démontrer de façon très simple. Pour cela,

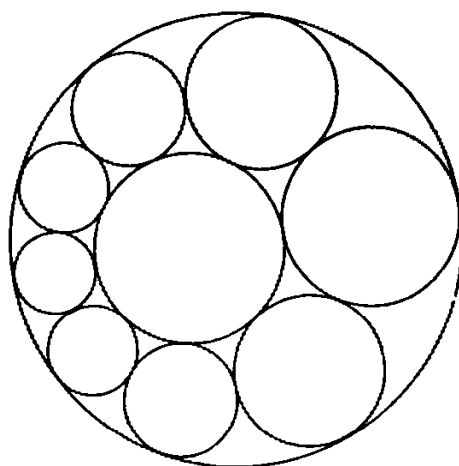


Fig. 5.8A

il suffit de transformer les deux cercles initiaux en cercles concentriques; les autres deviennent alors une suite de cercles égaux dont les centres forment un polygone régulier à  $n$  côtés, comme dans la figure 5.8B. Soient  $A$  l'un des centres,  $T$  le point de contact du cercle correspondant et de l'un des deux cercles voisins, et  $O$  le centre commun aux deux cercles concentriques, de rayons  $a$  (cercle extérieur) et  $b$  (cercle intérieur). Le triangle  $OAT$  est rectangle, et l'on a les relations

$$OA = (a + b)/2 \quad AT = (a - b)/2,$$

l'angle en  $O$  étant égal à  $\pi/n$  radians. Les rayons des deux cercles étant  $a$  et  $b$ , leur écart inversif,  $\delta = \lg(a/b)$  satisfait aux égalités :

<sup>(1)</sup> Voir Georges PAPELIER, *Exercices de géométrie moderne*, 1927, réédition Jacques Gabay, 1996, 9 tomes en 1 volume – Tome VI, *Inversion*, p. 79-83.

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{AT}{OA} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a/b)-1}{(a/b)+1} = \frac{e^\delta-1}{e^\delta+1}.$$

Le porisme de Steiner est donc exact chaque fois que l'écart inversif entre les deux cercles initiaux satisfait à la même équation

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{e^\delta-1}{e^\delta+1}.$$

En résolvant cette dernière par rapport à  $e^\delta$ , puis à  $\delta$ , il vient :

$$e^\delta = \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)} = \left( \frac{1 + \sin(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right)^2 = \left( \sec \frac{\pi}{n} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right)^2,$$

$$\delta = 2 \lg \left( \sec \frac{\pi}{n} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right). \quad (5.83)$$

Si, notamment,  $n = 4$ , on voit que deux cercles dont l'écart inversif est

$$2 \lg (\sqrt{2} + 1)$$

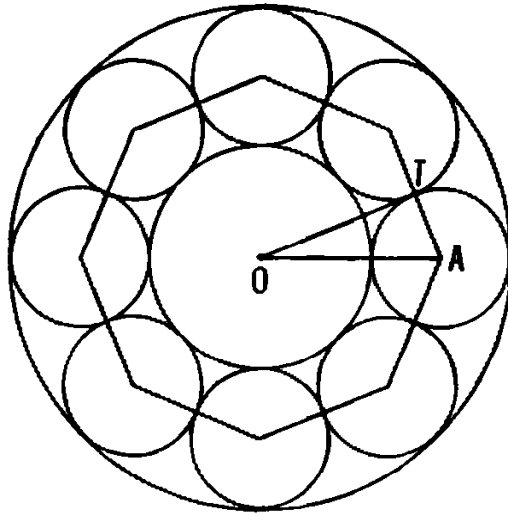


Fig. 5.8B

appartiennent à une « configuration » de six cercles dont chacun est tangent à quatre autres. Ces six cercles se répartissent en trois couples de cercles « opposés » de sorte que chaque cercle est tangent à tous les autres sauf à son propre opposé. L'écart inversif entre deux cercles opposés quelconques est égal à  $2 \lg (\sqrt{2} + 1)$ , tandis que les douze autres distances sont, naturellement, nulles.

Si la suite des cercles se referme après  $d$  tours au lieu d'un seul, le porisme de Steiner reste exact : il suffit alors de remplacer  $n$  par  $n/d$  dans les formules.

Un cercle pouvant avoir un rayon de valeur quelconque, et son centre étant déterminé par deux coordonnées <sup>(1)</sup>, l'ensemble de tous les cercles du plan euclidien et de leurs inverses, constitue une famille à trois paramètres dont chacun peut varier jusqu'à l'infini. Si l'on interprète cette triple infinité de cercles appartenant au plan d'inversion comme représentant les plans d'un espace à trois dimensions, on peut aboutir à la célèbre géométrie « non euclidienne » que Gauss, Bolyai et Lobatchevsky découvrirent, indépendamment les uns des autres, entre 1820 et 1830. Les angles que forment deux cercles sécants y deviennent les angles de deux plans qui se coupent suivant une droite; deux cercles tangents se transforment en deux plans « parallèles »; et l'écart inversif entre deux cercles non sécants devient la distance entre deux plans « non sécants » <sup>(2)</sup> qui ont, comme perpendiculaire commune, une droite le long de laquelle on mesure cette distance.

### Exercices

1 - Dans le porisme de Steiner, les points de contact de cercles adjacents appartenant à la suite de cercles se trouvent sur le cercle bissecteur des deux cercles initiaux. (En fait, on peut définir le cercle bissecteur — ou les cercles bissecteurs — de deux cercles quelconques  $\alpha$  et  $\beta$  comme le lieu des points  $P$  tels que deux cercles, tangents à la fois à  $\alpha$  et à  $\beta$ , sont tangents entre eux en  $P$ .)

2 - L'équation (5.83) équivaut à celle-ci :

$$\delta = 2 \lg \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right).$$

3 - Construire, d'une part, trois cercles égaux mutuellement tangents, d'autre part, un second ensemble de trois cercles répondant aux mêmes critères et dont chacun est, aussi, tangent à deux cercles du premier ensemble. Que sont les écarts inversifs entre ces six cercles ?

<sup>(1)</sup> Il est rappelé, à ce sujet, que le présent volume est consacré à la géométrie plane surtout (N.d.T.).

<sup>(2)</sup> « Ultraparallèle » dans le texte que l'on pourrait aussi traduire par « trans-parallèles » (N.d.T.).



### 5.9. FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Nous allons considérer maintenant l'analogie attrayante qui existe entre, d'une part, les fonctions trigonométriques des angles que forment les couples de cercles sécants, et, d'autre part, les fonctions, dites hyperboliques <sup>(1)</sup>, des écarts inversifs entre les couples de cercles non sécants. Le *sinus hyperbolique*, le *cosinus hyperbolique* et la *tangente hyperbolique* sont définis, en fonction de l'exponentielle  $e^x$ , par les formules

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

qui conduisent immédiatement aux relations :

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

La partie gauche du tableau ci-dessous donne d'autres identités résultant des formules ci-dessus, tandis que, dans la partie droite, on trouve les identités analogues de la trigonométrie.

$$\operatorname{sh} 0 = 0, \quad \operatorname{ch} 0 = 1$$

$$\operatorname{th} 0 = 0, \quad \operatorname{th} \infty = 1$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$$

$$\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}$$

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$$

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1$$

$$\operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

(<sup>1</sup>) La géométrie non euclidienne de Gauss, Bolyai et Lobatchewsky est appelée *géométrie hyperbolique*.

Voir Paul BARBARIN, *La Géométrie non euclidienne*, 3<sup>e</sup> éd., 1928, réédition Jacques Gabay, 1990.

Avec les notations ci-dessus, les équations (5.83) prennent la nouvelle forme

$$\operatorname{th} \frac{\delta}{2} = \sin \frac{\pi}{n}, \text{ ou } \operatorname{sh} \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \text{ ou } \operatorname{ch} \frac{\delta}{2} = \sec \frac{\pi}{n}.$$

Ce n'est peut-être pas pécher par excès d'imagination que de comparer le rôle des fonctions hyperboliques, en mathématiques, à celui du radical  $NH_4$  de l'ammonium, en chimie. Ce radical, en effet, se comporte comme un atome de sodium ou de potassium, bien qu'on puisse le décomposer en atomes d'azote et d'hydrogène. Tandis que, d'une façon un peu analogue, les fonctions hyperboliques se comportent comme des fonctions trigonométriques bien qu'on puisse les exprimer par des exponentielles. Nous reconnaissons, d'ailleurs, que cette incursion dans le domaine de la chimie aura peu d'attrait pour le lecteur connaissant les fonctions d'une variable complexe et comprenant le sens des formules :

$$\cos x = \operatorname{ch} ix, \quad i \sin x = \operatorname{sh} ix.$$

Revenons, maintenant, à notre discussion sur les angles formés par des couples de cercles, et les écarts entre ces derniers; et considérons deux cercles de rayons  $a$  et  $b$  tels que la distance (au sens habituel du mot) entre leurs centres soit égale à  $c$ . Si chacune des grandeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  est inférieure à la somme des deux autres, les cercles se coupent en deux points dont l'un ou l'autre forme, avec les deux centres, un triangle ayant pour côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . De plus, l'un ou l'autre des angles supplémentaires aux points où se coupent les cercles est égal à l'angle que forment les côtés  $a$  et  $b$  du triangle; et son cosinus est exprimé par la fraction bien connue :

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Essayons de trouver la signification géométrique de la même expression,

$$\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

lorsque l'une des grandeurs est, cette fois, supérieure à la somme des deux autres, de sorte que les cercles ne se coupent pas. Ces derniers pourraient, par exemple, être concentriques (d'où  $c = 0$ ), de sorte que les couples de points,  $AA'$  et  $BB'$ , qui sont les extrémités de deux diamètres,

satisfassent, en les supposant alignés, à la relation  $AB' \parallel A'B'$ , comme dans la figure 5.9A. En fonction de l'écart inversif

$$\delta = \lg(a/b),$$

le rapport anharmonique des quatre points  $A, A', B, B'$  a alors pour expression :

$$\begin{aligned} (AA'BB') &= \frac{\overline{AB} \times \overline{A'B'}}{\overline{AB'} \times \overline{A'B}} = \left( \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} \right)^2 = \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 = \left( \frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2\delta} + 1 - 2e^\delta}{e^{2\delta} + 1 + 2e^\delta} = \frac{e^\delta + e^{-\delta} - 2}{e^\delta + e^{-\delta} + 2} = \frac{\text{ch } \delta - 1}{\text{ch } \delta + 1}. \end{aligned}$$

Lorsque ces cercles sont les transformés par inversion de deux cercles non sécants dont les centres sont à la distance  $c$  l'un de l'autre (au sens ordinaire), il est commode de désigner les rayons de ces derniers par les

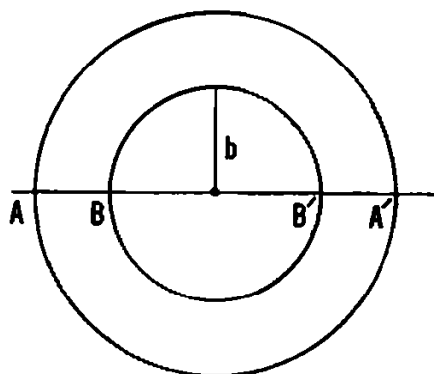


Fig. 5.9A

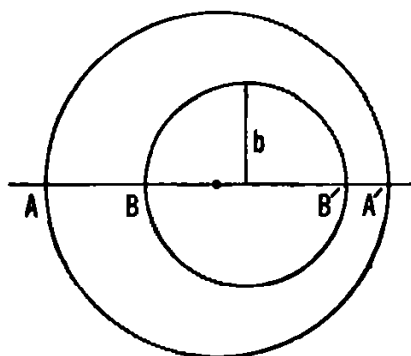


Fig. 5.9B

mêmes lettres  $a$  et  $b$ , et les points où ils coupent la ligne des centres par  $A, A', B, B'$  (avec  $AB' \parallel A'B$  comme plus haut). D'après les théorèmes 5.42 et 5.43, le rapport anharmonique et la séparation sont conservés; on a donc toujours

$$(AA'BB') = \frac{\text{ch } \delta - 1}{\text{ch } \delta + 1},$$

bien qu'il nous faille, maintenant, exprimer ce rapport (donc  $\delta$ ) en fonction des nouvelles grandeurs  $a, b$  et  $c$ . Dans le cas de la figure 5.9B, c'est-à-dire  $a - b > c$ , on a :

$$\begin{aligned}
 (AA'BB') &= \frac{\overline{AB} \times \overline{A'B'}}{\overline{AB'} \times \overline{A'B}} = \frac{(a+c-b)(a-c-b)}{(a+c+b)(a-c+b)} \\
 &= \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a+b)^2 - c^2} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 2ab}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit  $\text{ch } \delta = \gamma$ . D'une manière analogue, si  $a + b < c$ , comme dans la figure 5.9C, il vient :

$$\begin{aligned}
 (AA'BB') &= \frac{\overline{AB} \times \overline{A'B'}}{\overline{AB'} \times \overline{A'B}} = \frac{(c-a-b)(c+a+b)}{(c-a+b)(c+a-b)} \\
 &= \frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \\
 &= \frac{-a^2 - b^2 + c^2 - 2ab}{-a^2 - b^2 + c^2 + 2ab} = \frac{-\gamma - 1}{-\gamma + 1},
 \end{aligned}$$

et, par suite,  $\text{ch } \delta = -\gamma$ . L'ensemble de ces résultats montre que nous avons, ainsi, démontré le théorème suivant :

**Théorème 5.91** — Si  $c$  désigne la distance (ordinaire) entre les centres de deux cercles non sécants de rayon  $a$  et  $b$ , l'écart inversif  $\delta$  entre ces cercles est donné par la formule <sup>(1)</sup>

$$\text{ch } \delta = \left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right|.$$

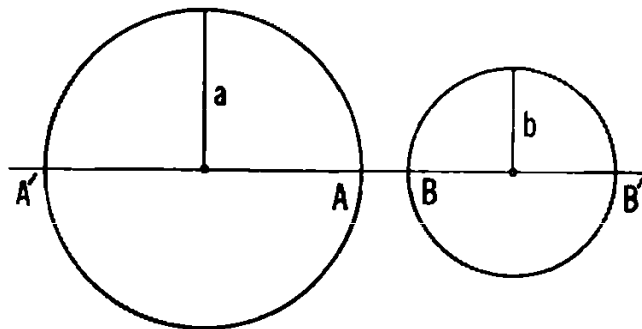


Fig. 5.9C

<sup>(1)</sup> La courbe représentant les variations de la fonction  $y = \text{ch } x$  est la *chaînette*. C'est la figure d'équilibre d'un fil suspendu par ses deux extrémités.

Comme application intéressante de ce théorème, considérons deux cercles tels qu'il existe un quadrangle ayant ses sommets situés sur l'un d'eux, de rayon  $a$ , tandis que ses côtés sont tangents à l'autre, de rayon  $b$ . Comme on le sait <sup>(1)</sup>, la distance (ordinaire)  $c$  entre les centres des deux cercles satisfait à l'équation :

$$\frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} = \frac{1}{b^2}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$|a^2 + b^2 - c^2| = b \sqrt{4a^2 + b^2},$$

ou encore

$$\operatorname{ch} \delta = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2ab} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}.$$

Or,  $\operatorname{ch}^2 \delta = 1 + \operatorname{sh}^2 \delta$  : il s'ensuit donc que l'écart inversif entre deux cercles, l'un circonscrit à un quadrangle dans lequel l'autre est inscrit, peut s'exprimer, en fonction des rayons, par la formule très simple

$$\operatorname{sh} \delta = \frac{b}{2a}.$$

### Exercices

- 1 - Si la distance (ordinaire) entre les centres de deux cercles de rayon 1 est égale à  $2(\sqrt{3} + 1)$ , un autre cercle de rayon 1 situé à égale distance des deux premiers partage, également aussi, leur écart inversif : est-il, de plus, leur cercle bissecteur ?
- 2 - L'écart inversif  $\delta$  entre des cercles de Soddy (voir l'exercice 4 du paragraphe 5.4) est donné par la formule

$$\operatorname{ch} \frac{\delta}{2} = 2.$$

- 3 - Si deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, et, par suite, ont quatre tangentes communes, les longueurs de la plus petite et de la plus grande de ces tangentes sont dans le rapport  $\operatorname{th} \delta/2$ ,  $\delta$  étant l'écart inversif entre les deux cercles.

<sup>(1)</sup> Selon J.L. Coolidge, *A Treatise on the Circle and the Sphere* (Oxford, 1916), pp. 45-46, c'est Euler qui trouva le premier ce résultat, de même que la formule analogue pour un triangle :  $1/(R-d) + 1/(R+d) = 1/r$  (voir notre théorème 2.12).

- 4 - Soit une droite située à une distance  $p$  du centre d'un cercle de rayon  $b$ .  
Si  $p < b$ , cette droite coupe le cercle sous un angle  $\delta$  tel que  $\cos \delta = \pm p/b$ . Si  $p \geq b$  l'écart inversif  $\delta$  entre la droite et le cercle est donné par la formule  $\text{ch } \delta = p/b$ .

- 5 - Soit un triangle dont les cercles circonscrit et inscrit ont les rayons  $R$  et  $r$ , respectivement : l'écart inversif  $\delta$  entre ces cercles est donné par la formule

$$\text{sh } \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}}.$$

*Conseil* : appliquer le théorème 2.12.

- 6 - Si un triangle  $ABC$  a un angle obtus, le cercle circonscrit et le cercle des neuf points de ce triangle se coupent sous un angle  $\delta$  donné par la formule

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = -\cos A \cos B \cos C.$$

Si le triangle est rectangle, ou a des angles aigus, l'écart inversif  $\delta$  entre les cercles ci-dessus est donné par la formule :

$$\text{sh}^2 \frac{\delta}{2} = \cos A \cos B \cos C.$$

- 7 - L'écart inversif entre les deux cercles définis par les équations

$$x^2 + y^2 - 2ax + d^2 = 0 \quad (\text{avec } a > d > 0)$$

et

$$x^2 + y^2 - 2bx + d^2 = 0 \quad (\text{avec } b > d > 0)$$

est  $|\alpha - \beta|$  avec

$$\text{th } \alpha = \frac{d}{a} \quad \text{et} \quad \text{th } \beta = \frac{d}{b}.$$

# 6

## Introduction à la géométrie projective<sup>(1)</sup>

*Puisque, maintenant, vous étudiez la géométrie et la trigonométrie, je vais vous poser un problème. Un navire fait route sur l'océan. Il a quitté Boston avec une cargaison de laine. Sa jauge brute est de 200 tonnes. Sa destination est Le Havre. A bord, il y a 12 passagers. Le vent souffle de l'est-nord-est. Il est trois heures et quart de l'après-midi. On est au mois de mai. Quel est l'âge du capitaine ?*

Gustave Flaubert

Dans toutes les transformations que nous avons considérées jusqu'ici, les points ont correspondu à des points. Au contraire, le principe de dualité — qui nous permet de transformer des points en droites et des droites en points — constitue le trait le plus caractéristique du « plan projectif ». L'une de ces nouvelles transformations, qui ressemble un peu à l'inversion, est la « réciprocité polaire » par rapport à un cercle<sup>(2)</sup>. Tout point, sauf le centre  $O$ , a comme figure polaire réciproque une droite,

(<sup>1</sup>) A ce sujet, voir notamment, L. GODEAUX, *Les Géométries*, 1937, réédition Jacques Gabay, 1997, et R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* — C., p. 149-163.

(<sup>2</sup>) Voir notamment à ce sujet, R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* — G., p. 132-138 et G. PAPELIER, *op. cit.* — Tome IV, *Pôles, polaires, plans polaires, dans le cercle et la sphère*, p. 57-90.

toute droite ne passant pas par  $O$  a comme figure polaire réciproque un point; enfin, la figure polaire réciproque de tout cercle est une « conique » dont un « foyer » est le point  $O$ . Après avoir discuté les divers types de coniques, nous comparerons prudemment, en fin de chapitre, la géométrie de l'inversion et la géométrie projective.

### 6.1. RÉCIPROCITÉ POLAIRE

Dans cette variante de l'inversion, nous prenons d'abord (comme au paragraphe 5.3) un cercle  $\omega$  de centre  $O$  et de rayon  $k$ . A chaque point  $P$  (autre que  $O$ ) correspond une droite  $p$ , appelée la *polaire* de  $P$  par rapport à  $\omega$ , et qui est la perpendiculaire à  $OP$  menée par le point  $P'$ , inverse de  $P$  (voir la figure 6.1A). Réciproquement, à chaque droite  $p$  (ne passant

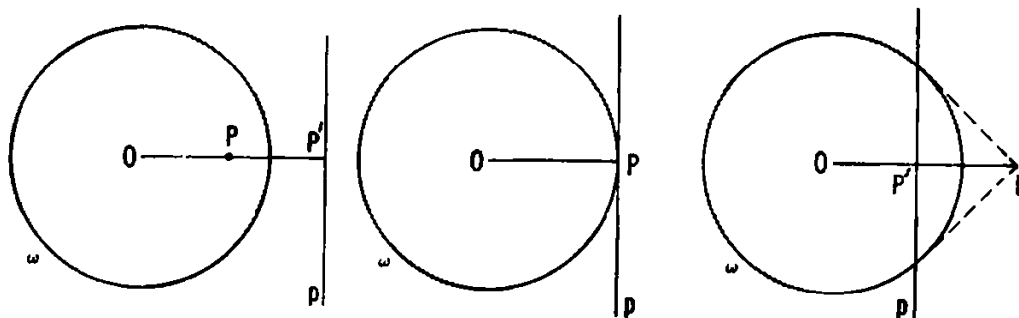


Fig. 6.1A

pas par  $O$ ) correspond un point  $P$ , appelé le *pôle* de  $p$  par rapport à  $\omega$ . Si, dans la figure 5.3A, on permute les points  $P$  et  $P'$ , on voit que, lorsque  $P$  est extérieur à  $\omega$ , sa polaire est la droite joignant les points de contact des deux tangentes menées par  $P$  à  $\omega$ . Il est évident que si  $P$  appartient à  $\omega$ , sa polaire est la tangente à  $\omega$  en  $P$  : c'est, d'ailleurs, le seul cas où  $P$  soit situé sur sa polaire. Par commodité, nous désignerons désormais par  $a, b, \dots$  les polaires des points  $A, B, \dots$

Appelons  $A'$  et  $a$ , respectivement, l'inverse et la polaire d'un point  $A$  quelconque (autre que  $O$ ), comme sur la figure 6.1A. Par un point quelconque,  $B$ , de  $a$ , menons  $OB$ , puis  $AB'$  perpendiculaire à  $OB$  ( $B'$  étant sur  $OB$ , voir fig. 6.1B). Les deux triangles  $OAB'$  et  $OBA'$  étant semblables, on a

$$OB \times OB' = OA \times OA' = k^2.$$

$B'$  est donc l'inverse de  $B$ , et  $AB'$  est la polaire  $b$  de  $B$ . Réciproquement,



à toute droite  $b$  passant par  $A$  (sauf  $OA$ ), correspond une perpendiculaire  $OB$  qui permet de construire la même figure que plus haut. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

**Théorème 6.11** — *Si  $B$  est situé sur  $a$ ,  $b$  passe par  $A$ .*

Supposons maintenant que  $A$  et  $a$  soient fixes, tandis que  $B$  et  $b$  varient : il en résulte que tous les points de la droite  $a$  (qui ne passe pas par  $O$ ) ont pour polaires des droites qui passent par son pôle  $A$ . En d'autres termes, les polaires d'un ensemble de points alignés forment un ensemble de droites concourantes. Et l'on appelle *réciprocité polaire*

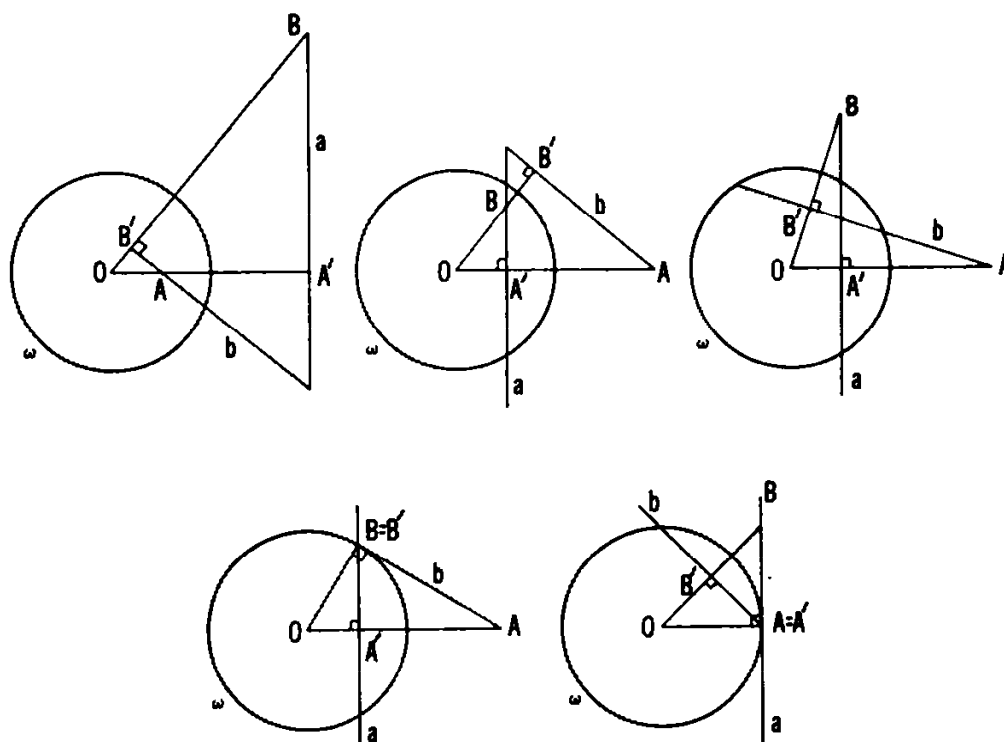


Fig. 6.1B

la propriété selon laquelle des points et des droites sont transformés en leurs polaires et pôles respectifs. Ainsi, on est tout naturellement conduit au *principe de dualité* suivant : à toute configuration de points et de droites, dans laquelle certains points sont situés sur certaines droites, correspond une configuration corrélatrice de droites et de points, dans laquelle certaines droites passent par certains points. Par exemple, à un quadrangle complet  $ABCD$  (formé par quatre points, sans qu'il y en ait trois d'alignés, et par les six droites qui les joignent,  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$ ,

$BC, CA, AB$ ) correspondra corrélativement le quadrilatère complet  $abcd$  (formé par quatre *droites*, sans qu'il y en ait trois qui soient concourantes, et par leurs six points d'intersection  $a \cdot d$  <sup>(1)</sup>,  $b \cdot d$ ,  $c \cdot d$ ,  $b \cdot c$ ,  $c \cdot a$ ,  $a \cdot b$ ).

Un cercle peut être considéré, soit comme un *lieu géométrique* de points, soit comme une *enveloppe* de droites (les tangentes) (voir la figure 6.1C). Chaque tangente est la position limite d'une sécante lorsque les

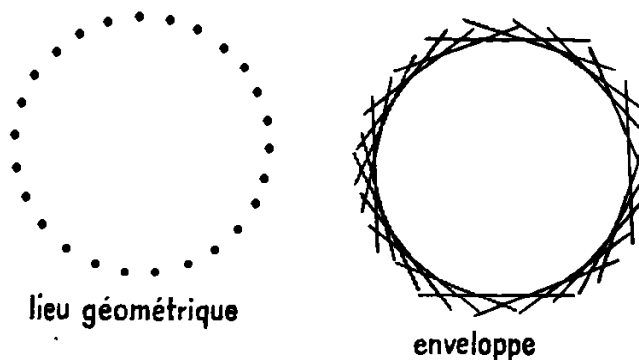


Fig. 6.1C

deux points où celle-ci coupe le cercle tendent à être confondus. Corrélativement, chaque point de contact est la position limite du point d'intersection de deux tangentes lorsque celles-ci tendent à être confondues. Ainsi, cette réciproité polaire permute lieux géométriques et enveloppes. Lorsque le cercle  $\omega$  est considéré comme un lieu géométrique, sa figure polaire réciproque est le même cercle, mais considéré, cette fois, comme

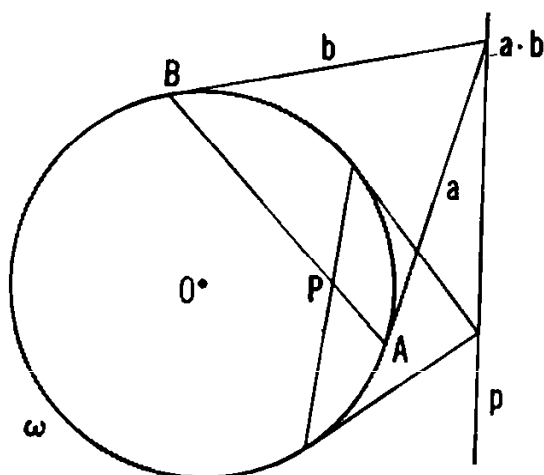


Fig. 6.1D

<sup>(1)</sup> Les notations  $a \cdot d$ ,  $b \cdot d$ , etc., désignant les points d'intersection de  $a$  et  $d$ , de  $b$  et  $d$ , etc. (N.d.T.).

une enveloppe; et inversement. D'une façon analogue, un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  a, comme figure polaire réciproque (en permutant les deux points de vue ci-dessus), un cercle concentrique de rayon  $k^2/r$ .

Grâce à la correspondance de termes donnée par le « dictionnaire » ci-dessous, il est très facile d'exprimer l'énoncé corrélatif de tout théorème ou de toute construction que l'on donne. (Lorsque se présente un terme figurant dans une colonne, on doit le remplacer par son correspondant de l'autre colonne).

point	droite
est situé sur	passé par
droite joignant deux points	intersection de deux droites
concourants	alignés
quadrangle	quadrilatère
pôle	polaire
lieu géométrique	enveloppe
tangente	point de contact

Lorsque deux points,  $A$  et  $B$ , et deux droites,  $a$  et  $b$ , sont associés comme dans le théorème 6.11 (c'est-à-dire lorsque l'un des points est sur la polaire de l'autre), nous dirons que  $A$  et  $B$  sont des *points conjugués* <sup>(1)</sup>, et que  $a$  et  $b$  sont des *droites conjuguées* <sup>(2)</sup>. Ainsi, la polaire de  $A$  est le lieu géométrique des points conjugués de  $A$ ; et le pôle de  $a$  est l'enveloppe des droites conjuguées de  $a$ . (En faisant tendre le rayon d'un cercle vers zéro, on peut justifier l'assimilation d'un point à l'« enveloppe » des droites passant par ce point). En particulier, tout point situé sur une tangente  $a$  est conjugué du point de contact  $A$ , qui est donc un *point autoconjugué*; tandis que toute droite passant par  $A$  (sur le cercle  $\omega$ ) est conjuguée de la tangente  $a$ , qui est, par suite, une *droite autoconjuguée*.

Le pôle de toute droite  $AB$  (ne passant pas par  $O$ ), étant situé sur les polaires des deux points  $A$  et  $B$ , peut être défini comme le point d'intersection  $a \cdot b$ . Par exemple, si  $A$  et  $B$  sont situés sur  $\omega$ , comme dans la figure 6.1D, le pôle de la sécante  $AB$  est le point d'intersection des tangentes  $a$  et  $b$ . Corrélativement, tout point extérieur au cercle  $\omega$  appartient à deux tangentes,  $a$  et  $b$  par exemple et l'on peut construire sa polaire comme étant la sécante joignant les points de contact,  $A$  et  $B$ , des tangentes.

(1) Voir R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* – G., p. 128 et 132.

(2) *Id.* —, G., p. 133.

Sur toute droite  $p$ , il existe des points extérieurs au cercle  $\omega$ . Si elle ne coupe pas  $\omega$  diamétralement, son pôle  $P$  est situé sur les polaires de ces points extérieurs et on peut le déterminer comme intersection de deux d'entre elles. Corrélativement, tout point  $P$  appartient à certaines sécantes : s'il n'est pas confondu avec  $O$ , les pôles de toutes ces sécantes sont situés sur sa polaire qui, par suite, peut être déterminée comme étant la droite joignant les pôles de deux sécantes. Le théorème que voici résume les résultats précédents.

**Théorème 6.12** — *Toute sécante  $AB$  (sauf si elle est un diamètre) a pour pôle le point d'intersection des tangentes en  $A$  et  $B$ . La polaire de tout point  $P$  extérieur est la droite joignant les points de contact des tangentes menées par  $P$ . Toute droite  $p$  (sauf si elle est un diamètre) a pour pôle le point d'intersection des polaires de deux points extérieurs situés sur  $p$ . Tout point  $P$  (différent du centre  $O$ ) a pour polaire la droite joignant les pôles de deux sécantes passant par  $P$ .*

Il vaut la peine de remarquer que, lorsque sont donnés le cercle directeur <sup>(1)</sup> correspondant,  $\omega$ , et toutes ses tangentes, les constructions ci-dessus ne font intervenir que l'existence en elle-même de points et de droites, sans que des distances soient en jeu. C'est là, en effet, un trait caractéristique de la géométrie projective.

### Exercices

- 1 - La polaire d'un point  $A$  quelconque (différent de  $O$ ) par rapport à un cercle  $\omega$  de centre  $O$  peut être construite comme étant l'axe radical de deux cercles :  $\omega$ , et le cercle décrit sur  $OA$  comme diamètre.
- 2 - L'un des angles que font les polaires de  $A$  et  $B$  est égal à  $\widehat{AOB}$ .
- 3 - Les sommets et les côtés (assimilés à des droites) d'un polygone régulier à  $n$  côtés, de centre  $O$ , ont pour figures polaires réciproques respectives les côtés et les sommets d'un autre polygone régulier à  $n$  côtés.
- 4 - Un rectangle de centre  $O$  a pour figure polaire réciproque un losange.

(<sup>1</sup>) Voir R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* – G., p. 138.

## 6.2. CERCLE CONJUGUÉ A UN TRIANGLE <sup>(1)</sup>

Lorsque les quatre points  $A, B, A', B'$  indiqués sur la figure 6.1B sont tous distincts, le triangle  $ABC$  ( $C$  étant l'intersection de  $a$  et  $b$ ) a les propriétés suivantes : chaque sommet est le pôle du côté opposé, deux sommets quelconques sont des points conjugués, et deux côtés quelconques sont des droites conjuguées. En fait, deux points conjugués (mais non autoconjugués) quelconques sont deux sommets d'un tel triangle  $ABC$  qui est dit *triangle conjugué* <sup>(2)</sup>.

Les trois cas représentés par la figure 6.2A (qui correspondent aux trois premiers cas de la figure 6.1B) montrent les seules positions possibles des points conjugués  $A$  et  $B$ , *tout triangle conjugué est obtusangle* <sup>(3)</sup>, le sommet de l'angle obtus est *intérieur* au cercle  $\omega$ , tandis que les deux autres sommets sont extérieurs à ce même cercle. Réciproquement, à tout triangle obtusangle  $ABC$  correspond un seul cercle par rapport auquel le triangle est conjugué : c'est le *cercle conjugué* <sup>(2)</sup> au triangle dont on peut, comme suit, déterminer le centre  $O$  et le rayon  $k$ . Tout d'abord,  $OA$  et  $OB$  étant deux hauteurs du triangle  $ABC$ ,  $O$  est l'orthocentre de ce dernier. En reprenant les notations de l'équation (2.44), le cercle conjugué a pour centre  $H$ , et pour rayon l'une des expressions :

$$\sqrt{HA \times HD} = \sqrt{HB \times HE} = \sqrt{HC \times HF}.$$

Une inversion faite par rapport à ce cercle transforme donc les sommets de  $ABC$  en les pieds des hauteurs. En considérant les cercles qui passent par ces groupes de trois points, et en se rappelant que les inverses de cercles sont des cercles, on obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 6.21** — *Etant donné un triangle obtusangle quelconque, une inversion par rapport au cercle conjugué permute le cercle circonscrit et le cercle des neuf points correspondant à ce triangle.*

En d'autres termes, le cercle conjugué est l'un des deux cercles bissecteurs du cercle circonscrit et du cercle des neuf points (lesquels se coupent parce que le triangle est obtusangle). Il s'ensuit que les trois cercles précédents (dont les centres sont tous situés sur la droite d'Euler) appar-

<sup>(1)</sup> Voir R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* — G., p. 136.

<sup>(2)</sup> *Id* —, G., p. 135.

<sup>(3)</sup> *Id* —, G., p. 136.

tiennent à un faisceau; et que, d'autre part, le cercle des neuf points de tout triangle obtusangle passe non pas seulement par neuf, mais bien par *onze* points remarquables, les deux derniers étant les points d'intersection du cercle circonscrit et du cercle conjugué.

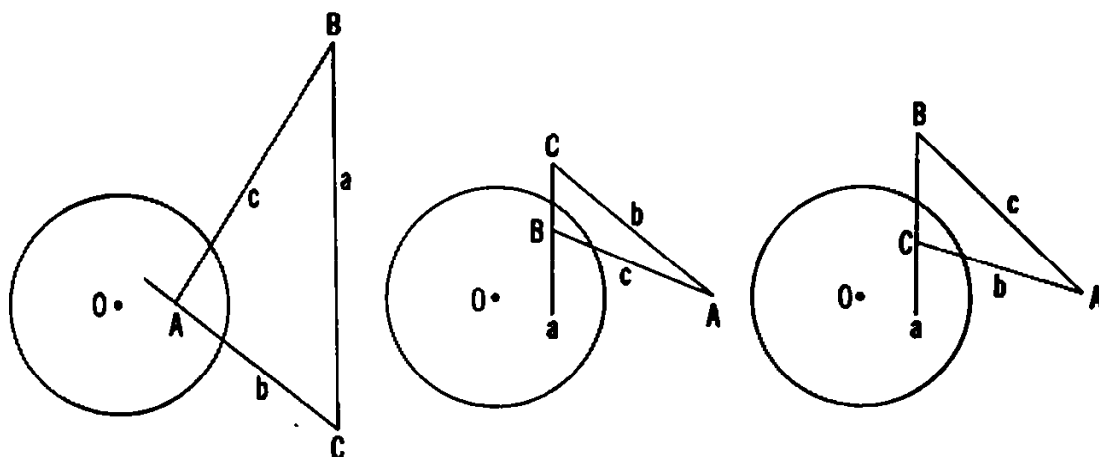


Fig. 6.2A

### Exercice

Dans un triangle obtusangle, le cercle conjugué coupe le cercle circonscrit sous un angle  $\theta$  défini par l'égalité :

$$\cos^2 \theta = -\cos A \cos B \cos C \quad (1).$$

### 6.3. CONIQUES

Il y a maintes façons différentes d'étudier les courbes intéressantes appelées *coniques* (ou « sections coniques ») que nous avons mentionnées brièvement aux paragraphes 3.8 et 3.9. L'une d'elles consiste à *définir* une conique comme étant la *figure polaire réciproque d'un cercle*. D'une façon plus précise, considérons la figure polaire réciproque d'un cercle  $\alpha$ , de centre  $A$  et de rayon  $r$ , par rapport à un cercle  $\omega$  de centre  $O$  et de rayon  $k$ .

Le rayon  $k$  de  $\omega$  ne pouvant faire varier que les *dimensions*, et non pas la *forme*, de la conique, sa valeur est, par là même, indifférente. La forme, elle, est déterminée par le rapport

$$\varepsilon = OA/r$$

(1) Cet exercice est à rapprocher de l'exercice 6 du chapitre 5 (N.d.T.).

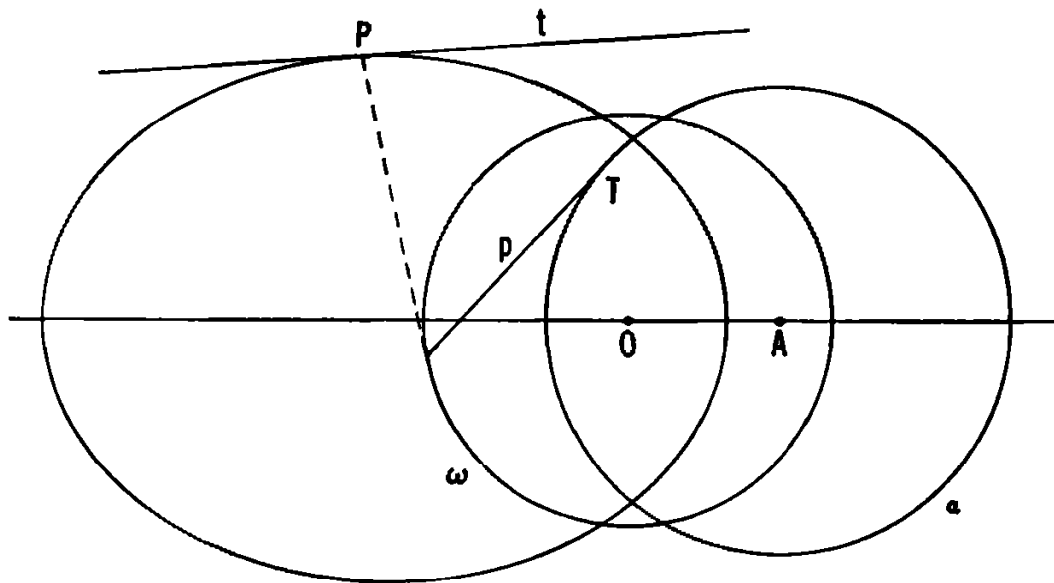


Fig. 6.3A

que, tout naturellement, on appelle *excentricité* de la conique; et le point  $O$  est appelé un *foyer*.

Définir une conique comme étant la figure polaire réciproque d'un cercle  $\alpha$  signifie qu'elle est à la fois le lieu géométrique des pôles des tangentes à  $\alpha$ , et l'enveloppe des polaires des points situés sur  $\alpha$ . Si  $\varepsilon < 1$ ,

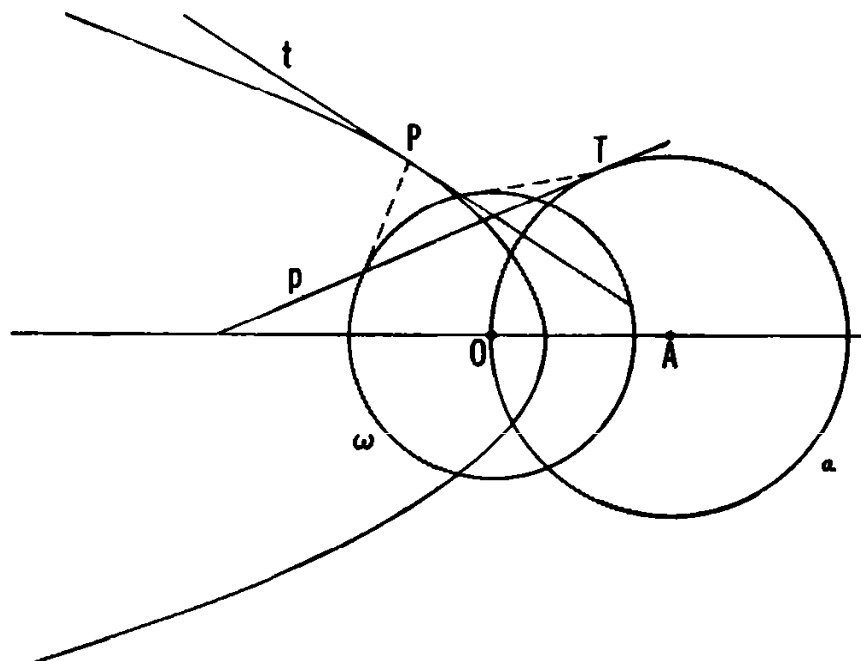


Fig. 6.3B

$O$  étant, par suite, intérieur à  $\alpha$ , il existe un point de la conique sur toute demi-droite issue de  $O$  : la conique est alors une courbe ovale appelée *ellipse* (fig. 6.3A). En particulier, lorsque  $\varepsilon = 0$ , l'ellipse se réduit à un cercle. Quand  $\varepsilon$  croît, il est évident que la conique s'éloigne de plus en plus de la forme circulaire. Pour  $\varepsilon = 1$ , on a  $OA = r$  et le point  $O$  est situé sur le cercle  $\alpha$  : l'ensemble des points situés sur  $\alpha$  en comprend donc un,  $O$ , qui n'a pas de polaire par rapport à  $\omega$ ; tandis que l'ensemble des tangentes à  $\alpha$  en comprend une, la tangente en  $O$ , qui n'a pas de pôle. Il en résulte que la conique, appelée maintenant *parabole* (fig. 6.3B),

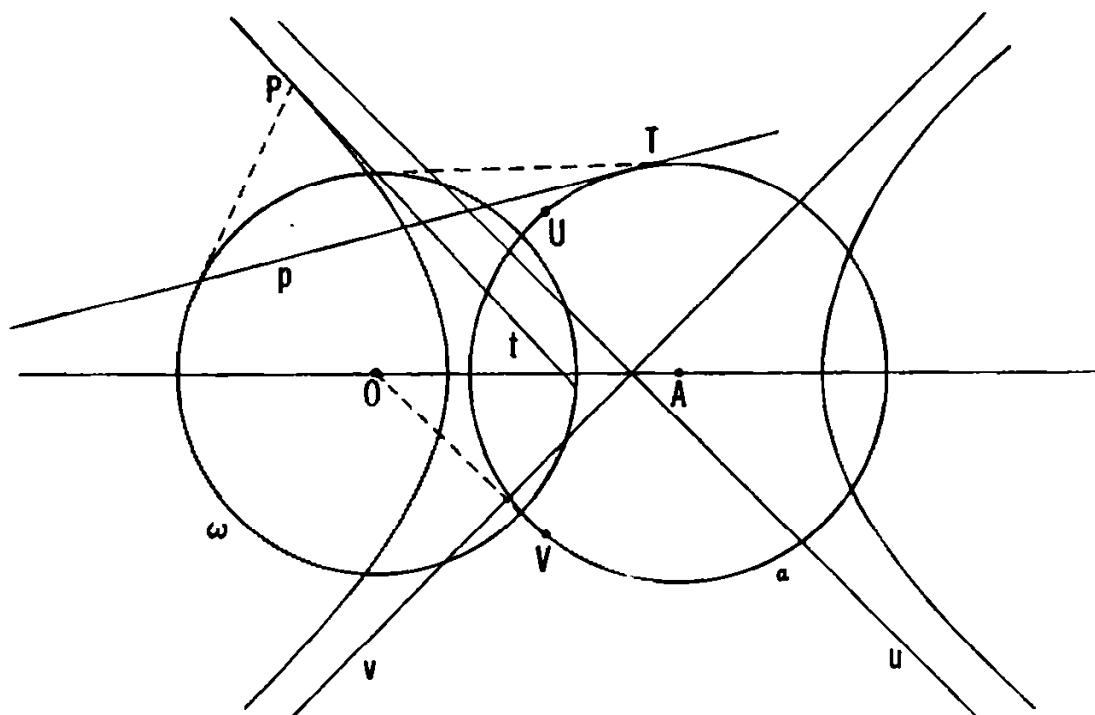


Fig. 6.3C

s'éloigne indéfiniment dans la direction  $AO$ . Enfin, lorsque  $\varepsilon > 1$ ,  $O$  est extérieur à  $\alpha$ , et la conique s'appelle une *hyperbole* (fig. 6.3C). Les deux tangentes au cercle  $\alpha$  qui passent par  $O$  n'ont pas de pôles; mais leurs points de contact  $U$  et  $V$  ont des polaires que l'on appelle les *asymptotes* de l'hyperbole. Ces deux droites,  $u$  et  $v$ , appartiennent à l'enveloppe, et sont, par suite, des tangentes... sans points de contact ! Plus on s'éloigne, sur l'une ou l'autre d'entre elles, de leur point d'intersection, la courbe se rapproche, de plus en plus aussi, de chaque asymptote, mais sans jamais les rencontrer.

Les observations astronomiques faites par Kepler ont été expliquées par Newton (1642-1727) : l'orbite d'une planète est une ellipse et le soleil



est placé à l'un des foyers de cette dernière. Depuis cette époque on a mesuré les excentricités  $\varepsilon$  des orbites des diverses planètes et comètes; le tableau ci-dessous donne certaines des valeurs trouvées.

Planètes		Comètes	
Mercure	0.2056	Encke	0,85
Vénus	0,0068	Biela	0,76
Terre	0,0167	Holmes	0,41
Mars	0,0934	Brooks	0,47
Jupiter	0,0484	Halley	0,967
Saturne	0,0557	Donati	0,9963
Uranus	0,0472	Coggia	0,9988
Neptune	0,0086	Daniel	1,000
Pluton	0,2481	Morehouse	1,000

### Exercices

- 1 - Soient deux cercles  $\alpha$  et  $\beta$  de rayons presque égaux et dont les centres sont très voisins l'un de l'autre, mais tels que  $\alpha$  soit intérieur à  $\beta$ . Déterminer d'une part, sur  $\alpha$ , des points  $A_1, A_3, A_5, \dots$  et, d'autre part, sur  $\beta$ , des points  $B_0, B_2, B_4, \dots$  tels que les droites  $B_0B_2, B_2B_4, \dots$  soient tangentes à  $\alpha$  en  $A_1, A_3, \dots$ . Si l'on désigne par  $b_2, b_4, \dots$  les droites  $A_1A_3, A_3A_5, \dots$  et par  $C_1, C_3, \dots$  les points d'intersection des tangentes à  $\beta$  en  $B_0$  et  $B_2, B_4, \dots$  démontrer que les droites  $b_2, b_4, \dots$  sont tangentes à la figure polaire réciproque de  $\beta$  par rapport à  $\alpha$ , et que les points  $C_1, C_3, \dots$  sont situés sur la figure polaire réciproque de  $\alpha$  par rapport à  $\beta$ .
- 2 - La figure polaire réciproque d'un cercle  $\alpha$  par rapport à un cercle  $\omega$  non concentrique a un axe de symétrie qui est la ligne des centres des deux cercles. Cette conique pourrait-elle avoir un second axe de symétrie ?
- 3 - Etant donné une parabole, les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes sont situés sur une même droite.



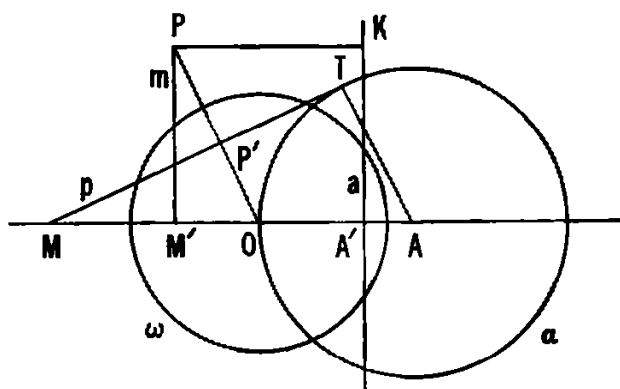


Fig. 6.4B

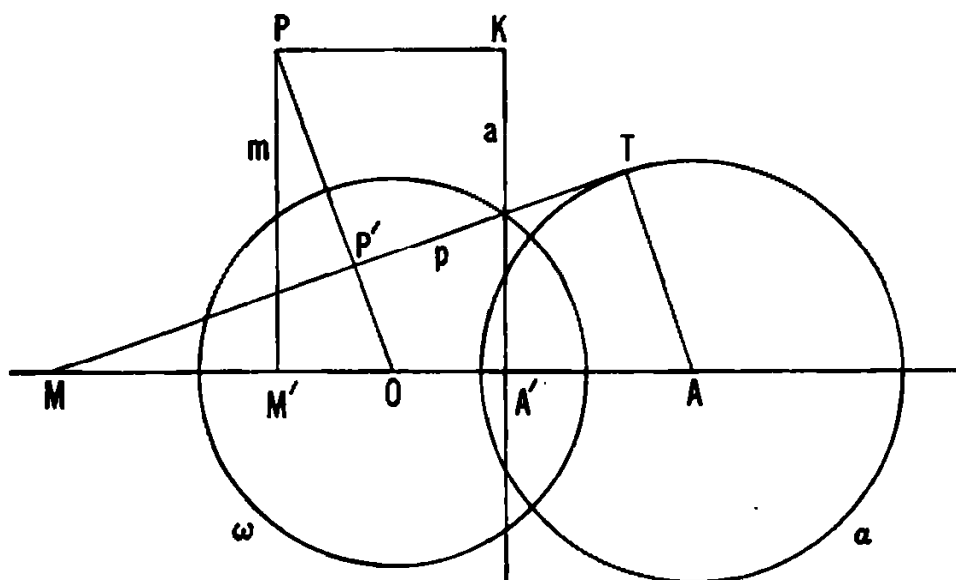


Fig. 6.4C

et la polaire  $m$  de  $M$  coupent la droite  $OA$  en  $A'$  (inverse de  $A$ ) et  $M'$  (inverse de  $M$ ), respectivement. Enfin  $k$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de  $P$  sur  $a$ . Nous voulons donc démontrer que  $OP = \varepsilon \cdot PK$ . Pour envisager tous les cas possibles, nous considérerons la droite  $OA$ , et les segments qu'elle porte, comme *orientés* de la gauche vers la droite, de sorte qu'on ait, par exemple,  $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}$ , même si  $O$  est situé entre  $M$  et  $A$ . En faisant intervenir  $k$  et  $r$  qui sont, respectivement, les rayons des cercles  $\omega$  et  $\alpha$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\overline{PK}}{\overline{OP}} &= \frac{\overline{OA'} - \overline{OM'}}{\overline{OP}} = \frac{k}{\overline{OP}} \left( \frac{\overline{OA'}}{k} - \frac{\overline{OM'}}{k} \right) = \frac{\overline{OP'}}{k} \left( \frac{k}{\overline{OA}} - \frac{k}{\overline{OM}} \right) \\ &= \frac{\overline{OP'}}{\overline{OM}} \left( \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} - 1 \right) = \frac{\overline{AT}}{\overline{AM}} \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} = \frac{r}{\overline{OA}} = \frac{1}{\varepsilon},\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat cherché.

Réciproquement,

**Théorème 6.42** — *Etant donné un point  $O$  quelconque, une droite  $a$  ne passant pas par  $O$ , et une constante positive quelconque  $\varepsilon$ , le lieu géométrique des points dont la distance à  $O$  est  $\varepsilon$  fois leur distance à  $a$  est une conique.*

On le voit très facilement en prenant pour cercle  $\omega$ , le cercle de centre  $O$  qui est tangent à  $a$ , le point de contact étant  $A$ . Ainsi,  $a$  est le cercle de centre  $A$  et de rayon  $OA/\varepsilon$ .

### Exercices

- 1 - Ecrire, en coordonnées cartésiennes, l'équation du lieu géométrique d'un point  $P$  tel que sa distance à l'origine des coordonnées soit  $\varepsilon$  fois sa distance à la droite  $x = l/\varepsilon$ .
- 2 - Si, dans l'exercice 1,  $\varepsilon$  est différent de 1, le lieu géométrique cherché coupe deux fois l'axe des  $x$ . Par une translation de l'axe des  $y$ , placer maintenant l'origine au milieu du segment déterminé par ces deux points; puis simplifier l'équation obtenue dans l'exercice précédent en posant  $a = l(1 - \varepsilon^2)$ ,  $b^2 = |la|$ . Qu'indique alors la nouvelle forme de l'équation en ce qui concerne la symétrie de la courbe ?

## 6.5. LE PLAN PROJECTIF

Il est à très peu près exact de dire que la réciprocity polaire transforme tout point en une droite, et toute droite en un point. Les seules exceptions à cette règle concernent le point  $O$ , qui n'a pas de polaire, et les droites passant par  $O$ , qui n'ont pas de pôles. Quand il s'agissait de l'inversion, nous avions paré à des exceptions analogues en adjoignant

un point à l'infini au plan euclidien de manière à obtenir le plan d'inversion. Cette fois, nous admettrons l'existence d'une seule droite à l'infini,  $l_\infty$ , qui est la polaire de  $O$ , dont les points (les points à l'infini) sont les pôles des droites passant par  $O$ . Les propriétés de ces éléments, droite et points, résultent de ce que tous les points d'une droite  $a$  ont pour figures polaires réciproques toutes les droites passant par son pôle  $A$ . Si  $a$  passe par  $O$ , les polaires de ses points forment un faisceau de droites parallèles, qui sont toutes les droites perpendiculaires à  $a$ . Un point à l'infini, tel que le pôle de  $a$ , doit donc être considéré comme le point commun à un faisceau de parallèles. Il s'ensuit que l'énoncé suivant ne comporte aucune exception dans le plan projectif :

*Deux droites distinctes quelconques  $a$  et  $b$  ont un point d'intersection unique.*

En fait, tout théorème relatif à l'existence de points et de droites entraîne un théorème corrélatif concernant des droites et des points — qui sont les polaires et les pôles des points et droites du théorème initial. Considérons, par exemple, l'hexagone circonscrit au cercle  $\omega$ , et tel que ses côtés soient tangents à  $\omega$  en des points qui soient les sommets d'un autre hexagone inscrit dans le même cercle. Dans ces conditions, le théorème de Pascal (paragraphe 3.8) et le théorème de Brianchon (paragraphe 3.9) sont corrélatifs, et chacun d'eux peut se déduire de l'autre par réciprocity polaire par rapport au cercle  $\omega$ . Plus généralement, le théorème de Pascal (ou celui de Brianchon), appliqué à un cercle quelconque, entraîne le théorème de Brianchon (ou celui de Pascal) pour la conique figure polaire réciproque du cercle.

Nous sommes maintenant en mesure de simplifier le théorème 6.12 en y supprimant les réserves qu'il contient entre parenthèses. De plus, en considérant ce théorème comme s'appliquant à un cercle quelconque  $\alpha$  au lieu du cercle directeur  $\omega$ , on peut utiliser  $\omega$  pour déduire une conique qui soit la figure polaire réciproque  $\alpha'$  du cercle  $\alpha$ . Ainsi, nos constructions de pôles et polaires par rapport à  $\alpha$  deviennent, par réciprocity polaire, des constructions de polaires et de pôles par rapport à la conique  $\alpha'$ . Il s'ensuit donc que la réciprocity polaire par rapport à un cercle est étendue aux coniques : le théorème 6.12 (les exceptions étant supprimées) comporte quatre parties qui sont corrélatives les unes des autres, et il reste vrai lorsque le cercle  $\omega$  y est remplacé par une conique.

Dans la figure 3.8B, la droite  $LM$  passe par l'intersection  $N$ , de  $b$  et de  $e$ , et par celle de  $a$  et  $d$  (non représentée). Cette remarque permet

de transformer la dernière partie du théorème 6.12 en la suivante, et, par suite, de construire directement la polaire d'un point  $P$  quelconque (voir la figure 6.5A) :

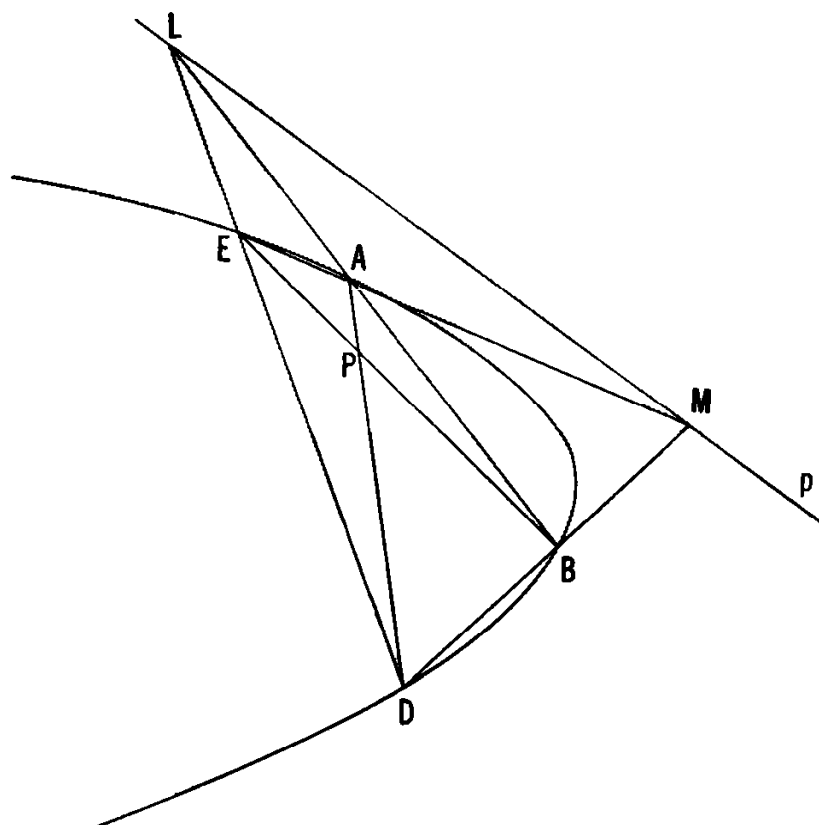


Fig. 6.5A

**Théorème 6.51** — Si le point  $P$  n'est pas situé sur la conique, sa polaire est la droite qui joint les points où se coupent, d'une part  $AB$  et  $DE$ , d'autre part  $AE$  et  $BD$ ,  $AD$  et  $BE$  étant deux sécantes quelconques passant par  $P$ .

Comme nous l'avons vu, un pôle et une polaire par rapport à un cercle  $a$  ont pour figures polaires réciproques (un autre cercle  $\omega$  étant le cercle directeur) une polaire et un pôle par rapport à une conique  $a'$ . Sur les figures 6.3A, B, C, notamment, le centre  $A$  et  $l_\omega$  ont la relation pôle-polaire par rapport au cercle  $a$ ; par suite  $a$  et  $O$  ont aussi la relation polaire-pôle par rapport à la conique  $a'$ . D'où ce théorème :

**Théorème 6.52** — Par rapport à toute conique qui ne soit pas un cercle, une directrice est la polaire du foyer correspondant.

**Exercices**

- 1 - Ecrire le théorème de Desargues (3.61) en termes de géométrie projective, puis donner l'énoncé corrélatif.
- 2 - Même question que ci-dessus pour le théorème de Pappus (3.51).
- 3 - Si la droite à l'infini,  $l_\infty$ , est l'un des côtés d'un triangle conjugué par rapport à un cercle, que peut-on dire des deux autres côtés du triangle ?
- 4 - Une conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la droite à l'infini,  $l_\infty$ , lui est extérieure, lui est tangente ou la coupe, respectivement.
5. Les asymptotes d'une hyperbole lui sont tangentes aux points où elle coupe la droite à l'infini,  $l_\infty$ .
- 6 - Les deux tangentes menées à une parabole d'un point quelconque de sa directrice sont perpendiculaires.
- 7 - Etant donné une conique quelconque passant par les quatre sommets d'un quadrangle complet, les points d'intersection des trois couples de côtés opposés sont les sommets d'un triangle conjugué.

**6.6. CONIQUES A CENTRE**

Il est naturel de se demander si les ellipses et les hyperboles ne sont pas, en fait, plus symétriques que nos constructions ne tendraient, tout d'abord, à nous le faire croire : par exemple, les deux « sommets » situés sur l'axe focal d'une ellipse, sont-ils semblables et les deux « branches » d'une hyperbole le sont-elles aussi ? Nous allons voir que la discussion suivante apporte la symétrie supplémentaire recherchée.

En se reportant au théorème 6.51, on peut affirmer que si un point  $C$  n'est pas situé sur la conique, sa polaire est la droite joignant les points d'intersection, d'une part de  $PQ$  et  $P_1Q_1$ , d'autre part de  $PQ_1$  et  $P_1Q$ ,  $PP_1$  et  $QQ_1$  étant deux sécantes quelconques passant par  $C$ . Si la polaire de  $C$  est la droite à l'infini, comme sur la figure 6.6A, cela signifie que le quadrangle inscrit  $PQP_1Q_1$  est un parallélogramme. Le point  $C$  n'étant pas situé sur la conique, sa polaire (la droite à l'infini,  $l_\infty$ ) n'est pas tangente à cette dernière qui, par suite, n'est pas une parabole. Or, les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en leur milieu : le point  $C$ , qui est le pôle de  $l_\infty$ , est donc le milieu de chacun des segments  $PP_1$  et  $QQ_1$ . Ces derniers pouvant être deux cordes quelconques passant par  $C$ , ce point est appelé le *centre* de la conique, tandis que l'on désigne

l'ellipse et l'hyperbole par l'expression *coniques à centre*. Ainsi, nous avons démontré le théorème suivant :

**Théorème 6.61** — *Une conique à centre est symétrique par rotation d'un demi-tour autour de son centre.*

Par une rotation d'un demi-tour, autour de  $C$ , du foyer  $O$  et de la directrice  $a$  (voir paragraphe 6.4), on obtient un deuxième foyer  $O_1$  et une deuxième directrice  $a_1$ , comme le montrent les figures 6.6B et C. La même rotation d'un demi-tour appliquée aux cercles  $\omega$  (directeur) et  $a$  du paragraphe 6.3 détermine les nouveaux cercles  $\omega_1$  et  $a_1$  tels que

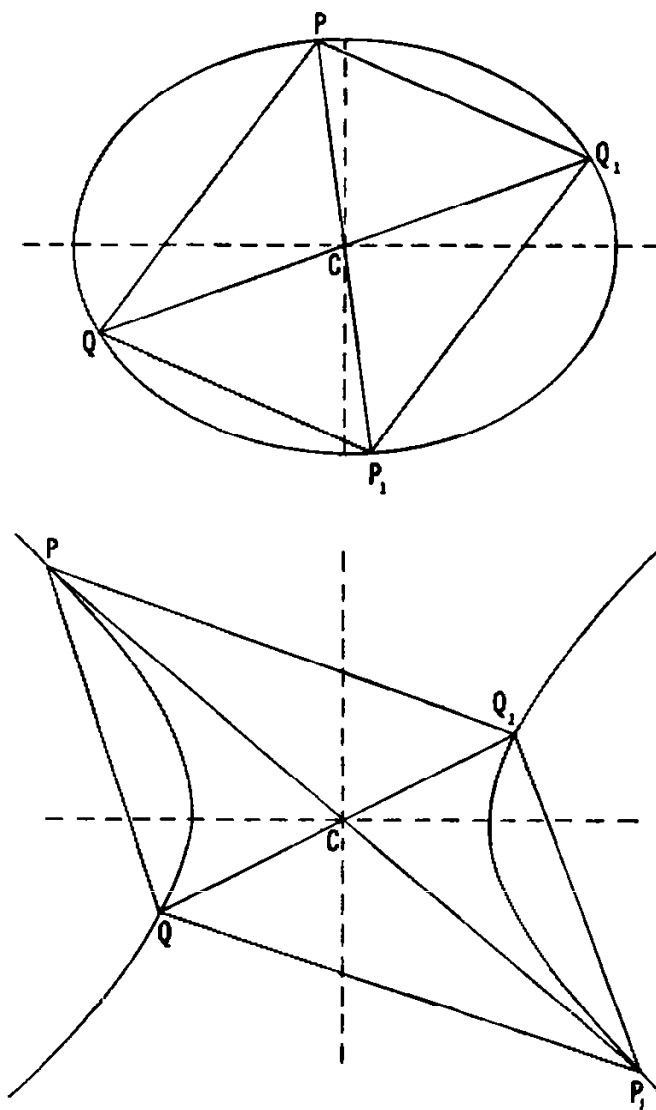


Fig. 6.6A



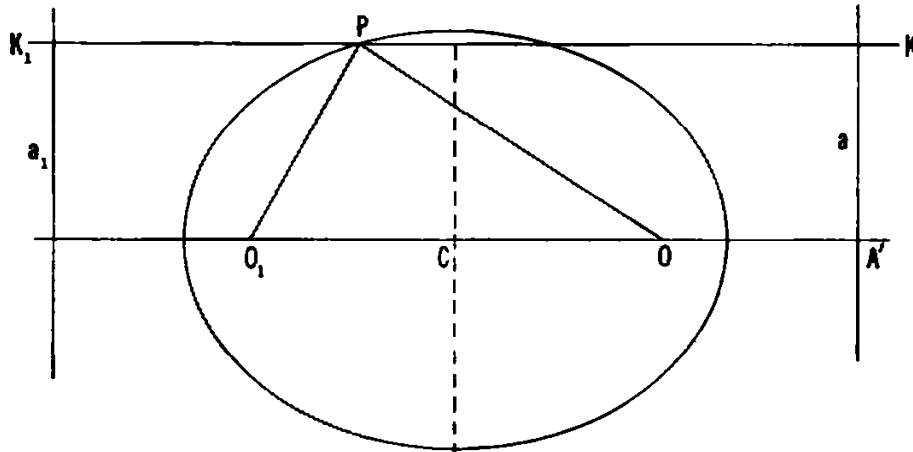


Fig. 6.6B

la figure polaire réciproque de  $a_1$  par rapport à  $\omega_1$  soit la même conique à centre  $a'$ .

En excluant le cas banal où  $O$  et  $A$  coïncident, on voit ainsi que toute conique est symétrique par rapport à la droite  $OA$ . Il s'ensuit que, lorsqu'il s'agit d'une conique à centre, ce centre  $C$  est situé sur la même droite : on peut donc considérer le demi-tour autour de  $C$  comme le produit de symétries par rapport à deux droites perpendiculaires passant par  $C$ ;  $OA$  pouvant être l'une d'elles. D'où il suit que la conique à centre est également symétrique par rapport à la perpendiculaire  $OA$  qui passe par  $C$ .

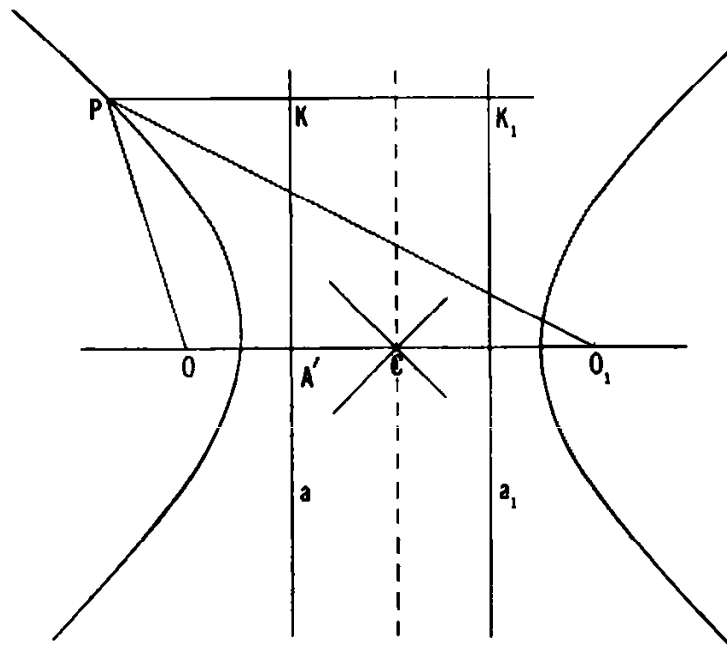


Fig. 6.6C

En d'autres termes, une conique à centre a le même type de symétrie qu'un losange ou un rectangle.

Appelons  $c$  la polaire de  $C$  par rapport au cercle  $\omega$ , comme dans les figures 6.6D, E. Le point  $C$  et la droite à l'infini,  $l_\infty$ , étant le pôle et la polaire l'un de l'autre par rapport au cercle  $\alpha'$ ,  $c$  et  $O$  doivent être la polaire et le pôle l'un de l'autre aussi par rapport au cercle  $\alpha$ . Ainsi donc,  $C$  est, par rapport à  $\omega$ , le pôle de  $c$ , laquelle droite est, par rapport à  $\alpha$ , la polaire de  $O$ . En d'autres termes, si  $C'$  est le point où  $c$  coupe la droite  $OA$ ,  $C$  est, par rapport à  $\omega$ , l'inverse de  $C'$  qui est, par rapport à  $\alpha$ , l'inverse de  $O$ . Or on a

$$\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OC'} = k^2 = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA'}$$

et 
$$r^2 = \overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{C'A}$$

(les segments étant dirigés).

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OC}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{C'A}} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2 - (\overline{OA} \times \overline{C'A})} \\ &= \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2 - r^2} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}, \end{aligned}$$

cette dernière expression étant négative ou positive suivant que l'on a  $\varepsilon < 1$  ou  $\varepsilon > 1$ . Par suite, pour une ellipse, le centre  $C$  et la directrice  $a$  sont de part et d'autre de  $O$ , comme dans la figure 6.6B, tandis que, pour une hyperbole, ils sont d'un même côté. En d'autres termes, pour une

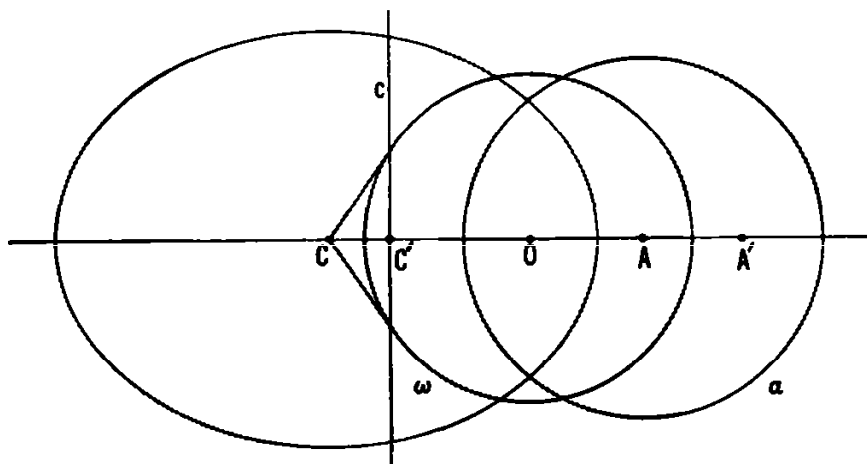


Fig. 6.6D

ellipse, les deux foyers sont situés à l'intérieur de la courbe et celle-ci est entièrement comprise entre les directrices; tandis que, pour une hyperbole, les deux directrices sont situées dans la partie du plan comprise entre les deux branches.

On apprend, en mécanique, que, si l'on néglige la résistance de l'air, la trajectoire d'une balle lancée est un arc de parabole dont le foyer peut être assez facilement déterminé. Comme il est possible, du moins pendant quelques secondes, d'assimiler la balle à un petit satellite, ce qui semble une parabole est, plus précisément, une ellipse extrêmement allongée dont l'excentricité n'est que de très peu inférieure à 1. Où donc est son second foyer ?... Au centre de la Terre !

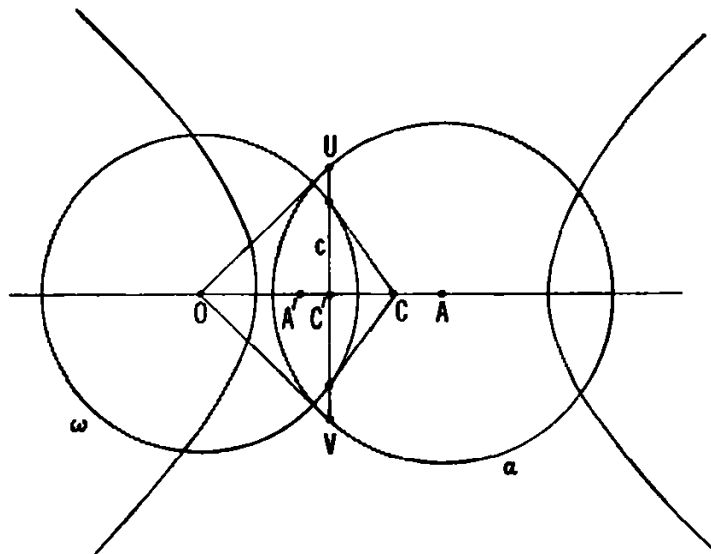


Fig. 6.6E

### Exercices

- 1 - Lorsqu'un point se déplace sur une ellipse, la somme  $OP + O_1P$  de ses deux rayons vecteurs est constante (voir la figure 6.6B).
- 2 - Lorsqu'un point se déplace sur une hyperbole, la différence  $|OP - O_1P|$  de ses deux rayons vecteurs est constante (voir la figure 6.6C).
- 3 - Dans une conique à centre, les pieds des perpendiculaires abaissées de l'un ou l'autre des foyers sur les tangentes sont tous situés sur un même cercle, appelé *cercle principal* de la conique.

## 6.7. PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE ET PROJECTION CENTRALE

Comme nous l'avons vu au paragraphe 5.3, le centre  $O$  du cercle d'inversion  $\omega$  est le seul point du plan euclidien qui n'ait pas d'inverse. Pour que cette exception soit levée et que, par suite, l'inversion soit une

correspondance de point à point dans la *totalité* du plan, nous avons réalisé une extension du plan euclidien en posant qu'il existe un seul *point idéal*, appelé le point à l'infini, qui est l'inverse de  $O$  : on obtient ainsi le *plan d'inversion*.

Dans le plan euclidien, le seul point qui n'ait pas de polaire est, comme on l'a vu au paragraphe 6.1, le centre  $O$  du cercle directeur. Pour que, ici encore, cette exception soit levée et que la réciprocity polaire soit, dans tout le plan, une correspondance de point à droite et de droite à point, nous avons réalisé une extension du plan euclidien en posant qu'il existe une seule *droite idéale*, la droite à l'infini, qui est la polaire de  $O$  : on a, de la sorte, le *plan projectif*.

On voit donc qu'il existe deux méthodes, différentes mais également valables, pour procéder à l'extension du plan euclidien : c'est là une remarque importante qui, semble-t-il, est beaucoup moins connue qu'elle ne devrait l'être. En raisonnant non plus dans le plan mais dans l'espace, et en comparant deux des façons les plus simples de représenter une sphère sur un plan, on peut préciser davantage les deux méthodes ci-dessus.

Tout d'abord, notre première définition de l'inversion par rapport à un cercle, donnée au paragraphe 5.3, s'étend aisément au cas d'une sphère. Soient, en effet, une sphère de centre  $O$  et de rayon  $k$ , et un point  $P$  différent de  $O$  : nous posons, par définition, que l'*inverse* de  $P$  est le point  $P'$ , situé sur la demi-droite  $OP$  et tel que sa distance à  $O$  satisfasse à la relation

$$\overline{OP} \times \overline{OP'} = k^2.$$

En considérant que le plan de la figure 5.3B appartient à un espace à trois dimensions, et en le faisant tourner autour de la droite  $OA$ , il s'ensuit immédiatement que des sphères (les plans étant assimilés à des sphères de rayon infini) sont transformées par inversion en d'autres sphères. En particulier (voir fig. 5.3B, milieu), si  $\alpha$  est le plan tangent en  $A$  à la sphère d'inversion  $\omega$ , il a pour inverse la sphère  $\alpha'$  ayant pour diamètre le rayon  $OA$ . D'ailleurs, il est inutile de passer par l'intermédiaire de  $\omega$  pour établir la correspondance par inversion entre les points de  $\alpha$  et ceux de  $\alpha'$ . Soit  $P$ , en effet, un point du plan  $\alpha$  (voir fig. 6.7A) : le point  $P'$  qui lui correspond sera le point où la droite  $OP$  coupe à nouveau la sphère  $\alpha'$ . Réciproquement, étant donné un point quelconque  $P'$  situé sur la sphère  $\alpha'$ , sauf en  $O$ , le point  $P$  sera l'intersection de la droite  $OP'$  et du plan  $\alpha$ . Tout naturellement, nous souhaitons nous affranchir de

cette exception; aussi nous faut-il transformer le plan  $\alpha$  en *plan d'inversion* par l'adjonction d'un seul point à l'infini où sera situé  $P$  lorsque  $P'$  est en  $O$ .

Cette méthode de représentation d'une sphère  $\alpha'$  sur un plan  $\alpha$  est dite *projection stéréographique* <sup>(1)</sup>. Si nous remarquons que ce type de projection est un mode particulier d'inversion, on en déduit aisément que les projections de cercles sont encore des cercles. Les inverses de sphères sont, en effet, des sphères (ou des plans) et, de plus, tout cercle peut être considéré comme la courbe d'intersection de deux sphères : il s'ensuit donc que des cercles (quelle que soit leur position dans l'espace et si, notamment, ils appartiennent à la sphère  $\alpha'$ ), ont d'autres cercles pour inverses.

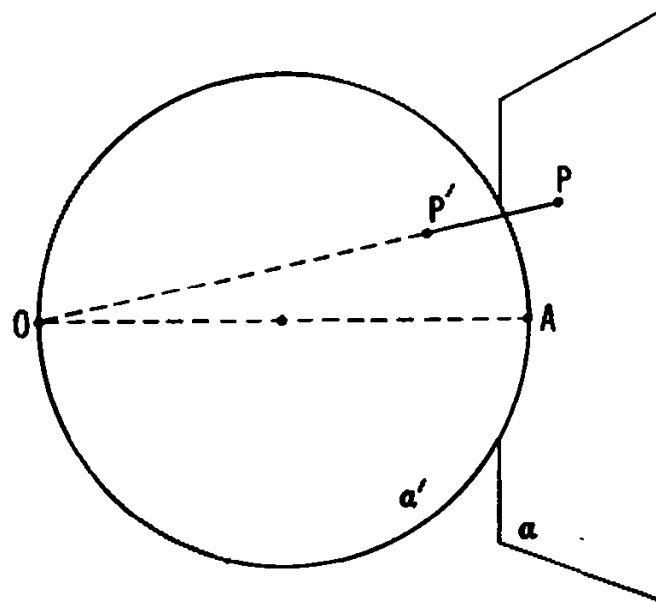


Fig. 6.7A

Il existe une autre méthode pour représenter une sphère  $\alpha'$  sur l'un de ses plans tangents,  $\alpha$  : c'est la *projection centrale* <sup>(2)</sup>. Cette fois, le point de vue est, non plus  $O$  (qui est l'antipodaire de  $A$ ), mais le centre de la sphère  $\alpha'$ , qui est le milieu de  $OA$ . Or, tout plan passant par ce point coupe  $\alpha'$  suivant un *grand cercle*, et le plan  $\alpha$  suivant une droite : toute droite de  $\alpha$  est donc déterminée par le plan d'un grand cercle, de même que tout point de  $\alpha$  est déterminé par un couple de *points antipodaires* de la

<sup>(1)</sup> Voir R. DELTHEIL et D. CAIRE, *op. cit.* – G., p. 178.

<sup>(2)</sup> *Id* —, C., p. 151.

sphère (tels que  $P'_1$  et  $P'_2$  dans la figure 6.7B). Réciproquement, étant donné l'un quelconque des grands cercles de  $\alpha'$ , *sauf* celui dont le plan est parallèle à  $\alpha$ , la droite de  $\alpha$  qui lui correspondra sera l'intersection de  $\alpha$  et du plan du grand cercle donné. Pour lever l'exception précédente, comme il est souhaitable de le faire, nous devons transformer  $\alpha$  en un *plan projectif* en lui adjoignant une seule droite à l'infini qui correspond au grand cercle particulier (dont le plan est parallèle à  $\alpha$ ). Les points de cette droite idéale — ou « points à l'infini » — correspondront, eux, aux couples de points antipodaires situés sur le grand cercle. Affirmer, d'un point de vue projectif, que deux droites quelconques ont un point commun, c'est exprimer l'évidence que deux grands cercles quelconques ont, en commun, un couple de points antipodaires — c'est-à-dire que deux plans quelconques passant par le centre de la sphère se coupent suivant une droite.

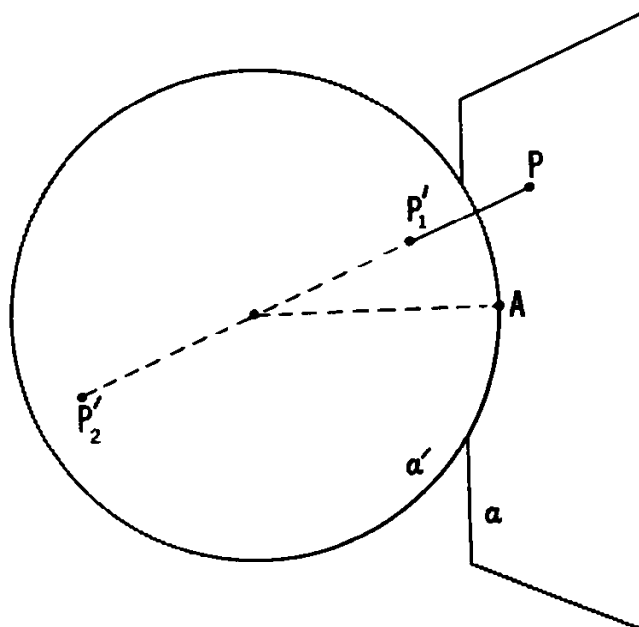


Fig. 6.7B

Comme on l'a vu, tous les points du plan projectif (y compris les points à l'infini) sont la perspective de couples de points antipodaires : il peut donc être utile de considérer que le plan projectif est déduit de la sphère grâce à un repérage théorique des couples de points antipodaires — c'est-à-dire en modifiant le sens du mot « point » de façon à assimiler un tel couple à *un point*.

Si, d'un point de vue pratique, on considère l'établissement d'une carte, la projection stéréographique et la projection centrale ne sont ni

l'une ni l'autre idéales, chacune d'elles ayant pourtant des avantages. La première, en effet, conserve les angles de deux demi-droites issues d'un point : les contours de petites îles, par exemple, ne seront donc pas déformés par ce mode de représentation. Quant à la seconde, elle permet, notamment, de représenter le plus court chemin entre deux points d'une sphère par un segment rectiligne.

Nous avons vu (théorème 5.41) que l'inversion conserve les rapports anharmoniques. Il en est de même pour la transformation par polaires réciproques, mais seulement dans le cas de points alignés. D'une façon précise : *le rapport anharmonique de quatre points situés sur une droite  $P$  est égal au rapport anharmonique des quatre points où leurs polaires coupent toute droite ne passant pas par  $P$ , le pôle de  $p$ .* La démonstration de cette égalité est malheureusement trop longue pour trouver place ici.

Le lecteur qui a compris les notions précédentes sera en mesure d'apprécier un exposé axiomatique de la géométrie projective : il y retrouvera les théorèmes de Desargues, de Pappus et de Pascal, étudiés, cette fois d'un point de vue totalement différent, mais dans lesquels il pourra reconnaître de vieux amis.

### Exercices

- 1 - La projection stéréographique conserve les angles.
- 2 - La projection stéréographique transforme tout grand cercle de la sphère  $\alpha'$  en un cercle (ou une droite) du plan  $\alpha$  qui coupe un certain cercle en deux points diamétralement opposés.
- 3 - Soient  $P'_1$  et  $P'_2$  un couple de points antipodaires variables situés sur la sphère  $\alpha'$ , et  $P_1$ ,  $P_2$  leurs projections stéréographiques sur le plan  $\alpha$  : par quelle transformation dans  $\alpha$  peut-on passer de  $P_1$  à  $P_2$  ?
- 4 - Etant donné les six cercles inscrits dans les faces d'un cube, en déduire, par projection stéréographique, les six cercles envisagés dans l'exercice 3 du paragraphe 5.8.

# Conseils et Solutions des exercices

*Sa réponse s'infiltra dans ma tête  
Comme de l'eau traversant un tamis !*

*C.L. Dodgson*

## **Paragraphe 1.1**

- 1 - La hauteur abaissée de  $A$  sur  $BC$  divise le côté  $a$  en deux segments;  $b \cos C$  et  $c \cos B$  : les additionner (ou les soustraire dans le cas d'un angle obtus).
- 2 - Remplacer  $\sin A$ ,  $\sin B$  et  $\sin C$  par leurs expressions  $a/2R$ ,  $b/2R$ ,  $c/2R$ , respectivement; et simplifier.
- 3 -  $S(ABC) = 1/2 ab \sin C$  et  $\sin C = c/2R$ .
- 4 - On a :  $c = 2p \sin B = pb/R$ ,  $b = 2q \sin C = qc/R$ . Multiplier et simplifier.

## **Paragraphe 1.2**

- 1 - Appliquer le théorème de Jean de Céva en prenant  $BX = XC$ ,  $CY = YA$ ,  $AZ = ZB$ .
- 2 - Appliquer le théorème de Jean de Céva en prenant  $BX = c \cos B$ ,  $XC = b \cos C$ , etc.
- 3 - Soient  $O$  le point où se coupent  $BB'$  et  $CC'$ , et  $A_1$  le point où  $OA$  coupe  $A'B'$ . Les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  étant semblables, on peut écrire

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A_1B'}{AB}.$$

Il en résulte que  $A_1$  coïncide avec  $A'$ .



- 4 - Les angles  $\widehat{CXA}$  et  $\widehat{AXB}$  étant supplémentaires, les termes où figurent leurs cosinus s'annulent.

### Paragraphe 1.3

- 1 - Lorsqu'un triangle a un angle obtus, il est inscrit dans un arc de cercle inférieur à une demi-circonférence, et deux de ses hauteurs coupent les côtés opposés sur leurs prolongements.
- 2 - En partant de la figure 1.3B, y tracer un segment  $A'D$  égal et parallèle à  $BB'$ , de sorte que  $A'CDB'$  soit un parallélogramme ayant pour centre le point  $E$ , milieu de  $CB'$ . Les côtés du triangles  $DAA'$  sont alors égaux et parallèles aux trois médianes du triangle  $AVC$ , d'où il résulte :

$$\frac{S(ABC)}{S(DAA')} = \frac{S(CAA')}{S(EAA')} = \frac{CA}{EA} = \frac{4}{3}.$$

- 3 - Soit  $G$  le point où se coupent les deux médianes égales  $BB'$  et  $CC'$  (figure analogue à la fig. 1.3B). Comme l'on a :  $BG = 2/3 BB' = 2/3 CC' = CG$ , le triangle  $GBC$  est isocèle et  $\widehat{C'CB} = \widehat{B'BC}$ . Par suite, les triangles  $B'BC$  et  $C'CB$ , ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux. D'où  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ; le triangle  $ABC$  est donc isocèle et  $B = C$ .

- 4 - Soient  $BE$  et  $CF$  les hauteurs égales. On a :

$$b \cdot BE = 2 S(ABC) = c \cdot CF;$$

d'où  $b = c$ .

- 5 - Avec les notations de la figure 1.3D on a  $BL/LC = c/b$ , etc.

- 6 - En appliquant le théorème de Stewart (exercice 4 du paragraphe 1.2)

on a :

$$a(p^2 + 1/4 a^2) = 1/2 a(b^2 + c^2)$$

d'où :

$$p = 1/2 \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

- 7 - Appliquer le théorème de Stewart avec  $m = kc$ ,  $n = kb$ ,  $k = a/(b + c)$ .

- 8 -  $12 \sqrt{2}/7$ .

- 9 - Si l'on abaisse la hauteur  $CF$ , dans le triangle  $ABC$  des figures 1.1A et B, on voit que les triangles  $BCJ$  et  $FCA$  sont semblables. D'où :  $BC/CJ = FC/CA$  et  $BC \times CA = CJ \times FC$ .

**Paragraphe 1.4**

1 - Avec les notations de la figure 1.4A, les rayons des trois cercles sont  $x, y, z$ , et leurs sommes deux à deux  $y + z = a, z + x = b, x + y = c$ . D'où, par addition,  $x + y + z = s$ , etc.

2 - Appliquer le théorème 1.42 et l'exercice 3 du paragraphe 1.1.

3 - Appliquer le théorème de Jean de Céva avec :

$$AY = AZ = x, BZ = BX = y, CX = CY = z.$$

4 - Les bissectrices intérieure et extérieure de chacun des angles  $A, B, C$  du triangle  $ABC$  (fig. 1.4B) sont orthogonales.

$$\begin{aligned} 5 - \quad S(ABC) &= S(I_aCA) + S(I_aAB) - S(I_aCB) \\ &= \frac{1}{2}(b + c - a)r_a = (s - a)r_a. \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que les triangles  $AI_aY_a$  et  $AIY$  sont semblables; d'où  $r_a/r = s/(s - a)$ .

$$6 - \frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = \frac{s - a}{s} + \frac{s - b}{s} + \frac{s - c}{s} = 1.$$

**Paragraphe 1.5**

1 - D'après l'énoncé on a :  $\widehat{BCM} = 48^\circ = \widehat{CMB}$ , et  $\widehat{CBN} = 12^\circ = \widehat{BNC}$ . Il en résulte  $BM = BC = CN$ . — Remarquer que  $I_a$ , centre d'un des cercles ex-inscrits, est situé non pas sur le segment  $CN$  mais sur le segment  $BM$ .

2 - Lorsqu'on l'applique au triangle de Bottema (voir exercice précédent), le lemme 1.512 est naturellement exact sous la forme qu'on lui a donnée. Cependant, s'il s'agissait de considérer les bissectrices intérieures (et non plus extérieures) des angles  $B$  et  $C$ , on verrait que le cercle circonscrit au triangle  $BCN$  coupe la droite  $BM$  en un point  $M'$  tel que  $B$  soit entre  $M$  et  $M'$ . On ne peut donc plus affirmer que  $BM > BM'$ .

3 - L'égalité  $BM = CN$  entraîne

$$ca \left[ 1 - \left( \frac{b}{c + a} \right)^2 \right] = ab \left[ 1 - \left( \frac{c}{a + b} \right)^2 \right],$$

d'où

$$a(a + b + c) [(a + b + c)(a^2 + bc) + 2abc] (b - c) = 0.$$

### Paragraphe 1.6

- 1 - Le quadrilatère  $BCEF$  étant inscriptible dans un cercle, il en résulte que  $\widehat{AEF} = B$ ; les triangles  $AEF$  et  $ABC$  sont donc semblables.
- 2 - Le point  $H$  est toujours situé sur la bissectrice intérieure de  $\widehat{EDF}$ ; mais il l'est aussi sur les bissectrices extérieures des angles  $\widehat{FED}$  et  $\widehat{DFE}$ .
- 3 - Voir la solution de l'exercice 2.
- 4 -  $\widehat{HAC} = 90^\circ - C$  et  $\widehat{OAC} = 90^\circ - B$ .

### Paragraphe 1.7

- 2 - En se reportant à la figure 1.6A, on voit que  $\overline{OA'}^2 = R^2 - (1/2 a)^2$ . D'autre part, en fonction de  $GA' = n$ , on a  $AG = 2n$  et  $AA' = 3n$ . De plus, d'après l'exercice 6 du paragraphe 1.3,

$$3n = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Appliquons maintenant le théorème de Stewart (voir l'exercice 4 du paragraphe 1.2) au triangle  $OAA'$ ; il vient

$$3n(\overline{OG}^2 + 2n^2) = 2n\overline{OA'}^2 + n\overline{OA}^2 = n(2R^2 - 1/2a^2 + R^2);$$

d'où

$$\overline{OH}^2 = (3\overline{OG})^2 = 9R^2 - 3/2a^2 - 18n^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

- 3 - Pour envisager un cas précis, supposons  $b > c$  (sinon permuter  $B$  et  $C$ ).

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\overline{BA}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AA'}^2 - \overline{DA'}^2, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$c^2 - \left(\frac{a}{2} - \overline{DA'}\right)^2 = \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) - \overline{DA'}^2;$$

$$\text{et, par suite : } a \cdot \overline{DA'} = 1/2 (b^2 - c^2).$$

- 4 - Si la droite d'Euler est parallèle à  $BC$ , elle coupe  $AD$  au tiers de sa longueur : Donc  $OA' = AD/3$ . Il suffit alors de remplacer  $AD$  et  $OA'$  par les expressions suivantes :

$$AD = b \sin C = 2R \sin B \sin C,$$

$$OA' = R \cos A = R (\sin B \sin C - \cos B \cos C).$$

pour avoir le résultat demandé :  $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 3$ .

**Paragraphe 1.8**

- 1 -  $OA' = 1/2 AH = AK$ , et  $OA'$  est parallèle à  $AK$ .
- 2 - D'après la remarque faite à la fin du paragraphe 1.6,  $EF$  est perpendiculaire à  $OA$ , et à  $A'K$  qui lui est parallèle. Le diamètre  $A'K$  coupe donc en leur milieu la corde  $EF$  et l'arc de cercle  $EF$ .
- 3 - Le triangle  $ABC$  est le triangle orthique du triangle  $I_a I_b I_c$ .
- 4 - Soit  $P$  le point commun aux trois cercles égaux  $PBC$ ,  $PCA$ ,  $PAB$  dont les centres sont respectivement  $O_a$ ,  $O_b$ ,  $O_c$ . On voit que les quadrilatères  $PO_bAO_c$  et  $PO_aCO_b$  sont des losanges. Donc les triangles  $PO_bO_a$  et  $O_bAC$  sont égaux, et  $AC = O_cO_a$ . D'une façon analogue,  $BA = O_aO_b$  et  $CB = O_bO_c$ . Par suite les triangles  $ABC$  et  $O_aO_bO_c$  sont égaux, comme le sont aussi les rayons de leurs cercles circonscrits. D'autre part,  $AP$  est perpendiculaire à  $O_bO_c$  qui est parallèle à  $BC$  : les hauteurs du triangle  $ABC$  sont donc  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$ . Finalement,  $P$  coïncide avec l'orthocentre  $H$ .
- 5 -  $DK$  étant perpendiculaire à  $BC$ , et  $KA'$  étant un diamètre du cercle des neuf points, celui-ci coupe le côté  $BC$  sous un angle

$$\widehat{DKA'} = \widehat{HKN} = \widehat{HAO} = |B - C|$$

(voir l'exercice 4 du paragraphe 1.6).

**Paragraphe 1.9**

- 1 - Prolonger  $CP$  jusqu'en un point  $D$  tel que le triangle  $BDP$  soit équilatéral. Les triangles  $DCB$  et  $PCQ$  étant semblables, on a :  $DB/PQ = DC/PC = 1 + (DP/PC)$ . En divisant par  $DB = PB = DP$ , il vient  $1/PQ = (1/PB) + (1/PC)$ .
- 2 - Admettons, tout d'abord, que  $ABCD$  soit, non pas un carré mais un rectangle; et supposons aussi que  $PD < CD$ . Il en résulte :  $\widehat{CPD} > 60^\circ$ ,  $\widehat{DPA} < 75^\circ$ ,  $AD < PD < CD$ . Si, au contraire, on avait  $PD > CD$ , il faudrait changer le sens des inégalités précédentes. Dans les deux cas  $ABCD$  ne serait pas un carré. Pour que l'on ait un carré, il faut donc que  $PD = CD$ .

On peut aussi raisonner comme suit : construisons le triangle  $BQC$  égal au triangle  $APB$  (voir la figure 1.9C). Il en résulte que :  $BPQ$  est équilatéral,  $CQ$  (prolongé) est perpendiculaire à  $PB$  qu'il coupe en son milieu, et  $CP = CB = CD$ . De même,  $DP = DC$ .

3 - D'après la figure 1.9D, on a les relations

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\delta + \varepsilon)}{\sin \gamma} &= \frac{\sin(\delta + \varepsilon)}{\sin \alpha} \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{CD}{PC} \frac{PC}{BC} = \frac{CD}{BC} = \frac{AB}{AD} \\ &= \frac{AB}{PA} \frac{PA}{AD} = \frac{\sin(\gamma + \varepsilon)}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \delta} = \frac{\sin(\gamma + \varepsilon)}{\sin \delta},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sin \gamma \sin(\gamma + \varepsilon) &= \sin \delta \sin(\delta + \varepsilon), \\ \cos \varepsilon - \cos(2\gamma + \varepsilon) &= \cos \varepsilon - \cos(2\delta + \varepsilon), \\ \gamma &= \delta.\end{aligned}$$

1 - Soient  $F$  le point où la parallèle à  $BC$ , menée par  $D$ , coupe  $AB$ , et  $G$  le point où  $CF$  coupe  $BD$ . Le triangle  $BCG$  est équilatéral et  $BG = BC$ . De plus,  $CBE$  est isocèle et  $BE = BC$ . Donc  $BGE$  est isocèle et

$$\widehat{BGE} = 80^\circ, \quad \widehat{FGE} = 40^\circ.$$

Comme  $\widehat{EFG} = 40^\circ$ , le triangle  $FEG$  est isocèle et  $FE = EG$ . De même  $DF = DG$ . Les deux triangles  $GDE$  et  $FDE$  sont donc égaux,  $DE$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{FDG}$ , et  $\widehat{EDB} = 30^\circ$ .

5 - Les extrémités des arcs égaux sont quatre des sommets d'un hexagone régulier, les deux autres étant les milieux de deux côtés du triangle équilatéral. Si l'on prolonge ces derniers de la moitié de leur longueur, on obtient un triangle équilatéral plus grand dont les trois côtés portent trois côtés (de deux en deux) de l'hexagone. En faisant la figure correspondante, on voit donc immédiatement que le côté du triangle équilatéral pris comme diamètre du demi-cercle est lui-même partagé en trois parties égales par les deux droites issues du sommet opposé.

## Paragraphe 2.1

1 -  $R^2$ . Le centre du cercle.

2 - Un cercle concentrique.

3 -  $t$  est la longueur de chacune des tangentes menées par le point au cercle.

$$4 - \overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{OU}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{QT}^2.$$

5 -  $R(R - 2r) = R^2 - 2rR = d^2 \geq 0$ . Mais  $R > 0$ . Donc  $R - 2r \geq 0$ .

6 - La puissance cherchée est :  $d^2 - R^2 = -2rR$ .

- 7 - Si, dans la figure 1.2C, on écrit  $P$  à la place de  $A$ , et  $A$  à la place de  $X$ , on a :

$$\overline{BC} (\overline{PA}^2 + \overline{BA} \times \overline{AC}) = \overline{PC}^2 \times \overline{BA} + \overline{PB}^2 \times \overline{AC},$$

c'est-à-dire :

$$\overline{BC} (\overline{PA}^2 + \overline{CA} \times \overline{AB}) + \overline{PB}^2 \times \overline{CA} + \overline{PC}^2 \times \overline{AB} = 0.$$

- 8 - Partager  $BC$  en trois parties égales par les points  $U$  et  $V$  tels que  $BU = UV = VC$ . D'autre part,  $GU$  étant parallèle à  $AB$  et  $GV$  à  $AC$ , on a

$$\begin{aligned} \overline{GX} \left( \frac{1}{\overline{GX}} + \frac{1}{\overline{GY}} + \frac{1}{\overline{GZ}} \right) &= 1 + \frac{\overline{VX}}{\overline{VC}} + \frac{\overline{UX}}{\overline{UB}} = 1 + \frac{\overline{VX} - \overline{UX}}{\overline{VC}} \\ &= 1 + \frac{\overline{VU}}{\overline{UV}} = 0. \end{aligned}$$

- 9 - 143,2 km.

## Paragraphe 2.2

- 1 - C'est l'axe radical des cercles, en excluant, cependant, leur corde commune lorsqu'ils se coupent.
- 2 - Les milieux des quatre segments situés sur les tangentes entre leurs points de contact avec les deux cercles sont tous sur l'axe radical de ces derniers.
- 3 - Les triangles  $PAB$  et  $AQB$  étant semblables, on a  $\widehat{PBA} = \widehat{ABQ}$ ; de plus  $Q$  est situé sur  $BP$ , et  $PB/AB = AB/QB$ . De même, les triangles  $AQB$  et  $ABR$  étant semblables, il en résulte  $\widehat{BAQ} = \widehat{RAB}$ ;  $R$  est situé sur  $AQ$ , et  $AQ/AB = AB/AR$ . D'autre part,

$$PB \times QB = \overline{AB}^2 = AQ \times AR;$$

$A$  et  $B$  sont donc équidistants du centre du cercle  $PQR$ , et ce dernier est symétrique par rapport à la perpendiculaire au milieu du segment  $AB$ . Ainsi, les points  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  appartiennent au cercle  $PQR$  et sont les points d'intersection de ce dernier et des droites  $BR$ ,  $AP'$  et  $AP$ , respectivement.

- 4 - En écrivant l'équation 2.23 sous la forme  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$ , on voit qu'elle représente un cercle à condition que l'on ait  $c < a^2 + b^2$ .
- 5 - Décrire un cercle dont le centre ne soit pas situé sur la ligne des centres des cercles donnés, et qui coupe, l'un d'eux en  $A$  et  $B$ , l'autre en  $C$  et  $D$ . On obtient l'axe radical cherché en abaissant la perpendiculaire sur la ligne des centres à partir du point d'intersection des droites  $AB$  et  $CD$ .

### Paragraphe 2.3

- 1 - Soit  $O$  le point où la tangente en  $T$ , commune aux deux cercles, coupe  $AB$ . Les triangles  $OAT$  et  $OTB$  sont semblables, et  $OT = OP$ . On peut écrire :

$$\frac{TA}{TB} = \frac{OP}{OB} = \frac{OA}{OP} = \frac{OP - OA}{OB - OP} = \frac{AP}{PB}.$$

Appliquer ensuite la réciproque du théorème 1.33.

- 2 - Les six tangentes menées par  $O$  aux trois cercles ont toutes la même longueur; leurs points de contact sont donc situés sur un même cercle.

### Paragraphe 2.4

- 1 - Sur la figure 2.4B, les points  $D, E, F$  sont les milieux de  $HD', HE', HF'$ . Il s'ensuit que les côtés du triangle  $D'E'F'$  sont parallèles à ceux du triangle orthique  $DEF$ .

$$\begin{aligned} 2 - \widehat{MLN} &= \widehat{MLA} + \widehat{ALN} = \widehat{MBA} + \widehat{ACN} \\ &= \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{1}{2}(B + C). \end{aligned}$$

On a, de même :

$$\widehat{NML} = 1/2 (C + A) \quad \text{et} \quad \widehat{LNM} = 1/2 (A + B).$$

### Paragraphe 2.5

- 1 - Non.
- 2 - Le point diamétralement opposé à  $B$ .
- 3 - Les sommets d'un triangle appartiennent à leurs propres droites de Simson.
- 4 - Mener les droites  $PB, PC, C_1A_1, A_1B_1$ . Les quadrangles  $A_1PB_1C$  et  $A_1BC_1P$  étant inscriptibles, on a les égalités

$$\begin{aligned} \widehat{A_1B_1P} &= \widehat{A_1CP} = \widehat{BCP} = \widehat{C_1BP} = \widehat{C_1A_1P}, \\ \widehat{PA_1B_1} &= \widehat{PCB_1} = \widehat{PBC} = \widehat{PBA_1} = \widehat{PC_1A_1}, \end{aligned}$$

Par suite les triangles  $PA_1 B_1$  et  $PC_1, A_1$  sont semblables d'où  $\overline{PA_1}^2 = \overline{PB_1} \times \overline{PC_1}$ .

**Paragraphe 2.6**

- 1 - Appliquer les théorèmes 2.61 et 2.62 en prenant  $AB = BC = AC$ .
- 2 - Mener les diagonales  $AC$  et  $BD$ , puis appliquer le théorème de Ptolomée aux quadrilatères  $PABC$  et  $PDAB$ . Il en résulte :  $PA + PC = PB\sqrt{2}$  et  $PB + PD = PA\sqrt{2}$ .
- 3 - La figure 2.6A montre que

$$\widehat{QPR} = \widehat{QAR} = \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$$

et

$$\widehat{PRQ} = \widehat{PAQ} = \widehat{BAC}.$$

les deux triangles  $PQR$  et  $CBA$  sont donc semblables. Le théorème de Ptolomée donne alors :

$$AP \times RQ + AR \times QP = AQ \times RP.$$

Donc

$$AP \times AB + AR \times BC = AQ \times AC.$$

**Paragraphe 2.7**

- 1 - Soient  $OH$  la droite d'Euler d'un triangle  $ABC$  (voir fig. 1.7A), et  $PP'$  un diamètre du cercle circonscrit à ce dernier. Selon le théorème 2.72, les droites de Simson de  $P$  et  $P'$  coupent  $HP$  et  $HP'$  en leurs milieux,  $M$  et  $M'$  respectivement. Les points  $O$ ,  $M$ ,  $M'$ ,  $N$  étant les milieux de  $PP'$ ,  $HP$ ,  $HP'$ ,  $OH$  (théorème 1.82),  $N$  est aussi le milieu de  $MM'$ . De plus  $NM = 1/2 OP = 1/2 R$  est le rayon du cercle des neuf points (théorème 1.81) :  $MM'$  est donc un diamètre de ce dernier. Si les droites de Simson se coupent en  $X$ , l'angle  $\widehat{MXM'}$  est égal à  $90^\circ$  (théorème 2.71), et  $X$  est situé sur le cercle des neuf points.
- 2 - Dans un triangle équilatéral, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit coïncident.

**Paragraphe 2.8**

- 1 - Mis à part quelques changements de signes, la démonstration est essentiellement la même que celle concernant la théorème du papillon.
- 2 - Soient  $O$  le centre du cercle et  $X$  le point où  $AP$  coupe  $HT$ . Les deux triangles  $AHX$  et  $ABP$  sont semblables, comme le sont aussi les triangles  $HTB$  et  $TOP$ . D'où

$$\frac{HX}{AH} = \frac{BP}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{HT}{HB} = \frac{TO}{TP}.$$



D'où :

$$\frac{HX}{HT} = \frac{HX \times HT}{HT^2} = \frac{HX}{AH} \frac{HT}{HB} = \frac{BP}{TP} \frac{TO}{AB} = \frac{1}{2}.$$

- 3 - Supposons  $b > c$  (sinon permuter  $B$  et  $C$ ). Sur  $BC$ , prenons un point  $X$  tel que  $BX' = XC = s - c$ , et, par suite,

$$XA' = A'X' = 1/2 (b - c).$$

Menons la hauteur  $AD$ . D'après l'exercice 3 du paragraphe 1.7, on a  $DA' = (b^2 - c^2)/2a$ . Donc :

$$DX' = DA' + A'X' = \frac{b^2 - c^2}{2a} + \frac{b - c}{2} = \frac{(b - c)s}{a}.$$

De plus,  $AD = 2 S(ABC)/a = 2rs/a$ , ce qui entraîne :

$$\frac{DX'}{AD} = \frac{b - c}{2r} = \frac{XA'}{r} = \frac{XA'}{IX}.$$

Les triangles  $ADX'$  et  $IXA'$  sont donc semblables, et  $AX'$  est parallèle à  $IA'$ . Finalement la droite  $IA'$  coupe en leurs milieux  $XX'$  et aussi  $AX$ .

## Paragraphe 2.9

- 1 - Les droites  $UX$ ,  $VY$ ,  $WZ$  sont les bissectrices des angles du triangle équilatéral  $XYZ$ .
- 2 -  $A = 108^\circ$ ,  $B = C = 36^\circ$ .
- 3 - Les points  $A$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  divisent la circonférence du cercle en trois arcs égaux; tandis que l'arc  $Y'Z'$  est divisé en trois parties égales par  $Z$  et  $Y$ .
- 4 - En se reportant à la figure 2.9B, on voit que

$$\widehat{BZX} = 60^\circ + \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{BXC} = 120^\circ + \alpha.$$

D'où

$$\frac{ZX}{\sin \beta} = \frac{BX}{\sin (60^\circ + \alpha)}, \quad \frac{BX}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin (120^\circ + \alpha)} = \frac{2R \sin 3\alpha}{\sin (60^\circ - \alpha)},$$

et

$$\begin{aligned} ZX &= \frac{2R \sin 3\alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin (60^\circ + \alpha) \sin (60^\circ - \alpha)} = \frac{4R \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \beta \sin \gamma}{\cos 2\alpha - \cos 120^\circ} \\ &= 8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

- 5 - En prenant pour unité de longueur le côté du triangle équilatéral  $XYZ$ , on a :

$$\begin{aligned} BC &= Y'Z' = 3, & BY' &= CZ' = \sqrt{3} \\ \widehat{CBX} &= \widehat{CBZ'} = \sqrt{3}/3, & \widehat{ZBY'} &= 1/\sqrt{3} \\ \widehat{CBX} &= \widehat{ZBY'} = 30^\circ. \end{aligned}$$

### Paragraphe 3.1

- 1 - La figure 3.1B montre que  $PS = QR = BD/2$ .  
On a donc  $PS + QR = RD$ ; et, de même,  $PQ + RS = AC$ .
- 2 - Appliquer l'exercice 6 du paragraphe 1.3 aux triangles  $ABC$ ,  $CDA$ ,  $BDX$  de la figure 3.1F. (Il est intéressant de remarquer que, dans l'énoncé de la question l'expression « quadrangle quelconque » peut même comprendre un quadrangle gauche dont les couples de côtés adjacents sont situés dans quatre plans différents).
- 3 - Même méthode que pour l'exercice 2 en prenant  $XY = 0$ .
- 4 - Appliquer le théorème de Ptolomée (2.61).

### Paragraphe 3.2

- 1 - Remarquer que les tangentes à un cercle menées par un point extérieur sont égales; puis, appliquer le théorème 3.22 avec  $s = a + c = b + d$ .
- 2 - a) 84, b)  $4\sqrt{26}$ .
- 3 -  $r = S(ABC)/s = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}/s$ .
- 4 - D'après l'exercice 5 du paragraphe 1.4, et l'exercice 3 du paragraphe 1.1, on a :

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= S(ABC) \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{S(ABC)abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{S(ABC)} = 4R, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S(I_a I_b I_c) &= S(I_a C B) + S(I_b A C) + S(I_c B A) + S(ABC) \\ &= 1/2 (ar_a + br_b + cr_c) + sr \\ &= 1/2 s(r_a + r_b + r_c - r) - 1/2 (s-a)r_a - 1/2 (s-b)r_b \\ &\quad - 1/2 (s-c)r_c + 3sr \\ &= 1/2 s \cdot 4R - 3/2 S(ABC) + 3/2 S(ABC) \\ &= 2sR. \end{aligned}$$

$$5 - K = \frac{abn}{4R} + \frac{cdn}{4R} = \frac{(ab + cd)n}{4R} = \frac{lmn}{4R}.$$

$$6 - l = a, \quad m = b, \quad n = c, \quad K = abc/4R.$$

7 - Calculer une première expression de l'aire  $K$  en appliquant l'exercice 3 du paragraphe 1.1 aux deux triangles de la figure 3.2B et en ajoutant les résultats. Calculer  $K$ , d'une manière analogue mais en utilisant, cette fois, l'autre diagonale  $EF$  ( $l$  non représentée, au lieu de  $n$ ). Multiplier les deux expressions de  $K$  ainsi obtenues, puis appliquer le théorème de Prolomée, 2.61.

8 - Comparer les arcs que déterminent sur le cercle les bissectrices des angles en  $V$  et  $W$ .

9 - Par  $P$  mener des perpendiculaires aux deux couples de côtés parallèles et appliquer quatre fois le théorème de Pythagore. (D'ailleurs, on voit aisément que  $P$  pourrait, tout aussi bien, être extérieur au plan du rectangle).

10 - Soient  $ABCD$  le quadrangle inscrit dans un cercle de diamètre  $d$ , et  $P$  le point donné sur ce cercle. D'après l'exercice 9 du paragraphe 1.3, le produit des distances de  $P$  à  $AB$  et  $CD$  est égal à :

$$\begin{aligned} \frac{PA \times PB}{d} \frac{PC \times PD}{d} &= \frac{PB \times PC}{d} \frac{PD \times PA}{d} \\ &= \frac{PA \times PC}{d} \frac{PB \times PD}{d}. \end{aligned}$$

### Paragraphe 3.3

1 - Mener les diagonales  $CP$  et  $CQ$  des deux carrés construits respectivement sur les côtés  $BC$  et  $CA$  du triangle  $ABC$ , et construire le triangle rectangle isocèle  $BAR$  ayant  $AB$  pour hypoténuse. Les triangles  $PCB$ ,  $CQA$  et  $BAR$  sont semblables : on peut donc appliquer les théorèmes 3.33 et 3.35.

2 - a)  $PQ_1$ ,  $QO_2$ , et  $RO_3$  sont les perpendiculaires au milieu des côtés du triangle  $ABC$ .

b) Soient  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , les points où  $AO_1$ ,  $BO_2$ ,  $CO_3$  coupent les côtés du triangle  $ABC$ . On a

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S(ABO_1)}{S(CAO_1)} = \frac{c \sin (B + 30^\circ)}{b \sin (C + 30^\circ)}$$

et des expressions analogues pour  $CY/YA$  et  $AZ/ZB$ . Ainsi peut-on appliquer la réciproque du théorème de Jean de Céva.

c) Les triangles  $PCA$  et  $BCQ$  étant égaux, on en déduit  $PA = BQ$ , et, de même  $BQ = CR$ . De plus  $\widehat{PFC} = \widehat{PBC} = 60^\circ$ ; puis, d'une façon analogue,

$$\widehat{CFQ} = 60^\circ, \quad \widehat{QFA} = 60^\circ.$$

D'où, par addition,  $\widehat{PFA} = 180^\circ$ , ce qui signifie que  $F$  est situé sur  $AP$ . On pourrait aussi montrer que  $F$  est sur  $BQ$  et sur  $CR$ . Ces trois droites forment six angles de  $60^\circ$  ayant  $F$  pour sommet commun.

3 - Appliquer la réciproque du théorème de Jean de Céva, comme dans l'exercice 2-b.

4 - Supposons que les figures 3.3B et 3.3C soient réunies en une seule. D'une part, les six triangles  $BO_1N_1$ ,  $CN_1O_1$ ,  $CO_2N_2$ ,  $AN_2O_2$ ,  $AN_3O_3$  et  $BN_3O_3$  sont équilatéraux; d'autre part les six autres triangles  $AN_3O_3$ ,  $AO_3N_3$ ,  $O_3BN_1$ ,  $N_3BO_1$ ,  $N_2O_1C$ ,  $O_2N_1C$  sont directement semblables au triangle  $ABC$  et égaux entre eux. Il en résulte :

$$N_3O_2 = O_3N_2 = BN_1 = BO_1 = O_1C = N_1C = a/\sqrt{3},$$

$$N_1O_3 = O_1N_3 = CN_2 = CO_2 = O_2A = N_2A = b/\sqrt{3},$$

$$N_2O_1 = O_2N_1 = AN_3 = AO_3 = O_3B = N_3B = c/\sqrt{3}.$$

De plus :

$$\widehat{O_1BO_3} = \widehat{O_1BN_1} + \widehat{N_1BO_3} = 60^\circ + B$$

et

$$\widehat{BO_3N_2} = \widehat{BO_3A} - \widehat{N_2O_3A} = 120^\circ - B;$$

le quadrangle  $BO_1N_2O_3$  (dont les côtés opposés sont égaux) est donc un parallélogramme. En appelant  $X$  le milieu de  $O_2O_3$ , et  $B'$  le milieu de  $CA$  (qui est aussi le milieu de  $O_2N_2$ ), on en conclut que  $XB'$  est parallèle à  $O_3N_2$  et à  $BO_1$ . Comme, d'autre part,  $BO_1 = 2XB'$ , les droites  $O_1X$  et  $BB'$  se coupent en un point  $G$  tel que  $O_1G = 2GX$ , et  $BG = 2GB'$ . Mais  $O_1X$  et  $BB'$  sont des médianes des triangles  $O_1O_2O_3$  et  $ABC$  respectivement. Il s'ensuit que  $G$  est le centre de gravité commun à ces deux derniers. Si l'on remplace le parallélogramme  $BO_1N_2O_3$  par  $BN_1O_2N_3$ , on trouve, d'une façon analogue, que  $G$  est aussi le centre de gravité du triangle  $N_1N_2N_3$ .

### Paragraphe 3.4

1 - En appelant  $AX$ ,  $BY$ ,  $CZ$  les bissectrices extérieures des trois angles, on a :

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{c}{b} \frac{a}{c} \frac{b}{a} = +1.$$

- 2 - Soient  $AX'$ , et  $BY'$  les bissectrices intérieures de deux angles, et  $CZ$  la bissectrice extérieure du troisième. On a

$$\frac{\overline{BX'}}{\overline{CX'}} \cdot \frac{\overline{CY'}}{\overline{AY'}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \left(-\frac{c}{b}\right) \left(-\frac{a}{c}\right) \frac{b}{a} = +1.$$

### Paragraphe 3.5

- 1 - Si, tout d'abord, les droites  $AC$  et  $BD$  sont parallèles,  $ABDE$  et  $C DFA$  sont des parallélogrammes; d'où l'on déduit  $BD = AE$ , et  $DF = CA$ , puis, par addition,  $BF = CE$ . Ainsi,  $EFBC$  est un parallélogramme, et  $EF$  est parallèle à  $BC$ . Si, maintenant,  $AC$  et  $BD$  ne sont pas parallèles, soit  $O$  leur point d'intersection. Comme

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OE}{OD} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OF},$$

il s'ensuit

$$OB \times OE = OA \times OD = OC \times OF,$$

et

$$\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OB}.$$

- 2 - Soient  $C$  et  $F$  les points communs, respectivement, aux deux premiers groupes de trois droites, comme dans les figures 3.5A ou 3.5B; et soit  $L$  le point où  $AB$  coupe  $DE$ . D'après le théorème de Pappus,  $L$  est sur  $MN$ ; les droites  $AB$ ,  $DE$  et  $NM$  sont donc concourantes.
- 3 - D'après le théorème de Pappus, la droite  $MN$  passe par le centre du parallélogramme; elle partage donc les côtés opposés en segments qui sont égaux deux par deux.
- 4 - Neuf points; neuf droites; trois droites passent par chacun des points; il y a trois points par droite.

### Paragraphe 3.6

- 1 - Si deux triangles  $PQR$  et  $P'Q'R'$  sont homologues, le centre d'homologie étant  $O$ , et si, d'autre part,  $QR$  et  $Q'R'$  sont parallèles,  $RP$  et  $R'P'$  étant également parallèles, on a

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{OR}{OR'} = \frac{OP}{OP'}.$$

Il en résulte que  $PQ$  est parallèle à  $P'Q'$ .

- 2 - Dix points; dix droites; trois droites passent par un point; il y a trois points par droite.
- 3 - a)  $OQR$  et  $P'FE$ ; b)  $OQ'R'$  et  $PFE$ ; c)  $ERR'$  et  $FQQ'$ .
- 4 - Les sommets de chaque pentagone sont situés sur les côtés de l'autre. La figure comporte, en effet, un total de six couples de pentagones présentant la même disposition; par exemple  $RPP'Q'D$  et  $EFQOR'$ .
- 5 - Soit  $P$  l'un des sommets du triangle  $PQR$ , les deux autres sommets,  $Q$  et  $R$ , étant sur les droites  $e$  et  $f$  données. Prenons les points  $D$  et  $E$  sur les prolongements de  $QR$  et  $RP$ , respectivement, et soit  $F$  le point où  $DE$  coupe  $QP$  prolongé. D'autre part, pour un point quelconque,  $Q'$ , de la droite  $e$ , soient  $R'$  le point où  $DQ'$  coupe  $f$ , et  $P'$  le point où  $ER'$  coupe  $FQ'$ . La droite passant par  $P$  que l'on cherche est  $PP'$ . Dans le cas où  $e$  et  $f$  sont parallèles, cette droite passant par  $P$  leur est elle-même parallèle (autrement, il y aurait contradiction avec le théorème 3.62).

### Paragraphe 3.7

- 1 - Prolonger les côtés  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  de façon à déterminer le triangle  $UVW$ ,  $A$  et  $B$  étant situés sur  $UV$ ,  $C$  et  $D$  sur  $VW$ ,  $E$  et  $F$  sur  $WU$ . Comme on a, par construction,  $UE = AD = FW$ , il en résulte  $UF = EW = BC$ . Ainsi,  $BCFU$  est un parallélogramme et  $CF$  est parallèle à  $AB$ . En ce qui concerne les centres de gravité, soient  $X$  et  $Y$  les points où  $BE$  coupe  $CF$  et  $AD$ , respectivement.  $CDEX$  et  $BCDY$  sont alors des parallélogrammes, et leurs centres,  $A'$  et  $F'$ , étant les milieux des diagonales  $DB$  et  $DX$ , sont situés sur une parallèle à  $BX$  et à  $AF$ . Or, on a

$$AF = BX = 2F'A';$$

par suite  $AA'$  et  $FF'$  se coupent en un point  $G$  tel que  $AG = 2GA'$  et  $FG = 2GF'$ . Mais  $AA'$  et  $FF'$  sont des médianes des triangles  $ACE$  et  $BDF$ . Le point  $G$  est donc le centre de gravité commun à ces deux triangles.

- 2 - Six.

### Paragraphe 3.8

- 1 - Soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  cinq sommets de l'hexagone.  $ABCDEF$ , situés sur un cercle qui coupe le côté  $AF$  en un second point  $F'$ . De plus, par hypothèse, les trois points  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , où se coupent respectivement les trois couples de droites  $(AB, DE)$ ,  $(CD, FA)$  et  $(BC, EF)$  sont alignés, comme sur la figure 3.8A. En appliquant le théorème de Pascal à l'hexa-

gone  $ABCDEF'$ , on voit que, comme  $EF$ ,  $EF'$  passe par le point  $N$  où se coupent  $BC$  et  $LM$ . Par suite,  $F'$  coïncide avec  $F$ .

- 2 - On voit, sur la figure 3.8B, comment le théorème de Pascal s'applique à un hexagone dégénéré  $ABBDEE$ . En l'appliquant d'une manière analogue aux hexagones dégénérés  $AABCCE$  et  $ABCCEA$ , on obtient le résultat cherché.

### Paragraphe 3.9

- 1 - Considérer l'hexagone dégénéré  $BQCEPF$ .
- 2 -  $AC$ ,  $BE$ ,  $QF$ .
- 3 - Considérer l'hexagone dégénéré  $AZBXC Y$ .

### Paragraphe 4.1

- 1 - Considérer le segment  $a$  comme un vecteur définissant une translation orientée, par exemple, de gauche à droite (voir la figure 4.1E). Appliquer cette translation au triangle  $ABC$ , d'abord dans le sens positif, puis dans le sens négatif. On a ainsi, respectivement, les triangles  $A'B'C'$  et  $A''B''C''$ . Puis joindre les points où se coupent les couples de droites  $(AB, A''C'')$  et  $(AC, A'B')$ .
- 2 - Mosaïque de triangles équilatéraux, chaque sommet étant entouré par six triangles.

### Paragraphe 4.2

- 1 - Effectuer des rotations de  $90^\circ$  autour des centres des carrés.
- 2 - a) De l'égalité  $CX/b = a/(a + b)$ , il résulte

$$\frac{CX}{XA} = \frac{CX}{b - CX} = \frac{a}{a + b - a} = \frac{a}{b},$$

et, de même,  $\frac{BY}{YC} = \frac{a}{b}$ .

De plus, on a :

$$\frac{AH}{HB} = \frac{S(CAH)}{S(CHB)} = \frac{b^2}{a^2}.$$

En multipliant membre à membre les trois équations précédentes, on a finalement :

$$\frac{CX}{XA} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{AH}{HB} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1.$$

D'après le théorème de Jean de Céva, les trois droites  $AI$ ,  $BJ$ ,  $CH$  sont donc concourantes.

b) Le triangle  $ABC$  forme la moitié d'un parallélogramme  $ABFC$  (non représenté sur la figure 4.2B) dont le centre  $M$  est le milieu de  $BC$  (non représenté). Si, à ce parallélogramme, on applique le résultat de l'exercice 1 ci-dessus, on voit que  $MO_2 = MO_3$ , et que les droites portant ces segments sont orthogonales. Il en est de même pour les segments  $MO_1 = MC$ . Une rotation de  $90^\circ$  au taux de  $M$  amène donc le triangle  $MO_1O_2$  à coïncider avec le triangle  $MCO_3$ .

c) Achever de représenter le rectangle  $KCGC'$ , ainsi que les parallélogrammes  $DAJA'$  et  $IBEB'$ . Des rotations de  $90^\circ$  effectuées dans le sens positif et négatif autour de  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  montrent que les six triangles  $B'IB$ ,  $C'CG$ ,  $CC'K$ ,  $JA'A$ ,  $DAA'$  et  $BEB'$  sont directement égaux au triangle  $ABC$ . Il s'ensuit que les points  $U$ ,  $V$ ,  $W$  sont les centres du rectangle et des deux parallélogrammes.

- 3 - Etudier le résultat d'une rotation de  $60^\circ$  autour de l'un des sommets du triangle équilatéral cherché.

### Paragraphe 4.3

- 1 - Soient  $O_1$  et  $O_2$  les deux cercles qui se coupent en  $A$  et en un second point  $B$ . Prendre le symétrique,  $O'_2$ , de  $O_2$  par rapport à sa tangente en  $A$ . La droite demandée est celle qui joint  $A$  au point  $C$  où se coupent à nouveau  $O_1$  et  $O'_2$ .
- 2 - Soient  $O$  et  $r$  le centre et le rayon du cercle donné. Décrire deux cercles l'un de centre  $A$  et de rayon  $r$ , l'autre de centre  $O$  et de rayon  $2r$  — qui se coupent en  $O_1$  et  $O_2$ . La droite demandée est celle qui joint  $A$  au milieu de  $OO_1$  (ou de  $OO_2$ ).
- 3 - Considérer le demi-tour effectué autour du milieu de l'une des diagonales.

### Paragraphe 4.4

- 1 - Au pied de la hauteur abaissée de  $C$  sur  $AB$ .
- 2 - Soit  $AB$  la base du triangle. Pour que l'aire de ce dernier reste constante, il faut que le troisième sommet  $C$  soit situé sur une parallèle



à  $AB$ . On doit donc chercher le minimum de  $AC + CB$ ; il est réalisé lorsque le triangle est isocèle.

- 3 - L'axe de symétrie cherché est la droite joignant  $A$  au milieu de  $O_1O_2$  (voir l'exercice 1 du paragraphe 4.3).

### Paragraphe 4.6

- 1 - Une solution possible comporte les stades suivants :  
(12, 0, 0), (7, 5, 0), (7, 0, 5), (2, 5, 5), (2, 1, 9), (11, 1, 0), (11, 0, 1),  
(6, 5, 1), (6, 0, 6).
- 2 - Remplir, tout d'abord, les vases contenant 11 et 5 litres. Donner à l'un des voleurs le vase contenant encore 8 litres, et utiliser les autres vases pour répartir la quantité restante en se posant le problème résumé sous la forme [16, 13, 11, 5], et dont la solution demande quatre étapes.
- 3 - En se reportant à la figure 1.9B, et avec ses notations, on arrive à des quadrilatères semblables  $AC_1PB_1$  et  $AB'_1P'C'_1$ ; d'où les égalités d'angles cherchées.

### Paragraphe 4.7

- 1 - Un cercle dont le rayon est la moitié du rayon du cercle donné.
- 2 - Sur le côté  $BC$ , et à l'extérieur du triangle, construire un carré  $CBED$  : les droites  $AD$  et  $AE$  coupent  $BC$  en des points qui sont deux des sommets du carré cherché.

### Paragraphe 4.8

- 1 - Soit  $AB'C'$  l'une quelconque des positions du triangle qui est la transformée du triangle  $ABC$  par une similitude de centre  $A$  ( $B'$  étant situé sur  $BC$ ). Les deux triangles  $ACC'$  et  $ABB'$  étant semblables, il en résulte les égalités :

$$\widehat{ACC'} = \widehat{ABB'} = \widehat{ABC}.$$

- 2 - En se reportant à l'ensemble de segments égaux donné dans la solution de l'exercice 4 du paragraphe 3.3, on voit que la rotation de  $120^\circ$  autour de  $G$  (qui amène  $O_1$  en  $O_2$ ,  $O_2$  en  $O_3$  et  $O_3$  en  $O_1$ ) amène  $N_3$  en  $N_2$ ,  $N_2$  en  $N_1$  et  $N_1$  en  $N_3$ . Il existe, naturellement, une similitude transformant  $O_1, O_2, O_3$  en  $N_1, N_2, N_3$ , respectivement. Cette similitude, cependant, n'est pas directe, mais de sens opposé : elle est le produit d'une homothétie et d'une symétrie.

**Paragraphe 4.9**

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| 1 - $x' = x + a, \quad y' = y + b.$ | 6 - $x' = -ky, \quad y' = kx.$   |
| 2 - $x' = -x, \quad y' = y$         | 7 - $x' = x + a, \quad y' = -y.$   |
| 3 - $x' = y, \quad y' = x.$         | 8 - $x' = kx, \quad y' = -ky.$   |
| 4 - $x' = -x, \quad y' = -y.$       | 9 - $x' = x^2, \quad y' = y.$  |
| 5 - $x' = kx, \quad y' = ky.$       | 10 - $x' = x, \quad y' = \begin{cases} y & \text{si } x \geq 0, \\ -y & \text{si } x < 0. \end{cases}$ |

**Paragraphe 5.1**

- 1 -  $AC \parallel BD, \quad AC \parallel DB, \quad CA \parallel BD, \quad CA \parallel DB,$   
 $BD \parallel AC, \quad DB \parallel AC, \quad BD \parallel CA, \quad DB \parallel CA.$

**Paragraphe 5.2**

$$1 - (BADC) = \frac{BD \times AC}{BC \times AD} = \frac{AC \times BD}{AD \times BC} = (ABCD).$$

L'égalité des autres rapports anharmoniques s'établit d'une manière analogue.

- 2 - a) 1; b) 2; c) 3; d) 1.

**Paragraphe 5.3**

- 1 - On obtient une figure en forme de fleur, et comprenant quatre demi-cercles égaux, décrits sur les côtés d'un carré et à l'extérieur de celui-ci.
- 2 - Les centres des cercles inscrit et ex-inscrits.
- 3 - a) Soient  $A$  et  $B$  les points où le cercle de centre  $P$  et de rayon  $PO$  coupe le cercle  $\omega$ . Les cercles de centres  $A$  et  $B$ , et passant par  $O$ , se coupent en un second point qui est l'inverse de  $P$ .
- b) Etant donné un point quelconque  $P_1$ , on peut, en ne recourant qu'à des cercles, déterminer un point  $P_2$  tel que  $OP_2 = 2OP_1$ , et, de même, un point  $P_n$  tel que  $OP_n = n \cdot OP_1$ . Si  $OP_1 > k/2n$ ,  $OP_n > k/2$  et, comme en a) ci-dessus, on peut construire l'inverse de  $P_n$ , soit  $P'_n$ . Par suite,  $P'_1$ , inverse de  $P_1$ , est donné par la relation  $OP'_1 = n \cdot OP'_n$ .

4 - a)  $A'B'C'$  est semblable à  $ABC$ .

b) D'après les équations 2.44,  $A'B'C'$  est semblable au triangle orthique  $DEF$ .

c)  $A'B'C'$  est semblable au triangle formé par les centres de cercles ex-inscrits,  $I_a I_b I_c$  (voir l'exercice 4 du paragraphe 1.4, et le théorème 1.61).

$$5 - \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}.$$

6 - Construire un triangle isocèle  $BO_1C$  dont les angles en  $B$  et  $C$  sont égaux à  $A + D - 90^\circ$ , et un autre triangle isocèle  $CO_2A$  dont les angles en  $C$  et  $A$  sont égaux à  $B + E - 90^\circ$ . Les cercles de centres  $O_1$  et  $O_2$  qui passent par  $c$  se coupent à nouveau en  $O$ , qui est le centre d'inversion cherché. Le rayon  $k$  de ce dernier est donné par la relation

$$k^2 = \frac{OA \times OB \times DE}{AB}.$$

### Paragraphe 5.4

1 - Soit  $O$  le centre du cercle  $\omega$ . Il en résulte que les triangles  $OAP$  et  $OPA'$  sont semblables; et, par suite :

$$PA/PA' = OA/OP = \text{constante}.$$

2 - Soit  $BC$  le diamètre. Les triangles  $POB$  et  $COP'$  sont semblables. D'où :

$$PO/OB = CO/OP' \quad \text{et} \quad OP \times OP' = k^2.$$

3 - Soient  $P$  et  $Q$  des points situés à l'intérieur du cercle donné  $\alpha$ . Les inverses de  $P$ ,  $Q$  et  $\alpha$  par rapport à tout cercle de centre  $P$  sont  $P_\infty$ ,  $Q'$  et un cercle  $\alpha'$ . Le point  $P_\infty$  étant extérieur à  $\alpha'$ , il en est de même de  $Q'$ . Et les deux tangentes menées par  $Q'$  à  $\alpha'$ , étant deux « cercles » passant par  $P_\infty$  et  $Q'$ , sont les inverses de deux cercles passant par  $P$  et  $Q$ , et tangents à  $\alpha$ .

4 - En ayant recours à un cercle d'inversion dont le centre est l'un des trois points de contact, la figure est transformée en deux droites parallèles et un cercle tangent à chacune d'elles.

5 - Si l'on prend pour cercle d'inversion un cercle quelconque de centre  $A$ , les inverses de  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont les points  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  tels que  $C'$  ne soit sur le segment  $B'D'$  que si  $AC \parallel BD$ . D'après le théorème 5.41, l'inégalité  $B'C' + C'D' > B'D'$  équivaut à

$$\frac{BC}{AB \times AC} + \frac{CD}{AC \times AD} > \frac{BD}{AB \times AD},$$

ou encore à

$$AD \times BC + AB \times CD > AC \times BD.$$

- 6 - Lorsque  $\omega$  et  $a$  se coupent ou sont tangents, la proposition est évidente. Si les deux cercles  $\omega$  et  $a$  sont extérieurs l'un à l'autre, prenons leurs équations sous la forme :  $x^2 + y^2 = k^2$  et  $x^2 + y^2 = ax$ . D'après l'exercice 5 du paragraphe 5.3, et en prenant  $\omega$  comme cercle d'inversion, l'inverse de  $a$  a pour équation.

$$\left(\frac{k^2x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{k^2y}{x^2 + y^2}\right)^2 = a \left(\frac{k^2x}{x^2 + y^2}\right),$$

c'est-à-dire,  $k^2 = ax$ .

- 7 - Couple de cercles sécants. Le second point d'intersection est  $P_\infty$ .

### Paragraphe 5.5

- 1 - Le cercle demandé passe par les points d'intersection de  $\omega$  et du cercle décrit sur  $OA$  comme diamètre.
- 2 - C'est le cercle  $PP'Q$ ,  $P'$  étant l'inverse de  $P$ .
- 3 - C'est le cercle  $PP_1P_2$ ,  $P_1$  et  $P_2$  étant les inverses de  $P$  par rapport aux cercles  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .
- 4 - Leur produit est égal à  $k^4$ .
- 5 - En transformant par inversion par rapport à tout cercle de centre  $O$ , on obtient un cercle  $a'$  et un point  $P'$  sur  $a'$ ; et il n'existe qu'une seule tangente à  $a'$  et  $P'$ . La transformation peut également être faite par rapport à un cercle quelconque de centre  $P$  : on obtient alors une droite  $a$  et un point  $O'$  non situé sur  $a$ . Par  $O'$  il ne passe qu'une seule parallèle à  $a$ .

### Paragraphe 5.6

- 1 - Les triangles  $ABC$  et  $AB_1C_1$ , étant symétriques par rapport à la droite  $AS$ , sont égaux; d'où :

$$\widehat{BSC_1} = \widehat{SBA} - \widehat{SC_1B} = B - C.$$

- 2 - D'après l'exercice 3 du paragraphe 1.7, on a :  $A'D = (b^2 - c^2)/2a$ . Or, nous avons vu (au paragraphe 5.6) que  $A'S = a(b - c)/2(b + c)$ . D'où

$$A'S \times A'D = \left(\frac{b - c}{2}\right)^2.$$

### Paragraphe 5.7

1 -  $c + c' = 0$ .

- 2 - Soit  $r$  le rayon du cercle bissecteur des deux cercles tangents, dont les rayons sont  $a$  et  $b$ . En prenant pour cercle d'inversion un cercle ayant pour centre le point de contact des cercles donnés, on transforme ce cercle bissecteur en une droite située à une distance  $k^2/2r$  du pôle d'inversion, et équidistante de deux droites parallèles situées, elles, à des distances  $k^2/2a$  et  $k^2/2b$ . D'où

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

- 3 - On obtient deux faisceaux orthogonaux de droites parallèles, telles que celles dont les équations sont  $x = \text{constante}$  et  $y = \text{constante}$ .
- 4 - Si l'on prend pour pôle d'inversion un point du cercle bissecteur, celui-ci est alors transformé en une droite, et une inversion par rapport à ce cercle se ramène à une symétrie.
- 5 - La symétrie par rapport à une droite est un cas particulier de l'inversion par rapport à un cercle.
- 6 - a) Supposons d'abord que  $AC \parallel BD$  et que les quatre points donnés soient situés sur un cercle  $\gamma$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux cercles orthogonaux à  $\gamma$ , l'un passant par  $A$  et  $C$ , l'autre par  $B$  et  $D$ ; et soient  $L$  et  $O$  les points où ils se coupent. Une inversion par rapport à tout cercle de centre  $L$  transformera  $\alpha$  et  $\beta$  en deux diamètres d'un cercle  $\gamma$ ,  $A'B'C'D'$  étant alors un rectangle de centre  $O'$ .
- b) Supposons maintenant que  $AB \parallel CD$  ou  $AD \parallel BC$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  restant définis comme ci-dessus. Cette fois, les cercles  $\alpha$  et  $\beta$  ne se coupent plus. Soient  $L$  et  $O$  les points limites du faisceau  $\alpha \beta$ , ou, en d'autres termes, les points où  $\gamma$  coupe la ligne des centres de  $\alpha$  et  $\beta$ . Une inversion par rapport à tout cercle de centre  $L$  transformera  $\alpha$  et  $\beta$  en deux cercles de même centre  $O'$ . Comme  $A'C'$  et  $B'B'$  (qui sont sur la même droite) sont des diamètres de ces cercles concentriques,  $A'B'C'D'$  est un parallélogramme dégénéré.
- c) Lorsque  $A, B, C, D$  ne sont pas situés sur un même cercle, ils déterminent quatre cercles distincts :  $ABC, ACD, ABD, BCD$ . Soit  $\mu$  l'un des deux cercles bissecteurs des cercles  $ABC$  et  $ACD$ , plus précisément, celui qui « sépare »  $B$  et  $D$  (de sorte que l'un de ces points soit extérieur au cercle, et l'autre intérieur; ou bien, que, si  $\mu$  est une droite,  $B$  et  $D$  soient de part et d'autre de celle-ci). D'une façon analogue, appelons  $\theta$  le cercle bissecteur des cercles  $ABD$  et  $BCD$  qui « séparent »  $A$  et  $C$ . Enfin, appelons  $L$  et  $O$  les points où se coupent  $\mu$  et  $\nu$ . Une inversion par rapport à tout cercle  $\omega$  de centre  $L$  transformera  $ABC$  et  $ACD$  en

deux cercles égaux  $A'B'C'$  et  $A'C'D'$  dont l'axe radical  $\mu'$  « sépare »  $B'$  et  $D'$ , de sorte que

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{C'D'A'}.$$

De même,  $\omega$  transformera  $ABD$  et  $BCD$  en deux cercles égaux,  $A'B'D'$  et  $B'C'D'$  dont l'axe radical  $\nu'$  « sépare »  $A'$  et  $C'$ , d'où

$$\widehat{D'A'B'} = \widehat{B'C'D'}.$$

Par suite,  $A'B'C'D'$  est un parallélogramme.

Enfin, dans chacun des cas ci-dessus, le couple de points  $(L, O)$  est appelé le *Jacobien* des deux couples de points  $(A, C)$  et  $(B, D)$ .

- 7 - Appelons  $AB$  et  $CD$  les diamètres des cercles donnés qui sont portés par la ligne des centres, de sorte que  $AC \parallel BD$ , et désignons par  $\alpha$  et  $\beta$  les cercles ayant  $AD$  et  $BC$ , respectivement, pour diamètres. Soient, enfin,  $L$  et  $M$  les points limites du faisceau  $\alpha\beta$ . Le cercle bissecteur cherché a  $LM$  pour diamètre — car une inversion par rapport à ce cercle, lequel est orthogonal à  $\alpha$  et à  $\beta$ , transforme  $A$  en  $D$ , et  $B$  en  $C$ .

### Paragraphe 5.8

- 1 - Appliquer l'exercice 4 du paragraphe 5.7.

- 2 - Dans l'identité trigonométrique

$$\frac{1}{\sin \theta} - \cotg \theta = \tg \frac{\theta}{2}$$

remplacer  $\theta$  par  $\frac{r}{2} + \frac{r}{n}$ .

- 3 - Du point de vue de la géométrie de l'inversion, la disposition des cercles que l'on recherche correspond tout simplement à la figure qui illustrerait le porisme de Steiner dans le cas de  $n = 4$ . Il s'ensuit que trois des écarts inversifs sont égaux à  $2 \log(\sqrt{2} + 3)$ , et les douze autres, à zéro.

### Paragraphe 5.9

- 1 - Le plus petit écart inversif, 6, entre les deux cercles est donné par l'équation :

$$\text{ch } \delta = \left| \frac{1 + 1 - (\sqrt{3} + 1)^2}{2} \right| = \sqrt{3} + 1.$$

Tandis que le cosinus hyperbolique du plus grand écart inversif est :

$$\left| \frac{1 + 1 - 4(\sqrt{3} + 1)^2}{2} \right| = 4\sqrt{3} + 7 = 2 \operatorname{ch}^2 \delta - 1 = \operatorname{ch} 2\delta.$$

Le cercle situé entre les deux cercles donnés ne peut pas être leur bissecteur, parce qu'il n'appartient pas au même faisceau.

- 2 - Les cercles de Soddy sont ceux du porisme de Steiner dans le cas où  $n = 3$ ; par suite

$$\operatorname{ch} \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\cos \pi/3} = 2.$$

- 3 - Le carré du rapport entre les longueurs des tangentes a pour valeur :

$$\frac{c^2 - (a + b)^2}{c^2 - (a - b)^2} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab} = \frac{\operatorname{ch} \delta - 1}{\operatorname{ch} \delta + 1} = \operatorname{th}^2 \frac{\delta}{2}.$$

- 4 - Une simple figure montre que la première partie est évidente. Quant à la seconde, il suffit d'appliquer le théorème 5.91 en prenant  $a = b$  et  $c = 2p$ , on obtient ainsi :

$$\operatorname{ch} 2\delta = \frac{(2p)^2 - b^2 - b^2}{2b^2} = 2 \left( \frac{p}{b} \right)^2 - 1.$$

$$5 - 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\delta}{2} + 1 = \operatorname{ch} \delta = \frac{r^2 + R^2 - (R^2 - 2rR)}{2rR} = \frac{r}{2R} + 1.$$

- 6 - La figure 1.3C montre que :

$$AH = \frac{b \cos A}{\sin B} = 2R \cos A.$$

En se reportant à l'exercice 4 du paragraphe 1.6, on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{OH}^2 &= R^2 + (2R \cos A)^2 - 4R^2 \cos A \cos (B - C) \\ &= R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C). \end{aligned}$$

Et comme  $ON = \frac{OH}{2}$ , il en résulte :

$$\begin{aligned} \cos \delta \text{ ou } \operatorname{ch} \delta &= [R^2 + (R/2)^2 - R^2(1/4 - 2 \cos A \cos B \cos C)] / R^2 \\ &= 1 + 2 \cos A \cos B \cos C. \end{aligned}$$

- 7 - Appliquer le résultat de l'exercice 4, la droite figurant dans ce dernier étant prise pour axe radical des cercles, d'équation  $x = 0$ . On a ainsi :

$$\operatorname{ch} \alpha = a/\sqrt{a^2 - d^2}, \text{ et } \operatorname{ch} \beta = b/\sqrt{b^2 - d^2}.$$

**Paragraphe 6.1**

- 1 - Une inversion par rapport au cercle  $\omega$  transforme le cercle décrit sur  $OA$  comme diamètre en la polaire  $a$  de  $A$  : celle-ci et les deux cercles appartiennent donc à un même faisceau; et, par suite,  $a$  est l'axe radical des cercles.
- 2 - Les polaires de  $A$  et de  $B$  sont perpendiculaires à  $OA$  et à  $OB$ , respectivement.
- 3 - La figure polaire réciproque d'une figure quelconque  $F$  par rapport à un cercle  $\omega$  de centre  $O$  est *semblable* à la figure polaire réciproque de  $F$  par rapport à un autre cercle de même centre : on peut donc prendre, pour cercle  $\omega$ , le *cercle inscrit* dans le polygone régulier donné,  $ABC\dots$ . Les pôles des côtés  $AB, BC, \dots$  seront alors les milieux des segments  $AB, BC, \dots$ , et les polaires des sommets  $A, B, C, \dots$  seront les droites joignant les couples de milieux adjacents. Si, d'une façon analogue, on choisissait, comme cercle  $\omega$ , le *cercle circonscrit* au polygone, la figure réciproque obtenue serait le polygone formé par les tangentes menées au cercle en chaque sommet.
- 4 - Les pôles de deux côtés opposés du rectangle sont équidistants de  $O$ , sur une droite  $D$ . Ceci est également vrai pour les deux autres côtés, la nouvelle droite,  $D'$ , étant la perpendiculaire à  $D$  passant par  $O$ , et la distance entre les nouveaux pôles étant généralement différente de celle entre les premiers. On obtient ainsi un quadrangle dont les diagonales sont orthogonales et se coupent mutuellement en leur milieu, c'est-à-dire un losange. On peut dire également que les deux axes de symétrie du rectangle déterminent des segments égaux sur les tangentes au cercle circonscrit au rectangle menées par les sommets de ce dernier.

**Paragraphe 6.2**

- 1 - D'après le théorème 6.21 la tangente au cercle conjugué est la bissectrice de l'un des deux angles supplémentaires formés par le cercle circonscrit et le cercle des neuf points; plus précisément, celui qui tend vers zéro quand l'angle obtus tend vers  $180^\circ$ . Par suite, avec les notations de l'exercice 6 du paragraphe 5.9 :

$$\theta = \frac{1}{2} (180^\circ - \delta).$$

**Paragraphe 6.3**

- 1 - La polaire de  $B_2$  par rapport au cercle de  $\alpha$  est  $b_2$ ; etc. Le pôle de la droite  $B_0B_2$  par rapport au cercle  $\beta$  est  $C_1$ ; etc.



- 2 - La droite  $OA$  est un axe de symétrie de chacune des figures de ce paragraphe. L'aspect des figures 6.3A et C suggère que, dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, il pourrait y avoir un deuxième axe de symétrie perpendiculaire à  $OA$  (ce qu'on établira au paragraphe 6.6).
- 3 - La figure 6.3B montre que chaque tangente  $t$  à la parabole est la polaire d'un point  $T$  du cercle  $\alpha$ . Le pied de la perpendiculaire menée par  $O$  à  $t$  est l'inverse de  $T$  par rapport au cercle  $\omega$ ; et son lieu géométrique, étant l'inverse de  $\alpha$  (qui passe par  $O$ ), est une droite.
- 4 - La figure 6.3C montre que l'asymptote  $u$ , étant la polaire de  $U$ , est perpendiculaire au côté  $OU$  du triangle rectangle  $OAU$ . L'angle en  $A$  de ce triangle,  $\theta$ , est donc tel que

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{OA}{AU} = \frac{OA}{r} = \epsilon.$$

Dans le cas d'une hyperbole équilatère, on a  $\theta = 45^\circ$  et  $\epsilon = \sqrt{2}$ .

- 5 - Une comète dont l'orbite serait parabolique ou hyperbolique ne se rapprocherait jamais du soleil, sans que l'on puisse cependant affirmer de façon absolue que l'on n'ait jamais vu un tel astre. Bien que la partie d'une orbite que nous pouvons observer ressemble, parfois, à une hyperbole en raison de la perturbation apportée par les planètes (surtout Jupiter, dont la masse est énorme), et bien que certaines orbites elliptiques soient si allongées qu'on ne puisse les distinguer de paraboles, on considère généralement comme appartenant au système solaire toutes les comètes connues (y compris les « non-périodiques », qui sont observées lors d'un seul bref passage, et ne reviennent jamais plus). Par rapport au soleil, leur vitesse n'est jamais assez grande pour qu'elles puissent s'éloigner dans l'« espace extérieur » où l'attraction de quelque autre étoile pourrait l'emporter sur celle du soleil.

## Paragraphe 6.4

$$1 - x^2 + y^2 = (l - \epsilon x)^2.$$

- 2 - La nouvelle origine a pour abscisse (dans les axes initiaux) :  $x = -\epsilon a$ ; elle est équidistante des points  $x = l/(\epsilon \pm 1)$  où le lieu géométrique de l'exercice 1 coupe l'axe des  $x$ . La nouvelle équation est alors :

$$(x - \epsilon a)^2 + y^2 = [l - \epsilon(x - \epsilon a)]^2 = (a - \epsilon x)^2,$$

ou

$$(1 - \epsilon^2) x^2 + y^2 = (1 - \epsilon^2) a^2 = la = \pm b^2,$$

ou, finalement,

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

le signe  $+$  correspondant à  $\varepsilon < 1$ , le signe  $-$  à  $\varepsilon > 1$ . Comme  $x$  et  $y$  n'interviennent qu'élevés à des puissances paires, l'ellipse et l'hyperbole sont symétriques par rapport à chacun des axes de coordonnées.

### Paragraphe 6.5

- 1 - Si deux triangles ont un centre d'homologie, ils ont aussi un axe d'homologie, et réciproquement.
- 2 - Si les six sommets d'un hexagone sont situés alternativement sur deux droites, les trois couples de côtés opposés se coupent en des points alignés. Si les six côtés d'un hexagone passent alternativement par deux points, les trois diagonales sont concourantes.
- 3 - Ils se coupent orthogonalement au centre du cercle.
- 4 - La droite à l'infini,  $l_\infty$ , étant la polaire de  $O$ , tout point de la conique situé à l'infini est le pôle (par rapport au cercle  $\omega$ ) d'une tangente au cercle  $\alpha$  passant par  $O$ . Par suite, le nombre des points à l'infini situés sur la conique est 0, 1, ou 2 suivant que  $O$  est intérieur à  $\alpha$ , sur  $\alpha$ , ou extérieur à  $\alpha$ .
- 5 - Sur la figure 6.3C,  $OU$  est tangente à  $\alpha$  en  $U$ ; par suite, l'un des points à l'infini de l'hyperbole est le point de contact de la tangente  $u$ , l'autre étant naturellement le point de contact de la seconde tangente  $v$ .
- 6 - La directrice étant la polaire de  $A$  (voir fig. 6.3B), tout point de cette droite est le pôle d'un diamètre du cercle  $\alpha$ , et les tangentes menées par ce point à la parabole sont les polaires des deux extrémités du diamètre. Celles-ci sous-tendant un angle droit de sommet  $O$ , leurs polaires sont orthogonales.
- 7 - A tour de rôle, chacun des points d'intersection de deux diagonales peut être assimilé au point  $P$  du théorème 6.51, les deux autres points analogues étant situés sur sa polaire.

### Paragraphe 6.6

- 1 -  $OP + O_1P = \varepsilon \cdot PK + \varepsilon \cdot K_1P = \varepsilon \cdot K_1K$ , ce qui est égal à  $\varepsilon$  fois la distance entre les deux directrices.
- 2 - Lorsque  $P$  est situé sur la branche gauche de l'hyperbole, comme sur la figure 6.6C, on a :

$$OP - O_1P = \varepsilon \cdot PK - \varepsilon \cdot PK_1 = -\varepsilon \cdot KK_1.$$

Si  $P$  est sur la branche de droite, changer le signe du résultat.

- 3 - Ce cercle est l'inverse de  $\alpha$  par rapport au cercle  $\omega$ . (Comparer à l'exercice 3 du paragraphe 6.3).

### Paragraphe 6.7

- 1 - La projection stéréographique est un cas particulier de l'inversion.
- 2 - Le plan perpendiculaire à  $OA$  en son milieu (voir fig. 6.7A) coupe la sphère  $\alpha'$  suivant un grand cercle particulier que, tout naturellement, on appelle l'équateur. Celui-ci est coupé par tout autre grand cercle en deux points diamétralement opposés. L'équateur a une caractéristique particulière : ses diamètres ont pour projections sur le plan  $\alpha$  des diamètres du cercle de ce plan qui a pour centre  $A$  et pour rayon  $2k$ .
- 3 - On peut considérer que  $P'_1$  et  $P'_2$  sont les points d'intersection de deux grands cercles de la sphère  $\alpha'$  dont l'un passe par  $O$  et  $A$ . Les points  $P_1$  et  $P_2$  du plan  $\alpha$  sont alors les points d'intersection d'une droite passant par  $A$  et d'un cercle passant par deux points,  $Q_1$  et  $Q_2$  par exemple, diamétralement opposés sur le cercle de centre  $A$  et de rayon  $2k$  qui est la « projection de l'équateur ». Or on a :

$$AP_1 \times AP_2 = AQ_1 \times AQ_2 = -(2k)^2;$$

les points  $P_1$  et  $P_2$  sont donc liés par une *inversion négative* qui est le produit d'une inversion par rapport au cercle « projection de l'équateur » et d'un demi-tour autour de son centre  $A$ .

- 4 - Il faut considérer une sphère  $\alpha'$  tangente aux douze arêtes d'un cube, en leurs milieux, et prendre pour point  $O$  l'un des points d'intersection de  $\alpha'$  et de la droite joignant deux sommets opposés du cube. (Si l'on prenait pour point  $O$  l'un des points d'intersection de  $\alpha'$  et de la droite joignant les centres de deux faces opposées, on obtiendrait, cette fois, la figure symétrique de celle qui correspond au porisme de Steiner dans le cas où  $n = 4$ ).



# Index

## A

Alignés (points  $-$ ), 44.  
 Anharmonique (rapport  $-$ ), 125, 131, 179.  
 Antipodaires (points  $-$ ), 177.  
 Apollonius (cercle d'  $-$ ), 133.  
 Application, 92.  
 Archimède, 6, 67.  
 Asymptotes, 164.  
 Autoconjugué (point  $-$ ), 159.  
 Autoconjuguée (droite  $-$ ), 159.  
 Axe d'homologie, 81.  
 Axe radical, 35, 38.

## B

Bell, 1, 35, 67.  
 Bevan, 24.  
 Bissecteur (cercle  $-$ ), 143, 145, 161.  
 Bissectrice, 1, 10, 15, 16.  
 Bolyai, 148.  
 Bottema (triangle de  $-$ ), 18.  
 Brahmagupta, 65, 66.  
 Braikenridge, 87.  
 Brianchon, 88.  
 Brunelleschi, 80.

## C

Casey, 26.  
 Centrale (projection  $-$ ), 175, 177.  
 Centre (coniques à  $-$ ), 171, 172.  
 — de gravité, 1, 8.  
 — d'homologie, 81.  
 — radical, 40.  
 Cercle (grand  $-$ ), 177.  
 — bissecteur, 143, 145, 161.

Cercle circonscrit, 1, 7, 161.  
 — conjugué à un triangle, 161.  
 — d'Apollonius, 133.  
 — des neuf points, 1, 22, 23, 161.  
 — de Soddy, 134, 153.  
 — d'Euler, 24.  
 — ex-inscrit, 1, 12.  
 — inscrit, 1, 11, 12.  
 — principal d'une conique, 175.  
 Cercles (faisceau de  $-$ ), 39, 140.  
 — orthogonaux, 134.  
 — tritangents, 14.

Céva, 4, 43.  
 Chaînette, 152.  
 Conique, 87, 156, 162.  
 Coniques à centre, 171, 172.  
 Conjugué (cercle  $-$ ), 161.  
 — (faisceau  $-$ ), 141.  
 — (triangle  $-$ ), 161.  
 Conjuguée (droite  $-$ ), 159.  
 Coordonnées cartésiennes, 35, 119.  
 — trilinéaires, 103.

## D

Deltoïde, 51.  
 Desargue, 80.  
 Demi-tour, 92, 98, 118.  
 Descartes, 35.  
 Directrice, 166.  
 Droite à l'infini, 168.  
 Droite autoconjuguée, 159.  
 — conjuguée, 159.  
 — de Pascal, 87.  
 — de Simson, 46, 47, 49, 71.  
 — d'Euler, 1, 20, 21, 161.  
 Droites concourantes, 58.  
 — remarquables, 1, 7.  
 Dualité (principe de  $-$ ), 88, 155, 157.

## E

Écart inversif, 144, 152.  
 Ellipse, 164.  
 Équilatère (hyperbole -), 166.  
 Erlangen (programme d'-), 93.  
 Euclide, 1, 17, 26, 30, 32, 85.  
 Euclidienne (géométrie non -), 148.  
 Euler, 1, 20, 21, 22, 24.  
 Excentricité, 163, 165.  
 Ex-inscrit (cercle -), 1.

## F

Fagnano, 101, 102.  
 Faisceau conjugué, 141.  
 — de cercles, 39, 140.  
 Fermat, 35, 96.  
 Feuerbach, 24, 138.  
 Fibonacci, 47.  
 Figure polaire réciproque, 162.  
 Fonctions hyperboliques, 149.  
 Forder, 71, 85.  
 Foyer, 156, 163, 166.

## G

Gauss, 148.  
 Géométrie non euclidienne, 148.  
 Gergonne (point de -), 14.  
 Gilbert, 17.  
 Grand cercle, 177.

## H

Hardy, 17.  
 Hauteur, 1, 40.  
 Héron d'Alexandrie, 67.  
 Hexagone, 84.  
 Homologie (axe d'-), 81.  
 — (centre d'-), 81.  
 Homomorphismes, 117, 118.  
 Homothétie, 92, 109, 118.  
 — centrale, 110, 118.  
 Homothétiques (triangles), 6, 83.  
 Horner, 52.  
 Hyperbole, 164.  
 — équilatère, 166.  
 Hyperboliques (fonctions -), 149.  
 Hypocycloïde de Steiner, 51.

## I

Infini (droite à l'-), 168.  
 — (point à l'-), 133, 168.  
 Inscrit (cercle -), 1, 11.  
 Inverses (points -), 126.

Inverseur de Peaucellier, 128.  
 Inversif (écart -), 144, 152.  
 Inversion, 126.  
 — (cercle d'-), 126.  
 — (plan d'-), 131, 176.  
 — (pôle d'-), 126.  
 — (sphère d'-), 176.  
 Isométrie, 93, 109, 118.

## K

Kepler, 30, 164.  
 Klein, 93.

## L

Lagrange, 72.  
 Lamb, 65.  
 Laplace, 72.  
 Lehmus, 1, 15.  
 Leibniz, 85.  
 Lieu géométrique, 158, 159.  
 Limites (points -), 141.  
 Linéaires (transformations -), 118.  
 Lipkin, 128.  
 Lobatchewsky, 148.  
 Lowell Putnam, 120.

## M

MacDonnell, 17.  
 MacLaurin, 87.  
 Magnus, 126.  
 Médiane, 1, 8, 9.  
 Ménélaus d'Alexandrie, 75.  
 — de Sparte, 75.  
 Miquel, 71.

## N

Napoléon, 69.  
 — (triangles de -), 69, 73, 117.  
 Naraniengar, 54.  
 Neuberg, 26, 27.  
 Newton, 33, 85, 164.

## O

Oppenheim, 28.  
 Orthique (triangle -), 9, 18, 19.  
 Orthocentre, 1, 9, 19, 40, 45.  
 Orthogonaux (cercles -), 134.

## P

Papillon, 52.  
 Pappus d'Alexandrie, 77.  
 Parabole, 164.  
 Parallélogramme dégénéré, 93.  
 — de Varignon, 60.

- Pascal, 85, 87.  
 Peaucellier, 128.  
 Petersen, 116.  
 Plan d'inversion, 131, 176.  
 — projectif, 155, 168, 176.  
 Point à l'infini, 131, 169.  
 — autoconjugué, 159.  
 — conjugué, 159.  
 — de Fermat, 96.  
 — de Gergonne, 14.  
 Points alignés, 44, 58.  
 — antipodaires, 177.  
 — inverses, 126.  
 — limites, 141.  
 — remarquables, 1, 7.  
 — séparés, 120, 121, 122.  
 Podaire (triangle -), 25, 27.  
 Polaire, 156-159.  
 — (réciprocité -), 155, 157, 162.  
 Pôle, 156.  
 — d'inversion, 126.  
 Poncelet, 24.  
 Porisme de Steiner, 146, 148.  
 Principe de dualité, 88, 155, 157.  
 Problème de Fagnano, 101, 102.  
 Projectif (plan -), 155, 168, 176.  
 Projection centrale, 175, 177.  
 — stéréographique, 175, 177.  
 Ptolémée, 48, 66.  
 Puissance d'un point, 33, 34.  
 Pythagore, 96.
- Q
- Quadrangle, 59.  
 — orthocentrique, 45.  
 Quadrangles inscrits, 65.
- R
- Radical (axe -), 35, 38.  
 — (centre -), 40.  
 Rapport anharmonique, 125, 131, 179.  
 — d'homothétie, 109.  
 Réciprocité polaire, 155, 157.  
 Rotation, 92, 95, 118.
- S
- Schoute, 116.  
 Segment de Céva, 4, 6, 9, 43.  
 Séparés (points -), 120, 121, 122.  
 Similitude, 93, 109, 111, 118.  
 Simson 6, 46, 47.  
 Sinus (Loi des -) 2.
- Smogorzhevskii, 88.  
 Soddy (cercle de -), 134, 153.  
*Sphaerica*, 75.  
 Sphère d'inversion, 176.  
 Steiner 1, 15, 34, 51.  
 — (porisme de -), 146, 148.  
 Stéréographique (projection -), 175, 177.  
 Stewart (théorème de -), 6.  
 Symétrie par rapport à un axe, 100, 118.
- T
- Théorème de Brianchon, 88, 169.  
 — — Desargues, 80, 179.  
 — — Feuerbach, 138.  
 — — Jean de Céva, 4, 77.  
 — — Ménélaüs, 75, 77.  
 — — Morley, 54, 57.  
 — — Pappus, 77, 179.  
 — — Pascal, 85, 169, 179.  
 — — Petersen-Schoute, 116.  
 — — Ptolémée, 48, 124.  
 — — Smogorzhevskii, 88.  
 — — Steiner-Lehmus, 1, 15, 17.  
 — — Stewart, 6, 11.  
 — — Varignon, 59, 60.  
 — du pivot, 71.  
 Transformation des figures, 92, 118.  
 Transformations continues, 117, 118.  
 — linéaires, 118.  
 Translation, 110, 118.  
 Triangle complémentaire, 20.  
 — conjugué, 161.  
 — de Bottema, 18.  
 — dégénéré, 46.  
 — orthique, 9, 18.  
 — podaire, 25, 27.  
 Triangles de Napoléon, 69, 73, 117.  
 — homologues, 80.  
 Trilinéaires (coordonnées), 103.
- V
- Varignon, 59, 60, 61.
- W
- Waerden, 67.  
 Wallace, 47.
- Y
- Yaglom, 73.
- Z
- Zoll, 52.

**Georg CANTOR**

- *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*

**Sadi CARNOT**

- *Réflexions sur la puissance motrice du feu*

**Élie CARTAN**

- *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*
- *Leçons sur la géométrie projective complexe* suivies par  
— *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*  
— *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*

**Augustin-Louis CAUCHY**

- *Analyse algébrique*

**Michel CHASLES**

- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*
- *La dualité et l'homographie*
- *Rapport sur les progrès de la géométrie*
- *Les porismes d'Euclide*

**Jean CHAZY**

- *La Théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*

**Émile CLAPEYRON**

- *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur*

**Rudolph CLAUSIUS**

- *Théorie mécanique de la chaleur*

**H. COMMISSAIRE et G. CAGNAC**

- *Cours de Mathématiques spéciales (3 tomes)*

**Antoine-Nicolas de CONDORCET**

- *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*

**Gaspard-Gustave CORIOLIS**

- *Théorie mathématique des effets du jeu de billard* suivie des deux célèbres Mémoires  
— *Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines*  
— *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*

**H.S.M. COXETER et S.L. GREITZER**

- *Redécouvrons la géométrie*

**Gaston DARBOUX**

- *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* suivies par  
— *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*  
— *Principes de géométrie analytique*  
(3 ouvrages en 3 volumes)

**Jean-Baptiste DELAMBRE**

- *Histoire de l'astronomie ancienne*
- *Histoire de l'astronomie au moyen âge*
- *Histoire de l'astronomie moderne*
- *Histoire de l'astronomie au dix-huitième siècle*

**R. DELTHEIL et D. CAIRE**

- *Géométrie et Compléments*

**Arnaud DENJOY**

- *L'énumération transfinie*
- *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*
- *Leçons sur la calcul des coefficients d'une série trigonométrique*

**René DESCARTES**

- *La Géométrie*

**Jean DIEUDONNÉ**

- *Éléments d'Analyse (9 tomes)*

**Paul A.M. DIRAC**

- *Les principes de la Mécanique quantique*

**Jacques DIXMIER**

- *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)*
- *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*
- *Algèbres enveloppantes*

**Paul DU BOIS-REYMOND**

- *Théorie générale des fonctions*

**René DUGAS**

- *Histoire de la Mécanique*

**Pierre DUHEM**

- *Les origines de la Statique*
- *Traité d'Énergétique*  
ou de *Thermodynamique générale*

**Jean-Baptiste DUMAS**

- *Leçons sur la philosophie chimique*

**Ernest DUPORCQ**

- *Premiers principes de géométrie moderne*

**Paul DUPUY**

- *La vie d'Évariste Galois*

**Albert EINSTEIN**

- *Sur l'Électrodynamique des corps en mouvement* suivi par  
— *L'Ether et la Théorie de la Relativité*  
— *La Géométrie et l'Expérience*  
— *Quatre conférences sur la Théorie de la Relativité*  
— *Théorie de la Gravitation généralisée*  
— *Sur le Problème cosmologique*  
— *Théorie relativiste du champ non symétrique*  
• *Lettres à Maurice Solovine*

**ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES  
MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES**

Tout ce qui a paru de l'édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK

- *Arithmétique et Algèbre*
- *Analyse*
- *Géométrie*
- *Mécanique*
- *Physique*
- *Géodésie et Géophysique*
- *Astronomie*
- *Table des matières*

**Federigo ENRIQUES**

- *Leçons de géométrie projective*

**Federigo ENRIQUES et Oscar CHISINI**

- *Courbes et fonctions algébriques d'une variable*

**F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)**

- *Exercices de géométrie* comprenant l'exposé des méthodes et 1550 figures
- *Géométrie descriptive – Éléments et Exercices* comprenant l'exposé des méthodes et 1680 figures
- *Trigonométrie – Éléments et Compléments* comprenant l'exposé des méthodes et les solutions de 875 exercices et problèmes



**Pierre FERMAT**

- *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante*, par Émile BRASSINNE

**J. FITZ-PATRICK**

- *Exercices d'arithmétique*

**Joseph FOURIER**

- *Théorie analytique de la chaleur*

**Maurice FRÉCHET**

- *Les espaces abstraits*

**Maurice FRÉCHET & Ky FAN**

- *Introduction à la Topologie combinatoire*

**Augustin FRESNEL**

- *Mémoire sur la diffraction de la lumière*

**Évariste GALOIS**

- *Œuvres mathématiques*, publiées par Joseph LIOUVILLE suivies par  
— *Influence de Galois sur le développement des mathématiques*, par Sophus LIE
- *Manuscrits*, publiés par Jules TANNERY
- *Écrits et mémoires mathématiques*  
Édition critique intégrale publiée  
par Robert BOURGNE et Jean-Pierre AZRA  
Préface de Jean DIEUDONNÉ

**George GAMOW**

- *Trente années qui ébranlèrent la physique*  
Histoire de la théorie quantique

**Félix R. GANTMACHER**

- *Théorie des matrices*

**Carl Friedrich GAUSS**

- *Recherches arithmétiques*

**Denis GERLL et Georges GIRARD**

- *Les Olympiades internationales de mathématiques*

**Josiah-Willard GIBBS**

- *Équilibre des systèmes chimiques*  
suivi par  
— *Josiah-Willard Gibbs*, par Pierre DUHEM

**Lucien GODEAUX**

- *Les Géométries*

**Francisco GOMES TEIXEIRA**

- *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches* (3 tomes)

**Édouard GOURSAT**

- *Cours d'Analyse mathématique* (3 tomes)

**Alfred George GREENHILL**

- *Les fonctions elliptiques et leurs applications*

**Édouard GRIMAUD**

- *Lavoisier, 1743-1794*  
d'après sa correspondance, ses manuscrits, ses papiers de famille et d'autres documents inédits

**Jacques HADAMARD**

- *Leçons de géométrie élémentaires* (2 tomes)
- *Leçons sur le Calcul des variations*
- *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*  
suivi par  
— *L'Invention mathématique*, par Henri POINCARÉ

**Paul R. HALMOS**

- *Introduction à la théorie des ensembles*

**Georges-Henri HALPHEN**

- *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*
- *Œuvres* (4 tomes)

**G. H. HARDY**

- *Divergent Series* (en anglais)

**Werner HEISENBERG**

- *Les principes physiques de la théorie des quanta*

**Hermann von HELMHOLTZ**

- *Optique physiologique* (2 tomes)
- *Théorie physiologique de la musique*

**Charles HERMITE**

- *Œuvres* (4 tomes)

**Charles HERMITE et Thomas Jan STIELTJES**

- *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*

**David HILBERT**

- *Les fondements de la géométrie*
- *Sur les problèmes futurs des mathématiques* (*Les 23 Problèmes*)
- *Théorie des corps de nombres algébriques*

**Camille JORDAN**

- *Traité des substitutions et des équations algébriques*
- *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (3 tomes)

**E. JOUFFRET**

- *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions*  
suivi des  
— *Mélanges de géométrie à quatre dimensions*

**Émile JOUGUET**

- *Lectures de Mécanique*

**Erich KAMKE**

- *Théorie des ensembles*

**Stephen C. KLEENE**

- *Logique mathématique*

**Félix KLEIN**

- *Le programme d'Erlangen*

**Casimir KURATOWSKI**

- *Topologie I et II*

**Jean LADRIÈRE**

- *Les limitations internes des formalismes*  
Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques

**Joseph-Louis LAGRANGE**

- *Mécanique analytique*
- *Théorie des fonctions analytiques*
- *Traité de la résolution des équations numériques*
- *Leçons sur le calcul des fonctions*

**Trajan LALESCO**

- *La géométrie du triangle*

**Gabriel LAMÉ**

- *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*

**Pierre-Simon LAPLACE**

- *Traité de Mécanique céleste* (6 tomes)
- *Exposition du Système du Monde*
- *Théorie analytique des probabilités* (2 volumes)  
Le premier volume contient le célèbre *Essai philosophique sur les probabilités*

**Pierre LAROUSSE**

- *Jardin des racines grecques* (Livre du Maître)  
suivi du  
— *Jardin des racines latines* (Livre du Maître)

**Max von LAUE**

- *La Théorie de la Relativité*

**Charles-Jean de LA VALLÉE POUSSIN**

- *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire*
- *Cours d'Analyse infinitésimale*

**Antoine-Laurent LAVOISIER**

- *Traité élémentaire de chimie*

**Henri LEBESGUE**

- *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*
- *Les coniques*
- *Leçons sur les constructions géométriques*

**C. LEBOSSE et C. HÉMERY**

- *Géométrie (classe de Mathématiques)*

**Adrien-Marie LEGENDRE**

- *Théorie des nombres*

**Julien LEMAIRE**

- *Étude élémentaire de l'hyperbole équilatère et de quelques courbes dérivées*  
suivie par  
— *Hypocycloïdes et épicycloïdes*

**Tullio LEVI-CIVITA**

- *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes*

**Paul LÉVY**

- *Calcul des probabilités*
- *Processus stochastiques et mouvement brownien*
- *Théorie de l'addition des variables aléatoires*
- *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*

**Alexandre LIAPOUNOFF**

- *Problème général de la stabilité du mouvement*

**André LICHNEROWICZ**

- *Éléments de calcul tensoriel*

**Ernst LINDELÖF**

- *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*

**Hendrik-Antoon LORENTZ**

- *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat* (en anglais)

**Édouard LUCAS**

- *Théorie des nombres*

**Nicolas LUSIN**

- *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*  
suivies du *Mémoire*  
*Sur les fonctions représentables analytiquement*,  
par Henri LEBESGUE

**Ernst MACH**

- *La Mécanique*  
Exposé historique et critique de son développement

**Saunders MacLANE et Garrett BIRKHOFF**

- *Algèbre*  
suivie par  
— *Solutions développées des exercices*

**Jean MANDEL**

- *Cours de Mécanique des milieux continus*

**James Clerk MAXWELL**

- *Traité d'Électricité et de Magnétisme* (2 tomes)
- *La Chaleur*

**Émile MEYERSON**

- *La déduction relativiste*

**Charles MICHEL**

- *Compléments de géométrie moderne*  
suivis par les solutions des questions proposées  
— *Exercices de géométrie moderne*, de Julien LEMAIRE  
et par  
— *Les correspondances algébriques* de Gaston SINGIER

**Gaston MILHAUD**

- *Descartes savant*

**Abraham de MOIVRE**

- *The Doctrine of Chances* (en anglais)

**Jules MOLK**

- voir *ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES*

**Gaspard MONGE**

- *Géométrie descriptive*
- *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*

**Pierre Rémond de MONTMORT**

- *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*

**Jean Étienne MONTUCLA**

- *Histoire des mathématiques* (4 tomes)

**John von NEUMANN**

- *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*

**Isaac NEWTON**

- *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (2 tomes)

**Niels NIELSEN**

- *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*

**R. NOGUÈS**

- *Théorème de Fermat. Son histoire*

**Paul PAINLEVÉ**

- *Les axiomes de la Mécanique*

**Georges PAPELIER**

- *Exercices de géométrie moderne précédés de l'exposé élémentaire des principales théories*  
l'ouvrage comprend
  - I. *Géométrie dirigée*
  - II. *Transversales*
  - III. *Division et faisceau harmonique*
  - IV. *Pôles, polaires, plans polaires, dans le cercle et la sphère*
  - V. *Rapport anharmonique*
  - VI. *Inversion*
  - VII. *Homographie*
  - VIII. *Involution*
  - IX. *Géométrie projective. Application aux coniques*
- *Éléments de Trigonométrie sphérique*

**D.P. PARENT**

- *Exercices de théorie des nombres*

**Julius PETERSEN**

- *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*

**Émile PICARD**

- *Traité d'Analyse (3 tomes)*
- *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*
- suivies par
  - *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*
  - *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*
  - *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*

**Johann Christian POGGENDORFF**

- *Histoire de la physique*

**Henri POINCARÉ**

- *Théorie mathématique de la lumière*
- *Les oscillations électriques*
- *Cinématique et Mécanismes. Potentiel et Mécanique des fluides*
- *Leçons sur la théorie de l'élasticité*
- *Thermodynamique*
- *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*
- *Capillarité*
- *Leçons de Mécanique céleste*
- *Calcul des probabilités*
- *La Mécanique nouvelle (Théorie de la Relativité)*
- *Théorie du potentiel newtonien*
- *Théorie des tourbillons*
- *Figures d'équilibre d'une masse fluide*
- *Électricité et Optique*
- *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*
- suivi par
  - *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles (Thèse)*
  - *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles*
- et par C. BRIOT et J.-Cl. BOUQUET
  - *Étude des fonctions d'une variable imaginaire*
  - *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*
  - *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques*
- *Philosophie scientifique*
- titres inclus
  - *La Science et l'Hypothèse*
  - *La Valeur de la Science*
  - *Science et Méthode*
  - *Dernières Pensées*
- *Œuvres (11 volumes)*

**Siméon-Denis POISSON**

- *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*

**George POLYA**

- *Comment poser et résoudre un problème*

**Jean-Victor PONCELET**

- *Traité des propriétés projectives des figures (2 tomes)*

**Ilya PRIGOGINE**

- *Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles*

**Alfred RÉNYI**

- *Calcul des probabilités*
- avec un appendice sur la théorie de l'information

**Bernhard RIEMANN**

- *Œuvres mathématiques*

**Frédéric RIESZ et Béla SZ.-NAGY**

- *Leçons d'analyse fonctionnelle*

**Vasco RONCHI**

- *Histoire de la lumière*

**Eugène ROUCHÉ et Charles de COMBEROUSSE**

- *Traité de géométrie*

**Erwin SCHRÖDINGER**

- *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

**Joseph-Alfred SERRET**

- *Cours d'Algèbre supérieure (2 tomes)*
- *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique*

**Waclaw SIERPINSKI**

- *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*
- *Leçons sur les nombres transfinis*

**Jean-Marie SOURIAU**

- *Calcul linéaire*
- La solution détaillée des exercices termine l'ouvrage

**Peter Guthrie TAIT**

- *Traité élémentaire des quaternions*

**Paul TANNERY**

- *Pour l'histoire de la science hellène*
- *La géométrie grecque*
- *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*
- *Mémoires scientifiques (17 volumes)*

**P.L. TCHEBYCHEF**

- *Œuvres*

**François-Félix TISSERAND**

- *Traité de Mécanique céleste (4 tomes)*
- suivi des
  - *Leçons sur la détermination des orbites*

**Édouard TOULOUSE**

- *Henri Poincaré*
- Enquête médico-psychologique sur sa supériorité intellectuelle

**Georges VALIRON**

- *Équations fonctionnelles – Applications*

**Gustave VERRIEST**

- *Leçons sur la théorie des équations selon Galois, précédées d'une introduction à la théorie des groupes*
- suivies par
  - *Évariste Galois et la théorie des équations algébriques*

**Henri VILLAT**

- *Mécanique des fluides*
- *Leçons sur l'hydrodynamique*
- *Leçons sur la théorie des tourbillons*
- *Leçons sur les fluides visqueux*

**Vito VOLTERRA**

- *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*

Collection « PLUS DE LUMIÈRE »

**Pierre DUGAC**

- *Jean Dieudonné, mathématicien complet*



## ÉDITIONS JACQUES GABAY

### RÉIMPRESSIONS

#### Niels Henrik ABEL

- Œuvres complètes (2 tomes)  
suivies par  
— Niels Henrik Abel – Sa vie et son action scientifique,  
par C.-A. BJERKNES

#### Jean d'ALEMBERT

- Traité de dynamique
- Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides
- Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides
- Opuscules mathématiques

#### André-Marie AMPÈRE

- Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques
- Considérations sur la théorie mathématique du jeu
- Essai sur la philosophie des sciences

#### Paul APPELL

- Traité de Mécanique rationnelle (5 tomes en 3 vol.)
- Éléments d'Analyse mathématique

#### Emil ARTIN

- Algèbre géométrique

#### Louis BACHELIER

- Théorie de la spéculation  
suivie par  
— Théorie mathématique du jeu
- Calcul des probabilités
- Le Jeu, la Chance et le Hasard
- Les lois des grands nombres du calcul des probabilités  
suivies par  
— La spéculation et le calcul des probabilités  
— Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités
- Collection de Mémoires  
titres inclus  
— Théorie des probabilités continues  
— Les probabilités à plusieurs variables  
— Mouvement d'un point ou d'un système soumis à  
l'action des forces dépendant du hasard  
— Les probabilités cinématiques et dynamiques

#### René BAIRE

- Leçons sur les fonctions discontinues
- Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité

#### W. W. Rouse BALL

- Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes
- Histoire des mathématiques

#### Stefan BANACH

- Théorie des opérations linéaires

#### Paul BARBARIN

- La Géométrie non euclidienne

#### Edmond BAUER

- Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la physique quantique

#### Jacques BERNOULLI

- L'art de conjecturer
- Cette première partie de l'*Ars Conjectandi* (la traduction française des parties 2, 3 et 4 n'a jamais paru) contient le célèbre *Traité de la manière de raisonner dans les jeux de hasard*, par Christiaan HUYGENS

#### Joseph BERTRAND

- Calcul des probabilités

#### Niels BOHR

- La théorie atomique et la description des phénomènes

#### Marcel BOLL

- La chance et les jeux de hasard
- Le mystère des nombres et des formes

#### Ludwig BOLTZMANN

- Leçons sur la théorie des gaz

#### Tommy BONNESEN

- Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes

#### Émile BOREL

- Leçons sur la théorie des fonctions
- Leçons sur les séries divergentes

#### Émile BOREL et André CHÉRON

- Théorie mathématique du bridge à la portée de tous  
suivie par  
— Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard, par Émile BOREL et Jean VILLE  
— Valeur pratique et philosophie des probabilités,  
par Émile BOREL

#### Z.I. BOREVITCH et I.R. CHAFAREVITCH

- Théorie des nombres

#### Max BORN

- La Théorie de la Relativité d'Einstein et ses bases physiques

#### Pierre BOUTROUX

- L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes

#### Ed. BRAHY

- Exercices méthodiques de calcul différentiel et intégral

#### Léon BRILLOUIN

- Les tenseurs en mécanique et en élasticité
- La science et la théorie de l'information

#### Marcel BRILLOUIN

- Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz

#### Louis de BROGLIE

- Ondes et mouvements

(Suite à l'intérieur)

### ÉDITIONS JACQUES GABAY

151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS

Tél. : +33 (0)1 43 54 64 64

Fax : +33 (0)1 43 54 87 00

E-mail : Jacques.Gabay@wanadoo.fr