Jean Dieudonné

Professeur à la Faculté des sciences de Nice

Algèbre linéaire et géométrie élémentaire

TROISIÈME ÉDITION CORRIGÉE ET AUGMENTÉE

Hermann, 115, boulevard Saint-Germain Paris, VI

Imprimé en France — LOUIS-JEAN, 05-Gap — Réimpression, 2e trimestre 1968
Numéro d'édition 2124. Dépôt légal 2e trimestre 1968. Numéro d'imprimeur, 189

Table des matières

Introduction

Ce volume donne un exposé détaillé et complet des notions et théorèmes d'Algèbre linéaire élémentaire qui devraient constituer le bagage minimum du bachelier ès-sciences au moment où il entre dans les classes du 1er cycle de l'Enseignement supérieur. L'orientation générale et la substance en ont été déterminés par le souci de préparer l'étudiant à assimiler le plus facilement possible l'enseignement *actuel* donné dans ces classes, qui devrait lui apparaître comme le *prolongement naturel* de ce qu'il a déjà appris.

Le fait qu'à l'heure présente il n'y a sans doute pas un bachelier sur mille qui serait en état de lire ce livre sans aide et sans fournir un travail personnel considérable en dit long sur l'incohérence de nos programmes d'enseignement. Il y a déjà plusieurs années que l'on s'est inquiété un peu partout du divorce grandissant entre les méthodes et l'esprit de l'enseignement des mathématiques, dans les lycées d'une part, dans les Universités de l'autre. Ayant participé à plusieurs discussions sur ce problème, j'ai pu me convaincre que, même parmi les professeurs de l'Enseignement secondaire les plus conscients de la nécessité d'une réforme, il subsiste une grande incertitude sur la teneur de ce que devraient être les programmes nouveaux et sur leur articulation, tant interne qu'en relation avec les programmes de l'Enseignement supérieur. C'est donc en fait à eux que ce livre est avant tout destiné ; je l'ai conçu comme un « *livre du maître* », en d'autres termes une ossature solide sur laquelle bâtir un enseignement oral vivant et adapté aux élèves qui doivent le recevoir.

C'est aussi à ces enseignants de bonne volonté que s'adressent les commentaires qui suivent ; je m'en excuse d'avance auprès de mes collègues de l'Enseignement supérieur aux mains de qui tomberait ce livre, et qui m'accuseraient avec raison d'enfoncer pompeusement des portes ouvertes ; ma justification est qu'apparemment ces portes ne sont pas encore ouvertes pour tout le monde.

Les mathématiciens des siècles passés, et plus encore les philosophes ou essayistes qui ont voulu parler de mathématiques, n'ont que trop bien réussi à ancrer dans l'esprit du public « cultivé » l'image d'une science immuable et figée, trônant dans un empyrée de « vérités absolues » transmises religieusement de génération en génération comme une révélation divine que l'on ne saurait se permettre de changer d'un iota, et ignorant les tâtonnements et les incertitudes des pauvres sciences dites « expérimentales ». Il y a plus de cent ans que les mathématiciens professionnels sont revenus d'une aussi naïve arrogance, mais il faudra sans doute encore bien des années d'efforts pour venir à bout de ces « clichés », rien n'étant plus difficile que de modifier des « idées reçues ». La source du malentendu réside dans le fait qu'il est bien exact que les théorèmes démontrés il y a 2000 ans sont tout aussi vrais maintenant qu'alors, tandis que les «vérités expérimentales » n'apparaissent jamais que comme des approximations que l'on perfectionne sans cesse. Ce qui change, en mathématiques comme dans toutes les autres sciences, c'est le *point de vue* d'où l'on considère les résultats déjà acquis ; et, comme dans toutes les autres sciences aussi, ces changements se font à l'heure actuelle avec une vitesse qui va croissant. Sauf sur un point tout à fait accessoire, le schéma du *progrès* en mathématiques ne diffère pas de ce qu'il est dans les autres disciplines : les acquisitions nouvelles et les réflexions qu'elles suscitent amènent à *repenser* les théorèmes anciens, à examiner à la lumière des théories plus récentes leurs rapports mutuels et à les insérer de façon plus rationnelle dans un contexte renouvelé. Le fait particulier aux mathématiques est que, dans ces bouleversements périodiques, les théorèmes eux-mêmes se conservent intacts, au lieu de se dissoudre en raffinements plus subtils, ou de se voir contredits par une expérimentation plus soigneuse, comme il advient aux « faits » les mieux établis de la Physique ou de la Biologie. Mais, du rang majestueux de « théorèmes fondamentaux », il leur arrive mainte fois de se voir peu à peu dégradés à la position subalterne de simples « corollaires » de plus en plus méprisables, pour finir souvent dans le grenier des « exercices » que l'on abandonne à l'apprenti mathématicien. C'est la conscience de ce processus historique permanent qui doit ramener les mathématiciens professionnels à une conception plus modeste de leur rôle et de leurs efforts, en leur faisant prévoir que les découvertes qui leur ont coûté le plus de peine, et dont ils auraient tendance à s'enorgueillir, risquent fort de devenir de simples jouets pour les écoliers des générations futures.

L'enseignement des Universités ne peut bien entendu se permettre d'ignorer longtemps ces remises en ordre de l'édifice mathématique, sous peine de perdre toute son efficacité et jusqu'à sa raison d'être. Mais jusqu'à une époque récente il n'y a pas eu de refonte qui touchât vraiment aux notions de base laissées traditionnellement à l'Enseignement secondaire, et l'apprentissage des mathématiques dans Euclide n'était pas une mauvaise préparation aux mathématiques dites « supérieures » pour un contemporain de Viète ou même de Cauchy. Pendant les deux siècles qui séparent ces mathématiciens, on avait certes énormément accru la somme des connaissances mathématiques et développé de puissantes méthodes nouvelles de recherche ; mais ces méthodes n'exigeaient pas d'autres idées fondamentales que celles d'espace et de nombre, telles que les avaient conçues les géomètres grecs. Il en est tout autrement aujourd'hui, où la tendance essentielle des mathématiques modernes, depuis environ un siècle, a été de chercher, par un effort supplémentaire d'abstraction, à *décomposer* en quelque sorte ces « idées fondamentales », un peu comme les physiciens ont analysé l'atome réputé « insécable » des anciens. Il est à peine besoin de dire que ce n'est pas par un besoin morbide de « couper les cheveux en quatre » que les mathématiciens en sont arrivés là (contrairement à ce qu'affectent encore de croire certains), mais bien parce qu'ils ont ainsi pu découvrir, dans les produits de cette « dissociation », des outils nouveaux d'une puissance insoupçonnée de leurs devanciers, grâce auxquels ils ont pu attaquer avec succès de nombreux problèmes laissés ouverts par ceux-ci.

Pendant ce temps, l'Enseignement secondaire, qui par sa nature même est fort éloigné du niveau où se font les recherches mathématiques contemporaines, était tranquillement resté, avec quelques additions superficielles, ce qu'il était avant Grassmann et Cantor, c'est-à-dire essentiellement la géométrie d'Euclide, l'algèbre de Viète et de Descartes, et, dans les classes terminales, un peu de Calcul infinitésimal. Il n'est donc pas surprenant que le fossé entre cet enseignement et celui qu'on donne dès l'entrée à l'Université n'ait cessé de s'élargir. Qu'on veuille bien, par exemple, considérer sans idées préconçues les sujets suivants, qui tiennent encore une place considérable dans l'enseignement des mathématiques au lycée :

I) Les constructions « par la règle et le compas ».

II) Les propriétés des « figures » traditionnelles, telles que le triangle, les « quadrilatères » variés, les cercles et « systèmes de cercles », les coniques, avec tous les raffinements accumulés par des générations de « géomètres » spécialisés et de professeurs en quête de problèmes d'examen.

III) La kyrielle des « formules trigonométriques » et de leurs transformations kaléidoscopiques permettant de superbes « résolutions » de « problèmes » relatifs aux triangles, et ce par des « calculs logarithmiques », s'il vous plaît !

Que l'on ouvre maintenant au hasard un livre traitant des matières enseignées à partir de l'entrée à l'Université : on constatera aussitôt qu'il n'y est *jamais* même fait allusion à toutes ces belles choses. Si par hasard on rencontre quelque part une conique, on l'étudie (si nécessaire) comme toute autre courbe, par les procédés généraux du Calcul infinitésimal, et les autres « figures » chères aux géomètres de jadis ont tout simplement disparu comme dans une trappe. On pourra objecter que l'enseignement des Universités est très abstrait, et que ce que l'on apprend au lycée sera bien plus « utile » à de futurs ingénieurs, par exemple. Il est bien vrai que l'on peut exhiber sur de belles photographies les cascades de triangles que forment les poutrelles d'une construction métallique ; mais pour être en état d'en fabriquer de semblables, vaut-il mieux savoir que les hauteurs d'un triangle sont concourantes, ou avoir acquis quelques principes fondamentaux de résistance des matériaux ? Il est bien vrai aussi que les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables :

1° les astronomes ;
2° les arpenteurs ;
3° les auteurs de manuels de trigonométrie.

Mais il y a des centaines d'autres professions tout aussi honorables, qui se contentent fort bien, en matière de « trigonométrie », de ce qui tient en 3 ou 4 pages de ce livre (cf. p. 112). Et puis, doit-on considérer que l'Enseignement secondaire est destiné à accumuler toute une série de connaissances particulières, plus ou moins hétéroclites, en vue de préparer à toutes les professions imaginables ; ou au contraire, faut-il essayer avant tout d'apprendre aux enfants à *penser*, sur un petit nombre de notions générales bien choisies, et laisser les techniques spéciales se ranger plus tard sans effort dans une « tête bien faite » ?

Soit, dira-t-on, les énoncés des théorèmes enseignés aux élèves des lycées sont destinés à être oubliés au profit de notions plus importantes ; mais du moins, en s'exerçant sur ces thèmes artificiels, auront-ils acquis des *méthodes* de recherche et des habitudes de pensée qui leur seront plus tard d'un grand secours. Ici encore, cela était sans doute exact avant Descartes, mais avait déjà cessé de l'être pour les contemporains de Newton. C'est un des effets du progrès en mathématiques que des résultats auxquels leurs inventeurs n'arrivent qu'après des considérations fort difficiles et des cheminements très tortueux et parfois obscurs, se démontrent souvent en quelques lignes et presque sans effort 50 ou 100 ans plus tard. Un exemple universellement connu est l'invention du Calcul infinitésimal, qui a d'un seul coup ramené à des calculs presque automatiques la solution de problèmes qui avaient exercé la sagacité d'un Eudoxe ou d'un Archimède. Ce que l'on sait moins (et ce pourquoi est écrit ce livre), c'est que depuis les travaux de Grassmann et Cayley entre autres (qui remontent à plus de 100 ans), on dispose, en « Géométrie élémentaire », comme l'a si bien dit

Choquet, d'une « route royale » par laquelle, à partir d'axiomes extrêmement simples à énoncer (au contraire de ceux d'Euclide-Hilbert) tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints « cas d'égalité » ou « cas de similitude » des triangles, points d'appui de toute la technique traditionnelle. Cela peut paraître surprenant au non initié, mais les mathématiciens professionnels sont depuis longtemps familiers avec de tels phénomènes, où le remplacement d'un système d'axiomes par un système *équivalent*, mais mieux choisi, amène parfois des simplifications considérables. Je me contenterai de poser aux éducateurs la question de savoir si, pour arriver aux meilleurs résultats, il convient de présenter aux élèves une théorie où tout s'ordonne naturellement autour de quelques idées-clés très simples, et qui seront fondamentales dans leurs études ultérieures, ou au contraire de les laisser pendant des années aux prises avec une technique inadéquate et qu'il leur faudra oublier aussitôt apprise ?(*)

Une autre caractéristique de la méthode mathématique contemporaine (sans doute trop connue pour qu'il y faille beaucoup insister) est qu'elle permet de regrouper suivant leurs affinités profondes des théories d'aspect superficiel souvent fort différent. Or, plus sans doute que nulle part ailleurs, le cloisonnage des disciplines a atteint dans l'enseignement traditionnel un degré dont le ridicule peut difficilement être dépassé. On enseigne en effet peu ou prou, dans les années terminales des lycées et même jusqu'il y a peu de temps dans les classes préparatoires aux grandes Ecoles (ainsi que dans beaucoup d'Universités étrangères) toute une impressionnante liste de « sciences » :

la « Géométrie pure » ;
la « Géométrie analytique » ;
la « Trigonométrie » ;
la « Géométrie projective » ;
la « Géométrie conforme » ;
la « Géométrie non-euclidienne » ;
la « Théorie des nombres complexes ».(**)

Non seulement toutes ces disciplines sont-elles en général présentées isolément, mais encore est-il fréquent de voir chacune s'efforcer d'ignorer totalement les autres et se targuer de son « indépendance » : les grotesques

(*) Les professeurs d'éducation physique, eux, n'hésitent pas, et quand il s'agit par exemple de natation, c'est la nage moderne, le « crawl » qu'ils enseignent, parce que plus efficace que les nages anciennes.

(**) Je ne parle pas de la « Géométrie descriptive », simple technique de dessin que l'on a heureusement ramenée presque partout à ses justes proportions.

querelles des géomètres « synthétiques » et des géomètres « analytiques », aussi incompréhensibles pour nous que les discussions byzantines sur le sexe des anges, ont rempli des volumes au XIXe siècle. Or on sait (*grosso modo* depuis le « Programme d'Erlangen » de F. Klein) que sous ces défroques d'un autre âge se cache toujours *une seule* et même discipline, *l'Algèbre linéaire* des mathématiciens modernes, qui englobe aussi, bien entendu, la théorie classique des systèmes d'équations linéaires, mais est devenue, avec ses ramifications actuelles (qui vont bien au-delà même de l'enseignement de la Maîtrise), une des théories les plus centrales et les plus efficaces de la Mathématique contemporaine, riche en applications les plus variées, de la Théorie des nombres à la Physique théorique, en passant par l'Analyse, la Géométrie et la Topologie. Il me semble qu'il y a intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de cette discipline, à lui apprendre à « penser linéairement », ce qui est d'autant plus facile qu'il y a peu de notions, en mathématiques, qui soient plus simples à définir que celles d'espace vectoriel et d'application linéaire. A notre époque de prolifération intense dans toutes les sciences, tout ce qui condense et tend à l'unification a une vertu qu'on ne saurait surestimer. Quant aux « pseudo-sciences » énumérées plus haut, il est à espérer que l'on oubliera sous peu leur existence, et même jusqu'à leur nom[*] ; le plus tôt sera le mieux.

Je voudrais ajouter à ces trois points, qui me paraissent d'une portée générale (continuité de l'enseignement, apprentissage précoce des méthodes modernes, unification des disciplines enseignées), deux autres remarques qui ne touchent que les seuls mathématiciens, et que je tiens pour cela à présenter sur un autre plan : on pourrait en effet m'accuser de penser surtout aux futurs mathématiciens à propos de l'Enseignement secondaire, alors qu'ils ne forment qu'une de ces honorables corporations dont je parlais plus haut, sans doute moins nombreuse encore que celle des arpenteurs. Je tiens donc à souligner fortement que j'estime que l'Enseignement secondaire *n'est pas* destiné à former de futurs mathématiciens, ni même de futurs professeurs de mathématiques ; c'est précisément l'enseignement traditionnel qui oublie cette vérité première, car on chercherait en vain à qui d'autre qu'à des mathématiciens spécialisés sont destinées de jolies babioles telles que le cercle des neuf points ou le théorème de Dandelin, sur lesquelles on s'étend si souvent avec complaisance. Mais ceci dit, m'adressant à des professeurs de mathématiques, je ne peux pas ne pas

[*] Il est urgent entre autres de libérer le nom de « Géométrie analytique », qui est certainement le meilleur pour désigner une des théories les plus vivantes et les plus profondes de la Mathématique moderne, celle des « variétés analytiques », qui fait pendant à la « Géométrie algébrique », étude des « variétés algèbriques ».

observer que l'un des avantages de l'Algèbre linéaire, c'est qu'elle permet de présenter tous les développements de la « Géométrie élémentaire » d'une façon parfaitement rigoureuse, et cela *sans effort*, alors que l'on sait trop bien que les systèmes d'axiomes proposés depuis la fin du siècle dernier et se rattachant étroitement à la tradition euclidienne, sont d'une telle complexité et d'une telle subtilité qu'il est pratiquement impossible de les enseigner avant la Licence(*). D'où la nécessité, si pénible pour un mathématicien, de ne présenter à ses élèves que des pseudo-raisonnements qui ne résistent pas à une critique même superficielle ; je pense en particulier aux invraisemblables confusions et paralogismes auxquels donne lieu une notion aussi simple que celle d'« angle » quand on la prend du point de vue traditionnel, alors que, du point de vue de l'Algèbre linéaire, ce n'est pas autre chose que l'étude du groupe des rotations dans le plan.

Ma dernière remarque générale concerne un aspect de la Mathématique moderne en quelque sorte complémentaire de ses tendances unificatrices, à savoir sa capacité de dissocier ce qui était indûment confondu. Je pense surtout ici à la distinction (clairement sentie depuis Poncelet) entre propriétés géométriques de nature « affine » et propriétés de nature « métrique ». Il est particulièrement choquant, du point de vue logique, de voir mélanger en une incroyable salade ces deux types de propriétés dès le début de la traditionnelle « Géométrie euclidienne », mettant exactement sur le même plan des notions aussi différentes que celle de parallèle et celle de perpendiculaire, pour ne citer qu'un exemple typique. Bien entendu, en Algèbre linéaire, cette distinction s'opère le plus simplement et le plus facilement du monde, les deux types de propriétés dépendant respectivement de deux groupes d'axiomes qui sont *séparés dès le début*, et dont il est donc facile de développer *séparément* les conséquences. Peut-être cette insistance sur la « pureté » des raisonnements paraîtra-t-elle superflue et pédantesque à certains ; pour ma part, je crois que l'on a toujours intérêt à essayer de *comprendre* aussi bien que possible ce que l'on fait, et qu'il y a une grande vertu formatrice pour l'esprit à rechercher dans sa démarche l'économie des moyens et l'adaptation étroite des hypothèses aux conclusions, dans toute la mesure du possible.

Après ces considérations générales, j'en viens à quelques commentaires sur l'esprit et le plan suivant lesquels a été conçu cet ouvrage. Il va sans dire que j'ai commencé par faire *table rase* de toute la tradition, et je me

(*) Je n'ignore pas qu'historiquement les études axiomatiques de Hilbert et de ses émules sur les fondements de la Géométrie ont eu une grande utilité pour clarifier la conception générale de ce que sont les mathématiques, et ont d'autre part conduit à de nouvelles découvertes, comme les corps non archimédiens ou les plans non desarguiens ; mais ceci est très éloigné de l'enseignement secondaire et même de celui des Universités avant le troisième cycle au moins.

suis exclusivement laissé guider par ce sur quoi *débouche* l'Enseignement secondaire, savoir le programme d'enseignement des Universités (ou des grandes Ecoles techniques). Tout ce qui n'intervient pas dans ce dernier a été impitoyablement banni du texte (et même souvent des exercices) ; au contraire, j'ai essayé d'introduire dès que possible les notions qui seront à la base de l'Algèbre et de l'Analyse dès l'année propédeutique, telles que celles d'application linéaire (ou « *opérateur* »), d'application multilinéaire, de *valeur propre* d'un opérateur, de *groupe* ou d'*anneau* formés d'« opérateurs ». Fidèle au principe énoncé plus haut de ne pas tenir compte de façon privilégiée des désirs ou besoins des seuls mathématiciens, je me suis attaché à ne parler que de notions dont l'importance en Mathématiques appliquées ou en Physique théorique est incontestable ; les raffinements n'intéressant que les futurs mathématiciens sont relégués en exercices. D'autre part j'ai cherché à résister à la tentation d'introduire *prématurément* les théories qui seront enseignées à l'Université. Il me semble que la nature nous a heureusement fourni une « ligne de démarcation » toute tracée, en nous douant de l'intuition géométrique pour les espaces à 2 et 3 dimensions ; il est donc possible de représenter graphiquement *tous* les phénomènes de l'Algèbre linéaire limitée à ces dimensions (et bien entendu, aux scalaires *réels*), et je me suis imposé *strictement* cette limitation, à deux apparentes exceptions près dont je parlerai un peu plus loin. Bien entendu, à l'intérieur de ces limites, chaque fois que l'on rencontre une notion de nature plus générale, je n'hésite pas à lui donner son véritable *nom*, rien n'étant plus sot que la peur des mots(*) ; mais je tiens à souligner que, ce faisant, je n'entends *pas du tout* supposer que l'on ait fait antérieurement, ni que l'on fasse à cette occasion, *la moindre théorie générale* des notions qui s'introduisent ainsi ; bien au contraire, dans mon esprit, il s'agit de présenter ces notions à l'élève sous une forme en quelque sorte *expérimentale*. En d'autres termes, la nature nous offre un merveilleux laboratoire où se familiariser avec des cas particuliers, d'aspect fort simple et susceptibles d'images concrètes, de notions dont l'essence est beaucoup plus générale mais aussi beaucoup plus abstraite, et qu'il faudra assimiler sous cette forme générale plus tard ; il serait vraiment dommage de ne pas profiter au maximum de cette heureuse circonstance.

Les deux exceptions que je me suis permises ont trait à tous les développements de géométrie affine ou euclidienne qui sont *indépendants* de toute hypothèse de dimension ; il m'a semblé que pour les lecteurs auxquels je m'adresse, il y avait un certain intérêt à souligner cette indépendance, outre qu'il aurait été presque intolérable de répéter *verbatim* des pages entières

(*) Il va sans dire aussi que j'utilise librement (et sans explication) le vocabulaire usuel de la Théorie des ensembles en toute circonstance, l'accord s'étant fait, je pense, sur la nécessité d'introduire ce langage dans l'enseignement dès les premières classes des lycées.

de raisonnement en les surchargeant d'hypothèses différentes et tout aussi inutiles. Mais je suis tout prêt à admettre que pour les élèves des lycées, il faudrait effectivement se borner au cas où la dimension est fixée à 2 ou à 3 et recommencer les raisonnements lorsque l'on change de dimension ; les modifications à faire au texte pour le restreindre à ces deux cas sont évidentes et ne concernent d'ailleurs que le langage.

Je me suis permis aussi de n'introduire *aucune figure* dans le texte, ne serait-ce que pour faire voir que l'on s'en passe fort bien ; mais ici encore c'est un manque auquel mes lecteurs suppléeront d'eux-mêmes.

J'ai fait suivre les diverses sections du texte d'assez nombreux *thèmes d'exercices*. Ils sont destinés à montrer aux enseignants qu'à cet égard la Mathématique moderne ne le cède en rien aux disciplines classiques, et que, si les théorèmes de base sont devenus si simples à démontrer que l'on pourrait craindre qu'ils n'exercent plus à un même degré l'imagination et les facultés créatrices des élèves les mieux doués, il n'est que de pousser un peu plus avant pour rencontrer des problèmes dont la solution exige autant de talent que les plus classiques problèmes d'Agrégation. J'ai essayé de faire figurer dans ces exercices le plus possible d'amorces de vastes théories dépassant de loin le niveau du cours, dans la mesure où cela n'exigeait pas de moyens inaccessibles à ce niveau, afin de donner quelque idée du genre de questions que se posent les mathématiciens modernes. J'ai d'ailleurs surtout voulu donner matière à réflexion, et c'est pourquoi je parle de « thèmes d'exercices » plutôt que d'« exercices » proprement dits ; ils sont dans mon esprit destinés à être modifiés, découpés, combinés ou enrichis à volonté par leurs utilisateurs éventuels. Les solutions (sous forme abrégée) des plus difficiles de ces problèmes sont rassemblées à la fin du volume.

Enfin, j'ai ajouté au texte quelques Annexes qui visent à compléter les connaissances des professeurs sur certaines questions non tout à fait classiques et qui souvent ne sont pas traitées dans l'enseignement des Universités ; il n'est pas question que ces Annexes fassent partie du programme d'enseignement proprement dit, mais elles peuvent servir à mon sens à replacer ce dernier dans une meilleure perspective. Je ne m'y suis pas astreint à tout reprendre *ab ovo* comme dans le texte (qui, lui, ne nécessite pas de connaissances préalables, tout au moins du point de vue purement logique) ; je n'hésite donc pas à renvoyer à d'autres ouvrages pour les résultats dont j'ai besoin, et certains raisonnements ne sont qu'esquissés.

On aura déjà compris que le programme développé dans ce livre est destiné aux deux ou trois années terminales des lycées. Mais il reste à savoir comment l'*insérer* dans le programme général des études mathématiques depuis la Sixième, à un double point de vue : par rapport à ce qui doit le précéder, et par rapport à la partie du cours orientée vers l'Analyse. Sur la première question, il ne m'est guère possible d'apporter autre chose que des « vues de l'esprit », étant donné mon manque total de compétence en ce qui concerne les réactions des enfants de 11 à 14 ans. Il me semble que le but à atteindre est de vaincre deux difficultés psychologiques certaines : 1° il faut arriver à faire prendre conscience à l'élève de la *nécessité* d'un traitement axiomatique des mathématiques ; 2° il faut dès que possible le *familiariser* avec le maniement constant de certaines notions abstraites, dont la plus difficile à assimiler est sans doute celle d'*application* (ou « transformation ») et plus encore peut-être celle du *calcul sur les applications*. Comme on peut dire sans exagération que dans l'un et l'autre cas il s'agit vraiment de *pierres angulaires* de tout l'édifice mathématique moderne, tout le reste de l'enseignement des premières années devrait être consciemment *subordonné* à l'assimilation de ces idées. Sur la façon de procéder pour atteindre ces buts, je n'ai que des idées générales encore plus vagues. Il va de soi que cela nécessite un contact *expérimental* prolongé avec les notions de base qui seront plus tard axiomatisées ; mais cela ne suffit pas, car il faut en outre « conditionner » en quelque sorte l'enfant en *dirigeant* ses expériences dans le « bon » sens et en évitant à tout prix que son attention ne s'égare dans des impasses, si traditionnelles soient-elles. C'est ainsi qu'il serait désirable de libérer l'élève dès que possible de la camisole de force des « figures » traditionnelles, en en parlant le moins possible (point, droite et plan exceptés, bien entendu), au profit de l'idée de *transformation géométrique* du plan et de l'espace *tout entiers*, sur laquelle on doit insister sans cesse et qu'il faut illustrer par de multiples exemples. De même il convient certes d'apprendre à l'enfant l'art des constructions géométriques, mais fuir comme la peste ce qui est sans doute le plus gigantesque « canular » de l'enseignement classique, la limitation des instruments de dessin à la règle et au compas[*] ; il faudrait au contraire multiplier les exemples d'appareils mécaniques réalisant des constructions variées, et plus encore réalisant des *transformations* du plan (pantographe, affinographe, etc.).

Quant à l'épineux problème de l'introduction des « axiomes », je crois qu'il faudrait d'abord éviter de prononcer ce mot, mais ne pas manquer une occasion par contre de donner des exemples de *déduction logique*, qui,

[*] On ignore l'auteur de cette mauvaise plaisanterie, que certains commentateurs de l'Antiquité attribuent (sans preuve convaincante) à Platon. Je sais fort bien que c'est en réfléchissant à des problèmes de construction « par la règle et le compas » que d'illustres mathématiciens (à commencer par Gauss) ont été mis sur la voie de très importantes découvertes ; la plupart des mathématiciens sont ainsi faits qu'ils adorent se poser des problèmes d'apparence futile et qu'il leur arrive parfois, s'ils ont du génie, d'en tirer des merveilles (« grand » théorème de Fermat, hypothèse de Goldbach, résolution des équations par radicaux, etc., etc.) ; mais ils savent fort bien trouver ces problèmes tout seuls, et, encore une fois, l'Enseignement secondaire *n'a pas pour mission de former des mathématiciens* !!

beaucoup plus que l'idée d'axiome, est le vrai et l'unique moteur de la pensée mathématique ; ce qu'il faudrait parvenir à faire assimiler dès que possible, c'est que d'une proposition admise *pour un motif quelconque*, et dont la provenance n'entre pas en ligne de compte, on peut tirer d'autres propositions par le seul raisonnement. En somme, l'enseignement des premières années secondaires devrait être un mélange savamment dosé d'« expériences géométriques » bien choisies et de raisonnements partiels sur les résultats de ces expériences : quelque chose d'analogue à l'apprentissage de la physique ou de la chimie, une sorte de « physique de l'espace ». J'ai dit plus haut pourquoi il m'est impossible d'aborder la réalisation de cette tâche, mais je suis persuadé qu'elle est possible, et il y a déjà des essais fort remarquables et prometteurs dans ce sens, en particulier chez nos voisins belges[*].

Ce par contre à quoi je suis *tout à fait opposé*, c'est ce que l'on pourrait appeler « la méthode de l'échafaudage préalable ». Sous prétexte que le système d'axiomes de l'Algèbre linéaire est « trop abstrait », on voudrait, avant de l'introduire, partir d'un *autre* système d'axiomes, réputé plus accessible, et en *déduire* ensuite les axiomes de l'Algèbre linéaire. C'est en somme ce qu'avait fait Hilbert dans ses célèbres travaux sur les fondements de la Géométrie, en prenant pour point de départ les axiomes d'Euclide convenablement complétés. Chacun sait que ce tour de force dépasse de loin le niveau de l'Enseignement secondaire, mais on a tenté depuis lors des « compromis » entre l'échafaudage d'Euclide-Hilbert et l'axiomatique « nue » de l'Algèbre linéaire ; le plus connu est sans doute le système d'axiomes proposé récemment par Choquet, d'une remarquable ingéniosité qui témoigne du grand talent de son auteur, mais que je tiens pour parfaitement inutile et même nuisible. Il ne se justifierait que si les notions qui sont à la base des axiomes du plan euclidien, addition des vecteurs, multiplication par un scalaire et produit scalaire de deux vecteurs, étaient extrêmement abstraites et difficiles à représenter graphiquement ; chacun sait qu'il n'en est rien, et quelques mois d'expériences sur le papier quadrillé devraient suffire pour accoutumer l'élève à leur maniement, et le préparer à admettre sans hésitation que l'on fonde l'édifice algébrico-géométrique sur des propriétés dont il lui est facile de vérifier l'exactitude expérimentale. Dès lors, à quoi bon surcharger sa mémoire de soi-disant « axiomes » qu'il lui faudra s'empresser d'oublier ? En fait, on assiste simplement là à un curieux phénomène d'attachement sentimental à un système traditionnel d'axiomes, plus fréquent qu'on ne croit chez les mathématiciens professionnels, même

[*] Voir notamment G. Papy et F. Papy, *Mathématique moderne* I–III, Didier (Bruxelles–Paris), 1963–67, et *Journées d'études*, Cahier 22, Bruxelles, Avril 1962 (Ministère de l'Education nationale et de la Culture, Secrétariat général de la Réforme de l'Enseignement moyen et normal, 165, Rue de la Loi, Bruxelles).

bien au-delà du niveau de la Géométrie élémentaire(*), et que je ne me chargerai pas d'expliquer.

L'Algèbre linéaire n'est que l'une des « structures fondamentales » de la Mathématique moderne ; une autre non moins importante est la Topologie, qu'il convient certainement d'introduire dès que possible dans l'enseignement. Au niveau de l'Enseignement secondaire, il semble raisonnable de se borner, dans cette direction, comme on le fait déjà depuis assez longtemps, aux rudiments du Calcul infinitésimal, dont il est superflu de souligner l'importance pratique. Mais il faudrait à mon avis commencer cette initiation à l'Analyse plus tôt encore qu'on ne le fait, et lui donner plus d'importance : les ingénieurs et physiciens se plaignent non sans raison que les licenciés d'aujourd'hui « ne savent plus calculer », entendant par là qu'ils ne sont pas assez rompus au maniement des processus élémentaires du Calcul différentiel et intégral. Cela s'explique fort bien si l'on songe à la somme de connaissances abstraites que l'étudiant en mathématiques doit absorber aujourd'hui à l'Université, ce qui lui laisse fort peu de temps pour l'apprentissage de la partie quasi mécanique de le théorie des fonctions d'*une* variable (calcul des dérivées, des primitives, des développements limités, intégration d'équations différentielles simples, construction de courbes en coordonnées cartésiennes ou polaires). Je ne vois absolument rien qui empêche de reporter toute cette technique dans les deux ou trois dernières années du lycée(**) ; il s'agit encore là de manipulations sur des objets « représentables » de façon concrète à chaque pas, et qui prolongent de la façon la plus naturelle la pratique des « graphiques » que l'on s'accorde avec raison à introduire de façon très précoce dans l'enseignement, vu son importance dans tous les domaines(***). La seule condition à respecter est qu'il faut encore ici traiter ces questions *exclusivement* de la même façon « expérimentale » ou « physique » que je préconisais plus haut pour l'apprentissage de la Géométrie. Tout essai à ce niveau d'un traitement rigoureux ferait sans doute plus de mal que de bien, ne

(*) Par exemple, rendant compte il y a quelques années d'un volume des *Eléments* de N. Bourbaki consacré à l'Intégration, un mathématicien américain fort connu, P. Halmos, paraissait absolument choqué et scandalisé de ce que l'auteur avait pris certains théorèmes traditionnels pour *définitions* et déduit les définitions anciennes comme *théorèmes* ; critique d'autant plus étrange que son auteur est particulièrement qualifié pour savoir ce qu'est une *équivalence* logique !

(**) Le temps nécessaire pour s'y exercer se trouverait sans peine après suppression des nombreuses séances consacrées aux « constructions » et « résolutions » de triangles et autres amusettes.

(***) Il est piquant que sur ces questions de l'introduction de l'Analyse dans l'enseignement élémentaire l'accord ait toujours été plus facile à réaliser que sur la réforme de la Géométrie ; sans doute le Calcul infinitésimal, ce parvenu, ne bénéficie pas du caractère sacré que son antiquité confère à Euclide !

pouvant guère être basé que sur des techniques « epsilontiques » dépassées et ne répondant en outre qu'à des préoccupations de purs mathématiciens. Rien n'empêche d'ailleurs le professeur, chaque fois qu'il en a l'occasion, d'annoncer que les règles du Calcul infinitésimal sont tout aussi susceptibles de démonstration, à partir des axiomes des nombres réels, que les théorèmes de Géométrie. Mais il convient ici comme ailleurs de débarrasser l'enseignement de la superstition consistant à vouloir à n'importe quel prix tout rattacher à une source axiomatique unique. Les mathématiciens professionnels ont de bonnes raisons de tenir à ce qu'il en soit ainsi, mais ces raisons ne concernent qu'eux ; ce qui est par contre d'une importance universelle, c'est de savoir faire des déductions logiques *correctes* à partir de prémisses qui n'ont pas besoin d'être nécessairement sanctifiées par un arbre généalogique remontant à la Théorie des ensembles !

J'ai surtout parlé de cet enseignement d'initiation au Calcul infinitésimal parce qu'il doit, à mon sens, absorber deux des parties traditionnelles de la « Géométrie » qui visiblement n'ont rien à y faire : le calcul des longueurs, aires et volumes, et la « mesure » des angles. Le premier n'est autre naturellement que le Calcul intégral, et c'est une inconcevable gageure que de prétendre, 300 ans après Cavalieri, enseigner ces questions par l'« exhaustion » d'Eudoxe et d'Archimède. Quant à la soi-disant « mesure » des angles, elle s'inscrit dignement dans la confusion générale qui règne à ce propos ; pour le mathématicien professionnel, alors que la nature nous offre gratuitement, avec le groupe des rotations planes, un admirable exemple de groupe infini possédant des éléments d'ordre fini quelconque, c'est une insondable sottise que de chercher à tout prix à masquer ce fait essentiel en prétendant « mesurer » ce qui n'est pas mesurable, introduire un « ordre » là où il n'y en a pas, et feindre de croire qu'une droite se souvient d'avoir tourné de 26π lorsqu'elle est revenue à la même position ! On verra dans ce livre que tout ce qui appartient en propre à la Géométrie euclidienne plane, du point de vue algébrique, est entièrement indépendant de toute « mesure » d'angles par des nombres réels ; et j'ai même fait en sorte que les axiomes choisis *ne permettent pas* de démontrer l'existence de cette « mesure » (voir Annexe I)[*]. Bien entendu, dès que l'on veut faire de l'Analyse ou de la Cinématique, l'existence de l'homomorphisme continu canonique $x \to e^{ix}$ du groupe additif $\mathbf{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ est tout à fait capitale ; mais c'est sous cette forme et *en Analyse* qu'il faut la présenter, et non s'ingénier comme à plaisir à entretenir les pires confusions dans les esprits.

[*] Cela a aussi *heureusement* pour effet de rendre la théorie « non catégorique » (c'est-à-dire *non déterminée à isomorphisme près* par les axiomes) rompant ainsi avec une exigence ridicule des mathématiques classiques.

J'espère qu'on me croira sans peine si j'ajoute, pour terminer, que je n'ai aucun intérêt personnel dans ces questions d'Enseignement secondaire, et qu'il me chaut fort peu de savoir si, où et quand il y aura une réforme de cet enseignement, ni ce qu'en seront les modalités. J'ai simplement voulu verser au dossier de l'historien futur un exemple de ce que l'on pourrait faire en la matière si l'on cherchait à agir de façon *rationnelle.*

CHAPITRE I

Nombres réels

Il est bien connu depuis Aristote (au moins) que toute science repose sur ce que l'on pourrait appeler le « *principe de la connaissance volontairement incomplète* » : abstraire ou généraliser signifie précisément que l'on néglige *systématiquement* certains aspects des objets que l'on considère. La méthode axiomatique en Mathématique n'est pas autre chose qu'une application de ce principe, qui ne se distingue des autres que parce que l'on prend soin d'énumérer de façon *exhaustive* les propriétés que l'on *veut* admettre touchant les objets étudiés (les « axiomes »), et que l'on *s'interdit* ensuite de faire appel à autre chose qu'à ces propriétés et aux règles de la logique.

Nous allons donner dans ce chapitre la liste des « axiomes » des nombres réels dont nous nous servirons dans la suite de ce volume, et en tirer les premières conséquences ; il y a *d'autres* propriétés des nombres réels qui ne peuvent se déduire de ces axiomes (et sont par exemple indispensables lorsqu'on veut fonder axiomatiquement l'Analyse) ; mais comme nous n'aurons pas à les utiliser, nous ne les mentionnons pas ici.

(1.1) Nous admettons donc que sur l'ensemble **R** des nombres réels sont données :

1° une application $(\xi, \eta) \to \xi + \eta$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans **R** ;

2° une application $(\xi, \eta) \to \xi\eta$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans **R** (on écrit ξ^2 au lieu de $\xi\xi$ et parfois $\xi.\eta$ au lieu de $\xi\eta$) ;

3° une relation $\xi \leqslant \eta$ entre éléments de **R** (aussi notée $\eta \geqslant \xi$).

Nous admettons en outre que ces applications jouissent des propriétés suivantes (dont la liste est considérée comme *exhaustive pour ce volume*, tout au moins dans le texte proprement dit)[*] :

(R 1) Pour tout couple (ξ, η) d'éléments de **R**, on a $\eta + \xi = \xi + \eta$.

[*] Dans certains exercices on doit utiliser d'autres propriétés des nombres réels ; on le mentionne toujours explicitement.

(**R** 2) Pour tout triplet (ξ, η, ζ) d'éléments de **R**, on a $\xi + (\eta + \zeta) = (\xi + \eta) + \zeta$ (élément noté $\xi + \eta + \zeta$; on pose de même $\xi + \eta + \zeta + \theta = (\xi + \eta + \zeta) + \theta$ pour quatre éléments de **R**, et de même pour plus de quatre éléments).

(**R** 3) Il existe un élément ω de **R** tel que, pour tout élément ξ de **R**, on ait $\omega + \xi = \xi$.

(**R** 4) Pour tout élément ξ de **R**, il existe un élément ξ' de **R** tel que $\xi + \xi' = \omega$.

(**R** 5) Pour tout couple (ξ, η) d'éléments de **R**, on a $\eta\xi = \xi\eta$.

(**R** 6) Pour tout triplet (ξ, η, ζ) d'éléments de **R**, on a $\xi(\eta\zeta) = (\xi\eta)\zeta$ (que l'on note $\xi\eta\zeta$; notations analogues pour les produits de plus de trois éléments ; on écrit ξ^3 au lieu de $\xi\xi\xi$).

(**R** 7) Il existe un élément $\varepsilon \neq \omega$ de **R** tel que, pour tout élément ξ de **R**, on ait $\varepsilon\xi = \xi$.

(**R** 8) Pour tout élément $\xi \neq \omega$ de **R**, il existe un élément ξ'' de **R** tel que $\xi\xi'' = \varepsilon$.

(**R** 9) Pour tout triplet (ξ, η, ζ) d'éléments de **R**, on a $\xi(\eta + \zeta) = \xi\eta + \xi\zeta$.

(**R** 10) Les relations $\xi \leqslant \eta$ et $\eta \leqslant \zeta$ entraînent $\xi \leqslant \zeta$.

(**R** 11) La relation « $\xi \leqslant \eta$ et $\eta \leqslant \xi$ » est équivalente à $\xi = \eta$.

(**R** 12) Pour deux éléments quelconques ξ, η de **R**, on a $\xi \leqslant \eta$ ou $\eta \leqslant \xi$.

(**R** 13) La relation $\xi \leqslant \eta$ entraîne $\xi + \zeta \leqslant \eta + \zeta$.

(**R** 14) Les relations $\omega \leqslant \xi$ et $\omega \leqslant \eta$ entraînent $\omega \leqslant \xi\eta$.

(**R** 15) Etant donné un polynôme $P(\xi) = \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta$ à coefficients dans **R**, si, pour deux éléments λ, μ de **R** tels que $\lambda \leqslant \mu$, on a $P(\lambda) \leqslant \omega$ et $P(\mu) \geqslant \omega$, alors il existe $\zeta \in \mathbf{R}$ tel que $\lambda \leqslant \zeta \leqslant \mu$ et $P(\zeta) = \omega$.

(**1.2**) Un ensemble G pour lequel est donnée une application $(\xi, \eta) \to f(\xi, \eta)$ de $G \times G$ dans G satisfaisant aux *seules* conditions (R 1) à (R 4), où $\xi + \eta$ est remplacé par $f(\xi, \eta)$ partout, est ce que l'on appelle un *groupe commutatif*, et les conséquences que nous allons tirer des axiomes (R 1) à (R 4) valent pour *tous* les groupes commutatifs (quelle que soit la notation particulière adoptée pour $f(\xi, \eta)$; la traduction est bien entendu immédiate).

(**1.3**) *Il existe un seul élément ω de* **R** *tel que $\omega + \xi = \xi$ pour tout $\xi \in$* **R**.

En effet, si ω' est un second élément de **R** tel que $\omega' + \xi = \xi$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, on a en particulier, en vertu de (R 1)

$$\omega = \omega' + \omega = \omega + \omega' = \omega'.$$

L'unique élément ω de **R** vérifiant (R 3) est appelé « zéro » et sera noté 0 désormais.

(**1.4**) *Dans* **R**, *la relation $\xi + \eta = \xi + \zeta$ entraîne $\eta = \zeta$.*

En effet, d'après (R 1), (R 2) et (R 4), on a

$$\xi' + (\xi + \eta) = (\xi' + \xi) + \eta = (\xi + \xi') + \eta = 0 + \eta = \eta$$

et de même $\xi' + (\xi + \zeta) = \zeta$; d'où la conclusion.

En particulier, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, l'élément ξ' tel que $\xi + \xi' = 0$ est *unique* ; on le note $-\xi$ et on dit que c'est l'*opposé* de ξ ; on a $-(-\xi) = \xi$ par (1.4). On écrit $\xi - \eta$ pour $\xi + (-\eta)$.

(1.5) *Dans* $\mathbf{R}$, *la relation* $\xi\eta = 0$ *est équivalente à* « $\xi = 0$ *ou* $\eta = 0$ ».

Tout d'abord, on a, par (**R** 9), (**R** 1) et (**R** 3)

$$0\xi + \xi^2 = (0 + \xi)\xi = \xi^2$$

d'où $0\xi = 0$ en vertu de (1.4) ; par (**R** 5), on a donc aussi $\xi 0 = 0$. Supposons maintenant $\xi\eta = 0$ et $\xi \neq 0$; alors, en vertu de (**R** 5), (**R** 6), (**R** 7) et (**R** 8), on a

$$\xi''(\xi\eta) = (\xi''\xi)\eta = \varepsilon\eta = \eta.$$

Mais en vertu de ce qui précède, $\xi''(\xi\eta) = \xi''0 = 0$, donc $\eta = 0$.

La propriété (1.5) s'exprime encore en disant que dans $\mathbf{R}$ *il n'y a pas de diviseur de zéro* (autre que 0).

(1.6) Soit $\mathbf{R}^*$ le *complémentaire de* $\{0\}$ dans $\mathbf{R}$; il résulte de (1.5) que la restriction à $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ de l'application $(\xi, \eta) \to \xi\eta$ est une application *dans* $\mathbf{R}^*$. Les conditions (**R** 5), (**R** 6), (**R** 7) et (**R** 8) entraînent alors que pour cette application, $\mathbf{R}^*$ est un *groupe commutatif* dit *groupe multiplicatif* des nombres réels $\neq 0$ (car dans (**R** 8) on ne peut avoir $\xi'' = 0$ en vertu de (1.5)). Comme dans (1.3) et (1.4) on ne s'est servi que de (**R** 1), (**R** 2), (**R** 3) et (**R** 4), on conclut de cette remarque et de (1.2) les deux propriétés suivantes :

(1.7) *Il existe un seul élément* $\varepsilon \in \mathbf{R}$ *tel que* $\varepsilon\xi = \xi$ *pour tout* $\xi \in \mathbf{R}$.

(1.8) *Si* $\xi \neq 0$, *la relation* $\xi\eta = \xi\zeta$ *entraîne* $\eta = \zeta$.

L'unique élément $\varepsilon \in \mathbf{R}$ vérifiant (**R** 7) est appelé l'*élément unité* de $\mathbf{R}$ et sera noté désormais 1.

Pour tout $\xi \neq 0$ dans $\mathbf{R}$, l'élément ξ'' tel que $\xi''\xi = 1$ est *unique* ; on le note ξ^{-1} ou $1/\xi$ et on dit que c'est l'*inverse* de ξ ; on a $(\xi^{-1})^{-1} = \xi$ par (1.8) ; on écrit aussi η/ξ pour $\eta\xi^{-1}$. Comme $0\zeta = 0$ pour tout $\zeta \in \mathbf{R}$ en vertu de (1.5) et que $1 \neq 0$, 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbf{R}$.

(1.9) *Si* $\xi \neq 0$ *et* $\eta \neq 0$, *on a* $(\xi\eta)^{-1} = \eta^{-1}\xi^{-1}$.

En effet $(\eta^{-1}\xi^{-1})\xi\eta = \eta^{-1}(\xi^{-1}\xi)\eta = \eta^{-1}1\eta = \eta^{-1}\eta = 1$ et on conclut par l'unicité de l'inverse.

(1 .10) *On a* $(-\xi)\eta = \xi(-\eta) = -(\xi\eta)$.

En effet $\xi\eta + (-\xi)\eta = (\xi + (-\xi))\eta = 0\eta = 0$ en vertu de (**R** 9) et de (1.5) ; on conclut par l'unicité de l'opposé d'un élément.

En particulier on a $-\xi = (-1)\xi$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$.

(1.11) La relation « $\xi \leqslant \eta$ et $\xi \neq \eta$ » entre deux éléments ξ, η de $\mathbf{R}$ s'écrit aussi $\xi < \eta$, ou $\eta > \xi$. La relation $\xi \leqslant \eta$ (resp. $\xi \geqslant \eta$, $\xi < \eta$, $\xi > \eta$) se lit « η est *supérieur* à ξ » (resp. « η est *inférieur* à ξ », « η est *strictement supérieur* à ξ », « η est *strictement inférieur* à ξ ») ; on dit aussi « plus grand » au lieu de « supérieur », « plus petit » au lieu d'« inférieur ».

On dit que les axiomes (R 10), (R 11), (R 12) expriment que la relation $\xi \leqslant \eta$ entre ξ et η est une *relation d'ordre total* ; on dit qu'un ensemble E pour lequel on a défini une relation $R(\xi, \eta)$ entre deux éléments quelconques de E, vérifiant les conditions (R 10), (R 11) et (R 12) (où il faut bien entendu remplacer $\xi \leqslant \eta$ par $R(\xi, \eta)$ partout) est un ensemble *totalement ordonné* par la relation R. Les conséquences que nous allons tirer des seuls axiomes (R 10), (R 11) et (R 12) valent pour *tous* les ensembles totalement ordonnés (quelle que soit la notation $R(\xi, \eta)$ adoptée pour la relation d'ordre total).

(1.12) *La relation $\xi \leqslant \eta$ est équivalente à « $\xi < \eta$ ou $\xi = \eta$ ».*

En effet, si l'on a $\xi \leqslant \eta$ et $\xi \neq \eta$, on a $\xi < \eta$ par définition ; donc si $\xi \leqslant \eta$, ou bien $\xi = \eta$, ou bien $\xi < \eta$. Réciproquement, $\xi < \eta$ entraîne $\xi \leqslant \eta$ par définition, et il en est de même de $\xi = \eta$ en vertu de (R 11).

(1.13) *Pour deux nombres réels quelconques ξ, η, on a une et une seule des trois relations $\xi < \eta$, $\xi = \eta$, $\xi > \eta$.*

En effet, en vertu de (R 12), on a, ou bien $\xi \leqslant \eta$, ou bien $\xi \geqslant \eta$; si $\xi \leqslant \eta$, on a, ou bien $\xi < \eta$, ou bien $\xi = \eta$ par (1.12) ; en outre si $\xi < \eta$, on ne peut avoir aussi $\xi \geqslant \eta$, car on aurait d'autre part $\xi \leqslant \eta$ et par suite $\xi = \eta$ en vertu de (R 11), ce qui contredit l'hypothèse $\xi < \eta$. Donc, si l'on a $\xi < \eta$, on ne peut avoir ni $\xi = \eta$, ni $\xi > \eta$ (1.12). On prouve de même (par échange de ξ et η) que si l'on a $\xi > \eta$, on ne peut avoir $\xi = \eta$ ni $\xi < \eta$; enfin, si $\xi = \eta$, on ne peut avoir ni $\xi < \eta$ ni $\xi > \eta$ par définition de ces deux relations (1.11).

(1.14) *La relation « $\xi \leqslant \eta$ et $\eta < \zeta$ » entraîne $\xi < \zeta$; de même la relation « $\xi < \eta$ et $\eta \leqslant \zeta$ » entraîne $\xi < \zeta$.*

Comme $\eta < \zeta$ entraîne par définition (1.11) que $\eta \leqslant \zeta$, il résulte de (R 10) que la relation « $\xi \leqslant \eta$ et $\eta < \zeta$ » entraîne $\xi \leqslant \zeta$; en outre, on ne peut alors avoir $\xi = \zeta$, car on aurait simultanément $\xi \leqslant \eta$ et $\eta < \xi$, ce qui contredit (1.13). Même démonstration pour la seconde assertion.

(1.15) *Les relations $\xi_1 \leqslant \eta_1$ et $\xi_2 \leqslant \eta_2$ entraînent $\xi_1 + \xi_2 \leqslant \eta_1 + \eta_2$; si de plus on a, soit $\xi_1 < \eta_1$, soit $\xi_2 < \eta_2$, on a $\xi_1 + \xi_2 < \eta_1 + \eta_2$.*

En effet, d'après (R 13) et (R 1), les hypothèses entraînent successivement $\xi_1 + \xi_2 \leqslant \eta_1 + \xi_2$ et $\eta_1 + \xi_2 \leqslant \eta_1 + \eta_2$; on en conclut $\xi_1 + \xi_2 \leqslant \eta_1 + \eta_2$ par (R 10). En outre, si l'on a alors $\xi_1 + \xi_2 = \eta_1 + \eta_2$, on déduit de ce qui précède et de (R 11) que l'on a aussi $\xi_1 + \xi_2 = \eta_1 + \xi_2 = \eta_1 + \eta_2$, ce qui entraîne par (1.4) $\xi_1 = \eta_1$ et $\xi_2 = \eta_2$; d'où la seconde assertion en vertu de la définition (1.11).

(1.16) *La relation $\xi \leqslant \eta$ est équivalente à la relation $\xi + \zeta \leqslant \eta + \zeta$; la relation $\xi < \eta$ est équivalente à $\xi + \zeta < \eta + \zeta$.*

En effet, il résulte de (R 13) que la relation $\xi \leqslant \eta$ entraîne $\xi + \zeta \leqslant \eta + \zeta$. Inversement, en vertu de (R 13) la relation $\xi + \zeta \leqslant \eta + \zeta$ entraîne $(\xi + \zeta) + (-\zeta) \leqslant (\eta + \zeta) + (-\zeta)$, ce qui n'est autre que $\xi \leqslant \eta$. D'autre part, la relation $\xi + \zeta = \eta + \zeta$ est équivalente à $\xi = \eta$ par (1.4), d'où la seconde assertion de l'énoncé.

(1.17) *Les relations* $\xi \leqslant \eta$, $0 \leqslant \eta - \xi$, $\xi - \eta \leqslant 0$, $-\eta \leqslant -\xi$ *sont équivalentes. Les relations* $\xi < \eta$, $0 < \eta - \xi$, $\xi - \eta < 0$, $-\eta < -\xi$ *sont équivalentes.*

Il résulte en effet de (1.16) que $\xi \leqslant \eta$ est équivalente à $\xi - \xi \leqslant \eta - \xi$, ce qui n'est autre que $0 \leqslant \eta - \xi$, que $\xi \leqslant \eta$ est équivalente à $\xi - \eta \leqslant \eta - \eta$, ce qui n'est autre que $\xi - \eta \leqslant 0$, et enfin que $\xi \leqslant \eta$ est équivalente à $\xi - (\xi + \eta) \leqslant \eta - (\xi + \eta)$, ce qui n'est autre que $-\eta \leqslant -\xi$. De même pour la seconde assertion.

Les nombres réels ξ tels que $\xi \geqslant 0$ (resp. $\xi > 0$) sont appelés *positifs* (resp. *strictement positifs*) ; les nombres réels ξ tels que $\xi \leqslant 0$ (resp. $\xi < 0$) sont appelés *négatifs* (resp. *strictement négatifs*) ; on note $\mathbf{R}_+$ (resp. $-\mathbf{R}_+$) l'ensemble des nombres positifs (resp. négatifs), $\mathbf{R}_+^*$ (resp. $-\mathbf{R}_+^*$) l'ensemble des nombres strictement positifs (resp. strictement négatifs). Les relations $\xi \geqslant 0$ et $-\xi \leqslant 0$ (resp. $\xi > 0$ et $-\xi < 0$) sont équivalentes en vertu de (1.17).

(1.18) *Si* $\xi \geqslant 0$ *et* $\eta \geqslant 0$, *on a* $\xi + \eta \geqslant 0$; *en outre on a alors, ou bien* $\xi + \eta > 0$, *ou bien* $\xi = \eta = 0$.

C'est un cas particulier de (1.15).

(1.19) Pour tout nombre réel ξ, on pose $|\xi| = \xi$ si $\xi \geqslant 0$, $|\xi| = -\xi$ si $\xi \leqslant 0$ et on dit que $|\xi|$ est la *valeur absolue de* ξ ; on a donc toujours $|\xi| \geqslant 0$. On a évidemment $|-\xi| = |\xi|$ par (1.17) ; en outre la relation $|\xi| = 0$ est *équivalente* à $\xi = 0$.

(1.20) *Si* $\alpha > 0$, *la relation* $|\xi| \leqslant \alpha$ *est équivalente à* $-\alpha \leqslant \xi \leqslant \alpha$; *la relation* $|\xi| < \alpha$ *est équivalente à* $-\alpha < \xi < \alpha$.

En effet, si $\xi \geqslant 0$, la relation $\xi > -\alpha$ est toujours vérifiée puisque $\xi \geqslant 0$ et $0 > -\alpha$ ((1.17) et (1.14)) ; la relation $|\xi| \leqslant \alpha$ (resp. $|\xi| < \alpha$) est en outre équivalente alors à $\xi \leqslant \alpha$ (resp. $\xi < \alpha$). Si au contraire $\xi \leqslant 0$ la relation $\xi < \alpha$ est toujours vérifiée et la relation $|\xi| \leqslant \alpha$ (resp. $|\xi| < \alpha$) est équivalente à $-\xi \leqslant \alpha$ (resp. $-\xi < \alpha$), donc à $\xi \geqslant -\alpha$ (resp. $\xi > -\alpha$) en vertu de (1.17) ; d'où la conclusion.

(1.21) *Quels que soient les nombres réels* ξ, η, *on a* $|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|$ *et* $||\xi| - |\eta|| \leqslant |\xi - \eta|$.

Si $\xi \geqslant 0$ et $\eta \geqslant 0$, on a $\xi + \eta \geqslant 0$ (1.18), donc $|\xi + \eta| = |\xi| + |\eta|$ par définition (1.19) ; la même relation a lieu si $\xi \leqslant 0$ et $\eta \leqslant 0$ par changement de ξ et η en $-\xi$ et $-\eta$. Si l'on a $\xi \leqslant 0 \leqslant \eta$, alors on en déduit $\xi + \eta \leqslant \eta \leqslant \eta + |\xi| = |\eta| + |\xi|$, et $\xi + \eta \geqslant \xi \geqslant \xi - |\eta| = -|\xi| - |\eta|$, d'où $|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|$ par (1.20) ; on raisonne de même par échange de η et ξ lorsque $\eta \leqslant 0 \leqslant \xi$. Enfin, de ce qui vient d'être démontré, on tire

$$|\xi| = |\xi + (\xi - \eta)| \leqslant |\xi| + |\xi - \eta|, \text{ et } |\eta| = |\xi + (\eta - \xi)| \leqslant |\xi| + |\eta - \xi|,$$

d'où $-|\xi - \eta| \leqslant |\xi| - |\eta| \leqslant |\xi - \eta|$, ce qui achève la démonstration.

(1.22) *Si* $\zeta \geqslant 0$, *la relation* $\xi \leqslant \eta$ *entraîne* $\xi\zeta \leqslant \eta\zeta$.

En effet (1.17), $\xi \leqslant \eta$ entraîne $0 \leqslant \eta - \xi$, donc, par (R 14), on a alors $0 \leqslant (\eta - \xi)\zeta = \eta\zeta - \xi\zeta$ compte tenu de (R 9), et on conclut par (1.17).

(**1.23**) *Les relations* $\xi \leqslant 0$ *et* $\eta \geqslant 0$ *entraînent* $\xi\eta \leqslant 0$; *les relations* $\xi \leqslant 0$ *et* $\eta \leqslant 0$ *entraînent* $\xi\eta \geqslant 0$. *Les relations* $\xi > 0$ *et* $\eta > 0$ *entraînent* $\xi\eta > 0$; *les relations* $\xi > 0$ *et* $\eta < 0$ *entraînent* $\xi\eta < 0$; *les relations* $\xi < 0$ *et* $\eta < 0$ *entraînent* $\xi\eta > 0$ (*règle des signes*).

On a en effet $(-\xi)\eta = -(\xi\eta)$ et $(-\xi)(-\eta) = -(\xi(-\eta)) = \xi\eta$ par (1.4) et (1.10). La première assertion résulte donc de (1.17) et (R 14) ; la seconde résulte de la première et de (1.5).

Pour tout nombre réel ξ, on a donc $\xi^2 \geqslant 0$ en vertu de (R 10) et (1.23). En outre il résulte de (1.5) que la relation $\xi^2 = 0$ entraîne $\xi = 0$, donc la relation $\xi \neq 0$ est *équivalente* à $\xi^2 > 0$. En particulier, comme $1 = 1^2$, on a $1 > 0$ compte tenu de (R 7) ; on déduit alors de (1.18) que $2 = 1 + 1 > 0$, $3 = 2 + 1 > 0$, et ainsi de suite.

(**1.24**) *Pour deux nombres réels quelconques* ξ, η, *on a* $|\xi\eta| = |\xi| \,.\, |\eta|$.

Cela résulte aussitôt de la règle des signes et de la définition (1.19). On a en particulier $|\xi|^2 = |\xi^2| = \xi^2$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$.

(**1.25**) *Si* $\xi > 0$, *on a* $\xi^{-1} > 0$. *Si* $\zeta > 0$, *la relation* $\xi \leqslant \eta$ *est équivalente à* $\xi\zeta \leqslant \eta\zeta$ *et la relation* $\xi < \eta$ *est équivalente à* $\xi\zeta < \eta\zeta$. *La relation* $0 < \xi < \eta$ *est équivalente à* $0 < \eta^{-1} < \xi^{-1}$.

Si $\xi > 0$, on a $\xi\xi^{-1} = 1 > 0$, et on en tire $\xi^{-1} > 0$ en vertu de la règle des signes et de (1.13). Si $\zeta > 0$, la relation $\xi\zeta \leqslant \eta\zeta$ entraîne $(\xi\zeta)\zeta^{-1} \leqslant (\eta\zeta)\zeta^{-1}$ d'après ce qui précède et (1.22) ; on déduit donc de là et de (1.22) que $\xi \leqslant \eta$ et $\xi\zeta \leqslant \eta\zeta$ sont alors équivalentes. L'équivalence de $\xi < \eta$ et de $\xi\zeta < \eta\zeta$ (lorsque $\zeta > 0$) résulte alors de ce qui précède et de (1.8). Enfin, de $0 < \xi < \eta$ on tire, en vertu de ce qui précède et de (1.5), $0 < \xi(\xi^{-1}\eta^{-1}) < \eta(\xi^{-1}\eta^{-1})$, c'est-à-dire $0 < \eta^{-1} < \xi^{-1}$.

(**1.26**) Il résulte de (1.23) et (1.25) que les applications $(\xi, \eta) \to \xi\eta$ et $\xi \to \xi^{-1}$ restreintes à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ et à $\mathbf{R}_+^*$ respectivement, sont des applications *dans* $\mathbf{R}_+^*$; comme en outre $1 > 0$ on conclut alors de (R 5), (R 6), (R 7) et (R 8) que $\mathbf{R}_+^*$ est un *groupe commutatif, sous-groupe* de $\mathbf{R}^*$.

(**1.27**) Pour tout nombre réel ξ, on pose $\operatorname{sgn}(\xi) = 1$ si $\xi > 0$, $\operatorname{sgn}(\xi) = -1$ si $\xi < 0$ et $\operatorname{sgn}(0) = 0$ (*signe* de ξ) ; il résulte aussitôt de cette définition et de la règle des signes que l'on a

(1.27.1) $$\operatorname{sgn}(\xi\eta) = \operatorname{sgn}(\xi)\operatorname{sgn}(\eta)$$

quels que soient ξ, η dans $\mathbf{R}$; en outre, par définition de $|\xi|$ (1.19), on a

(1.27.2) $$\xi = |\xi| \cdot \operatorname{sgn}(\xi).$$

Il est clair que l'ensemble à deux éléments $\{-1, 1\}$ est un *sous-groupe* de $\mathbf{R}^*$; l'application $\xi \to \operatorname{sgn}(\xi)$ est un *homomorphisme* de $\mathbf{R}^*$ sur ce sous-groupe en vertu de (1.27.1), et l'application $\xi \to |\xi|$ est un *homomorphisme* de $\mathbf{R}^*$ sur le sous-groupe $\mathbf{R}_+^*$ en vertu de (1.24). En outre, la formule (1.27.2) donne l'*unique* manière d'écrire tout nombre réel $\xi \neq 0$ sous la forme d'un produit $\rho\zeta$, où $\rho > 0$ et ζ est égal à 1 ou à -1 ; on dit que le groupe $\mathbf{R}^*$ est *produit direct* de ses sous-groupes $\{-1, 1\}$ et $\mathbf{R}^*_+$.

(1.28) *Les relations* $0 < \xi_1 \leqslant \eta_1$, $0 < \xi_2 \leqslant \eta_2$ *entraînent* $\xi_1\xi_2 \leqslant \eta_1\eta_2$; *si de plus on a, soit* $\xi_1 < \eta_1$, *soit* $\xi_2 < \eta_2$, *on a* $\xi_1\xi_2 < \eta_1\eta_2$.

La démonstration est la même que celle de (1.15), en y remplaçant l'addition par la multiplication et utilisant (1.25) au lieu de (R 13). En particulier :

(1.29) *La relation* $\xi^2 \leqslant \eta^2$ *entre deux nombres réels est équivalente à* $|\xi| \leqslant |\eta|$.

(1.30) *La relation* $\xi^3 \leqslant \eta^3$ *entre deux nombres réels est équivalente à* $\xi \leqslant \eta$.

En effet, si $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$, on a $0 \leqslant \xi^2 \leqslant \eta^2$ puis $0 \leqslant \xi^3 \leqslant \eta^3$ par deux applications de (1.28) ; comme $(-\xi)^3 = -\xi^3$, il en résulte que si $\xi \leqslant \eta \leqslant 0$, on a aussi $\xi^3 \leqslant \eta^3$; enfin, si $\xi \leqslant 0 \leqslant \eta$, on a $\xi^3 \leqslant 0 \leqslant \eta^3$, ce qui achève la démonstration.

(1.31) *Pour tout nombre* $\alpha > 0$, *il existe un nombre* $\beta > 0$ *et un seul tel que* $\beta^2 = \alpha$; *les nombres* β *et* $-\beta$ *sont les seuls nombres réels* ξ *tels que* $\xi^2 = \alpha$.

Nous allons appliquer (R 15) au polynôme $f(\xi) = \xi^2 - \alpha$; on a $f(0) = -\alpha < 0$. D'autre part, si $\alpha \leqslant 1$, on a $f(1) = 1 - \alpha \geqslant 0$; si $\alpha > 1$, on a $\alpha^2 > \alpha$ et $f(\alpha) > 0$. Dans les deux cas l'existence de β résulte de (R 15). L'unicité de la solution $\beta > 0$ de l'équation $\xi^2 = \alpha$ résulte de (1.29), et il est clair que $-\beta$ est la seule solution <0 de cette équation.

Comme par ailleurs on a $\xi^2 \geqslant 0$ pour tout nombre réel ξ, on voit donc que l'équation $\xi^2 = \alpha$ a *deux* solutions opposées si $\alpha > 0$, *une* seule (égale à 0) si $\alpha = 0$, et *aucune* solution si $\alpha < 0$. Lorsque $\alpha \geqslant 0$, l'unique solution $\beta \geqslant 0$ de l'équation $\xi^2 = \alpha$ s'appelle *racine carrée* de α et se note $\sqrt{\alpha}$ (ou $\alpha^{\frac{1}{2}}$). Il résulte de (1.29) que la relation $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$ est *équivalente* à $\sqrt{\xi} \leqslant \sqrt{\eta}$.

(1.32) *Une équation de la forme* $\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$ *a deux solutions distinctes si* $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, *une seule solution si* $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, *aucune solution si* $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

Cela résulte aussitôt de (1.31) et de la formule

$$\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = \alpha\left(\xi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right).$$

(1.33) *Toute équation de la forme* $\alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta = 0$ (*où* $\alpha \neq 0$) *a au moins une solution.*

Comme $\alpha \neq 0$, on peut diviser par α et supposer donc que $\alpha = 1$. Nous allons appliquer (R 15) au polynôme $f(\xi) = \xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta$. Posons $\lambda = 1 + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \geqslant 1$; on peut écrire, pour $\xi \neq 0$,

(1.33.1) $$f(\xi) = \xi^3\left(1 + \frac{\beta}{\xi} + \frac{\gamma}{\xi^2} + \frac{\delta}{\xi^3}\right)$$

Or, si l'on prend $|\xi| > \lambda$ (par exemple $|\xi| = \lambda + 1$), on a, puisque $|\xi| > 1$

$$\left|\frac{\beta}{\xi} + \frac{\gamma}{\xi^2} + \frac{\delta}{\xi^3}\right| < \frac{1}{|\xi|}\Big(|\beta| + |\gamma| + |\delta|\Big) \leqslant \frac{\lambda}{|\xi|} < 1$$

d'où

$$1 + \frac{\beta}{\xi} + \frac{\gamma}{\xi^2} + \frac{\delta}{\xi^3} > 1 - \frac{\lambda}{|\xi|} > 0$$

et la règle des signes montre que $f(\xi)$ a le signe de ξ^3. Par suite, on a $f(-\lambda - 1) < 0$, $f(\lambda + 1) > 0$, et la conclusion résulte de (R 15).

CHAPITRE II

Les axiomes de la géométrie euclidienne

(2.1) Par définition, un *plan euclidien* est un ensemble E pour lequel on suppose données :

1° une application $(x, y) \to x + y$ de $E \times E$ dans E ;
2° une application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbf{R} \times E$ dans E ;
3° une application $(x, y) \to (x|y)$ de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$;
– vérifiant les conditions suivantes, dites « *axiomes de la géométrie plane euclidienne* » :

(V 1) Pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on a $x + y = y + x$.

(V 2) Pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E, on a $x + (y + z) = (x + y) + z$ (élément noté $x + y + z$; on pose de même $x + y + z + t = (x + y + z) + t$ pour quatre éléments de E, et de même pour plus de quatre éléments).

(V 3) Il existe un élément e de E tel que, pour tout élément x de E, on ait $e + x = x$.

(V 4) Pour tout élément x de E, il existe un élément x' de E tel que $x + x' = e$.

(V 5) Pour tout couple (α, β) de nombres réels et tout élément x de E, on a $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

(V 6) Pour tout nombre réel α et tout couple (x, y) d'éléments de E, on a $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(V 7) Pour tout couple (α, β) de nombres réels et tout élément x de E on a $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

(V 8) Pour tout élément x de E, on a $1x = x$.

(D_2) Pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E, il existe trois nombres réels α, β, γ non tous nuls et tels que $\alpha x + \beta y + \gamma z = e$; en outre, il existe deux éléments a, b de E tels que la relation $\lambda a + \mu b = e$ entraîne $\lambda = \mu = 0$.

(E 1) Pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on a $(y|x) = (x|y)$.

(E 2) Pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E, on a $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$.

(E 3) Pour tout nombre réel α et tout couple (x, y) d'éléments de E, on a $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$.

(E 4) Pour tout $x \neq e$ dans E, on a $(x|x) > 0$.

(2.2) Un *espace euclidien à trois dimensions* est de même un ensemble E pour lequel on suppose données trois applications comme dans (2.1) vérifiant les mêmes conditions que dans (2.1), à l'exception de (D_2) qui est remplacée par la suivante :

(D_3) Pour tout quadruplet (x, y, z, t) d'éléments de E, il existe quatre nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ non tous nuls et tels que $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = e$; en outre il existe trois éléments a, b, c de E tels que la relation $\lambda a + \mu b + \gamma c = e$ entraîne $\lambda = \mu = \gamma = 0$.

(2.3) Dans les trois chapitres qui suivent, nous allons développer d'abord les conséquences des axiomes (V 1) à (V 8) *seuls*, puis celles qui découlent de l'axiome supplémentaire (D_2), et enfin celles qui utilisent le système d'axiomes de la géométrie plane euclidienne tout entier. Aux chap. VI et VII, nous étudierons de même en premier lieu les conséquences des axiomes (V 1) à (V 8) et (D_3), puis celles du système complet des axiomes de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

(2.4) Soit E un ensemble pour lequel on a défini trois applications $(x, y) \to x + y$, $(\lambda, x) \to \lambda x$, $(x, y) \to (x|y)$ vérifiant les conditions de (2.1). Soit d'autre part g une *bijection* de E sur un ensemble E′, et soit g^{-1} la bijection réciproque. On peut alors définir pour E′ trois applications :

$$(x', y') \to g(g^{-1}(x') + g^{-1}(y')) = x' + y' \textit{ par définition}$$

$$(\lambda, x') \to g(\lambda g^{-1}(x')) = \lambda x' \textit{ par définition}$$

$$(x', y') \to (g^{-1}(x')|g^{-1}(y')) = (x'|y') \textit{ par définition.}$$

Il est immédiat de vérifier pour ces trois applications les conditions de (2.1). Par exemple, pour vérifier (V 3), on pose $e' = g(e)$ et l'on a pour tout $x' \in E'$, $e' + x' = g(g^{-1}(e') + g^{-1}(x')) = g(e + g^{-1}(x')) = g(g^{-1}(x')) = x'$.

On dit que le *plan euclidien* E′ ainsi défini s'obtient par *transport de structure au moyen de la bijection g.* On a bien entendu une définition analogue lorsqu'on suppose seulement vérifiés certains des axiomes de (2.1), ou lorsqu'on remplace (D_2) par (D_3).

CHAPITRE III

Espaces vectoriels

(3. 0) Un ensemble E pour lequel on suppose données deux applications $(x, y) \to x + y$ et $(\lambda, x) \to \lambda x$ vérifiant les conditions (V 1) à (V 8) (les autres axiomes du chapitre II n'étant pas nécessairement vérifiés) s'appelle *espace vectoriel réel*, ou simplement *espace vectoriel* ; les éléments de E sont appelés *vecteurs* ou *points* ; les nombres réels (en tant qu'ils opèrent dans E) sont souvent qualifiés de *scalaires*. L'application $(x, y) \to x + y$ est appelée l'*addition des vecteurs* dans E, et l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ la *multiplication des vecteurs par les scalaires* ; on dit que $x + y$ est la *somme* des vecteurs x et y, et de même pour plus de deux vecteurs ; on dit que λx est le *produit* du vecteur x par le scalaire λ (on l'écrit parfois aussi $x\lambda$).

L'ensemble **R** des nombres réels est un espace vectoriel pour les applications $(\xi, \eta) \to \xi + \eta$ et $(\lambda, \xi) \to \lambda\xi$ en vertu des axiomes (R 1) à (R 9) ; le sous-ensemble $\{0\}$ de **R** est aussi un espace vectoriel pour les restrictions de ces mêmes applications. Nous allons dès les §§ 1 et 2 ci-dessous rencontrer de façon naturelle beaucoup d'autres espaces vectoriels.

Nous donnons dans ce chapitre les conséquences les plus élémentaires des axiomes (V 1) à (V 8), en nous bornant strictement aux résultats et définitions qui sont utilisés en géométrie euclidienne à 2 et 3 dimensions.

§ 1. Sous-espaces vectoriels ; variétés linéaires

Les axiomes (V 1) à (V 4) expriment que, pour l'addition, un espace vectoriel E est un *groupe commutatif* (dit « groupe additif de E »), et les propriétés (3.1.1) et (3.1.2) ci-dessous découlent donc de (1.3) et (1.4) respectivement.

(3.1.1) *Il existe un seul élément e de* E *tel que* $e + x = x$ *pour tout* $x \in$ E.

L'unique élément e de E vérifiant (V 3) est appelé l'*élément neutre* ou l'*origine* de E et noté 0 (par analogie avec le nombre réel « zéro » qui a la même propriété dans **R**) ; l'expérience montre qu'il n'y a pas d'inconvénient à noter par un même signe l'élément neutre de tous les espaces vectoriels et le nombre « zéro ».

(3.1.2) *Dans* E, *la relation* $x + y = x + z$ *entraîne* $y = z$.

(3.1.3) *Pour tout scalaire* α *et tout vecteur* x, *on a* $0x = \alpha 0 = 0$.

D'après (V 5), on a, pour tout scalaire λ,

$$0x + \lambda x = (0 + \lambda)x = \lambda x$$

d'où $0x = 0$ par (3.1.2). Pour tout vecteur y, on a, par (V 6),

$$\alpha 0 + \alpha y = \alpha(0 + y) = \alpha y$$

d'où $\alpha 0 = 0$ par (3.1.2).

(3.1.4) *La relation* $\lambda y = 0$ *équivaut à* « $y = 0$ *ou* $\lambda = 0$ ».

Supposons en effet $\lambda \neq 0$; on a alors, pour tout vecteur $z \in$ E, en vertu de (V 7) et (V 8)

$$\lambda^{-1}(\lambda z) = (\lambda^{-1}\lambda)z = 1 \,.\, z = z.$$

Si $\lambda y = 0$, on a donc $y = 0$ en vertu de (3.1.3), d'où la proposition, compte tenu de (3.1.3).

(3.1.5) *Pour tout* $x \in$ E, *le vecteur* $(-1)x$ *est l'unique vecteur* $x' \in$ E *tel que* $x + x' = 0$ (dit *opposé* à x).

L'unicité de x' résulte de (3.1.2) ; par (V 5), (V 8) et (3.1.3) on a

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = 0.$$

On pose $-x = (-1)x$ et on écrit $x - y$ au lieu de $x + (-y)$.

(3.1.6) On dit qu'une partie non vide V de E est un *sous-espace vectoriel* (ou simplement un *sous-espace*) si, pour tout couple (x, y) de vecteurs de V et tout couple (α, β) de nombres réels, on a $\alpha x + \beta y \in$ V. Les restrictions de $(x, y) \to x + y$ et $(\lambda, x) \to \lambda x$ à V $\times$ V et **R** $\times$ V respectivement appliquent donc ces ensembles *dans* V, et il est immédiat que ces restrictions vérifient les conditions (V 1), (V 2), et (V 5) à (V 8) ; en outre, d'après (3.1.3), on a $0 \in$ V, donc (V 3) est aussi vérifiée ; enfin, en vertu de (3.1.5), on a $-x \in$ V pour tout $x \in$ V, donc (V 4) est aussi vérifiée, et V est un *espace vectoriel* pour les applications précédentes, d'où le nom choisi.

(3.1.7) L'ensemble $\{0\}$ réduit à l'origine de E est évidemment le *plus petit* sous-espace vectoriel de E. Si V et W sont deux sous-espaces vectoriels de E, il en est de même de leur intersection V $\cap$ W. En outre, l'ensemble U des sommes $x + y$, où $x \in$ V et $y \in$ W, est un sous-espace vectoriel : en effet, si α, β sont deux nombres réels, x_1, x_2 des vecteurs de V, y_1, y_2 des vecteurs de W, on a

$$\alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2)$$

en vertu de (V 1) et (V 2), d'où la conclusion. On pose U = V + W ; il est clair que V + W est *le plus petit* sous-espace vectoriel de E contenant à la fois V et W ; on dit que c'est la *somme* de V et W (à ne pas confondre avec la *réunion* $V \cup W$). On a évidemment $V + W = W + V$, et pour que l'on ait $V \subset W$, il faut et il suffit que $V + W = W$. En outre, si V_1, V_2, V_3 sont trois sous-espaces vectoriels, on a $V_1 + (V_2 + V_3) = (V_1 + V_2) + V_3$ par (V 2) ; on note ce sous-espace $V_1 + V_2 + V_3$, et on dit que c'est la *somme* de ces trois sous-espaces vectoriels ; de même pour plus de trois sous-espaces vectoriels.

(3.1.8) *Soient* V, W *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $V \cap W = \{0\}$.

b) *Tout vecteur de* $V + W$ *s'écrit d'une seule manière sous la forme* $x + y$, *où* $x \in V$ *et* $y \in W$.

Si b) est vérifiée et si $z \in V \cap W$, on a $z + 0 = 0 + z$, donc $z = 0$, ce qui montre que b) entraîne a). Inversement, si a) est vérifiée, la relation $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ avec x_1, x_2 dans V et y_1, y_2 dans W, entraîne $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$; mais $x_1 - x_2 \in V$, $y_2 - y_1 \in W$, donc $x_1 - x_2 = y_2 - y_1 = 0$, ou encore $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, donc a) entraîne b).

Lorsque les conditions équivalentes de (3.1.8) sont vérifiées, on dit que la somme $V + W$ est *directe* ; si de plus $V + W = E$, on dit que V et W sont deux sous-espaces *supplémentaires* dans E.

On dit de même que la somme de trois sous-espaces vectoriels U, V, W est *directe* si tout vecteur de $U + V + W$ s'écrit d'*une seule manière* sous la forme $x + y + z$ avec $x \in U$, $y \in V$ et $z \in W$. Il résulte aussitôt de ce qui précède que cela équivaut aux deux conditions $U \cap V = \{0\}$, $(U + V) \cap W = \{0\}$. On définit de même une somme directe de plus de trois sous-espaces vectoriels.

Si E_1, E_2 sont deux espaces vectoriels *quelconques*, et si $E = E_1 \times E_2$ est l'*ensemble produit* des ensembles E_1, E_2 (autrement dit, l'ensemble des couples (x_1, x_2), où $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$), on pose, pour x_1, y_1 dans E_1, x_2, y_2 dans E_2 et pour tout scalaire λ,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

On vérifie immédiatement que ces deux applications satisfont aux axiomes (V 1) à (V 8) (l'élément neutre étant $(0, 0)$) ; on dit que E, muni de ces deux applications, est l'*espace vectoriel produit* des espaces vectoriels E_1, E_2. Dans cet espace, l'ensemble des vecteurs $(x_1, 0)$ (resp. $(0, x_2)$) où x_1 parcourt E_1 (resp. où x_2 parcourt E_2) est un *sous-espace* vectoriel E'_1 (resp. E'_2) de E, comme il résulte aussitôt des définitions (3.1.6) ; il est clair que

$$E'_1 \cap E'_2 = \{(0, 0)\},$$

et comme on peut écrire

$$(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$$

quels que soient $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on a $E = E'_1 + E'_2$; en d'autres termes, E est *somme directe* de E'_1 et E'_2.

On étend aussitôt la définition du produit d'espaces vectoriels à trois espaces vectoriels ou plus.

(3.1.9) Soit a un vecteur de E ; l'application $t_a : x \to a + x$ de E dans lui-mêmes est appelée *translation de vecteur a*. Si b est un second vecteur de E, on a

$$t_a \circ t_b = t_b \circ t_a = t_{a+b}$$

car $a + (b + x) = (a + b) + x = b + (a + x)$ pour tout $x \in E$. En particulier, comme t_0 est l'application identique, toute translation t_a est une *bijection* de E sur lui-même, dont t_{-a} est la bijection réciproque. Comme $t_a = t_b$ entraîne $a = b$, on voit que les translations forment un *groupe isomorphe* au groupe additif E.

(3.1.10) L'image par une translation t_a d'un sous-espace vectoriel V de E est l'ensemble des $a + x$, où $x \in V$; on la note $a + V$, et on dit que c'est une *variété linéaire affine* (ou simplement une *variété linéaire*) dans E. Il est clair que si $a \in V$, on a $a + V = V$, puisque pour tout $y \in V$, $y - a \in V$. Les sous-espaces vectoriels sont les *variétés linéaires contenant* 0 (ou, comme on dit encore, « passant par 0 »).

(3.1.11) *Soient* V, W *deux sous-espaces vectoriels, a, b deux vecteurs de* E. *Pour que* $a + V$ *soit contenu dans* $b + W$, *il faut et il suffit que l'on ait* $V \subset W$ *et* $a - b \in W$.

Dire que $a + V \subset b + W$ équivaut à dire que pour tout $x \in V$, $a + x$ est égal à $b + y$ pour un $y \in W$ convenable, ou encore $x = c + y$ avec $c = b - a$. En particulier $x = 0$ est de cette forme, et par suite $-c = a - b \in W$; alors, pour tout $x \in V$, on a $x \in c + W = W$, donc $V \subset W$. Réciproquement, les relations $V \subset W$ et $a - b \in W$ entraînent $a + V \subset a + W = a + ((b - a) + W) = b + W$ puisque $W = (b - a) + W$.

(3.1.12) Il résulte de (3.1.11) que pour une variété linéaire L, il existe *un seul* sous-espace vectoriel V tel que $L = a + V$; l'élément $a \in L$ peut d'ailleurs être remplacé par $a + b$ pour tout $b \in V$, autrement dit est *arbitraire dans* L. On dit que V est la *direction* de la variété linéaire L. Si $V = \{0\}$, L est réduite à *un seul point*.

(3.1.13) *Pour que deux variétés linéaires* $a + V$ *et* $b + W$ *aient un point commun, il faut et il suffit que* $a - b \in V + W$; *l'intersection de ces deux variétés linéaires est alors une variété linéaire de direction* $V \cap W$.

Si x appartient à la fois à $a + V$ et à $b + W$, il existe $y \in V$ et $z \in W$ tels que $x = a + y = b + z$, d'où $a - b = -y + z \in V + W$; la réciproque est immédiate. On peut alors écrire les deux variétés linéaires sous la forme

$x + V$ et $x + W$ respectivement, et leurs points communs sont évidement les points de $x + (V \cap W)$.

(3.1.14) Soient V, W deux sous-espaces vectoriels. Si $V \subset W$, on dit que deux variétés linéaires $a + V$, $b + W$, de directions respectives V et W, sont *parallèles*. Si ces variétés ont un point commun c, on a $a + V = c + V \subset c + W = b + W$; donc, *ou bien* $a + V$ et $b + W$ n'ont aucun point commun, *ou bien* $a + V$ est contenue dans $b + W$. Par tout point $x \in E$ il passe *une variété et une seule de direction* V (donc parallèle à W), savoir $x + V$.

(3.1.15) Soient V, W deux sous-espaces vectoriels *supplémentaires* ; deux variétés linéaires $a + V$, $b + W$ ont alors *un point commun et un seul* : c'est un cas particulier évident de (3.1.13) puisque $V + W = E$ et $V \cap W = \{0\}$. En particulier, considérons un vecteur x quelconque dans E, et soit $x = y + z$, où $y \in V$ et $z \in W$; comme $x - y \in W$, $x - z \in V$, on voit que y est l'unique point commun à V et $x + W$, z l'unique point commun à W et $x + V$, x l'unique point commun à $y + W$ et $z + V$. Les variétés linéaires $x + W = y + W$ et $x + V = z + V$, de directions respectives W et V, sont appelées les variétés *projetantes* de x sur V et W respectivement.

Thèmes d'exercices

1) Soient U, V, W trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $U \subset V$, on a $U + (V \cap W) = (U + V) \cap (U + W)$. Cette relation est-elle vraie si $U \not\subset V$?

2) Soient U, V, W trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $V \subset U$, on a $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$. Cette relation est-elle vraie si $V \not\subset U$?

3) Soient U, V, U′, V′ quatre sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si l'on a $U \cap V = U' \cap V'$, on a

$$U = (U + (V \cap U')) \cap (U + (V \cap V')).$$

4) Soient V, W deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Montrer que tout sous-espace vectoriel $U \supset V$ est somme directe de V et de $U \cap W$.

§ 2. Applications linéaires, applications multilinéaires, applications affines

(3.2.1) Soient E et F deux espaces vectoriels. On dit qu'une application u de E dans F est *linéaire* si elle vérifie les conditions suivantes :

(3.2.1.1) $$u(x + y) = u(x) + u(y)$$

quels que soient x, y dans E ;

(3.2.1.2) $$u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

quels que soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

De (3.2.1.2) et (3.1.3) on déduit en particulier.

(**3.2.1.3**) $$u(0) = 0.$$

Une application linéaire de E dans lui-même est encore appelée un *endomorphisme* de E (ou *opérateur* dans E) ; une application linéaire de E *dans* **R** est appelée une *forme linéaire* sur E.

(**3.2.2**) *Exemples.* Pour tout scalaire α, l'application $x \to \alpha x$ de E dans lui-même est linéaire, en vertu de (V 6) et (V 7) ; on dit que c'est l'*homothétie linéaire* (ou simplement *homothétie*) *de rapport* α. Pour $\alpha = 0$, cette application est l'application constante $x \to 0$ (3.1.3) ; pour $\alpha = 1$, c'est l'application identique $x \to x$ de E dans lui-même, notée 1_E ou même 1 si cela n'entraîne pas confusion.

Déterminons *toutes* les applications linéaires de **R** dans un espace vectoriel E ; pour une telle application u, la donnée du vecteur $b = u(1)$ dans E détermine complètement u, car pour tout nombre réel ξ, on a, par (3.2.1.2), $u(\xi) = u(\xi \,.\, 1) = \xi u(1) = \xi b$. Inversement, pour *tout* $b \in E$, l'application $\xi \to \xi b$ est linéaire, comme il résulte de (V 5) et (V 7).

Comme dernier exemple, considérons, dans un espace vectoriel E, deux sous-espaces vectoriels *supplémentaires* V, W (3.1.8). Pour tout $x \in E$, il y a par définition deux vecteurs $p(x) \in V$, $q(x) \in W$, *uniquement* déterminés, et tels que $x = p(x) + q(x)$. Montrons que les applications p et q de E dans V et W respectivement, sont linéaires : en effet, quels que soient x, y dans E, on a d'une part

$$x + y = p(x + y) + q(x + y)$$

et de l'autre

$$\begin{aligned} x + y &= p(x) + q(x) + p(y) + q(y) \\ &= (p(x) + p(y)) + (q(x) + q(y)). \end{aligned}$$

Mais comme $p(x) + p(y) \in V$ et $q(x) + q(y) \in W$, *l'unicité* de la décomposition de $x + y$ donne les relations

$$p(x + y) = p(x) + p(y), \qquad q(x + y) = q(x) + q(y).$$

De même, quels que soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a d'une part

$$\lambda x = \lambda p(x) + \lambda q(x)$$

et de l'autre

$$\lambda x = p(\lambda x) + q(\lambda x)$$

d'où, par comparaison,

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad q(\lambda x) = \lambda q(x),$$

ce qui achève de prouver notre assertion.

On dit que les applications linéaires p et q sont les *projections* de E dans V et W respectivement, correspondant à la décomposition de E en somme directe de V et W ; on dit aussi que p (resp. q) est la *projection sur* V (resp. W) *parallèlement à* W (resp. V). On dit que $p(x)$ et $q(x)$ sont *les projections de* x sur V et W respectivement. On peut naturellement aussi considérer p et q comme des *endomorphismes* de E puisque $V \subset E$ et $W \subset E$. Les variétés linéaires *projetantes* (3.1.14) de x sont respectivement $p^{-1}(p(x))$ et $q^{-1}(q(x))$.

(3.2.3) Soient E, F deux espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F. Si V est un sous-espace vectoriel de E, l'*image* $u(V)$ de V par u est un sous-espace vectoriel de F, car deux éléments de $u(V)$ sont par définition de la forme $u(x)$, $u(y)$, où x, y sont dans V, et l'on a $\alpha u(x) + \beta u(y) = u(\alpha x + \beta y)$ par (3.2.1) ; comme $\alpha x + \beta y \in V$ par hypothèse, on a $\alpha u(x) + \beta u(y) \in u(V)$. Pour tout $a \in E$, $u(a + V)$ est l'ensemble des vecteurs $u(a) + u(x)$ avec $x \in V$, en vertu de (3.2.1.1) ; on voit donc que $u(a + V)$ est la variété linéaire $u(a) + u(V)$. Si V, W sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a $u(V + W) = u(V) + u(W)$.

En particulier, $u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, que l'on appelle de façon abrégée l'*image de u* ; dire que $u(E) = F$ signifie donc que u est *surjective*. Toute application linéaire u de E dans F peut être considérée comme une application linéaire surjective de E sur son image $u(E)$. Comme exemple d'applications linéaires surjectives, mentionnons les projections p et q dans le dernier exemple de (3.2.2) : pour tout $x \in V$ on peut en effet écrire $x = x + 0$ avec $x \in V$ et $0 \in W$, donc par définition $p(x) = x$, ce qui prouve notre assertion.

Soit maintenant W un sous-espace vectoriel de F ; alors l'*image réciproque* $u^{-1}(W)$ de W par u est un sous-espace vectoriel de E : en effet, si x, y sont deux éléments de $u^{-1}(W)$, on a par définition $u(x) \in W$, $u(y) \in W$; par suite $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y) \in W$ par hypothèse, d'où $\alpha x + \beta y \in u^{-1}(W)$. En particulier $u^{-1}(0)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le *noyau de u*. Dans le dernier exemple de (3.2.2) on a $p^{-1}(0) = W$ et $q^{-1}(0) = V$.

(3.2.4) *Pour qu'une application linéaire u de* E *dans* F *soit injective, il faut et il suffit que son noyau* $u^{-1}(0)$ *soit réduit à* 0.

En effet, on a $u(0) = 0$, donc la condition est nécessaire. Inversement, si elle est vérifiée, la relation $u(x) = u(y)$ pour deux éléments x, y de E équivaut à $u(x - y) = 0$ et entraîne donc par hypothèse $x - y = 0$, ou $x = y$, ce qui prouve que u est injective.

Par exemple, pour tout vecteur $b \neq 0$ dans E, l'application linéaire $\xi \to \xi b$ de $\mathbf{R}$ dans E (3.2.2) est injective, en vertu de (3.1.4).

Avec les notations de (3.1.8), l'application $x_1 \to (0, x_1)$ de E_1 dans le produit $E_1 \times E_2$ est une application linéaire *injective*.

Si u est une application linéaire *injective* de E dans F et si V et W sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme est *directe* (3.1.8), alors la somme $u(V) + u(W)$ est *directe*, car on a $u(V) \cap u(W) = u(V \cap W) = \{u(0)\} = \{0\}$.

(3.2.5) On dit qu'une application linéaire u de E dans F est un *isomorphisme* de E sur F si elle est *bijective* ; alors l'application $v = u^{-1}$ de F dans E, réciproque de u, est *linéaire* (et par suite un isomorphisme de F sur E). En effet, si x', y' sont deux vecteurs de F, il existe par hypothèse deux vecteurs x, y de E, uniquement déterminés, tels que $x' = u(x)$, $y' = u(y)$, d'où l'on tire $\lambda x' + \mu y' = \lambda u(x) + \mu u(y) = u(\lambda x + \mu y)$. Par définition, on a donc $x = v(x')$, $y = v(y')$ et $v(\lambda x' + \mu y') = \lambda x + \mu y = \lambda v(x') + \mu v(y')$, ce qui prouve notre assertion.

Par exemple, pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ dans E est *bijective* et l'homothétie de rapport λ^{-1} est son application réciproque, puisque l'on a $\lambda(\lambda^{-1}x) = \lambda^{-1}(\lambda x) = x$ pour tout $x \in E$ en vertu de (V 7) et (V 8).

On dit que deux espaces vectoriels E, F sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de E sur F ; tout théorème démontré dans E et qui ne fait intervenir que des notions définies exclusivement à l'aide des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire, donne un théorème correspondant dans F, en considérant les images, par un isomorphisme de E sur F, des éléments et parties de E qui interviennent dans le théorème considéré.

Une application linéaire *injective* u de E dans F peut être considérée comme une application linéaire *bijective* de E sur son image $u(E)$, et $u(E)$ est donc un sous-espace de F *isomorphe à* E.

On notera enfin que dire qu'une bijection g de E sur F est un isomorphisme équivaut à dire que l'addition et la multiplication par un scalaire dans F sont obtenus par *transport de structure* au moyen de g (2.4).

(3.2.6) Soient E, F deux espaces vectoriels, u_1, u_2 deux applications linéaires de E dans F. Pour tout $x \in E$, posons $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$; l'application u de E dans F ainsi définie est *linéaire* et se note $u_1 + u_2$: en effet, on a pour deux vecteurs x, y de E,

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= u_1(\lambda x + \mu y) + u_2(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda u_1(x) + \mu u_1(y) + \lambda u_2(x) + \mu u_2(y) = \lambda u(x) + \mu u(y). \end{aligned}$$

De même, soient v une application linéaire de E dans F, α un scalaire, et pour tout $x \in E$, posons $w(x) = \alpha v(x)$; w est *linéaire* et se note αv ; en effet, on a, avec les mêmes notations

$$\begin{aligned} w(\lambda x + \mu y) = \alpha v(\lambda x + \mu y) = \alpha(\lambda v(x) + \mu v(y)) &= \lambda \alpha v(x) + \mu \alpha v(y) \\ &= \lambda w(x) + \mu w(y). \end{aligned}$$

Désignons par Hom(E, F) l'ensemble des applications linéaires de E dans F ; on a donc défini deux applications $(u, v) \to u + v$ de $\mathrm{Hom}(E, F) \times \mathrm{Hom}(E, F)$ dans Hom(E, F), et $(\alpha, u) \to \alpha u$ de $\mathbf{R} \times \mathrm{Hom}(E, F)$ dans Hom(E, F). Il est immédiat de vérifier que ces deux applications satisfont aux conditions (V 1) à (V 8), donc Hom(E, F), muni de ces deux applications, est un *espace vectoriel*, dans lequel l'élément neutre 0 est l'application constante $x \to 0$ de E dans F.

(**3.2.7**) Soient E, F, G trois espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F, v une application linéaire de F dans G ; alors l'application composée $v \circ u : x \to v(u(x))$ de E dans G est *linéaire*. En effet, on a, pour deux vecteurs x, y de E

$$v(u(\lambda x + \mu y)) = v(\lambda u(x) + \mu u(y)) = \lambda v(u(x)) + \mu v(u(y)).$$

En outre, si u, u_1, u_2 sont trois éléments de Hom(E, F), v, v_1, v_2 trois éléments de Hom(F, G) et α un scalaire, on a les relations

(**3.2.7.1**) $$v \circ (u_1 + u_2) = (v \circ u_1) + (v \circ u_2)$$

(**3.2.7.2**) $$(v_1 + v_2) \circ u = (v_1 \circ u) + (v_2 \circ u)$$

(**3.2.7.3**) $$v \circ (\alpha u) = (\alpha v) \circ u = \alpha(v \circ u).$$

Vérifions par exemple (3.2.7.1) : pour tout $x \in$ E, on a

$$\begin{aligned}(v \circ (u_1 + u_2))(x) &= v((u_1 + u_2)(x)) = v(u_1(x) + u_2(x)) \\ &= v(u_1(x)) + v(u_2(x)) = (v \circ u_1)(x) + (v \circ u_2)(x)\end{aligned}$$

et les autres vérifications se font de même.

(**3.2.8**) Faisons F = G = E dans les énoncés de (3.2.6) et (3.2.7). L'ensemble Hom(E, E) des *endomorphismes* de E se note encore End(E), et on a vu dans (3.2.6) que c'est un espace vectoriel. En outre, le composé $v \circ u$ de deux endomorphismes v, u de E se note encore vu (ou $v \, . \, u$) et s'appelle aussi le *produit* de ces deux endomorphismes ; il faut noter qu'en général on a $vu \neq uv$ (4.1.12). Comme la relation d'associativité $w(vu) = (wv)u = w \circ v \circ u$ pour trois endomorphismes de E est évidente par définition, les relations (3.2.7.1) et (3.2.7.2) montrent que End(E), muni des applications $(u, v) \to u + v$ et $(u, v) \to uv$, est un *anneau* (non commutatif en général).(*) Il est clair que l'application identique 1_E est l'*élément unité* de cet anneau ; les éléments *inversibles* de End(E) sont les éléments u pour lesquels il existe $v \in$ End(E) tel que $u \circ v = v \circ u = 1_E$, autrement dit $u(v(x)) = x$ et $v(u(x)) = x$ pour tout $x \in$ E ; la première de ces relations prouve que u est *surjectif* et la seconde que u est *injectif*, autrement dit les éléments inversibles de End(E) sont les *endomorphismes bijectifs* de E ; ce sont aussi les isomorphismes de E sur lui-même, que l'on appelle *automorphismes* de E. Ils forment un *groupe* (non commutatif en général) que l'on appelle le *groupe linéaire* de E et que l'on note **GL**(E).

(*) C'est bien entendu *ici* qu'il faut donner la définition générale d'un anneau non commutatif, au moment où l'on en rencontre pour la première fois de façon *naturelle* ; il doit en être de même pour la notion générale de *groupe* non commutatif et toutes les notions générales que l'on a l'occasion de rencontrer par la suite.

(**3.2.9**) Pour tout scalaire λ, notons h_λ l'homothétie $x \to \lambda x$ de rapport λ dans E ; on a $h_\lambda + h_\mu = h_{\lambda+\mu}$ par (V 5), et, en vertu de (3.1.4), la relation $h_\lambda = 0$ est *équivalente* à $\lambda = 0$ lorsque E n'est pas réduit à 0. Il est clair que $h_1 = 1_E$ dans l'anneau End(E) ; d'autre part, en vertu de (V 7) et (V 8), on a $h_\lambda h_\mu = h_{\lambda\mu}$ dans End(E), et pour $\lambda \neq 0$, h_λ est *inversible* dans End(E) et son inverse est $h_{1/\lambda}$. On voit donc que si $E \neq \{0\}$, les h_λ forment un *sous-corps* Z de End(E), *isomorphe* au corps **R**. On notera que pour tout $u \in \text{End}(E)$, on a $\lambda u = h_\lambda u = u h_\lambda$ pour tout scalaire λ ; en particulier $h_\lambda = \lambda \,.\, 1_E$.

Lorsque E = **R**, tout endomorphisme de E est un homothétie (3.2.2), donc End(**R**) est un *corps* isomorphe à **R**.

Si g est un *isomorphisme* de E sur un espace vectoriel F, tout endomorphisme de F s'écrit d'une seule manière $g \circ u \circ g^{-1}$, où u est un endomorphisme de E, et il est clair que $u \to g \circ u \circ g^{-1}$ est un *isomorphisme* de l'*anneau* End(E) *sur l'anneau* End(F) (dit *déduit de* g), qui transforme **GL**(E) en **GL**(F) et l'homothétie h_λ dans E en l'homothétie h_λ dans F.

(**3.2.10**) Etant donné un endomorphisme u de E, on dit qu'un vecteur $x \in E$ est un *vecteur propre* de u si x est *non nul* et si $u(x) = \lambda x$ pour un scalaire λ ; ce scalaire est alors *unique* puisque l'application $\xi \to \xi x$ est alors injective (3.2.4). Les scalaires λ pour lesquels il existe un vecteur propre x de E tel que $u(x) = \lambda x$ sont appelés les *valeurs propres* de u. Pour *tout* scalaire ξ, on désigne par $E(\xi\,;\,u)$ ou $E(\xi)$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $u(x) = \xi x$; il est immédiat que $E(\xi)$ est un *sous-espace vectoriel* de E. Dire que λ est valeur propre de u équivaut à dire que $E(\lambda)$ *n'est pas réduit à* 0 ; les éléments de $E(\lambda)$ sont alors 0 et les vecteurs propres correspondant à la valeur propre λ ; la restriction de u à $E(\lambda)$ est l'*homothétie de rapport* λ dans ce sous-espace ; on dit encore que $E(\lambda)$ est le *sous-espace propre* de u correspondant à la valeur propre λ.

Pour tout endomorphisme u de E, $E(0\,;\,u)$ est identique au *noyau* $u^{-1}(0)$ de u ; on en déduit que pour tout scalaire λ, $E(\lambda\,;\,u)$ est le *noyau de* $u - \lambda \,.\, 1_E$. Nous verrons plus loin (4.1.14) des exemples d'endomorphismes qui n'ont *aucune* valeur propre, c'est-à-dire pour lesquels $E(\lambda\,;\,u) = \{0\}$ pour tout λ.

Remarquons enfin que si g est un isomorphisme de E sur un espace vectoriel F, on a $g(E(\lambda\,;\,u)) = E(\lambda\,;\,gug^{-1})$.

(**3.2.11**) *Pour qu'un endomorphisme u de* E *soit tel que* $u^2 = 1_E$, *il faut et il suffit que* E *soit somme directe* (3.1.8) *des sous-espaces* $E(1\,;\,u)$ *et* $E(-1\,;\,u)$.

En effet, supposons que l'on ait $u^2 = 1_E$; pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = \tfrac{1}{2}(x + u(x)) + \tfrac{1}{2}(x - u(x)).$$

Or, si $y = \frac{1}{2}(x + u(x))$, on a $u(y) = \frac{1}{2}(u(x) + u^2(x)) = \frac{1}{2}(u(x) + x) = y$, et si $z = \frac{1}{2}(x - u(x))$, on a $u(z) = \frac{1}{2}(u(x) - u^2(x)) = \frac{1}{2}(u(x) - x) = -z$; autrement dit, cela prouve que $E = E(1\,;\,u) + E(-1\,;\,u)$. D'autre part, si x appartient à la fois à $E(1\,;\,u)$ et $E(-1\,;\,u)$, on a $u(x) = x$ et $u(x) = -x$, donc $x = -x$, ou encore $2x = 0$, donc $x = 0$ (3.1.3) ; cela achève de prouver que E est somme directe de $E(1\ ;\ u)$ et de $E(-1\ ;\ u)$. Inversement, s'il en est ainsi, posons, pour tout $x \in E$, $x = y + z$, avec $y \in E(1\ ;\ u)$ et $z \in E(-1\ ;\ u)$. On a $u(x) = u(y) + u(z) = y - z$ et $u^2(x) = u(y) - u(z) = y + z = x$.

Il peut se faire bien entendu que l'un des sous-espaces $E(1\ ;\ u)$, $E(-1\ ;\ u)$ se réduise à 0. Si $E(-1\ ;\ u) = \{0\}$, donc $E(1\ ;\ u) = E$, u est l'application identique 1_E ; si $E(1\ ;\ u) = \{0\}$, on a $u(x) = -x$ pour tout $x \in E$, autrement dit $u = -1_E$, que l'on appelle encore la *symétrie par rapport à l'origine.*

Les éléments $u \in \text{End}(E)$ tels que $u^2 = 1_E$ sont appelés les *involutions* (ou *endomorphismes involutifs*) de E ; ce sont les automorphismes de E tels que $u^{-1} = u$.

(3.2.12) Soient E, F, G trois espaces vectoriels ; une application u de $E \times F$ dans G est dite *bilinéaire* si pour tout $x \in E$, l'application partielle $y \to u(x, y)$ est linéaire et, pour tout $y \in F$, l'application partielle $x \to u(x, y)$ est linéaire. Il revient au même de dire que, pour x, x' dans E, y, y' dans F, on a, quels que soient les scalaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

(3.2.12.1) $$u(\alpha x + \beta x', \gamma y + \delta y') = \alpha\gamma u(x, y) + \alpha\delta u(x, y') + \beta\gamma u(x', y) + \beta\delta u(y, y').$$

On notera en particulier que l'on a $u(0, y) = 0$ et $u(x, 0) = 0$ quels que soient $x \in E$ et $y \in F$.

Lorsque $G = \mathbf{R}$, on dit qu'une application bilinéaire de $E \times F$ dans $\mathbf{R}$ est une *forme bilinéaire*.

(3.2.13) *Exemples.* L'application constante $(x, y) \to 0$ est bilinéaire. La multiplication par un scalaire $(\lambda, x) \to \lambda x$ est une application bilinéaire de $\mathbf{R} \times E$ dans E (3.2.2).

En vertu de (3.2.12.1), si u est une application bilinéaire de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans un espace vectoriel G, on a $u(\xi, \eta) = u(\xi . 1, \eta . 1) = \xi\eta u(1, 1) = \xi\eta c$, où c est un vecteur de G ; réciproquement, pour *tout* $c \in G$, $(\xi, \eta) \to \xi\eta c$ est bilinéaire.

(3.2.14) Considérons en particulier le cas où $F = E$. On dit qu'une application bilinéaire u de $E \times E$ dans G est *symétrique* si l'on a $u(y, x) = u(x, y)$ quels que soient x, y dans E. Par exemple, il résulte de (3.2.13) que *toute* application bilinéaire de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans G est symétrique. On dit que u est *alternée* (ou *antisymétrique*) si l'on a $u(y, x) = -u(x, y)$ quels que soient x, y dans E. Il est équivalent de dire que l'on a $u(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$: en effet, de la définition d'une application bilinéaire alternée, on conclut en particulier que $u(x, x) = -u(x, x)$, ou $2u(x, x) = 0$, d'où $u(x, x) = 0$ (3.1.4) ; inversement, si $u(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$, on a, quels que soient x, y dans E, $u(x + y, x + y) = 0$, d'où, par (3.2.12.1),

$$u(x, x) + u(x, y) + u(y, x) + u(y, y) = 0, \text{ c'est-à-dire } u(y, x) = -u(x, y).$$

Il résulte de (3.2.13) que la *seule* application bilinéaire alternée de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans un espace vectoriel G est 0.

(3.2.15) Soient E, F, G, H quatre espaces vectoriels ; on dit qu'une application u de $E \times F \times G$ dans H est *trilinéaire* si elle est « linéaire en chaque variable », autrement dit si chacune des trois applications $x \to u(x, y, z)$, $y \to u(x, y, z)$, $z \to u(x, y, z)$ est linéaire (où y, z sont fixés de façon arbitraire pour la première application, x, z pour la seconde, x, y pour la troisième). On a en particulier $u(0, y, z) = u(x, 0, z) = u(x, y, 0) = 0$ quels que soient x, y, z. Lorsque $H = \mathbf{R}$, on dit que u est une *forme trilinéaire*. Lorsque $E = F = G$, on dit qu'une application trilinéaire u de E dans H est *symétrique* si $u(x, y, z)$ ne change pas par permutation arbitraire de x, y, z ; il revient au même de dire que chacune des applications bilinéaires $(x, y) \to u(x, y, z)$, $(y, z) \to u(x, y, z)$, $(x, z) \to u(x, y, z)$ est symétrique. On dit que u est *alternée* (ou *antisymétrique*) si chacune de ces trois applications partielles est alternée ; il revient au même de dire que l'on a

$$u(x, y, z) = u(y, z, x) = u(z, x, y) = -u(x, z, y) = -u(z, y, x) = -u(y, x, z).$$

On définit de la même façon les applications *p-linéaires* pour $p > 3$.

(3.2.16) Soient u_1, u_2 deux applications bilinéaires de $E \times F$ dans G, α un scalaire. Il est immédiat que les applications

$$(x, y) \to u_1(x, y) + u_2(x, y) \text{ (notée } u_1 + u_2)$$

$$(x, y) \to \alpha u(x, y) \qquad \text{(notée } \alpha u)$$

sont bilinéaires (3.2.6). L'ensemble $\mathscr{B}(E, F ; G)$ des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G est un *espace vectoriel* ; l'ensemble des applications bilinéaires *symétriques* (resp. *alternées*) de $E \times E$ dans G est un *sous-espace vectoriel* de $\mathscr{B}(E, E ; G)$.

Soient E_1, F_1, G_1 trois espaces vectoriels, $f : E_1 \to E$, $g : F_1 \to F$, $h : G \to G_1$ trois applications *linéaires*. Alors, si u est une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, $(x_1, y_1) \to h(u(f(x_1), g(y_1)))$ est une application bilinéaire de $E_1 \times F_1$ dans G_1.

On a des propriétés analogues pour les applications p-linéaires quel que soit l'entier $p \geqslant 2$.

(3.2.17) Soient E, F deux espaces vectoriels. On appelle *application affine* (ou *application linéaire affine*) de E dans F toute application *composée*

$$u = t_b \circ v \tag{3.2.17.1}$$

où v est une application *linéaire* de E dans F, et t_b une *translation* dans F (b étant un vecteur quelconque de F). Pour une telle application u, on a $u(0) = t_b(v(0)) = t_b(0) = b$, d'où $v = t_{-b} \circ u$, ce qui prouve que la décomposition (3.2.17.1) est *unique* ; on dit que t_b et v sont respectivement la translation et l'application linéaire *associées* à l'application affine u. Comme toute translation est bijective, il résulte aussitôt des formules précédentes que, pour que u soit *injective* (resp. *surjective*, *bijective*), il faut et il suffit que v le soit.

Pour toute *variété linéaire* $L = a + V$ dans E de direction V, $u(L)$ est une *variété linéaire* dans F, de direction $v(V)$: en effet, on a $v(L) = v(a) + v(V)$ et $t_b(v(L)) = b + v(a) + v(V)$. En particulier, si L et L′ sont *parallèles* (3.1.14), il en est de même de $u(L)$ et de $u(L')$, car si V et V′ sont les directions de L et L′ respectivement, et si par exemple $V \subset V'$, on a $v(V) \subset v(V')$.

(3.2.18) *Exemples.* Les *applications linéaires* de E dans F sont évidemment des applications affines ; de même les *translations* dans E sont des applications affines de E dans lui-même.

Toute application affine de **R** dans un espace vectoriel E est de la forme $\xi \to \xi a + b$, où a et b sont des vecteurs de E, en vertu de (3.2.2). Pour tout vecteur $a \in E$ et tout scalaire λ, l'application

$$h_{a,\lambda} : x \to a + \lambda(x - a) = (1 - \lambda)a + \lambda x$$

est une application affine de E dans lui-même, dont l'application linéaire associée est l'homothétie h_λ (3.2.9) ; on a $h_{a,\lambda}(a) = a$, et on dit que $h_{a,\lambda}$ est l'*homothétie affine* (ou simplement *homothétie*) *de centre a et de rapport* λ ; elle est *bijective* si et seulement si $\lambda \neq 0$; en particulier $h_{0,\lambda} = h_\lambda$; on peut d'ailleurs écrire $h_{a,\lambda} = t_a \circ h_\lambda \circ t_a^{-1}$. La relation $h_{a,\lambda}(x) = x$ équivaut à $(1 - \lambda)(x - a) = 0$, donc (3.1.4) à $\lambda = 1$ ou $x = a$; par suite, si $\lambda \neq 1$, le *seul* point de E invariant par l'homothétie de centre a et de rapport λ est son centre a. On notera que pour toute variété linéaire L, $h_{a,\lambda}(L)$ est *parallèle à* L, car si V est la direction de L, on a $\lambda V \subset V$.

(3.2.19) Soient $u = t_b \circ v$ une application affine de E dans F, $u' = t_c \circ w$ une application affine de F dans un espace vectoriel G, t_c (avec $c \in G$) et w étant la translation et l'application linéaire associées à u'. Alors l'application *composée* $u'' = u' \circ u$ est une application *affine* de E dans G : en effet, pour tout $x \in E$, on a

$$u''(x) = u'(b + v(x)) = c + w(b + v(x)) = c + w(b) + w(v(x))$$

ce qui peut aussi s'écrire

(3.2.19.1) $$u'' = t_{u'(b)} \circ (w \circ v)$$

et prouve, de façon plus précise, que la translation associée à u'' est $t_{u'(b)}$ et l'application linéaire associée à u'' est la *composée* $w \circ v$ des applications linéaires associées à u' et u respectivement. En particulier, pour toute application linéaire v de E dans F et tout vecteur $a \in E$, on a

(3.2.19.2) $$v \circ t_a = t_{v(a)} \circ v.$$

Lorsque v est *bijective*, on peut donc encore définir les applications affines dont v est l'application linéaire associée par la formule $u = v \circ t_a$; dans cette formule, le vecteur a est déterminé de manière unique en vertu de (3.2.19.2).

(3.2.20) On a vu ci-dessus (3.2.17) que les applications affines bijectives sont celles dont l'application linéaire associée est bijective. Pour une telle application $u = t_b \circ v$, on a $u^{-1} = v^{-1} \circ t_{-b} = t_{v^{-1}(b)} \circ v^{-1}$ et l'application réciproque u^{-1} est donc une *application affine*, dont l'application linéaire associée est v^{-1}. En particulier, les applications affines bijectives de E dans lui-même forment un *groupe*, dit *groupe affine* de E et noté **GA**(E).

(3.2.21) Comme toute translation t_a est une *bijection* de E sur lui-même, on peut, au moyen de t_a, *transporter* la structure d'espace vectoriel de E (2.4) ; cela donne bien entendu une *autre* structure d'espace vectoriel sur E si $a \neq 0$; pour cette nouvelle structure, a est l'*origine*, et on dit encore qu'on l'obtient en *prenant a pour origine* dans E. Les applications affines de E dans E *laissant invariant a* (c'est-à-dire les applications linéaires de E dans E pour cette nouvelle structure) ne sont autres que les applications $t_a v t_a^{-1}$, où $v \in \mathrm{End}(E)$. Toute propriété d'endomorphismes de E se « transporte » en propriétés d'applications affines laissant a invariant, au moyen de l'application bijective $v \to t_a v t_a^{-1}$.

Thèmes d'exercices

1) *Projecteurs*. Si p et q sont les projections correspondant à une décomposition de E en somme directe V + W (3.2.2), p et q sont des éléments de End(E) tels que $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p + q = 1$. Inversement, pour tout élément $p \in \mathrm{End}(E)$ tel que $p^2 = p$ (qu'on appelle un *projecteur* ou un *idempotent*), E est somme directe de $p(E)$ et de $p^{-1}(0)$, et si $q = 1 - p$, on a $q^2 = q$, $q(E) = p^{-1}(0)$, $q^{-1}(0) = p(E)$.

Pour que u soit une involution de E (3.2.11), il faut et il suffit que $p = (1 + u)/2$ soit un projecteur.

Si p_1, p_2 sont deux projecteurs dans End(E), la relation $p_1(E) \subset p_2(E)$ est équivalente à $p_2 p_1 = p_1$; la relation $p_1^{-1}(0) \subset p_2^{-1}(0)$ est équivalente à $p_2 p_1 = p_2$. Pour que $p_1 + p_2$ soit un projecteur, il faut et il suffit que $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$. La relation $p_1 p_2 = p_2 p_1$ est équivalente à la relation « $p_2(p_1(E)) \subset p_1(E)$ et $p_2(p_1^{-1}(0)) \subset p_1^{-1}(0)$ » ; lorsque $p_1 p_2 = p_2 p_1$, les endomorphismes $r = p_1 p_2$ et $s = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ sont des projecteurs tels que $r(E) = p_1(E) \cap p_2(E)$ et $s(E) = p_1(E) + p_2(E)$.

Si p est un projecteur dans End(E), et u un endomorphisme de E, la relation $u(p(E)) \subset p(E)$ est équivalente à la relation $pup = up$.

2) Soient W, W′ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel V. Montrer que W et W′ sont isomorphes.

3) Supposons que E soit somme directe de deux sous-espaces V, W. Si v, w sont deux applications linéaires de V et W respectivement dans un même espace vectoriel F, il existe une seule application linéaire u de E dans F qui coïncide avec v dans V et avec w dans W.

4) Pour qu'un endomorphisme u de E soit tel que $u^2 = 0$, il faut et il suffit que $u(E) \subset u^{-1}(0)$. Montrer qu'alors $v = 1 + u$ est un automorphisme de E.

En particulier, si p et q sont les projections correspondant à une décomposition de E en somme directe V + W, et si f est une application linéaire de V dans W, v l'endomorphisme de E égal à f dans V et à 0 dans W, $u = 1 + qv$ est un automorphisme de E.

5) *Projecteurs et idéaux.* Posons $A = \mathrm{End}(E)$. Avec les notations de l'exerc. 1, $L = Ap$ et $L' = Aq$ sont des idéaux à gauche de A, et A est somme directe de L et L' ; $R = pA$ et $R' = qA$ sont des idéaux à droite de A et A est somme directe de R et R'. Inversement, montrer que si A est somme directe de deux idéaux à gauche L et L', et si $1 = p + q$ avec $p \in L$, $q \in L'$, on a $p^2 = p$, $q^2 = q$, $pq = qp = 0$, $L = Ap$, $L' = Aq$, et E est somme directe de $p(E)$ et de $q(E)$; résultats analogues pour les idéaux à droite. L'idéal L (resp. R) est l'ensemble des $u \in A$ tels que $p^{-1}(0) \subset u^{-1}(0)$ (resp. $u(E) \subset p(E)$). Si l'on pose $V = p(E)$, $W = q(E)$, montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(V, W)$ est isomorphe au sous-espace vectoriel qAp de A, et que l'anneau $\mathrm{End}(V)$ est isomorphe au sous-anneau pAp de A (dont p est l'élément unité).

6) Soient E, F deux espaces vectoriels ; montrer que toute application bilinéaire de $\mathbf{R} \times E$ dans F est de la forme $(\xi, x) \to u(\xi x) = \xi u(x)$, où u est une application linéaire de E dans F.

7) Soient E, F deux espaces vectoriels ; montrer que toute application bilinéaire u de $E \times E$ dans F s'écrit d'une seule manière sous la forme $u = v + w$, où v est une application bilinéaire symétrique et w une application bilinéaire alternée.

8) Soient E, F deux espaces vectoriels ; on dit qu'une application u de E dans F est *quadratique* si elle a la propriété suivante : il existe trois applications f, g, h de $E \times E$ dans F telles que l'on ait

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 f(x, y) + \lambda\mu g(x, y) + \mu^2 h(x, y)$$

quels que soient x, y dans E et les scalaires λ, μ.

Montrer que l'on a $f(x, y) = u(x)$, $h(x, y) = u(y)$, $g(y, x) = g(x, y)$ et $g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y)$. En outre, si l'on pose

$$v(x, y, z) = g(x + y, z) - g(x, z) - g(y, z)$$

montrer que l'on a $v(x, y, z) = v(y, z, x) = v(z, x, y)$; en déduire que l'on a $v(\lambda x, \mu y, \nu z) = \lambda\mu\nu v(x, y, z)$, quels que soient les vecteurs x, y, z de E et les scalaires λ, μ, ν. Déduire finalement de cette relation que $v(x, y, z)$ est identiquement nul, et par suite que g est une application bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans F et que l'on a $u(x) = \frac{1}{2}g(x, x)$.

9) Soient u, v deux endomorphismes *permutables* d'un espace vectoriel E (c'est-à-dire tels que $vu = uv$). Montrer que pour tout scalaire ξ, on a $v(E(\xi\,;u)) \subset E(\xi\,;u)$.

10) Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que toute valeur propre $\lambda \neq 0$ de uv est aussi une valeur propre de vu.

11) Si à toute application affine bijective $u \in \mathbf{GA}(E)$ on fait correspondre l'application linéaire associée $\bar{u}$, l'application $u \to \bar{u}$ est un homomorphisme surjectif du groupe $\mathbf{GA}(E)$ sur le groupe $\mathbf{GL}(E)$; le noyau de cet homomorphisme est le sous-groupe (distingué) $T(E)$ des translations de E, canoniquement isomorphe à E considéré comme groupe commutatif.

12) Si u, u' sont deux applications affines de E dans F, il en est de même de l'application $x \to u(x) + u(x')$ que l'on note $u + u'$. Montrer que si u_1, u_2, u_3 sont des applications affines de E dans lui-même, on a $(u_2 + u_3) \circ u_1 = u_2 \circ u_1 + u_3 \circ u_1$, mais en général $u_1 \circ (u_2 + u_3) \neq u_1 \circ u_2 + u_1 \circ u_3$. Si u est une application affine de E dans F et λ un scalaire, $x \to \lambda u(x)$ est encore une application affine de E dans F (égale à $h_\lambda \circ u$) que l'on note λu ; montrer que l'on a $(\lambda u_1) \circ u_2 = \lambda(u_1 \circ u_2)$ mais en général $u_1 \circ (\lambda u_2) \neq \lambda(u_1 \circ u_2)$.

13) Soit u une application affine de E dans F ; montrer que pour toute variété linéaire L dans F, $u^{-1}(L)$ est vide ou est une variété linéaire dans E.

14) Montrer que toute *involution* u dans le groupe affine $\mathbf{GA}(E)$ (i.e. toute bijection affine de E sur lui-même telle que $u^2 = 1_E$) est de la forme $u = t_a \circ v \circ t_a^{-1}$ où v est une *involution dans* $\mathbf{GL}(E)$ (observer d'abord que, pour tout $x \in E$, $\frac{1}{2}(x + u(x))$ est invariant par u).

§ 3. Droites et hyperplans

Pour simplifier, nous écarterons dans ce paragraphe le cas trivial des espaces vectoriels réduits à 0, et nous supposerons donc dans tout ce qui suit que $E \neq \{0\}$.

(3.3.1) Soient E un espace vectoriel, a un vecteur *non nul* de E. L'image de **R** par l'application linéaire $\xi \rightarrow \xi a$ de **R** dans E (3.2.2) est un sous-espace vectoriel D, que l'on peut caractériser comme le *plus petit* sous-espace vectoriel de E contenant a : c'est en effet l'ensemble des vecteurs ξa et tout sous-espace vectoriel contenant a contient les ξa pour tout $\xi \in \mathbf{R}$. En outre D *ne contient aucun sous-espace vectoriel autre que lui-même et* $\{0\}$, car tout vecteur $\neq 0$ de D est de la forme λa avec $\lambda \neq 0$ (3.1.3) et l'on a $\lambda^{-1}(\lambda a) = a$, d'où notre assertion d'après ce qui précède. On dit que D est la ***droite vectorielle passant par*** a ; pour tout vecteur $b \neq 0$ de D, D est donc aussi la droite vectorielle passant par b.

Si D, D′ sont deux droites vectorielles dans E, il résulte de ce qui précède que l'on a, ou bien $D \cap D' = D = D'$, ou bien $D \cap D' = \{0\}$; dans le second cas, la somme $D + D'$ est donc *directe* (3.1.8). Si u est une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, et D une droite vectorielle dans E, ou bien $u(D)$ est réduit à 0, ou bien $u(D)$ est une droite vectorielle dans F ; c'est toujours le second cas qui se produit lorsque u est *injective*.

Une variété linéaire (3.1.10) dont la direction (3.1.11) est une droite vectorielle s'appelle ***droite affine*** (ou simplement ***droite***); une droite vectorielle est donc une droite affine *passant par* 0. Tout vecteur $\neq 0$ de la direction d'une droite D s'appelle ***vecteur directeur*** de D ; si b est un vecteur directeur de D, tous les autres sont les vecteurs λb avec $\lambda \neq 0$; pour tout point $a \in D$, l'application $\xi \rightarrow a + \xi b$ est une *bijection* de **R** sur D ; ces bijections sont appelées les ***représentations paramétriques*** de D ; l'image de **R** par la bijection $\xi \rightarrow a + \xi b$ est l'unique droite passant par a et ayant b pour vecteur directeur.

(3.3.2) *Par deux points distincts a, a' d'un espace vectoriel* E, *il passe une droite et une seule.*

Effectuant au besoin la translation t_{-a}, on peut supposer que $a = 0$, donc $a' \neq 0$ et la proposition résulte aussitôt de (3.3.1).

L'unique droite passant par a et a' s'écrit $D_{aa'}$ ou $D_{a'a}$ (ou $D_{a,a'}$ ou $D_{a',a}$) ; comme $a' - a$ est un vecteur directeur de cette droite, $D_{aa'}$ est l'ensemble des points $a + \xi(a' - a)$ où ξ parcourt **R**.

Comme une droite vectorielle ne contient aucun sous-espace vectoriel autre qu'elle-même et $\{0\}$, dire que deux droites sont *parallèles* signifie qu'elles ont *même direction* (3.1.13) ; par tout point de E il passe donc une droite et une seule parallèle à une droite donnée. Si a, a' sont deux points distincts d'une variété linéaire L, on a $D_{aa'} \subset L$, car on peut par une translation se borner au cas où $a = 0$, et la conclusion résulte alors de la définition d'un sous-espace vectoriel (3.1.6).

(3.3.3) Etant donné un vecteur $a \neq 0$ dans E, l'ensemble Δ des vecteurs *ξa tels que ξ soit* $\geqslant 0$ s'appelle la *demi-droite vectorielle* (ou *demi-droite vectorielle fermée*) *passant par a* et se note Δ_{0a} ; pour tout vecteur $b = \lambda a$ de cette demi-droite tel que $b \neq 0$, on a $a = \lambda^{-1} b$, donc Δ est aussi la demi-droite vectorielle fermée passant par b. La droite vectorielle D passant par a est l'unique droite vectorielle contenant Δ ; elle contient exactement *deux* demi-droites vectorielles, savoir Δ et la demi-droite $-\Delta$ (ensemble des vecteurs $-x$, où $x \in \Delta$, dite *opposée* à Δ) passant par $-a$; en outre D est réunion de Δ et $-\Delta$, et l'on a $\Delta \cap (-\Delta) = \{0\}$. On appelle *demi-droite vectorielle ouverte* passant par a l'ensemble des ξa pour $\xi > 0$, autrement dit le complémentaire Δ° (ou Δ_{0a}°) de $\{0\}$ dans Δ ; on dit encore que $-\Delta^\circ$ (ensemble des vecteurs $-x$, où $x \in \Delta^\circ$) est l'*opposée* de la demi-droite vectorielle ouverte Δ° ; D contient exactement deux demi-droites vectorielles ouvertes, Δ° et $-\Delta^\circ$ (aussi appelées les *orientations de* D), et les ensembles Δ°, $-\Delta^\circ$ et $\{0\}$ forment une *partition* de D.

L'image d'une demi-droite vectorielle fermée Δ (resp. d'une demi-droite vectorielle ouverte Δ°) par une translation $t_a : x \to a + x$ s'appelle la *demi-droite affine fermée* (resp. *ouverte*) *d'origine a et de direction* Δ (resp. Δ°) ; c'est donc l'ensemble des vecteurs $a + x$ pour $x \in \Delta$ (resp. $x \in \Delta^\circ$), noté $a + \Delta$ (resp. $a + \Delta^\circ$) ; on dit souvent « demi-droite » au lieu de « demi-droite affine » ; les demi-droites vectorielles sont les demi-droites *d'origine* 0. Tout vecteur $b \neq 0$ dans Δ (resp. tout vecteur $b \in \Delta^\circ$) est appelé *vecteur directeur* de la demi-droite $a + \Delta$ (resp. $a + \Delta^\circ$) ; cette demi-droite est donc l'ensemble des vecteurs $a + \xi b$ pour tous les $\xi \geqslant 0$ (resp. tous les $\xi > 0$). Toute demi-droite est contenue dans une droite et une seule ; inversement, si D est une droite et $a \in D$, il existe exactement deux demi-droites fermées (resp. ouvertes) d'origine a et contenues dans D, comme il résulte aussitôt des définitions ; ces demi-droites sont encore dites *opposées*. Deux demi-droites de même direction (resp. de directions opposées) sont dites *parallèles et de même sens* (resp. *parallèles et de sens contraires*).

(3.3.4) Soient a, b deux points distincts de E ; tout point de la droite D_{ab} s'écrit d'une seule manière sous la forme $a + \xi(b - a) = (1 - \xi)a + \xi b$ avec $\xi \in \mathbf{R}$. L'ensemble des points de D_{ab} pour lesquels $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ (resp. $0 < \xi < 1$, $0 < \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \xi < 1$) s'appelle le *segment fermé* (resp. *ouvert, ouvert en a et fermé en b, fermé en a et ouvert en b*) *d'extrémités a et b* ; il est clair que le segment fermé (resp. ouvert) d'extrémités b et a est égal au segment fermé (resp. ouvert) d'extrémités a et b. Le point $\frac{1}{2}(a + b)$ s'appelle le *milieu* des segments d'extrémités a et b.

Lorsque $a = b$, on convient encore d'appeler segment fermé (resp. ouvert) d'extrémités a et b l'ensemble réduit au point a (resp. l'ensemble vide). Lorsque cela n'entraîne pas confusion, on note ab ou ba le segment fermé d'extrémités a et b.

Soit u une application *affine* (3.2.17) de E dans un espace vectoriel F ; on a alors, quels que soient les points a, b de E et le scalaire ξ,

$$\textbf{(3.3.4.1)} \qquad u((1 - \xi)a + \xi b) = (1 - \xi)u(a) + \xi u(b).$$

En effet, on peut écrire $u(x) = c + v(x)$, où $c \in \mathrm{F}$ et v est une application linéaire de E dans F ; comme $v((1 - \xi)a + \xi b) = (1 - \xi)v(a) + \xi v(b)$, on en déduit aussitôt (3.3.4.1), puisque $c = (1 - \xi)c + \xi c$. En particulier, on a

$$\textbf{(3.3.4.2)} \qquad u(\tfrac{1}{2}(a + b)) = \tfrac{1}{2}(u(a) + u(b)).$$

(3.3.5) On appelle *hyperplan vectoriel* dans un espace vectoriel E tout sous-espace vectoriel H qui est *supplémentaire* d'une droite vectorielle (3.1.8). Un hyperplan vectoriel H *n'est contenu dans aucun sous-espace vectoriel autre que lui-même et* E : en effet, il y a un $a \notin \mathrm{H}$, tel que tout $x \in \mathrm{E}$ s'écrive $\xi a + y$ avec $y \in \mathrm{H}$; si un sous-espace vectoriel V contient H et un point $x = \xi a + y \notin \mathrm{H}$, on a nécessairement $\xi \neq 0$, donc $a = \xi^{-1}x - \xi^{-1}y \in \mathrm{V}$, et finalement $\mathrm{V} = \mathrm{E}$.

On en conclut que *toute droite vectorielle* D *non contenue dans* H est *supplémentaire* de H : on a en effet d'une part $\mathrm{H} \subset \mathrm{D} + \mathrm{H}$ et $\mathrm{H} \neq \mathrm{D} + \mathrm{H}$, donc $\mathrm{D} + \mathrm{H} = \mathrm{E}$, et d'autre part $\mathrm{D} \cap \mathrm{H} \subset \mathrm{D}$ et $\mathrm{D} \cap \mathrm{H} \neq \mathrm{D}$, donc (3.3.1) $\mathrm{D} \cap \mathrm{H} = \{0\}$.

On appelle *hyperplan affine* (ou simplement *hyperplan*) toute variété linéaire dans E dont la direction est un hyperplan vectoriel ; un hyperplan vectoriel est donc un hyperplan *passant par* 0. Pour qu'une variété linéaire $\mathrm{L} \neq \mathrm{E}$ soit parallèle à un hyperplan H, il faut et il suffit, en vertu de ce qui précède, que la direction de L soit *contenue* dans celle de H ; en particulier, dire que deux hyperplans sont *parallèles* équivaut à dire qu'ils ont *même direction.*

(3.3.6) (i) *Soit f une forme linéaire sur* E, *non identiquement nulle. Pour tout scalaire α, l'ensemble H_α des $x \in \mathrm{E}$ tels que $f(x) = \alpha$ est un hyperplan ; tous les hyperplans H_α sont parallèles.*

(ii) *Inversement, soit* H *un hyperplan dans* E ; *il existe alors une forme linéaire g sur* E *et un scalaire β, tels que* H *soit l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ vérifiant la relation $g(x) = \beta$; si h est une forme linéaire sur* E *et γ un scalaire tels que* H *soit l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ vérifiant la relation $h(x) = \gamma$, il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tels que $h = \lambda g$ et $\gamma = \lambda\beta$.*

(i) Par hypothèse, il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f(x_0) = \beta \neq 0$; si l'on pose $a = \beta^{-1}x_0$, on a donc $f(a) = \beta^{-1}f(x_0) = 1$ ce qui entraîne $a \neq 0$. Les relations $f(x) = \alpha$ et $f(x - \alpha a) = 0$ sont alors équivalentes, ce qui signifie que $H_\alpha = a + H_0$. Les assertions de (i) seront donc démontrées si l'on prouve que H_0 (qui n'est autre que le *noyau* de f) est un hyperplan vectoriel. Or, pour tout $x \in E$, on a $f(x - f(x)a) = 0$, autrement dit $y = x - f(x)a$ appartient à H_0. Si D est la droite vectorielle passant par a, nous venons de démontrer que $E = D + H_0$; d'autre part dire qu'un vecteur $\xi a \in D$ appartient à H signifie que $f(\xi a) = 0$ ou encore $\xi = 0$ puisque $f(\xi a) = \xi f(a) = \xi$; donc $D \cap H_0 = \{0\}$, ce qui achève de prouver (i) (3.1.8).

(ii) Supposons d'abord que H passe par 0 ; par définition, il y a alors une droite vectorielle D telle que E soit somme directe de D et de H ; soit $a \neq 0$ un vecteur de D, de sorte que tout vecteur de D s'écrit *d'une seule manière* sous la forme ξa. Soit p la projection de E sur D relative à la décomposition de E en somme directe $D + H$ (3.2.2) ; on peut donc écrire $p(x) = g(x)a$ où $g(x)$ est un scalaire ; en outre, les relations $p(x + y) = p(x) + p(y)$ et $p(\xi x) = \xi p(x)$ entraînent $g(x + y) = g(x) + g(y)$ et $g(\xi x) = \xi g(x)$ en vertu de la propriété d'unicité précédente ; donc g est une *forme linéaire* sur E et par sa définition même, H est son *noyau*. Soit maintenant h une seconde forme linéaire dont H soit le noyau ; on a par définition $g(a) = 1$; si $h(a) = \lambda$, on a $\lambda \neq 0$ puisque a n'est pas dans le noyau H de h ; par suite la forme linéaire $u = h - \lambda g$ est telle que $u(y) = 0$ dans H et $u(a) = 0$. Mais comme tout $x \in E$ s'écrit sous la forme $y + \xi a$ avec $y \in H$, on a $u(x) = 0$; autrement dit u est identiquement nulle, ce qui signifie que $h = \lambda g$.

Passant maintenant au cas général, soit b un point de H ; $H' = -b + H$ est un hyperplan vectoriel, donc le noyau d'une forme linéaire g. Il en résulte que H est l'ensemble des $x \in E$ tels que $g(x - b) = 0$, ou encore $g(x) = \beta$ avec $\beta = g(b)$. Si maintenant H est aussi l'ensemble des $x \in E$ tels que $h(x) = \gamma$, on a $h(b) = \gamma$, donc $h(x - b) = 0$ pour tout $x \in H$. D'après ce qu'on a vu plus haut, cela entraîne l'existence d'un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $h = \lambda g$ et en particulier $\gamma = h(b) = \lambda g(b) = \lambda\beta$.

On dit encore que chacune des relations $g(x) = \beta$ (g forme linéaire) qui caractérisent les points d'un hyperplan est *une équation* de H ; lorsqu'on connaît l'une de ces équations, il résulte de (3.3.6) que les autres s'en déduisent par multiplication par un scalaire $\neq 0$.

(3.3.7) Soient H un hyperplan, $g(x) = \beta$ une équation de H, F^+ (resp. F^-) l'ensemble des x tels que $g(x) \geqslant \beta$ (resp. $g(x) \leqslant \beta$) ; on dit que F^+ et F^- sont les *demi-espaces fermés déterminés par* H. Les complémentaires de H dans F^+ et F^- respectivement sont appelés les *demi-espaces ouverts déterminés par* H ; ce sont donc respectivement l'ensemble U^+ des $x \in E$ tels que $g(x) > \beta$ et l'ensemble U^- des $x \in E$ tels que $g(x) < \beta$. Ces définitions dépendent du choix de l'équation de H ; lorsqu'on remplace $g(x) = \beta$ par $\lambda g(x) = \lambda\beta$ avec $\lambda \neq 0$, ces définitions donnent les mêmes ensembles si $\lambda > 0$, mais intervertissent F^+ et F^- lorsque $\lambda < 0$. On peut donner une définition intrinsèque des demi-espaces ouverts déterminés par H comme les parties *maximales* de E dans lesquelles $g(x) - \beta$ est $\neq 0$ et garde *le même signe*. Deux points qui appartiennent à un même demi-espace *fermé* (resp. *ouvert*) déterminé par H sont dits *du même côté* (resp. *strictement du même côté*) de H ; s'ils appartiennent à des demi-espaces fermés (resp. ouverts) différents, ils sont dits *de part et d'autre* (resp. *strictement de part et d'autre*) de H.

(3.3.8) *Toute droite non parallèle à un hyperplan le rencontre en un seul point.*

En effet, si D_0 et H_0 sont les directions de la droite D et de l'hyperplan H considérés, l'hypothèse signifie que $D_0 \not\subset H_0$, donc H_0 et D_0 sont *supplémentaires* (3.3.5) et la conclusion est un cas particulier de (3.1.14).

(3.3.9) *Soit* H *un hyperplan dans* E.

(i) *Si deux points distincts a, b appartiennent à un même demi-espace ouvert* U *déterminé par* H, *tous les points du segment fermé ab appartiennent à* U.

(ii) *Si deux points distincts a, b sont strictement de part et d'autre de* H, *il existe un point et un seul du segment ab appartenant à* H.

Soit $g(x) = \alpha$ une équation de H. Dire que a et b sont strictement du même côté (resp. strictement de part et d'autre) de H signifie que les nombres $g(a) - \alpha$ et $g(b) - \alpha$ sont non nuls et de même signe (resp. de signes opposés). On peut écrire

$$g((1 - \xi)a + \xi b) - \alpha = (1 - \xi)(g(a) - \alpha) + \xi(g(b) - \alpha)$$

Pour $0 < \xi < 1$, on a $\xi > 0$ et $1 - \xi > 0$, donc $g((1 - \xi)a + \xi b)$ est $\neq 0$ et du même signe que $g(a) - \alpha$ et $g(b) - \alpha$ dans le cas (i) en vertu de (1.18) et (1.23) ; et dans le cas (ii), l'unique solution ξ de l'équation

$$\frac{1}{\xi} - 1 = \frac{\alpha - g(b)}{g(a) - \alpha} > 0$$

est un nombre tel que $0 < \xi < 1$. D'où la proposition.

Thèmes d'exercices

1) *Parallélogrammes.* Si a, b, c, d sont quatre points d'un espace vectoriel E, les propriétés suivantes sont équivalentes : 1° $b - a = c - d$; 2° $d - a = c - b$; 3° les segments ac et bd ont même milieu. Si de plus trois quelconques des points a, b, c, d n'appartiennent pas à une même droite, ces trois propriétés sont aussi équivalentes à la suivante : 4° les droites D_{ab} et D_{cd} sont parallèles, et les droites D_{ad} et D_{bc} sont parallèles. On dit alors que le quadruplet (a, b, c, d) est un parallélogramme.

2) Soient a, b, c, d quatre points d'un espace vectoriel E. Montrer que si x, y, z, t sont les milieux respectifs des segments ab, bc, cd, da, le quadruplet (x, y, z, t) est un parallélogramme.

3) Pour qu'une partie non vide V d'un espace vectoriel soit une variété linéaire, il faut et il suffit que pour tout couple (x, y) de points distincts de V, la droite D_{xy} soit contenue dans V.

4) *Groupe des translations et des homothéties.* Soient E un espace vectoriel, u une application affine de E dans lui-même. Afin que, pour toute droite D dans E, $u(\mathrm{D})$ soit

une droite parallèle à D, il faut et il suffit que l'application linéaire v associée à u soit une homothétie linéaire de rapport $\gamma \neq 0$ (se ramener au cas où u est une application linéaire et où $u(D) = D$ pour toute droite vectorielle D ; si deux vecteurs a, b non nuls sont tels que les droites D_{Oa} et D_{Ob} soient distinctes, on a $u(a) = \lambda a, u(b) = \mu b$; écrire que $u(D_{Oc}) = D_{Oc}$, où $c = \frac{1}{2}(a + b)$). Si $\gamma = 1$, u est alors une translation ; si $\gamma \neq 1$, u est une homothétie affine.

Si u_1, u_2 sont deux éléments de **GA**(E) qui sont des translations ou des homothéties, montrer que $u_1 \circ u_2$ est une translation ou une homothétie. Si u_1, u_2 et $u_1 \circ u_2$ sont toutes trois des homothéties, leurs centres sont sur une même droite ; que peut-on dire lorsque u_1, u_2 sont des homothéties et $u_1 \circ u_2$ une translation ?

Pour tout élément $v \in$ **GA**(E) et toute homothétie $h_{a,\lambda}$, $vh_{a,\lambda}v^{-1}$ est l'homothétie $h_{v(a),\lambda}$; l'ensemble H(E) des éléments de **GA**(E) qui sont des translations ou des homothéties est un sous-groupe distingué de **GA**(E). Définir un homomorphisme canonique de H(E) sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$, dont le noyau est le groupe T(E) des translations.

5) Montrer que toute variété linéaire non parallèle à un hyperplan rencontre cet hyperplan. Si H est un hyperplan vectoriel, V un sous-espace vectoriel non contenu dans H, $V \cap H$ est un hyperplan dans l'espace vectoriel V.

6) *Dilatations et transvections.* Soient E un espace vectoriel, H un hyperplan vectoriel de E, u un endomorphisme de E laissant invariant tout élément de H. Si a est un vecteur de E n'appartenant pas à H, on peut écrire $u(a) = \gamma a + t$, où $t \in H$; le scalaire γ est indépendant du vecteur $a \notin H$ choisi.

Si $\gamma \neq 1$, montrer que γ est une valeur propre de u, et $E(\gamma ; u)$ est une droite S supplémentaire de $E(1 ; u) = H$; les seules droites vectorielles D telles que $u(D) \subset D$ sont les droites contenues dans H et la droite S. On dit que u est une *dilatation d'hyperplan* H, *de droite* S *et de rapport* γ. Pour qu'un sous-espace vectoriel V soit tel que $u(V) \subset V$, il faut et il suffit que l'on ait $V \subset H$ ou $S \subset V$ (si $S \not\subset V$ et $V \not\subset H$, considérer la restriction de u à $S + D$, où $D \subset V$ est une droite non contenue dans H).

Si $\gamma = 1$, et si $g(x) = 0$ est une équation de H, il existe un unique vecteur $c \in H$ tel que $u(x) = x + g(x)c$ pour tout $x \in E$; on dit alors que u (qui est une bijection) est une *transvection d'hyperplan* H ; lorsque $u \neq 1_E$, la droite $T = D_{Oc}$ est indépendante de l'équation de H choisie, et on dit que u est une transvection *d'hyperplan* H *et de droite* T. Le scalaire 1 est la seule valeur propre de u (si $H \neq \{0\}$) et on a $E(1 ; u) = H$ si $u \neq 1_E$. Si $H \neq \{0\}$ et $u \neq 1_E$, les seules droites vectorielles D telles que $u(D) = D$ sont les droites contenues dans H ; pour qu'un sous-espace vectoriel V soit tel que $u(V) \subset V$, il faut et il suffit alors que l'on ait, ou bien $V \subset H$, ou bien $T \subset V$.

Soit v un automorphisme de E ; si u est une dilatation d'hyperplan H, de rapport γ et de droite S, vuv^{-1} est une dilatation d'hyperplan $v(H)$, de rapport γ et de droite $v(S)$; si u est une transvection d'hyperplan H et de droite T, vuv^{-1} est une transvection d'hyperplan $v(H)$ et de droite v (T).

L'ensemble $\Gamma(E, H)$ des automorphismes de E laissant invariants les points de H est un sous-groupe de **GL**(E) ; l'ensemble $\Theta(E, H)$ des transvections d'hyperplan H est un sous-groupe commutatif distingué de $\Gamma(E, H)$ isomorphe au groupe additif H ; en particulier, l'inverse de la transvection $x \to x + g(x)c$, où $g(x) = 0$ est une équation de H et $g(c) = 0$, est la transvection $x \to x - g(x)c$. Définir un homomorphisme canonique de $\Gamma(E, H)$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$, dont le noyau est $\Theta(E, H)$.

Montrer que les transvections de *droite donnée* T (et d'hyperplan variable $H \supset T$) forment un groupe commutatif $\Theta'(E, T)$.

Soient u, u' deux dilatations ou transvections $\neq 1_E$, H, H' leurs hyperplans respectifs, D, D' leurs droites respectives. Pour que u et u' soient *permutables* (i.e. $uu' = u'u$ dans End (E)), il est nécessaire que l'on ait, soit $H' = H$, soit $D \subset H'$ et $D' \subset H$. Cette condition est suffisante si u et u' sont des transvections ; si u et u' sont des dilatations, pour que u et u' soient permutables, il faut et il suffit que l'on ait, soit $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$ et $\mathrm{D} = \mathrm{D}'$, soit $\mathrm{D} \subset \mathrm{H}'$ et $\mathrm{D}' \subset \mathrm{H}$. Enfin, une dilatation u et une transvection $u' \neq 1_{\mathrm{E}}$ ne sont jamais permutables.

CHAPITRE IV

Géométrie affine plane

§ 1. Bases ; matrices

(4.1.1) Dans un espace vectoriel E, on dit que deux vecteurs x, y sont *linéairement dépendants* s'il existe deux scalaires λ, μ *non tous deux nuls* tels que $\lambda x + \mu y = 0$; on dit encore alors que l'ensemble $\{x, y\}$ est *lié*. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'ensemble $\{0, x\}$ est lié car on a $1 . 0 + 0 . x = 0$; si x est un vecteur *non nul*, dire que x et y sont linéairement dépendants équivaut à dire qu'il existe un scalaire α tel que $y = \alpha x$, car cette dernière relation s'écrit $\alpha x + (-1)y = 0$, et inversement, si l'on a une relation $\lambda x + \mu y = 0$ avec λ, μ non tous deux nuls, on ne peut avoir $\mu = 0$, sans quoi on aurait $\lambda \neq 0$ et $\lambda x = 0$, contrairement à l'hypothèse $x \neq 0$; donc $y = (-\mu^{-1}\lambda)x$. Pour deux vecteurs x, y *non nuls*, les propriétés suivantes sont donc *équivalentes* :

a) x et y sont linéairement dépendants ;
b) il existe un scalaire α tel que $y = \alpha x$;
c) il existe un scalaire β tel que $x = \beta y$;
d) x et y appartiennent à une même droite vectorielle (3.3.1).

On peut encore dire que, dans l'ensemble des vecteurs *non nuls* de E, la relation « x et y sont linéairement dépendants » est une *relation d'équivalence* ; les *classes* pour cette relation sont les *complémentaires de* $\{0\}$ *dans les droites vectorielles* (ou, comme on dit encore, les *droites vectorielles privées de* 0).

Deux vecteurs x, y qui ne sont pas linéairement dépendants sont dits *linéairement indépendants* ; on dit encore que l'ensemble $\{x, y\}$ est *libre*.

En vertu de ce qui précède, les conditions suivantes sont donc *équivalentes* :

a) x et y sont linéairement indépendants ;
b) $x \neq 0$, $y \neq 0$ et les droites D_{0x} et D_{0y} sont distinctes (et par suite $x \neq y$) ;
c) $x \neq 0$, $y \neq 0$, et la somme $\mathrm{D}_{0x} + \mathrm{D}_{0y}$ est directe.

Le fait que b) entraîne c) résulte en effet de ce que l'on a alors (3.3.1) $D_{0x} \cap D_{0y} = \{0\}$.

On dit que trois vecteurs x, y, z de E sont *linéairement dépendants* s'il existe trois scalaires λ, μ, ν *non tous nuls* tels que $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$; on dit encore que l'ensemble $\{x, y, z\}$ est *lié*. Si deux vecteurs x, y sont linéairement dépendants, l'ensemble $\{x, y, z\}$ est *lié* pour *tout* vecteur z, puisqu'il existe par hypothèse deux scalaires λ, μ non tous deux nuls tels que $\lambda x + \mu y + 0z = 0$. Trois vecteurs x, y, z qui ne sont pas linéairement dépendants sont dits *linéairement indépendants*, ou encore on dit qu'il forment un ensemble *libre* ; cela entraîne que les trois vecteurs sont $\neq 0$ et que deux quelconques d'entre eux sont linéairement indépendants.

On définit de même les ensembles liés ou libres de plus de trois vecteurs.

Soit u une application linéaire *injective* de E dans un espace vectoriel F ; si $\{x, y, z\}$ est un ensemble *libre* de trois vecteurs (par exemple) dans E, alors $\{u(x), u(y), u(z)\}$ est un ensemble *libre* dans F : en effet, la relation

$$\lambda u(x) + \mu u(y) + \nu u(z) = 0$$

s'écrit $u(\lambda x + \mu y + \nu z) = 0$; comme u est injective, cette relation entraîne $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$ et par suite $\lambda = \mu = \nu = 0$ puisque $\{x, y, z\}$ est libre. Le raisonnement s'étend aussitôt à un ensemble libre d'un nombre quelconque de vecteurs.

(4.1.2) Soient a, b deux vecteurs linéairement indépendants dans E, F le sous-espace de E somme (directe) de D_{0a} et D_{0b} ; comme tout vecteur x de D_{0a} s'écrit *d'une seule manière* sous la forme $x = \xi a$ (3.1.4), on voit que *tout vecteur* $x \in F$ *s'écrit d'une seule manière sous la forme* $x = \xi a + \eta b$; inversement il est clair que si tout vecteur de $D_{0a} + D_{0b}$ s'écrit d'une seule manière sous la forme $\xi a + \eta b$, la somme $D_{0a} + D_{0b}$ est directe. On dit alors que $\{a, b\}$ est une *base* de F, et que les nombres ξ et η sont les *coordonnées* de $x = \xi a + \eta b$ par rapport à a et b respectivement (ou par rapport à la base $\{a, b\}$ si cela n'entraîne pas confusion).

(4.1.3) *Soit* E *un espace vectoriel admettant une base* $\{a, b\}$ *de deux éléments. Alors :*

(i) *Pour tout vecteur* $x \neq 0$ *de* E, *l'un au moins des ensembles* $\{a, x\}$, $\{b, x\}$ *est libre.*

(ii) *Tout ensemble libre* $\{x, y\}$ *à deux éléments de* E *est une base de* E.

(iii) *Tout ensemble* $\{x, y, z\}$ *de trois vecteurs de* E *est lié.*

(i) Le vecteur x ne peut appartenir qu'à une seule au plus des droites D_{0a}, D_{0b} ; s'il n'appartient pas à D_{0a} (resp. D_{0b}), les droites D_{0a} et D_{0x} (resp. D_{0b} et D_{0x}) sont distinctes, d'où la conclusion (4.1.1).

(ii) Supposons par exemple que $\{a, x\}$ soit libre, ce qui signifie que $x \notin D_{0a}$; comme $x = \xi a + \eta b$, on a $\eta \neq 0$, d'ou $b = \eta^{-1}x - \eta^{-1}\xi a$; par suite D_{0b} est contenue dans $D_{0a} + D_{0x}$, d'où $E \subset D_{0a} + D_{0x} \subset E$, et comme la somme $D_{0a} + D_{0x}$ est directe, $\{a, x\}$ est une base de E. Le même raisonnement appliqué en remplaçant a, b, x par x, a, y respectivement montre que $\{x, y\}$ est une base de E.

(iii) Si $\{x, y\}$ est déjà lié, il en est de même de $\{x, y, z\}$; sinon $\{x, y\}$ est une base de E par (ii) et l'on a par suite $z = \lambda x + \mu y$, ce qui montre que $\{x, y, z\}$ est lié.

(4.1.4) *Pour qu'un espace vectoriel* E *vérifie l'axiome* (D_2) *du chap. II, il faut et il suffit qu'il admette une base de deux éléments.*

Il résulte en effet de (4.1.3, (iii)) qu'un espace vectoriel ayant une base de deux éléments vérifie (D_2). Réciproquement, si E vérifie (D_2), il existe dans E un ensemble libre $\{a, b\}$, et, pour tout $x \in E$, il existe par hypothèse trois scalaires *non tous nuls* λ, μ, ν tels que $\lambda x + \mu a + \nu b = 0$. On ne peut avoir $\lambda = 0$, sans quoi on aurait $\mu a + \nu b = 0$, et comme μ et ν ne sont pas tous deux nuls, cela serait contraire à (D_2). On en déduit que $x = \xi a + \eta b$ avec $\xi = -\lambda^{-1}\mu$ et $\eta = -\lambda^{-1}\nu$; autrement dit $E = D_{0a} + D_{0b}$, et comme la somme est directe par hypothèse, cela achève la démonstration.

(4.1.5) Nous dirons qu'un espace vectoriel E vérifiant (D_2) est un *plan vectoriel* ou un *espace vectoriel à 2 dimensions.*

Dans toute la suite de ce chapitre, E *désigne un espace vectoriel à 2 dimensions.*

Il résulte alors de (4.1.3) et (4.1.4) que pour tout vecteur $a \neq 0$ de E, il existe une base $\{a, b\}$ contenant ce vecteur ; toutes ces bases s'obtiennent en prenant pour b *un vecteur quelconque n'appartenant pas à la droite* D_{0a}.

(4.1.6) Ce dernier résultat exprime que pour toute droite vectorielle D dans E, il *existe* une droite D′ telle que $D \cap D' = \{0\}$, et *toute* droite D′ ayant cette propriété est *supplémentaire* de D. On en conclut que dans E *il y a identité entre droites et hyperplans* (3.3.5). En effet, ce qui précède montre déjà que toute droite est un hyperplan ; inversement, soient H un hyperplan vectoriel dans E, D une droite vectorielle supplémentaire de H, D′ une droite vectorielle supplémentaire de D, p, q les projections sur D et D′ correspondant à la décomposition de E en somme directe $D + D'$; la restriction $q|H$ de q à H est une application linéaire *bijective* de H sur D′. En effet, on a $q(E) = D'$ et $q(E) = q(D) + q(H) = q(H)$ puisque $q(D) = \{0\}$; d'autre part $q^{-1}(0) = D$, donc le noyau de $q|H$ est $H \cap q^{-1}(0) = H \cap D = \{0\}$, ce qui prouve notre assertion (3.2.4).

On conclut de là et de (3.3.5) et (3.3.8) que dans E, *ou bien* deux droites ont *même direction, ou bien* elles ont *un point commun et un seul.*

D'autre part, les *seuls* sous-espaces vectoriels de E sont $\{0\}$, E et les *droites* vectorielles : en effet, si un sous-espace vectoriel V de E est distinct de $\{0\}$, il contient un vecteur $a \neq 0$, donc il contient la droite D_{0a} ; et s'il contient un vecteur $b \in D_{0a}$, il contient la somme $D_{0a} + D_{0b}$, qui est égale à E.

(4.1.7) Soit u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, et soit $N = u^{-1}(0)$ son noyau ; d'après ce qui précède, trois cas sont possibles :

1° $N = E$, autrement dit u est *identiquement nulle*, $u(E) = \{0\}$.

2° N est une droite vectorielle, qui admet donc une droite vectorielle supplémentaire D dans E. On a $u(E) = u(N) + u(D) = u(D)$ puisque $u(N) = \{0\}$, et la restriction $u|D$ a pour noyau $N \cap D = \{0\}$, donc est *injective* (3.2.4) ; par suite $u(D)$ est une *droite vectorielle* dans F.

3° $N = \{0\}$, donc u est *injective* (3.2.4), et par suite $u(E)$ est isomorphe à E, autrement dit est un *plan vectoriel* dans F.

Rappelons (4.1.1) que si u est injective, alors, pour *toute* base $\{a, b\}$ de E, l'ensemble $\{u(a), u(b)\}$ est libre dans F. Inversement, si pour *une* base $\{a, b\}$ de E, $u(a)$ et $u(b)$ sont linéairement indépendants dans F, u est *injective* : en effet, la relation $u(\xi a + \eta b) = 0$ est équivalente à $\xi u(a) + \eta u(b) = 0$, donc entraîne $\xi = \eta = 0$ par hypothèse, ce qui prouve notre assertion (3.2.4).

On dit respectivement que u est *de rang* 0 dans le cas 1°, *de rang* 1 dans le cas 2°, *de rang* 2 dans le cas 3°. En particulier, pour $F = E$:

(4.1.8) *Si u est un endomorphisme de* E, $\{a, b\}$ *une base de* E, *les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *u est injectif :*

b) *u est surjectif ;*

c) *u est bijectif ;*

d) *$u(a)$ et $u(b)$ forment une base de* E.

Il suffit de remarquer que si u est de rang 1, $u(E)$ est une droite, donc distincte de E, et qu'au contraire si u est de rang 2, $u(E)$ contient deux droites vectorielles distinctes, donc est égal à E (4.1.6).

(4.1.9) Si $\{a_1, a_2\}$ est une base de E, l'application

$$(\xi_1, \xi_2) \to \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$$

est un *isomorphisme* de l'espace vectoriel produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (3.1.8) sur E ; tous les espaces vectoriels à 2 dimensions sont donc *isomorphes*. Une fois *fixée* une base $\{a_1, a_2\}$, toute relation entre vecteurs de E est équivalente à une relation entre les couples de coordonnées de ces vecteurs par rapport à $\{a_1, a_2\}$. L'art d'écrire ces traductions est ce que l'on appelait naguère la « géométrie analytique plane » ; nous nous bornerons à indiquer ci-dessous les plus importantes d'entre elles.

(4.1.10) Soit $\{a_1, a_2\}$ une base de E. Pour toute *application linéaire* u de E dans un espace vectoriel quelconque F, les valeurs de u dans E sont entièrement *déterminées* par les vecteurs $b_1 = u(a_1)$, $b_2 = u(a_2)$ dans F, car on a $u(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2) = \xi_1 u(a_1) + \xi_2 u(a_2)$ par définition (3.2.1). Inversement, étant donnés deux vecteurs *quelconques* b_1, b_2 de F, il *existe* une application linéaire (et une seule d'après ce qui précède) u de E dans F telle que

$u(a_1) = b_1$ et $u(a_2) = b_2$; pour tout $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 \in \mathrm{E}$ il suffit de *définir* $u(x)$ comme égal à $\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2$; si $x' = \xi'_1 a_1 + \xi'_2 a_2$, $x'' = \xi''_1 a_1 + \xi''_2 a_2$ sont deux vecteurs de E, on a en effet, quels que soient les scalaires λ', λ'',

$$\lambda'(\xi'_1 b_1 + \xi'_2 b_2) + \lambda''(\xi''_1 b_1 + \xi''_2 b_2) = (\lambda'\xi'_1 + \lambda''\xi''_1)b_1 + (\lambda'\xi'_2 + \lambda''\xi''_2)b_2$$

ce qui prouve par définition (3.2.1) que l'application u ainsi définie est linéaire. On peut encore dire que l'application $u \to (u(a_1), u(a_2))$ est un *isomorphisme* de l'espace vectoriel Hom(E, F) (3.2.6) sur l'espace vectoriel *produit* $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ (3.1.8).

En particulier, si $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2)$ est un couple de droites vectorielles distinctes dans E, $(\mathrm{D}'_1, \mathrm{D}'_2)$ un autre couple de droites vectorielles distinctes, il existe toujours un endomorphisme u de E tel que $u(\mathrm{D}_1) = \mathrm{D}'_1$ et $u(\mathrm{D}_2) = \mathrm{D}'_2$: il suffit de prendre une base $\{a_1, a_2\}$ telle que $a_1 \in \mathrm{D}_1$ et $a_2 \in \mathrm{D}_2$ et une base $\{a'_1, a'_2\}$ telle que $a'_1 \in \mathrm{D}'_1$ et $a'_2 \in \mathrm{D}'_2$; en outre, il résulte de (4.1.8) que u est un *automorphisme* de E.

(4.1.11) On convient généralement de disposer les coordonnées, par rapport à une base $\{a_1, a_2\}$, d'un vecteur $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$ de E, sous la forme

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

symbole auquel on donne le nom de « colonne » ou, plus précisément, de *matrice à deux lignes et une colonne* (ou *matrice de type* (2, 1)) *correspondant à* x, *relativement à la base* $\{a_1, a_2\}$; lorsque la base $\{a_1, a_2\}$ a été fixée dans tout un raisonnement, on abrège en disant simplement « la matrice de x » et on note cette matrice $M(x)$.

Soit maintenant E′ un second espace vectoriel à 2 dimensions, et soit $\{a'_1, a'_2\}$ une base de E′ ; comme on l'a vu dans (4.1.10), une application linéaire u de E dans E′ est déterminée par les deux vecteurs $u(a_1)$, $u(a_2)$, que l'on peut écrire ici

(4.1.11.1)
$$\begin{cases} u(a_1) = \alpha_{11}a'_1 + \alpha_{21}a'_2 \\ u(a_2) = \alpha_{12}a'_1 + \alpha_{22}a'_2 \end{cases}$$

Les éléments de Hom(E, E′) correspondent ainsi *biunivoquement* aux systèmes $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22})$ de quatre nombres réels, systèmes que, pour rappeler leur origine, on écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

où la première « colonne » correspond à $u(a_1)$ et la seconde à $u(a_2)$; un tel symbole est appelé *matrice à deux lignes et deux colonnes* (ou *matrice de type* (2, 2)) *correspondant à u, relativement aux bases* $\{a_1, a_2\}$ *et* $\{a'_1, a'_2\}$; quand les bases sont fixées, on dit simplement « la matrice de u » et on la note $M(u)$. Lorsque $E' = E$, il faut bien spécifier l'*ordre* dans lequel on considère les bases $\{a_1, a_2\}$ et $\{a'_1, a'_2\}$ lorsqu'elles sont distinctes, car la matrice de *u relativement aux bases* $\{a'_1, a'_2\}$ *et* $\{a_1, a_2\}$ (prises dans cet ordre) est bien entendu distincte en général de la matrice $M(u)$ précédente. *Quand* $E' = E$ *et que l'on prend* $a'_1 = a_1$ *et* $a'_2 = a_2$, la matrice correspondante est encore appelée *la matrice de l'endomorphisme u relativement à LA base* $\{a_1, a_2\}$.

Le *rang* de la matrice $M(u)$ est par définition le *rang* de u (4.1.8).

Enfin, si f est une *forme linéaire* sur E, elle est entièrement déterminée par les deux scalaires $\alpha_1 = f(a_1)$, $\alpha_2 = f(a_2)$; on les dispose ici sous la forme

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2)$$

symbole appelé « *ligne* », ou *matrice à une ligne et deux colonnes* (ou *matrice de type* (1, 2)) *correspondant à f, relativement à la base* $\{a_1, a_2\}$. Comme ci-dessus, on dira simplement « matrice de f » quand cela n'entraîne pas de confusion sur la base, et on la notera $M(f)$.

Soient v une seconde application linéaire de E dans E',

$$M(v) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

sa matrice par rapport aux *mêmes* bases $\{a_1, a_2\}$, $\{a'_1, a'_2\}$; il résulte aussitôt des définitions (3.2.6) que l'on a, toujours par rapport aux *mêmes* bases

$$M(u + v) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \end{pmatrix} \qquad M(\lambda u) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} \end{pmatrix}$$

On écrit encore respectivement ces matrices $M(u) + M(v)$ et $\lambda M(u)$ et on dit que ce sont respectivement la *somme* de $M(u)$ et $M(v)$ et le *produit* de $M(u)$ par le scalaire λ. On observera d'ailleurs qu'il ne s'agit pas là de définitions nouvelles, mais simplement de la définition de l'espace vectoriel *produit* $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de quatre espaces vectoriels identiques à $\mathbf{R}$ (3.1.8).

De même, pour deux vecteurs x, y de E, on a

$$M(x + y) = M(x) + M(y), \qquad M(\lambda x) = \lambda M(x)$$

et pour deux formes linéaires f, g sur E

$$M(f + g) = M(f) + M(g), \qquad M(\lambda f) = \lambda M(f).$$

(4.1.12) Soient E, E', E'' trois espaces vectoriels à 2 dimensions, $\{a_1, a_2\}$, $\{a'_1, a'_2\}$, $\{a''_1, a''_2\}$ des bases respectives de ces espaces. Soient u une application linéaire de E dans E', u' une application linéaire de E' dans E'', et soient

$$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \qquad M(u') = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{12} \end{pmatrix}$$

les matrices de u relativement à $\{a_1, a_2\}$ et $\{a'_1, a'_2\}$, de u' relativement à

$\{a'_1, a'_2\}$ et $\{a''_1, a''_2\}$. Calculons la matrice de $u'' = u' \circ u$ *relativement aux bases* $\{a_1, a_2\}$ *et* $\{a''_1, a''_2\}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} u''(a_1) &= u'(u(a_1)) = u'(\alpha_{11}a'_1 + \alpha_{21}a'_2) = \alpha_{11}u'(a'_1) + \alpha_{21}u'(a'_2) \\ &= \alpha_{11}(\alpha'_{11}a''_{11} + \alpha'_{21}a''_2) + \alpha_{21}(\alpha'_{12}a''_1 + \alpha'_{22}a''_2) \\ &= (\alpha'_{11}\alpha_{11} + \alpha'_{12}\alpha_{21})a''_1 + (\alpha'_{21}\alpha_{11} + \alpha'_{22}\alpha_{21})a''_2 \end{aligned}$$

et, par un calcul analogue,

$$u''(a_2) = (\alpha'_{11}\alpha_{12} + \alpha'_{12}\alpha_{22})a''_1 + (\alpha'_{21}\alpha_{12} + \alpha'_{22}\alpha_{22})a''_2 \ ;$$

autrement dit

$$M(u' \circ u) = \begin{pmatrix} \alpha'_{11}\alpha_{11} + \alpha'_{12}\alpha_{21} & \alpha'_{11}\alpha_{12} + \alpha'_{12}\alpha_{22} \\ \alpha'_{21}\alpha_{11} + \alpha'_{22}\alpha_{21} & \alpha'_{21}\alpha_{12} + \alpha'_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix}$$

On dit que le second membre est *la matrice produit de la matrice* $M(u')$ *par la matrice* $M(u)$ et on la note $M(u')M(u)$, de sorte que la formule précédente s'écrit

(4.1.12.1) $$M(u' \circ u) = M(u')M(u).$$

La règle mnémotechnique pour ce produit est que *l'élément de* $M(u')M(u)$ *dans la i-ème ligne et la j-ème colonne s'obtient en prenant la i-ème ligne de* $M(u')$, *la j-ème colonne de* $M(u)$ *et en faisant la somme* $\alpha'_{i1}\alpha_{1j} + \alpha'_{i2}\alpha_{2j}$; c'est ce qu'on appelle effectuer le produit « lignes par colonnes ».

Les notations étant celles de (4.1.11), on a, avec des définitions analogues

(4.1.12.2) $$M(u(x)) = M(u)M(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 \end{pmatrix}$$

et

(4.1.12.3) $$f(x) = M(f)M(x) = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$$

(« produit d'une ligne et d'une colonne », qui est donc un *scalaire*). Enfin, si f' est une forme linéaire sur E', l'application composée $f' \circ u$ est une forme linéaire sur E ; si $M(f') = (\alpha'_1\ \alpha'_2)$ est la matrice de f' par rapport à la base $\{a'_1, a'_2\}$, la matrice de $f' \circ u$ par rapport à $\{a_1, a_2\}$ est

(4.1.12.4) $$M(f' \circ u) = M(f')M(u) = (\alpha'_1\alpha_{11} + \alpha'_2\alpha_{21} \quad \alpha'_1\alpha_{12} + \alpha'_2\alpha_{22})$$

comme on le vérifie aussitôt.

En résumé, nous avons défini ainsi :

1° le produit de deux matrices *de type* (2, 2) : c'est une matrice *de type* (2, 2) ;

2° le produit d'une matrice *de type* (2, 2) par une matrice *de type* (2, 1) : c'est une matrice *de type* (2, 1) ;

3° le produit d'une matrice *de type* (1, 2) par une matrice *de type* (2, 1) : c'est un *scalaire* (appelé aussi « matrice de type (1, 1) ») ;

4° le produit d'une matrice de type $(1, 2)$ par une matrice de type $(2, 2)$: c'est une matrice *de type* $(1, 2)$.

Bien entendu, dans tous ces produits, l'*ordre* des facteurs est essentiel.

(4.1.13) Une fois données les définitions de (4.1.11) et (4.1.12), tout ce qui a été dit dans (3.2.6) et (3.2.7) se *traduit* en règles du « calcul des matrices » : entre autres, si X, Y, Z sont trois matrices et λ un scalaire, on a les relations

$$(XY)Z = X(YZ) \quad \text{(qu'on écrit } XYZ)$$

$$X(Y + Z) = XY + XZ$$

$$(X + Y)Z = XZ + YZ$$

$$(\lambda X)Y = \lambda(XY) = X(\lambda Y)$$

chaque fois que toutes les opérations écrites sont définies.

Une fois fixée une base $\{a_1, a_2\}$ de E, il y a correspondance biunivoque entre *endomorphismes* de E et matrices *de type* $(2, 2)$, associant à tout endomorphisme u sa matrice relativement à *la* base $\{a_1, a_2\}$ (4.1.11). Pour la somme et le produit que l'on vient de définir, les matrices de type $(2, 2)$ forment donc un *anneau*, noté $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ et *isomorphe* à End (E) ; son *élément unité* est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

notée I, ou I_2, ou 1_2 (ou même parfois 1). La matrice de l'homothétie h_λ (3.2.9) relativement à *une* base quelconque $\{a_1, a_2\}$ est

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

qu'on appelle encore matrice *scalaire* ; cela ne serait naturellement plus exact si l'on prenait la matrice de h_λ relativement à *deux bases différentes* de E au lieu de sa matrice par rapport à *une seule* base.

(4.1.14) *Exemples.* (i) Soit u une application linéaire de E dans un espace vectoriel à 2 dimensions E′. Si u est identiquement nulle, sa matrice (par rapport à des bases *quelconques* de E et E′) est la matrice 0 (matrice dont tous les éléments sont égaux à 0). Si u est de *rang* 2 (4.1.7), donc bijective, et si $\{a_1, a_2\}$ est une base de E, alors $b_1 = u(a_1)$ et $b_2 = u(a_2)$ forment une base E′ ; *par rapport aux bases* $\{a_1, a_2\}$ *et* $\{b_1, b_2\}$, la matrice de u est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, supposons que u soit *de rang* 1 (4.1.7), de sorte que son noyau est une droite N. Prenons une base $\{a_1, a_2\}$ telle que $a_2 \in$ N, de sorte que la droite D_{0a_1} est supplémentaire de N. Alors $b_1 = u(a_1)$ n'est pas nul dans E' ; prenons dans E' une base $\{b_1, b_2\}$ dont b_1 est l'un des vecteurs ; *par rapport aux bases* $\{a_1, a_2\}$ *et* $\{b_1, b_2\}$, la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il faut souligner que ces résultats tiennent essentiellement au *choix* des bases, qui sont *adaptées* à l'application linéaire u considérée. En particulier, si E' = E, il ne sera pas possible en général de trouver une base de E telle que par rapport à cette *seule* base, la matrice de l'endomorphisme u ait l'une des formes précédentes ; cela ne sera possible en général que pour la matrice de u par rapport à *deux* bases différentes de E (cf. (4.2.14)).

(ii) Considérons une *involution* u de E (3.2.11) ; il peut se produire trois cas :

1° $E(1\ ; u) = E$, $E(-1\ ; u) = \{0\}$; alors $u = 1_E$, et par rapport à *toute* base de E, la matrice de u est la matrice unité I.

2° $E(1\ ; u) = \{0\}$, $E(-1\ ; u) = E$; alors $u = -1_E$, et par rapport à *toute* base de E, la matrice de u est la matrice $-I$.

3° $E(1\ ; u)$ et $E(-1\ ; u)$ sont deux droites supplémentaires ; si l'on prend une base $\{a_1, a_2\}$ de E telle que $a_1 \in E(1\ ; u)$, $a_2 \in E(-1\ ; u)$, la matrice de u par rapport à cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ici encore, on remarquera que ce résultat est dû au choix particulier de la base ; par exemple la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est telle que $U^2 = I$, donc est la matrice d'une involution de E qui rentre dans le cas 3° précédent.

(iii) La matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est telle que $U^2 = -I$ dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$; c'est donc la matrice d'un endomorphisme u tel que $u^2 = -1_E$; un tel endomorphisme *n'a pas de valeur propre*, car si λ était une valeur propre de u et $x \neq 0$ un vecteur propre correspondant, on aurait $u^2(x) = u(\lambda x) = \lambda^2 x$; mais comme $u^2(x) = -x$, cela entraînerait $\lambda^2 = -1$, qui n'a pas de solution dans $\mathbf{R}$ (1.31).

(4.1.15) Rappelons que l'ensemble $\mathrm{Hom}(E, \mathbf{R})$ des *formes linéaires* sur E est un espace vectoriel ; nous avons vu (4.1.10) qu'il est isomorphe à

$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, autrement dit c'est un *espace vectoriel à 2 dimensions*, auquel on donne le nom de *dual* de E, et que l'on note E*.

Etant donnée une base $\{a_1, a_2\}$ de E, il y a par définition deux *applications* f_1, f_2 de E dans $\mathbf{R}$ telles que l'on ait $x = f_1(x)a_1 + f_2(x)a_2$ pour tout $x \in$ E. Montrons que f_1 et f_2 sont des *formes linéaires* sur E (dites *formes coordonnées* relatives à a_1 et a_2 respectivement) ; en effet, on a

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y &= \alpha(f_1(x)a_1 + f_2(x)a_2) + \beta(f_1(y)a_1 + f_2(y)a_2) \\ &= (\alpha f_1(x) + \beta f_1(y))a_1 + (\alpha f_2(x) + \beta f_2(y))a_2 \\ &= f_1(\alpha x + \beta y)a_1 + f_2(\alpha x + \beta y)a_2\end{aligned}$$

d'où la conclusion en vertu de la propriété d'*unicité*.

Ces deux formes constituent une *base* de E* (dite *base duale* de $\{a_1, a_2\}$). Il suffit en effet pour le voir de montrer que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes (4.1.3, (ii)) ; or, on a par définition

(4.1.15.1)
$$\begin{cases} f_1(a_1) = 1 & f_1(a_2) = 0 \\ f_2(a_1) = 0 & f_2(a_2) = 1 \end{cases}$$

Si α, β sont deux scalaires tels que $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$ (ce qui signifie que la forme $\alpha f_1 + \beta f_2$ est *identiquement nulle* dans E), on a en particulier $\alpha f_1(a_1) + \beta f_2(a_1) = 0$ et $\alpha f_1(a_2) + \beta f_2(a_2) = 0$, ce qui donne $\alpha = \beta = 0$ en vertu des relations (4.1.15.1). Toute forme linéaire f sur E s'écrit donc d'une seule manière $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, et l'on a $\alpha_1 = f(a_1)$, $\alpha_2 = f(a_2)$, autrement dit α_1, α_2 sont les éléments de la matrice de type $(1, 2)$ de f par rapport à $\{a_1, a_2\}$ (4.1.11).

(4.1.16) Comme dans E les droites sont identiques aux hyperplans (4.1.6), toute droite **D** admet une *équation* de la forme $f(x) = \lambda$, où f est un élément *non nul* du dual E* (3.3.6), et réciproquement l'ensemble des $x \in$ E vérifiant une telle relation est une droite ; toute autre équation de **D** est de la forme $\gamma f(x) = \gamma\lambda$, où $\gamma \neq 0$ (*loc. cit.*). La *direction* de **D** est la droite vectorielle d'équation $f(x) = 0$; pour que deux droites **L**, **M** d'équations respectives $g(x) = \lambda$, $h(x) = \mu$ (avec g, h dans E*) soient *parallèles* (ou, ce qui revient au même, aient même *direction* (3.3.2)), il faut et il suffit donc que g et h soient *linéairement dépendantes* ; si **L** et **M** n'ont pas même direction, elles ont *un point commun et un seul* (3.3.8).

Si l'on a fixé une base $\{a_1, a_2\}$ de E, toute équation d'une droite **L** est donc de la forme

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 = \lambda$$

avec α_1, α_2 *non tous deux nuls* ; si **M** est une seconde droite d'équation

$$\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 = \mu$$

pour que **L** et **M** soient parallèles, il faut et il suffit qu'il existe $\gamma \neq 0$ tel que $\beta_1 = \gamma\alpha_1$ et $\beta_2 = \gamma\alpha_2$, ce qui équivaut à la relation $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$ puisque α_1 et α_2 ne sont pas tous deux nuls (cf. (4.2.10)).

Thèmes d'exercices

1) Soit $t \neq 1_E$ une transvection dans E (section (3.3), exerc. 6). Montrer qu'il y a une base de E relativement à laquelle on a

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversement, les matrices de l'une des formes

$$B_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

sont des matrices de transvections relativement à une base $\{a_1, a_2\}$: que sont les droites de ces transvections ?

2) *Opérations élémentaires sur les matrices.* Ecrire explicitement le produit d'une matrice quelconque de type (2, 2)

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

et de l'une des matrices

$$B_{12}(\lambda),\ B_{21}(\mu) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

observer la différence des résultats obtenus suivant que l'on fait le produit à droite ou à gauche. En déduire que l'on peut toujours trouver deux matrices R, S dont chacune est produit d'un certain nombre de matrices de l'une des formes $B_{12}(\lambda)$, $B_{21}(\mu)$, telles que la matrice RUS soit de l'une des formes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \delta \neq 0.$$

3) Si u est un endomorphisme de E de rang 1, montrer qu'il existe *une* base de E par rapport à laquelle la matrice de u soit de l'une des formes

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \delta \neq 0.$$

Pour qu'il existe une base donnant une matrice de la seconde forme, il faut et il suffit que u soit *nilpotent*, i.e. qu'il existe un entier k tel que $u^k = 0$; on a alors en fait $u^2 = 0$.

4) *Le théorème de Hamilton-Cayley.* Soit u un endomorphisme de E. Montrer que si u n'est pas une homothétie, il existe une base de E par rapport à laquelle on ait

$$M(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

En déduire que, pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe deux scalaires λ, μ tels que l'on ait $u^2 - \lambda u + \mu = 0$ dans l'anneau End(E).

5) *L'anneau* End(E) (ou $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$).

A) *Centre.* Tout endomorphisme de E tel que $u(D) \subset D$ pour toute droite vectorielle D dans E, est nécessairement une homothétie (section (3.3), exerc. 4). En déduire que le centre de End(E) est le corps des homothéties (isomorphe à $\mathbf{R}$) (écrire qu'un élément du centre permute aux transvections).

B) *Diviseurs de zéro.* On dit que $u \in \mathrm{End}(E)$ est *diviseur de zéro à gauche* (resp. *à droite*) s'il existe $v \neq 0$ dans End(E) tel que $uv = 0$ (resp. $vu = 0$). Pour que u soit diviseur de zéro (à gauche ou à droite) il faut et il suffit que u soit de rang 0 ou 1 ; les éléments non diviseurs de zéro dans End(E) sont donc les éléments *inversibles* de cet anneau. Montrer que le produit de deux diviseurs de zéro est encore un diviseur de zéro ; donner un exemple de deux éléments nilpotents dont le produit ne soit pas nilpotent, et dont la somme soit inversible.

C) *Idéaux.* Un idéal (à droite ou à gauche) de End(E) qui contient un élément inversible est l'anneau End(E) tout entier. Si $u \in \mathrm{End}(E)$ est de rang 1, soient p un projecteur de E sur $u(E)$, q un projecteur de E sur $u^{-1}(0)$; montrer qu'il existe deux éléments v, w de End(E) tels que $uv = p$, $wu = 1 - q$. En déduire que tout idéal à droite (resp. à gauche) de l'anneau $A = \mathrm{End}(E)$ est, soit égal à $\{0\}$, soit égal à A, soit de la forme pA (resp. Ap), où p est un projecteur de rang 1. Les seuls idéaux bilatères de A sont $\{0\}$ et A.

Si U, V sont deux *sous-groupes* additifs de A, on appelle *produit* de U et V dans A et on note UV le *sous-groupe additif* formé des sommes (en nombre fini quelconque) de produits de la forme uv, où $u \in U$, $v \in V$. Examiner ce que sont les produits UV lorsque U et V sont des idéaux de A (à droite ou à gauche) ; dans quel cas ce produit peut-il être réduit à 0 ?

D) *Sous-anneaux.* Si p est un projecteur de rang 1 dans E, pAp est un sous-corps de A dont p est l'élément unité, et qui est isomorphe à $\mathbf{R}$. Ce sous-corps ne contient pas l'élément unité de A.

Dans A, identifié à $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, soit B_0 (resp. $C_0, C'_0 \subset B_0$) l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp.} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right)$$

Alors B_0, C_0 et C'_0 sont des sous-anneaux de A contenant le centre de A ; montrer que B_0 (resp. C_0, C'_0) est *maximal* dans l'ensemble des sous-anneaux (resp. des sous-anneaux commutatifs) de A distincts de A. Déterminer *tous* les idéaux (à gauche ou à droite de B_0 (resp. C_0). Montrer que, *dans les anneaux* B_0, C_0, il y a des idéaux bilatères U tels que $U^2 = \{0\}$ et $U \neq \{0\}$.

6) *Le groupe* $\mathbf{GL}(E)$ (on l'identifie au groupe des matrices *inversibles* dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, que l'on note aussi $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ ou $\mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$).

A) *Générateurs.* Montrer que tout élément de $\mathbf{GL}(E)$ autre qu'une homothétie est, soit une transvection, soit une dilatation, soit un produit d'une transvection et d'une dilatation ou de deux transvections (dans un ordre quelconque); toute homothétie h_λ ($\lambda \neq 1$) est produit de deux transvections et d'une dilatation, mais n'est pas égale au produit d'une transvection et d'une dilatation, ni au produit de deux transvections (observer que pour toute transvection $t \neq 1_E$, le produit $h_\lambda t$ ne laisse globalement invariante aucune droite autre que la droite de la transvection).

On appelle *quasi-symétries* les dilatations involutives ; toute transvection est produit de deux quasi-symétries.

B) *Centre et centralisateurs.* Soit Z (ou Z(E)) le groupe des homothéties de rapport $\lambda \neq 0$. Le *centralisateur* dans $\mathbf{GL}(E)$ du sous-groupe $\Theta(E, D)$ des transvections de droite D (i.e. le sous-groupe formé des éléments qui *permutent* à *tous* les éléments de $\Theta(E, D)$) est le sous-groupe $Z\Theta(E, D)$ dont les éléments sont de la forme $h_\lambda t$, avec

$\lambda \neq 0$ et $t \in \Theta(E, D)$. Le centralisateur du sous-groupe $\Gamma(E, D)$ des éléments de $\mathbf{GL}(E)$ laissant invariants tous les points de D est égal à Z. *A fortiori* Z est le centre de $\mathbf{GL}(E)$. Le sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$ laissant (globalement) invariante une droite D est égal à $Z\Gamma(E, D)$.

C) *Propriétés de transitivité.* Le groupe $\mathbf{GL}(E)$ opère de façon *triplement transitive* sur les droites vectorielles dans E : cela signifie que pour deux triplets quelconques de trois droites *distinctes*, (D_1, D_2, D_3), (D'_1, D'_2, D'_3) dans E, il y a un automorphisme u de E tel que $u(D_i) = D'_i$ pour $i = 1, 2, 3$; cela signifie encore que $\mathbf{GL}(E)$ opère *transitivement* dans l'*ensemble des triplets* de droites vectorielles distinctes. Si u' est un second élément de $\mathbf{GL}(E)$ tel que $u'(D_i) = D'_i$ pour $i = 1, 2, 3$, on a $u' = h_\lambda u$ pour un $\lambda \neq 0$ (cf. section (3.3), exerc. 4).

Pour tout couple de vecteurs x, y non nuls dans E, il y a une transvection, ou un produit de deux transvections, qui transforme x en y.

Pour tout couple de droites, D, D′ *ne passant pas par* 0, il existe une transvection, ou un produit de deux transvections, qui transforme D en D′ (considérer d'abord le cas où D et D′ ne sont pas parallèles).

D) *Sous-groupes de* $\mathbf{GL}(E)$; *normalisateurs.* Pour une base convenable, le groupe $Z\Gamma(E, D)$ s'identifie au groupe B des matrices.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

telles que $\alpha\gamma \neq 0$, le groupe $\Theta(E, D)$ au sous-groupe U de B formé des matrices telles que $\alpha = \gamma = 1$. Montrer que U est le *groupe des commutateurs* de B (i.e. le sous-groupe engendré par les « commutateurs » $uvu^{-1}v^{-1}$ de couples (u, v) d'éléments de B) ; B est le *normalisateur* de U (i.e. le *plus grand* sous-groupe de $\mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$ dans lequel U est *distingué*) ; B est un sous-groupe *maximal* de $\mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$ (i.e. il n'est contenu dans aucun sous-groupe de $\mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$ autre que lui-même et $\mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$).

Le sous-groupe T des matrices *diagonales*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

s'identifie au sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$ formé des homothéties et des automorphismes ayant deux droites fixes distinctes comme sous-espaces *propres*. Son normalisateur W est le sous-groupe engendré par T et la matrice P (exerc. 2).

Toute matrice qui n'appartient pas à B s'écrit *d'une seule manière* sous la forme $X_1 P D X_2$, où $D \in T$, X_1 et X_2 appartiennent à U (« *décomposition de Bruhat* » du groupe $\mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$).

7) *Le « théorème fondamental » de la géométrie affine.* Dans cet exercice, on admet un *axiome additionnel* pour le corps des scalaires **R**, savoir qu'il n'existe *aucun automorphisme de ce corps autre que l'identité.*

Soit u une application *injective* de E dans lui-même ayant la propriété suivante : si trois points, a, b, c de E sont sur une même droite, il en est de même de $u(a), u(b), u(c)$, et telle que la variété linéaire affine engendrée par $u(E)$ soit E.

I) Prouver que si a, b, c ne sont pas sur une même droite, il en est de même de $u(a), u(b), u(c)$ (utiliser l'exerc. 3 de la section (3.3)).

II) Pour toute droite D, il existe une droite unique D′ telle que $u(D) \subset D'$. Si u est *bijective* on a nécessairement $u(D) = D'$; de plus, si D_1, D_2 sont parallèles, alors les droites $u(D_1)$ et $u(D_2)$ sont parallèles ; elles sont distinctes si D_1 et D_2 sont distinctes.

III) On suppose désormais que u est bijective. Il existe alors une application affine bijective v de E sur lui-même telle que, si l'on pose $u_1 = v \circ u$, u_1 laisse fixes l'origine et deux vecteurs a_1, a_2 formant une base de E.

Etant donnés deux points $\xi a_1, \eta a_1$, montrer comment, par intersections de droites de vecteurs directeurs a_1, a_2 ou $a_2 - a_1$, on peut successivement construire les points $\eta a_2, \xi a_1 + \eta a_2$, $(\xi + \eta)a_1$. Puis, par intersections de droites de vecteurs directeurs $a_1, a_2, a_2 - \xi a_1, a_2 - a_1$, montrer qu'on peut construire aussi le point $\xi\eta a_1$. En déduire que si l'on pose $u_1(\xi a_1) = \varphi(\xi)a_1$, φ est un automorphisme du corps $\mathbf{R}$, et par suite l'identité ; d'où $u = v^{-1}$, u est une application affine.

8) Définir le produit d'une matrice de type (2, 1) et d'une matrice de type (1, 2)

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}(\beta_1 \quad \beta_2)$$

Quelle est l'interprétation de ce produit en termes d'applications linéaires ? Montrer que la matrice produit obtenue est la matrice d'une application linéaire de rang 0 ou 1.

9) Soit f une application de E dans E (non nécessairement linéaire *a priori*). Montrer que si f permute à tous les automorphismes $u \in \mathrm{GL(E)}$, f est nécessairement une homothétie h_λ. (Prouver d'abord que pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe un scalaire $\lambda(x)$ tel que $f(x) = \lambda(x)x$, en considérant les automorphismes u de E laissant invariant x).

Soit g une application de E × E dans E telle que, pour tout endomorphisme $v \in \mathrm{End(E)}$, on ait $g(v(x), v(y)) = v(g(x, y))$; montrer que g est nécessairement de la forme $(x, y) \to \alpha x + \beta y$ (même méthode).

10) Soient $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3$ trois droites vectorielles distinctes dans E. Il existe alors trois vecteurs $\neq 0$, $x_1 \in \mathrm{D}_1$, $x_2 \in \mathrm{D}_2$, $x_3 \in \mathrm{D}_3$ tels que $x_3 = x_1 + x_2$, et ces vecteurs sont déterminés à un facteur commun scalaire $\neq 0$ près. Pour toute droite vectorielle D distincte de $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3$, il existe alors un scalaire et un seul ρ tel que $x_1 + \rho x_2 \in \mathrm{D}$; on dit que ρ est le *birapport* du quadruplet $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{D})$ et on le note

$$\begin{bmatrix}\mathrm{D}_1 & \mathrm{D}_2\\ \mathrm{D} & \mathrm{D}_3\end{bmatrix}$$

On a $\rho \neq 0$ et $\rho \neq 1$.

Si $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{D}_4$ sont quatre droites vectorielles distinctes, montrer que l'on a

$$\begin{bmatrix}\mathrm{D}_1 & \mathrm{D}_2\\ \mathrm{D}_4 & \mathrm{D}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{D}_2 & \mathrm{D}_1\\ \mathrm{D}_3 & \mathrm{D}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{D}_1 & \mathrm{D}_2\\ \mathrm{D}_3 & \mathrm{D}_4\end{bmatrix}^{-1} = 1 - \begin{bmatrix}\mathrm{D}_4 & \mathrm{D}_1\\ \mathrm{D}_3 & \mathrm{D}_2\end{bmatrix}$$

Etant donnés deux quadruplets $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{D}_4)$, $(\mathrm{D}'_1, \mathrm{D}'_2, \mathrm{D}'_3, \mathrm{D}'_4)$ de droites vectorielles distinctes, pour qu'il existe un automorphisme $u \in \mathrm{GL(E)}$ tel que $u(\mathrm{D}_i) = \mathrm{D}'_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{bmatrix}\mathrm{D}_1 & \mathrm{D}_2\\ \mathrm{D}_4 & \mathrm{D}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{D}'_1 & \mathrm{D}'_2\\ \mathrm{D}'_4 & \mathrm{D}'_3\end{bmatrix}$$

(utiliser l'exerc. 6, C)).

§ 2. Déterminants

(4.2.1) Soit u une application *bilinéaire* de E × E dans un espace vectoriel F (3.2.12) ; si $\{a_1, a_2\}$ est une *base* de E, les valeurs de u dans E × E sont *déterminées* par celles des quatre vecteurs

$$u(a_1, a_1), \quad u(a_1, a_2), \quad u(a_2, a_1), \quad u(a_2, a_2)$$

En effet, il résulte de la définition que l'on a

$$u(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2) = \xi_1\eta_1 u(a_1, a_1) + \xi_1\eta_2 u(a_1, a_2) + \xi_2\eta_1 u(a_2, a_1) + \xi_2\eta_2 u(a_2, a_2)$$

Inversement, étant donnés quatre vecteurs *quelconques* $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ de F, il *existe* une application bilinéaire (et une seule d'après ce qui précède) u de E × E dans F telle que

$$u(a_1, a_1) = b_{11}, \quad u(a_1, a_2) = b_{12}, \quad u(a_2, a_1) = b_{21}, \quad u(a_2, a_2) = b_{22}.$$

Pour tout couple de vecteurs $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$ de E, il suffit de *définir* $u(x, y)$ comme égal à

(4.2.1.1.) $$\xi_1\eta_1 b_{11} + \xi_1\eta_2 b_{12} + \xi_2\eta_1 b_{21} + \xi_2\eta_2 b_{22}.$$

Le fait que l'application ainsi définie soit linéaire en x et linéaire en y résulte de (4.1.10). L'application

$$u \to (u(a_1, a_1), u(a_1, a_2), u(a_2, a_1), u(a_2, a_2))$$

est donc un *isomorphisme* de l'espace vectoriel $\mathscr{B}$(E, E ; F) sur l'espace produit F × F × F × F (3.1.8).

Il résulte aussitôt de ce calcul et des définitions (3.2.14) que :

1° Pour que u soit *symétrique*, il faut et il suffit que $u(a_2, a_1) = u(a_1, a_2)$.

2° Pour que u soit *alternée*, il faut et il suffit que $u(a_1, a_1) = 0$, $u(a_2, a_2) = 0$ et $u(a_2, a_1) = -u(a_1, a_2)$.

Autrement dit, l'ensemble $\mathscr{S}$(E, E ; F) (resp. $\mathscr{A}$(E, E ; F)) des applications bilinéaires symétriques (resp. alternées) est un sous-espace de $\mathscr{B}$(E, E ; F) isomorphe à F × F × F (resp. à F).

(4.2.2) De la même manière, on voit que toute application *trilinéaire* u (3.2.15) de E × E × E dans F est déterminée par les valeurs des 8 vecteurs $u(a_i, a_j, a_k)$ de F, où i, j, k prennent chacum une des deux valeurs 1, 2 ; et réciproquement, à tout système de 8 vecteurs de F correspond ainsi une application trilinéaire et une seule de E × E × E dans F. La *seule* application trilinéaire *alternée* de E × E × E dans F est l'application *identiquement nulle*, car dans chacune des valeurs $u(a_i, a_j, a_k)$, deux des vecteurs a_i, a_j, a_k sont nécessairement égaux, donc $u(a_i, a_j, a_k) = 0$ par définition.

Ces résultats s'étendent sans peine aux applications p-linéaires pour $p > 3$.

(4.2.3) Considérons en particulier les *formes bilinéaires* sur E × E (3.2.12) ; étant donnée une base $\{a_1, a_2\}$ de E, il résulte de (4.2.1) qu'une telle forme Φ est déterminée par quatre *scalaires* $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}$ et que sa valeur $\Phi(x, y)$ pour $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$ est donnée par la formule (4.2.1.1), où les b_{ij} sont remplacés par β_{ij}. Notons que le scalaire ainsi obtenu peut s'écrire comme le produit de matrices

(4.2.3.1)
$$(\xi_1 \quad \xi_2)\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

ainsi qu'on le vérifie aussitôt.

(4.2.4) Etant donnée une matrice de type (2, 2)

$$U = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$$

on appelle *transposée* de U et on note ${}^tU$ la matrice obtenue en « échangeant les lignes et les colonnes » ; autrement dit

$${}^tU = \begin{pmatrix}\alpha'_{11} & \alpha'_{12}\\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22}\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix}\alpha'_{11} = \alpha_{11}, & \alpha'_{22} = \alpha_{22}\\ \alpha'_{12} = \alpha_{21}, & \alpha'_{21} = \alpha_{12}\end{matrix}$$

Il est clair que ${}^t({}^tU) = U$. De même, on dit que chacune des matrices

$$C = \begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}, \quad L = (\zeta_1 \quad \zeta_2)$$

est *transposée* de l'autre et on écrit encore $C = {}^tL$, $L = {}^tC$. Avec ces notations, on vérifie aussitôt que l'on a

(4.2.4.1)
$${}^t(XY) = {}^tY.{}^tX$$

lorsque le produit XY de deux matrices est défini.

Ces notations étant introduites, il résulte de (4.2.3) qu'une fois choisie une base $\{a_1, a_2\}$ dans E, on peut écrire

(4.2.4.2)
$$\Phi(x, y) = {}^tM(x)M(\Phi)M(y)$$

en posant

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$$

On dit que $M(\Phi)$ est *la matrice de la forme bilinéaire* Φ *relativement à la base* $\{a_1, a_2\}$. Pour que Φ soit symétrique (resp. alternée), il faut et il suffit que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ ou encore ${}^tM(\Phi) = M(\Phi)$ (resp. $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ et $\alpha_{12} = -\alpha_{21}$, ou encore ${}^tM(\Phi) = -M(\Phi)$) ; on dit qu'une telle matrice est *symétrique* (resp. *alternée* ou *antisymétrique*).

(4.2.5) Il résulte aussitôt de (4.2.2) que l'espace $\mathscr{A}(\mathrm{E}, \mathrm{E}\,; \mathbf{R})$ des *formes bilinéaires alternées* sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ est une *droite vectorielle* ; une fois choisie une base $\{a_1, a_2\}$ de E, une forme bilinéaire alternée Ψ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ est entièrement déterminée par *un seul* scalaire $\Psi(a_1, a_2) = -\Psi(a_2, a_1) = \lambda$ et l'on a, pour $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$

(4.2.5.1)
$$\Psi(x, y) = \lambda(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1).$$

On notera que si a est un vecteur quelconque $\neq 0$ dans E, toute équation de la droite D_{0a} s'écrit $\Psi(a, x) = 0$, où Ψ est une forme bilinéaire alternée non identiquement nulle sur $E \times E$ (3.3.6).

(4.2.6) *Soit u un endomorphisme de* E. *Il existe un scalaire unique* (noté $\det(u)$ et appelé le *déterminant de u*) *tel que, pour toute forme bilinéaire alternée* Ψ *sur* $E \times E$, *on ait*

(4.2.6.1) $$\Psi(u(x), u(y)) = \det(u) . \Psi(x, y).$$

En effet, il est immédiat que l'application

(4.2.6.2) $$(x, y) \to \Psi(u(x), u(y))$$

est une *forme bilinéaire alternée* sur $E \times E$, donc, si l'on a pris Ψ non identiquement nulle, la forme (4.2.6.2) s'écrit $\gamma\Psi$, où γ est un scalaire (4.2.5) ; ce scalaire est indépendant du choix de $\Psi \neq 0$, car toute autre forme bilinéaire alternée $\neq 0$ s'écrit $\lambda\Psi$ avec $\lambda \neq 0$.

Il résulte aussitôt de cette définition que l'on a

(4.2.6.3) $$\det(1_E) = 1.$$

Si g est un *isomorphisme* de E sur un plan vectoriel E′, l'application $(x', y') \to \Psi(g^{-1}(x'), g^{-1}(y'))$ est une forme bilinéaire alternée sur $E' \times E'$ qui est $\neq 0$ s'il en est ainsi de Ψ ; notons-la Ψ'. Alors, pour tout endomorphisme u de E, gug^{-1} est un endomorphisme de E′ (3.2.9) et l'on a par définition

$$\begin{aligned}\Psi'(gug^{-1}(x'),\ gug^{-1}(y')) &= \Psi(ug^{-1}(x'),\ ug^{-1}(y')) \\ &= \det(u)\Psi(g^{-1}(x'),\ g^{-1}(y')) = \det(u) . \Psi'(x', y')\end{aligned}$$

d'où

(4.2.6.4) $\det(gug^{-1}) = \det(u)$.

(4.2.7) *Si* u, v *sont deux endomorphismes de* E, *on a*

(4.2.7.1) $$\det(v \circ u) = \det(v)\det(u).$$

Désignons toujours par Ψ une forme bilinéaire alternée $\neq 0$ sur $E \times E$; on a par définition (4.2.6.1)

$$\Psi(v(u(x)), v(u(y))) = \det(v)\Psi(u(x), u(y)) = \det(v)\det(u)\Psi(x, y)$$

et d'autre part $\Psi(v(u(x)), v(u(y))) = \det(v \circ u)\Psi(x, y)$. Comparant ces deux formules (et utilisant le fait que Ψ n'est pas identiquement nulle) on en tire (4.2.7.1).

(4.2.8) *Pour qu'un endomorphisme u soit tel que* $\det(u) \neq 0$, *il faut et il suffit que u soit bijectif.*

En effet, si u est bijectif, son inverse u^{-1} est tel que $u \circ u^{-1} = 1_E$, donc les formules (4.2.6.3) et (4.2.7.1) donnent $\det(u)\det(u^{-1}) = 1$, et en particulier

$\det(u) \neq 0$. Si au contraire u n'est pas bijectif, il n'est pas injectif (4.1.8), autrement dit il y a un vecteur $a_1 \neq 0$ tel que $u(a_1) = 0$. Considérons une base $\{a_1, a_2\}$ dont a_1 est l'un des vecteurs (4.1.5) ; si Ψ est une forme bilinéaire alternée sur E × E non identiquement nulle, on a $\Psi(a_1, a_2) \neq 0$ (4.2.5) mais $\Psi(u(a_1), u(a_2)) = 0$ d'où la proposition en vertu de (4.2.6.1).

(4.2.9) Soit $\{a_1, a_2\}$ une base de E, et soit

(4.2.9.1) $$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme u de E relativement à cette base ; soit Ψ la forme bilinéaire alternée sur E × E telle que $\Psi(a_1, a_2) = 1$; il résulte de (4.2.6.1) que l'on a

$$\det(u) = \Psi(u(a_1), u(a_2))$$

et si l'on se souvient que $u(a_1)$ est la première colonne et $u(a_2)$ la seconde colonne de la matrice (4.2.9.1), il vient, par (4.2.5.1)

(4.2.9.2) $$\det(u) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

On dit aussi que le scalaire (4.2.9.2) est le *déterminant de la matrice* $M(u)$ et on le note $\det(M(u))$ ou

(4.2.9.3) $$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Compte tenu des formules (4.2.7.1) et (4.1.12.1), on a, pour deux matrices quelconques X, Y de type (2, 2)

(4.2.9.4) $$\det(XY) = \det(X)\det(Y).$$

Pour qu'une matrice X de type (2, 2) soit *inversible*, il faut et il suffit que $\det(X) \neq 0$, ou encore que X soit *de rang* 2 (4.1.7 et 4.1.11) ; nous calculerons X^{-1} dans (4.2.13).

Pour toute matrice X de type (2, 2), on a

(4.2.9.5) $$\det({}^tX) = \det(X)$$

comme il résulte de (4.2.9.2) et de la définition d'une transposée (4.2.4).

(4.2.10) Etant donnés une base $\{a_1, a_2\}$ de E et deux vecteurs

$$x_1 = \xi_{11}a_1 + \xi_{21}a_2, \qquad x_2 = \xi_{12}a_1 + \xi_{22}a_2$$

il existe un endomorphisme u de E et un seul tel que $u(a_1) = x_1$, $u(a_2) = x_2$ et la matrice de u relativement à la base $\{a_1, a_2\}$ est

$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}$$

Pour que x_1 et x_2 soient *linéairement indépendants*, il faut et il suffit que u soit *bijectif* (4.1.8), ou encore que $\det(X) \neq 0$ (4.2.8), ce qui s'écrit

(4.2.10.1) $$\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21} \neq 0.$$

On peut d'ailleurs démontrer directement ce résultat à partir de la définition (4.1.1) ; notons aussi que (4.2.10.1) s'écrit $\Psi(x_1, x_2) \neq 0$ pour toute forme bilinéaire alternée $\Psi \neq 0$ sur E × E.

Si maintenant $\{f_1, f_2\}$ est la *base duale* de $\{a_1, a_2\}$ dans E* (4.1.15), pour que deux formes linéaires sur E

(4.2.10.2) $$g_1 = \beta_{11}f_1 + \beta_{12}f_2, \qquad g_2 = \beta_{21}f_1 + \beta_{22}f_2$$

soient *linéairement indépendantes*, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que l'on ait

(4.2.10.3) $$\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} \neq 0.$$

On retrouve ainsi la condition pour que deux droites soient parallèles (4.1.16).

(4.2.11) Considérons un système de deux *équations linéaires à deux inconnues* ξ_1, ξ_2

(4.2.11.1) $$\begin{cases} \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 = \gamma_1 \\ \beta_{21}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 = \gamma_2 \end{cases}$$

On peut l'interpréter de la façon suivante : soit $\{a_1, a_2\}$ une base de E, et posons $b_1 = \beta_{11}a_1 + \beta_{21}a_2$, $b_2 = \beta_{12}a_1 + \beta_{22}a_2$, $c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2$; alors le système (4.2.11.1) est équivalent à l'*unique* équation

(4.2.11.2) $$\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 = c.$$

Soit Ψ la forme bilinéaire alternée sur E × E telle que $\Psi(a_1, a_2) = 1$; s'il existe une solution (ξ_1, ξ_2) de (4.2.11.2), elle vérifie aussi les relations

(4.2.11.3) $$\begin{aligned} \Psi(c, b_2) &= \Psi(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2, b_2) = \xi_1 \Psi(b_1, b_2) \\ \Psi(b_1, c) &= \Psi(b_1, \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) = \xi_2 \Psi(b_1, b_2) \end{aligned}$$

Distinguons alors deux cas :

A) *On a* $\Psi(b_1, b_2) \neq 0$ (autrement dit, la relation (4.2.10.3) a lieu). Les vecteurs b_1 et b_2 sont alors linéairement indépendants (4.2.10) et par suite forment une *base* de E. Comme on sait alors *a priori* qu'il *existe* deux scalaires bien déterminés ξ_1, ξ_2 vérifiant (4.2.11.2), on en conclut que, *quel que soit* c, le système (4.2.11.1) admet *une solution et une seule*, donnée par les formules

(4.2.11.4) $$\xi_1 = \delta_1 \delta^{-1}, \qquad \xi_2 = \delta_2 \delta^{-1}$$

où

$$\text{(4.2.11.5)} \quad \delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}, \qquad \delta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_{12} \\ \gamma_2 & \beta_{22} \end{vmatrix}, \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \gamma_1 \\ \beta_{21} & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

(« *formules de Cramer* »).

B) *On a* $\Psi(b_1, b_2) = 0$, ou encore $\delta = 0$. Il résulte de (4.2.11.3) qu'une condition *nécessaire* pour que le système (4.2.11.1) ait une solution est que l'on ait aussi

$$\text{(4.2.11.6)} \qquad \delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0.$$

Inversement, supposons ces deux conditions satisfaites. Si l'on a $b_1 = b_2 = 0$, il est en outre *nécessaire* que $c = 0$, et alors tout système (ξ_1, ξ_2) est solution de (4.2.11.1). Si au contraire on a par exemple $b_1 \neq 0$, alors les relations $\delta = 0$, $\delta_1 = 0$ signifient qu'il y a des scalaires λ et μ tels que $b_2 = \lambda b_1$, $c = \mu b_1$ et l'équation (4.2.11.2) se réduit à $\xi_1 + \lambda\xi_2 = \mu$; on peut prendre ξ_2 *arbitraire* et l'équation précédente détermine ξ_1 de façon unique.

(4.2.12) Avec les notations de (4.2.10), supposons que les formes linéaires g_1 et g_2 ne soient nulles ni l'une ni l'autre ; alors le système (4.2.11.1) admet une *seconde* interprétation : il signifie que le point $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$ appartient à l'*intersection* des droites D_1, D_2 d'équations respectives (3.3.6)

$$D_1 : g_1(x) = \gamma_1, \qquad D_2 : g_2(x) = \gamma_2.$$

Le cas A) de (4.2.11) est celui où les droites D_1, D_2 ne sont pas parallèles, et l'on retrouve alors qu'elles ont un point commun et un seul (4.1.6) ; en outre les formules de Cramer donnent explicitement les coordonnées de ce point. Le cas B) est celui où D_1 et D_2 sont parallèles et les conditions (4.2.11.6) sont nécessaires et suffisantes pour qu'elles soient identiques (ce qu'il serait facile de retrouver directement à partir de (4.1.16)).

(4.2.13) Une *troisième* interprétation du système (4.2.11.1) (ou de l'équation équivalente (4.2.11.2)) consiste à considérer l'unique endomorphisme u de E tel que $u(a_1) = b_1$, $u(a_2) = b_2$ (4.1.10), autrement dit, l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base $\{a_1, a_2\}$ est

$$\text{(4.2.13.1)} \qquad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

L'équation (4.2.11.2) s'écrit alors

$$\text{(4.2.13.2)} \qquad u(x) = c.$$

On a $\delta = \det(B) = \det(u)$.

Le cas A) de (4.2.11) est celui où u est *bijectif* (4.2.8), et la solution unique de (4.2.13.2) est

(4.2.13.3) $$x = u^{-1}(c).$$

En donnant successivement à c les valeurs a_1 et a_2, on obtient par les formules de Cramer les vecteurs $u^{-1}(a_1)$ et $u^{-1}(a_2)$, c'est-à-dire les *colonnes de la matrice de* u^{-1} relativement à la base $\{a_1, a_2\}$; en d'autres termes, on a alors

(4.2.13.4) $$B^{-1} = (\det B)^{-1}\begin{pmatrix} \beta_{22} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \beta_{11} \end{pmatrix}$$

Le cas B) de (4.2.11) est celui où u est de rang 0 ou 1, et si u est de rang 1 (autrement dit $B \neq 0$ et $\det(B) = 0$), les conditions (4.2.11.6) sont nécessaires et suffisantes pour que le vecteur c appartienne à la droite vectorielle $u(\mathrm{E})$.

En particulier, l'équation (dite « *homogène* »)

(4.2.13.5) $$u(x) = 0$$

a pour solutions les vecteurs du *noyau* $u^{-1}(0)$ de u ; si u est de rang 1, on retrouve ainsi le fait que ce noyau est une droite vectorielle.

Notons enfin que si x_0 est une solution de (4.2.13.2), on a, pour toute autre solution x de cette équation, $u(x - x_0) = 0$; autrement dit, si l'ensemble $u^{-1}(c)$ des solutions de (4.2.13.2) n'est pas vide, c'est la *variété linéaire* $x_0 + u^{-1}(0)$.

(4.2.14) Comme cas particulier de ce qui précède, on obtient la condition pour qu'un endomorphisme u de E admette des *valeurs propres* (3.2.10) et le calcul de ces valeurs propres lorsqu'elles existent. En effet, pour que λ soit valeur propre de u, il faut et il suffit que le noyau de $u - \lambda . 1_\mathrm{E}$ ne soit pas réduit à 0, ou encore (4.2.8) que

(4.2.14.1) $$\det(u - \lambda . 1_\mathrm{E}) = 0.$$

Cette équation est appelée *équation caractéristique* (et son premier membre le *polynôme caractéristique*) de l'endomorphisme u ; si, relativement à une base $\{a_1, a_2\}$ de E, on a

$$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

l'équation (4.2.14.1) s'écrit

(4.2.14.2) $$\lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = 0,$$

et ne dépend évidemment pas de la base $\{a_1, a_2\}$ choisie ; la condition pour qu'elle admette des racines est donc (1.32)

(4.2.14.3) $$(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21} \geqslant 0.$$

Lorsque cette condition est remplie, il y a au moins une racine λ_1 de l'équation caractéristique, donc au moins un vecteur propre b_1 correspondant à λ_1 (la méthode de (4.2.11) permet de calculer les coordonnées d'un tel vecteur). Si b_2 est un second vecteur tel que $\{b_1, b_2\}$ soit une base de E (4.1.5), la matrice de u relativement à la base $\{b_1, b_2\}$ sera donc de la forme (dite *matrice triangulaire supérieure*)

(4.2.14.4)
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le calcul de l'équation caractéristique de u à partir de la base $\{b_1, b_2\}$ montre aussitôt que λ_2 est alors aussi *valeur propre* de u.

(4.2.15). Considérons maintenant les problèmes du *changement de base.* Soit $\{a_1, a_2\}$ une base de E ; pour que deux vecteurs

(4.2.15.1)
$$\begin{cases} a'_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 \\ a'_2 = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 \end{cases}$$

forment une *base* de E (ou, ce qui revient au même (4.1.3), un *ensemble libre*), il faut et il suffit, comme on l'a vu (4.2.10) que la matrice

(4.2.15.2)
$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

soit *inversible* (ou encore que $\det(P) \neq 0$). On dit alors que P est la *matrice de passage de la base* $\{a_1, a_2\}$ *à la base* $\{a'_1, a'_2\}$. On peut l'interpréter encore comme la matrice de l'*application identique* 1_E *relativement à la base* $\{a'_1, a'_2\}$ *et à la base* $\{a_1, a_2\}$ (*dans cet ordre*) (cf. (4.1.11)). Compte tenu de la formule (4.1.12.1), cette interprétation montre aussitôt que la matrice de passage *de la base* $\{a'_1, a'_2\}$ *à la base* $\{a_1, a_2\}$ est l'*inverse* P^{-1} de P.

Soit maintenant x un vecteur de E, et posons

(4.2.15.3)
$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 = \xi'_1 a'_1 + \xi'_2 a'_2$$

de sorte que les matrices à une colonne correspondant à x relativement aux bases $\{a_1, a_2\}$ et $\{a'_1, a'_2\}$ sont respectivement

$$M(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \qquad M'(x) = \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix}$$

Or, on a évidement $x = 1_E(x)$; appliquant la formule (4.1.12.2) et l'interprétation précédente de P, il vient

(4.2.15.4)
$$M(x) = P \, . \, M'(x)$$

ce qui s'écrit aussi

(4.2.15.5)
$$\begin{cases} \xi_1 = \alpha_{11}\xi'_1 + \alpha_{12}\xi'_2 \\ \xi_2 = \alpha_{21}\xi'_1 + \alpha_{22}\xi'_2 \end{cases}$$

et peut bien entendu se déduire directement de (4.2.15.3) et (4.2.15.1) sans parler de matrices.

Soient en second lieu F un second espace vectoriel à 2 dimensions, $\{b_1, b_2\}$ et $\{b'_1, b'_2\}$ deux bases de F, Q la matrice de passage de $\{b_1, b_2\}$ à $\{b'_1, b'_2\}$. Soit v une application linéaire de E dans F ; désignons par $M(v)$ la matrice de v relativement aux bases $\{a_1, a_2\}$ et $\{b_1, b_2\}$, par $M'(v)$ sa matrice relativement aux bases $\{a'_1, a'_2\}$ et $\{b'_1, b'_2\}$. Remarquons maintenant que l'on peut écrire

$$v = 1_{\mathrm{F}} \circ v \circ 1_{\mathrm{E}}$$

et appliquons (4.1.12.1) en prenant :

la matrice de 1_{E} relativement à $\{a'_1, a'_2\}$ et $\{a_1, a_2\}$ (dans cet ordre) ;

la matrice de v relativement à $\{a_1, a_2\}$ et $\{b_1, b_2\}$;

la matrice de 1_{F} relativement à $\{b_1, b_2\}$ et $\{b'_1, b'_2\}$ (dans cet ordre).

Il vient, d'après l'interprétation des matrices de passage.

(4.2.15.6) $$M'(v) = Q^{-1}M(v)P.$$

Considérons en particulier le cas où F = E et où on prend les matrices des endomorphismes relativement à *une seule* base de E (4.1.11). Si u est un endomorphisme de E, $M(u)$ sa matrice relativement à $\{a_1, a_2\}$, $M'(u)$ sa matrice relativement à $\{a'_1, a'_2\}$, on a, d'après (4.2.15.6),

(4.2.15.7) $$M'(u) = P^{-1}M(u)P.$$

Considérons enfin une *forme bilinéaire* Φ sur E × E, et soient $M(\Phi)$ et $M'(\Phi)$ ses matrices relativement à $\{a_1, a_2\}$ et à $\{a'_1, a'_2\}$ respectivement (4.2.4). Utilisant (4.2.15.4), (4.2.4.1) et (4.2.4.2), on obtient

$$\Phi(x, y) = {}^tM'(x) \,.\, {}^tP \,.\, M(\Phi) \,.\, P \,.\, M'(y)$$

et d'autre part

$$\Phi(x, y) = {}^tM'(x)M'(\Phi)M'(y)$$

En donnant au couple (x, y) les valeurs (a'_1, a'_1), (a'_1, a'_2), (a'_2, a'_1), (a'_2, a'_2), il vient donc

(4.2.15.8) $$M'(\Phi) = {}^tP \,.\, M(\Phi) \,.\, P.$$

Thèmes d'exercices

1) *Trace d'un endomorphisme.* Soient u un endomorphisme de E,

$$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

sa matrice relativement à une base $\{a_1, a_2\}$ de E. On appelle *trace* de u (ou de $M(u)$) le scalaire $\alpha_{11} + \alpha_{22}$; il est indépendant de la base $\{a_1, a_2\}$ choisie (cf. (4.2.14.2)) ; on le note $\mathrm{Tr}(u)$ ou $\mathrm{Tr}(M(u))$. Si l'équation caractéristique de u s'écrit $(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)$

$= 0$ (autrement dit, si la condition (4.2.14.3) est vérifiée), on a $\mathrm{Tr}(u) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(u) = \lambda_1\lambda_2$. On a, pour tout endomorphisme u,

$$u^2 - \mathrm{Tr}(u).u + \det(u) = 0$$

dans l'anneau End(E) (cf. section (4.1), exerc. 4).

Si u, v sont deux endomorphismes quelconques de E, on a

$$\mathrm{Tr}(vu) = \mathrm{Tr}(uv).$$

Inversement, si f est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $f(XY) = f(YX)$ pour tout couple de matrices (X, Y) de type $(2, 2)$, montrer qu'il y a un scalaire α tel que $f(X) = \alpha\mathrm{Tr}(X)$ (donner à Y pour valeurs particulières les matrices dont un seul des 4 éléments est $\neq 0$).

Montrer que si l'on a $\mathrm{Tr}(u) = 0$ et $\mathrm{Tr}(u^2) = 0$ (ou $\mathrm{Tr}(u^2) = 0$ et $\mathrm{Tr}(u^3) = 0$), on a nécessairement $u^2 = 0$; réciproque.

2) Dans l'exerc. 2 (resp. l'exerc. 3, resp. l'exerc. 4) de la section 4.1, montrer que le scalaire δ est indépendant du choix des matrices R, S (resp. de la base) répondant à la question.

3) Donner un exemple de deux endomorphismes u, v de E tels que uv et vu n'aient pas même rang, bien qu'ils aient même équation caractéristique.

4) Montrer que pour toute matrice X de type $(2, 2)$, il existe une matrice *inversible* P de type $(2, 2)$ telle que ${}^tX = PXP^{-1}$ (écrire que $PX = {}^tX.P$).

5) *Classification des endomorphismes.* Montrer que lorsque l'équation caractéristique (4.2.14.2) d'un endomorphisme u de E *admet des racines*, il existe une base de E telle que la matrice de u relativement à cette base soit de l'une des formes

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Montrer que si, relativement à une base de E, u a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0$, il a aussi une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

relativement à une autre base convenable, mais il ne peut avoir pour matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

relativement à une base quelconque de E.

En déduire la détermination du *sous-anneau* de End(E) formé des éléments v qui *permutent* avec u ; obtenir par suite la détermination du *centralisateur* de u dans GL(E) lorsque u est inversible (cf. section (3.3), exerc. 6 et section (4.1), exerc. 6).

6) Traduire les résultats de (4.1.14, (i)) en termes de matrices de type $(2, 2)$, à l'aide des formules de changement de base.

7) *Le groupe unimodulaire.* L'application $u \to \det(u)$ est un homomorphisme du groupe **GL**(E) sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$; son noyau (autrement dit le groupe des automorphismes de E de déterminant 1) est un sous-groupe distingué de **GL**(E), appelé *groupe unimodulaire*, et noté **SL**(E), ou $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, ou $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$.

A) *Générateurs.* Tout élément de $\mathbf{SL}(E)$ distinct de -1_E est, soit une transvection, soit le produit de deux transvections ; la symétrie -1_E est produit de 3 transvections mais n'est pas égale au produit de 2 transvections. Montrer que tout élément u de $\mathbf{SL}(E)$ est produit de 2 quasi-symétries (distinguer deux cas suivant que $u \neq -1_E$ ou $u = -1_E$). Aucune dilatation ne peut appartenir à $\mathbf{SL}(E)$.

B) *Propriétés de conjugaison.* Si deux endomorphismes u, v de E qui ne sont pas des homothéties ont même trace et même déterminant (ou, ce qui revient au même, même polynôme caractéristique), ils sont *conjugués* dans $\mathbf{GL}(E)$ (utiliser la forme de $M(u)$ donnée dans l'exerc. 4 de la section (4.1)). En particulier, pour que deux éléments u, v de $\mathbf{GL}(E)$ ayant chacun deux valeurs propres *distinctes* soient *conjugués* dans $\mathbf{GL}(E)$, il faut et il suffit que les ensembles de valeurs propres soient les mêmes pour u et v ; il existe même alors un $w' \in \mathbf{SL}(E)$ tel que $v = w'uw'^{-1}$ (considérer le centralisateur de u dans $\mathbf{GL}(E)$). Cas particulier des dilatations.

Il revient au même de dire, dans le cas considéré, que $\mathbf{GL}(E)$ (ou $\mathbf{SL}(E)$) *opère transitivement* (par $u \to wuw^{-1}$) dans l'ensemble des automorphismes de E ayant un polynôme caractéristique (admettant des racines *distinctes*) donné. Montrer au contraire que dans l'ensemble des automorphismes de E admettant un polynôme caractéristique donné de la forme $(\alpha - \lambda)^2$, il y a *deux* classes d'intransitivité pour le groupe $\mathbf{GL}(E)$ (cf. exerc. 5).

Montrer que deux transvections quelconques $\neq 1_E$ sont conjuguées dans $\mathbf{GL}(E)$ (utiliser l'exerc. 1 de la section (4.1) ; cf. section (4.3), exerc. 2).

C) *Centre et groupe des commutateurs.* Le centralisateur de $\mathbf{SL}(E)$ dans $\mathbf{GL}(E)$ est le centre Z de $\mathbf{GL}(E)$, et le centre de $\mathbf{SL}(E)$, égal à $Z \cap \mathbf{SL}(E)$, est formé de 1_E et de la symétrie -1_E.

Toute transvection est égale à un commutateur $uvu^{-1}v^{-1}$ de deux éléments du groupe $\mathbf{GL}(E)$ (utiliser le fait que toute transvection est le produit de deux quasi-symétries) ; en déduire que $\mathbf{SL}(E)$ est le groupe des commutateurs de $\mathbf{GL}(E)$.

Tout automorphisme $u \in \mathbf{SL}(E)$ ayant deux valeurs propres distinctes λ, λ^{-1} est un commutateur $vwv^{-1}w^{-1}$ de *deux éléments de* $\mathbf{SL}(E)$ (utiliser l'exerc. 5, et B)).

Calculer le commutateur $UVU^{-1}V^{-1}$, où

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire que $\mathbf{SL}(E)$ est égal à son propre groupe des commutateurs.

D) *Sous-groupes distingués.* Le groupe $\mathbf{SL}(E)$ opère de façon *doublement transitive* dans l'ensemble des droites vectorielles de E (cf. section (4.3), exerc. 1). Si L est un sous-groupe distingué de $\mathbf{SL}(E)$, non contenu dans le centre $Z \cap \mathbf{SL}(E)$, en déduire que L opère *transitivement* dans l'ensemble des droites vectorielles de E (considérer une droite D et un élément $u \in L$ tel que $u(D) \neq D$, et montrer que si D_1, D_2 sont deux droites distinctes, il existe $v \in \mathbf{SL}(E)$ tel que $(vuv^{-1})(D_1) = D_2$). De ce résultat, conclure que l'on a $\mathbf{SL}(E) = L \,.\, \Theta(E, D)$ (cf. section (4.1), exerc. 6 B)) et montrer enfin que tout commutateur de $\mathbf{SL}(E)$ est contenu dans L, donc que l'on a $L = \mathbf{SL}(E)$; autrement dit, $\mathbf{SL}(E)$ n'admet pas d'autre sous-groupe distingué que lui-même, $Z \cap \mathbf{SL}(E)$ et l'élément neutre.

8) *Endomorphismes de trace nulle.* Montrer que pour tout endomorphisme u de E tel que $\mathrm{Tr}(u) = 0$, il existe deux endomorphismes v, w de E tels que $u = vw - wv$. (Montrer qu'il y a une base de E telle que la matrice de u par rapport à cette base ait ses termes diagonaux nuls ; prendre alors pour v une quasi-symétrie convenable).

9) Déterminer les éléments du groupe affine $\mathbf{GA}(E)$ qui ne laissent invariant aucun point de E.

10) *Classification des formes bilinéaires symétriques.* Soient E, E′ deux espaces vectoriels à 2 dimensions, Φ (resp. Φ') une forme bilinéaire sur E × E (resp. E′ × E′) ; on dit que Φ et Φ' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme u de E sur E′ tel que l'on ait $\Phi(x, y) = \Phi'(u(x), u(y))$. Il revient au même de dire qu'il y a une base de E et une base de E′ relativement auxquelles Φ et Φ' ont la *même* matrice.

Soit Φ une forme bilinéaire sur E × E. L'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que l'on ait $\Phi(x, y) = 0$ pour *tout* $y \in \mathrm{E}$ est un sous-espace vectoriel N de E ; si $\mathrm{N} \neq \{0\}$, on dit que Φ est *dégénérée.* Pour que Φ soit non dégénérée, il faut et il suffit que sa matrice (par rapport à une base quelconque) soit inversible. Montrer que si Φ est symétrique et dégénérée, il y a une base de E relativement à laquelle $M(\Phi)$ a l'une des trois formes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si Φ n'est pas dégénérée, montrer qu'il a une base de E relativement à laquelle $M(\Phi)$ est l'une des trois matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui sont dites respectivement avoir pour *signatures* (1, 1), (2, 0), (0, 2) ; montrer que les formes bilinéaires correspondant à deux de ces matrices n'ayant pas même signature ne sont *pas* équivalentes (considérer la forme quadratique $\Phi(x, x)$).

§ 3. Orientation

(4.3.1) Rappelons (4.2.1) que l'espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathrm{E}, \mathrm{E}\,;\mathbf{R})$ des *formes bilinéaires alternées* sur E × E est une *droite vectorielle,* et est donc réunion de $\{0\}$ et de deux *demi-droites vectorielles ouvertes* $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A}''$ (3.3.3). On dit que $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ sont les *orientations* de E, et que les couples $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{A}'')$ sont les *plans vectoriels orientés* ayant E pour espace vectoriel *sous-jacent.*

Soit $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$ un plan vectoriel orienté, et soit Ψ une forme bilinéaire alternée appartenant à $\mathscr{A}'$. On dit qu'un *couple* (a, b) de vecteurs linéairement indépendants de E (formant donc une *base* de E (4.1.4)) est *direct* ou *positif* (resp. *rétrograde* ou *négatif*) dans le plan orienté $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$ si l'on a $\Psi(a, b) > 0$ (resp. $\Psi(a, b) < 0$). Cette définition ne dépend pas du choix de Ψ dans $\mathscr{A}'$, puisque tout autre élément de $\mathscr{A}'$ est de la forme $\alpha\Psi$ avec $\alpha > 0$, par définition (3.3.3). Si le couple (a, b) est direct dans $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$, il en est de même du couple $(-a, -b)$; le couple (b, a) est rétrograde dans le plan orienté $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$, et le couple (a, b) est rétrograde dans le plan orienté $(\mathrm{E}, \mathscr{A}'')$ dont l'orientation est *opposée* (3.3.3) à celle de $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$.

Soient Δ_1, Δ_2 deux demi-droites vectorielles, $a_i \neq 0$ un vecteur de Δ_i pour $i = 1, 2$; on dit que dans le plan orienté $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$ le *couple* (Δ_1, Δ_2) *est direct* (resp. *rétrograde*) si le couple (a_1, a_2) est direct (resp. rétrograde) ; cela ne dépend pas du choix des vecteurs $\neq 0$ dans Δ_1 et Δ_2, puisque tout autre vecteur $\neq 0$ de Δ_1 (par exemple) est de la forme λa_1 *avec* $\lambda > 0$.

(4.3.2) Soit u un automorphisme de E ; rappelons que pour toute forme bilinéaire alternée Ψ sur $E \times E$, on a $\Psi(u(x), u(y)) = \det(u) . \Psi(x, y)$ (4.2.6.1). Si $\Psi \in \mathscr{A}'$, la forme bilinéaire alternée $(x, y) \to \Psi(u(x), u(y))$ (dite *transformée* de Ψ par u) appartient donc à $\mathscr{A}'$ si $\det(u) > 0$, à $\mathscr{A}''$ si $\det(u) < 0$; autrement dit les automorphismes u de E qui *laissent invariante* l'orientation $\mathscr{A}'$ (ou $\mathscr{A}''$) de E sont ceux tels que $\det(u) > 0$; on dit encore que ce sont les *automorphismes du plan orienté* $(E, \mathscr{A}')$ (ou $(E, \mathscr{A}'')$) ; ils forment un sous-groupe distingué $\mathbf{GL}^+(E)$ de $\mathbf{GL}(E)$. Si un couple (a, b) de vecteurs est direct pour une orientation sur E, alors, pour la même orientation, le couple $(u(a), u(b))$ est direct si $\det(u) > 0$ et est rétrograde si $\det(u) < 0$.

(4.3.3) Dans ce qui suit, nous supposerons *choisie une fois pour toutes une orientation* sur E et une forme bilinéaire alternée Ψ appartenant à cette orientation. Etant donné un vecteur $a \neq 0$, la relation $\Psi(a, x) = 0$ est une *équation* de la droite D_{0a} ; les vecteurs b tels que le couple (a, b) soit direct forment alors un des *demi-plans ouverts* déterminés par D_{0a}, et les vecteurs b tels que le couple (a, b) soit rétrograde forment l'autre *demi-plan ouvert* (3.3.7).

(4.3.4) Soient $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ trois demi-droites vectorielles (toutes trois ouvertes ou toutes trois fermées) dans E, et soit $a_i \neq 0$ un vecteur de Δ_i pour $i = 0, 1, 2$. Nous dirons que *la suite* $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$ *est directe* si *deux* au moins des trois nombres

$$\Psi(a_0, a_1), \qquad \Psi(a_1, a_2), \qquad \Psi(a_2, a_0)$$

sont > 0. Cette relation ne dépend évidemment pas des vecteurs choisis sur les demi-droites Δ_i, tout autre vecteur $\neq 0$ sur Δ_i étant de la forme λa_i avec $\lambda > 0$. Si la suite $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$ est directe, les trois demi-droites Δ_i sont *distinctes*, car si l'on avait par exemple $\Delta_1 = \Delta_2$ on aurait $\Psi(a_1, a_2) = 0$ et $\Psi(a_2, a_0) = -\Psi(a_0, a_1)$. Si la suite $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$ est directe, il en est de même des suites qu'on en déduit par permutation circulaire, $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_0)$ et $(\Delta_2, \Delta_0, \Delta_1)$; par contre les suites $(\Delta_0, \Delta_2, \Delta_1)$, $(\Delta_2, \Delta_1, \Delta_0)$, $(\Delta_1, \Delta_0, \Delta_2)$ ne sont pas directes.

(4.3.5) Soient Δ_1, Δ_2 deux demi-droites vectorielles *ouvertes* dans E. On appelle *secteur angulaire ouvert d'origine* Δ_1 *et d'extrémité* Δ_2 et on note $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$ la *réunion* des demi-droites vectorielles ouvertes Δ telles que la suite $(\Delta_1, \Delta, \Delta_2)$ soit *directe* ; cet ensemble est donc vide si $\Delta_1 = \Delta_2$. Si $\Delta_2 = -\Delta_1$, le secteur angulaire ouvert $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$ est (avec les notations de (4.3.4)) l'ensemble des vecteurs x tels que $\Phi(a_1, x) > 0$, autrement dit un des *demi-plans ouverts* déterminés par la droite D contenant Δ_1 et Δ_2 ; le secteur angulaire $S^\circ(\Delta_2, \Delta_1)$ est alors l'*autre* demi-plan ouvert déterminé par D. Supposons enfin que Δ_2 soit distincte de Δ_1 et de $-\Delta_1$, de sorte que $\Psi(a_1, a_2) \neq 0$. Si $\Psi(a_1, a_2) > 0$, on dit que $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$ est un secteur angulaire *saillant* ; il résulte de (4.3.4) que $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$ est alors l'ensemble des x tels que l'on ait *à la fois* $\Psi(a_1, x) > 0$ et $\Psi(a_2, x) < 0$. Autrement dit un secteur angulaire ouvert saillant est l'*intersection de deux demi-plans ouverts* déterminés par deux droites distinctes. Si au contraire $\Psi(a_1, a_2) < 0$, on dit que $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$ est un secteur angulaire *rentrant* : c'est alors l'ensemble des x tels que l'on ait *l'une au moins* des relations $\Psi(a_1, x) > 0$, $\Psi(a_2, x) < 0$. Autrement dit, un secteur angulaire ouvert rentrant est la *réunion de deux demi-plans ouverts* déterminés par deux droites distinctes.

Lorsque $\Delta_2 = -\Delta_1$, on dit aussi parfois que les deux secteurs angulaires $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$ et $S^\circ(\Delta_2, \Delta_1)$ sont *plats.*

Dans tous les cas où $\Delta_2 \neq \Delta_1$, le plan est *réunion* des 5 ensembles

$$S^\circ(\Delta_1, \Delta_2), \quad S^\circ(\Delta_2, \Delta_1), \quad \Delta_1, \Delta_2, \{0\}$$

qui sont *deux à deux sans point commun.*

(4.3.6) Soit Δ_0 une demi-droite vectorielle ouverte, et désignons par $\mathfrak{F}$ l'*ensemble des demi-droites vectorielles ouvertes distinctes de* Δ_0. Considérons, entre deux éléments Δ_1, Δ_2 de $\mathfrak{F}$, la relation $R(\Delta_1, \Delta_2)$: « la suite $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$ est directe, ou $\Delta_1 = \Delta_2$ ». Nous nous proposons de montrer que $R(\Delta_1, \Delta_2)$ est une *relation d'ordre total* (1.11) dans l'ensemble $\mathfrak{F}$. Il est clair que $R(\Delta_1, \Delta_1)$ est vraie, que l'on a toujours l'*une* au moins des deux relations $R(\Delta_1, \Delta_2)$, $R(\Delta_2, \Delta_1)$, et que l'on ne peut avoir ces deux relations *à la fois* que si $\Delta_2 = \Delta_1$, en vertu de (4.3.4). Il reste à montrer que si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont trois demi-droites ouvertes appartenant à $\mathfrak{F}$, telles que l'on ait les deux relations $R(\Delta_1, \Delta_2)$ et $R(\Delta_2, \Delta_3)$, et qui sont deux à deux distinctes, alors on a aussi $R(\Delta_1, \Delta_3)$. Désignons par a_i un vecteur $\neq 0$ sur Δ_i pour $i = 0, 1, 2, 3$, et posons $\alpha_{ij} = \Psi(a_i, a_j)$, de sorte que $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$. Soit b un vecteur de E tel que $\Psi(a_0, b) = 1$, de sorte que $\{a_0, b\}$ est une base de E, et posons

$$a_i = \lambda_i a_0 + \mu_i b \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ ;}$$

on a alors

$$\alpha_{0i} = \mu_i \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

$$\alpha_{ij} = \lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i \qquad \text{pour } i, j \text{ égaux à } 1, 2 \text{ ou } 3$$

d'où l'on déduit sans peine l'identité

(4.3.6.1) $$\alpha_{01}\alpha_{23} + \alpha_{02}\alpha_{31} + \alpha_{03}\alpha_{12} = 0.$$

Cela étant, distinguons plusieurs cas :

1° Supposons d'abord $\alpha_{01} \leqslant 0$. Comme la suite $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$ est directe, on a alors nécessairement $\alpha_{12} > 0$ et $\alpha_{20} > 0$, d'où $\alpha_{02} < 0$. Comme $\alpha_{02} < 0$ et que la suite $(\Delta_0, \Delta_2, \Delta_3)$ est directe, on a $\alpha_{23} > 0$ et $\alpha_{30} > 0$; de ces relations et de (4.3.6.1) on déduit alors $\alpha_{20}\alpha_{13} = -\alpha_{01}\alpha_{23} - \alpha_{03}\alpha_{12} > 0$, et comme $\alpha_{20} > 0$, on a $\alpha_{13} > 0$, ce qui prouve la relation $R(\Delta_1, \Delta_3)$ dans ce cas.

2° Supposons $\alpha_{01} > 0$ et $\alpha_{30} \leqslant 0$. Comme la suite $(\Delta_0, \Delta_2, \Delta_3)$ est directe, on a nécessairement $\alpha_{02} > 0$ et $\alpha_{23} > 0$. Comme $\alpha_{20} < 0$ et que la suite $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$ est directe, on a nécessairement $\alpha_{12} > 0$; de ces relations et de (4.3.6.1), on déduit encore $\alpha_{13} > 0$.

3° Supposons enfin $\alpha_{01} > 0$ et $\alpha_{30} > 0$; alors on a $R(\Delta_1, \Delta_3)$ par définition.

(4.3.7) Le résultat précédent permet d'interpréter d'une autre manière les secteurs angulaires. Soient Δ_1, Δ_2 deux demi-droites vectorielles ouvertes distinctes, et soit Δ_0 une demi-droite telle que la suite $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$ soit *directe* ; autrement dit, Δ_0 est contenue dans le secteur angulaire $S^\circ(\Delta_2, \Delta_1)$. Dans l'ensemble $\mathfrak{F}$ des demi-droites ouvertes distinctes de Δ_0, on a alors entre deux demi-droites Δ', Δ'' la relation d'ordre définie dans (4.3.6), que nous écrirons $\Delta' \leqslant \Delta''$. Dans ces conditions *le secteur angulaire* $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$ *est la réunion des demi-droites* Δ_3 *de* $\mathfrak{F}$ *vérifiant les deux relations*

(4.3.7.1)
$$\Delta_1 < \Delta_3 < \Delta_2$$

(autrement dit, les demi-droites ouvertes contenues dans $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$ forment l'« intervalle ouvert » d'origine Δ_1 et d'extrémité Δ_2 pour la relation d'ordre introduite, intervalle qui ne dépend donc pas du choix de Δ_0 dans $S^\circ(\Delta_2, \Delta_1)$).

Pour abréger, notons (ijk) la relation : « la suite $(\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k)$ est directe » pour tous les choix possibles de i, j, k deux à deux distincts parmi les nombres 0, 1, 2, 3. Si l'on revient aux définitions, on voit que ce qu'il s'agit de prouver est l'*équivalence logique*

(4.3.7.2)
$$\text{« (012) et (132) »} \Leftrightarrow \text{« (013) et (032) »}.$$

Or, (012) est équivalente à (120) par (4.3.4), et « (120) et (132) » entraîne (130) par (4.3.6), donc entraîne (013) ; de même « (012) et (132) » est équivalente à « (201) et (213) », donc entraîne (203) et par suite (032). Cela prouve que le membre de gauche de (4.3.7.2) entraîne le membre de droite. En sens inverse, « (013) et (032) » entraîne (012) par (4.3.6) ; d'autre part, « (013) et (032) » est équivalente à « (301) et (320) », donc entraîne (321) par (4.3.6), et aussi par suite (132).

(4.3.8) Soient maintenant Δ_1, Δ_2 deux demi-droites vectorielles *fermées* dans E ; on appelle *secteur angulaire fermé d'origine* Δ_1 *et d'extrémité* Δ_2 et on note $S(\Delta_1, \Delta_2)$ la *réunion* des demi-droites vectorielles fermées Δ telles que l'on ait $\Delta = \Delta_1$, ou $\Delta = \Delta_2$, ou que la suite $(\Delta_1, \Delta, \Delta_2)$ soit *directe*. Soient Δ_1^0, Δ_2^0 les demi-droites *ouvertes* contenues respectivement dans Δ_1 et Δ_2 ; il résulte aussitôt de la définition précédente que $S(\Delta_1, \Delta_2)$ est *réunion de* $S^\circ(\Delta_1^0, \Delta_2^0)$, *de* Δ_1 *et de* Δ_2. Si l'on définit entre demi-droites fermées la relation $R(\Delta_1, \Delta_2)$ comme dans (4.3.6), on voit aussitôt qu'elle est *équivalente* à $R(\Delta_1^0, \Delta_2^0)$ et est donc une *relation d'ordre total* dans l'ensemble des demi-droites fermées distinctes de Δ_0. Si l'on prend la demi-droite fermée Δ_0 contenue dans $S(\Delta_2, \Delta_1)$ et distincte de Δ_1 et Δ_2, le résultat de (4.3.7) montre que le secteur angulaire $S(\Delta_1, \Delta_2)$ est la réunion des demi-droites fermées Δ_3 vérifiant les deux relations

(4.3.8.1) $$\Delta_1 \leqslant \Delta_3 \leqslant \Delta_2$$

(« intervalle fermé »).

On dit que le secteur angulaire fermé $S(\Delta_1, \Delta_2)$ est *plat* (resp. *saillant*, resp. *rentrant*) s'il en est ainsi du secteur angulaire ouvert $S^\circ(\Delta_1^0, \Delta_2^0)$. Un secteur angulaire fermé *plat* est donc un *demi-plan fermé* ; un secteur angulaire fermé *saillant* est l'*intersection* de deux demi-plans fermés déterminés par deux droites distinctes ; un secteur angulaire fermé *rentrant* est la *réunion* de deux demi-plans fermés déterminés par deux droites distinctes. Comme un demi-plan fermé contient exactement *une* droite vectorielle (savoir celle qui le détermine) et que cette droite n'est contenue dans aucun demi-plan fermé autres que ceux qu'elle détermine, on a encore les équivalences suivantes pour un secteur angulaire fermé $S = S(\Delta_1, \Delta_2)$:

S est saillant $\Leftrightarrow$ S ne contient *aucune* droite vectorielle ;

S est plat $\Leftrightarrow$ S contient *une* droite vectorielle et *une seule* ;

S est rentrant $\Leftrightarrow$ S contient *au moins deux* droites vectorielles distinctes.

(4.3.9) Notons enfin que les secteurs angulaires (ouverts ou fermés) définis dans ce paragraphe sont encore appelés *secteurs angulaires de sommet* 0 ; si S est un tel ensemble, tout translaté $a + S$ s'appelle secteur angulaire *de sommet a*. On dit que $a + S$ est respectivement ouvert, fermé, plat, saillant, rentrant, si S a la propriété correspondante ; l'origine et l'extrémité de $a + S$ sont par définition les translatées respectives de l'origine et de l'extrémité de S.

Thèmes d'exercices

1) *Propriétés de transitivité.* Le groupe **GL**(E) (et *a fortiori* tous ses sous-groupes) opèrent dans l'ensemble des *triplets de demi-droites vectorielles ouvertes deux à deux distinctes* $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$. Montrer que dans cet ensemble il y a 7 classes d'intransitivité pour **GL**(E), et 14 classes d'intransitivité pour $\mathbf{GL}^+(E)$ ou **SL**(E). (Considérer le sous-groupe laissant invariantes une ou deux demi-droites d'un triplet).

Le groupe **GL**(E) opère aussi dans l'ensemble des *secteurs angulaires fermés*. Montrer que dans cet ensemble il y a 4 classes d'intransitivité pour **GL**(E) ou **SL**(E), formées respectivement des secteurs réduits à une demi-droite, des secteurs plats, des secteurs saillants et des secteurs rentrants.

On a vu (section (4.1), exercice 6) que le groupe **GL**(E) opère transitivement dans l'ensemble des *triplets de droites deux à deux distinctes* (D_1, D_2, D_3). Montrer par contre qu'il y a dans cet ensemble 2 classes d'intransitivité pour $\mathbf{GL}^+(E)$ ou **SL**(E) ; l'une de ces classes est caractérisée par le fait qu'il existe dans chaque droite D_i un vecteur a_i, tels que les 3 nombres $\Psi(a_1, a_2)$, $\Psi(a_2, a_3)$, $\Psi(a_3, a_1)$ soient > 0.

2) *Propriétés de conjugaison.* Pour tout automorphisme $u \in \mathbf{GL}(E)$, on considère la *forme quadratique* $x \to \Psi(x, u(x))$ sur E (section (3.2), exerc. 8). Montrer que pour tout automorphisme $v \in \mathbf{GL}^+(E)$, les formes bilinéaires symétriques associées aux formes quadratiques $\Psi(x, u(x))$ et $\Psi(x, v(u(v^{-1}(x))))$ (*loc. cit.*) sont *équivalentes* (section (4.2), exercice 10). En déduire que, dans l'ensemble des *transvections* $\neq 1_E$ (section (3.3),

exerc. 6) il y a *deux* classes d'éléments conjugués pour $\mathbf{GL}^+(\mathrm{E})$ ou pour $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$, c'est-à-dire que pour deux transvections t, t' d'une même classe, il existe $v \in \mathbf{GL}^+(\mathrm{E})$ tel que $t' = vtv^{-1}$, tandis qu'il n'y a pas d'automorphisme $v \in \mathbf{GL}^+(\mathrm{E})$ ayant cette propriété si t' et t ne sont pas dans la même classe (en d'autres termes, pour le groupe $\mathbf{GL}^+(\mathrm{E})$ opérant dans l'ensemble des transvections $\neq 1_{\mathrm{E}}$ par l'application $t \to vtv^{-1}$, il y a deux classes d'intransitivité). Comparer à la section (4.2), exerc. 7. Montrer que si $t \neq 1_{\mathrm{E}}$ est une transvection, t et t^n sont dans la même classe pour $n > 0$, dans deux classes différentes si $n < 0$. En déduire que toute transvection t peut s'écrire comme commutateur $uvu^{-1}v^{-1}$ de *deux éléments de* $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ (noter que $t = t^2 . t^{-1}$).

Dans l'ensemble des automorphismes de E ayant un polynôme caractéristique donné de la forme $(\alpha - \lambda)^2$, il y a *trois* classes d'intransitivité pour le groupe $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ (ou $\mathbf{GL}^+(\mathrm{E})$).

3) Montrer que si Φ, Φ' sont deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, ayant même signature (section (4.2), exerc. 10), il existe un $u \in \mathbf{SL}(\mathrm{E})$ tel que $\Phi(x, y) = \Phi'(u(x), u(y))$.

4) Montrer que dans l'ensemble des quadruplets de droites vectorielles $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{D}_4)$ ayant un birapport donné (section (4.1), exerc. 10), il y a deux classes d'intransitivité pour le groupe $\mathbf{GL}^+(\mathrm{E})$ (ou le groupe $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$).

CHAPITRE V

Géométrie euclidienne plane

(5.0) Considérons un espace vectoriel E pour lequel on s'est donné une application $(x, y) \to (x|y)$ de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant les axiomes (E 1) à (E 4) du chap. II ; les axiomes (E 1), (E 2) et (E 3) expriment simplement que $(x, y) \to (x|y)$ est une *forme bilinéaire symétrique* sur $E \times E$ (3.2.14) ; si l'on convient de dire qu'une telle forme Φ est *positive non dégénérée* lorsqu'on a $\Phi(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ dans E, l'axiome (E4) s'interprète donc en disant que la forme $(x|y)$ est positive non dégénérée.

On peut montrer que sur tout espace vectoriel il y a des formes bilinéaires symétriques positives non dégénérées ; c'est immédiat en tout cas pour les espaces à 2 dimensions, car si $\{a_1, a_2\}$ est une base d'un tel espace E, il suffit de prendre $\Phi(x, y) = \alpha_1\xi_1\eta_1 + \alpha_2\xi_2\eta_2$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ (pour $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2, y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$), comme on le vérifie aussitôt (1.23) ; plus généralement, si Φ est une telle forme sur un espace vectoriel E, et u un *automorphisme* de l'espace E, l'application $(x, y) \to \Phi(u(x), u(y))$ est encore bilinéaire, symétrique, et positive non dégénérée (cette dernière propriété en raison du fait que la relation $u(x) = 0$ équivaut à $x = 0$). (Cf. section (5.2), exerc. 3 pour une réciproque).

Se donner une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée Φ sur un espace vectoriel E est ce qu'on appelle définir une *structure d'espace euclidien* sur E. A une telle structure sont attachés un certain nombre de notions et de théorèmes ; au § 1 nous exposerons ceux qui *ne dépendent pas* de l'axiome (D_2) ou (D_3) du chap. II, aux §§ suivants ceux qui sont particuliers aux espaces euclidiens à 2 dimensions. Il se trouve que beaucoup des objets et relations définis ne changent pas lorsque l'on remplace la forme Φ par une forme *proportionnelle* $\lambda\Phi$ (avec $\lambda > 0$). Par contre, deux formes bilinéaires symétriques positives non dégénérées *non proportionnelles* Φ, Φ' sur un même espace vectoriel E donnent naissance à *deux* structures d'espace euclidien sur E pour lesquelles les objets correspondants définis dans ce chapitre (par exemple les notions d'orthogonalité ou de symétrie) ne sont pas du tout les mêmes ; l'exemple donné ci-dessus montre que, déjà sur un espace vectoriel à 2 dimensions, il y a une *infinité* de structures *distinctes* d'espace euclidien, qu'il faut donc bien se garder de confondre.

Il se trouve qu'avec une bonne approximation, on rend compte de beaucoup de propriétés physiques de l'univers où nous vivons en lui attribuant (au voisinage d'un point) une structure d'*espace euclidien à 3 dimensions ayant ce point pour origine*, dans lequel la forme bilinéaire $(x|y)$ est *bien déterminée (par l'expérience) à un facteur près* (le choix de ce facteur est ce qu'on appelle aussi « choix d'une unité de longueur ») ; cela explique en partie l'intérêt de l'étude des espaces euclidiens, mais il faut bien se rendre compte que, du point de vue mathématique, lorsqu'on considère un espace vectoriel E, *il n'y a pas* de forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée *privilégiée* sur cet espace.

§ 1. Longueurs ; orthogonalité ; isométries

(5.1.0) Dans tout ce paragraphe, on suppose donnés un espace vectoriel E non réduit à 0 et une structure d'espace euclidien sur E ; on dit que $(x|y)$ est le *produit scalaire* des vecteurs x et y. Il est clair que si F est un *sous-espace vectoriel* de E, F est un *espace euclidien* pour la restriction de $(x|y)$ à $F \times F$. En particulier, sur toute *droite vectorielle* D, la restriction de $(x|y)$ à $D \times D$ définit une structure d'espace euclidien sur D ; si $a \neq 0$ est un vecteur de D, on a $x = \xi a, y = \eta a$ et $(x|y) = \alpha\xi\eta$, où $\alpha = (a|a) > 0$.

(5.1.1) Etant donné un vecteur $x \in E$, le nombre $(x|x)$ est $\geqslant 0$ en vertu de (E 4) ; le nombre $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ (1.31) est appelé la *longueur* (ou *norme euclidienne*) du vecteur x. Comme $\|0\| = 0$ (3.2.12), le *seul* vecteur de longueur 0 est l'origine de E d'après (E 4). Si a, b sont deux points de E, on appelle *longueur du segment ab*, ou *distance de a à b*, et l'on note $d(a, b)$ le nombre $\|a - b\|$; on a donc $\|x\| = d(x, 0)$. Il résulte aussitôt de ces définitions que la relation $d(a, b) = 0$ *équivaut* à $b = a$, et que l'on a

(5.1.1.1) $$d(b, a) = d(a, b)$$

(5.1.1.2) $$d(a + c, b + c) = d(a, b)$$

(5.1.1.3) $$d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b) \text{ (et en particulier } \|\lambda x\| = |\lambda| \, . \, \|x\|).$$

La propriété (5.1.1.2) s'exprime en disant que la longueur d'un segment est *invariante par translation.*

On dit qu'un vecteur a est *unitaire* s'il est de longueur 1, autrement dit si $\|a\| = 1$. Pour tout vecteur $x \neq 0$, il existe *un vecteur unitaire z et un seul* tel que l'on ait $x = \rho z$ *avec* $\rho > 0$; en effet, cette relation donne, par (5.1.1.3), $\|x\| = \rho\|z\| = \rho$, puis $z = \rho^{-1}x = \|x\|^{-1}x$.

Le fait que $(x|y)$ est une forme bilinéaire donne en particulier

(5.1.1.4) $$\|\lambda x + \mu y\|^2 = (\lambda x + \mu y|\lambda x + \mu y) = \lambda^2\|x\|^2 + \mu^2\|y\|^2 + 2\lambda\mu(x|y)$$

autrement dit, la *longueur* du vecteur $\lambda x + \mu y$ s'exprime à l'aide de λ, μ, des *longueurs* $\|x\|$ et $\|y\|$ et du *produit scalaire* $(x|y)$.

Inversement, cette formule permet d'exprimer le produit scalaire *à l'aide de la norme*, car elle donne

(5.1.1.5) $$(x|y) = \tfrac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

(5.1.2) (*Inégalité de Cauchy–Schwarz*) *Quels que soient les vecteurs x, y de* E, *on a*

(5.1.2.1) $$|(x|y)| \leqslant \|x\| \,.\, \|y\|.$$

En outre les deux membres ne sont égaux que lorsque x et y sont linéairement dépendants.

Le premier membre de (5.1.1.4) est $\geqslant 0$ et ne peut être nul que si $\lambda x + \mu y = 0$; cela donne l'inégalité

(5.1.2.2) $$(\lambda\|x\| + \mu\|y\|)^2 + 2\lambda\mu((x|y) - \|x\| \,.\, \|y\|) \geqslant 0.$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, il est clair que les deux membres de (5.1.2.1) sont égaux ; dans le cas contraire, en faisant $\lambda = \|y\|$, $\mu = -\|x\|$ dans (5.1.2.2) il vient

(5.1.2.3) $$2\|x\| \,.\, \|y\|(\|x\| \,.\, \|y\| - (x|y)) \geqslant 0$$

c'est-à-dire $(x|y) \leqslant \|x\| \,.\, \|y\|$; remplaçant y par $-y$, on en déduit $(x|y) \geqslant -\|x\| \,.\, \|y\|$, ce qui donne (5.1.2.1). Il est clair que si $y = \alpha x$, les deux membres de (5.1.2.1) sont égaux ; réciproquement, si x et y sont linéairement indépendants, le premier membre de (5.1.2.2) est >0 lorsque λ et μ ne sont pas tous deux nuls (E 4) ; donc on peut dans (5.1.2.3) remplacer le signe $\geqslant$ par $>$, et de même dans l'inégalité obtenue en remplaçant y par $-y$; ce qui achève la démonstration.

(5.1.3) (*Inégalité de Minkowski*) *Quels que soient les vecteurs x, y, on a*

(5.1.3.1) $$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

En outre les deux membres ne sont égaux que lorsque $x = 0$, ou $y = 0$, ou $x \neq 0$ et $y = \alpha x$ avec $\alpha \geqslant 0$.

Appliquant en effet la relation (5.1.1.4) avec $\lambda = \mu = 1$ et l'inégalité $(x|y) \leqslant \|x\| \,.\, \|y\|$, il vient

(5.1.3.2) $$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \,.\, \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

d'où (5.1.3.1) en vertu de (1.29) ; en outre on ne peut avoir égalité dans (5.1.3.2) que si $(x|y) = \|x\| \,.\, \|y\|$. En vertu de (5.1.2), cela entraîne, soit $x = 0$, soit $y = 0$, soit $x \neq 0$ et $y = \alpha x$; mais pour $y = \alpha x$ et $x \neq 0$, on a

$(x|y) = \alpha\|x\|^2$ et $\|x\| \,.\, \|y\| = |\alpha| \,.\, \|x\|^2$, donc ces deux nombres ne peuvent être égaux que si $\alpha = |\alpha|$, c'est-à-dire $\alpha \geqslant 0$.

La relation (5.1.3.1) donne, pour trois points a, b, c dans E

(5.1.3.3) $$d(a, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)$$

en appliquant (5.1.3.1) à $x = b - a$ et $y = c - b$ (*inégalité triangulaire*) ; en outre les deux membres de (5.1.3.3) ne peuvent être égaux que si l'on a soit $b = a$, soit $c = b$, soit enfin $b \neq a$ et $c - b = \alpha(b - a)$ avec $\alpha \geqslant 0$, ce qui signifie que le point *c appartient à la demi-droite fermée d'origine b et de vecteur directeur b − a* (3.3.3).

Si a, b, c, d sont quatre points de E, on a

$$d(a, d) \leqslant d(a, c) + d(c, d)$$

d'où

$$d(a, d) \leqslant d(a, b) + d(b, c) + d(c, d)$$

et de même pour plus de quatre points. On exprime des inégalités en disant que « le segment ab est *la plus courte ligne brisée* joignant a et b ».

Enfin, quels que soient les points a, b, c, on a

(5.1.3.4) $$d(a, b) \geqslant |d(a, c) - d(b, c)|$$

car la relation (5.1.3.3) s'écrit $d(a, b) \geqslant d(a, c) - d(b, c)$, et en permutant a et b, on a $d(a, b) = d(b, a) \geqslant d(b, c) - d(a, c)$, d'où (5.1.3.4).

(5.1.4) On dit que deux vecteurs x, y sont *orthogonaux* si l'on a $(x|y) = 0$. En vertu de (E 1) il revient au même de dire que x, y sont orthogonaux ou que y, x sont orthogonaux. D'après (E 4) un vecteur n'est *orthogonal à lui-même* que s'il est *nul*. Si x est orthogonal à y et à z, αx est orthogonal à $\beta y + \gamma z$ quels que soient les scalaires α, β, γ.

(5.1.5) (*Théorème de Pythagore*) *Si x, y sont deux vecteurs orthogonaux, on a*

(5.1.5.1) $$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

C'est un cas particulier de (5.1.1.4).

(5.1.6) On dit que deux parties M, N de E sont *orthogonales* si *tout* vecteur $x \in \mathrm{M}$ est orthogonal à *tout* vecteur $y \in \mathrm{N}$; alors $\mathrm{M} \cap \mathrm{N}$ est vide ou réduit à 0 (5.1.4). Etant donnée une partie M de E, l'ensemble de *tous* les vecteurs y orthogonaux à M est un *sous-espace vectoriel* V de E, comme il résulte de (5.1.4). L'ensemble V′ des vecteurs orthogonaux à V contient M (même lorsque M est un sous-espace vectoriel, on peut avoir $\mathrm{V}' \neq \mathrm{M}$).

Supposons que E soit *somme directe* de deux sous-espaces vectoriels *orthogonaux* V, W ; alors W est l'ensemble de *tous* les vecteurs orthogonaux à V. En effet, tout $x \in \mathrm{E}$ s'écrit $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{V}$ et $z \in \mathrm{W}$; si l'on écrit que $(x|y) = 0$, il vient $(y|y) + (y|z) = 0$, et comme par hypothèse $(y|z) = 0$, il reste $(y|y) = 0$, d'où $y = 0$ et $x \in \mathrm{W}$. Les projections $p(x)$ et $q(x)$ d'un point $x \in \mathrm{E}$ sur V et W respectivement (3.2.2) sont alors dites *projections orthogonales* de x sur V et W.

(5.1.7) *Soient* D *une droite vectorielle dans* E, $a \neq 0$ *un vecteur de* D.

(i) *Le sous-espace vectoriel* H *des vecteurs orthogonaux à* D *est un hyperplan vectoriel supplémentaire de* D.

(ii) *Le sous-espace vectoriel des vecteurs orthogonaux à* H *est égal à* D.

(iii) *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *les projections* y, z *de* x *dans* D *et dans* H *respectivement, correspondant à la décomposition de* E *en somme directe* D + H (3.2.2), *sont données par les formules*

$$\textbf{(5.1.7.1)} \qquad y = \frac{(x|a)}{\|a\|^2}\cdot a \qquad z = x - y = x - \frac{(x|a)}{\|a\|^2}\cdot a$$

et l'on a

$$\textbf{(5.1.7.2)} \quad d(x, z) = \|y\| = \frac{|(x|a)|}{\|a\|}, \qquad (d(x, y))^2 = \|z\|^2 = \|x\|^2 - \frac{(x|a)^2}{\|a\|^2}.$$

En outre, pour tout point y' *de* D *distinct de* y *et tout point* z' *de* H *distinct de* z, *on a*

$$\textbf{(5.1.7.3)} \qquad d(x, y') > d(x, y), \qquad d(x, z') > d(x, z).$$

Les points de H sont ceux qui vérifient la relation $(a|x) = 0$; or, l'application $x \to (a|x)$ est une forme linéaire, et comme $(a|a) \neq 0$ elle n'est pas identiquement nulle ; donc H est un *hyperplan vectoriel* d'équation $(a|x) = 0$ (3.3.6) et comme $(a|a) \neq 0$, la droite D n'est pas contenue dans H, donc D et H sont *supplémentaires* ; on a ainsi prouvé (i), et comme D et H sont supplémentaires et orthogonaux, (ii) en résulte par (5.1.6). Pour un $x \in \mathrm{E}$, la projection y de x sur D est l'unique vecteur de la forme ξa tel que $x - \xi a \in \mathrm{H}$, ou encore tel que $(a|x - \xi a) = 0$, ce qui donne $(a|x) = \xi\|a\|^2$ et prouve les formules (5.1.7.1), d'où l'on déduit aussitôt (5.1.7.2). Si $y' \in \mathrm{D}$, les vecteurs $y' - y \in \mathrm{D}$ et $z = x - y \in \mathrm{H}$ sont orthogonaux, donc, par le th. de Pythagore, on a

$$\|x - y'\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y' - y\|^2$$

et la relation $y' \neq y$ entraîne $\|y' - y\|^2 > 0$, ce qui prouve la première inégalité (5.1.7.3) ; la seconde se prouve de même, en observant que $z' - z$ et $y = x - z$ sont orthogonaux.

Les nombres $d(x, y)$ et $d(x, z)$ sont respectivement appelés les *distances* de x à D et de x à H et notés $d(x, \mathrm{D})$ et $d(x, \mathrm{H})$.

On notera que H est l'*unique hyperplan* orthogonal à D, car un tel hyperplan doit contenir H ; de même D est l'*unique droite* orthogonale à H, car une telle droite est nécessairement contenue dans D. On peut donc parler de H comme l'*hyperplan orthogonal* à D et de D comme *la droite orthogonale* à H.

On notera que si on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur E, il peut y avoir dans E des hyperplans qui ne sont orthogonaux à *aucune droite*.

(5.1.8) Soient D, H une droite et un hyperplan dans E (ne passant pas nécessairement par 0) ; si D_0, H_0 sont les *directions* respectives de D et H, on dit que D et H sont *perpendiculaires* si D_0 et H_0 sont *orthogonaux*. Comme D_0 n'est pas contenue dans H_0, D et H ont *un point commun et un seul* (3.3.8). Pour tout $x \in E$, il existe alors *un hyperplan et un seul* H(x) passant par x et perpendiculaire à D et *une droite et une seule* D(x) passant par x et perpendiculaire à H, et H(x) est parallèle à H et D(x) parallèle à D ; en effet, par une translation on est ramené au cas où $D = D_0$ et $H = H_0$, et alors D(x) et H(x) sont simplement les variétés *projetantes* de x dans la décomposition de E en somme directe $D_0 + H_0$ (3.1.14). L'unique point y (resp. z) intersection de D et de H(x) (resp. de H et de D(x)) est encore appelé la *projection orthogonale* de x sur D (resp. H) ; c'est l'*unique* point y (resp. z) de D tel que $x - y$ soit *orthogonal à tous les vecteurs* $y' - y$ *pour* $y' \in D$ (resp. tel que $x - z$ soit *orthogonal à tous les vecteurs* $z' - z$ *pour* $z' \in H$). C'est aussi l'*unique* point de D (resp. H) dont la distance à x est *la plus petite possible* ; $d(x, y)$ (resp. $d(x, z)$) est encore appelé la *distance de* x *à* D (resp. *la distance de* x *à* H) et notée $d(x, D)$ (resp. $d(x, H)$) ; tout ceci résulte aussitôt de (5.1.7) par translation, compte tenu de l'invariance des distances par translation (5.1.1.2).

Soient $b \in D_0$ un vecteur directeur de D, a un point de D ; l'hyperplan H a une équation de la forme

(5.1.8.1) $$(b|x) = \beta$$

puisque $(b|x) = 0$ est une équation de H_0 (3.3.6). La projection orthogonale sur H d'un point $x_0 \in E$ est le point $z_0 = x_0 + \lambda b$ vérifiant (5.1.8.1), ce qui donne $\lambda\|b\|^2 + (b|x_0) = \beta$, et par suite

(5.1.8.2) $$z_0 = x_0 + \frac{\beta - (b|x_0)}{\|b\|^2}.b$$

et comme $d(x_0, H) = \|\lambda b\| = |\lambda| . \|b\|$, il vient

(5.1.8.3) $$d(x_0, H) = \frac{|\beta - (b|x_0)|}{\|b\|}$$

Si y_0 est la projection orthogonale de x_0 sur D, $y_0 - a$ est la projection orthogonale de $x_0 - a$ sur D_0, et les formules (5.1.7.1) et (5.1.7.2) donnent donc

(5.1.8.4) $$y_0 = a + \frac{(x_0 - a|b)}{\|b\|^2}.b$$

(5.1.8.5) $$(d(x_0, D))^2 = \|x_0 - a\|^2 - \frac{(x_0 - a|b)}{\|b\|^2}$$

Soit H′ un hyperplan parallèle à H ; il a donc une équation de la forme

(5.1.8.6) $$(b|x) = \beta'.$$

Pour tout $x \in \mathrm{H}'$, la formule (5.1.8.3) donne $d(x, \mathrm{H}) = |\beta - \beta'|/\|b\|$; ce nombre est indépendant du point $x \in \mathrm{H}'$ choisi ; on dit que c'est la *distance* des hyperplans parallèles H et H′ et on la note $d(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ ou $d(\mathrm{H}', \mathrm{H})$.

De même, soit D′ une droite parallèle à D ; alors, pour tout point $x \in \mathrm{D}'$, le nombre $d(x, \mathrm{D})$ ne dépend pas du point x : on se ramène aussitôt par translation au cas où $a = 0$, $\mathrm{D} = \mathrm{D}_0$ et alors notre assertion résulte de ce que tous les points $x \in \mathrm{D}'$ ont même projection orthogonale sur H_0 ; ce nombre est encore appelé *distance* des droites parallèles D, D′ et noté $d(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ ou $d(\mathrm{D}', \mathrm{D})$.

(5.1.9) Etant donnés un point $a \in \mathrm{E}$ et un nombre $\rho > 0$, l'ensemble des points $x \in \mathrm{E}$ tels que $d(a, x) = \rho$ (resp. $d(a, x) < \rho$, resp. $d(a, x) \leqslant \rho$) est appelé la *sphère de centre a et de rayon ρ* (resp. la *boule ouverte* de centre a et de rayon ρ, resp. la *boule fermée* de centre a et de rayon ρ) ; l'ensemble des points x tels que $d(a, x) > \rho$ (complémentaire de la boule fermée de centre a et de rayon ρ) est encore appelé l'*extérieur* de la boule de centre a et de rayon ρ. Si V est un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble des points $x \in a + \mathrm{V}$ tels que $d(a, x) = \rho$ est l'ensemble $a + \mathrm{S}_0$, où S_0 est la sphère de centre 0 et de rayon ρ *dans* V ; on dit encore que $a + \mathrm{S}_0$ est la *sphère de centre a et de rayon ρ dans la variété linéaire* $a + \mathrm{V}$. On définit de même les *boules* dans $a + \mathrm{V}$. Deux sphères ou boules de même centre sont dites *concentriques.*

Il est clair que dans E, la boule fermée de centre a et de rayon ρ est *réunion* de la boule ouverte et de la sphère de même centre et même rayon. Toute droite (resp. tout hyperplan) passant par a est appelée *diamètre* (resp. *hyperplan diamétral*) d'une sphère ou d'une boule de centre a.

On notera que lorsque E est une *droite* vectorielle et b un vecteur unitaire dans E, la sphère de centre a et de rayon ρ est formée des deux points $a + \rho b$, $a - \rho b$, la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon ρ est formée des points $a + \xi b$ tels que $|\xi| < \rho$ (resp. $|\xi| \leqslant \rho$). Par suite, si on revient au cas général, on voit que l'intersection d'une sphère S de centre a et de rayon ρ et d'un diamètre D de cette sphère est formée de deux points x, x' tels que a soit le *milieu* du segment xx' et que $d(x, x') = 2\rho$. On dit que x, x' sont *diamétralement opposés* dans S, et le segment xx' est aussi appelé un *diamètre* de S (ou des boules de même centre et de même rayon).

La sphère S de centre 0 et de rayon 1 est parfois appelée la *sphère unité* (et de même les boules de centre 0 et de rayon 1 sont dites *boule unité ouverte* et *boule unité fermée*). Comme toute demi-droite vectorielle ouverte ou fermée contient un vecteur unitaire et un seul, il y a une correspondance canonique entre S et l'*ensemble des demi-droites vectorielles ouvertes* (resp. *fermées*). L'application $(\rho, z) \to \rho z$ de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}$ dans E est une *bijection* (dite *canonique*) de l'ensemble produit $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}$ sur le complémentaire $\mathrm{E} - \{0\}$.

(5.1.10) Considérons une sphère S de centre a et de rayon ρ et un hyperplan H ayant une équation de la forme (5.1.8.1). Soit $c = a + \lambda b$ la projection orthogonale de a sur H, de sorte que $\delta = \|c - a\| = |\lambda| . \|b\|$ est la distance de a à H, donnée par la formule (5.1.8.3) où l'on fait $x_0 = a$; tout $x \in \mathrm{H}$ s'écrit donc $c + y$, où y est orthogonal à b. Les points $c + y$ appartenant à l'*intersection* $\mathrm{S} \cap \mathrm{H}$ sont donc ceux tels que

$$\|y + c - a\|^2 = \rho^2$$

et comme y est orthogonal à $c - a$, cela donne par le th. de Pythagore

$$\|y\|^2 = \rho^2 - \delta^2 \tag{5.1.10.1}$$

d'où 3 cas possibles :

1° $\rho < \delta$; l'intersection $\mathrm{S} \cap \mathrm{H}$ est *vide*, H est contenu dans l'*extérieur* de la boule ouverte B de centre a et de rayon ρ.

2° $\rho = \delta$, la seule solution de (5.1.10.1) est $y = 0$, $\mathrm{S} \cap \mathrm{H}$ est réduite au *seul* point c, tous les autres points de H étant extérieurs à B ; on dit alors que l'hyperplan H est *tangent* à S au point c.

3° $\rho > \delta$; alors $\mathrm{S} \cap \mathrm{H}$ est la *sphère de centre c et de rayon* $\sqrt{\rho^2 - \delta^2}$ dans la variété linéaire H ; le même calcul montre que $\mathrm{B} \cap \mathrm{H}$ est la boule ouverte de centre c et de rayon $\sqrt{\rho^2 - \delta^2}$, et que les points de H extérieurs à $\mathrm{B} \cap \mathrm{H}$ sont extérieurs à B.

Soient maintenant V une variété linéaire quelconque ne contenant pas a, b un de ses points, de sorte que si V_0 est la direction de V, on a $\mathrm{V} = b + \mathrm{V}_0$. Soit W la variété linéaire passant par a et de direction le sous-espace vectoriel $\mathbf{R}(b - a) + \mathrm{V}_0 = \mathrm{W}_0$; alors on a $\mathrm{V} \subset \mathrm{W}$ et V est un *hyperplan* (*affine*) *dans* W. D'autre part, *dans* W, $\mathrm{S} \cap \mathrm{W}$ est une sphère de centre a et de rayon ρ ; comme

$$\mathrm{S} \cap \mathrm{V} = (\mathrm{S} \cap \mathrm{W}) \cap \mathrm{V},$$

on voit que l'intersection d'une sphère et d'une variété linéaire est ramenée ainsi au cas de l'intersection d'une sphère et d'un hyperplan. On dira en particulier que V est *tangente* à S si $\mathrm{V} \cap \mathrm{S}$ est réduite à un seul point.

(5.1.11) Proposons-nous maintenant d'étudier l'intersection de *deux sphères* S, S′ ; on peut se borner au cas où elles ne sont pas concentriques, et par une translation on peut supposer que 0 est le centre de l'une d'elles, de sorte qu'elles sont données par les équations

$$\mathrm{S} : \|x\| = \rho \; ; \qquad \mathrm{S}' : \|x - a\| = \rho' \qquad (a \neq 0) \; ; \tag{5.1.11.1}$$

nous poserons $\delta = \|a\|$ (distance des centres). Soit H_0 l'hyperplan vectoriel d'équation $(a|x) = 0$, de sorte que tout $x \in \mathrm{E}$ s'écrit $x = \xi a + y$ avec $y \in \mathrm{H}_0$.

En vertu du th. de Pythagore, les deux équations (5.1.11.1) sont équivalentes à

(5.1.11.2) $$\delta^2\xi^2 + \|y\|^2 = \rho^2, \qquad \delta^2(\xi - 1)^2 + \|y\|^2 = \rho'^2$$

qui, par soustraction, donnent aussitôt

(5.1.11.3) $$\xi = \frac{\rho^2 - \rho'^2 + \delta^2}{2\delta^2}.$$

Pour que le système (5.1.11.2) ait des solutions, il faut et il suffit que l'on ait $\rho^2 \geqslant \delta^2\xi^2$, ou encore $-\rho \leqslant \delta\xi \leqslant \rho$, ce qui, par (5.1.11.3) donne

(5.1.11.4) $$|\rho - \delta| \leqslant \rho' \leqslant \rho + \delta.$$

Lorsqu'il y a égalité dans une des deux relations (5.1.11.4), la seule solution de (5.1.11.2) est $y = 0$, on dit que S et S′ sont *tangentes* ; si $|\rho - \delta| < \rho' < \rho + \delta$, $S \cap S'$ est la *sphère* de centre ξa et de rayon $\sqrt{\rho^2 - \delta^2\xi^2}$ (ξ étant donné par (5.1.11.3)) dans l'hyperplan $a + H_0$ parallèle à H_0.

(5.1.12) On dit qu'un endomorphisme u de l'espace vectoriel E est une *similitude linéaire* (ou simplement une *similitude*) s'il existe un scalaire μ tel que, quels que soient x, y dans E, on ait

(5.1.12.1) $$(u(x)|u(y)) = \mu(x|y).$$

Il résulte aussitôt de (5.1.1.5) que cette condition *équivaut* à la relation

(5.1.12.2) $$\|u(x)\|^2 = \mu\|x\|^2$$

pour tout $x \in E$; comme il y a des $x \neq 0$ dans E, le nombre μ est bien déterminé par u, on le note $\mu(u)$ et on l'appelle le *multiplicateur* de u ; en outre la relation (5.1.12.2) prouve que l'on a nécessairement $\mu \geqslant 0$.

Il résulte de (5.1.12.1) que si x et y sont deux vecteurs *orthogonaux*, alors les vecteurs $u(x)$ et $u(y)$ sont *orthogonaux*.

Il résulte de (5.1.12.2) que si $\mu(u) > 0$, la relation $u(x) = 0$ entraîne $x = 0$, autrement dit u est un endomorphisme *injectif* (3.2.4). Au contraire si $\mu(u) = 0$, on a $u = 0$.

Si u et v sont deux similitudes, et si l'on pose $w = v \circ u$, on a

$$(w(x)|w(y)) = \mu(v)(u(x)|u(y)) = \mu(v)\mu(u)(x|y)$$

et si u est *bijective*, on a

$$(x|y) = \mu(u)(u^{-1}(x)|u^{-1}(y))$$

donc $v \circ u$ est une similitude, ainsi que u^{-1} si u est bijective, et l'on a

(5.1.12.3) $$\mu(v \circ u) = \mu(v)\mu(u) \quad \text{et} \quad \mu(u^{-1}) = (\mu(u))^{-1} \text{ si } u \text{ est bijective.}$$

On voit donc que l'ensemble des *similitudes bijectives* est un *sous-groupe* **GO**(E) du groupe linéaire **GL**(E) (dit *groupe des similitudes linéaires* de l'espace euclidien E) ; l'application $u \to \mu(u)$ est un homomorphisme de **GO**(E) dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$. Le *noyau* de cet homomorphisme est le sous-groupe distingué de **GO**(E) formé des similitudes bijectives de multiplicateur 1 ; on le note **O**(E) et on dit que c'est le *groupe orthogonal* de l'espace euclidien E ; ses éléments sont appelés des *transformations orthogonales* ou encore des *isométries linéaires* de E ; elles sont donc caractérisées comme les bijections linéaires vérifiant l'une ou l'autre des conditions équivalentes

(5.1.12.4) $$(u(x)|u(y)) = (x|y)$$

quels que soient x, y dans E,

(5.1.12.5) $$\|u(x)\| = \|x\|$$

quel que soit $x \in \mathrm{E}$.

Pour toute homothétie h_λ, on a (E 3)

(5.1.12.6) $$(h_\lambda(x)|h_\lambda(y)) = \lambda^2(x|y)$$

autrement dit h_λ est une *similitude* de multiplicateur λ^2. Si maintenant u est une similitude de multiplicateur μ, comme on a $\mu \geqslant 0$, le nombre réel $\lambda = \sqrt{\mu}$ est défini et $\geqslant 0$; si $\lambda \neq 0$, il résulte de (5.1.12.3) que $h_\lambda^{-1}u$ est une *isométrie* ; toute similitude bijective peut donc s'écrire sous la forme $h_\lambda v$, où $\lambda > 0$ et $v \in \mathbf{O}(\mathrm{E})$; en outre cela n'est possible que *d'une seule manière*, car si l'on a
$$h_\lambda v = h_{\lambda'} v'$$
avec v, v' dans **O**(E), $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$, on en tire que h_γ (où $\gamma = \lambda'\lambda^{-1}$) est égal à vv'^{-1}, donc appartient à **O**(E), ce qui signifie que $\gamma^2 = 1$, et comme par hypothèse $\gamma > 0$, cela équivaut à $\gamma = 1$, d'où $\lambda' = \lambda$ et $v' = v$. On exprime encore ce fait en disant que **GO**(E) est *produit direct* de ses sous-groupes distingués $\mathbf{Z}^+$ (groupe des homothéties de rapport >0, isomorphe à $\mathbf{R}_+^*$) et **O**(E).

Lorsque E est une droite vectorielle, *tout* endomorphisme de E est une homothétie, donc une similitude, et **O**(E) se compose de l'identité et de la symétrie -1_E.

Si E et E′ sont deux espaces euclidiens, on dit encore qu'une application linéaire g de E dans E′ est une *isométrie* si l'on a $(g(x)|g(y)) = (x|y)$ quels que soient x, y dans E ; c'est nécessairement une application *injective*. Une isométrie *bijective* g de E sur E′ est encore dite *isomorphisme d'espaces euclidiens* (à ne pas confondre avec un isomorphisme d'*espaces vectoriels*) ; g^{-1} est alors aussi une isométrie bijective. Lorsqu'il existe un tel isomorphisme on dit que E et E′ sont des *espaces euclidiens isomorphes* ; tout théorème démontré dans E et ne faisant intervenir que des notions définies à l'aide des opérations de somme, de produit par un scalaire et de produit scalaire, donne un théorème correspondant dans E′ en considérant les images, par un isomorphisme de E dans E′, des éléments et parties de E qui interviennent dans le théorème considéré.

Si g est une isométrie bijective de E sur E′, il est immédiat que pour toute similitude u de E, gug^{-1} est une similitude de E′ et que $\mu(gug^{-1}) = \mu(u)$.

Dire qu'une bijection g de E sur E′ est un isomorphisme d'espace euclidien équivaut à dire que l'addition, la multiplication par un scalaire, et le produit scalaire dans E′ sont obtenus par *transport de structure* au moyen de g (2.4).

(5.1.13) Proposons-nous de trouver toutes les *involutions* u dans $\mathbf{GO}(E)$ (3.2.11) ; en vertu de (5.1.12.3), on doit avoir $(\mu(u))^2 = 1$, donc $\mu(u) = 1$ puisque $\mu(u) > 0$; les involutions appartiennent donc nécessairement à $\mathbf{O}(E)$. On sait (3.2.11) que E est somme directe des sous-espaces propres $E(1\,;u)$ et $E(-1\,;u)$; en outre, si $x \in E(1\,;u)$ et $y \in E(-1\,;u)$, on a $u(x) = x$, $u(y) = -y$, et la relation (5.1.12.4) donne $(x|y) = -(x|y)$, autrement dit $(x|y) = 0$; les sous-espaces $E(1\,;u)$ et $E(-1\,;u)$ sont donc *orthogonaux*. Inversement, si E est somme directe de deux sous-espaces vectoriels *orthogonaux* V, W et si u est l'involution de $\mathbf{GL}(E)$ telle que $u(x) = x$ dans V et $u(x) = -x$ dans W, on a, pour tout $x = y + z$ avec $y \in V$, $z \in W$,

$$\|u(x)\|^2 = \|u(y) + u(z)\|^2 = \|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$$

d'après le th. de Pythagore, donc $u \in \mathbf{O}(E)$; on a $y = \frac{1}{2}(x + u(x))$, autrement dit la projection y de x sur V est *milieu* du segment d'extrémités $x, u(x)$; on dit que u est la *symétrie orthogonale* (ou simplement *symétrie*) *par rapport à* V ; on notera alors que $-u$ est la *symétrie orthogonale par rapport à* W.

On observera que les seules *droites vectorielles invariantes* par u sont celles qui sont contenues *dans* V ou *dans* W, puisque ces droites sont celles qui contiennent les *vecteurs propres* de u (3.2.10).

Prenons en particulier pour V une droite D ; si $a \neq 0$ est un vecteur de D, W est alors l'hyperplan H d'équation $(a|x) = 0$, et si u est la symétrie par rapport à H, ce qui précède et la seconde formule (5.1.7.1) donnent $\frac{1}{2}(x + u(x)) = x - (x|a)/\|a\|^2 \,.\, a$, d'où la formule

(5.1.13.1)
$$u(x) = x - 2\frac{(x|a)}{(a|a)} \,.\, a.$$

Si $H \neq \{0\}$, la symétrie par rapport à H est l'*unique similitude* $\neq 1_E$ qui *laisse invariants tous les points de* H. En effet, si u est une telle similitude et $x \neq 0$ un point de H, on doit déjà avoir $\|x\|^2 = \|u(x)\|^2 = \mu(u)\|x\|^2$, donc $\mu(u) = 1$; en outre, comme $u(a)$ doit être orthogonal à tous les vecteurs de H, on a nécessairement $u(a) = \lambda a$ (5.1.7) ; écrivant que $\|u(a)\| = \|a\|$, il vient $|\lambda| = 1$, et la solution $\lambda = 1$ donne $u = 1_E$, d'où notre assertion.

(5.1.14) Soit $u = t_a \circ v$ une bijection affine de E sur lui-même, où t_a est la translation de vecteur a et v un élément de $\mathbf{GL}(E)$; on dit que u est une *similitude affine* (ou simplement une *similitude*) si, quels que soient x, y dans E, on a

(5.1.14.1)
$$d(u(x), u(y)) = \lambda \,.\, d(x, y)$$

où λ est un scalaire >0 ; comme les translations conservent les distances, on a $d(u(x), u(y)) = d(v(x), v(y))$, et la condition précédente équivaut à dire que $d(v(x), v(y)) = \lambda . d(x, y)$; comme $v(0) = 0$, cette condition entraîne en particulier $\|v(x)\| = \lambda . \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, et par suite v doit être une *similitude linéaire* de multiplicateur $\lambda^2 \neq 0$. Réciproquement, s'il en est ainsi, on a $\|v(x - y)\| = \lambda . \|x - y\|$, ce qui entraîne (5.1.14.1) ; on dit encore que λ^2 est le *multiplicateur* de la similitude et on le note encore $\mu(u)$, de sorte que $\mu(u) = \mu(v)$.

Il est clair que les similitudes forment un *sous-groupe* $\mathbf{Sm}(\mathrm{E})$ du *groupe affine* $\mathbf{GA}(\mathrm{E})$ et que $u \to \mu(u)$ est un homomorphisme de $\mathbf{Sm}(\mathrm{E})$ dans le groupe $\mathbf{R}_+^*$. Le *noyau* de cet homomorphisme est le sous-groupe distingué de $\mathbf{Sm}(\mathrm{E})$ formé des similitudes de multiplicateur 1, autrement dit des applications affines qui *laissent invariantes les distances* ; on note ce groupe $\mathbf{Is}(\mathrm{E})$ et on dit que c'est le groupe des *isométries affines* (ou simplement *isométries*) de E ; ses éléments sont donc les produits $t_a \circ v$ d'une translation et d'une transformation orthogonale v.

(5.1.15) Proposons-nous de chercher les *involutions* dans $\mathbf{Sm}(\mathrm{E})$, autrement dit les similitudes u telles que $u^2 = 1_{\mathrm{E}}$. Pour une telle application, le point $a = \frac{1}{2}u(0)$ est *invariant*, car on a (3.3.4)

$$u(a) = u(\tfrac{1}{2}(0 + u(0))) = \tfrac{1}{2}(u(0) + u^2(0)) = a.$$

D'autre part, on a $u = t_{2a} \circ v$, où $v \in \mathbf{GO}(\mathrm{E})$, et ce qui précède montre que $v(a) = -a$; si l'on écrit que $u^2(x) = x$, il vient

$$x = u^2(x) = v(u(x)) + 2a = v^2(x) + 2v(a) + 2a = v^2(x)$$

autrement dit v est une *involution* dans $\mathbf{GO}(\mathrm{E})$, et par suite E est somme directe de deux sous-espaces *orthogonaux* V, W et v est la symétrie orthogonale par rapport à V. Comme $u(a + x) = a + v(x)$, u laisse *invariants* les points de la variété linéaire $a + \mathrm{V}$; pour tout $x \in \mathrm{E}$, le point $\frac{1}{2}(x + u(x))$ est l'unique intersection de $a + \mathrm{V}$ et de la variété linéaire $x + \mathrm{W}$ parallèle à W passant par x. On dit que u est la *symétrie* ou *symétrie orthogonale par rapport à la variété linéaire* $a + \mathrm{V}$.

On peut toujours supposer que l'on a pris $a \in \mathrm{W}$ (autrement dit, que a est la *projection orthogonale de* 0 *sur* $a + \mathrm{V}$) et pour tout $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{V}$, $z \in \mathrm{W}$, on a $u(x) = 2a + y - z$.

(5.1.16) Cette dernière formule montre aussitôt que pour tout vecteur $c \in \mathrm{V}$ (i.e. appartenant à la *direction* de $a + \mathrm{V}$), on a $u \circ t_c = t_c \circ u$. D'autre part, si u_1, u_2 sont les symétries par rapport aux deux variétés linéaires de *même* direction, $a_1 + \mathrm{V}$, $a_2 + \mathrm{V}$ (a_1, a_2 étant pris *dans* W) et si l'on pose $u = u_1 u_2$, on a, avec les mêmes notations

$$u(x) = u_1(2a_2 + y - z) = 2a_1 - 2a_2 + y + z = x + 2(a_1 - a_2)$$

autrement dit, $u_1 u_2 = t_{2(a_1 - a_2)}$, *translation* de vecteur $2(a_1 - a_2) \in \mathrm{W}$;

inversement, pour tout vecteur $b \in \mathrm{W}$, $t_b u_1$ est la symétrie par rapport à $(a_1 + \frac{1}{2}b) + \mathrm{V}$ et $u_1 t_b$ la symétrie par rapport à $(a_1 - \frac{1}{2}b) + \mathrm{V}$.

Thèmes d'exercices

1) Soient D une droite vectorielle dans E, H l'hyperplan vectoriel orthogonal à D ; montrer que D est l'intersection des hyperplans vectoriels orthogonaux aux droites vectorielles contenues dans H.

2) Soient a, a' deux points diamétralement opposés d'une sphère. Montrer que pour tout point x de cette sphère, les vecteurs $x - a$ et $x - a'$ sont orthogonaux ; réciproque.

3) Soient a, b, c trois points de E, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre scalaires. Montrer que l'ensemble des points $x \in \mathrm{E}$ vérifiant la relation

$$\alpha\|x - a\|^2 + \beta\|x - b\|^2 + \gamma\|x - c\|^2 = \delta$$

est, soit vide, soit égal à E, soit un hyperplan, soit une sphère, soit réduit à un point ; donner les conditions pour que l'on soit dans chacun de ces 5 cas. Généraliser.

4) *Sphères coorthogonales.* Soit S une sphère de centre c et de rayon ρ. Soient a un point de E, D une droite passant par a et rencontrant S en deux points distincts x_1, x_2 ; montrer que l'on a

$$(x_1 - a|x_2 - a) = (d(a, c))^2 - \rho^2.$$

Si D′ est une droite passant par a et *tangente* à S au point x, on a

$$(d(a, x))^2 = (d(a, c))^2 - \rho^2.$$

On dit que le nombre $(d(a, c))^2 - \rho^2$ est la *puissance* du point a par rapport à S.

Si $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2$ sont deux sphères non concentriques, de centres respectifs c_1, c_2, de rayons respectifs ρ_1, ρ_2, l'ensemble H des points dont les puissances par rapport à S_1 et S_2 sont égales est un hyperplan perpendiculaire à la droite $\mathrm{D}_{c_1 c_2}$ et contenant l'intersection $\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2$; on dit que H est l'*hyperplan radical* de S_1 et S_2.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) La puissance de c_1 par rapport à S_2 est ρ_1^2.

b) La puissance de c_2 par rapport à S_1 est ρ_2^2.

c) L'intersection $\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2$ n'est pas vide, et pour tout point x de cette intersection, les vecteurs $x - c_1$ et $x - c_2$ sont orthogonaux.

d) Si $\pi_1(x), \pi_2(x)$ sont les puissances d'un point $x \in \mathrm{E}$ par rapport à S_1 et S_2 respectivement, on a $\pi_1(x) + \pi_2(x) = 2(x - c_1|x - c_2)$.

On dit alors que S_1 et S_2 sont *coorthogonales*(*).

5) Montrer que, dans le groupe **GL**(E), le centralisateur du groupe orthogonal **O**(E) est le groupe des homothéties Z(E) (écrire qu'un élément de ce centralisateur permute aux symétries par rapport aux hyperplans orthogonaux aux vecteurs de E).

6) *Caractérisations des similitudes.* A) Soit u une bijection de E sur lui-même (non supposée linéaire ni affine *a priori*) telle que l'on ait $(u(x)|u(y)) = \alpha(x|y)$ quels que soient x, y dans E (α nombre > 0). Montrer que u est *linéaire* (et par suite appartient à **GO**(E)).

B) Soit u une bijection de E sur lui-même telle que l'on ait

$$d(u(x), u(y)) = \alpha d(x, y) \quad (\alpha \text{ nombre } > 0)$$

(*) La terminologie classique de « sphères orthogonales » ne peut être conservée, car elle entre en conflit avec la notion générale de « parties orthogonales » d'un espace euclidien (5.1.6).

quels que soient x, y dans E. Montrer que u est une similitude affine. (Se ramener au cas où u laisse invariant un point de E, et utiliser A) et (5.1.1.5)).

C) On suppose que E n'est pas réduit à 0 ou à une droite vectorielle. Soit u un automorphisme de l'espace vectoriel E tel que la relation $(x|y) = 0$ entraîne $(u(x)|u(y)) = 0$ (autrement dit, u *conserve l'orthogonalité*). Montrer que u est une similitude linéaire. (Si $y \neq 0$ dans E, observer que $(u(x)|u(y)) = 0$ est une équation de l'hyperplan orthogonal à y et en déduire qu'il existe un nombre $\mu(y) \neq 0$ tel que $(u(x)|u(y)) = \mu(y)(x|y)$ quel que soit $x \in \mathrm{E}$ (3.3.6) ; prouver ensuite que $\mu(y)$ est un scalaire indépendant de y). Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas u linéaire *a priori* ?

7) Montrer que dans le groupe **GL**(E) le normalisateur du groupe orthogonal **O**(E) est le groupe des similitudes **GO**(E) (si $v \in \mathbf{GL}(\mathrm{E})$ est telle que $vuv^{-1} \in \mathbf{O}(\mathrm{E})$ pour tout $u \in \mathbf{O}(\mathrm{E})$, montrer que v conserve l'orthogonalité en prenant pour u les symétries par rapport à un hyperplan ; puis appliquer l'exerc. 6).

8) Si x, y, z, t sont quatre points d'un espace euclidien E, montrer que

$$d(x, y) + d(z, t) + d(x, z) + d(y, t) \geqslant d(x, t) + d(y, z).$$

9) Si x, y, z, t sont quatre points d'un espace euclidien E, montrer que l'on a

$$d(x, y)d(z, t) \leqslant d(x, z)d(y, t) + d(x, t)d(y, z)$$

(« inégalité ptolémaïque »). (Se ramener au cas où $t = 0$ et considérer les points $x' = x/\|x\|^2$, $y' = y/\|y\|^2$, $z' = z/\|z\|^2$ lorsque x, y, z sont $\neq 0$).

§ 2. Bases orthogonales ; endomorphismes adjoints

Dans toute la suite du chapitre, E *désigne un espace euclidien à* 2 *dimensions, ou, comme on dit encore, un plan euclidien.*

(5.2.1) On dit que dans E une base $\{a_1, a_2\}$ est *orthogonale* si les vecteurs a_1, a_2 sont orthogonaux ; on dit que la base $\{a_1, a_2\}$ est *orthonormale* si a_1, a_2 sont deux vecteurs *unitaires* et *orthogonaux*, autrement dit si l'on a

(5.2.1.1) $$(a_1|a_1) = (a_2|a_2) = 1, \qquad (a_1|a_2) = 0.$$

Il revient au même de dire que relativement à une telle base, la matrice de la forme bilinéaire $(x|y)$ (4.2.4) est la matrice *unité*, ou encore que, pour deux vecteurs $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$, le produit scalaire est donné par

(5.2.1.2) $$(x|y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$$

et par suite la norme par

(5.2.1.3) $$\|x\|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

En outre, la formule (5.2.1.2) donne en particulier *l'expression des coordonnées par des produits scalaires*

(5.2.1.4) $$\xi_1 = (x|a_1), \qquad \xi_2 = (x|a_2).$$

Si $\{a_1, a_2\}$ est une base orthogonale, les vecteurs $a_1/\|a_1\|$, $a_2/\|a_2\|$ sont unitaires et forment par suite une base orthonormale.

(5.2.2) Rappelons que les hyperplans dans E ne sont autres que les droites (4.1.6). Par suite (5.1.7) pour toute droite vectorielle D dans E il y a *une droite vectorielle* D′ *et une seule* orthogonale à D ; elle est supplémentaire de D. Tout vecteur $a \neq 0$ fait donc partie d'une base orthogonale $\{a, b\}$, les vecteurs b répondant à cette condition étant tous les vecteurs $\neq 0$ de la droite vectorielle orthogonale à D_{Oa}.

Si f est une forme linéaire non identiquement nulle sur E, on sait (3.3.6) que $f(x) = 0$ est l'équation d'une droite vectorielle D ; d'autre part, si $b \neq 0$ est un vecteur orthogonal à D, $(x|b) = 0$ est aussi une équation de D (5.1.7) ; par suite (3.3.6) il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que l'on ait identiquement $f(x) = \alpha(x|b) = (x|\alpha b)$; on en conclut :

(5.2.3) *Pour toute forme linéaire f sur* E, *il existe un vecteur $a \in$* E *et un seul tel que l'on ait $f(x) = (x|a)$ pour tout $x \in$* E.

Ce qui précède prouve en effet l'existence de a lorsque $f \neq 0$; si $f = 0$, l'existence de a est triviale, en prenant $a = 0$. L'unicité de a résulte de ce la relation $(x|a) = (x|a')$ pour tout $x \in$ E équivaut à $(x|a' - a) = 0$ pour tout $x \in$ E, et le seul vecteur orthogonal à tout l'espace est 0 (5.1.4).

Si l'on a pris dans E une base orthonormale $\{a_1, a_2\}$, et si la forme f a pour matrice $(\alpha_1\ \alpha_2)$ relativement à cette base (4.1.11), le vecteur $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ est le vecteur unique tel que $f(x) = (x|a)$ pour tout $x \in$ E.

La traduction en termes de coordonnées (par rapport à une base orthonormale) des résultats de (5.1) est laissée au lecteur. Mentionnons seulement qu'on dit « *cercle* » au lieu de « sphère » et « *disque* » au lieu de « boule » lorsqu'il s'agit d'un plan euclidien.

On a vu en général (5.1.12) qu'une similitude (linéaire) est ou bien 0, ou bien injective. Mais ici (4.1.8) tout endomorphisme injectif est *bijectif*, donc une similitude u est *nulle* si $\mu(u) = 0$, *bijective* si $\mu(u) \neq 0$ (en d'autres termes l'ensemble des similitudes est $\mathbf{GO}(E) \cup \{0\}$). En outre, si $\{a_1, a_2\}$ est une base orthonormale de E, les conditions suivantes sont *nécessaires et suffisantes* pour que u soit une similitude de multiplicateur α :

(5.2.3.1)
$$\begin{cases} (u(a_1)|u(a_1)) = \alpha, \qquad (u(a_2)|u(a_2)) = \alpha \\ \qquad (u(a_1)|u(a_2)) = 0 \end{cases}$$

En effet, ces conditions sont trivialement nécessaires, et si elles sont vérifiées, on a, en vertu de (5.1.1.4), pour $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$,

$$\|u(x)\|^2 = \|\xi_1 u(a_1) + \xi_2 u(a_2)\|^2 = \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \alpha\|x\|^2$$

ce qui prouve notre assertion.

En particulier, la *symétrie* s par rapport à la droite D_{0a_1} est caractérisée par les relations $s(a_1) = a_1$, $s(a_2) = -a_2$.

Plus généralement, pour qu'une application linéaire g de E dans un *espace euclidien* F quelconque soit une *isométrie* (5.1.12), il faut et il suffit (comme on le voit par le même calcul) que l'on ait $\|g(a_1)\| = \|a_1\|$, $\|g(a_2)\| = \|a_2\|$ et $(g(a_1)|g(a_2)) = 0$. L'existence de bases orthonormales dans tout plan euclidien (5.2.1) prouve donc que *deux plans euclidiens quelconques sont isomorphes* (5.1.12).

(5.2.4) Soit Φ une *forme bilinéaire* sur $E \times E$. Pour un vecteur quelconque $y \in E$, l'application $x \to \Phi(x, y)$ est une *forme linéaire* sur E ; donc (5.2.3), il existe un vecteur unique $d_\Phi(y)$ dans E (dépendant bien entendu de y) tel que l'on ait, pour *tout* $x \in E$

(5.2.4.1) $$\Phi(x, y) = (x|d_\Phi(y)).$$

Montrons que l'application $y \to d_\Phi(y)$ est un *endomorphisme* de E. En effet, l'hypothèse que Φ est *bilinéaire* entraîne, pour tout $x \in E$, et pour deux vecteurs quelconques y, z de E et deux scalaires α, β

$$(x|d_\Phi(\alpha y + \beta z)) = \alpha(x|d_\Phi(y)) + \beta(x|d_\Phi(z))$$

ce qui s'écrit aussi

$$(x|d_\Phi(\alpha y + \beta z) - \alpha d_\Phi(y) - \beta d_\Phi(z)) = 0$$

et comme 0 est le seul vecteur orthogonal à E, cela entraîne bien

$$d_\Phi(\alpha y + \beta z) = \alpha d_\Phi(y) + \beta d_\Phi(z).$$

On dit que d_Φ est l'endomorphisme de E *associé à droite* à Φ. Inversement, pour *tout* endomorphisme u de E, il y a une forme bilinéaire et une seule Φ telle que $u = d_\Phi$, savoir la forme

(5.2.4.2) $$\Phi(x, y) = (x|u(y)).$$

On définit donc ainsi un *isomorphisme* $\Phi \to d_\Phi$ de l'espace vectoriel $\mathscr{B}(E, E\ ;\ \mathbf{R})$ (3.2.16) des formes bilinéaires sur $E \times E$, *sur* l'espace vectoriel End(E).

De même, pour un vecteur quelconque $x \in E$, l'application $y \to \Phi(x, y)$ est une forme linéaire sur $E \times E$, et il y a par suite un vecteur unique $s_\Phi(x)$ tel que l'on ait, pour *tout* $y \in E$,

(5.2.4.3) $$\Phi(x, y) = (s_\Phi(x)|y).$$

On voit comme ci-dessus que s_Φ est un *endomorphisme* de E, que l'on appelle l'endomorphisme *associé à gauche* à Φ ; c'est aussi (en vertu de la relation $(y|x) = (x|y)$) l'endomorphisme *associé à droite* à la forme bilinéaire $(x, y) \to \Phi(y, x)$. On a ainsi défini un second *isomorphisme* $\Phi \to s_\Phi$ de $\mathscr{B}(E, E\ ;\ \mathbf{R})$ *sur* End(E).

(5.2.5) Soit maintenant u un endomorphisme *quelconque* de E ; il est associé *à gauche* à la forme bilinéaire $(x, y) \to (u(x)|y)$, et il correspond à cette dernière un endomorphisme u^* qui lui est associé *à droite*, autrement dit tel que l'on ait, pour tout couple de vecteurs x, y

(5.2.5.1) $$(u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

On dit que u^* est l'endomorphisme *adjoint* à u, et il est clair que l'on a

(5.2.5.2) $$(u^*)^* = u$$

autrement dit, l'application $u \to u^*$ est un *automorphisme involutif* de *l'espace vectoriel* End(E). En outre, si u, v sont deux endomorphismes de E, on a, d'après (5.2.5.1),

$$(v(u(x))|y) = (u(x)|v^*(y)) = (x|u^*(v^*(y)))$$

d'où, par définition de l'adjoint,

(5.2.5.3) $$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$$

Ces définitions montrent que pour toute forme bilinéaire Φ, on a

(5.2.5.4) $$s_\Phi^* = d_\Phi, \qquad d_\Phi^* = s_\Phi.$$

On dit qu'un endomorphisme u de E est *hermitien* (ou *symétrique* ou *auto-adjoint*) si l'on a $u^* = u$, *antihermitien* (ou *antisymétrique*) si l'on a $u^* = -u$; il revient au même de dire que la forme bilinéaire $\Phi(x, y) = (u(x)|y)$ est *symétrique* (resp. *alternée*).

Montrons enfin comment on peut caractériser les *similitudes linéaires* à l'aide de la notion d'adjoint. Une similitude u de multiplicateur α est définie (5.1.12) comme vérifiant l'identité en x, y

$$(u(x)|u(y)) = \alpha(x|y).$$

Or, cette relation s'écrit, en vertu de (5.2.5.1),

$$(x|u^*(u(y))) = (x|\alpha y),$$

et comme elle doit avoir lieu pour tout x et tout y, elle *équivaut* à

(5.2.5.5) $$u^*u = \alpha \, . \, 1_E$$

dans l'anneau End(E) ; en particulier, les *transformations orthogonales* sont caractérisées comme les automorphismes u de E tels que

(5.2.5.6) $$u^* = u^{-1}.$$

Comme tous les plans euclidiens sont isomorphes, le groupe **GO**(E) (resp. **O**(E)) se note aussi $\mathbf{GO}_2(\mathbf{R})$ ou $\mathbf{GO}(2, \mathbf{R})$ (resp. $\mathbf{O}_2(\mathbf{R})$ ou $\mathbf{O}(2, \mathbf{R})$).

(5.2.6) Les définitions et résultats précédents se traduisent aisément en termes de matrices lorsque l'on prend dans E une base *orthonormale* $\{a_1, a_2\}$. Soient en effet Φ une forme bilinéaire sur E × E,

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

sa matrice par rapport à $\{a_1, a_2\}$; rappelons (4.2.4) que l'on a par définition $\alpha_{ij} = \Phi(a_i, a_j)$ pour tout couple d'indices (i, j) ; la formule (5.2.4.1) donne donc $(a_i | d_\Phi(a_j)) = \alpha_{ij}$; si l'on tient compte de l'expression des coordonnées à l'aide du produit scalaire (5.2.1.4), on voit que la *première colonne* de $M(\Phi)$ est égale à $M(d_\Phi(a_1))$ et la *seconde* à $M(d_\Phi(a_2))$; autrement dit, on a

(5.2.6.1) $$M(d_\Phi) = M(\Phi)$$

et comme s_Φ est associé à droite à la forme $(x, y) \to \Phi(y, x)$, on a, par définition (4.2.4)

(5.2.6.2) $$M(s_\Phi) = {}^tM(\Phi)$$

d'où par comparaison, pour *tout* endomorphisme u de E

(5.2.6.3) $$M(u^*) = {}^tM(u)$$

ce qui, compte tenu de (5.2.5.3), redonne une démonstration sans calcul de (4.2.4.1) pour les matrices de type (2, 2). Cela montre aussi que les *polynômes caractéristiques* de u^* et de u sont les *mêmes.*

Dire que u est un endomorphisme *hermitien* (resp. *antihermitien*) revient donc à dire que sa matrice (relativement à une base *orthonormale*) est *symétrique* (resp. *alternée*) ; dire que u est une similitude de multiplicateur α revient à dire que sa matrice U (relativement à une base *orthonormale*) vérifie la relation

(5.2.6.4) $${}^tU = \alpha U^{-1} .$$

On dit qu'une matrice inversible U de type (2, 2) est *orthogonale* si l'on a ${}^tU = U^{-1}$. On notera que la relation ${}^tU . U = \alpha 1_2$ peut aussi s'obtenir en exprimant les conditions (5.2.3.1).

(5.2.7) Soit u un endomorphisme *hermitien* de E, dont la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

par rapport à une base *orthonormale* $\{e_1, e_2\}$ de E est donc symétrique, autrement dit telle que $\alpha_{21} = \alpha_{12}$. Cette relation montre que le premier membre de (4.2.14.3) est $\geqslant 0$, autrement dit un endomorphisme hermitien a *toujours* des valeurs propres. En outre, si $a \neq 0$ est un *vecteur propre* de u, correspondant à la valeur propre λ, et si $b \neq 0$ est un vecteur orthogonal à a, on a, en vertu de la relation

$$(u(a)|b) = (a|u(b))$$

la relation

$$(a|u(b) - \lambda b) = 0$$

autrement dit, $u(b) - \lambda b$ est orthogonal à a, donc (5.2.2) $u(b) - \lambda b$ est de la forme βb, donc b est aussi un *vecteur propre* de u. Ainsi *il existe toujours* *une base orthonormale* $\{a_1, a_2\}$ *de* E *formée de vecteurs propres de* u. Si λ_1, λ_2 sont les valeurs propres correspondantes, on peut avoir $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ou $\lambda_1 = \lambda_2$; dans le premier cas D_{0a_1} et D_{0a_2} sont les sous-espaces *propres* de u (3.2.10) et les vecteurs a_1, a_2 sont donc *bien déterminés au signe près* ; dans le second cas, u est une *homothétie* et E lui-même est le seul sous-espace propre de u, donc *toute* base de E est formée de vecteurs propres de u.

Si l'on *traduit* le résultat précédent dans le langage des formes bilinéaires au moyen du « dictionnaire » de (5.2.4), on voit que pour toute *forme bilinéaire symétrique* Φ, il existe toujours une base *orthonormale* $\{a_1, a_2\}$ telle que l'on ait

(5.2.7.1) $$\Phi(a_1, a_2) = 0 \qquad (= \Phi(a_2, a_1)).$$

En outre, les nombres $\lambda_1 = \Phi(a_1, a_1)$, $\lambda_2 = \Phi(a_2, a_2)$ sont *indépendants* de la base $\{a_1, a_2\}$ ayant la propriété précédente, puisque ce sont les valeurs propres de d_Φ ; on dit que ce sont les *valeurs propres* de Φ. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, on a $\Phi(x, y) = \lambda(x|y)$; si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, les droites D_{0a_1} et D_{0a_2} sont *bien déterminées* et appelées les *axes* de la forme Φ.

Les valeurs propres λ_1, λ_2 de Φ s'interprètent encore comme suit ; considérons les points x du *cercle unité* U de centre 0 et de rayon 1 ; ce sont donc les $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$ tels que $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$; on a alors

$$\Phi(x, x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 = \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\xi_1^2.$$

Si on suppose par exemple $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, on voit que λ_1 est *la plus grande* et λ_2 *la plus petite* des valeurs prises par $\Phi(x, x)$ dans le cercle U, atteintes respectivement pour $x = \pm a_1$ et $x = \pm a_2$.

(5.2.8) Soit Ψ une forme bilinéaire *alternée* non identiquement nulle (cf. (4.2.5)) ; on peut donc l'écrire

(5.2.8.1) $$\Psi(x, y) = (w(x)|y)$$

avec $w^* = -w$ (5.2.5). Pour *tout* endomorphisme u de E, on a

$$\Psi(u(x), u(y)) = \det(u)\Psi(x, y)$$

ce qui s'écrit aussi, compte tenu de (5.2.5.1)

$$(u^*wu(x)|y) = (\det(u))(w(x)|y)$$

et comme un vecteur ne peut être orthogonal à tout l'espace que s'il est nul, cela signifie que l'on a, dans l'anneau End(E),

(5.2.8.2) $$u^*wu = (\det(u))w$$

d'où, si u est *inversible*,

(5.2.8.2) $$u^* = (\det(u))wu^{-1}w^{-1}.$$

On notera que si l'on prend les déterminants des deux membres de (5.2.8.2), on obtient $\det(u^*)\det(w)\det(u) = (\det(u))^2 \det(w)$, donc (comme $\det(w) \neq 0$) on retrouve la relation $\det(u^*) = \det(u)$ pour les automorphismes u de E (4.2.9.5).

D'autre part, toujours en supposant u inversible, la formule (5.2.8.2) donne aussi $u^{-1} = (\det(u))^{-1} w^{-1} u^* w$, et comme $M(u^*) = {}^t M(u)$ et que l'on peut prendre par exemple

$$M(w) = M(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.2.5)$$

cette formule redonne le calcul de l'*inverse* d'une matrice (4.2.13.4).

Thèmes d'exercices

1) Les involutions du groupe $\mathbf{O}(E)$ (cf. (5.1.13)) sont les involutions u de $\mathbf{GL}(E)$ telles que $u^* = u$ (autrement dit, les involutions *hermitiennes*). Les projecteurs orthogonaux $p \in \operatorname{End}(E)$ sont les projecteurs de End(E) (cf. section (3.2), exerc. 1) tels que $p^* = p$ (autrement dit, les projecteurs *hermitiens*).

2) *Endomorphismes hermitiens positifs.* On dit qu'une forme bilinéaire symétrique Φ sur $E \times E$ est *positive* si l'on a $\Phi(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que, quels que soient x, y dans E, on a alors

$$(1) \qquad (\Phi(x, y))^2 \leqslant \Phi(x, x)\Phi(y, y)$$

(raisonnement de (5.1.2)). En déduire que l'on a aussi

$$(2) \qquad \sqrt{\Phi(x + y, x + y)} \leqslant \sqrt{\Phi(x, x)} + \sqrt{\Phi(y, y)}.$$

On dit qu'un endomorphisme *hermitien h* est *positif* si la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \to (h(x)|y)$ est positive, autrement dit si $(h(x)|x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que pour un tel endomorphisme, on a

$$(3) \qquad \|h(x)\|^4 \leqslant (h(x)|x)(h^2(x)|h(x))$$

pour tout $x \in E$ (utiliser (1)).

Montrer que pour tout endomorphisme hermitien positif h et tout entier $m > 0$, il existe un endomorphisme hermitien positif et un seul g tel que $g^m = h$.

Pour qu'un endomorphisme hermitien h soit *positif*, il faut et il suffit que ses valeurs propres soient $\geqslant 0$; pour qu'il soit en outre *bijectif*, il faut et il suffit que ses valeurs propres soient > 0. Soit

$$M(h) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme hermitien h relativement à une base orthonormale ; pour que h soit positif, il faut et il suffit que $\alpha_{11} \geqslant 0$, $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 \geqslant 0$ (on dit alors que $M(h)$ est *positive*). Pour que h soit positif et bijectif, il faut et il suffit que ces deux nombres soient > 0.

3) « *Valeurs absolues* » *d'un endomorphisme.* Pour tout endomorphisme u de E, montrer que uu^* et u^*u sont des endomorphismes hermitiens *positifs* (exerc. 2). Il existe donc deux endomorphismes hermitiens positifs h_1, h_2, déterminés de façon unique par les formules $h_1^2 = u^*u$, $h_2^2 = uu^*$. Montrer qu'il existe une transformation

orthogonale v telle que $u = vh_1 = h_2 v$, d'où $h_2 = vh_1 v^{-1}$, ce qui montre que h_1 et h_2 ont mêmes valeurs propres. (Prouver que les relations $u(x) = 0$ et $h_1(x) = 0$ sont équivalentes, et que si V est le sous-espace vectoriel orthogonal à $u^{-1}(0) = h_1^{-1}(0)$, on a $\|u(x)\| = \|h_1(x)\|$ pour tout $x \in \mathrm{V}$.) Pour que v soit déterminée de façon unique par les relations précédentes, il faut et il suffit que u soit bijectif.

Déduire de ce qui précède et de (5.2.7) que toute matrice X de type $(2, 2)$ peut s'écrire WDU, où U et W sont deux matrices orthogonales et D une matrice diagonale (section (4.1), exerc. 6), ayant pour éléments les racines carrées positives des valeurs propres de la matrice symétrique ${}^tX . X$.

Montrer que toute forme bilinéaire symétrique positive Φ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ peut s'écrire $\Phi(x, y) = (h(x)|h(y))$ où h est un endomorphisme hermitien positif ; pour que Φ soit non dégénérée, il faut et il suffit que h soit bijectif. Retrouver ainsi la formule (1) de l'exerc. 2.

4) *Orthonormalisation.* Soit $\{a_1, a_2\}$ une base quelconque de E ; montrer qu'il existe une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$ de E et une seule satisfaisant aux conditions suivantes : 1° les droites $\mathrm{D}_{\mathrm{O}a_1}$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{O}e_1}$ sont les mêmes ; 2° on a $(a_1|e_1) > 0$ et $(a_2|e_2) > 0$.

Déduire de ce résultat que pour toute matrice inversible X de type $(2, 2)$ il existe un couple (L, U) de matrices et un seul tel que $X = LU$, que U soit orthogonale et L de la forme

(3) $$L = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_{11} > 0$ et $\lambda_{22} > 0$ (interpréter les matrices comme matrices d'automorphismes de l'espace vectoriel E) (« *décomposition d'Iwasawa gauche* » de **GL**(E)). Montrer de même que l'on peut écrire $X = U'L'$ où U' est orthogonale et L' de la même forme que L (« *décomposition d'Iwasawa droite* »). Que peut-on dire de L, U, L', U' lorsque $\det(X) = 1$?

Montrer que si H est une matrice symétrique *positive* inversible, il existe une matrice L du type (3) avec $\lambda_{11} > 0$ et $\lambda_{22} > 0$ telle que $H = L . {}^tL$; en outre L est déterminée de façon unique par ces conditions. (Combiner le résultat précédent et le fait qu'il y a une matrice hermitienne positive dont H est le carré).

5) Pour toute matrice de type $(2, 2)$

$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}$$

on pose

$$f(X) = \max(|\xi_{11}|, |\xi_{22}|), \qquad g(X) = \max_{i,j}(|\xi_{ij}|)$$

de sorte que $f(X) \leqslant g(X)$. Pour toute matrice hermitienne positive H, on désigne par $\varphi(H)$ la plus grande des valeurs propres de H.

Montrer que pour tout couple de matrices X, Y de type $(2, 2)$ et toute matrice diagonale D, on a

(4) $$g^2({}^tXDY) \leqslant f^2(D) f({}^tX . X) f({}^tY . Y)$$

(5) $$g({}^tX {}^tY Y X) \leqslant f({}^tX . X) \varphi({}^tY . Y)$$

(Pour prouver (4), majorer chaque élément de ${}^tXDY$ par la valeur d'une forme bilinéaire symétrique positive, et utiliser l'inégalité (1) de l'exerc. 2. Pour déduire (5) de (4), écrire ${}^tY.Y$ sous la forme ${}^tUDU$ où U est orthogonale et D diagonale à éléments positifs (cf. (5.2.7) et (4.2.15))).

Montrer que si X_1, X_2, X_3 sont trois matrices de type (2, 2), on a

$$g^2(X_1X_2X_3) \leqslant f(X_1 . {}^tX_1)\varphi(X_2 . {}^tX_2)f({}^tX_3 . X_3) \tag{6}$$

$$g^2(X_1X_2X_3) \leqslant \varphi(X_1 . {}^tX_1)\varphi(X_2 . {}^tX_2)\varphi(X_3 . {}^tX_3) \tag{7}$$

(Pour obtenir (6), combiner (4) et (5) ; déduire ensuite (7) de (5) et (6)). Généraliser à plus de trois matrices. Peut-on dans (6) remplacer ${}^tX_3 . X_3$ par $X_3 . {}^tX_3$ ou $\varphi(X_2 . {}^tX_2)$ par $f(X_2 . {}^tX_2)$ au second membre?

Pour une matrice hermitienne positive H, on a $f(H) = g(H) \leqslant \varphi(H)$ (écrire H comme carré d'une matrice hermitienne positive).

6) Pour tout endomorphisme u de E, on pose $s(u) = \sqrt{\operatorname{Tr}(u^*u)}$ (cf. section (4.2), exerc. 1) ; on a $s(\lambda u) = |\lambda|s(u)$ et $s(u^*) = s(u)$; si u est orthogonal, $s(u) = \sqrt{2}$. Montrer que pour deux endomorphismes u, v de E, on a

$$|\operatorname{Tr}(uv^* + vu^*)| \leqslant 2s(u)s(v)$$

(considérer l'endomorphisme $(u^* + \lambda v^*)(u + \lambda v)$) ; en déduire que

$$s(u + v) \leqslant s(u) + s(v) \tag{8}$$

$$|\operatorname{Tr}(uv)| \leqslant s(u)s(v), \qquad \operatorname{Tr}(u) \leqslant \sqrt{2}s(u). \tag{9}$$

Si H_1, H_2 sont deux matrices hermitiennes positives, montrer que l'on a $\operatorname{Tr}(H_1H_2) \geqslant 0$ (se ramener au cas où H_2 est une matrice diagonale). En déduire que l'on a (avec les notations de l'exerc. 5)

$$\operatorname{Tr}(H_1H_2) \leqslant \varphi(H_1)\operatorname{Tr}(H_2) \leqslant \operatorname{Tr}(H_1)\operatorname{Tr}(H_2). \tag{10}$$

Déduire de (10) que pour deux endomorphismes u, v de E, on a

$$s(uv) \leqslant s(u)s(v). \tag{11}$$

7) *Valeurs stationnaires.* Soit u un endomorphisme de E ; les valeurs propres de l'endomorphisme hermitien positif u^*u (ou uu^*) sont des nombres $\geqslant 0$, que l'on écrit ρ_1^2 et ρ_2^2 avec $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant 0$; ρ_1 et ρ_2 sont appelées les *valeurs stationnaires* de u ; ce sont les valeurs propres des endomorphismes hermitiens positifs h_1 et h_2 de l'exerc 3. Montrer que ρ_1 est la plus grande et ρ_2 la plus petite des valeurs de $\|u(x)\|$ sur le cercle $\|x\| = 1$. On a $\rho_1\rho_2 = |\det(u)|$; pour que $\rho_1 = \rho_2$, il faut et il suffit que u soit une similitude.

Soit u un endomorphisme ayant des valeurs propres, de sorte que son polynôme caractéristique (4.2.14) s'écrit $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$; on suppose λ_1, λ_2 numérotés de sorte que $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2|$. Montrer qu'il existe une base *orthonormale* de E relativement à laquelle la matrice de u soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'on a $|\lambda_1| \leqslant \rho_1$, $|\lambda_1\lambda_2| = \rho_1\rho_2$ et $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leqslant (s(u))^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$ (notation de l'exerc. 6).

Si X est la matrice de u relativement à une base orthonormale de E, v, v' les endomorphismes dont les matrices relativement à cette base sont les matrices L, L' de la décomposition d'Iwasawa gauche et de la décomposition d'Iwasawa droite de X, montrer que u, v, v' ont mêmes valeurs stationnaires.

8) Soit u un endomorphisme de E ayant deux valeurs propres *distinctes* λ_1, λ_2 ; soit $a_i \neq 0$ un vecteur propre correspondant à λ_i ($i = 1, 2$). Montrer que si $b_i \neq 0$ est un vecteur orthogonal à a_i ($i = 1, 2$), alors b_1 est un vecteur propre de u^* pour la valeur propre λ_2 et b_2 un vecteur propre de u^* pour la valeur propre λ_1.

9) Soient

$$H_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

deux matrices symétriques positives ; montrer que la matrice symétrique

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{12}\beta_{12} \\ \alpha_{12}\beta_{12} & \alpha_{22}\beta_{22} \end{pmatrix}$$

est positive. (Si Φ_1, Φ_2, Φ sont les formes symétriques positives correspondantes, exprimer les α_{ij} à l'aide des valeurs propres de Φ_1, en utilisant (5.2.7) et notant que les α_{ij} sont les valeurs $\Phi_1(b_i, b_j)$ pour la base $\{b_1, b_2\}$ relativement à laquelle on a pris les matrices).

§ 3. Le groupe des similitudes

(5.3.1) Commençons par étudier le groupe **GO**(E) des similitudes *linéaires*.

La condition pour que u soit une similitude de multiplicateur $\mu(u)$ est, comme on l'a vu (5.2.5.5) que $u^*u = \mu(u) . 1_E$; prenant les déterminants des deux membres, il vient

(5.3.1.1) $$(\det(u))^2 = (\mu(u))^2.$$

Les similitudes telles que $\det(u) = \mu(u)$ (resp. $\det(u) = -\mu(u)$) sont dites *directes* (resp. *inverses*) ; en particulier, les transformations orthogonales de déterminant 1 sont appelées *rotations*. Une symétrie par rapport à une droite (5.1.15) est une similitude *inverse*, son déterminant étant égal à -1 (5.2.3). Une *homothétie* de rapport λ est une similitude *directe*, son déterminant et son multiplicateur étant tous deux égaux à λ^2.

Comme il existe des similitudes inverses $\neq 0$, l'application

$$u \to \det(u)/\mu(u)$$

est un homomorphisme de **GO**(E) *sur* le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$; son noyau est le *sous-groupe distingué* de **GO**(E) formé des similitudes directes inversibles, que l'on note $\mathbf{GO}^+(E)$. De même, $u \to \det(u)$ est un homomorphisme de **O**(E) *sur* $\{1, -1\}$, dont le noyau est le *groupe des rotations*, que l'on note $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ ou $\mathbf{SO}(\mathrm{E})$ (ou $\mathbf{O}_2^+(\mathbf{R})$, ou $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$) ; on a $\mathbf{O}^+(\mathrm{E}) = \mathbf{O}(\mathrm{E}) \cap \mathbf{GO}^+(\mathrm{E}) = \mathbf{O}(\mathrm{E}) \cap \mathbf{SL}(\mathrm{E}) = \mathbf{GO}^+(\mathrm{E}) \cap \mathbf{SL}(\mathrm{E})$.

Rappelons (5.1.12) que toute similitude $\neq 0$ s'écrit d'une seule manière $u = h_\lambda v$, où v est une transformation orthogonale et $\lambda > 0$; comme h_λ est une similitude *directe*, on voit que u est une similitude directe si v est une *rotation*, une similitude inverse si u est une transformation orthogonale de déterminant -1. L'étude du groupe $\mathbf{GO}(\mathrm{E})$ est donc ramenée à celle de $\mathbf{O}(\mathrm{E})$.

(5.3.2) *Toute transformation orthogonale de déterminant* -1 *est une symétrie par rapport à une droite vectorielle. Toute rotation est produit de deux symétries par rapport à des droites vectorielles.*

Soit u une transformation orthogonale, a un vecteur $\neq 0$, et posons $b = u(a)$; si $b = a$, tous les points de la droite $\mathrm{D} = \mathrm{D}_{0a}$ sont invariants par u, donc la droite orthogonale D' est (globalement) invariante par u. Mais la restriction de u à D' est une transformation orthogonale, donc (5.1.12) ne peut être que l'identité ou l'homothétie de rapport -1. On en conclut que u est alors, soit l'identité, soit la symétrie par rapport à D.

Supposons maintenant que $a \neq b$, de sorte que $c = a - b \neq 0$. Soit s la symétrie par rapport à la droite orthogonale à c, de sorte que l'on a par (5.1.13.1)

$$s(b) = b - 2\frac{(b|c)}{(c|c)} . c.$$

Mais, en vertu de (5.1.1.5), on a

$$2(b|c) = \|b + c\|^2 - \|b\|^2 - \|c\|^2 = \|a\|^2 - \|b\|^2 - \|c\|^2$$

et par hypothèse $\|b\| = \|a\|$ puisque u est orthogonale. Donc $2(b|c) = -(c|c)$ et par suite $s(b) = b + c = a$. On en conclut que si l'on pose $v = su$, on a $v(a) = a$, et comme v est une transformation orthogonale, ou bien $v = 1_\mathrm{E}$, ou bien v est une symétrie par rapport à une droite. Comme $s^{-1} = s$, $u = sv$, ce qui achève la démonstration (compte tenu du fait que 1_E est le carré de toute symétrie par rapport à une droite).

On observera incidemment que cette démonstration a prouvé que si a, b sont deux vecteurs $\neq 0$ tels que $\|a\| = \|b\|$, il y a *une symétrie s par rapport à une droite vectorielle telle que* $s(a) = b$ (d'où $s(b) = s^2(a) = a$) ; d'ailleurs cette symétrie est *unique*, car la droite des points invariants par cette symétrie doit passer par le milieu $\frac{1}{2}(a + b)$ du segment ab et être orthogonale à $b - a$.

(5.3.3) *Soit* $\{e_1, e_2\}$ *une base orthonormale de* E. *Pour qu'un endomorphisme u de* E *soit une similitude directe, il faut et il suffit que sa matrice relativement à* $\{e_1, e_2\}$ *soit de la forme*

(5.3.3.1)
$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Le multiplicateur et le déterminant de u sont alors égaux à $\alpha^2 + \beta^2$. *Le groupe* $\mathbf{GO}^+(\mathrm{E}) = \mathbf{GO}^+(2, \mathbf{R})$ *des similitudes directes* $\neq 0$ *est* COMMUTATIF.

On peut se borner au cas où $u \neq 0$, car pour $u = 0$, la matrice $M(u)$ est la matrice nulle qui est bien de la forme (5.3.3.1). Si $u \neq 0$ est une similitude *directe*, il résulte de (5.2.8.2) et de (5.2.5.5) que l'on a (avec les notations de (5.2.8))

(5.3.3.2)
$$wu = uw$$

et réciproquement, cette relation entraîne, par (5.2.8.2)

$$u^*uw = (\det(u))w$$

et comme w est inversible, on en tire $u^*u = (\det(u)) \,.\, 1_{\mathrm{E}}$, donc (comme la relation (5.3.3.2) est trivialement vérifiée pour $u = 0$) on voit que les similitudes directes sont *caractérisées* dans End(E) par la relation (5.3.3.2). On peut supposer que la forme bilinéaire alternée Ψ (qui est déterminée à un facteur près (4.2.5)) a pour matrice

$$M(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(cf. (4.2.5.1)) relativement à $\{e_1, e_2\}$. On a $M(w) = {}^tM(\Psi) = -M(\Psi)$ (5.2.6.2) ; écrivant que la matrice

$$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

est telle que $M(w)M(u) = M(u)M(w)$, il vient les relations $\gamma = -\beta$, $\delta = \alpha$. Si u' est une seconde similitude directe et si, relativement à la base $\{e_1, e_2\}$, on a

$$M(u') = \begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$$

on en tire

(5.3.3.3)
$$M(uu') = M(u)M(u') = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \beta\beta' & -(\alpha\beta' + \beta\alpha') \\ \alpha\beta' + \beta\alpha' & \alpha\alpha' - \beta\beta' \end{pmatrix}$$

donc $M(u'u) = M(uu')$ et par suite $u'u = uu'$, ce qui achève la démonstration.

On notera par contre que le groupe **GO**(E) de *toutes* les similitudes $\neq 0$ *n'est pas commutatif* (section (5.4), exerc. 1). Le même raisonnement que ci-dessus montre que les similitudes *inverses* sont celles qui vérifient la relation

(5.3.3.4)
$$wu = -uw$$

ou encore dont la matrice relativement à $\{e_1, e_2\}$ est de la forme

(5.3.3.5) $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

Ce sont donc des endomorphismes *hermitiens.*

(5.3.4) *Etant donné un vecteur unitaire a, pour tout vecteur* $x \in \mathrm{E}$, *il existe une similitude (linéaire) directe et une seule u telle que* $u(a) = x$. *En particulier, une similitude linéaire directe* $\neq 1_{\mathrm{E}}$ *ne laisse invariant aucun point* $\neq 0$. *Pour tout vecteur unitaire z, il existe une rotation et une seule u telle que* $u(a) = z$.

On peut prendre a comme premier vecteur e_1 d'une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$ (5.2.1). La matrice $M(u)$ relativement à cette base étant donnée par (5.3.3.1), on a par définition (4.1.11)

$$u(a) = \alpha e_1 + \beta e_2$$

d'où le résultat.

(5.3.5) Passons aux *similitudes affines* (5.1.14) ; on dit qu'une telle similitude $u = t_b \circ v$ (avec $v \in \mathbf{GO}(\mathrm{E})$) est *directe* (resp. *inverse*) si v est une similitude linéaire directe (resp. inverse). Les isométries directes (resp. inverses) sont encore appelées *déplacements* (resp. *retournements*) ; les déplacements forment un *sous-groupe* du groupe $\mathbf{Is}(\mathrm{E})$ des isométries.

(5.3.6) *Pour toute similitude affine u de multiplicateur* $\neq 1$, *il existe un point invariant a et un seul, et l'on a*

(5.3.6.1) $$u(x) - a = v(x - a)$$

où v est la similitude linéaire associée à u.

En effet, on peut écrire $u = t_b \circ v$ où $v \in \mathbf{GO}(\mathrm{E})$; dire que $u(a) = a$ signifie que $b + v(a) = a$ ou encore $a - v(a) = b$. Mais l'endomorphisme $w = 1_{\mathrm{E}} - v$ est bijectif ; il suffit en effet de prouver qu'il est injectif (4.1.8), ce qui est immédiat car la relation $v(x) = x$ entraîne $\|x\| = \|v(x)\| = \mu(v)\|x\|$, d'où $x = 0$ puisque $\mu(v) \neq 1$ par hypothèse.

L'unique point fixe a s'appelle le *centre* de la similitude u.

La formule (5.3.6.1) s'écrit aussi

(5.3.6.2) $$u = t_a v t_a^{-1}$$

et ramène donc (par transport de structure (2.13) au moyen de t_a) l'étude des similitudes affines de multiplicateur $\neq 1$ et de centre donné à celle des similitudes linéaires, faite plus haut.

Pour les isométries on a le résultat suivant :

(5.3.7) *Toute isométrie affine u est de l'un des types suivants :*

(i) *u est l'identité* 1_{E} ;

(ii) *u est une translation* t_b *de vecteur* $b \neq 0$;

(iii) *il existe un point invariant a et un seul pour u, et l'on a*

(5.3.7.1) $\qquad u(x) - a = v(x - a)$ (autrement dit $u = t_a v t_a^{-1}$)

où v est une rotation $\neq 1_E$;

(iv) *il existe une droite unique* D *et un vecteur unique b appartenant à la direction de* D *tels que, si s est la symétrie par rapport à* D (5.1.15), *on ait $u = t_b \circ s = s \circ t_b$.*

Conservons les notations de (5.3.4), et supposons d'abord qu'il existe un point invariant a ; alors $b = a - v(a)$ et on a la formule (5.3.6.1). Si v est une rotation $\neq 1_E$, elle ne laisse invariant aucun point autre que 0 (5.3.4) ; au contraire, si v est une symétrie par rapport à une droite vectorielle D_0, on est dans le cas (iv) avec $b = 0$, $u = s$. Si au contraire u ne laisse aucun point invariant, le raisonnement de (5.3.6) prouve que $1_E - v$ n'est pas injectif, autrement dit qu'il existe $x \neq 0$ tel que $v(x) = x$. Cela ne peut se produire que si v est une symétrie s_0 par rapport à une droite vectorielle D_0 ((5.3.4) et (5.3.2)). Posons $b = b' + b''$, où $b' \in D_0$ et b'' est orthogonal à D_0. On sait (5.1.16) que $s = t_{b''} \circ s_0$ est la symétrie par rapport à la droite $D = -\frac{1}{2}b'' + D_0$. On a donc $u = t_{b'} \circ s = s \circ t_{b'}$. L'unicité dans (iv) provient de l'unicité dans (3.2.17) et de ce que s s'écrit d'une seule manière sous la forme $t_c \circ s_0$, où s_0 est la symétrie par rapport à la direction D_0 de D et c est orthogonal à D_0 (5.1.15). Dans le cas (iii), on dit que u est une *rotation de centre a* (les *rotations* définies dans (5.3.1) étant donc les rotations *de centre* 0 et l'identité). La formule (5.3.7.1), qui s'écrit aussi $u = t_a v t_a^{-1}$, ramène (par transport de structure) l'étude des rotations de centre donné à celle du groupe $\mathbf{O}^+(E)$.

Thèmes d'exercices

1) Montrer que le centralisateur dans **GL**(E) d'une similitude directe u qui n'est pas une homothétie est le groupe $\mathbf{GO}^+(E)$ des similitudes directes. En particulier, les seuls automorphismes hermitiens qui commutent avec u sont les homothéties. En conclure que si deux similitudes directes u, v sont conjuguées dans **GL**(E), les seuls éléments w de **GL**(E) tels que l'on ait $v = wuw^{-1}$ appartiennent à **GO**(E) (remarquer que u doit permuter avec $h = w^*w$), en particulier le normalisateur de $\mathbf{GO}^+(E)$ dans **GL**(E) est **GO**(E). En outre, si $u = h_\lambda r$, où r est une rotation, on a nécessairement $v = u$ ou $v = h_\lambda r^{-1} = u^*$ (observer qu'on peut se ramener au cas où $w = s$ est une symétrie par rapport à une droite et que rs est alors nécessairement une symétrie par rapport à une droite en vertu de (5.3.2)).

2) On dit qu'un endomorphisme u de E est *normal* si $u^*u = uu^*$. Montrer que si u est normal, il en est de même de vuv^{-1} pour tout $v \in \mathbf{GO}(E)$. Montrer que tout endomorphisme normal est, soit hermitien, soit une similitude directe.

3) Montrer que pour tout endomorphisme $u \in \mathbf{GL}(E)$ *sans valeur propre*, il existe une similitude directe v conjuguée à u dans **GL**(E), c'est-à-dire telle que $u = wvw^{-1}$ pour un $w \in \mathbf{GL}(E)$. (Utiliser l'exerc. 7 b) de la section (4.2).) Que peut-on dire des solutions v, w de la relation $u = wvw^{-1}$ où $v \in \mathbf{GO}^+(E)$, $w \in \mathbf{GL}(E)$ (cf. exerc. 1)?

En déduire que dans l'ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel E ayant un polynôme caractéristique *donné*, *n'ayant pas de racines*, le groupe **GL**(E) opère transitivement, tandis qu'il y a *deux* classes d'intransitivité pour le groupe **SL**(E) (ou $\mathbf{GL}^+(\mathrm{E})$).

4) Dans cet exercice, on admet un *axiome additionnel* pour le corps **R**, savoir que pour tout nombre $\alpha > 1$ et tout nombre $\beta > 0$, il y a un entier $n > 0$ tel que $\beta < \alpha^n$ (conséquence de l'« axiome d'Archimède »).

Montrer que le groupe des rotations $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ est un sous-groupe *maximal* du groupe **SL**(E). (Si Γ est un sous-groupe de **SL**(E) contenant $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ et un autre élément, montrer d'abord que Γ contient un endomorphisme hermitien positif h, dont une valeur propre $\lambda > 1$ est arbitrairement grande, en utilisant l'exerc. 3 de la section (5.2). En considérant ensuite l'endomorphisme hermitien $h^{-1}rh^2r^{-1}h^{-1}$, où r parcourt $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$, montrer que Γ contient tous les endomorphismes hermitiens positifs, et conclure à l'aide de l'exerc. 3 de la section (5.2).)

5) Montrer que toute isométrie affine de E est produit d'au plus trois symétries par rapport à des droites. Dans quel cas le produit de deux rotations (affines) est-il une translation ?

6) Soient M, N deux parties de E et f une bijection de M sur N telle que l'on ait $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ quels que soient x, y dans M ; montrer qu'il existe une isométrie affine u de E dont la restriction à M soit égale à f (utiliser (5.1.1.5)).

§ 4. Angles

(**5.4.1**) On a vu (5.3.3) que le groupe des rotations $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ est *commutatif*; il est commode dans les calculs de le noter *additivement*. Pour éviter des confusions, on introduit un groupe *additif* noté $\mathfrak{A}$ (ou $\mathfrak{A}(\mathrm{E})$), *isomorphe* à $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$, et qu'on appelle *groupe des angles de demi-droites* (ou simplement *groupe des angles*). On désignera par $\mathbf{r}$ un isomorphisme de $\mathfrak{A}$ sur $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ choisi une fois pour toutes, donc par $\mathbf{r}(\theta)$ la rotation correspondant à l'angle $\theta \in \mathfrak{A}$ par cet isomorphisme, et on dira que c'est la *rotation d'angle* θ. On a donc *par définition*

$$\text{(5.4.1.1)} \qquad \mathbf{r}(0) = 1_{\mathrm{E}}, \quad \mathbf{r}(-\theta) = (\mathbf{r}(\theta))^{-1} = (\mathbf{r}(\theta))^*,$$
$$\mathbf{r}(\theta + \theta') = \mathbf{r}(\theta)\mathbf{r}(\theta') = \mathbf{r}(\theta')\mathbf{r}(\theta).$$

Il faut bien comprendre qu'il n'y a là *aucun théorème*, mais simplement une *convention d'écriture*.

Il y a dans $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ *une seule* involution $u \neq 1_{\mathrm{E}}$, savoir la symétrie -1_{E} par rapport à l'origine (5.1.13). Transportant ce résultat au groupe $\mathfrak{A}$, on voit qu'il y a dans $\mathfrak{A}$ *un seul* angle $\varpi \neq 0$ vérifiant la relation

$$\text{(5.4.1.2)} \qquad 2\varpi = 0$$

et l'on a

$$\text{(5.4.1.3)} \qquad \mathbf{r}(\varpi) = -1_{\mathrm{E}}.$$

On dit que l'angle ϖ est l'*angle plat*.

(**5.4.2**) Proposons-nous de chercher les rotations vérifiant la relation

(**5.4.2.1**) $$u^2 = -1_E.$$

Si l'on prend la matrice de u relativement à une base orthonormale, elle a la forme (5.3.3.1), avec la condition $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, et on doit donc avoir (5.3.3.3)

$$\alpha^2 - \beta^2 = -1, \qquad 2\alpha\beta = 0.$$

La première de ces deux relations montre qu'il n'est pas possible que l'on ait $\beta = 0$, il reste donc les deux solutions $\beta = \pm 1$, $\alpha = 0$, correspondant à deux rotations u', u'' telles que $u'' = -u' = u'^{-1}$. Transportant au groupe $\mathfrak{A}$, on voit que l'équation

(**5.4.2.2**) $$2\theta = \varpi$$

a *deux* solutions *opposées* $\delta', \delta'' = -\delta'$ dans le groupe $\mathfrak{A}$, dites *angles droits.*

Comme $u^* = u^{-1}$ pour tout $u \in \mathbf{O}(E)$, la relation (5.4.2.1) s'écrit aussi $u^* = -u$, et par suite entraîne $(x|u(x)) = (u^*(x)|x) = -(u(x)|x) = -(x|u(x))$, d'où finalement $(x|u(x)) = 0$. Les rotations u', u'' sont telles que $u'(x)$ et $u''(x) = -u'(x)$ sont *orthogonaux à* x *pour tout* $x \in E$ et ce sont les seules rotations ayant cette propriété.

(**5.4.3**) Il y a dans la droite vectorielle $\mathscr{A}(E, E\,;\,\mathbf{R})$ des formes bilinéaires alternées sur $E \times E$, deux formes bilinéaires opposées Ψ', $\Psi'' = -\Psi'$ telles que pour *toute* base orthonormale $\{a_1, a_2\}$ de E, on ait $\Psi'(a_1, a_2) = \pm 1$.

En effet, toute base orthonormale de E est de la forme $\{u(a_1), u(a_2)\}$, où u est une transformation orthogonale (5.2.3) et pour toute forme bilinéaire alternée Ψ on a donc (4.2.6) $\Psi(u(a_1), u(a_2)) = \pm\Psi(a_1, a_2)$, d'où la conclusion.

Soient u une rotation, x, y deux vecteurs unitaires. On a

(**5.4.3.1**) $$(x|u(x)) = (y|u(y))$$

(**5.4.3.2**) $$\Psi'(x, u(x)) = \Psi'(y, u(y)) \quad (et\ \Psi''(x, u(x)) = \Psi''(y, u(y)).$$

En effet, il existe une rotation v telle que $y = v(x)$ (5.3.4) ; d'où

$$(y|u(y)) = (v(x)|u(v(x))) = (v(x)|v(u(x))) = (x|u(x))$$

puisque $\mathbf{O}^+(E)$ est *commutatif*; de même

$$\Psi'(y, u(y)) = \Psi'(v(x), u(v(x))) = \Psi'(v(x), v(u(x))) = \Psi'(x, u(x))$$

puisque $\det(v) = 1$ (4.2.6.1).

Si $u = \mathbf{r}(\theta)$, le nombre $(x|u(x))$, indépendant du vecteur *unitaire* x choisi, est appelé le *cosinus de l'angle* θ et noté $\cos\theta$; le nombre $\Psi'(x, u(x))$ est appelé le *sinus de l'angle* θ *pour l'orientation contenant* Ψ' et noté $\sin\theta$ lorsque cette orientation a été *fixée*.

Nous allons supposer désormais que le plan E *a été orienté*. Nous désignerons par Ψ celle des deux formes Ψ', Ψ'' appartenant à l'orientation choisie. Pour tout couple *direct* (a, b) de deux vecteurs formant une base orthonormale, il y a une des deux solutions u de (5.4.2.1) telle que $u(a) = b$, et comme par définition $1 = \Psi(a, b) = \Psi(a, u(a))$, il résulte de ce qui précède que cette rotation u ne dépend pas du choix de a. L'angle δ tel que $\mathbf{r}(\delta) = u$ est appelé l'*angle droit positif* (pour l'orientation choisie) ; $-\delta$ est alors appelé l'angle droit *négatif* (pour cette orientation). Lorsqu'on change d'orientation, les angles droits positif et négatif s'échangent.

(5.4.4) Soit (a_1, a_2) un couple *direct* formant une base orthonormale (ou comme on dit encore, une *base orthonormale directe*). Si u est une rotation et si $u(a_1) = \alpha a_1 + \beta a_2$, la matrice de u relativement à $\{a_1, a_2\}$ est la matrice (5.3.3.1), et l'on a $(a_1 | u(a_1)) = \alpha$, $\Psi(a_1, u(a_1)) = \beta\Psi(a_1, a_2) = \beta$. Autrement dit, *relativement à toute base orthonormale directe on a*

(5.4.4.1)
$$M(\mathbf{r}(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On a les formules

(5.4.4.2)
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

qui exprime que $u(a_1)$ est *unitaire*,

(5.4.4.3)
$$\begin{cases} \cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ \sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' \\ \cos(-\theta) = \cos\theta, \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos 0 = 1, \qquad \sin 0 = 0 \end{cases}$$

qui ne font que *traduire* les formules (5.4.1.1), compte tenu de (5.4.4.1). En particulier

(5.4.4.4)
$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Par définition ((5.4.1) et (5.4.3)), on a

(5.4.4.5)
$$\begin{cases} \cos\varpi = -1, \qquad \sin\varpi = 0 \\ \cos\delta = 0, \qquad \sin\delta = 1 \end{cases}$$

d'où l'on tire, par (5.4.4.3)

(5.4.4.6)
$$\begin{cases} \cos(\theta + \varpi) = -\cos\theta, \qquad \sin(\theta + \varpi) = -\sin\theta \\ \cos(\theta + \delta) = -\sin\theta, \qquad \sin(\theta + \delta) = \cos\theta. \end{cases}$$

L'équation

$$\text{(5.4.4.7)} \qquad \cos\theta = \alpha$$

n'a de solutions que si $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$ en raison de (5.4.4.2) ; ces solutions correspondent aux deux rotations u telles que $u(a_1) = \alpha a_1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}a_2$, adjointes et inverses l'une de l'autre. Il y a donc *deux* solutions opposées de (5.4.4.7) si $-1 < \alpha < 1$, *une* seule solution égale à 0 (resp. à ϖ) si $\alpha = 1$ (resp. $\alpha = -1$).

On ramène aussitôt à l'équation (5.4.4.7) l'équation analogue $\sin\theta = \alpha$, compte tenu de (5.4.4.6).

(5.4.5) Les seuls angles θ tels que $\cos\theta = 0$ (resp. $\sin\theta = 0$) sont $\pm\delta$ (resp. 0 et ϖ). Pour θ distinct de $\pm\delta$, on pose

$$\text{(5.4.5.1)} \qquad \operatorname{tg}\theta = \sin\theta/\cos\theta$$

que l'on appelle *tangente* de l'angle θ ; pour θ distinct de 0 et ϖ, on pose

$$\text{(5.4.5.2)} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \cos\theta/\sin\theta$$

que l'on appelle *cotangente* de l'angle θ. On a

$$\text{(5.4.5.3)} \qquad \begin{cases} \operatorname{cotg}\theta = 1/\operatorname{tg}\theta \\ \operatorname{tg}(\theta+\theta') = (\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\theta')/(1 - \operatorname{tg}\theta \,.\, \operatorname{tg}\theta') \\ \operatorname{tg}(2\theta) = 2\operatorname{tg}\theta/(1-\operatorname{tg}^2\theta) \\ \sin(2\theta) = 2\operatorname{tg}\theta/(1+\operatorname{tg}^2\theta) \\ \cos(2\theta) = (1-\operatorname{tg}^2\theta)/(1+\operatorname{tg}^2\theta) \\ 1+\operatorname{tg}^2\theta = 1/\cos^2\theta \\ 1+\operatorname{cotg}^2\theta = 1/\sin^2\theta \\ \operatorname{tg}(\theta+\varpi) = \operatorname{tg}\theta, \quad \operatorname{tg}(\theta+\delta) = -\operatorname{cotg}\theta \end{cases}$$

chaque fois que les calculs ont un sens ; cela résulte aussitôt des définitions et des formules de (5.4.4).

Ceci *termine* ce qu'il y a lieu de savoir de ce qu'on nommait jadis la « trigonométrie ».

(5.4.6) On sait (5.1.9) qu'il y a correspondance biunivoque canonique entre les *demi-droites vectorielles* fermées (resp. ouvertes) et les *vecteurs unitaires* (ou « points du cercle unité ») qu'elles contiennent. En vertu de (5.3.4), étant données deux demi-droites vectorielles fermées (resp. ouvertes) Δ_1, Δ_2, il y a *une rotation et une seule u* telle que $u(\Delta_1) = \Delta_2$; l'*angle* de cette rotation est appelé l'*angle du couple* (Δ_1, Δ_2) de demi-droites (ou *angle* *que fait* Δ_2 *avec* Δ_1) et noté $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$; il est *indépendant* de l'orientation choisie. Il est immédiat que l'on a

$$\widehat{(\Delta_1, \Delta_1)} = 0 \tag{5.4.6.1}$$

$$\widehat{(\Delta_2, \Delta_1)} = -\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} \tag{5.4.6.2}$$

puisque si $u(\Delta_1) = \Delta_2$, on a $\Delta_1 = u^{-1}(\Delta_2)$;

$$\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} + \widehat{(\Delta_2, \Delta_3)} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_3)} \tag{5.4.6.3}$$

puisque si les rotations u, v sont telles que $u(\Delta_1) = \Delta_2$ et $v(\Delta_2) = \Delta_3$ on a $v(u(\Delta_1)) = \Delta_3$. Enfin la relation

$$\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \varpi \tag{5.4.6.4}$$

équivaut à $\Delta_2 = -\Delta_1$, et la relation

$$\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \delta \tag{5.4.6.5}$$

équivaut à la relation « Δ_1 et Δ_2 sont *orthogonales* et le couple (Δ_1, Δ_2) est direct ».

Si Δ, Δ' sont deux demi-droites (d'origines quelconques, distinctes ou non) dans E, Δ_0, Δ'_0 leurs *directions* (3.3.3), on pose par définition $\widehat{(\Delta, \Delta')} = \widehat{(\Delta_0, \Delta'_0)}$ et on dit que c'est l'*angle* du couple (Δ, Δ').

(5.4.7) *Soient* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta'_1, \Delta'_2$ *quatre demi-droites vectorielles fermées* (resp. *ouvertes*). *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \widehat{(\Delta'_1, \Delta'_2)}$.

b) $\widehat{(\Delta_1, \Delta'_1)} = \widehat{(\Delta_2, \Delta'_2)}$.

c) *Il existe une rotation* u (*nécessairement unique*) *telle que* $u(\Delta_1) = \Delta'_1$ *et* $u(\Delta_2) = \Delta'_2$.

d) *Il existe une symétrie* s *par rapport à une droite* (*nécessairement unique*) *telle que* $s(\Delta_1) = \Delta'_2$ *et* $s(\Delta_2) = \Delta'_1$.

L'équivalence de a) et b) résulte de ce que l'on a, dans le groupe $\mathfrak{A}$, en vertu de (5.4.6.2) et (5.4.6.3),

$$\widehat{(\Delta'_1, \Delta'_2)} = \widehat{(\Delta'_1, \Delta_1)} + \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} + \widehat{(\Delta_2, \Delta'_2)}$$

ou encore

$$\widehat{(\Delta'_1, \Delta'_2)} - \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \widehat{(\Delta_2, \Delta'_2)} - \widehat{(\Delta_1, \Delta'_1)}.$$

L'équivalence de b) et c) n'est autre que la *définition* de l'angle d'un couple de demi-droites. Enfin, on sait (5.3.2) qu'il existe une symétrie s' par rapport à une droite telle que $s'(\Delta'_1) = \Delta'_2$ et $s'(\Delta'_2) = \Delta'_1$, donc s'il existe une rotation u vérifiant c), la symétrie $s = s'u$ vérifie d) et réciproquement si s vérifie d), $u = s's$ vérifie c).

On a en particulier $\widehat{(-\Delta_1, -\Delta_2)} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$. D'autre part, l'équivalence de a) et d) dans (5.4.7) donne, pour $\Delta_1 = \Delta_2'$:

(5.4.8) *Pour qu'une demi-droite* Δ *soit telle que* $\widehat{(\Delta, \Delta_1)} = -\widehat{(\Delta, \Delta_2)}$, *il faut et il suffit que la symétrie par rapport à la droite* D *contenant* Δ *soit l'unique symétrie* (5.3.2) *qui échange* Δ_1 *et* Δ_2.

La droite D et les demi-droites Δ et $-\Delta$ qu'elle contient sont dites *bissectrices* du couple de demi-droites (Δ_1, Δ_2). Si l'on pose $\varphi = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$, l'angle $\theta = \widehat{(\Delta_1, \Delta)}$ de Δ_1 avec une des demi-droites bissectrices Δ vérifie donc l'équation

(5.4.8.1) $$2\theta = \varphi.$$

L'angle de Δ_1 avec l'autre demi-droite bissectrice est donc $\theta + \varpi$, et ces deux angles sont les seules solutions de (5.4.8.1) dans $\mathfrak{A}$, puisque si θ_1, θ_2 sont deux solutions distinctes, on a par différence $2(\theta_1 - \theta_2) = 0$, d'où $\theta_1 - \theta_2 = \varpi$ (5.4.1.2). On déduit d'ailleurs de (5.4.4.4) que l'on a

(5.4.8.2) $$\operatorname{tg} \theta = \sin \varphi/(1 + \cos \varphi)$$

si $\varphi \neq \varpi$.

(5.4.9) Etant donnés deux vecteurs x, y *non nuls* dans E, on appelle *angle de* x *et de* y et on note $\widehat{(x, y)}$ l'angle $\widehat{(\Delta_{Ox}, \Delta_{Oy})}$. On a donc par définition (5.4.3), puisque $x/\|x\|$ et $y/\|y\|$ sont les vecteurs unitaires de Δ_{Ox} et Δ_{Oy},

(5.4.9.1) $$\cos\widehat{(x, y)} = (x|y)/\|x\| \cdot \|y\|, \qquad \sin\widehat{(x, y)} = \Psi(x, y)/\|x\| \cdot \|y\|.$$

En particulier, si (a_1, a_2) est une base orthonormale directe, les coordonnées par rapport à cette base d'un vecteur $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 \neq 0$ s'expriment par les formules

(5.4.9.2) $$\begin{cases} \xi_1 = \|x\| \cdot \cos\widehat{(a_1, x)} = -\|x\| \cdot \sin\widehat{(a_2, x)} \\ \xi_2 = \|x\| \cdot \cos\widehat{(a_2, x)} = \|x\| \cdot \sin\widehat{(a_1, x)} \end{cases}$$

(5.4.10) Soit (a_1, a_2) une base orthonormale directe. Désignons par **U** le cercle unité, par D la droite D_{Oa_2}. A tout point x de **U**, *distinct du point* $-a_1$, faisons correspondre le point y où la droite $D_{-a_1, x}$ rencontre D. On dit que y est la *projection stéréographique* de x dans D. Si $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$, un point quelconque de la droite $D_{-a_1, x}$ s'écrit

$$-a_1 + \lambda(x + a_1) = (\lambda(\xi_1 + 1) - 1)a_1 + \lambda\xi_2 a_2 \ ;$$

si l'on écrit que sa coordonnée par rapport à a_1 est nulle, il vient (puisque $\xi_1 \neq -1$ par hypothèse).

(5.4.10.1) $$y = \frac{\xi_2}{1 + \xi_1} \cdot a_2$$

Inversement, un calcul analogue montre que pour tout $y \in \mathrm{D}$, qui peut donc s'écrire $y = \zeta a_2$, la droite $\mathrm{D}_{-a_1,y}$ rencontre $\mathbf{U}$ en un second point x distinct de $-a_1$, donné par

(5.4.10.2) $$x = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}a_1 + \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}a_2.$$

Si θ est l'angle de l'une quelconque des demi-droites contenues dans $\mathrm{D}_{-a_1,x}$ avec $\Delta_{\mathrm{O}a_1}$, on a, d'après (5.4.9.2), $y = \operatorname{tg}\theta \,.\, a_2$ et

$$x = \cos 2\theta \,.\, a_1 + \sin 2\theta \,.\, a_2$$

les relations entre les coordonnées de x et celles de y n'étant autres que (5.4.4.4) et (5.4.8.2).

La direction de $\mathrm{D}_{-a_1,y}$ est donc la droite D *bissectrice* des demi-droites $\Delta_{\mathrm{O}a_1}$ et $\Delta_{\mathrm{O}x}$.

Nous avons ainsi établi par la projection stéréographique une *correspondance biunivoque* entre D et l'ensemble $\mathbf{U}'$, *complémentaire de* $\{-a_1\}$ *dans* $\mathbf{U}$. Or, l'ensemble $\mathbf{U}'$ est lui-même en correspondance biunivoque canonique avec *l'ensemble* $\mathfrak{F}$ *des demi-droites ouvertes distinctes de* $\Delta_0 = \mathring{\Delta}_{\mathrm{O},-a_1} = -\mathring{\Delta}_{\mathrm{O}a_1}$ (5.1.9). Nous allons voir que cette correspondance permet d'expliciter de façon très simple la *relation d'ordre total* définie dans $\mathfrak{F}$ (4.3.6) :

(5.4.11) *Si* Δ', Δ'' *sont deux demi-droites appartenant à* $\mathfrak{F}$, $\zeta' a_2$ *et* $\zeta'' a_2$ *les points de* D *qui leur correspondent, la relation* $\Delta' \leqslant \Delta''$ (4.3.6) *est équivalente à* $\zeta' \leqslant \zeta''$.

Soient en effet x', x'' les points de $\mathbf{U}'$ dont les projections stéréographiques sont $y' = \zeta' a_2, y'' = \zeta'' a_2$. Dire que l'on a $\Delta' < \Delta''$ signifie par définition (4.3.6) que deux au moins des trois nombres

(5.4.11.1) $$\Psi(-a_1, x'), \qquad \Psi(x', x''), \qquad \Psi(x'', -a_1)$$

sont >0. Or, la formule (5.4.10.2) montre que ces nombres sont respectivement proportionnels aux nombres

(5.4.11.2) $$-\zeta', \qquad (\zeta'' - \zeta')(1 + \zeta'\zeta''), \qquad \zeta''$$

les facteurs de proportionnalité étant tous >0.

Si $\zeta' < \zeta''$, on a, soit $\zeta'\zeta'' \geqslant 0$, et alors ou bien $\zeta'' > 0$, ou bien $-\zeta' > 0$; soit $\zeta'\zeta'' < 0$ et alors $\zeta'' > 0$ et $-\zeta' > 0$; on voit donc que dans tous les cas possibles, deux des trois nombres (5.4.11.2) sont >0. Si au contraire $\zeta' > \zeta''$, en échangeant ζ' et ζ'' dans le raisonnement précédent, on voit cette fois que deux des trois nombres (5.4.11.2) sont <0 et cela achève de prouver que les relations $\Delta' < \Delta''$ et $\zeta' < \zeta''$ sont équivalentes.

(5.4.12) Les ensembles $\mathfrak{F}$ et $\mathbf{U}'$ sont aussi en correspondance biunivoque canonique avec *l'ensemble* $\mathfrak{A}'$ *des angles* $\neq \varpi$, tout point $x \in \mathbf{U}'$ correspondant à l'angle $\widehat{(a_1, x)}$. On peut donc *transporter* à $\mathfrak{A}'$ la relation d'ordre de $\mathfrak{F}$, la relation $\theta' \leqslant \theta''$ dans $\mathfrak{A}'$ étant par définition *équivalente* à $\Delta' \leqslant \Delta''$ dans $\mathfrak{F}$, si $\theta' = (\widehat{-\Delta_0, \Delta'})$, $\theta'' = (\widehat{-\Delta_0, \Delta''})$. Avec les mêmes notations, si l'on a $\theta' < \theta''$, le *secteur angulaire* $S^\circ(\Delta', \Delta'')$ (4.3.5), est la réunion des demi-droites ouvertes Δ telles que, si l'on pose $\theta = (\widehat{-\Delta_0, \Delta})$, on ait $\theta' < \theta < \theta''$ (« intervalle ouvert » dans $\mathfrak{A}'$). Les résultats de (5.4.10) montrent que dans $\mathfrak{A}'$, les relations

(5.4.12.1) $$\theta' \leqslant \theta'' \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} \leqslant \operatorname{tg}\frac{\theta''}{2}$$

sont *équivalentes*, $\theta/2$ désignant *par abus de langage* un quelconque des deux angles ψ tels que $2\psi = \theta$.

On vérifie aussitôt que dans $\mathfrak{A}'$, on a

(5.4.12.2) $$-\delta < 0 < \delta.$$

On donne respectivement aux angles de $\mathfrak{A}'$ les noms suivants :

si $0 < \theta < \delta$, θ est un *angle aigu positif* ;
si $-\delta < \theta < 0$, θ est un *angle aigu négatif* ;
si $\theta > \delta$, θ est un *angle obtus positif* ;
si $\theta < -\delta$, θ est un *angle obtus négatif*.

Ces quatre intervalles correspondent respectivement aux intervalles

$$0 < \zeta < 1, \qquad -1 < \zeta < 0, \qquad \zeta > 1, \qquad \zeta < -1$$

dans **R**, pour $\zeta = \operatorname{tg}\theta/2$. Comme, d'après (5.4.5.3), on a

$$\sin\theta = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}, \qquad \cos\theta = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} = 2 - \frac{1}{1+\zeta^2}, \qquad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

on en déduit aussitôt les signes et la variation des fonctions $\sin\theta$ et $\cos\theta$ dans $\mathfrak{A}'$:

1° pour $0 < \theta < \delta$, $\sin\theta$ est croissante et varie de 0 à 1, $\cos\theta$ est décroissante et varie de 1 à 0 ;

2° pour $-\delta < \theta < 0$, $\sin\theta$ est croissante et varie de -1 à 0, $\cos\theta$ est croissante et varie de 0 à 1 ;

3° pour $\theta > \delta$, $\sin\theta$ est décroissante et varie de 1 à 0, $\cos\theta$ est décroissante et varie de 0 à -1 ;

4° pour $\theta < -\delta$, $\sin\theta$ est décroissante et varie de 0 à -1, $\cos\theta$ est croissante et varie de -1 à 0.

Bien entendu les valeurs 0 et ± 1 ne sont pas prises dans les intervalles ouverts considérés. On déduit de ces résultats et de la définition de $\operatorname{tg}\theta$, que cette fonction est croissante pour $-\delta < \theta < \delta$ et prend dans cet intervalle toutes les valeurs réelles. Il est immédiat en outre que les croissances et décroissances sont *strictes* dans tout ce qui précède.

(5.4.13) Supposons que *les deux angles θ', θ'' appartiennent à l'intervalle $-\delta < \theta < \delta$, et l'angle φ à l'intervalle $-\delta \leqslant \varphi \leqslant \delta$.* Alors $\theta' + \varphi$ et $\theta'' + \varphi$ appartiennent à $\mathfrak{A}'$ et les relations

(5.4.13.1) $$\theta' \leqslant \theta'' \quad \text{et} \quad \theta' + \varphi \leqslant \theta'' + \varphi$$

sont *équivalentes.* En effet, posant $\zeta' = \operatorname{tg}\theta'/2$, $\zeta'' = \operatorname{tg}\theta''/2$, $\eta = \operatorname{tg}\varphi/2$, on a $-1 < \zeta' < 1$, $-1 < \zeta'' < 1$, $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$, d'où en premier lieu $\zeta'\eta < 1$ et $\zeta''\eta < 1$; la relation $\operatorname{tg}[(\theta' + \varphi)/2] \leqslant \operatorname{tg}[(\theta'' + \varphi)/2]$ est par suite (compte tenu de (5.4.5.3)) équivalente à

$$(1 - \zeta''\eta)(\zeta' + \eta) \leqslant (1 - \zeta'\eta)(\zeta'' + \eta)$$

ou encore à $(\zeta'' - \zeta')(1 + \eta^2) \geqslant 0$, ce qui prouve notre assertion.

En particulier, si $0 < \theta < \delta$, on a aussi $0 < 2\theta$. Par contre, il n'est pas possible d'étendre à de plus grands intervalles la règle précédente, ce qui impose de ne calculer qu'avec beaucoup de précautions sur les inégalités entre angles de $\mathfrak{A}'$ (cf. exerc. 6).

Si Δ', Δ'' sont deux demi-droites de $\mathfrak{F}$, θ', θ'' les angles correspondants dans $\mathfrak{A}'$, et si on suppose $\theta' < \theta''$, l'angle $\theta'' - \theta'$ est appelé l'*ouverture* du secteur angulaire $S^\circ(\Delta', \Delta'')$. Pour que ce secteur soit *saillant* (resp. *rentrant*), il faut et il suffit que l'on ait $\theta'' - \theta' > 0$ (resp. $\theta'' - \theta' < 0$) dans $\mathfrak{A}'$, car on voit facilement que cette condition équivaut à $\sin(\theta'' - \theta') > 0$ (resp. $\sin(\theta'' - \theta') < 0$) à l'aide des formules (5.4.4.3), (5.4.9.2) et de la définition (4.3.5). Si $\theta'' - \theta' > 0$, on dit que $S^\circ(\Delta', \Delta'')$ est *aigu* (resp. *obtus*, resp. *droit*) si l'angle $\theta'' - \theta'$ est aigu (resp. obtus, resp. droit).

La *bissectrice* du secteur angulaire $S^\circ(\Delta', \Delta'')$ est celle des deux demi-droites bissectrices du couple (Δ', Δ'') (5.4.8) qui est *contenue* dans le secteur angulaire $S^\circ(\Delta', \Delta'')$; on peut voir aisément que c'est celle de ces demi-droites telle que l'angle correspondant θ vérifie $\theta - \theta' = \theta'' - \theta > 0$ dans $\mathfrak{A}'$.

Remarquons enfin que pour *tout* angle θ_0, la translation $\theta \to \theta + \theta_0 + \varpi$ transforme $\mathfrak{A}'$ en le *complémentaire de* $\{\theta_0\}$ dans $\mathfrak{A}$, et par suite on peut « transporter » par cette translation la relation d'ordre de $\mathfrak{A}'$ sur ce complémentaire. Mais l'existence d'éléments d'ordre *fini* dans le groupe $\mathfrak{A}$ (par exemple l'angle δ, tel que $4\delta = 0$) ne permet pas, comme on l'a vu plus haut, de définir dans le groupe $\mathfrak{A}$ *tout entier* une relation d'ordre « raisonnable ».

(5.4.14) Considérons les ensembles à deux éléments du groupe des angles $\mathfrak{A}$, de la forme $\{\theta, \theta + \varpi\}$; quand on considère deux quelconques de ces ensembles $\{\theta, \theta + \varpi\}$, $\{\theta', \theta' + \varpi\}$, les 4 sommes d'un élément du premier et d'un élément du second ensemble se réduisent aux deux éléments $\theta + \theta'$, $\theta + \theta' + \varpi$ puisque $2\varpi = 0$; on peut donc définir une *addition* dans l'ensemble $\mathfrak{A}_0$ de ces parties à 2 éléments en posant

$$\{\theta, \theta + \varpi\} + \{\theta', \theta' + \varpi\} = \{\theta + \theta', \theta + \theta' + \varpi\}.$$

Il est immédiat que cette addition est associative et commutative ; en outre, elle admet l'ensemble $\{0, \varpi\}$ comme *élément neutre* ; enfin, on a

$$\{\theta, \theta + \varpi\} + \{-\theta, -\theta + \varpi\} = \{0, \varpi\}$$

donc, pour cette addition, $\mathfrak{A}_0$ est un *groupe commutatif*, dit *groupe des angles de droites* dans E. L'application $\theta \to \{\theta, \theta + \varpi\}$ est un *homomorphisme surjectif* de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}_0$, dont le noyau est formé des deux angles 0 et ϖ dans $\mathfrak{A}$.

Etant données deux droites vectorielles D, D′ dans E, soient Δ, Δ' deux demi-droites vectorielles ouvertes contenues respectivement dans D et D′, et soit $\theta = \widehat{(\Delta, \Delta')}$; si l'on change l'une ou l'autre des demi-droites Δ, Δ' en son opposée, on obtient toujours pour l'angle correspondant l'une des deux valeurs $\theta, \theta + \varpi$; l'ensemble $\theta_0 = \{\theta, \theta + \varpi\}$ est appelé l'*angle du couple des droites* (D, D′) et noté $\widehat{(\mathrm{D}, \mathrm{D}')}$. Il est *indépendant* de l'orientation choisie. Il résulte aussitôt de cette définition et de (5.4.6.1), (5.4.6.2) et (5.4.6.3) que l'on a, dans le groupe $\mathfrak{A}_0$,

(5.4.14.1) $\widehat{(\mathrm{D}, \mathrm{D})} = 0, \quad \widehat{(\mathrm{D}', \mathrm{D})} = -\widehat{(\mathrm{D}, \mathrm{D}')}, \quad \widehat{(\mathrm{D}, \mathrm{D}')} + \widehat{(\mathrm{D}', \mathrm{D}'')} = \widehat{(\mathrm{D}, \mathrm{D}'')}$

pour trois droites vectorielles quelconques D, D′, D″.

L'angle de droites $\delta_0 = \{\delta, \delta + \varpi\} = \{\delta, -\delta\}$ est l'unique solution dans $\mathfrak{A}_0$ de l'équation $2\varphi = 0$; on dit que c'est l'*angle droit* dans $\mathfrak{A}_0$.

On peut énoncer pour les droites la proposition (5.4.7) et ses conséquences, en notant simplement qu'ici il n'y a plus unicité des rotations ou symétries envisagées, puisqu'une droite est transformée en elle-même par *deux* rotations, savoir $\pm 1_{\mathrm{E}}$, et que si une symétrie s par rapport à une droite L transforme une droite D en une droite D′, il en est de même de la symétrie $-s$ (symétrie par rapport à la droite L′ *orthogonale* à L) ; L et L′ sont encore dites les *bissectrices* du couple de droites (D, D′).

On définit comme dans (5.4.10) l'angle d'un couple de droites ne passant pas nécessairement par 0.

Enfin, si $\theta_0 = \{\theta, \theta + \varpi\}$ est un angle de droites distinct de δ_0, les deux nombres $\operatorname{tg}\theta$ et $\operatorname{tg}(\theta + \varpi)$ sont égaux ; on les note encore $\operatorname{tg}\theta_0$ et on dit que ce nombre est la *tangente* de θ_0.

(5.4.15) On a vu (5.4.8) que dans le groupe des angles $\mathfrak{A}$, l'équation $2\theta = \varphi$ admet deux solutions $\theta, \theta + \varpi$; l'ensemble de ces solutions est donc un *angle de droites*, que, par abus de langage, on note $\varphi/2$, de sorte que l'on a, d'après (5.4.8.2),

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}$$

On sait (5.3.2) que si r est une rotation d'angle φ, il existe deux symétries s', s'' par rapport à des droites vectorielles D′, D″, telles que l'on ait $s''s' = r$.

Montrons que *l'on a nécessairement* $\widehat{(\mathrm{D}', \mathrm{D}'')} = \varphi/2$ *et réciproquement*. En effet, si Δ', Δ'' sont deux demi-droites d'origine 0 contenues respectivement dans D′, D″, et Δ une demi-droite quelconque d'origine 0, on a

$$\widehat{(\Delta, \Delta')} = \widehat{(\Delta', s'(\Delta))},$$

et

$$\widehat{(s'(\Delta), \Delta'')} = \widehat{(\Delta'', s''(s'(\Delta)))} = \widehat{(\Delta'', r(\Delta))},$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi = \widehat{(\Delta, r(\Delta))} &= \widehat{(\Delta, s'(\Delta))} + \widehat{(s'(\Delta), s''(s'(\Delta)))} = 2\widehat{(\Delta', s'(\Delta))} + 2\widehat{(s'(\Delta), \Delta'')}\\ &= 2\widehat{(\Delta', \Delta'')},\end{aligned}$$

d'où notre assertion.

Thèmes d'exercices

1) *Groupe des commutateurs de* **O**(E). Montrer que toute rotation est un commutateur $sts^{-1}t^{-1}$ dans **O**(E) ; en déduire que le groupe des commutateurs de **O**(E) est le groupe des rotations $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$.

2) *Racines carrées.* Montrer que les éléments de End(E) qui sont des carrés sont : 1° ceux ayant deux valeurs propres $\geqslant 0$, exception faite des endomorphismes nilpotents $\neq 0$; 2° ceux n'ayant pas de valeurs propres ; 3° les homothéties (utiliser la section (4.2), exerc. 5 et la section (5.3), exerc. 3). Pour un tel endomorphisme u, que peut-on dire, suivant les cas, de ses diverses « racines carrées », c'est-à-dire des endomorphismes v tels que $v^2 = u$?

3) Montrer que tout $u \in \mathbf{SL}(\mathrm{E})$ est un commutateur $vwv^{-1}w^{-1}$ de deux *éléments de* **GL**(E) (utiliser l'exerc. 1 en conjonction avec la section (5.3), exerc. 3, ainsi que la section (4.2), exerc. 5 et 7).

4) Soient $u_1 = r_1 v$, $u_2 = r_2 v$ deux éléments de **SL**(E), où r_1, r_2 sont des rotations et v un endomorphisme hermitien positif (cf. section (5.2), exerc. 3). Montrer que si u_1 et u_2 sont conjugués dans **GL**(E), on a $r_2 = r_1$ ou $r_2 = r_1^{-1} = r_1^*$ (calculer les traces de u_1 et u_2 en prenant leurs matrices relativement à une base orthonormale convenable). Inversement, si $r_2 = r_1^{-1}$, u_1 et u_2 sont conjugués dans **GL**(E), et ils sont même conjugués *dans* **SL**(E) lorsque r_1 n'est pas une rotation d'un angle droit et que la valeur propre > 1 de v est assez grande (cf. section (4.2), exerc. 5).

Soit r une rotation. Déduire de ce qui précède que si $r \neq -1_{\mathrm{E}}$, r est un commutateur $vuv^{-1}u^{-1}$ de *deux éléments de* **SL**(E) (chercher u sous la forme $r_1 w$, où r_1 est une rotation et w un automorphisme hermitien positif et montrer que l'on doit avoir $r_1^{-1} = rr_1$).

5) Montrer que, dans **GL**(E), tous les systèmes de trois éléments u, v, w tels que

$$(1) \qquad vu = -uv, \qquad wv = -vw, \qquad uw = -wu$$

s'obtiennent, après multiplication éventuelle par des homothéties, permutation éventuelle et transformation par un automorphisme intérieur $t \to gtg^{-1}$, à partir du système formé des trois transformations suivantes : la symétrie u_0 par rapport à une droite D ; la symétrie v_0 par rapport à une droite D′ telle que $2\widehat{(\mathrm{D}, \mathrm{D}')} = \delta_0$; enfin la rotation w_0 d'angle droit δ. Montrer en outre que si u, v sont deux éléments de **GL**(E) telles que $vu = -uv$, il existe $w \in \mathbf{GL}(\mathrm{E})$ vérifiant (1). (Utiliser les exerc. 1 et 3 de la section (5.3) pour montrer que si $uv = -vu$, si u n'a pas de valeur propre, on peut se ramener au cas où u est une rotation d'un angle droit et v une symétrie par rapport à une droite). Dans le groupe **SL**(E), il n'y a pas de couple d'éléments u, v tel que $vu = -uv$, en d'autre termes, -1_E n'est pas un commutateur $vwv^{-1}w^{-1}$, où v, w sont des *éléments de* **SL**(E) ; en outre, -1_E est le *seul* élément de **SL**(E) ayant cette propriété (cf. section (4.1), exerc. 7, section (4.3), exerc. 2, section (5.3), exerc. 3 et ci-dessus, exerc. 4).

6) Pour tout angle $\theta \in \mathfrak{A}'$ tel que $\theta > \delta$ (5.4.12), montrer qu'il existe un angle $\theta' \in \mathfrak{A}'$ tel que $0 < \theta' < \delta$ et que $\theta + \theta'$ appartienne à $\mathfrak{A}'$ et soit <0.

7) Dans l'ensemble des couples de demi-droites (resp. de droites) vectorielles, les classes d'intransitivité du groupe $\mathbf{O}^+(E)$ sont les ensembles de couples de même angle. Que sont les classes d'intransitivité du groupe **O**(E)?

§ 5. Nombres complexes

(5.5.1) *L'ensemble* $\mathbf{C}(E) = \mathbf{GO}^+(E) \cup \{0\}$ *des similitudes linéaires directes dans un plan euclidien* E *est un sous-corps commutatif de* End(E).

Avec les notations de (5.3.3), cet ensemble est en effet l'ensemble des endomorphismes u qui *commutent* à w, et par suite c'est un *sous-anneau* de End(E) (ce qui résulte aussi de l'expression (5.3.3.1) des matrices des similitudes directes relativement à une base orthonormale fixée). En outre, on a vu (5.2.3) que si un élément $u \in \mathbf{C}(E)$ n'est pas 0, il est *inversible* dans **C**(E), ce qui signifie que **C**(E) est un *corps* ; enfin, il résulte de (5.3.3) que ce corps est *commutatif*, $\mathbf{GO}^+(E)$ étant le groupe multiplicatif de ses éléments $\neq 0$.

(5.5.2) On a vu (5.2.1) que pour deux plans euclidiens quelconques E, E′, il y a une *isométrie* bijective g de E sur E′, et il résulte de (5.1.12) et (4.2.6) que l'on a $\mathbf{C}(E') = g\mathbf{C}(E)g^{-1}$, de sorte que tous les corps **C**(E) relatifs aux plans euclidiens sont *isomorphes*. Pour la commodité du langage, on va fixer la terminologie pour un de ces corps choisi une fois pour toutes.

Pour cela, on considère sur le plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (3.1.8) la structure de plan euclidien définie par le produit scalaire

$$((\xi_1, \eta_1)|(\xi_2, \eta_2)) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2.$$

Pour cette structure, les vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ forment donc une *base orthonormale*. On a vu d'autre part (5.3.4) que l'application

(5.5.2.1) $$u \to u(e_1)$$

est une *bijection* de $\mathbf{C}(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ *sur* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. On *transporte* au moyen de cette bijection la structure de corps de $\mathbf{C}(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ à l'ensemble $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ lui-même, c'est-à-dire que si z, z' sont deux points de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, u, u' les éléments (bien déterminés) de $\mathbf{C}(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ tels que $u(e_1) = z$, $u'(e_1) = z'$, on pose

(5.5.2.2) $$\begin{aligned} z + z' &= (u + u')(e_1) \\ zz' &= (uu')(e_1) \end{aligned}$$

Comme $(u + u')(e_1) = u(e_1) + u'(e_1)$ par définition (3.2.6), l'addition ainsi définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ coïncide avec celle déjà définie dans (3.1.8) ; pour la multiplication, il résulte de (5.3.3.3) que si l'on pose

$$z = \alpha e_1 + \beta e_2, \qquad z' = \alpha' e_1 + \beta' e_2$$

on a

(5.5.2.3) $$zz' = (\alpha\alpha' - \beta\beta')e_1 + (\alpha\beta' + \beta\alpha')e_2.$$

En vertu de (5.5.1), on a ainsi défini une structure de *corps commutatif* (il est bien entendu *inutile* de le vérifier directement). Ce corps est noté $\mathbf{C}$ et ses éléments sont appelés *nombres complexes.*

(5.5.3) On sait déjà que l'élément neutre 0 de l'addition dans $\mathbf{C}$ est l'origine $(0, 0)$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$; l'élément neutre de la multiplication correspond par (5.5.2.1) à 1_E et est donc égal à e_1. L'application $\xi \to \xi e_1$ est un isomorphisme du corps $\mathbf{R}$ sur le *sous-corps* de $\mathbf{C}$ formé des éléments ξe_1 ; on *identifie* $\mathbf{R}$ à ce sous-corps au moyen de cet isomorphisme, écrivant donc ξ au lieu de ξe_1 et en particulier 1 au lieu de e_1.

L'élément e_2 de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ correspond par (5.5.2.1) à la similitude directe dont la matrice relativement à $\{e_1, e_2\}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le carré est la matrice de -1_E. On écrit i l'élément e_2 de $\mathbf{C}$ et on a $i^2 = -1$ dans $\mathbf{C}$. Les nombres complexes s'écrivent donc d'une seule manière $z = \alpha + \beta i$, où α et β sont des nombres réels ; on dit que α est la *partie réelle* de z et on la note $\mathscr{R}(z)$, β la *partie imaginaire* de z et on la note $\mathscr{I}(z)$, la relation $\alpha + \beta i = 0$ étant équivalente à $\alpha = \beta = 0$. Avec ces notations, les règles de calcul (5.5.2.2) s'écrivent

(5.5.3.1) $$\begin{cases} (\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')i \\ (\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i \end{cases}$$

(5.5.4) Toutes les notions et tous les résultats relatifs aux similitudes directes se *traduisent* aussitôt pour les nombres complexes. Si u est une similitude directe, u^* son *adjointe* (5.2.5) et si $z = u(e_1)$, le nombre complexe $u^*(e_1)$ se note $\bar{z}$ et s'appelle le *conjugué* de z ; en vertu de (5.2.6.3) et (5.3.3.1), si $z = \alpha + \beta i$, on a $\bar{z} = \alpha - \beta i$. Les relations démontrées pour les adjoints dans (5.2.5), jointes au fait que $\mathbf{C}$ est commutatif, donnent les relations (qu'il est bien entendu trivial de vérifier directement sur la définition)

(5.5.4.1) $$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \qquad \overline{zz'} = \bar{z} \, . \, \bar{z}'$$

autrement dit, l'application $z \to \bar{z}$ est un *automorphisme involutif* du corps $\mathbf{C}$, laissant invariants les nombres réels. On peut écrire

(**5.5.4.2**) $$\mathscr{R}(z) = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad \mathscr{I}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

La relation $u^*u = (\det(u)) . 1_E$ dans $\mathbf{C}(E)$ se traduit en

(**5.5.4.3**) $$z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 = \|z\|^2$$

(carré de la norme euclidienne de z). On écrit ici $|z|$ au lieu de $\|z\|$, et on dit que $|z|$ est la *valeur absolue* du nombre complexe z (ce qui coïncide bien avec la définition de la valeur absolue d'un nombre réel (1.19) lorsque z est réel). La relation $|z| = 0$ est équivalente à $z = 0$; et pour $z \neq 0$, la formule (5.5.4.3) donne

(**5.5.4.4**) $$z^{-1} = \bar{z} . |z|^{-2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i$$

Comme $|z|^2$ est le déterminant (ou le multiplicateur) de u, on a, pour deux nombres complexes quelconques,

(**5.5.4.5**) $$|zz'| = |z| . |z'|$$

et en particulier, si $z \neq 0$,

(**5.5.4.6**) $$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

Enfin l'inégalité de Minkowski (5.1.3.1) s'écrit ici

(**5.5.4.7**) $$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

(**5.5.5**) Le groupe des éléments $\neq 0$ de $\mathbf{C}$ se note $\mathbf{C}^*$; l'application (5.5.2.1) est un *isomorphisme* du groupe des similitudes $\mathbf{GO}^+(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ sur $\mathbf{C}^*$. Par cet isomorphisme, le groupe des homothéties $\neq 0$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a pour image le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$, et le groupe des rotations $\mathbf{O}^+(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ a pour image le *groupe multiplicatif* $\mathbf{U}$ *des nombres complexes de valeur absolue* 1. Le groupe $\mathbf{C}^*$ est *produit direct* de ses sous-groupes $\mathbf{R}^*_+$ et $\mathbf{U}$ (5.1.12), ce qui se traduit par l'écriture unique

(**5.5.5.1**) $$z = |z| . \zeta \qquad \text{avec} \qquad |\zeta| = 1.$$

En vertu des définitions (5.4.1), l'application $\theta \to \mathbf{r}(\theta)(e_1)$ est un *isomorphisme* du groupe (additif) des angles $\mathfrak{A}$ sur le groupe (multiplicatif) $\mathbf{U}$; on pose $\mathbf{r}(\theta)(e_1) = \mathbf{e}(\theta)$ et l'on a donc *par définition* (5.4.4.1)

(**5.5.5.2**) $$\mathbf{e}(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta \qquad \text{pour} \qquad \theta \in \mathfrak{A},$$

pour l'orientation (dite *canonique*) de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ telle que (e_1, e_2) soit un couple direct.

Pour tout $z \in \mathbf{U}$, l'unique angle $\theta \in \mathfrak{A}$ tel que $\mathbf{e}(\theta) = z$ est appelé l'*amplitude* de z ; plus généralement on appelle *amplitude* d'un nombre complexe $z \neq 0$ l'amplitude du nombre $\zeta = z/|z| \in \mathbf{U}$ et on la note $\mathrm{Am}(z)$, de sorte que

(5.5.5.3) $$z = |z|\mathbf{e}(\mathrm{Am}(z))$$

et pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$, on a

(5.5.5.4) $$\begin{cases} \mathrm{Am}(zz') = \mathrm{Am}(z) + \mathrm{Am}(z') \\ \mathrm{Am}(\bar{z}) = \mathrm{Am}(z^{-1}) = -\mathrm{Am}(z) \text{ dans le groupe } \mathfrak{A}. \end{cases}$$

(5.5.6) Les définitions précédentes, jointes à (5.4.1.1), donnent les formules

(5.5.6.1) $$\mathbf{e}(\theta + \theta') = \mathbf{e}(\theta)\mathbf{e}(\theta')$$

(5.5.6.2) $$\mathbf{e}(-\theta) = \mathbf{e}(\theta)^{-1} = \overline{\mathbf{e}(\theta)}$$

(5.5.6.3) $$|\mathbf{e}(\theta)| = 1, \qquad \mathrm{Am}(\mathbf{e}(\theta)) = \theta$$

(5.5.6.4) $$\mathbf{e}(0) = 1, \qquad \mathbf{e}(\delta) = i, \qquad \mathbf{e}(\varpi) = -1, \qquad \mathbf{e}(-\delta) = -i$$

(5.5.6.5) $$\begin{cases} \cos\theta = \mathscr{R}(\mathbf{e}(\theta)) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}(\theta) + \mathbf{e}(-\theta)), \\ \sin\theta = \mathscr{T}(\mathbf{e}(\theta)) = \dfrac{1}{2i}(\mathbf{e}(\theta) - \mathbf{e}(-\theta)). \end{cases}$$

(5.5.7) L'expérience prouve qu'il y a pratiquement *toujours* avantage, lorsqu'on veut calculer sur les fonctions trigonométriques, à les exprimer à l'aide de la *fonction complexe* $\mathbf{e}(\theta)$ en utilisant (5.5.5.2) ou (5.5.6.5) et de se servir ensuite de la *relation fondamentale* (5.5.6.1) qui exprime un *isomorphisme de groupes*, nullement visible sur les formules équivalentes (5.4.4.3).

Par exemple, proposons-nous de transformer l'expression

(5.5.7.1) $$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta \quad \text{pour} \quad \theta \neq 0.$$

C'est la partie réelle de

$$1 + \mathbf{e}(\theta) + \mathbf{e}(2\theta) + \mathbf{e}(3\theta) = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 = \frac{\zeta^4 - 1}{\zeta - 1}$$

(où $\zeta = \mathbf{e}(\theta)$) ce qui s'écrit (avec l'abus de langage introduit en (5.4.12))

$$\frac{\mathbf{e}(2\theta)(\mathbf{e}(2\theta) - \mathbf{e}(-2\theta))}{\mathbf{e}(\theta/2)(\mathbf{e}(\theta/2) - \mathbf{e}(-\theta/2))}$$

ou, d'après (5.5.6.5)

$$\mathbf{e}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta/2} = \left(\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right)\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta/2}$$

et finalement on voit que l'expression (5.5.7.1) est égale à

$$\cos\frac{3\theta}{2}\,\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta/2}$$

et par surcroît on a aussi la relation

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = \sin\frac{3\theta}{2}\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta/2}$$

(**5.5.8**) Dans le corps des nombres complexes, l'équation

(**5.5.8.1**) $$z^2 = a \qquad (a \in \mathbf{C})$$

a la seule racine 0 si $a = 0$, deux racines opposées si $a \neq 0$; si l'on pose $a = \rho\mathbf{e}(\varphi)$ où $\rho > 0$ et $\varphi \in \mathfrak{A}$, l'équation (5.5.8.1) équivaut en effet à

$$|z|^2 = \varphi, \qquad 2\mathrm{Am}(z) = \varphi$$

ce qui donne $|z| = \sqrt{\rho}$, et on sait que l'équation $2\theta = \varphi$ a deux solutions θ et $\theta + \varpi$ (5.4.8), d'où

(**5.5.8.2**) $$z = \sqrt{\rho}\,.\,\mathbf{e}(\theta) \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{\rho}\,.\,\mathbf{e}(\theta).$$

Si $a = \alpha + \beta i$, on a $\operatorname{tg}\theta = \beta/(\rho + \alpha)$ en vertu de (5.4.8.2), d'où, par (5.4.5.3)

(**5.5.8.3**) $$z = \pm\left(\sqrt{\frac{\rho + \alpha}{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2(\rho + \alpha)}}i\right)$$

avec $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.(*)

Thèmes d'exercices

1) Montrer que l'équation $z^n = 1$ a n solutions distinctes dans $\mathbf{C}$, pour $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ et calculer explicitement ces solutions (pour $n = 5$, on pourra commencer par calculer $\cos(\mathrm{Am}(z))$).

2) *Sous-anneaux maximaux de* End(E). Montrer que tout sous-anneau *maximal* S de End(E) (dans l'ensemble des sous-anneaux distincts de End(E)) contenant le centre de End(E) est de l'une des formes $g\mathrm{B}_0g^{-1}$, $g\mathbf{C}(\mathrm{E})g^{-1}$, où B_0 est l'anneau considéré dans la section (4.1), exerc. 5 et $g \in \mathbf{GL}(\mathrm{E})$. (Si S contient un endomorphisme ayant des valeurs propres et n'appartenant pas au centre de End(E), montrer que S est nécessairement de la forme $g\mathrm{B}_0g^{-1}$. Sinon, utiliser la section (5.3) exerc. 3, pour montrer que S est de la forme $g\mathbf{C}(\mathrm{E})g^{-1}$).

3) *Représentation paramétrique de Cayley.* Montrer que tout nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq -1$ peut s'écrire d'une seule manière sous la forme

$$(1 + \xi i)(1 - \xi i)^{-1}$$

où ξ est réel.

(*) En utilisant d'autres propriétés des nombres réels, qui ne se déduisent pas des axiomes du chap. I, on peut montrer que *tout* polynôme non constant à coefficients dans $\mathbf{C}$ a *au moins une racine* dans $\mathbf{C}$. Voir par exemple [12], § 33, exerc. 25.

CHAPITRE VI

Géométrie affine à trois dimensions

§ 1. Bases ; matrices

(6.1.1) Soient a, b, c trois vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel E ; cela signifie que la somme $F = D_{Oa} + D_{Ob} + D_{Oc}$ est *directe* (3.1.8). On dit alors que $\{a, b, c\}$ est une *base* de F ; pour tout $x \in F$, les nombres ξ, η, ζ tels que $x = \xi a + \eta b + \zeta c$ sont déterminés de manière unique et on dit que ce sont respectivement les *coordonnées* de x par rapport à a, b, c (ou par rapport à la base $\{a, b, c\}$ si cela n'entraîne pas confusion).

Avec les mêmes notations, les sommes (directes) $D_{Oa} + D_{Ob}$, $D_{Ob} + D_{Oc}$, $D_{Oc} + D_{Oa}$ sont des *plans vectoriels* en vertu de (4.1.4), que l'on note respectivement P_{Oab}, P_{Obc}, P_{Oca} ; on a

$$P_{Oab} \cap P_{Obc} = D_{Ob}, \qquad P_{Obc} \cap P_{Oca} = D_{Oc}, \qquad P_{Oca} \cap P_{Oab} = D_{Oa}$$

car dire par exemple que $x = \xi a + \eta b + \zeta c$ appartient à la fois à P_{Oab} et à P_{Oac} signifie que $\zeta = \eta = 0$.

(6.1.2) *Soit* E *un espace vectoriel admettant une base* $\{a, b, c\}$ *de trois éléments. Alors :*

(i) *Pour tout vecteur* $x \neq 0$ *de* E, *l'un au moins des ensembles* $\{a, b, x\}$, $\{a, x, c\}$, $\{x, b, c\}$ *est libre.*

(ii) *Pour tout ensemble libre* $\{x, y\}$ *dans* E, *l'un au moins des ensembles* $\{x, y, c\}$, $\{x, b, y\}$, $\{a, x, y\}$ *est libre.*

(iii) *Tout ensemble libre* $\{x, y, z\}$ *de trois vecteurs de* E *est une base de* E.

(iv) *Tout ensemble* $\{x, y, z, t\}$ *de quatre vecteurs de* E *est lié.*

(i) Le vecteur x ne peut appartenir aux trois plans P_{Oab}, P_{Obc}, P_{Oca}, dont l'intersection est $\{0\}$ (6.1.1 et 3.1.8) ; si par exemple $x \notin P_{Obc}$, la droite D_{Ox} rencontre P_{Obc} au seul point 0 (3.3.2) et par suite la somme $D_{Ox} + D_{Ob} + D_{Oc}$ est directe (3.1.8), d'où la conclusion.

(ii) Supposons par exemple que $\{x, b, c\}$ soit libre. On ne peut avoir à la fois $y \in P_{Oxb}$ et $y \in P_{Oxc}$ sans quoi (6.1.1) on aurait $y \in D_{Ox}$, contrairement à l'hypothèse ; si par exemple $y \notin P_{Oxc}$, le raisonnement de (i) montre que $\{x, y, c\}$ est libre.

(iii) Supposons par exemple que $\{x, b, c\}$ et $\{x, y, c\}$ soient libres. Comme $x = \xi a + \eta b + \zeta c$ et $x \notin P_{Obc}$, on a $\xi \neq 0$, donc $a = \xi^{-1}x - \xi^{-1}\eta b - \xi^{-1}\zeta c$, autrement dit $D_{Oa} \subset D_{Ox} + D_{Ob} + D_{Oc}$, et par suite

$$E \subset D_{Ox} + D_{Ob} + D_{Oc} \subset E\ ;$$

la somme $D_{Ox} + D_{Ob} + D_{Oc}$ étant directe, $\{x, b, c\}$ est une base de E. Le même raisonnement appliqué en remplaçant a, b, c, x par b, c, x, y respectivement montre que $\{x, y, c\}$ est une base. Enfin, appliqué en remplaçant a, b, c, x par c, x, y, z et compte tenu de l'hypothèse que $\{x, y, z\}$ est libre, il montre que $\{x, y, z\}$ est une base.

(iv) Si $\{x, y, z\}$ est déjà lié, il en est de même de $\{x, y, z, t\}$; sinon $\{x, y, z\}$ est une base de E par (iii) et on a par suite $t = \lambda x + \mu y + \nu z$, donc $\{x, y, z, t\}$ est lié.

(6.1.3) *Pour qu'un espace vectoriel* E *vérifie l'axiome* (D_3) *du chap.* II, *il faut et il suffit qu'il admette une base de trois éléments.*

Il résulte de (6.1.2, (iv)) qu'un espace vectoriel ayant une base de trois éléments vérifie (D_3). Réciproquement, si E vérifie (D_3), il existe dans E un ensemble libre $\{a, b, c\}$, et pour tout $x \in E$, il existe par hypothèse trois scalaires *non tous nuls* ρ, λ, μ, ν tels que $\rho x + \lambda a + \mu b + \nu c = 0$. On ne peut avoir $\rho = 0$, sans quoi on aurait $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$ et comme λ, μ et ν ne sont pas tous trois nuls, cela serait contraire à (D_3). On en déduit que $x = \xi a + \eta b + \zeta c$ avec $\xi = -\rho^{-1}\lambda, \eta = -\rho^{-1}\mu$, $\zeta = -\rho^{-1}\nu$; autrement dit $E = D_{Oa} + D_{Ob} + D_{Oc}$, et comme la somme est directe par hypothèse, cela achève la démonstration.

(6.1.4) Nous dirons qu'un espace vectoriel E vérifiant (D_3) est un *espace vectoriel à* 3 *dimensions.*

Dans toute la suite de ce chapitre, E *désigne un espace vectoriel à* 3 *dimensions.*

Il résulte de (6.1.2) que pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe des vecteurs y dans E tels que $\{x, y\}$ soit libre, et que pour un tel ensemble $\{x, y\}$, il existe z dans E tel que $\{x, y, z\}$ soit une *base* de E.

(6.1.5) Ces résultats s'interprètent en disant que pour toute droite vectorielle D dans E, il existe un *plan vectoriel* P′ *supplémentaire de* D et que pour tout plan vectoriel P, il existe une *droite vectorielle* D′ *supplémentaire de* P.

Si on appelle *plan* (ou *plan affine*) dans E une variété linéaire dont la direction est un *plan vectoriel*, nous allons en déduire que dans E *il y a identité entre plans et hyperplans* (3.3.5). En effet, ce qui précède montre déjà que tout plan est un hyperplan. Inversement, soient H un hyperplan vectoriel dans E, D une droite vectorielle supplémentaire de H, P′ un plan vectoriel supplémentaire de D, p, q les projections sur D et P′ correspondant à la décomposition de E en somme directe D + P′ ; la restriction $q|$H de q à H est une application linéaire *bijective* de H sur P′. En effet, on a

$q(\mathrm{E}) = \mathrm{P}'$ et $q(\mathrm{E}) = q(\mathrm{D}) + q(\mathrm{H}) = q(\mathrm{H})$ puisque $q(\mathrm{D}) = \{0\}$; d'autre part $q^{-1}(0) = \mathrm{D}$, donc le noyau de $q|\mathrm{H}$ est $\mathrm{H} \cap q^{-1}(0) = \mathrm{H} \cap \mathrm{D} = \{0\}$, ce qui prouve notre assertion (3.2.4). Dans E, *ou bien* deux plans P, P′ ont *même direction, ou bien* leur intersection est une *droite*. En effet, soient P, P′ deux plans dont les directions P_0, P'_0 sont distinctes ; il existe donc par exemple un point $a \in \mathrm{P}'_0$ non dans P_0, et si $g(x) = \alpha$ est une équation de P (3.3.6), on a $g(a) \neq 0$. D'ailleurs, par translation, on peut se borner au cas où $\mathrm{P}' = \mathrm{P}'_0$. Comme $g|\mathrm{P}' = g'$ vérifie $g'(a) \neq 0$, c'est une forme linéaire non identiquement nulle *dans* P′, et l'ensemble $\mathrm{P} \cap \mathrm{P}'$ étant l'ensemble des $x \in \mathrm{P}'$ tels que $g'(x) = \beta$, c'est un hyperplan *dans* P′ (3.3.6), c'est-à-dire une *droite* (4.1.6).

Enfin, les *seuls* sous-espaces vectoriels de E sont $\{0\}$, E, les *droites* vectorielles et les *plans* vectoriels. En effet, si un sous-espace vectoriel V de E n'est ni $\{0\}$, ni une droite, il contient deux droites distinctes $\mathrm{D}_{\mathrm{O}a}$, $\mathrm{D}_{\mathrm{O}b}$, donc aussi le plan vectoriel $\mathrm{P}_{\mathrm{O}ab}$ somme directe $\mathrm{D}_{\mathrm{O}a} + \mathrm{D}_{\mathrm{O}b}$; s'il est distinct de ce plan, il contient un vecteur $c \notin \mathrm{P}_{\mathrm{O}ab}$, donc (3.1.8) la somme $\mathrm{D}_{\mathrm{O}a} + \mathrm{D}_{\mathrm{O}b} + \mathrm{D}_{\mathrm{O}c}$ est directe et par suite (6.1.2) égale à E.

(6.1.6) Soit u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, et soit $\mathrm{N} = u^{-1}(0)$ son noyau ; d'après ce qui précède, quatre cas sont possibles :

1° $\mathrm{N} = \mathrm{E}$, autrement dit u est *identiquement nulle*, $u(\mathrm{E}) = \{0\}$.

2° N est un plan vectoriel, qui admet donc une droite vectorielle supplémentaire D dans E. On a $u(\mathrm{E}) = u(\mathrm{N}) + u(\mathrm{D}) = u(\mathrm{D})$, et la restriction $u|\mathrm{D}$ a pour noyau $\mathrm{N} \cap \mathrm{D} = \{0\}$, donc est *injective* (3.2.4) ; par suite $u(\mathrm{D})$ est une *droite vectorielle* dans F.

3° N est une droite vectorielle, qui admet donc un plan vectoriel supplémentaire P dans E. On a $u(\mathrm{E}) = u(\mathrm{N}) + u(\mathrm{P}) = u(\mathrm{P})$, et la restriction $u|\mathrm{P}$ a pour noyau $\mathrm{N} \cap \mathrm{P} = \{0\}$, donc est *injective* (3.2.4) ; par suite $u(\mathrm{P})$ est un *plan vectoriel* dans F.

4° $\mathrm{N} = \{0\}$, donc u est *injective* (3.2.4), et par suite $u(\mathrm{E})$ est isomorphe à E, autrement dit un *sous-espace à* 3 *dimensions* dans F.

Rappelons en outre (4.1.1) que si u est injective, alors, pour *toute* base $\{a, b, c\}$ de E, l'ensemble $\{u(a), u(b), u(c)\}$ est *libre* dans F. Inversement, si pour *une* base $\{a, b, c\}$ de E, $\{u(a), u(b), u(c)\}$ est *libre*, alors u est *injective* : en effet, la relation $u(\xi a + \eta b + \zeta c) = 0$ est équivalente à $\xi u(a) + \eta u(b) + \zeta u(c) = 0$, donc entraîne $\xi = \eta = \zeta = 0$ par hypothèse, ce qui prouve notre assertion (3.2.4).

On dit respectivement que u est de *rang* 0, 1, 2, 3 dans les cas 1°, 2°, 3°, 4° ci-dessus. En particulier, pour $\mathrm{F} = \mathrm{E}$:

(6.1.7) *Si u est un endomorphisme de* E, $\{a, b, c\}$ *une base de* E, *les quatre conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *u est injectif* ;

b) *u est surjectif* ;

c) *u est bijectif* ;

d) $\{u(a), u(b), u(c)\}$ *est une base de* E.

(6.1.8) Si $\{a_1, a_2, a_3\}$ est une base de E, l'application

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$$

est un *isomorphisme* de l'espace vectoriel produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (3.1.8) sur E ; tous les espaces vectoriels à 3 dimensions sont donc *isomorphes.* Nous laissons au lecteur le détail de l'extension quasi-automatique aux espaces à 3 dimensions de ce qui a été fait dans les sections (4.1.10) à (4.1.14) et dans (4.2.4) pour les espaces à 2 dimensions. Bornons-nous à dire que le choix d'une base $\{a_1, a_2, a_3\}$ dans E détermine un *isomorphisme* $u \to (u(a_1), u(a_2), u(a_3))$ de Hom(E, F) sur $\mathrm{F} \times \mathrm{F} \times \mathrm{F}$. En particulier, si P, P′ sont deux plans vectoriels dans E, D (resp. D′) une droite supplémentaire de P (resp. P′), il y a toujours des automorphismes u de E tels que $u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$ et $u(\mathrm{D}) = \mathrm{D}'$.

Les coordonnées par rapport à $\{a_1, a_2, a_3\}$ d'un vecteur

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$$

de E se disposent en une *matrice de type* (3, 1) ou « colonne »

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

notée $M(x)$. Pour un second espace vectoriel à 3 dimensions E′ et une base $\{a'_1, a'_2, a'_3\}$ de cet espace, une application linéaire $u \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ est déterminée par les trois vecteurs

$$\begin{aligned} u(a_1) &= \alpha_{11} a'_1 + \alpha_{21} a'_2 + \alpha_{31} a'_3 \\ u(a_2) &= \alpha_{12} a'_1 + \alpha_{22} a'_2 + \alpha_{32} a'_3 \\ u(a_3) &= \alpha_{13} a'_1 + \alpha_{23} a'_2 + \alpha_{33} a'_3 \end{aligned}$$

ou encore par les 9 nombres α_{ij} que l'on dispose en une *matrice de type* (3, 3) (ou matrice à 3 lignes et 3 colonnes)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

notée $M(u)$. Une *forme linéaire* f sur E est déterminée par les 3 scalaires $\alpha_1 = f(a_1)$, $\alpha_2 = f(a_2)$, $\alpha_3 = f(a_3)$, disposés en une *matrice de type* (1, 3) ou « ligne » notée $M(f)$

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$$

Enfin, on peut ici définir aussi les matrices de type (2, 3) et de type (3, 2), correspondant respectivement aux applications linéaires de E dans un *plan vectoriel* F (où l'on a fait choix d'une base) et aux applications linéaires de F dans E.

Le « calcul des matrices » n'est plus alors, comme dans (4.1), qu'une traduction triviale des définitions sur les applications linéaires.

En choisissant *convenablement* les *deux* bases de E et E′ comme dans (4.1.14) on voit que l'on peut faire en sorte que la matrice de $u \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ soit respectivement

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

suivant que u est de rang 0, 1, 2 ou 3. De même, si u est une *involution* dans E, il y a *une* base de E relativement à laquelle $M(u)$ a l'une des quatre formes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(6.1.9) L'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ des formes linéaires sur E est un *espace vectoriel à* 3 *dimensions*, appelé encore *dual* de E et noté E*. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on peut écrire $x = f_1(x)a_1 + f_2(x)a_2 + f_3(x)a_3$, où f_1, f_2, f_3 sont trois *formes linéaires* sur E, dites *formes coordonnées* relativement à a_1, a_2 et a_3 ; elles constituent une *base* de E, dite *base duale* de $\{a_1, a_2, a_3\}$. Les démonstrations copient celles de (4.1.15).

Tout *plan* P dans E a une équation de la forme $f(x) = \lambda$, où f est un élément *non nul* du dual E* (3.3.6) et réciproquement ; toute autre équation de P est de la forme $\gamma f(x) = \gamma\lambda$ où $\gamma \neq 0$; la *direction* de P est le plan vectoriel d'équation $f(x) = 0$; pour que deux plans P, Q d'équations respectives $g(x) = \lambda$, $h(x) = \mu$ soient *parallèles* (ou, ce qui revient au même, aient même *direction* (3.3.2)), il faut et il suffit que g et h soient *linéairement dépendantes.*

Si l'on a fixé une base $\{a_1, a_2, a_3\}$ de E, toute équation d'un plan P est donc de la forme

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = \lambda$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *non tous trois nuls* ; si Q est un second plan d'équation

$$\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 = \mu$$

pour que P et Q soient parallèles, il faut et il suffit qu'il existe $\gamma \neq 0$ tel que $\beta_1 = \gamma\alpha_1, \beta_2 = \gamma\alpha_2$ et $\beta_3 = \gamma\alpha_3$.

(6.1.10) *Pour que trois plans d'équations* $f(x) = \lambda$, $g(x) = \mu$, $h(x) = v$ *aient un point commun et un seul, il faut et il suffit que* f, g, h *soient linéairement indépendantes dans* E*.

Considérons d'abord le cas où $\lambda = \mu = v = 0$. Si f, g, h sont linéairement *dépendantes* dans E*, ou bien elles sont sur une même droite vectorielle de E^*, et dans ce cas les trois plans sont identiques ; ou bien deux d'entre elles, par exemple f, g, sont linéairement indépendantes et alors il existe deux scalaires α, β tels que $h = \alpha f + \beta g$; comme les plans $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ ont alors une *droite vectorielle* D pour intersection (6.1.5), tout point $x \in D$ annule f et g, donc aussi h et par suite D est l'intersection des trois plans. Enfin, si l'ensemble $\{f, g, h\}$ est *libre*, c'est une *base* de E^* (6.1.2), donc les trois formes coordonnées f_1, f_2, f_3 relatives à une base de E sont combinaisons linéaires de f, g, h ; si un point $x \in E$ annule f, g, h, il annule donc aussi f_1, f_2, f_3, c'est-à-dire que $x = 0$.

Passant au cas général, si f, g, h sont linéairement indépendantes, l'intersection des plans P, Q d'équations $f(x) = \lambda$, $g(x) = \mu$ est une droite D (6.1.5) dont la direction D_0 est l'intersection des plans d'équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$; par suite D_0 n'est pas contenue dans la direction du plan R d'équation $h(x) = \gamma$, et on en conclut que $D \cap R$ est formé d'un seul point (3.3.8). Si au contraire les directions des plans P, Q, R contiennent une même droite D_0, ou bien deux des plans P, Q, R sont parallèles et distincts, donc n'ont aucun point commun ; ou bien aucun des couples (P, Q), (Q, R), (R, P) n'est formé de plans parallèles, et dans ce cas les intersections de ces trois couples sont trois droites parallèles à D_0 (6.1.5) ; on sait alors (3.1.13) que, ou bien ces trois droites n'ont aucun point commun, ou bien elles sont identiques ; lorsque f, g, h sont linéairement dépendantes, l'intersection $P \cap Q \cap R$ est donc vide ou contient une droite.

Thèmes d'exercices

1) Pour toute transvection $t \neq 1_E$ (section (3.3), exerc. 6), il y a une base de E relativement à laquelle on a

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversement, soit $B_{ij}(\lambda)$ ($i \neq j$, i, j égal à 1, 2 ou 3) la matrice dont les éléments diagonaux α_{hh} sont égaux à 1, l'élément α_{ij} à λ, et les autres à 0 ; montrer que ce sont des matrices de transvections relativement à une base convenable ; que sont le plan et la droite de chacune de ces transvections ?

Ecrire le produit d'une matrice de type (3, 3) et de l'une des matrices $B_{ij}(\lambda)$ dans un ordre quelconque. Ecrire aussi le produit d'une matrice de type (3, 3) et d'une des 5 matrices autres que I ayant la propriété que *chaque* ligne et *chaque* colonne contient un seul élément $\neq 0$, égal à 1 (dites « *matrices de permutation* »). Démontrer le résultat analogue à la conclusion de l'exerc. 2 de la section (4.1).

2) Si u est un endomorphisme de E de rang 1, il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de u ait l'une des deux formes

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(considérer le noyau et l'image de u dans E).

Si u est un endomorphisme de E de rang 2, il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de u ait l'une des formes

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(même méthode ; cf. section (4.1), exerc. 4). Si un endomorphisme u de E est nilpotent, on a $u^3 = 0$ si u est de rang 2, $u^2 = 0$ si u est de rang 1.

Montrer que si $u \in \operatorname{End}(E)$ est nilpotent, $1 + u$ est un automorphisme de E et calculer directement $(1 + u)^{-1}$ sans utiliser de base de E (chercher un tel inverse de la forme $1 + v$, et montrer qu'on peut prendre pour v un polynôme en u).

3) *L'anneau* End(E) (ou $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$). A) *Centre.* Montrer que le centre de End(E) est le corps des homothéties (isomorphe à $\mathbf{R}$) (même méthode que dans la section (4.1), exerc. 5).

B) *Diviseurs de zéro.* Pour que u soit diviseur de zéro (à gauche ou à droite) dans End(E), il faut et il suffit que u soit de rang 0, 1 ou 2 ; les éléments non diviseurs de zéro sont donc les éléments *inversibles* (considérer l'image et le noyau de u).

C) *Idéaux.* Montrer que tout idéal à droite (resp. à gauche) de $A = \operatorname{End}(E)$ est soit égal à 0, soit égal à A, soit de la forme pA (resp. Ap), où p est un projecteur de rang 1 ou 2 (méthode de la section (4.1), exerc. 5, en considérant dans l'idéal envisagé un élément de rang maximum, et observant que la somme de deux éléments d'un idéal appartient à l'idéal). Les seuls idéaux bilatères de A sont $\{0\}$ et A. Calculer le produit (section (4.1), exerc. 5 c)) de deux idéaux.

D) *Sous-anneaux.* Si p est un projecteur de rang 1 (resp. 2), pAp est un sous-corps isomorphe à $\mathbf{R}$ (resp. un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$).

Dans A, montrer que l'ensemble B_0 des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

est un sous-anneau *maximal* dans l'ensemble des sous-anneaux distincts de A. Les ensembles C_0, C'_0, C''_0, C'''_0 des matrices respectivement de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

sont des sous-anneaux *commutatifs maximaux* dans l'ensemble des sous-anneaux commutatifs de A.

4) *Le groupe* $\mathbf{GL}(E)$ (ou $\mathbf{GL}_3(\mathbf{R})$ ou $\mathbf{GL}(3, \mathbf{R})$). A) *Générateurs.* Soit $u \neq 1_E$ un élément de $\mathbf{GL}(E)$. Si $1_E - u$ est de rang 1, u est une dilatation ou une transvection. Si $1_E - u$ est de rang 2, c'est-à-dire si $E(1 ; u)$ est une droite D, montrer que u est produit de deux transvections, ou d'une transvection et d'une dilatation, sauf dans le cas où il existe un plan P supplémentaire de D, globalement invariant par u, et tel que $u|P$ soit une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$; dans ce dernier cas, u est produit de deux transvections et d'une dilatation et ce résultat ne peut être amélioré (observer que si t est une transvection quelconque, il n'existe aucun plan dont tous les points soient invariants par tu). Enfin, si $1_E - u$ est de rang 3, montrer que u est produit de deux

transvections et d'une dilatation, ou de trois transvections, sauf lorsque u est une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$; dans ce dernier cas, u est produit de trois transvections et d'une dilatation, et ce résultat ne peut être amélioré.

Montrer que toute transvection est produit de deux *quasi-symétries* (dilatations involutives).

B) *Centre et centralisateurs.* Soit $Z = Z(E)$ le groupe des homothéties de rapport $\neq 0$. Montrer que le centralisateur dans $\mathbf{GL}(E)$ du groupe $\Theta(E, P)$ des transvections de plan P est le groupe $Z\Theta(E, P)$ (considérer les droites des transvections du groupe $\Theta(E, P)$). Le centralisateur du groupe $\Gamma(E, P)$ laissant invariants les points de P est égal à Z. En particulier Z est le centre de $\mathbf{GL}(E)$. Si $L(E, P)$ est le sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$ laissant (globalement) invariant le plan P, définir un homomorphisme de $L(E, P)$ *sur* le groupe linéaire $\mathbf{GL}(P)$, dont le noyau est $\Gamma(E, P)$. Le groupe $L(E, P)$ est le *normalisateur* dans $\mathbf{GL}(E)$ des groupes $\Theta(E, P)$ et $\Gamma(E, P)$.

Le centralisateur dans $\mathbf{GL}(E)$ du groupe $\Theta'(E, D)$ des transvections de droite D est le groupe $Z\Theta'(E, D)$ (observer que ce centralisateur doit laisser globalement invariant tout plan contenant D, et qu'une dilatation ne peut permuter à une transvection $\neq 1_E$ (section (3.3), exerc. 6)).

Soit $L_0(E, D)$ le sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$ laissant invariants tous les points d'une droite vectorielle D. Soient P un plan vectoriel supplémentaire de D, et soit p la projection de E sur P correspondant à la décomposition $E = D + P$; montrer que pour tout $u \in L_0(E, D)$, $y \to p(u(y))$ est un automorphisme u' de P et que l'application $u \to u'$ est un homomorphisme de $L_0(E, D)$ *sur* le groupe linéaire $\mathbf{GL}(P)$, dont le noyau est le groupe $\Theta'(E, D)$. Le groupe $L(E, D)$ laissant globalement invariante D est égal à $ZL_0(E, D)$.

C) *Propriétés de transitivité.* Le groupe $\mathbf{GL}(E)$ opère de façon *doublement transitive*, mais *non* triplement transitive, sur les droites vectorielles de E. Généraliser les autres assertions de l'exerc. 6, C) de la section (4.1).

Soient (D_1, D_2, D_3, D_4), (D'_1, D'_2, D'_3, D'_4) deux quadruplets dont chacun est formé de quatre droites vectorielles dont trois quelconques ne sont pas dans un même plan (on dit pour abréger qu'un tel quadruplet est un *repère projectif*). Montrer qu'il existe un automorphisme $u \in \mathbf{GL}(E)$ tel que $u(D_i) = D'_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4 ; si u' est un second automorphisme tel que $u'(D_i) = D'_i$ pour tout i, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u' = h_\lambda u$.

D) *Sous-groupes de* $\mathbf{GL}(E)$. On appelle *drapeau* un couple (D, P) formé d'une droite vectorielle D et d'un plan P *contenant* D. Montrer que, pour une base convenable de E, le groupe B laissant globalement invariants D *et* P s'identifie au groupe des matrices « triangulaires inférieures »

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

telles que $\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} \neq 0$. Soit U le sous-groupe de B formé des matrices de la forme précédente et telles que $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$ (identique au sous-groupe de $\mathbf{SL}(E)$ (section (6.2), exerc. 5) laissant invariants tous les points de D et dont la restriction à P est le groupe $\Theta(P, D)$ des transvections de droite D). Montrer que U est le *groupe des commutateurs* de $\mathbf{B}$; quel est le groupe des commutateurs de U ? Quel est le groupe engendré par les commutateurs $uvu^{-1}v^{-1}$ où $u \in U$ et $v \in \mathbf{B}$? Montrer que $\mathbf{B}$ est le *normalisateur* de B et de U dans $\mathbf{GL}(E)$ (observer que D et P sont respectivement l'unique droite vectorielle et l'unique plan vectoriel globalement invariants par *tous* les éléments de U). Le sous-groupe B est contenu dans le sous-groupe $L(E, D)$ défini dans B), et $L(E, D)$ est un sous-groupe *maximal* de $\mathbf{GL}(E)$.

Le sous-groupe T des matrices *diagonales*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

s'identifie au sous-groupe de **GL**(E) formé des automorphismes laissant globalement invariantes trois droites vectorielles de E non contenues dans un même plan. Montrer que le *normalisateur* W de T dans **GL**(E) est le sous-groupe engendré par T et par les cinq « matrices de permutation » (exerc. 1) distinctes de I.

Montrer que toute matrice de **GL**(E) qui n'appartient pas à B s'écrit d'*une seule manière* sous la forme X_1PDX_2, où $D \in \mathrm{T}$, X_1 et X_2 appartiennent à U et P est une « matrice de permutation » (« *décomposition de Bruhat* » du groupe **GL**(3, **R**)). (Raisonner géométriquement en considérant l'image du drapeau (D, P) qui définit B par un automorphisme $u \in \mathbf{GL}(\mathrm{E})$; examiner les divers cas possibles suivant la position de u(D) et u(P) par rapport à D et P, puis, dans chaque cas, montrer comment il faut choisir successivement les automorphismes ayant pour matrices les matrices X_2^{-1}, D^{-1}, P^{-1} et X_1^{-1} de façon qu'en les composant successivement avec u, on obtienne finalement l'identité 1_{E}).

5) Etendre à l'espace à 3 dimensions le « théorème fondamental » de la géométrie affine (section (4.1), exerc. 7).

6) Montrer que toute matrice de type (3, 3) et de rang 1 peut être écrite

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3 \\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix}$$

pour des nombres λ_i et μ_i convenables ($i = 1, 2, 3$).

7) Etendre à l'espace à trois dimensions les résultats de l'exerc. 9 de la section (4.1).

8) *Birapports.* Soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ quatre plans vectoriels distincts ayant une droite commune D. Soit Q un plan ne contenant pas D, et soient $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{D}_4$ les intersections de Q avec $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ respectivement. Montrer que le birapport

$$\begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 & \mathrm{D}_2 \\ \mathrm{D}_4 & \mathrm{D}_3 \end{bmatrix}$$

(section (4.1), exerc. 10) est *indépendant* du plan Q ne contenant pas D ; on appelle ce scalaire le *birapport* du quadruplet $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4)$ et on le note

$$\begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 & \mathrm{P}_2 \\ \mathrm{P}_4 & \mathrm{P}_3 \end{bmatrix}$$

Soit $(\mathrm{P}'_1, \mathrm{P}'_2, \mathrm{P}'_3, \mathrm{P}'_4)$ un second quadruplet de plans vectoriels distincts ayant une droite commune D'. Pour qu'il existe un automorphisme u de E tel que $u(\mathrm{P}_i) = \mathrm{P}'_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 & \mathrm{P}_2 \\ \mathrm{P}_4 & \mathrm{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}'_1 & \mathrm{P}'_2 \\ \mathrm{P}'_4 & \mathrm{P}'_3 \end{bmatrix}$$

Soient $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{D}_4, \mathrm{D}_5$ 5 droites vectorielles dont quatre quelconques forment un *repère projectif* (exerc. 4 C)). Si D_i est l'une d'entre elles on désigne par P_{ij} (pour

$j \neq i$) le plan vectoriel $D_i + D_j$; les quatre plans P_{ij}, pour un i donné, sont donc distincts. Montrer que l'on a

$$\begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} \\ P_{15} & P_{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{23} & P_{21} \\ P_{25} & P_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} \\ P_{35} & P_{34} \end{bmatrix} = 1.$$

(Prendre une base dont les vecteurs appartiennent à D_1, D_2 et D_3). Si $(D'_1, D'_2, D'_3, D'_4, D'_5)$ est un second quintuplet de droites vectorielles dont quatre quelconques forment un repère projectif (ce que l'on exprime encore en disant que les 5 droites sont « *en position générale* »), alors, en posant $P'_{ij} = D'_i + D'_j$ pour $i \neq j$, pour qu'il existe un automorphisme $u \in GL(E)$ tel que $u(D_i) = D'_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$, il faut et il suffit que l'on ait les deux conditions

$$\begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} \\ P_{15} & P_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_{12} & P'_{13} \\ P'_{15} & P'_{14} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_{23} & P_{21} \\ P_{25} & P_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_{23} & P'_{21} \\ P'_{25} & P'_{24} \end{bmatrix}$$

§ 2. Formes bilinéaires et trilinéaires. Déterminants. Orientation

(6.2.1) Soient u une application *bilinéaire* de $E \times E$ dans un espace vectoriel F ; les valeurs de u sont entièrement déterminées par les valeurs des 9 vecteurs $u(a_i, a_j)$, où les indices i, j prennent chacun une quelconque des 3 valeurs 1, 2, 3 ; inversement, pour tout système de 9 vecteurs b_{ij} de F, il existe une application bilinéaire u de $E \times E$ dans F telle que $u(a_i, a_j) = b_{ij}$ pour i, j égaux à 1, 2 ou 3. L'application qui à u fait correspondre le système des 9 vecteurs $u(a_i, a_j)$ est donc un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{B}(E, E\,;\,F)$ sur l'espace produit F^9 de 9 facteurs égaux à F (3.1.8).

On a alors, pour $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$,

(6.2.1.1) $$u(x, y) = \xi_1\eta_1 b_{11} + \xi_1\eta_2 b_{12} + \xi_1\eta_3 b_{13} + \xi_2\eta_1 b_{21} + \xi_2\eta_2 b_{22} + \xi_2\eta_3 b_{23} + \xi_3\eta_1 b_{31} + \xi_3\eta_2 b_{32} + \xi_3\eta_3 b_{33}.$$

Pour que u soit symétrique (resp. alternée), il faut et il suffit que $u(a_i, a_j) = u(a_j, a_i)$ pour $i \neq j$ (resp. $u(a_i, a_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et $u(a_j, a_i) = -u(a_i, a_j)$ pour $i \neq j$). L'espace $\mathscr{S}(E, E\,;\,F)$ (resp. $\mathscr{A}(E, E\,;\,F)$) est isomorphe à F^6 (resp. à F^3). Tout ceci s'établit par des calculs immédiats étendant ceux de (4.2.1) et que nous laissons au lecteur.

En particulier, si u est une application bilinéaire alternée, on a, pour $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, en vertu de (6.2.1.1)

(6.2.1.2) $$u(x, y) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} b_{12} + \begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} b_{23} + \begin{vmatrix} \xi_3 & \eta_3 \\ \xi_1 & \eta_1 \end{vmatrix} b_{31}.$$

(6.2.2) De la même façon, on voit qu'une application *trilinéaire* de $E \times E \times E$ dans F est déterminée par les 27 vecteurs $u(a_i, a_j, a_k)$ où i, j, k prennent chacun une des 3 valeurs 1, 2, 3. Nous nous intéresserons particulièrement aux applications trilinéaires *alternées* ; il n'y a alors que les 6 valeurs $u(a_i, a_j, a_k)$ correspondant à des valeurs *distinctes* de i, j, k qui puissent être $\neq 0$, et en outre ces valeurs sont liées par les relations

$$u(a_1, a_2, a_3) = u(a_2, a_3, a_1) = u(a_3, a_1, a_2)$$
$$= -u(a_1, a_3, a_2) = -u(a_3, a_2, a_1) = -u(a_2, a_1, a_3)$$

en vertu de la définition (3.2.15). Si c est la valeur commune de ces 6 vecteurs, on a donc, pour

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3, z = \zeta_1 a_1 + \zeta_2 a_2 + \zeta_3 a_3,$$

(6.2.2.1) $$u(x, y, z) =$$
$$= (\xi_1\eta_2\zeta_3 + \xi_2\eta_3\zeta_1 + \xi_3\eta_1\zeta_2 - \xi_1\eta_3\zeta_2 - \xi_3\eta_2\zeta_1 - \xi_2\eta_1\zeta_3)c$$

et l'application $u \to u(a_1, a_2, a_3)$ est un *isomorphisme* de l'espace vectoriel $\mathscr{A}(E, E, E ; F)$ *sur* F.

Enfin, on voit comme dans (4.2.2) que toute application *quadrilinéaire alternée* de $E \times E \times E \times E$ dans un espace vectoriel quelconque F est *identiquement nulle.*

(6.2.3) Les définitions et calculs de (4.2.3) et (4.2.4) s'étendent de façon quasi-automatique à l'espace à 3 dimensions et nous laissons encore au lecteur le soin de faire cette extension.

De (6.2.2) il résulte que l'espace $\mathscr{A}(E, E, E ; \mathbf{R})$ des *formes trilinéaires alternées* sur $E \times E \times E$ est une *droite vectorielle* ; une fois choisie une base $\{a_1, a_2, a_3\}$ de E, une forme trilinéaire alternée Ψ sur $E \times E \times E$ est déterminée par le *seul* scalaire $\gamma = \Psi(a_1, a_2, a_3)$, la valeur $\Psi(x, y, z)$ étant donnée par (6.2.2.1), où c est remplacé par γ.

(6.2.4) *Soit u un endomorphisme de* E. *Il existe un scalaire unique* (noté $\det(u)$ et appelé le *déterminant de u*) *tel que, pour toute forme trilinéaire alternée* Ψ *sur* $E \times E \times E$, *on ait*

(6.2.4.1) $$\Psi(u(x), u(y), u(z)) = \det(u) . \Psi(x, y, z).$$

La démonstration est celle de (4.2.6.1), où on remplace les formes bilinéaires par les formes trilinéaires, utilisant (6.2.3).

En particulier

(6.2.4.2) $$\det(1_E) = 1$$

et si g est un *isomorphisme* de E sur un espace vectoriel E′ à 3 dimensions

(6.2.4.3) $$\det(gug^{-1}) = \det(u).$$

Pour deux endomorphismes u, v de E, on a

(6.2.4.4) $$\det(v \circ u) = \det(v)\det(u).$$

Ici encore la démonstration est celle de (4.2.7.1).

Pour que $\det(u) \neq 0$, *il faut et il suffit que* u *soit bijectif.*

Même démonstration que dans (4.2.8), utilisant cette fois (6.1.7).

(6.2.5) Soit $\{a_1, a_2, a_3\}$ une base de E, et soit

(6.2.5.1) $$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme u de E relativement à cette base ; soit Ψ la forme trilinéaire alternée sur $E \times E \times E$ telle que $\Psi(a_1, a_2, a_3) = 1$; on a par définition (6.2.4.1)

$$\det(u) = \Psi(u(a_1), u(a_2), u(a_3))$$

et la formule (6.2.2.1) donne donc

(6.2.5.2) $$\det(u) = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33}.$$

On dit que ce scalaire est le *déterminant de la matrice* $M(u)$ et on le note $\det(M(u))$ ou encore

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Pour deux matrices quelconques X, Y de type $(3, 3)$, on a donc

(6.2.5.3) $$\det(XY) = \det(X)\det(Y)$$

et pour qu'une matrice X de type $(3, 3)$ soit *inversible*, il faut et il suffit que $\det(X) \neq 0$.

La formule (6.2.5.2) montre que pour toute matrice X de type $(3, 3)$ on a

(6.2.5.4) $$\det({}^tX) = \det(X).$$

(6.2.6) Etant donnés une base $\{a_1, a_2, a_3\}$ de E et 3 vecteurs

$$x_1 = \xi_{11}a_1 + \xi_{21}a_2 + \xi_{31}a_3, \qquad x_2 = \xi_{12}a_1 + \xi_{22}a_2 + \xi_{32}a_3,$$
$$x_3 = \xi_{13}a_3 + \xi_{23}a_2 + \xi_{33}a_3$$

il y a un endomorphisme u de E et un seul tel que $u(a_1) = x_1$, $u(a_2) = x_2$, $u(a_3) = x_3$, et la matrice de u relativement à la base $\{a_1, a_2, a_3\}$ est

(6.2.6.1)
$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix}$$

On a donc, pour toute forme trilinéaire alternée Ψ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E}$

(6.2.6.2)
$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \det(X)\Psi(a_1, a_2, a_3).$$

Pour que x_1, x_2, x_3 soient *linéairement indépendants*, il faut et il suffit que u soit *bijectif* (6.1.7), ou encore que $\det(X) \neq 0$, ce qui est d'ailleurs équivalent à

(6.2.6.3)
$$\Psi(x_1, x_2, x_3) \neq 0$$

pour toute forme trilinéaire alternée non identiquement nulle sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E}$.

En particulier, si a, b sont deux vecteurs linéairement indépendants dans E, le plan P_{Oab} a pour équation $\Psi(a, b, x) = 0$ pour toute forme trilinéaire alternée Ψ non identiquement nulle sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E}$.

Si maintenant $\{f_1, f_2, f_3\}$ est la *base duale* de $\{a_1, a_2, a_3\}$ dans E* (6.1.9), pour que trois formes linéaires sur E

$$g_1 = \beta_{11}f_1 + \beta_{12}f_2 + \beta_{13}f_3, \qquad g_2 = \beta_{21}f_1 + \beta_{22}f_2 + \beta_{23}f_3,$$
$$g_3 = \beta_{31}f_1 + \beta_{32}f_2 + \beta_{33}f_3$$

soient *linéairement indépendantes* dans E, il faut et il suffit, d'après (6.2.5.4), que l'on ait

(6.2.6.4)
$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Cette relation est donc nécessaire et suffisante pour que trois plans d'équations $g_1(x) = \lambda_1$, $g_2(x) = \lambda_2$, $g_3(x) = \lambda_3$ aient un point commun et un seul (6.1.10). Au contraire, en *annulant* le premier membre de (6.2.6.4) on obtient la condition nécessaire et suffisante pour que les trois plans d'équations $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $g_3(x) = 0$ aient *au moins une droite commune.*

(6.2.7) Considérons un système de trois équations linéaires à trois inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3

(6.2.7.1)
$$\begin{cases} \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3 = \gamma_1 \\ \beta_{21}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 = \gamma_2 \\ \beta_{31}\xi_1 + \beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 = \gamma_3 \end{cases}$$

On peut l'interpréter comme suit : soit $\{a_1, a_2, a_3\}$ une base de E, et posons

$$b_1 = \beta_{11}a_1 + \beta_{21}a_2 + \beta_{31}a_3, \qquad b_2 = \beta_{12}a_1 + \beta_{22}a_2 + \beta_{32}a_3,$$
$$b_3 = \beta_{13}a_1 + \beta_{23}a_2 + \beta_{33}a_3$$

et $c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3$; alors le système (6.2.7.1) est équivalent à l'*unique* équation

(6.2.7.2) $$\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \xi_3 b_3 = c.$$

Soit Ψ la forme trilinéaire alternée sur $E \times E \times E$ telle que $\Psi(a_1, a_2, a_3) = 1$; s'il existe une solution (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de (6.2.7.2), elle vérifie aussi les relations

(6.2.7.3) $$\begin{cases} \Psi(c, b_2, b_3) = \Psi(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \xi_3 b_3, b_2, b_3) = \xi_1 \Psi(b_1, b_2, b_3) \\ \Psi(b_1, c, b_3) = \Psi(b_1, \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \xi_3 b_3, b_3) = \xi_2 \Psi(b_1, b_2, b_3) \\ \Psi(b_1, b_2, c) = \Psi(b_1, b_2, \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \xi_3 b_3) = \xi_3 \Psi(b_1, b_2, b_3) \end{cases}$$

par définition d'une forme trilinéaire alternée. Distinguons deux cas :

A) *On a* $\Psi(b_1, b_2, b_3) \neq 0$ (autrement dit la relation (6.2.6.4) a lieu). Les vecteurs b_1, b_2, b_3 sont alors linéairement indépendants (6.2.6), et par suite forment une *base* de E (6.1.2). Comme on sait alors *a priori* qu'il *existe* trois scalaires ξ_1, ξ_2, ξ_3 vérifiant (6.2.7.2), on en conclut sans calcul que, *quel que soit c*, le système (6.2.7.1) admet *une solution et une seule* donnée par les formules

(6.2.7.4) $$\xi_1 = \delta_1 \delta^{-1}, \qquad \xi_2 = \delta_2 \delta^{-1}, \qquad \xi_3 = \delta_3 \delta^{-1}$$

où

$$\delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}$$

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \gamma_2 & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \gamma_3 & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \gamma_1 & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \gamma_2 & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \gamma_3 & \beta_{33} \end{vmatrix} \qquad \delta_3 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \gamma_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \gamma_2 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

(« *formules de Cramer* »).

B) *On a* $\Psi(b_1, b_2, b_3) = 0$, c'est-à-dire $\delta = 0$. Il résulte de (6.2.7.3) qu'une condition *nécessaire* pour que le système (6.2.7.1) ait une solution est que l'on ait aussi

(6.2.7.5) $$\delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0, \qquad \delta_3 = 0.$$

Inversement, supposons ces trois conditions satisfaites. Supposons en premier lieu que l'on ait $b_1 = b_2 = b_3 = 0$; il est alors *nécessaire* que $c = 0$, et tout système (ξ_1, ξ_2, ξ_3) est alors solution de (6.2.7.1). En second lieu, supposons que par exemple $b_1 \neq 0$ mais que b_2 et b_3 soient de la forme $b_2 = \lambda b_1$, $b_3 = \mu b_1$ (autrement dit, deux quelconques des trois vecteurs b_1, b_2, b_3 sont linéairement dépendants) ; il résulte de (6.2.7.2) que l'on doit aussi avoir alors $c = \nu b_1$ et l'équation (6.2.7.2) se réduit à $\xi_1 + \lambda\xi_2 + \mu\xi_3 = \nu$; on peut prendre ξ_2 et ξ_3 *arbitraires* et l'équation précédente détermine ξ_1 de façon unique.

Enfin supposons que $\{b_1, b_2\}$ soit un ensemble *libre*, ce qui signifie encore (4.1.1) que les trois scalaires

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls. Alors les conditions $\delta = 0$, $\delta_3 = 0$ signifient qu'il y a des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tels que l'on ait $b_3 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, $c = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2$ et l'équation (6.2.7.2) se réduit à

$$(\xi_1 + \lambda_1\xi_3 - \mu_1)b_1 + (\xi_2 + \lambda_2\xi_3 - \mu_2)b_2 = 0,$$

c'est-à-dire aux deux équations $\xi_1 + \lambda_1\xi_3 = \mu_1$, $\xi_2 + \lambda_2\xi_3 = \mu_2$; on peut prendre ξ_3 *arbitraire* et les équations précédentes déterminent ξ_1 et ξ_2 de façon unique.

(6.2.8) Avec les notations de (6.2.6), supposons que les formes linéaires g_1, g_2, g_3 ne soient pas nulles ; alors le système (6.2.7.1) admet une *seconde* interprétation : il signifie que le point $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$ appartient à l'*intersection* des plans $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ d'équations respectives

$$\mathbf{P}_1 : g_1(x) = \gamma_1, \qquad \mathbf{P}_2 : g_2(x) = \gamma_2, \qquad \mathbf{P}_3 : g_3(x) = \gamma_3.$$

Le cas A) de (6.2.7) est celui où les directions de $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ n'ont pas de droite commune, et l'on retrouve alors que les plans $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ ont un point commun et un seul (6.1.10) ; en outre les formules de Cramer donnent explicitement les coordonnées de ce point. Le cas B) est celui où les directions de $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ ont au moins une droite commune ; dire que deux quelconques des vecteurs b_1, b_2, b_3 sont linéairement dépendants signifie que les trois plans $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ sont parallèles, et dire que c et b_1 (par exemple) sont linéairement dépendants signifie alors que ces trois plans sont en fait *identiques* (l'ensemble des solutions de (6.2.7.1) étant alors ce plan). Si au contraire deux au moins des trois plans $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ ne sont pas parallèles, les conditions (6.2.7.5) sont *nécessaires et suffisantes* pour que ces trois plans aient *une droite commune*.

(6.2.9) Une *troisième* interprétation du système (6.2.7.1) (ou de l'équation équivalente (6.2.7.2)) consiste à considérer l'unique endomorphisme u de $\mathbf{E}$ tel que $u(a_1) = b_1$, $u(a_2) = b_2$, $u(a_3) = b_3$ (6.1.6), autrement dit l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base $\{a_1, a_2, a_3\}$ est

(6.2.9.1)
$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

L'équation (6.2.7.2) s'écrit alors

(6.2.9.2)
$$u(x) = c.$$

On a $\delta = \det(B) = \det(u)$. Le cas A) de (6.2.7) est celui où u est *bijectif* (6.2.4), et la solution unique de (6.2.7.1) est

(6.2.9.3)
$$x = u^{-1}(c).$$

En donnant successivement à c les valeurs a_1, a_2, a_3, on obtient, par les formules de Cramer, les vecteurs $u^{-1}(a_1)$, $u^{-1}(a_2)$, $u^{-1}(a_3)$, c'est-à-dire les *colonnes de la matrice B^{-1} de u^{-1}* relativement à la base $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Le cas **B**) de (6.2.7) est celui où u est de rang 0, 1 ou 2 ; dire que b_1, b_2, b_3 ne sont pas tous nuls mais que deux quelconques de ces vecteurs sont linéairement dépendants signifie (6.1.6) que u est *de rang* 1 ; dire qu'il y a au moins deux d'entre eux qui sont linéairement indépendants (mais $\det(B) = 0$) signifie que u est *de rang* 2 et alors les conditions (6.2.7.5) sont nécessaires et suffisantes pour que le vecteur c appartienne au plan vectoriel $u(\mathrm{E})$.

(6.2.10) Comme cas particulier de ce qui précède, on obtient la détermination des *valeurs propres* d'un endomorphisme u de E (3.2.10). Pour que λ soit valeur propre de u, il faut et il suffit que le noyau de $u - \lambda . 1_{\mathrm{E}}$ ne soit pas réduit à 0, ou encore (6.2.4) que

(6.2.10.1)
$$\det(u - \lambda . 1_{\mathrm{E}}) = 0.$$

Cette équation est appelée *équation caractéristique* (et son premier membre le *polynôme caractéristique* (en λ)) de l'endomorphisme u ; si, relativement à une base $\{a_1, a_2, a_3\}$ de E, on a

$$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

l'équation (6.2.10.1) s'écrit

(6.2.10.2)
$$\lambda^3 - \beta\lambda^2 + \gamma\lambda - \delta = 0$$

avec

(6.2.10.3)
$$\begin{cases} \beta = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} \\ \gamma = \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{13} \\ \delta = \det(u) = \det(M(u)) \end{cases}$$

et ne dépend évidemment pas de la base $\{a_1, a_2, a_3\}$ choisie. On sait (1.33) que l'équation (6.2.10.2) admet toujours *au moins une racine* λ_1, et par suite il y a toujours au moins un vecteur propre b_1 correspondant à λ_1 (que l'on peut calculer explicitement une fois λ_1 connue, par la méthode de (6.2.7)). Si $\{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de E ayant b_1 pour un de ses vecteurs, on voit que, relativement à cette base, la matrice de u sera de la forme

(6.2.10.4)
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

Soit q la projection de E sur le plan vectoriel P de E ayant pour base $\{b_2, b_3\}$, dans la décomposition de E en somme directe de P et de la droite D_{Ob_1} ; l'application $y \to q(u(y))$ est un endomorphisme v de P dont la matrice relativement à $\{b_2, b_3\}$ est

$$\begin{pmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

puisque $u(b_2) = \beta_{12}b_1 + \beta_{22}b_2 + \beta_{33}b_3$, donc $q(u(b_2)) = \beta_{22}b_2 + \beta_{23}b_3$ et de même pour $q(u(b_3))$. La formule (6.2.5.2) (ou directement l'expression de $\det(u - \lambda . 1_E)$ à l'aide de la forme trilinéaire alternée Ψ telle que $\Psi(b_1, b_2, b_3) = 1$) donne aussitôt

(6.2.10.5)
$$\det(u - \lambda . 1_E) = (\lambda_1 - \lambda)\det(v - \lambda . 1_P)$$

et par suite, pour que le polynôme caractéristique de u soit de la forme $-(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$, il faut et il suffit que v admette des valeurs propres, le polynôme caractéristique de v étant alors $(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$. Lorsqu'il en est ainsi, en prenant dans P une base $\{c_2, c_3\}$ telle que c_2 soit un vecteur propre de v correspondant à la valeur propre λ_2, on voit que, relativement à la base $\{b_1, c_2, c_3\}$, la matrice de u est de la forme (« matrice *triangulaire supérieure* »)

(6.2.10.6)
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & \lambda_2 & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

et alors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les *valeurs propres* (distinctes ou non) de u.

(6.2.11) Les problèmes de *changement de base* dans E se traitent exactement comme dans (4.2.15), par une extension qui est encore laissée au lecteur, puisqu'elle ne comporte aucune circonstance essentiellement nouvelle.

(6.2.12) Comme l'espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathrm{E,E,E};\mathbf{R})$ des formes *trilinéaires alternées* sur E×E×E est une *droite vectorielle* (6.2.3), il est réunion de $\{0\}$ et de *deux demi-droites vectorielles ouvertes* $\mathscr{A}', \mathscr{A}''$ (3.3.3) qui sont appelées *orientations* de E ; les couples $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{A}'')$ sont appelés les *espaces à 3 dimensions orientés* ayant E pour espace vectoriel *sous-jacent*.

Soit Ψ une forme trilinéaire alternée appartenant à $\mathscr{A}'$. On dit qu'un triplet (a, b, c) de vecteurs linéairement indépendants de E (formant donc une *base* de E (6.1.2)) est *direct* ou *positif* (resp. *rétrograde* ou *négatif*) dans l'espace orienté $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$ si l'on a $\Psi(a, b, c) > 0$ (resp. $\Psi(a, b, c) < 0$). Cette définition ne dépend pas du choix de Ψ dans $\mathscr{A}'$, tout autre élément de $\mathscr{A}'$ étant de la forme $\alpha\Psi$ avec $\alpha > 0$. Si le triplet (a, b, c) est direct dans $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$, il en est de même de (b, c, a) et de (c, a, b) ; par contre les triplets (a, c, b), (c, b, a), (b, a, c) sont rétrogrades dans cet espace orienté. Quand on change d'orientation, les triplets directs et rétrogrades s'échangent.

Soient $(\Delta, \Delta', \Delta'')$ trois demi-droites vectorielles non dans un même plan, a, a', a'' des vecteurs $\neq 0$ de $\Delta, \Delta', \Delta''$ respectivement ; on dit que dans l'espace orienté $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$ le *triplet* $(\Delta, \Delta', \Delta'')$ *est direct* (resp. *rétrograde*) si le triplet (a, a', a'') est direct (resp. rétrograde) ; cela ne dépend pas des vecteurs a, a', a'' choisis dans $\Delta, \Delta', \Delta''$ puisque tout autre vecteur $\neq 0$ de Δ (par exemple) est de la forme λa *avec* $\lambda > 0$.

Au contraire de ce qui se passe dans le plan (4.3.1), si (a, b, c) (resp. $(\Delta, \Delta', \Delta'')$) est un triplet *direct*, le triplet $(-a, -b, -c)$ (resp. $(-\Delta, -\Delta', -\Delta'')$) est *rétrograde*.

(6.2.13) Soit u un automorphisme de E. Si Ψ est une forme trilinéaire alternée sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E}$, on a $\Psi(u(x), u(y), u(z)) = \det(u) . \Psi(x, y, z)$; si $\Psi \in \mathscr{A}'$, la forme trilinéaire alternée $(x, y, z) \to \Psi(u(x), u(y), u(z))$ (dite *transformée* de Ψ par u) appartient à $\mathscr{A}'$ si $\det(u) > 0$, à $\mathscr{A}''$ si $\det(u) < 0$; autrement dit, les automorphismes u qui *laissent invariante* l'orientation $\mathscr{A}'$ (ou $\mathscr{A}''$) de E sont ceux tels que $\det(u) > 0$; on dit encore que ce sont les *automorphismes de l'espace orienté* $(\mathrm{E}, \mathscr{A}')$ (ou$(\mathrm{E}, \mathscr{A}'')$). Ils forment un sous-groupe distingué $\mathbf{GL}^+(\mathrm{E})$ de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$. Si un triplet (a, b, c) de vecteurs est direct pour une orientation de E, pour la même orientation le triplet $(u(a), u(b), u(c))$ est direct si $\det(u) > 0$, rétrograde si $\det(u) < 0$.

(6.2.14) Soient D et P une droite vectorielle et un plan vectoriel supplémentaires dans E. Supposons choisies une orientation de D (3.3.3) et une orientation de P (4.3.1) ; si a est un vecteur $\neq 0$ sur l'orientation Δ de D, (b, c) un couple direct de vecteurs de P, pour l'orientation choisie, alors le signe de $\Psi(a, b, c)$ (pour une forme trilinéaire Ψ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E}$) ne dépend pas du choix des vecteurs a, b, c vérifiant ces conditions ; on voit en effet que si a', b', c' sont trois autres vecteurs qui vérifient ces conditions, et si u est l'automorphisme de E tel que $u(a) = a'$, $u(b) = b'$, $u(c) = c'$, on a $a' = \alpha a$ avec $\alpha > 0$ et $\det(u) = \alpha . \det(v)$, où v est l'automorphisme de P tel que $v(b) = b'$, $v(c) = c'$ (qui par hypothèse vérifie $\det(v) > 0$).

Il y a donc une orientation bien déterminée de E telle que pour les formes trilinéaires Ψ appartenant à cette orientation, on ait $\Psi(a, b, c) > 0$; on dit que c'est l'orientation de E *somme directe* de celles de D et de P.

Inversement, supposons données d'une part une orientation de E, d'autre part une orientation de P ; il y a alors une orientation bien déterminée de D telle que l'orientation donnée de E soit somme directe de celle de D et de celle de P. Si (b, c) est un couple direct pour l'orientation de P, les vecteurs de l'orientation voulue de D sont les vecteurs $a \in \mathrm{D}$ tels que $\Psi(a, b, c) > 0$, où Ψ appartient à l'orientation choisie de E. On dit encore que l'orientation ainsi déterminée sur D est *supplémentaire* de l'orientation de P par rapport à l'orientation de E ; elle se transforme d'ailleurs en l'orientation opposée lorsqu'on remplace l'orientation de E *ou* celle de P par l'orientation opposée, mais ne change pas si on remplace *à la fois* les orientations de P et de E par leurs opposées. On définit de la même manière l'orientation de P *supplémentaire* d'une orientation de D par rapport à une orientation de E.

Thèmes d'exercices

1) *Trace d'un endomorphisme.* Soient u un endomorphisme de E,

$$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

sa matrice relativement à une base $\{a_1, a_2, a_3\}$ de E. On appelle *trace* de u (ou de $M(u)$) le scalaire $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$; il est indépendant de la base $\{a_1, a_2, a_3\}$ choisie ; on le note $\mathrm{Tr}(u)$ ou $\mathrm{Tr}(M(u))$. Si l'équation caractéristique de u peut s'écrire $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$, on a $\mathrm{Tr}(u) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ et $\det(u) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Pour deux endomorphismes quelconques u, v de E, on a $\mathrm{Tr}(vu) = \mathrm{Tr}(uv)$. Inversement, si f est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $f(YX) = f(XY)$ pour tout couple de matrices (X, Y) de type $(3, 3)$, montrer qu'il y a un scalaire α tel que $f(X) = \alpha\mathrm{Tr}(X)$.

Montrer que si l'on a $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u^2) = \mathrm{Tr}(u^3) = 0$, u est nilpotent dans End(E), et réciproquement (utiliser (6.2.10.4)).

2) Montrer que dans l'exerc. 2 de la section (6.1), les scalaires α, β, γ et δ sont indépendants des bases relativement auxquelles les matrices ont les formes indiquées.

3) *Classification des endomorphismes.* Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u de E peut toujours s'écrire $(\alpha - \lambda)\mathrm{P}(\lambda)$, où P est un polynôme du second degré. Lorsque P admet des racines, montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de u relativement à cette base soit de l'une des formes

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Lorsque P n'admet pas de racines, il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de u est de la forme

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma^2 + 4\beta < 0.$$

(Dans tous les cas, se ramener au cas où $\alpha = 0$ en considérant $v = u - \alpha \, . \, 1_E$. Si $N = v^{-1}(0)$, considérer les divers cas possibles pour les sous-espaces $v^{-1}(N)$ et $v(E)$).

Déduire de là la détermination du *sous-anneau* de End(E) formé des éléments qui *permutent* avec u, et du *centralisateur* de u dans **GL**(E) lorsque u est inversible (cf. section (5.3), exerc. 1 et 3).

Montrer que si $\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + \rho\lambda - \delta$ est le polynôme caractéristique de u, on a $u^3 - \sigma u^2 + \rho u - \delta = 0$ (« *théorème de Hamilton-Cayley* »).

Si, relativement à une base de E, la matrice de u a la forme

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

il y a une autre base de E relativement à laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Par contre il n'y a aucune base relativement à laquelle la matrice de u soit diagonale. De même, si, relativement à une base de E, la matrice de u a la dernière des formes (1), il n'y a aucune base de E relativement à laquelle elle ait une des autres formes.

Montrer que si, relativement à une base de E, u a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \lambda & \mu \\ 0 & \alpha & \lambda \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \neq 0$, il y a une base de E relativement à laquelle u a pour matrice la dernière des formes (1).

4) Montrer que dans l'anneau $A = \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$, les sous-anneaux commutatifs *maximaux* sont nécessairement de l'une des formes gC_0g^{-1}, gC'_0g^{-1}, gC''_0g^{-1}, gC'''_0g^{-1} (notations de la section (6.1), exerc. 3), où $g \in \mathbf{GL}(E)$. (Utiliser la détermination de l'ensemble des matrices permutant avec une des matrices des formes (1) ou (2) dans l'exerc. 3.)

5) *Le groupe unimodulaire.* L'application $u \to \det(u)$ est un homomorphisme de **GL**(E) sur $\mathbf{R}^*$, dont le noyau est un sous-groupe distingué de **GL**(E), appelé *groupe unimodulaire* et noté **SL**(E), ou $\mathbf{SL}_3(\mathbf{R})$, ou $\mathbf{SL}(3, \mathbf{R})$.

L'application $u \to ((\det(u))^{1/3}, (\det(u))^{-1/3}u)$ est un isomorphisme du groupe **GL**(E) sur le groupe *produit* $\mathbf{R}^* \times \mathbf{SL}(E)$. Au contraire, si **P** est un plan vectoriel, **SL(P)** n'est *pas* un facteur direct de **GL(P)** (il n'y a pas de sous-groupe distingué Δ à deux éléments dans **GL(P)** tel que $\Delta \cap \mathbf{SL}(\mathbf{P}) = \{1_\mathbf{P}\}$).

A) *Générateurs.* Montrer que tout élément de **SL**(E) est, soit une transvection, soit un produit de deux transvections, soit un produit de trois transvections ; donner des exemples d'éléments qui ne sont pas produits de moins de trois transvections.

Montrer que tout élément de **SL**(E) est produit de deux ou de quatre quasi-symétries. (Utiliser la section (6.1), exerc. 4.)

B) *Propriétés de conjugaison.* Soient u, v deux éléments de **GL**(E) ayant tous deux trois valeurs propres *distinctes*, ou dont les polynômes caractéristiques sont tous deux produits d'un facteur du premier degré et d'un facteur du second degré n'ayant pas de racines. Pour que u et v soient conjugués dans **GL**(E), il faut et il suffit qu'ils aient même polynôme caractéristique. Lorsqu'on n'est pas dans les cas précédents, montrer que l'ensemble des éléments de **GL**(E) ayant un polynôme caractéristique donné est réunion de deux classes d'intransitivité pour **GL**(E) (opérant par $u \to tut^{-1}$) si u et v ont chacun deux valeurs propres distinctes, et réunion de trois classes d'intransitivité si u et v n'ont chacun qu'une seule valeur propre (utiliser l'exerc. 3, et la section (5.3), exerc. 3). En outre, si u et v sont conjugués dans **GL**(E), il existe $w \in \mathbf{SL}(E)$ tel que $v = wuw^{-1}$ (observer que le centralisateur de tout élément de **GL**(E) contient toujours -1_E).

Montrer que deux transvections quelconques $\neq 1_E$ sont conjuguées *dans* **SL**(E) (comparer à la section (4.3), exerc. 2).

C) *Centre et groupe des commutateurs.* Le centralisateur de **SL**(E) dans **GL**(E) est le centre Z de **GL**(E), et le centre de **SL**(E) est réduit à 1_E. Toute transvection est un commutateur $uvu^{-1}v^{-1}$ de deux éléments de **SL**(E) (utiliser le fait que deux transvections sont conjuguées dans **SL**(E)). En déduire que **SL**(E) est son propre groupe des commutateurs et le sous-groupe des commutateurs de **GL**(E).

D) *Sous-groupes distingués.* Montrer que **SL**(E) n'admet pas d'autre sous groupe distingué que lui-même et l'élément neutre. (Raisonner comme dans la section (4.2), exerc. 7 C), en remplaçant $\Theta(E, D)$ par $\Theta'(E, D)$).

6) Soit u un automorphisme de E. Montrer que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

a) pour tout vecteur $x \in E$, $x, u(x)$ et $u^2(x)$ sont dans un même plan ;

b) tout plan vectoriel de E contient une droite vectorielle invariante (globalement) par u ;

c) toute droite vectorielle de E est contenue dans un plan vectoriel invariant (globalement) par u ;

d) pour tout plan vectoriel P de E, les plans P, u(P) et u^2(P) ont une droite commune.

S'il existe en outre dans E un plan vectoriel P et une droite vectorielle $D \subset P$, tels que P soit invariant par u et que D soit la *seule* droite vectorielle dans P invariante par u, montrer que $u = h_\lambda t$ où $\lambda \neq 0$ et t est une transvection. S'il existe dans E un plan vectoriel P et deux droites vectorielles distinctes D_1, D_2 contenues dans P et telles que D_1 et D_2 soient les *seules* droites vectorielles dans P invariantes par u, montrer que u est de la forme $h_\lambda v$, où $\lambda \neq 0$ et v est une dilatation. Enfin si l'on n'est pas dans un des deux cas précédents, montrer que u est une homothétie. (Utiliser la section (6.1), exerc. 4D). (Voir Annexe IV, n° 10).

7) Montrer que pour qu'un endomorphisme u de E admette une racine carrée dans End(E), il faut et il suffit que relativement à une base convenable de E, il ait une matrice de l'une des formes (1) de l'exerc. 3 avec les éléments diagonaux $\geqslant 0$, exception faite des matrices semblables à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ avec } \beta \geqslant 0, \text{ ou à } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou une matrice de la forme (2) de l'exerc. 3 avec $\alpha \geqslant 0$ (cf. section (5.4), exerc. 2), ou enfin une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \geqslant 0$.

8) Soit u un automorphisme de E. S'il existe deux automorphismes *involutifs* v, w de E tels que $u = vw$, il existe $h \in \mathbf{GL}(E)$ tel que $u^{-1} = huh^{-1}$. Inversement, si u possède cette dernière propriété, montrer que, ou bien u est involutif, ou bien il existe

une base de E relativement à laquelle la matrice de u ou de $-u$ ait l'une des formes

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & -\beta\\ 0 & \beta & \alpha\end{pmatrix} \text{ avec } \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Inversement, montrer que si u a une matrice de l'une de ces formes, il existe deux automorphismes involutifs v, w tels que $u = vw$ (cf. section (5.3), exerc. 3).

9) Etant donnée une forme bilinéaire Φ sur $E \times E$, on appelle *discriminant* de Φ relativement à une base $\{a_1, a_2, a_3\}$ de E, le déterminant de la matrice $M(\Phi) = M(d_\Phi)$ de Φ relativement à cette base. Quelle est la relation entre les discriminants de Φ relativement à deux bases différentes ? Si on définit comme dans la section (4.2), exerc. 10, la notion de forme bilinéaire *dégénérée*, montrer que, pour que Φ soit non dégénérée, il faut et il suffit que son discriminant soit $\neq 0$.

10) *Classification des formes bilinéaires symétriques.* On définit comme dans la section (4.2), exerc. 10, la notion de formes bilinéaires équivalentes. Montrer que si Φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, il y a une base de E relativement à laquelle $M(\Phi)$ a l'une des formes

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

qui sont dites respectivement avoir pour *signature* $(3, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ et $(0, 3)$: montrer que les formes bilinéaires symétriques correspondant à deux de ces matrices n'ayant pas même signature ne sont *pas* équivalentes (considérer les sous-espaces vectoriels *maximaux* où $\Phi(x, x)$ reste $\geqslant 0$). Enoncer les résultats correspondants pour les formes bilinéaires symétriques *dégénérées* (avec les notations de la section (4.2), exerc. 10, considérer un sous-espace supplémentaire de N dans E).

11) Soit Ψ une forme bilinéaire *alternée* sur $E \times E$. Montrer que le sous-espace N des $x \in E$ tels que $\Psi(x, y) = 0$ pour *tout* $y \in E$ n'est pas réduit à 0 (autrement dit Ψ est *dégénérée*), et que si Ψ n'est pas identiquement nulle, il y a une base de E relativement à laquelle $M(\Psi)$ a la forme

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(Si $\Psi(a, b) \neq 0$, considérer les plans d'équation $\Psi(a, x) = 0$ et $\Psi(b, x) = 0$.)

CHAPITRE VII

Géométrie euclidienne à trois dimensions

§ 1. Bases orthogonales; endomorphismes adjoints

Dans tout le chapitre, E *désigne un espace euclidien à trois dimensions.*

(7.1.1) On dit que dans E une base $\{a_1, a_2, a_3\}$ est *orthogonale* si les trois couples de vecteurs distincts de cette base sont orthogonaux ; on dit que la base $\{a_1, a_2, a_3\}$ est *orthonormale* si elle est orthogonale et si en outre les trois vecteurs de la base sont *unitaires*, autrement dit si l'on a

(7.1.1.1) $$(a_1|a_2) = (a_2|a_3) = (a_3|a_1) = 0, \qquad \|a_1\| = \|a_2\| = \|a_3\| = 1.$$

Il revient au même de dire que relativement à une telle base, la matrice de la forme bilinéaire $(x|y)$ (6.1.8 et 4.2.4) est la matrice *unité*, ou encore que, pour deux vecteurs $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, le produit scalaire est donné par

(7.1.1.2) $$(x|y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$$

et par suite la norme par

(7.1.1.3) $$\|x\|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

En outre, la formule (7.1.1.2) donne en particulier l'*expression des coordonnées par des produits scalaires*

(7.1.1.4) $$\xi_1 = (x|a_1), \qquad \xi_2 = (x|a_2), \qquad \xi_3 = (x|a_3).$$

Si $\{a_1, a_2, a_3\}$ est une base orthogonale, les vecteurs $a_1/\|a_1\|$, $a_2/\|a_2\|$, $a_3/\|a_3\|$ sont unitaires et forment par suite une base orthonormale.

(7.1.2) Comme dans E les hyperplans sont les plans (6.1.6), il résulte de (5.1.7) que pour toute droite vectorielle D dans E il y a *un plan* P *orthogonal à* D, égal à l'ensemble de *tous* les vecteurs orthogonaux à D, et supplémentaire de D. Si $a \neq 0$ est un vecteur de D, $b \neq 0$ un vecteur de P, il existe dans P des vecteurs $\neq 0$ orthogonaux à b (5.2.2), qui sont en fait tous les vecteurs de l'unique droite du plan P orthogonale à D_{Ob} ; pour un tel vecteur c, $\{a, b, c\}$ est une *base orthogonale* de E, puisque l'on sait (5.2.2) que $\{b, c\}$ est une base de P. Tout vecteur $a \neq 0$ fait donc partie d'une base orthogonale de E et ce qui précède donne une description de toutes ces bases.

(7.1.3) Prenons maintenant dans E un plan quelconque P, et soit $\{a, b\}$ une base orthogonale de P (5.2.2). Le plan P' orthogonal à D_{Oa} contient donc b, et il y a par suite (7.1.2) dans ce plan un vecteur c qui forme avec a et b une base orthogonale $\{a, b, c\}$ de E. On en conclut que $D = D_{Oc}$ est *orthogonale à* P, et comme P est un hyperplan, P est *le* plan orthogonal à D et D *la* droite orthogonale à P (5.1.7). On voit donc qu'ici, comme dans les plans euclidiens, tout hyperplan est l'hyperplan orthogonal à une droite.

Si maintenant f est une forme linéaire non identiquement nulle sur E, $f(x) = 0$ est l'équation d'un plan vectoriel P (3.3.6) ; d'autre part, si $b \neq 0$ est orthogonal à P (nous venons de voir qu'il existe de tels vecteurs), $(x|b) = 0$ est aussi une équation de P (5.1.7) ; par suite (3.3.6) il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que l'on ait identiquement $f(x) = \alpha(x|b) = (x|\alpha b)$; on en conclut :

(7.1.4) *Pour toute forme linéaire f sur* E, *il existe un vecteur* $a \in$ E *et un seul tel que l'on ait* $f(x) = (x|a)$ *pour tout* $x \in$ E.

Ce qui précède prouve en effet l'existence de a lorsque $f \neq 0$; le cas $f = 0$ et l'unicité de a se traitent comme dans (5.2.3).

Si l'on a pris dans E une base orthonormale $\{a_1, a_2, a_3\}$, et si la forme f a pour matrice $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$ relativement à cette base (6.1.8), le vecteur $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ est le vecteur unique tel que $f(x) = (x|a)$ pour tout $x \in$ E.

Nous laissons encore au lecteur la traduction en termes de coordonnées des résultats de (5.1), qui ne présente pas d'intérêt particulier.

Comme dans (5.2.3), on voit que dans E, une similitude u est *nulle* si $\mu(u) = 0$, *bijective* si $\mu(u) \neq 0$. Si $\{a_1, a_2, a_3\}$ est une base orthonormale de E, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que u soit une similitude de multiplicateur α :

(7.1.4.1)
$$\begin{cases} (u(a_i)|u(a_i)) = \alpha & \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ (u(a_i)|u(a_j)) = 0 & \text{pour } i, j \text{ distincts, égaux à } 1, 2 \text{ ou } 3. \end{cases}$$

Plus généralement, pour qu'une application linéaire g de E dans un *espace euclidien* F quelconque soit une *isométrie*, il faut et il suffit que l'on ait $\|g(a_i)\| = \|a_i\|$ pour $i = 1, 2, 3$ et $(g(a_i)|g(a_j)) = 0$ pour $i \neq j$. L'existence de bases orthonormales dans tout espace euclidien à 3 dimensions (7.1.2) montre donc que *deux espaces euclidiens à* 3 *dimensions sont isomorphes* (5.1.12).

D'autre part, si P, P' sont deux plans vectoriels quelconques dans E, $\{a, b\}$ (resp. $\{a', b'\}$) une base orthonormale dans P (resp. P'), on a vu (7.1.3) qu'il y a deux vecteurs c, c' dans E tels que $\{a, b, c\}$ et $\{a', b', c'\}$ soient des bases orthonormales de E. Donc on voit que, non seulement les plans euclidiens P, P' sont isomorphes (5.2.3), mais qu'il y a une *isométrie u de* E telle que $u(P) = P'$. Le même raisonnement montre que si D, D' sont deux droites vectorielles de E, il y a une *isométrie u de* E telle que $u(D) = D'$.

(7.1.5) Soit Φ une *forme bilinéaire* quelconque sur $E \times E$. Le même raisonnement que dans (5.2.4) montre qu'il existe deux endomorphismes d_Φ, s_Φ de E, dits respectivement *associé à droite* et *associé à gauche* à Φ, tels que l'on ait, quels que soient x, y dans E,

$$\Phi(x, y) = (x | d_\Phi(y)) = (s_\Phi(x) | y). \tag{7.1.5.1}$$

Inversement, pour *tout endomorphisme u* de E, il existe une forme bilinéaire et une seule Φ' (resp. Φ'') telle que $u = d_{\Phi'}$ (resp. $u = s_{\Phi''}$), savoir les formes $\Phi'(x, y) = (x | u(y))$ et $\Phi''(x, y) = (u(x) | y)$. On a ainsi défini deux *isomorphismes canoniques* $\Phi \to d_\Phi$ et $\Phi \to s_\Phi$ de $\mathscr{B}(E, E ; \mathbf{R})$ *sur* End(E).

On en déduit comme dans (5.2.5) qu'à tout endomorphisme u de E correspond un endomorphisme u^* et un seul tel que, pour tout couple de vecteurs x, y de E, on ait

$$(u(x) | y) = (x | u^*(y)). \tag{7.1.5.2}$$

On dit que u^* est l'endomorphisme *adjoint* à u ; on voit comme dans (5.2.5) que l'on a ainsi défini un automorphisme involutif $u \to u^*$ de l'*espace vectoriel* End(E), et que les relations (5.2.5.3) et (5.2.5.4) sont encore valables. On définit comme dans (5.2.5) les endomorphismes *hermitiens* et les endomorphismes *antihermitiens*, et on caractérise encore les *similitudes* et les *transformations orthogonales* dans E par les relations (5.2.5.5) et (5.2.5.6). Enfin, ces notions se traduisent en termes de matrices comme dans (5.2.6).

Le groupe $\mathbf{GO}(E)$ (resp. $\mathbf{O}(E)$) se note aussi $\mathbf{GO}_3(\mathbf{R})$ ou $\mathbf{GO}(3, \mathbf{R})$ (resp. $\mathbf{O}_3(\mathbf{R})$ ou $\mathbf{O}(3, \mathbf{R})$).

(7.1.6) *Soit u un endomorphisme hermitien de* E. *Il existe toujours une base orthonormale* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *de* E *formée de vecteurs propres de u.*

En effet, on sait (6.2.10) que u (comme tout endomorphisme de E) a au moins *une* valeur propre λ. Soit $a \neq 0$ un *vecteur propre* de u, correspondant à λ, et considérons le plan P orthogonal à a. Pour tout vecteur $y \in P$, on a par définition $(u(a) | y) = (a | u(y)) = 0$ puisque $u(a) = \lambda a$ est orthogonal à tous les vecteurs $y \in P$. On en conclut que $u(P) \subset P$, et par suite la *restriction* $v = u | P$ de u à P est un *endomorphisme de* P ; en outre, cet endomorphisme est *hermitien*, car pour y, z dans P, on a par définition $(v(y) | z) = (u(y) | z) = (y | u(z)) = (y | v(z))$, d'où $v^* = v$. En vertu de (5.2.7), il y a donc une base orthonormale $\{b, c\}$ de P formée de vecteurs propres de v ; comme ce sont aussi des vecteurs propres de u, la proposition est démontrée.

Si l'on traduit ce résultat dans le langage des formes bilinéaires, on voit que pour toute *forme bilinéaire symétrique* Φ sur $E \times E$, il existe toujours au moins une *base orthonormale* $\{a_1, a_2, a_3\}$ de E telle que l'on ait $\Phi(a_1, a_2) = \Phi(a_2, a_3) = \Phi(a_3, a_1) = 0$. En outre, les nombres

$$\lambda_1 = \Phi(a_1, a_1), \qquad \lambda_2 = \Phi(a_2, a_2), \qquad \lambda_3 = \Phi(a_3, a_3)$$

sont *indépendants* de la base $\{a_1, a_2, a_3\}$ ayant les propriétés précédentes puisque ce sont les valeurs propres de $d_\Phi = s_\Phi$; on dit encore que ce sont les *valeurs propres* de Φ. Si ces trois valeurs propres sont *distinctes*, les droites $D_{Oa_1}, D_{Oa_2}, D_{Oa_3}$ sont *bien déterminées* comme les sous-espaces propres de d_Φ (3.2.10) ; on dit encore que ce sont les *axes* de la forme Φ.

Si $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, les valeurs extrêmes λ_1, λ_3 peuvent encore s'interpréter comme suit. Considérons les valeurs de $\Phi(x, x)$ sur la *sphère unité* S_2, ensemble des $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$ tels que $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$; on peut écrire $\Phi(x, x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \lambda_3\xi_3^2 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\xi_2^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)\xi_3^2$ $= (\lambda_1 - \lambda_3)\xi_1^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)\xi_2^2 + \lambda_3$, si bien que λ_1 est *la plus grande* et λ_3 *la plus petite* des valeurs de $\Phi(x, x)$ dans S_2, atteintes respectivement aux points $x = \pm a_1$ et $x = \pm a_3$.

(7.1.7) Il n'y a rien d'analogue pour les espaces euclidiens à 3 dimensions (ni pour les espaces de dimension supérieure) aux résultats de (5.2.8) (par exemple la somme de deux rotations n'est pas une similitude en général). Par contre, dans les espaces euclidiens à 3 dimensions, on a la possibilité de définir la notion de *produit vectoriel* de deux vecteurs, qui ne se généralise pas non plus aux autres dimensions.

Pour cela, remarquons que dans la droite vectorielle $\mathscr{A}(E, E, E ; \mathbf{R})$ des formes trilinéaires *alternées* sur $E \times E \times E$, il y a deux formes *opposées* Ψ', Ψ'' telles que pour *toute* base orthonormale $\{a_1, a_2, a_3\}$ de E on ait $\Psi'(a_1, a_2, a_3) = \pm 1$; cela se démontre exactement comme le fait analogue pour le plan euclidien (5.4.3). Supposons l'espace E *orienté* et notons Ψ celle des deux formes Ψ', Ψ'' appartenant à l'orientation choisie. Etant donnés deux vecteurs x, y de E, l'application $z \to \Psi(x, y, z)$ est une *forme linéaire* sur E, et par suite (7.1.4) il existe un vecteur unique $p(x, y)$ (dépendant naturellement de x et y) tel que l'on ait, pour *tout* $z \in E$

$$\Psi(x, y, z) = (p(x, y)|z)$$

On dit que $p(x, y)$ est le *produit vectoriel de x et y* (dans cet ordre) et on le note $x \barwedge y$ (*) ; on a donc

(7.1.7.1) $$\Psi(x, y, z) = (x \barwedge y|z)$$

(*) La notation $x \wedge y$, parfois utilisée pour désigner un produit vectoriel, doit être proscrite, car en algèbre extérieure elle désigne ce que l'on appelle un *bivecteur sur* E, et il est *essentiel* de ne pas confondre cette notion et celle de *vecteur de* E.

quels que soient x, y, z. L'application $(x, y) \to x \barwedge y$ est une *application bilinéaire alternée* de E × E dans E, autrement dit (3.2.14), on a

$$
\text{(7.1.7.2)} \quad \left\{
\begin{aligned}
(x + x') \barwedge y &= x \barwedge y + x' \barwedge y, \\
x \barwedge (y + y') &= x \barwedge y + x \barwedge y' \\
(\alpha x) \barwedge y &= x \barwedge (\alpha y) = \alpha(x \barwedge y) \\
y \barwedge x = -x \barwedge y \quad &\text{et en particulier} \quad x \barwedge x = 0
\end{aligned}
\right.
$$

En effet, pour prouver par exemple que l'on a $y \barwedge x = -x \barwedge y$, il suffit de remarquer que $\Psi(y, x, z) = -\Psi(x, y, z)$ et par suite, d'après (7.1.7.1),

$$(y \barwedge x|z) = -(x \barwedge y|z)$$

quel que soit $z \in$ E ; comme aucun vecteur $\neq 0$ de E n'est orthogonal à E, on a nécessairement $y \barwedge x + x \barwedge y = 0$; de même pour les autres formules (7.1.7.2).

Le fait que Ψ est alternée entraîne aussi que l'on a

$$\text{(7.1.7.3)} \qquad (x \barwedge y|x) = (x \barwedge y|y) = 0,$$

autrement dit, le vecteur $x \barwedge y$ est *orthogonal à x et à y*. En outre, comme $\Psi(x, y, z) = \Psi(y, z, x)$, on a $(x \barwedge y|z) = (y \barwedge z|x)$, qui ne fait que transcrire la relation précédente.

Enfin, d'après (7.1.7.1), on a, quels que soient x, y dans E,

$$\Psi(x, y, x \barwedge y) = \|x \barwedge y\|^2$$

et par suite, si x et y sont linéairement indépendants, le triplet $(x, y, x \barwedge y)$ est *direct* dans l'espace orienté E.

Soit $\{a_1, a_2, a_3\}$ une base orthonormale *directe* de l'espace orienté E. En vertu de (6.2.6.1) et (6.2.5.2), on voit que si $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, $z = \zeta_1 a_1 + \zeta_2 a_2 + \zeta_3 a_3$, on a

$$\Psi(x, y, z) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)\zeta_1 + (\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)\zeta_2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\zeta_3$$

d'où, en comparant avec la définition (7.1.7.1) et la formule (7.1.1.2) donnant le produit scalaire, l'expression de $x \barwedge y$:

$$\text{(7.1.7.4)} \qquad x \barwedge y = (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)a_1 + (\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)a_2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)a_3$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} \xi_3 & \eta_3 \\ \xi_1 & \eta_1 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} a_3$$

On notera que la relation $x \barwedge y = 0$ est *nécessaire et suffisante* pour que x et y soient *linéairement dépendants*, car on a vu (7.1.7.2) qu'elle est nécessaire, et si inversement x et y sont linéairement indépendants, il y a un vecteur z tel que $\{x, y, z\}$ soit une *base* de E (6.1.4), donc $\Psi(x, y, z) \neq 0$, et *a fortiori* $x \barwedge y \neq 0$. On peut d'ailleurs aussi vérifier directement ce résultat sur la formule (7.1.7.4).

D'autre part, si x et y sont linéairement indépendants, le vecteur $x \barwedge y$ est *orthogonal au plan* $\mathrm{P}_{\mathrm{O}xy}$ d'après (7.1.7.3).

Rappelons enfin que la définition de $x \barwedge y$ dépend de l'*orientation* choisie sur E ; si on remplace cette dernière par l'orientation opposée, $x \barwedge y$ est remplacé par $-x \barwedge y$ puisque Ψ est remplacée par $-\Psi$.

Thèmes d'exercices

1) *Déterminant de Gram.* Soient $\{a_1, a_2, a_3\}$ une base orthonormale de E, x_1, x_2, x_3 trois vecteurs de E, u l'endomorphisme tel que $u(a_i) = x_i$ pour $i = 1, 2, 3$. On appelle matrice de Gram du triplet (x_1, x_2, x_3) la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & (x_1|x_3) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & (x_2|x_3) \\ (x_3|x_1) & (x_3|x_2) & (x_3|x_3) \end{pmatrix}$$

Le déterminant $\mathrm{G}(x_1, x_2, x_3)$ de cette matrice est appelé le déterminant de Gram du triplet (x_1, x_2, x_3). Montrer que la matrice de Gram de (x_1, x_2, x_3) est égale à la matrice de u^*u relativement à la base $\{a_1, a_2, a_3\}$; en déduire que $\mathrm{G}(x_1, x_2, x_3) = (\det(u))^2 = (\Psi(x_1, x_2, x_3))^2 \geqslant 0$ (notation de (7.1.7)).

On définit de même pour deux vecteurs x_1, x_2 de E la matrice de Gram du couple (x_1, x_2) comme la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) \end{pmatrix}$$

et le déterminant $\mathrm{G}(x_1, x_2)$ de cette matrice est appelé le déterminant de Gram du couple (x_1, x_2). Montrer que (pour une orientation quelconque de E), on a $\mathrm{G}(x_1, x_2) = \|x_1 \barwedge x_2\|^2$. En déduire que si x_1, x_2 sont linéairement indépendants, la distance d du point x au plan $\mathrm{P}_{\mathrm{O}x_1x_2}$ est donnée par $d^2 = \mathrm{G}(x, x_1, x_2)/\mathrm{G}(x_1, x_2)$ (cf. (5.1.7)). Retrouver directement cette formule, en notant que l'on a $d^2 = (x|x - z)$, où z est la projection orthogonale de x sur $\mathrm{P}_{\mathrm{O}x_1x_2}$ et en écrivant z comme combinaison linéaire de x_1, x_2, déterminée par les équations $(x_1|x - z) = 0$ et $(x_2|x - z) = 0$.

2) *Plus courte distance de deux droites.* Soient $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ deux droites non parallèles dans E, a_i un point de D_i, b_i un vecteur directeur de D_i $(i = 1, 2)$. Montrer que la plus petite valeur de la distance $d(x_1, x_2)$, pour $x_1 \in \mathrm{D}_1$, $x_2 \in \mathrm{D}_2$, est donnée par

$$|\Psi(a_1 - a_2, b_1, b_2)|/\|b_1 \barwedge b_2\|.$$

3) Montrer que pour tout automorphisme u de l'espace vectoriel E, on a

$$u^*(x \barwedge y) = \det(u) . u^{-1}(x) \barwedge u^{-1}(y)$$

ou, ce qui revient au même

$$u^{-1}(x \barwedge y) = (\det(u))^{-1} . u^*(x) \barwedge u^*(y)$$

En déduire l'expression de l'inverse d'une matrice inversible de type (3, 3) sans utiliser les formules de Cramer.

4) Etendre à l'espace à 3 dimensions l'exerc. 1 de la section (5.2).

5) *Endomorphismes hermitiens positifs, « valeurs absolues » d'un endomorphisme, décompositions d'Iwasawa, valeurs stationnaires d'un endomorphisme.* Etendre à l'espace à 3 dimensions les exerc. 2 à 6 de la section (5.2). En ce qui concerne la fin de l'exerc. 2 de la section (5.2), montrer que, si P est un plan vectoriel dans E, z un vecteur orthogonal à P, alors, pour qu'un automorphisme hermitien u de l'espace vectoriel E soit positif, il faut et il suffit que sa restriction à P le soit et que l'on ait $(u^{-1}(z)|z) > 0$. En déduire que si

$$(1) \qquad M(h) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

est la matrice (symétrique) d'un endomorphisme hermitien h relativement à une base orthonormale, pour que h soit bijectif et positif, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha_{11} > 0 \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

En déduire que, pour que h soit positif, il faut et il suffit que les trois nombres précédents soient $\geqslant 0$ (considérer $h + \lambda 1_E$ pour $\lambda > 0$).

Montrer que, pour que la matrice symétrique (1) soit une matrice de Gram (exerc. 1), il faut et il suffit que h soit hermitien positif (observer que s'il en est ainsi h admet une « racine carrée »).

6) Soient u un endomorphisme de E, λ une valeur propre de u ; on pose $v = u - \lambda . 1_E$. Montrer que $E(\lambda ; u)$ et $v^*(E)$ sont supplémentaires et orthogonaux. En déduire que λ est une valeur propre de u^* et que $E(\lambda ; u)$ et $E(\lambda ; u^*)$ sont des espaces vectoriels isomorphes.

7) Soient u un endomorphisme hermitien de E, $\{a_1, a_2, a_3\}$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres correspondantes, et supposons que l'on ait $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$. Pour tout $z \neq 0$ dans E, soit $\rho_u(z)$ la plus grande valeur de $(u(x)|x)$ pour les $x \in E$ appartenant au cercle défini par $\|x\| = 1$, $(x|z) = 0$. Montrer que $\lambda_2 = \rho_u(a_1)$ et $\lambda_2 \leqslant \rho_u(z)$ pour tout $z \neq 0$ dans E (considérer un point x de l'intersection du plan $P_{Oa_1a_2}$ et du plan d'équation $(x|z) = 0$).

Supposons que $u = u' + u''$, où u', u'' sont deux endomorphismes hermitiens, et soient $\{a'_1, a'_2, a'_3\}$ (resp. $\{a''_1, a''_2, a''_3\}$) une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u' (resp. u''), $\lambda'_1 \geqslant \lambda'_2 \geqslant \lambda'_3$ (resp. $\lambda''_1 \geqslant \lambda''_2 \geqslant \lambda''_3$) les valeurs propres correspondantes de u' (resp. u''). Montrer que l'on a

$$\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 + \lambda''_1, \qquad \lambda_2 \leqslant \lambda'_1 + \lambda''_2, \qquad \lambda_2 \leqslant \lambda'_2 + \lambda''_1,$$
$$\lambda_3 \leqslant \lambda'_1 + \lambda''_3, \qquad \lambda_3 \leqslant \lambda'_3 + \lambda''_1, \qquad \lambda_3 \leqslant \lambda'_2 + \lambda''_2$$

(pour cette dernière inégalité, par exemple, considérer un vecteur orthogonal à a'_1 et à a''_1). Ecrire les inégalités correspondantes pour $-u$. Montrer que si u'' est hermitien positif, on a $\lambda_i \geqslant \lambda'_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

8) Etendre à l'espace à 3 dimensions l'exerc. 9 de la section (5.2).

9) Etendre à l'espace à 3 dimensions l'exerc. 6 de la section (5.3).

§ 2. Groupe des similitudes. Angles

(**7.2.1**) Rappelons (5.1.12) que toute similitude $\neq 0$ s'écrit d'une seule manière $u = h_\lambda v$, où v est une transformation orthogonale et $\lambda > 0$; on a donc $\det(u) = \lambda^3 \det(v)$, et $\det(u)$ a donc le même signe que $\det(v)$. D'autre part, comme $v^*v = 1_E$, on a $\det(v) = \pm 1$; les transformations orthogonales de déterminant 1 sont encore appelées *rotations*, et les produits $h_\lambda v$ où v est une rotation et $\lambda > 0$ les *similitudes directes* ; ce sont donc les similitudes de déterminant >0, et elles forment un sous-groupe distingué, noté $\mathbf{GO}^+(E)$, de $\mathbf{GO}(E)$; les similitudes de déterminant <0 sont dites similitudes *inverses*. On notera que les homothéties de rapport $\lambda < 0$ sont des similitudes *inverses* (contrairement à ce qui se passe dans le plan) puisque leur déterminant est $\lambda^3 < 0$. En particulier, l'homothétie -1_E est une transformation orthogonale de déterminant -1 ; il en est de même de toute symétrie par rapport à un plan, tandis qu'une symétrie par rapport à une droite (5.1.15) est une rotation. L'application $u \to \det(u)$ est un homomorphisme de $\mathbf{O}(E)$ *sur* le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$, dont le noyau est le *groupe des rotations*, noté $\mathbf{O}^+(E)$ ou $\mathbf{SO}(E)$ (ou $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$, ou $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$) ; on a

$$\mathbf{O}^+(E) = \mathbf{O}(E) \cap \mathbf{GO}^+(E) = \mathbf{O}(E) \cap \mathbf{SL}(E) = \mathbf{GO}^+(E) \cap \mathbf{SL}(E).$$

(**7.2.2**) *Toute rotation est produit de deux symétries par rapport à des plans vectoriels. Toute transformation orthogonale de déterminant* -1 *est une symétrie par rapport à un plan ou un produit de trois telles symétries.*

Soit $u \in \mathbf{O}(E)$. Supposons d'abord qu'il y ait un plan vectoriel P dont tous les points soient invariants par u. Alors la droite vectorielle D orthogonale à P est (globalement) invariante par u, donc la restriction de u à D ne peut être que l'identité ou l'homothétie de rapport -1 (5.1.12). On en conclut que u est alors, soit l'identité, soit la symétrie par rapport à P.

En second lieu, supposons qu'il existe une droite vectorielle D dont tous les points soient invariants par u ; alors le plan vectoriel P orthogonal à D est (globalement) invariant par u ; soit $v = u|P$ la restriction de u à P ; prenant une base $\{a, b, c\}$ dont un vecteur $a \in D$ et les autres appartiennent à P, on voit aussitôt que $\det(v) = \det(u)$. Si $\det(v) = -1$, v est une symétrie par rapport à une droite $D' \subset P$ (5.3.2) ; si on prend $b \in D'$ et c orthogonal à D' dans P, on a $u(a) = a$, $u(b) = b$ et $u(c) = -c$, donc u est la symétrie par rapport au plan $Q = D + D'$. Si au contraire v est une rotation, v est le produit $s's''$ de deux symétries s', s'' par rapport à deux droites D', D'' dans P (5.3.2) ; soient t', t'' les symétries par rapport aux plans $Q' = D + D'$, $Q'' = D + D''$; il est clair que l'on a $u = t't''$, car il est évident que $u(x) = t'(t''(x)) = x$ pour $x \in D$ et $u(x) = t'(t''(x))$ pour $x \in P$, puisqu'alors $u(x) = v(x)$ et $t'(t''(x)) = s'(s''(x))$.

Abordons enfin le cas général. Soit $a \neq 0$ un vecteur de E, et posons $b = u(a)$. Si $b = a$, tous les points de D_{Oa} sont invariants par u et on est dans le cas précédent. Supposons donc $b \neq a$ et soit $c = a - b \neq 0$. Soit s la symétrie par rapport au plan orthogonal à c ; le même calcul que dans (5.3.2) montre que, si l'on pose $u' = su$, on a $u'(a) = a$; en outre $\det(u') = -\det(u)$. On conclut de ce qui précède que si $\det(u) = 1$, u' est une symétrie par rapport à un plan, et si $\det(u) = -1$, u' est un produit de deux telles symétries, ce qui achève la démonstration.

Le calcul de (5.3.2) montre en outre que si a, b sont deux vecteurs distincts et $\neq 0$ tels que $\|a\| = \|b\|$, il y a *une symétrie s par rapport à un plan telle que* $s(a) = b$ (d'où $s(b) = a$). Cette symétrie est d'ailleurs unique, puisque le plan de ses points invariants doit être orthogonal à $b - a$.

(7.2.3) *Pour toute rotation $u \in \mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ distincte de 1_{E}, l'ensemble des points invariants par u est une droite vectorielle* (dite *axe* de la rotation). *Pour toute transformation orthogonale u de déterminant -1 et qui n'est pas une symétrie par rapport à un plan ni l'homothétie -1_{E}, il existe une droite vectorielle* D *et une seule globalement invariante par u, et si s est la symétrie par rapport au plan vectoriel* P *orthogonal à* D, *on a $u = sv = vs$, où v est une rotation $\neq 1_{\mathrm{E}}$ dont* D *est l'axe.*

Si $u \neq 1_{\mathrm{E}}$ est une rotation, on a $u = s's''$, où s' et s'' sont les symétries par rapport à deux plans vectoriels P′, P″ (7.2.2), nécessairement distincts ; il est clair que tous les points de la droite $\mathrm{D} = \mathrm{P}' \cap \mathrm{P}''$ soit invariants par u. En outre la restriction de u au plan P orthogonal à D est une rotation $v \neq 1_{\mathrm{P}}$, et qui ne laisse donc aucun point $\neq 0$ de P invariant (5.3.4) ; *a fortiori* aucun point $x \notin \mathrm{D}$ ne peut être invariant par u, sans quoi sa projection orthogonale sur P serait invariante par v.

Supposons maintenant que $u \in \mathbf{O}(\mathrm{E})$ ait un déterminant égal à -1, et ne soit, ni une symétrie par rapport à un plan, ni l'homothétie -1_{E}. Alors $-u$ est une rotation $\neq 1_{\mathrm{E}}$ et l'axe D de cette rotation est donc globalement invariant par u. S'il existait une seconde droite vectorielle D′ globalement invariante par u, ou bien tous les points de D′ seraient invariants par u, et comme $\det(u) = -1$, on a vu dans (7.2.2) que u serait une symétrie par rapport à un plan ; ou bien on aurait $u(x) = -x$ pour tout $x \in \mathrm{D}'$, donc aussi $u(x) = -x$ pour tout x appartenant au plan $\mathrm{P}' = \mathrm{D} + \mathrm{D}'$. On en conclurait que $-u$ laisse invariants les points de P′ ; mais comme u est une rotation, cela entraînerait que u est l'identité comme on l'a vu dans (7.2.2), d'où $u = -1_{\mathrm{E}}$, contrairement à l'hypothèse. Enfin, si s est la symétrie par rapport au plan vectoriel P orthogonal à D, $su = v$ est une rotation $\neq 1_{\mathrm{E}}$ dont D est l'axe, d'où $u = sv$, et on vérifie aussitôt que l'on a aussi $u(x) = v(s(x))$ pour $x \in \mathrm{D}$ et $x \in \mathrm{P}$, donc pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Par abus de langage, on dit encore que toute droite vectorielle est *axe* de la rotation égale à 1_{E}. On peut alors dire que les rotations d'axe donné D forment un sous-groupe de $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$, isomorphe au groupe (commutatif)

$\mathbf{O}^+(\mathrm{P})$, où P est le plan vectoriel orthogonal à D, l'isomorphie s'obtenant en faisant correspondre à toute rotation d'axe D sa restriction à P, qui la détermine entièrement.

(7.2.4) Soient a, b deux vecteurs *unitaires* linéairement indépendants, c'est-à-dire tels que $b \neq \pm a$, et soit D la droite vectorielle orthogonale au plan $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{0ab}$. Il y a alors *une seule rotation u d'axe* D telle que $u(a) = b$. En effet, il suffit de prendre pour u la rotation d'axe D dont la restriction à P est l'unique rotation v dans ce plan telle que $v(a) = b$ (5.3.4). Si u' est une seconde rotation d'axe D répondant à la question, $u'^{-1}u$ est une rotation d'axe D laissant invariant a, donc laissant invariants les points du plan $\mathrm{D} + \mathrm{D}_{0a}$, et par suite c'est l'identité.

(7.2.5) Sous les mêmes hypothèses que dans (7.2.4), il existe une isométrie (linéaire) g de P sur le plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ munie de la structure de plan euclidien définie dans (5.5.2). De plus, si g' est une seconde isométrie de P sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $g'g^{-1}$ est une *transformation orthogonale* du plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Par suite, les angles $(\widehat{g(a), g(b)})$ et $(\widehat{g'(a), g'(b)})$ sont *égaux* si $g'g^{-1}$ est une rotation, *opposés* (dans le groupe des angles $\mathfrak{A}$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$) si $g'g^{-1}$ est une symétrie par rapport à une droite (5.4.7). Si l'on *oriente* le plan P (de façon arbitraire) et si l'on prend sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ l'orientation canonique pour laquelle (e_1, e_2) est un couple direct, les isométries de P sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ transformant tous les couples directs de P en couples directs de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sont de la forme $g' = ug$, où g est l'une d'elles et u une *rotation* dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$; pour toutes ces isométries, l'angle $(\widehat{g'(a), g'(b)})$ est donc le même ; c'est cet angle qu'on appelle l'angle $(\widehat{a, b})$ *dans le plan* P *orienté*. Il résulte aussitôt de ces définitions et de (5.4.9.1) que l'on a

(7.2.5.1) $$\cos(\widehat{a, b}) = (a|b), \qquad \sin(\widehat{a, b}) = \Psi(a, b)$$

si Ψ est la forme bilinéaire alternée sur $\mathrm{P} \times \mathrm{P}$ telle que $\Psi(c_1, c_2) = 1$ pour toute base orthonormale directe (c_1, c_2) de P (5.4.3).

Lorsque $b = \pm a$, il y a une infinité de plans vectoriels passant par a et b, et pour toute isométrie g d'un de ces plans sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $(\widehat{g(a), g(b)})$ est égal à 0 si $b = a$, à ϖ si $b = -a$; aussi dit-on alors que $(\widehat{a, b}) = 0$ si $b = a$, $(\widehat{a, b}) = \varpi$ si $b = -a$. On définit de même des angles de demi-droites ou de droites dans les plans orientés contenus dans E.

Si r est une rotation d'axe D, si r' est sa restriction au plan P orthogonal à D et si, pour une orientation de P, r' est une rotation d'angle θ, on dit encore que r est une *rotation d'angle* θ ; pour tout vecteur $a \neq 0$ dans P, on a alors $(\widehat{a, r(a)}) = \theta$ (pour l'orientation considérée).

(7.2.6) Passons aux *similitudes affines* (5.1.14) ; on dit qu'une telle similitude $u = t_b \circ v$ (avec $v \in \mathbf{GO}(\mathrm{E})$) est *directe* (resp. *inverse*) si v est une similitude linéaire directe (resp. inverse). Les isométries directes (resp. inverses) sont encore appelées *déplacements* (resp. *retournements*) ; les déplacements forment un sous-groupe du groupe **Is**(E) des isométries. Les similitudes affines telles que $u = t_a v t_a^{-1}$ (avec $v \in \mathbf{GO}(E)$) se ramènent aussitôt (par transport de structure ((2.4) et (3.2.21)) au moyen de t_a) aux similitudes linéaires (et ont notamment a pour point invariant). Toutes les similitudes *de multiplicateur* $\neq 1$ sont de cette nature, comme le prouve le raisonnement de (5.3.5). Lorsque v est une rotation $\neq 1_E$, d'axe la droite vectorielle D, on dit encore que $t_a v t_a^{-1}$ est une *rotation d'axe* $a + D$. Les isométries qui ne sont pas du type précédent sont données par la proposition suivante:

(7.2.7) *Toute isométrie affine u qui n'est pas de la forme* $t_a v t_a^{-1}$, *où v est une isométrie linéaire, est de l'un des types suivants* :

(i) *u est une translation* t_b *de vecteur* $b \neq 0$;

(ii) *il existe un plan unique* P *et un vecteur unique* $b \neq 0$ *appartenant à la direction de* P *tels que, si s est la symétrie par rapport à* P (5.1.15), *on ait* $u = t_b \circ s = s \circ t_b$;

(iii) *il existe une droite unique* D, *un vecteur unique* $b \neq 0$ *appartenant à la direction de* D *et une rotation* $r \neq 1_E$ *d'axe* D (7.2.6) *tels que l'on ait* $u = t_b \circ r = r \circ t_b$.

Le même raisonnement qu'au début de (5.3.6) montre que les isométries affines qui ne sont pas de la forme $t_a v t_a^{-1}$ pour $v \in \mathbf{O}(E)$ sont celles qui ne laissent *aucun point invariant*, et sont à chercher parmi celles dont la transformation orthogonale associée v a des *points invariants* $\neq 0$. En vertu de (7.2.3), cela montre que v ne peut être que l'identité, ou une symétrie s_0 par rapport à un plan P_0, ou une rotation $r_0 \neq 1_E$ d'axe D_0. Dans le premier cas, $u = t_b$ avec $b \neq 0$; dans le second, le même raisonnement que dans (5.3.7) (où il faut remplacer D_0 par P_0) montre que si $u = t_b \circ v$ et si $b = b' + b''$ où $b' \in P_0$ et b'' est orthogonal à P_0, on a $u = t_{b'} \circ s = s \circ t_{b'}$, où $s = t_{b''} \circ s_0$ est la symétrie par rapport au plan $P = -\frac{1}{2}b'' + P_0$; on est donc dans le cas (ii) si $b' \neq 0$. Supposons enfin que $u = t_b \circ r_0$, et posons $b = b' + b''$, où $b' \in D_0$ et b'' est orthogonal à D_0. Soient Q_0 le plan vectoriel orthogonal à D_0, r'_0 la restriction de r_0 à ce plan (qui est globalement invariant par r_0 comme on l'a vu dans (7.2.3)) ; alors $t_{b''} r_0$ laisse invariant (globalement) le plan Q_0 et il résulte de (5.3.7) que sa restriction $t_{b''} r'_0$ à ce plan est une *rotation* r' dans le plan Q_0 ; si c est son centre et si l'on pose $D = c + D_0$, il en résulte que $r = t_{b''} r_0$ est une *rotation d'axe* D, et l'on a $u = t_{b'} r$; on est donc dans le cas (iii) si $b' \neq 0$. Le fait que dans ce dernier cas r et $t_{b'}$ permutent, et les assertions d'unicité, sont immédiats.

Thèmes d'exercices

1) On dit qu'un endomorphisme u de E est *normal* si $u^*u = uu^*$. Montrer que si x est un vecteur propre de u, x est aussi un vecteur propre de u^*, correspondant à la même valeur propre (observer que $(u(x)|u(x)) = (u^*(x)|u^*(x))$ et si $u(x) = \lambda x$, poser $u^*(x) = \lambda x + z$). En outre, si P est le plan orthogonal à x, montrer que l'on a

$u(\mathrm{P}) \subset \mathrm{P}$. En déduire que, ou bien u est hermitien, ou bien il existe une base orthonormale $\{a, b, c\}$ de E telle que a soit vecteur propre de u, que u laisse stable le plan $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathrm{O}bc}$ orthogonal à a et que la restriction de u à P soit une similitude directe.

2) Montrer que toute rotation $u \in \mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$, d'axe la droite vectorielle D et d'angle θ (pour une orientation choisie dans le plan vectoriel P orthogonal à D), est produit $t't''$ de deux symétries t', t'' par rapport à deux droites $\mathrm{D}', \mathrm{D}''$ dans P telles que $\widehat{(\mathrm{D}', \mathrm{D}'')} = \theta/2$ pour l'orientation choisie dans P.

3) *Simplicité du groupe* $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$. Dans cet exercice, on admet un *axiome additionnel* pour le corps $\mathbf{R}$, savoir que pour tout angle $\theta \neq 0$ dans le groupe des angles du plan euclidien $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, il existe un entier n tel que $\cos(n\theta) < 0$ (conséquence de l'« axiome d'Archimède »).

Soit $u \in \mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$ une rotation d'angle θ tel que $\cos\theta < 0$. Montrer qu'il existe dans E deux droites vectorielles $\mathrm{D}', \mathrm{D}''$ *orthogonales* et telles que $u(\mathrm{D}') = \mathrm{D}''$. En déduire que si t' est la symétrie par rapport à la droite D', $t'ut'u^{-1} = t'ut'^{-1}u^{-1}$ est une symétrie par rapport à une droite. Conclure que si Γ est un sous-groupe *distingué* de $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$ non réduit à 1_{E}, on a nécessairement $\Gamma = \mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$ (utiliser l'exerc. 2).

4) On admet encore pour $\mathbf{R}$ le même axiome additionnel que dans la section (5.3), exerc. 4. Montrer que le groupe des rotations $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ est un sous-groupe *maximal* du groupe $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$. (Procéder comme dans l'exerc. 4 de la section (5.4).)

5) *Représentation paramétrique de Cayley.* Montrer que toute rotation $u \in \mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ qui n'est pas une symétrie par rapport à une droite peut s'écrire d'une seule manière $(1_{\mathrm{E}} + t)(1_{\mathrm{E}} - t)^{-1}$, où t est un endomorphisme tel que $t^* = -t$.

6) *Trigonométrie sphérique.* Soient a, b, c trois vecteurs unitaires linéairement indépendants, P le plan vectoriel orthogonal à a, b' et c' les projections orthogonales de b et c sur P. On oriente les plans $\mathrm{P}_{\mathrm{O}ab}, \mathrm{P}_{\mathrm{O}ac}, \mathrm{P}_{\mathrm{O}bc}, \mathrm{P}_{\mathrm{O}b'c'}$ de sorte que les angles $\beta = \widehat{(a, c)}$, $\gamma = \widehat{(a, b)}$, $\alpha = \widehat{(b, c)}$, $\varphi = \widehat{(b', c')}$ soient >0 pour l'ordre défini dans (5.4.12). Montrer que l'on a

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi.$$

En déduire que si $\beta + \gamma > 0$, on a $\alpha < \beta + \gamma$.

7) Montrer qu'une isométrie affine du type (iii) de (7.2.7) (appelée « *déplacement hélicoïdal* ») est produit de deux symétries par rapport à deux droites non dans un même plan. Réciproque.

ANNEXE I

Sur la «mesure» des angles [(*)]

1. On sait qu'il existe des homomorphismes *continus* du groupe additif $\mathbf{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de valeur absolue 1, qui sont tous donnés par la formule $x \to e^{i\alpha x}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$. Mais il s'agit là d'un phénomène de nature essentiellement *topologique*, qui n'a rien à voir avec l'Algèbre linéaire ni la « Géométrie élémentaire » (telle qu'on l'entend dans ce livre), qui en est une simple traduction. La démonstration classique consiste à montrer, par le Calcul intégral, l'existence d'une « mesure » (au sens de Lebesgue) sur le cercle unité $\mathbf{U}$, donnée par $dx/\sqrt{1-x^2}$ (si x est l'abscisse d'un point variable de $\mathbf{U}$) ; cette mesure est *invariante* par le groupe des rotations, ce qui se démontre en prouvant que, par le changement de variable $x = t\cos\alpha - \sqrt{1-t^2}\sin\alpha$ (attention, α est un *angle* et non un nombre réel, puisqu'on n'a pas encore prouvé l'existence de l'homomorphisme cherché !), on a

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

On en déduit aisément que l'application

$$\zeta \to \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{avec } x = \mathscr{I}\zeta$$

est un *isomorphisme local* du groupe $\mathbf{U}$ au groupe $\mathbf{R}$, et on en conclut alors l'existence de l'homomorphisme voulu ([7], chap. V, § 1, n° 4, prop. 6 et 7 ; il faut prouver que $\mathbf{U}$ est connexe, ce qui est élémentaire ([7], chap. VI, § 2, n° 4, prop. 5)). Dans [7], chap. V, § 3, th. 1 et chap. VIII, § 2, n° 1, th. 1, on donne une autre démonstration qui ne nécessite pas le Calcul intégral, mais est nettement plus compliquée, et qui en tout cas utilise aussi de façon essentielle les propriétés topologiques de la droite réelle.

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie.

2. Je me propose de montrer que cette intervention de la Topologie est dans la nature des choses, en prouvant qu'il est *impossible* de donner une démonstration *purement algébrique* de l'existence de la « mesure des angles ». De façon précise, un homomorphisme continu $x \to e^{i\alpha x}$ ($\alpha \neq 0$) définit un *isomorphisme* du groupe $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{U}$; je vais montrer que l'existence de cet isomorphisme *n'est pas une conséquence logique* des axiomes des chap. I et II.

3. J'observe pour cela qu'il y a des *sous-corps* K de **R** distincts de **R**, qui vérifient *tous* les axiomes du chap. I, et pour lesquels tous les théorèmes démontrés dans les chap. III à VII (exercices exclus) sont donc encore valables. Cependant, par un choix convenable d'un tel corps K, nous allons voir qu'il peut se faire que le groupe additif $\mathbf{K}/\mathbf{Z}$ *ne soit pas isomorphe* au groupe multiplicatif $\mathbf{U} \cap \mathbf{K}(i)$. L'idée de la démonstration est fort simple : comme K contient le corps **Q** des nombres rationnels, pour tout nombre premier p, la classe mod. **Z** de l'élément $1/p$ de K est un élément *d'ordre p* dans le groupe $\mathbf{K}/\mathbf{Z}$; il suffit de choisir K de telle sorte que dans $\mathbf{K}(i)$ l'équation $z^p = 1$ *n'ait pas de solution* autre que 1 (autrement dit, il n'existe pas dans le « plan euclidien » correspondant à K de *polygones réguliers* à p côtés). Notons pour cela que d'après un théorème bien connu de Gauss ([11], p. 435) le polynôme $(X^p - 1)/(X - 1) = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + 1$ est *irréductible* sur le corps **Q**, et toute racine $z \neq 1$ de $z^p - 1 = 0$ est donc un élément de *degré* $p - 1$ sur **Q** ([4], chap. V, §3, n° 1) ; on va choisir K de sorte qu'on soit sûr qu'*il n'y a pas d'élément de degré* $p - 1$ sur **Q** dans $\mathbf{K}(i)$.

4. Pour cela on définit K comme l'ensemble des nombres réels x ayant la propriété suivante : il existe une suite finie $(y_1, \ldots, y_r)$ de nombres réels tels que y_1 soit de degré $\leqslant 3$ sur **Q** et y_{i+1} de degré $\leqslant 3$ sur $\mathbf{Q}(y_1, \ldots, y_i)$ pour $i \leqslant r - 1$, et tels que x appartienne au corps $\mathbf{Q}(y_1, \ldots, y_r)$. C'est bien un *sous-corps* de **R**, car si x' est un second élément de K, appartenant à un corps $\mathbf{Q}(y'_1, \ldots, y'_s)$ où y'_{j+1} est de degré $\leqslant 3$ sur $\mathbf{Q}(y'_1, \ldots, y'_j)$ pour tout $j \leqslant s - 1$, alors x et x' (donc aussi $x + x'$ et xx') appartiennent au corps $\mathbf{Q}(z_1, \ldots, z_{r+s})$, où $z_i = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $z_i = y'_{i-r}$ pour $r + 1 \leqslant i \leqslant r + s$ et chaque z_i est de degré $\leqslant 3$ sur $\mathbf{Q}(z_1, \ldots, z_{i-1})$. Cela étant, la définition de K prouve d'une part que l'axiome (R 15) du chap. I est vérifié par K, et d'autre part que tout élément de $\mathbf{K}(i)$ est algébrique sur **Q** et a un degré de la forme $2^m 3^n$ ([4], chap. V, § 3, n° 2, prop. 4 et 5). Or il suffit de prendre par exemple $p = 11$ pour que $p - 1$ contienne un facteur premier distinct de 2 et 3.

5(*). Si l'on prenait pour K le corps de *tous les nombres algébriques réels* (auquel cas $\mathbf{K}(i)$ est le corps de *tous les nombres algébriques*), on ne

(*) Les résultats qui suivent n'ont qu'une valeur de simple curiosité, et leur démonstration nécessite des connaissances plus avancées en Algèbre et Théorie des nombres. Le lecteur peut donc se borner à ne retenir de cela que les énoncés ; ces derniers n'ont été insérés que pour montrer que la question de la « mesure » des angles est loin d'être aussi « évidente » qu'on voudrait nous le faire croire avec tant de légèreté dans les exposés classiques.

pourrait plus raisonner comme précédemment, et en fait, les groupes $\mathbf{K}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}(i) \cap \mathbf{U}$ sont alors *isomorphes* (en tant que groupes *abstraits*). En effet, K, en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$, admet une base *infinie dénombrable* (le fait qu'elle est infinie provient de ce que K contient des nombres de degré arbitrairement grand sur $\mathbf{Q}$, et le fait qu'elle est dénombrable de ce que K lui-même est dénombrable) ; donc, en tant que groupe abstrait, $\mathbf{K}/\mathbf{Z}$ est isomorphe à $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Q}^{(\mathbf{N})}$. Mais d'un autre côté, le groupe $\mathbf{K}(i) \cap \mathbf{U}$ est un groupe *divisible* ([5], chap. VII, § 2, exerc. 3), toute équation binôme $z^m = \alpha$ (où $\alpha \in \mathbf{K}(i)$) ayant des solutions dans $\mathbf{K}(i)$ par hypothèse. Le groupe de torsion de $\mathbf{K}(i) \cap \mathbf{U}$ est le groupe des racines de l'unité, isomorphe à $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ([4], chap. V, § 11, n° 1, prop. 1) ; on sait qu'il est facteur direct dans $\mathbf{K}(i) \cap \mathbf{U}$ ([5], chap. VII, § 2, exerc. 3) et qu'un sous-groupe supplémentaire est somme directe d'une famille (au plus dénombrable) de groupes isomorphes à $\mathbf{Q}$. Tout revient à voir que cette famille est en fait *infinie*.

Dans le cas contraire, il y aurait un nombre *fini* d'éléments $z_k \in \mathbf{K}(i) \cap \mathbf{U}$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ tels que tout élément de $\mathbf{K}(i) \cap \mathbf{U}$ soit produit d'éléments en nombre fini, dont chacun serait racine d'une équation binôme $y^m = z_k$ (pour m et k entiers convenables). Si R est le corps engendré sur $\mathbf{Q}$ par toutes les racines de l'unité, $\mathbf{K}(i) \cap \mathbf{U}$ serait donc contenu dans une extension *abélienne* du corps $\mathrm{R}(z_1, \ldots, z_r)$ ([4], chap. V, § 11, exerc. 11). Notons maintenant que pour tout nombre réel ξ, on a $z = (1 - i\xi)/(1 + i\xi) \in \mathbf{U}$, et on sait qu'il y a des nombres algébriques réels ξ tels que le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ de l'extension galoisienne N engendrée par ξ ait une suite de Jordan-Hölder dont un groupe quotient est un groupe *simple* non commutatif d'ordre arbitrairement grand ([14], p. 396). Mais par hypothèse $\mathbf{Q}(\xi)$ est contenu dans une extension abélienne de $\mathrm{R}(z_1, \ldots, z_r)$, et l'on peut supposer, en adjoignant au besoin les conjugués des z_k, que cette extension est *galoisienne sur* $\mathbf{Q}$, donc contient N. Mais alors N serait contenu dans une extension galoisienne *finie* L de $\mathbf{Q}$ engendrée par des racines de l'unité, les z_k et des racines d'équations binômes $y^m = z_k$ en nombre fini ; la théorie de Galois montre aisément que le groupe de Galois Γ de L sur $\mathbf{Q}$ serait une *extension* du groupe G de $\mathbf{Q}(z_1, \ldots, z_r)$ sur $\mathbf{Q}$ par un groupe *abélien* ; dans une suite de Jordan-Hölder de Γ, il ne pourrait donc y avoir de facteurs simples non commutatifs autres que ceux de G ; il en serait par suite de même pour le groupe de Galois de N sur $\mathbf{Q}$, ce qui est contradictoire.

6. Les isomorphismes algébriques dont on vient de prouver l'existence sont toutefois, du point de vue géométrique ou topologique, d'une nature extrêmement « *pathologique* ». En premier lieu, il n'est pas possible que la restriction à K d'un des homomorphismes $x \to e^{i\alpha x}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ applique K *dans* $\mathbf{K}(i)$. En effet, $e^{i\alpha\xi}$ serait alors *algébrique* pour *tout* nombre réel algébrique ξ ; mais cela est impossible, car on sait que si ξ est un nombre algébrique *non rationnel*, aucune détermination d'un nombre complexe β^{ξ}, où β est algébrique et non racine de l'unité, ne peut être algébrique

([13], p. 58). Or, il y aurait par hypothèse des nombres algébriques réels γ tels que $\beta = e^{i\alpha\gamma}$ soit algébrique et non racine de l'unité, en vertu du n° 5 ; comme $e^{i\alpha\gamma\xi}$ est une détermination de β^{ξ} pour tout nombre réel algébrique ξ, on voit que l'hypothèse aboutirait à une contradiction.

7. On en déduit qu'il n'est pas possible qu'un homomorphisme f de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{K}(i) \cap \mathbf{U}$, de noyau $\mathbf{Z}$ (il en existe en vertu du n° 5) applique un *intervalle* I : $-\alpha < \xi < \alpha$ de $\mathbf{K}$ (avec $0 < \alpha < 1$) dans l'ensemble $\mathbf{U}' \cap \mathbf{K}(i)$ et soit *croissant* dans cet intervalle pour la relation d'ordre définie sur $\mathbf{U}'$ dans (5.4.10). En effet, on sait que $x \to e^{\pi i x}$ est une bijection croissante de l'intervalle $-1 < x < 1$ de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}'$; si g est la bijection réciproque, $\xi \to g(f(\xi)) = h(\xi)$ serait une application injective *croissante* de l'intervalle I dans $\mathbf{R}$, telle que $h(\xi + \eta) = h(\xi) + h(\eta)$ pour ξ et η assez petits, d'où $h(\xi/n) = h(\xi)/n$ pour $\xi \in \mathrm{I}$ assez petit et > 0 et pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$. Mais alors, pour $0 \leqslant |\xi| \leqslant \alpha/n$, on aurait $|h(\xi)| \leqslant h(\alpha)/n$ pour tout entier $n > 0$ assez grand puisque h est croissante, ce qui montre que h serait *continue* au voisinage de 0 dans $\mathbf{K}$; par suite f serait un homomorphisme de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{U}$ continu au point 0, donc partout dans $\mathbf{K}$; comme $\mathbf{K}$ est partout dense dans $\mathbf{R}$, f se prolongerait en un homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U}$, nécessairement de la forme $x \to e^{i\lambda x}$, et nous avons vu que c'est impossible.

7. Bien que cela sorte de notre sujet, il n'est peut-être pas sans intérêt de mentionner ici que, de la même façon qu'au n° 5, on montre que, si $\mathbf{K}$ est le corps de tous les nombres algébriques réels, le groupe multiplicatif $\mathbf{K}_+^* = \mathbf{K} \cap \mathbf{R}_+^*$ des nombres >0 appartenant à $\mathbf{K}$, et le groupe additif $\mathbf{K}$, sont tous deux *isomorphes à* $\mathbf{Q}^{(\mathbf{N})}$. Mais ici encore, tout isomorphisme de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{K}_+^*$ est « pathologique », car aucun des « bons » isomorphismes $x \to e^{\alpha x}$ (α réel) ne peut appliquer $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{K}_+^*$ ([13], p. 58), et on en déduit comme au n° 6 qu'aucun des isomorphismes de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{K}_+^*$ ne peut même être « localement croissant ».

Géométrie d'une forme bilinéaire symétrique. Les langages «projectif» et «non euclidien»

1. Le passage de la géométrie euclidienne du plan à celle de l'espace à 3 dimensions fait apparaître un grand nombre d'analogies. Comme toujours en Mathématique, on ne « comprend » vraiment la raison de semblables « rencontres » entre deux théories que lorsqu'on réussit à les englober dans une *même* théorie plus générale dont elles apparaissent comme des cas particuliers. En ce qui nous concerne, il est très facile de le faire, dès que l'on dispose des résultats généraux de l'Algèbre linéaire et notamment de la notion de *dimension*, et l'on arrive ainsi à une première théorie générale, la *géométrie euclidienne à n dimensions*, qui apparaît comme une extension tout à fait naturelle de ce qui a été développé dans ce livre. Mais c'est le propre des mathématiciens de ne jamais être satisfaits, et, depuis un siècle, ils ont peu à peu discerné que cette généralisation n'était que le premier pas dans une marche ascendante dont nul ne peut prédire si et où elle s'arrêtera et dont les étapes déjà franchies sont les suivantes :

II) la géométrie d'une forme bilinéaire symétrique sur le corps des nombres réels ;

III) la géométrie d'une forme sesquilinéaire ε-hermitienne sur un corps arbitraire ;

IV) la géométrie des groupes de Lie semi-simples et de leurs espaces homogènes.

En fait, les étapes III) et IV) constituent une *bifurcation* à partir de II), la théorie III) étant traditionnellement rangée dans l'Algèbre et la théorie IV) dans l'Analyse. A l'heure actuelle, les mathématiciens travaillent de tous côtés à édifier une synthèse encore plus vaste, dont on n'aperçoit que les grandes lignes et dont on ne possède jusqu'ici que des fragments, mais qui englobera (tout au moins on l'espère) les théories III) et IV) et sans doute aura des répercussions sur bien d'autres branches des mathématiques, comme la théorie des groupes finis et la Théorie des nombres.

Nous nous contenterons ici de nous arrêter à l'étape II), et d'indiquer au lecteur désireux de pousser plus avant les ouvrages [1], [6] et [10] où l'essentiel des résultats de III) se trouve exposé. En rappelant les résultats les plus importants de la géométrie d'une forme bilinéaire symétrique, nous allons entre autres voir ci-dessous que, dans un langage approprié, ils se traduisent sans effort en les théorèmes des fameuses « géométries non euclidiennes », qui historiquement sont nées de problèmes fort différents en apparence et qui ont tant intrigué les mathématiciens du XIX^e siècle.

2. L'idée centrale dans la théorie dont nous voulons retracer les grands traits est celle de *dualité*, qui remonte au début du XIX^e siècle, avec ce que Poncelet appelait la « transformation par polaires réciproques », et que l'on enseigne encore parfois sous ce nom. En fait, on s'est aperçu que la notion de dualité a une portée bien plus générale, et n'est pas bornée, comme le voulait Poncelet, à la seule théorie des quadriques (ou, ce qui revient au même, à la théorie des formes bilinéaires symétriques). Pour la bien comprendre, il faut l'exposer en deux étapes : 1° une théorie purement linéaire, celle du *dual* d'un espace vectoriel, qui, à cause de son caractère abstrait, n'a été dégagée que récemment, et où l'on travaille dans *deux* espaces vectoriels différents et non dans un seul ; 2° l'intervention de la forme bilinéaire, qui a pour effet de tout ramener à *un seul* espace, où l'on rejoint la théorie classique.

3. Commençons par rappeler les principaux théorèmes relatifs aux espaces vectoriels de dimension finie et à la dualité dans ces espaces ; pour les démonstrations, nous renvoyons à [12], § 19, [9], Annexe, ou [3], § 7. Le corps des scalaires est toujours supposé être le corps des nombres réels, bien que cela n'intervienne pas dans les démonstrations.

Soit E un espace vectoriel sur le corps **R**, engendré par un nombre *fini* de vecteurs. Alors il existe dans E une *base* finie et deux bases quelconques ont le *même* nombre d'éléments, appelé la *dimension* de E, et noté dim(E). Si E est engendré par m vecteurs, on a nécessairement $\dim(E) \leqslant m$.

Tout sous-espace vectoriel V de E est de dimension finie, et admet un sous-espace supplémentaire W ; en outre, pour toute décomposition de E en *somme directe* de deux sous-espaces V, W, on a

$$(1) \qquad \dim(V) + \dim(W) = \dim(E)$$

d'où l'on déduit, pour deux sous-espaces vectoriels *quelconques* V, W de E, la *relation de Grassmann*

$$(2) \qquad \dim(V) + \dim(W) = \dim(V + W) + \dim(V \cap W).$$

Il résulte aussi de (1) que si V, W sont deux sous-espaces de E tels que $V \subset W$ et si l'on a en outre $\dim(V) = \dim(W)$, alors on en conclut que $V = W$.

Si E, F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies, u une application linéaire de E dans F, on appelle *rang* de u et l'on désigne par $\mathrm{rg}(u)$ la *dimension* de $u(\mathrm{E})$; on a la relation

$$\mathrm{rg}(u) + \dim(u^{-1}(0)) = \dim(\mathrm{E}). \tag{3}$$

La relation $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{E})$ signifie donc que u est *injective*, et la relation $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{F})$ signifie que u est *surjective*. Pour un endomorphisme u de E, il revient donc au même de dire que u est injectif, ou surjectif, ou bijectif, ou de rang égal à $\dim(\mathrm{E})$.

4. Si E est un espace vectoriel de dimension n, son *dual* $\mathrm{E}^* = \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ a la *même* dimension n ; de façon plus précise, pour toute base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, il y a une base et une seule $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E^* telle que l'on ait

$$e_i^*(e_j) = 0 \text{ si } i \neq j, \qquad e_i^*(e_i) = 1 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4}$$

On dit que (e_i^*) est la *base duale* de (e_i).

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'application $x^* \to x^*(x)$ est une *forme linéaire* sur E^* ; si on la note $\tilde{x}$, on définit ainsi une application $x \to \tilde{x}$ de E dans le *dual* E^{**} *de* E^*, que l'on montre être un *isomorphisme* de E sur E^{**} (dit *canonique*) ; on identifie d'ordinaire E et E^{**} au moyen de cet isomorphisme, de sorte que E est considéré comme le *dual* de E^*. Une base (e_i) de E s'identifie alors ainsi à la *base duale* de sa base duale (e_i^*).

En raison de ces identifications, il y a symétrie parfaite entre les propriétés de E et de E^*.

On dit qu'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ et un vecteur $x^* \in \mathrm{E}^*$ sont *orthogonaux* si l'on a $x^*(x) = 0$ (attention, on ne définit pas la notion d'« orthogonalité » pour deux vecteurs d'un *même* espace, mais bien pour un vecteur de E et un vecteur de son dual E^*). Si M est une partie de E, N une partie de E^*, on dit que M et N sont des ensembles *orthogonaux* si tout vecteur de M est orthogonal à tout vecteur de N. Etant donné un sous-espace vectoriel V de E, on appelle *l'orthogonal* de V (ou encore le sous-espace *totalement orthogonal* à V s'il peut y avoir confusion) le sous-espace vectoriel V^0 de E^* formé des $x^* \in \mathrm{E}^*$ *orthogonaux à* V. On a

$$\dim(\mathrm{V}^0) + \dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{E}). \tag{5}$$

Si V et W sont deux sous-espaces quelconques de E, on a

$$(\mathrm{V} + \mathrm{W})^0 = \mathrm{V}^0 \cap \mathrm{W}^0, \qquad (\mathrm{V} \cap \mathrm{W})^0 = \mathrm{V}^0 + \mathrm{W}^0. \tag{6}$$

En outre, pour tout sous-espace vectoriel V de E, on peut considérer l'orthogonal $(\mathrm{V}^0)^0$ de V^0 dans E, identifié au dual de E^* ; on montre que l'on a

$$(\mathrm{V}^0)^0 = \mathrm{V} \tag{7}$$

(en d'autres termes, un sous-espace vectoriel de E est l'intersection des hyperplans qui le contiennent).

Soit F un second espace vectoriel de dimension finie ; pour toute application linéaire u de E dans F, l'application $y^* \to y^* \circ u$ est une application linéaire *de* F* *dans* E*, que l'on appelle *transposée* de u et que l'on note ${}^t u$. L'application $u \to {}^t u$ de Hom(E, F) dans Hom(F*, E*) est un *isomorphisme* d'espaces vectoriels ; en outre, si G est un troisième espace vectoriel, on a, pour toute application linéaire v de F dans G,

$$(8) \qquad {}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v.$$

Si V est un sous-espace de E, V^0 son orthogonal dans E*, on a

$$(9) \qquad (u(V))^0 = {}^t u^{-1}(V^0)$$

dans F* ; en particulier

$$(10) \qquad (u(E))^0 = {}^t u^{-1}(0),$$

d'où l'on déduit que

$$(11) \qquad \mathrm{rg}({}^t u) = \mathrm{rg}(u).$$

Enfin, si E et F sont identifiés aux duals respectifs de E* et F*, on a

$$(12) \qquad {}^t({}^t u) = u$$

pour tout $u \in \mathrm{Hom}(E, F)$, d'où l'on déduit en particulier que

$$(13) \qquad (u^{-1}(0))^0 = {}^t u(F^*)$$

dans E*.

5. Soit maintenant Φ une *forme bilinéaire* sur $E \times E$; pour tout $x \in E$ l'application $y \to \Phi(x, y)$ est donc une *forme linéaire* sur E que l'on note $s_\Phi(x)$; de même pour tout $y \in E$ l'application $x \to \Phi(x, y)$ est une *forme linéaire* sur E que l'on note $d_\Phi(y)$. Il est immédiat que l'on a ainsi défini *deux applications linéaires de* E *dans son dual* E*, s_Φ et d_Φ, que l'on dit *associées à* Φ *à gauche et à droite* respectivement, de sorte que l'on a par définition

$$(14) \qquad \Phi(x, y) = (s_\Phi(x))(y) = (d_\Phi(y))(x).$$

On en déduit les relations

$$(15) \qquad {}^t d_\Phi = s_\Phi, \qquad {}^t s_\Phi = d_\Phi$$

(en se souvenant que $E^{**} = E$). En effet, pour $x \in E$, si l'on pose $x^* = {}^t d_\Phi(x)$, on a par définition (n° 4)

$$x^*(y) = ({}^t d_\Phi(x))(y) = (d_\Phi(y))(x) = \Phi(x, y) = (s_\Phi(x))(y)$$

quel que soit $y \in E$, c'est-à-dire $x^* = s_\Phi(x)$, et comme cela a lieu pour tout $x \in E$, on obtient (15). D'après (11), les applications linéaires d_Φ et s_Φ ont donc *même rang*, que l'on appele le *rang de* Φ par définition. On dit que Φ est *non dégénérée* si son rang est égal à dim(E), autrement dit si d_Φ et s_Φ sont *bijectives*.

6. D'après (14), la relation $d_\Phi = s_\Phi$ équivaut à la relation

$$\Phi(y, x) = \Phi(x, y)$$

quels que soient x, y dans E, autrement dit, au fait que la forme Φ est *symétrique*. Lorsqu'on a une forme bilinéaire *symétrique non dégénérée* Φ sur $E \times E$, il lui correspond donc un *isomorphisme* $s_\Phi = d_\Phi$ de E *sur* E^* ; au moyen de l'isomorphisme *réciproque* $s_\Phi^{-1} = d_\Phi^{-1}$ de E^* sur E, on peut « transporter » *dans* E les éléments et sous-espaces de E^*, et tous les résultats du n° 4 sur la dualité « abstraite » se *traduisent* en résultats de « dualité définie par Φ », où cette fois, on reste dans le *même espace*.

En premier lieu, on dit que deux vecteurs x, y de E sont *orthogonaux* (pour Φ) si x et $s_\Phi(y)$ le sont au sens du n° 4, c'est-à-dire si $\Phi(x, y) = 0$, relation *symétrique* en x et y. Pour tout sous-espace V de E, l'ensemble $V^\perp$ des vecteurs $y \in E$ orthogonaux (pour Φ) à *tous* les vecteurs $x \in V$ est donc le sous-espace $s_\Phi^{-1}(V^0)$, appelé *l'orthogonal de* V (pour Φ) ; d'où aussitôt d'après (5), (6) et (7), les relations

$$\dim(V^\perp) + \dim(V) = \dim(E) \tag{16}$$

$$(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp, \qquad (V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp \tag{17}$$

$$(V^\perp)^\perp = V. \tag{18}$$

Dire que Φ est *non dégénérée* équivaut à dire que $E^\perp = \{0\}$, ou encore que le seul vecteur *orthogonal à* E *tout entier* est 0.

Si u est un endomorphisme de E, on a vu (n° 4) que ${}^tu$ est un endomorphisme de E^* ; on en conclut que

$$u^* = (s_\Phi)^{-1} \circ {}^tu \circ s_\Phi = (d_\Phi)^{-1} \circ {}^tu \circ d_\Phi \tag{19}$$

est un endomorphisme *de* E, dit *adjoint* de u (pour Φ) ; il revient au même de dire que pour tout couple de vecteurs x, y de E, on a

$$\Phi(u(x), y) = \Phi(x, u^*(y)). \tag{20}$$

7. On dit qu'un endomorphisme u de E est une *similitude* (pour Φ) *de multiplicateur* α si l'on a

$$\Phi(u(x), u(y)) = \alpha\Phi(x, y) \tag{21}$$

quels que soient x, y dans E ; cela s'écrit aussi

$$\Phi(x, u^*(u(y))) = \alpha\Phi(x, y) \tag{22}$$

et équivaut donc par suite à la relation

$$u^*u = \alpha \,.\, 1_E. \tag{23}$$

Si $\alpha \neq 0$, on déduit donc de (23) que u est injective, et par suite bijective (n° 3), d'où

$$u^* = \alpha u^{-1}. \tag{24}$$

Il est clair que les similitudes de multiplicateur $\neq 0$ forment un *sous-groupe* de $\mathbf{GL}(E)$, dit *groupe des similitudes* (pour Φ) et noté $\mathbf{GO}(E, \Phi)$ (ou simplement $\mathbf{GO}(E)$ ou $\mathbf{GO}(\Phi)$). Si pour tout $u \in \mathbf{GO}(\Phi)$, on note $\mu(u)$ son multiplicateur, l'application $u \to \mu(u)$ est un *homomorphisme* de $\mathbf{GO}(\Phi)$ dans $\mathbf{R}^*$, dont le *noyau* est un sous-groupe distingué de $\mathbf{GO}(\Phi)$, appelé *groupe orthogonal* (pour Φ) et noté $\mathbf{O}(E, \Phi)$, ou $\mathbf{O}(E)$, ou $\mathbf{O}(\Phi)$; ses éléments sont appelés *transformations orthogonales* (pour Φ).

Il résulte de (19) que pour tout endomorphisme u de E, on a(*)

$$\det(u^*) = \det(u) \tag{25}$$

et par suite, si u est une similitude de multiplicateur $\alpha \neq 0$, on a, d'après (23), en posant $n = \dim(E)$

$$(\det(u))^2 = \alpha^n \tag{26}$$

et en particulier, si $u \in \mathbf{O}(\Phi)$

$$\det(u) = \pm 1. \tag{27}$$

Les transformations orthogonales de déterminant 1 forment un *sous-groupe distingué* de $\mathbf{O}(\Phi)$, dit *groupe des rotations* (pour Φ) et noté $\mathbf{O}^+(E, \Phi)$ ou $\mathbf{SO}(E, \Phi)$, notations où l'on supprime parfois E ou Φ.

Une homothétie h_λ de E est une similitude de multiplicateur λ^2.

Si $n = 2q + 1$ est *impair*, la formule (26) montre que le multiplicateur $\mu(u)$ d'une similitude $u \in \mathbf{GO}(E)$ est nécessairement >0 ; si $\beta = \sqrt{\mu(u)}$, on a $u = h_\beta \circ v$, où $v \in \mathbf{O}(E)$, et $\det(u) = \beta^n \det(v)$ a même signe que $\det(v)$; on dit alors que u est une *similitude directe* (resp. *inverse*) si $\det(u) > 0$ (resp. $\det(u) < 0$). Le groupe $\mathbf{GO}(E)$ est *produit direct* du groupe $\mathbf{O}^+(E)$ et du groupe $\mathbf{Z}(E)$ des homothéties de rapport $\neq 0$.

Si $n = 2q$ est *pair*, on peut avoir $\det(u) = (\mu(u))^q$ ou $\det(u) = -(\mu(u))^q$; dans le premier (resp. le second) cas, on dit que u est une *similitude directe* (resp. *inverse*). La question des signes possibles de $\mu(u)$ et de $\det(u)$ dépend alors des signes possibles de Φ, et sera reprise plus loin ; notons seulement que les rotations sont toujours des similitudes *directes*.

8. Nous supposons désormais fixée une fois pour toutes une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Φ sur $E \times E$, et lorsque nous utiliserons sans préciser les notions introduites aux n^{os} 6 et 7, il sera sous-entendu qu'elles sont *relatives à* Φ.

(*) Nous supposons connue la théorie des déterminants d'ordre quelconque que l'on peut exposer le plus simplement en procédant comme dans (4.2.6) ou (6.2.4) (voir par exemple [9], *Annexe*).

Proposition 1. — *Il existe dans* E *une base* $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *telle que l'on ait*

(28) $$\Phi(e_i, e_j) = 0 \quad \textit{pour } i \neq j, \qquad \Phi(e_i, e_i) = \pm 1 \quad \textit{pour } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

En outre, si (e_i') *est une seconde base de* E *ayant les mêmes propriétés, le nombre des indices i pour lesquels* $\Phi(e_i, e_i) = 1$ *est le même que le nombre des indices i pour lesquels* $\Phi(e_i', e_i') = 1$ (« *loi d'inertie* »).

La première assertion se démontre par récurrence sur $n = \dim(\mathrm{E})$, le résultat étant évident pour $n = 0$. Supposons donc $n \geqslant 1$. En vertu de la relation

(29) $$2\Phi(x, y) = \Phi(x + y, x + y) - \Phi(x, x) - \Phi(y, y)$$

il y a au moins un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que $\Phi(x, x) \neq 0$ (sans quoi $\Phi(x, y)$ serait identiquement nulle dans $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, contrairement aux hypothèses) ; si β est tel que $\beta^2 = |\Phi(x, x)|$, le vecteur $e_1 = \beta^{-1}x$ est tel que $\Phi(e_1, e_1) = \pm 1$. Soit H le sous-espace de E orthogonal à e_1 ; en vertu de (16), on a $\dim(\mathrm{H}) = n - 1$, et H est donc un hyperplan ; en outre le choix de e_1 entraîne $e_1 \notin \mathrm{H}$, donc H est *supplémentaire* de la droite $\mathrm{D}_{\mathrm{O}e_1}$. Enfin, la restriction Φ' de Φ à $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ est *non dégénérée* : sinon, en effet, il existerait un vecteur $z \in \mathrm{H}$ non nul orthogonal à H ; comme il est aussi orthogonal à $\mathrm{D}_{\mathrm{O}e_1}$, il serait orthogonal à $\mathrm{E} = \mathrm{H} + \mathrm{D}_{\mathrm{O}e_1}$, ce qui est absurde. On peut alors appliquer à H l'hypothèse de récurrence, et il existe par suite dans H une base $(e_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$ telle que $\Phi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $\Phi(e_i, e_i) = \pm 1$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$; comme en outre $\Phi(e_1, e_i) = 0$ pour $i \geqslant 2$ par définition, la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E répond bien à la question.

Désignons maintenant par E^+ (resp. E^-) le sous-espace de E somme (directe) des droites $\mathrm{D}_{\mathrm{O}e_i}$ telles que $\Phi(e_i, e_i) = 1$ (resp. $\Phi(e_i, e_i) = -1$) ; pour achever la démonstration, il suffira de montrer que la *dimension* de E^+ est indépendante du choix de la base (e_i) vérifiant les conditions de l'énoncé. Or, pour tout $x \in \mathrm{E}^+$ (resp. $x \in \mathrm{E}^-$) non nul, on a $\Phi(x, x) > 0$ (resp. $\Phi(x, x) < 0$) puisque $\Phi(x, x)$ est la somme des nombres ξ_i^2 (resp. $-\xi_i^2$) étendue aux indices i tels que $\Phi(e_i, e_i) = 1$ (resp. $\Phi(e_i, e_i) = -1$). Soit alors $(e_i')_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une autre base répondant aux conditions de l'énoncé, et soient E'^+, E'^- les sous-espaces de E définis à partir de cette base de façon analogue à E^+ et E^-. On a $\mathrm{E}^+ \cap \mathrm{E}'^- = \{0\}$, car dans le cas contraire, un vecteur $x \neq 0$ de cette intersection devrait satisfaire à la fois aux relations contradictoires $\Phi(x, x) > 0$ et $\Phi(x, x) < 0$; on a donc $\dim(\mathrm{E}^+) + \dim(\mathrm{E}'^-) = \dim(\mathrm{E}^+ + \mathrm{E}'^-) \leqslant n$ par la relation de Grassmann, et comme E est somme directe de E'^+ et E'^-, $\dim(\mathrm{E}'^+) + \dim(\mathrm{E}'^-) = n$, d'où finalement $\dim(\mathrm{E}^+) \leqslant \dim(\mathrm{E}'^+)$. Echangeant les rôles de (e_i) et (e_i'), on voit de même que $\dim(\mathrm{E}'^+) \leqslant \dim(\mathrm{E}^+)$, ce qui achève la démonstration.

Si, pour une base (e_i) répondant aux conditions de l'énoncé de la prop. 1, p est le nombre des e_i tels que $\Phi(e_i, e_i) = 1$ et $q = n - p$ le nombre des e_i tels que $\Phi(e_i, e_i) = -1$, on dit que (p, q) est la *signature* de la forme Φ ;

une forme de signature $(n, 0)$ est donc une forme *positive non dégénérée* ; une forme de signature $(0, n)$ s'écrit $\Phi = -\Phi'$, où Φ' est une forme positive non dégénérée ; on dit alors que Φ est *négative non dégénérée.*

A) : *Cas d'une forme positive non dégénérée.*

9. Le cas où Φ est de signature $(n, 0)$ ou $(0, n)$ correspond à ce qu'on appelle d'ordinaire la *géométrie euclidienne à n dimensions* ; comme le passage de Φ à $-\Phi$ n'a pas d'effet sur la plupart des notions géométriques correspondantes (notamment l'orthogonalité), on se borne d'ordinaire au cas des formes de signature $(n, 0)$. Lorsque Φ est une telle forme, on peut lui appliquer tout ce qui a été dit dans la section (5.1) (en remplaçant $(x|y)$ par $\Phi(x, y)$) ; la prop. 1 montre en outre l'existence dans E de bases *orthonormales* (pour Φ), dont la définition est calquée sur celles des sections (5.2.1) et (7.1.1). On en conclut comme dans les cas $n = 2$ et $n = 3$ que tous les espaces euclidiens de même dimension sont *isomorphes* ; plus précisément, si V, W sont deux sous-espaces de E de *même dimension*, il y a toujours une transformation orthogonale u (et même une rotation) *dans* E telle que $u(\mathrm{V}) = \mathrm{W}$ (le groupe $\mathbf{SO}(\mathrm{E})$ opère donc *transitivement* dans l'ensemble des sous-espaces de dimension donnée).

Pour tout sous-espace vectoriel V, on a $\mathrm{V} \cap \mathrm{V}^{\perp} = \{0\}$, un vecteur de cette intersection étant orthogonal à lui-même ; en vertu de (16), V et $\mathrm{V}^{\perp}$ sont donc toujours *supplémentaires.* Le sous-groupe de $\mathbf{O}(\mathrm{E})$ laissant invariants tous les points de $\mathrm{V}^{\perp}$ s'identifie au groupe $\mathbf{O}(\mathrm{V})$.

La théorie des endomorphismes *hermitiens* (et plus généralement des endomorphismes *normaux*) dans un espace euclidien de dimension quelconque n se développe comme pour les cas $n = 2$ et $n = 3$; il faut bien entendu admettre ici un axiome additionnel sur les nombres réels, savoir le fait que le corps **C** des nombres complexes est *algébriquement clos* ; les démonstrations utilisent ce fait de façon essentielle, ainsi que l'extension des scalaires au corps **C** dans un espace vectoriel. Comme nous nous bornons ici aux espaces vectoriels sur **R**, nous renvoyons, pour ces démonstrations, à [6], § 7, ou [12], § 36, et nous énoncerons seulement les résultats :

Si u est un endomorphisme *hermitien*, il y a une base orthonormale (e_i) de E formée de *vecteurs propres* de u.

Si u est un endomorphisme *normal* (donc tel que $uu^* = u^*u$), E est somme directe de sous-espaces *orthogonaux deux à deux* V_k, de dimension 1 ou 2, et qui sont *stables* par u (ceux de dimension 1 sont donc formés de vecteurs propres de u). En particulier :

Si u est une *transformation orthogonale*, E est somme directe de sous-espaces deux à deux orthogonaux P, N et R_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ tels que $\mathrm{P} = \mathrm{E}(1 ; u)$, $\mathrm{N} = \mathrm{E}(-1 ; u)$, et enfin R_j est de dimension 2, $u(\mathrm{R}_j) = \mathrm{R}_j$, et la restriction de u à R_j est une *rotation* d'angle θ_j distinct de 0 et de l'angle plat. On a $2r \leqslant n$, et les racines du polyôme caractéristique de u (dans **C**) sont $+1$

(si $P \neq 0$), -1 (si $N \neq 0$) et les nombres $\cos\theta_j + i\sin\theta_j$ ($1 \leqslant j \leqslant r$), les θ_j étant distincts ou non deux à deux. On a ainsi attaché à toute transformation orthogonale un certain nombre d'*angles* bien déterminés ainsi que leurs « multiplicités », ce qui généralise les cas élémentaires $n = 2$ et $n = 3$.

En outre, pour que deux transformations orthogonales u, u' soient *conjuguées* dans le groupe $\mathbf{O}(E)$, il faut et il suffit que les nombres $\dim(P)$, $\dim(N)$ et $\cos\theta_j$ (à l'ordre près) soient les *mêmes* pour u et u'.

10. De la forme précise ainsi obtenue pour les transformations orthogonales il serait facile de déduire la proposition suivante qui généralise (5.3.2) et (7.2.2) :

Proposition 2. — *Si* E *est un espace euclidien de dimension n, toute transformation orthogonale u est produit d'au plus n symétries par rapport à des hyperplans.*

La démonstration directe est encore plus simple : elle procède par récurrence sur n, comme dans (7.2.2) (qui n'est autre que le passage de $n = 3$ à $n = 2$; le raisonnement se répète presque mot pour mot dans le cas général).

Comme le déterminant d'une symétrie par rapport à un hyperplan est -1, la prop. 2 montre qu'une *rotation* est produit d'un nombre *pair* $h \leqslant n$ de symétries par rapport à un hyperplan ; en particulier, si n est *impair*, on a nécessairement $h \leqslant n - 1$, et la relation de Grassmann montre que toute rotation laisse alors nécessairement un vecteur $x \neq 0$ *invariant* (appartenant à l'intersection des h hyperplans des symétries dont u est le produit).

11. On appelle *renversement* une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel V de dimension $n - 2$; il est immédiat que c'est une *rotation*, sa restriction à $V^\perp$ (qui est un *plan*) étant la symétrie $x \rightarrow -x$. Deux renversements quelconques sont *conjugués* dans le groupe $\mathbf{O}^+(E)$, puisque ce dernier opère transitivement sur les plans vectoriels. On a pour le groupe des rotations l'analogue de la prop. 2 :

Proposition 3. — *Dans un espace euclidien* E *de dimension* $n \geqslant 3$, *toute rotation u est un produit d'au plus n renversements.*

En effet, $u = s_1 s_2 \ldots s_h$, où h est pair et $\leqslant n$ et les s_j sont des symétries par rapport à des hyperplans. Il suffit donc de prouver que tout produit $s_1 s_2$ de deux telles symétries est produit de 2 renversements au plus. Or, ce produit laisse invariants les points de l'intersection V des hyperplans H_1, H_2 des symétries s_1, s_2 ; on peut se borner au cas où $s_1 \neq s_2$, donc $\dim(V) = n - 2 \geqslant 1$ et u est entièrement déterminé par sa restriction $v = u|P$ au *plan* $P = V^\perp$ orthogonal à V ; v est une rotation, produit des symétries s'_1, s'_2 par rapport aux droites $D_1 = H_1 \cap P$, $D_2 = H_2 \cap P$. Considérons alors dans V une droite D′ et le sous-espace W orthogonal (dans V) à D′, de dimension $n - 3$; soit r_1 (resp. r_2) le renversement égal à s'_1 (resp. s'_2) dans P, à la symétrie par rapport à W dans V ; comme cette dernière est involutive, on a encore $u = r_1 r_2$, d'où la proposition.

12. Nous pouvons maintenant, pour les espaces euclidiens E de dimension $\neq 4$, déterminer la structure du groupe des rotations :

Proposition 4. — *Soit* E *un espace euclidien de dimension n égale à* 3 *ou* $\geqslant 5$. *Alors, si n est impair, le groupe* $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ *est simple ; si n est pair, le seul sous-groupe distingué non trivial de* $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ *est son centre, formé des rotations* 1_{E} *et* -1_{E}.

Pour $n = 3$, la démonstration est esquissée dans ses grandes lignes à l'exerc. 3 de la section (7.2) ; nous allons utiliser ce résultat pour traiter le cas $n \geqslant 5$. Soit donc Γ un sous-groupe distingué de $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ contenant une rotation $u \neq \pm 1_{\mathrm{E}}$, et distinguons plusieurs cas :

1° u laisse invariants tous les points d'un sous-espace V de dimension $n - 3$ et est donc déterminé par sa restriction u' au sous-espace $\mathrm{V}^{\perp} = \mathrm{F}$ de dimension 3. Comme Γ contient toutes les rotations vuv^{-1}, où $v \in \mathbf{O}^+(\mathrm{E})$, il contient en particulier les rotations laissant invariants les points de V et dont la restriction à F est de la forme $v'u'v'^{-1}$, où $v' \in \mathbf{O}^+(\mathrm{F})$. Mais comme $\mathbf{O}^+(\mathrm{F})$ est *simple*, *toute* rotation de $\mathbf{O}^+(\mathrm{F})$ est produit d'un nombre fini de rotations de la forme $v'_k u' v'^{-1}_k$, et en particulier un *renversement* $r' \in \mathbf{O}^+(\mathrm{F})$ est de cette forme ; si r est le renversement égal à r' dans F, et laissant invariants les points de V, on a donc $r \in \Gamma$. Mais tout autre renversement dans $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ est *conjugué* de r, donc appartient aussi à Γ, et l'on a bien $\Gamma = \mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ en vertu de la prop. 3.

2° u laisse invariants tous les points d'un sous-espace W de dimension $n - 4 \geqslant 1$, et sa restriction au sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{W}^{\perp}$ de dimension 4 n'est pas -1_{F} (autrement dit u n'est pas la symétrie par rapport à W). Il y a alors dans F au moins une droite D telle que $u(\mathrm{D}) \neq \mathrm{D}$, puisque dans le cas contraire $u|\mathrm{F}$ serait une homothétie, donc égale à $\pm 1_{\mathrm{F}}$ contrairement à l'hypothèse. Soit donc $x \in \mathrm{F}$ tel que $u(x) \neq \pm x$; soit $y \neq 0$ un vecteur de W, et soit P le plan $\mathrm{P}_{\mathrm{O}xy}$; considérons dans P une rotation $w' \neq 1_{\mathrm{P}}$, et soit w la rotation dans E égale à w' dans P, et laissant invariants les points de $\mathrm{P}^{\perp}$. Alors $uw^{-1}u^{-1}$ laisse invariants les points de $u(\mathrm{P}^{\perp})$, et $u_1 = wuw^{-1}u^{-1}$ laisse invariants les points de $\mathrm{P}^{\perp} \cap u(\mathrm{P}^{\perp})$; comme Γ est distingué, on a $u_1 = (wuw^{-1})u^{-1} \in \Gamma$, et nous allons montrer que u_1 vérifie les hypothèses du cas 1° traité ci-dessus, ce qui achèvera de traiter le cas 2°. Comme u est une transformation orthogonale, on a $u(\mathrm{P}^{\perp}) = (u(\mathrm{P}))^{\perp}$, et $\mathrm{P}^{\perp} \cap (u(\mathrm{P}))^{\perp}$ est le sous-espace orthogonal à $\mathrm{P} + u(\mathrm{P})$ en vertu de (17). Mais $\mathrm{P} + u(\mathrm{P})$ est engendré par les vecteurs $x, y, u(x)$ et $u(y) = y$, donc on a $\dim(\mathrm{P} + u(\mathrm{P})) \leqslant 3$, et on en conclut $\dim(\mathrm{P}^{\perp} \cap u(\mathrm{P}^{\perp})) \geqslant n - 3$ d'après (16). Il suffit donc de vérifier que $u_1 \neq \pm 1_{\mathrm{E}}$; comme il y a des vecteurs $\neq 0$ invariants par u_1, on ne peut avoir $u_1 = -1_{\mathrm{E}}$ et il reste à exclure le cas $u_1 = 1_{\mathrm{E}}$. On aurait alors $uwu^{-1} = w$, et comme $\mathrm{P}^{\perp}$ (resp. $u(\mathrm{P}^{\perp})$) est l'ensemble des points invariants par w (resp. uwu^{-1}), cela entraînerait $\mathrm{P} = u(\mathrm{P})$, donc x et $u(x)$ appartiendraient à la même droite $\mathrm{P} \cap \mathrm{F}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3° u est la symétrie par rapport à un sous-espace W de dimension $n - 4$. Soit $F = W^{\perp}$, de dimension 4 ; considérons dans F une droite D et le sous-espace U de dimension 3 orthogonal à D dans F ; soit d'autre part D' une droite de W (il en existe puisque $n - 4 \geqslant 1$), et posons $F' = U + D'$. Il existe une rotation v transformant F en F', et vuv^{-1} est la symétrie par rapport à $W' = F'^{\perp}$; comme $F' \neq F$, on a $u \neq vuv^{-1}$, donc $u_2 = u^{-1}vuv^{-1} = uvuv^{-1}$ appartient à Γ et est $\neq 1_E$; en outre, u_2 laisse invariants les points de $F \cap F' = U$ et ceux de $W \cap W' = (F + F')^{\perp}$, qui est de dimension $n - 5$ (par (16) et la relation de Grassmann) et contenu dans $U^{\perp}$; la somme $U + (W \cap W')$ est donc directe et de dimension $n - 2$, et l'on est ramené au cas 1°.

4° *Cas général.* Il existe dans E au moins un plan Q tel que $u(Q) \neq Q$; en effet, si u laissait invariants (globalement) tous les plans, il laisserait aussi invariantes (globalement) toutes les droites, toute droite dans E étant intersection de deux plans distincts ; donc u serait une homothétie, contrairement à l'hypothèse. Formons comme dans 2° une rotation $w \neq 1_E$ laissant invariants les points de $Q^{\perp}$ (de dimension $n - 2$) ; alors $uw^{-1}u^{-1}$ laisse invariants les points de $u(Q^{\perp})$, et $u_3 = wuw^{-1}u^{-1}$ appartient à Γ et laisse invariants les points de $Q^{\perp} \cap u(Q^{\perp}) = W$; mais par la relation de Grassmann, on a $\dim(W) \geqslant n - 4$ et d'autre part $u_3 \neq 1_E$, sans quoi on aurait $w = uwu^{-1}$, d'où $u(Q^{\perp}) = Q^{\perp}$ contrairement au choix de Q. On est donc ramené à l'un des cas 2° ou 3°, ce qui termine la démonstration.

Le cas $n = 4$ est tout à fait exceptionnel et sera traité dans l'Annexe IV.

13. L'étude du groupe des similitudes $\mathbf{GO}(E)$ dans le cas où Φ est positive non dégénérée s'achève comme dans les cas $n = 2$ et $n = 3$: le multiplicateur α d'une similitude u est toujours >0, et si l'on pose $\beta = \sqrt{\alpha}$, on a $u = h_{\beta} \circ v$, où $v \in \mathbf{O}(E)$ (que n soit pair ou impair), de sorte que $\mathbf{GO}(E)$ est produit direct du groupe $\mathbf{O}(E)$ et du groupe $\mathbf{Z}^{+}(E)$ des homothéties de rapport >0.

B) : *Cas d'une forme Φ de signature (p, q), où $p \neq 0$ et $q \neq 0$.*

14. La grande différence avec le cas A) est l'existence de vecteurs $x \neq 0$ tels que $\Phi(x, x) = 0$ (autrement dit, qui sont *orthogonaux à eux-mêmes*). Les vecteurs x tels que $\Phi(x, x) = 0$ sont dits *isotropes*(*) et leur ensemble L,

(*) Classiquement, ce nom n'est utilisé que dans la géométrie sur le corps des *nombres complexes* **C** (géométrie qui, pendant tout le XIXe siècle et même dans beaucoup d'ouvrages plus récents, a été mélangée de façon absurde et abusive avec la géométrie sur **R**, de sorte qu'il est à peu près impossible de savoir jamais, à un moment donné, dans quel espace on travaille). Bien entendu, l'existence de tels vecteurs n'a rien à voir avec le choix du corps de base de la géométrie ; le seul fait particulier au corps **C** est que sur ce corps il y a *toujours* des vecteurs isotropes pour une forme Φ non dégénérée (mais ceci a lieu aussi, par exemple, pour un corps *fini*, dès que $n \geqslant 3$). Le cône isotrope est aussi appelé parfois le « cône de lumière » : cette terminologie provient de l'interprétation relativiste de l'Univers, où l'« espace-temps » est assimilé (localement) à un espace vectoriel à 4 dimensions muni d'une forme Φ de signature (3, 1), et les droites isotropes sont les trajectoires des photons dans cet « espace-temps » ; le groupe $\mathbf{O}(\Phi)$ est alors appelé « groupe de Lorentz ».

invariant par toute homothétie, est appelé le *cône isotrope* de E. Plus généralement, on dit qu'un sous-espace vectoriel V de E est *isotrope* s'il existe *dans* V un vecteur $z \neq 0$ *orthogonal à* V (ou, ce qui revient au même, si la restriction de Φ à $V \times V$ est *dégénérée*) ; une autre manière d'exprimer ce fait est de dire que $V \cap V^{\perp}$ *n'est pas réduit à* 0 ; il en résulte aussitôt, par la relation de Grassmann, que la somme $V + V^{\perp}$ est *distincte* de E et réciproquement. Un sous-espace vectoriel V est dit *totalement isotrope* si *tous* ses vecteurs sont isotropes ; en vertu de (29), il revient au même de dire que *deux quelconques* des vecteurs de V sont *orthogonaux*, ou encore que la restriction de Φ à $V \times V$ est *identiquement nulle*, ou encore que l'on a $V \subset V^{\perp}$. Par exemple, pour tout sous-espace vectoriel W de E, $W \cap W^{\perp}$ est *totalement isotrope* puisque le sous-espace orthogonal est $W + W^{\perp}$ par (17) ; une droite isotrope est totalement isotrope.

Pour qu'un sous-espace vectoriel V soit *non isotrope*, il faut et il suffit donc que V et $V^{\perp}$ soient *supplémentaires*, en vertu de ce qui précède et de (16).

15. Commençons par regarder ce qui se passe pour $n = 2$; il n'y a alors (à isomorphisme près) qu'un seul type de forme bilinéaire correspondant au cas B), celui de signature (1, 1). Il existe alors exactement *deux* droites isotropes distinctes dans E : en effet, si $\{e_1, e_2\}$ est une base de E telle que $\Phi(e_1, e_1) = 1$, $\Phi(e_2, e_2) = 1$, $\Phi(e_1, e_2) = 0$, la condition pour que $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ soit isotrope est $\xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$. On peut donc prendre une nouvelle *base* $\{a_1, a_2\}$ de E formée de vecteurs *isotropes* ; comme on a alors $\Phi(a_1, a_2) \neq 0$ (sans quoi Φ serait identiquement nulle), on peut en outre, par multiplication par un scalaire, supposer que l'on a $\Phi(a_1, a_2) = 1$ (nous dirons pour abréger que $\{a_1, a_2\}$ est alors une *base isotrope*) ; pour deux vecteurs $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$, on a donc

$$\Phi(x, y) = \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1 \tag{30}$$

si bien que si $x \neq 0$, le vecteur $x' = \xi_1 a_1 - \xi_2 a_2$ est *orthogonal à* x (pour Φ) et tous les vecteurs orthogonaux à x sont de la forme $\lambda x'$. Si D_1, D_2 sont les deux droites isotropes de E, cela s'exprime encore en disant que pour toute droite D de E distincte de D_1, D_2, la droite D' orthogonale à D est donnée par la relation

$$\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D' & D \end{bmatrix} = -1 \tag{31}$$

(cf. section (4.1), exerc. 10).

16. Continuant à examiner le cas $n = 2$ (E (muni de Φ) étant souvent alors appelé « *plan hyperbolique* »), notons que tout ce qui a été dit dans la section (5.2.8) est valable *sans changement* autre que le remplacement de $(x|y)$ par $\Phi(x, y)$, pour tout ce qui ne concerne pas le calcul des matrices ;

mais ici l'expression de $M(w)$ n'est plus tout à fait la même. Il convient en effet de prendre plutôt pour base de E une base *isotrope* $\{a_1, a_2\}$ (n° 15) ; si pour cette base on prend encore

$$M(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

l'endomorphisme w a cette fois une matrice déterminée par les conditions

$$\Phi(w(a_1), a_1) = 0, \qquad \Phi(w(a_1), a_2) = 1,$$
$$\Phi(w(a_2), a_1) = -1, \qquad \Phi(w(a_2), a_2) = 0$$

ce qui donne

$$M(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

autrement dit les droites isotropes D_1 et D_2 sont les sous-espaces *propres* $E(1\,;\,w)$ et $E(-1\,;\,w)$ et en écrivant qu'une similitude directe u est caractérisée par la condition $wu = uw$, on voit que, géométriquement, cela équivaut à dire que u laisse (globalement) *invariantes* chacune des droites isotropes, ou encore que pour la base isotrope $\{a_1, a_2\}$, sa matrice est de la forme

$$M(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{32}$$

On en conclut ici que l'ensemble $\mathbf{C}(E)$ des similitudes directes est encore un *anneau commutatif*, mais cette fois ce n'est plus un corps, mais bien le *composé direct* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *de deux corps* isomorphes à $\mathbf{R}$: il y a des *diviseurs de zéro*, autres que 0, qui sont les matrices (32) où *l'un* des deux nombres λ, μ est égal à 0 (observer la différence avec la section (5.5.1)). Il en résulte aussi que le groupe $\mathbf{GO}^+(E)$ des *similitudes directes* est formé des matrices (32) où $\lambda\mu \neq 0$, autrement dit c'est le *produit direct* de deux groupes isomorphes à $\mathbf{R}^*$. Quant au groupe des rotations $\mathbf{O}^+(E)$, il est formé des automorphismes dont la matrice relativement à $\{a_1, a_2\}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \tag{33}$$

avec $\lambda \neq 0$, autrement dit, il est *isomorphe à* $\mathbf{R}^*$. On notera qu'ici, les rotations (et plus généralement les similitudes directes) ont des valeurs propres. Les rotations u pour lesquelles $\lambda > 0$ (donc $\lambda^{-1} > 0$, autrement dit celles dont les deux valeurs propres sont >0) forment un sous-groupe $\mathbf{O}^{++}(E)$ isomorphe à $\mathbf{R}_+^*$, dit groupe des *rotations orthochrones* de E.

Notons encore que les *similitudes inverses* dans E sont les automorphismes $u \in \mathbf{GL}(E)$ tels que $uw = -wu$, autrement dit ceux qui *échangent les droites isotropes* ; leur matrice relativement à $\{a_1, a_2\}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que, pour une telle similitude inverse u, si $\det(u) = -\lambda\mu < 0$ (autrement dit si u a un multiplicateur >0), u est de la forme $h_\beta \circ s$, où s est une *symétrie orthogonale* (pour Φ) par rapport à une droite non isotrope ; au contraire si $\det(u) > 0$, u a un multiplicateur <0 et n'a pas de valeur propre.

Soient Δ_1, Δ_2 deux demi-droites vectorielles ouvertes contenues respectivement dans D_1 et D_2, et orientons le plan de sorte que le couple (Δ_1, Δ_2) soit *direct* ; prenant $a_1 \in \Delta_1, a_2 \in \Delta_2$, on vérifie alors sans peine que les ensembles de demi-droites ouvertes contenues respectivement dans les secteurs angulaires $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$, $S^\circ(\Delta_2, -\Delta_1)$, $S^\circ(-\Delta_1, -\Delta_2)$ et $S^\circ(-\Delta_2, \Delta_1)$ sont des *classes d'intransitivité* du groupe $\mathbf{O}^{++}(E)$. En outre ce groupe opère de façon *simplement transitive* dans chacune de ces classes : par exemple, si Δ, Δ' sont deux demi-droites contenues dans $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$, un calcul facile montre que l'unique élément $u \in \mathbf{O}^{++}(E)$ tel que $u(\Delta) = \Delta'$ a une matrice de la forme (33) relativement à $\{a_1, a_2\}$, donnée par

$$\lambda^{-2} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D' & D \end{bmatrix} \tag{34}$$

où D et D′ sont les droites contenant respectivement Δ et Δ'.

Ceci conduit à définir ici l'« *angle* » de Δ et Δ', dans le plan orienté, comme égal au nombre réel

$$\widehat{(\Delta, \Delta')} = \tfrac{1}{2} \log \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D' & D \end{bmatrix} \tag{35}$$

(en admettant bien entendu les axiomes sur $\mathbf{R}$ garantissant l'existence de ce nombre (cf. Annexe I, n° 7)) ; moyennant quoi, on a encore, pour trois demi-droites quelconques $\Delta, \Delta', \Delta''$ dans $S^\circ(\Delta_1, \Delta_2)$, la relation

$$\widehat{(\Delta, \Delta')} + \widehat{(\Delta', \Delta'')} = \widehat{(\Delta, \Delta'')}. \tag{36}$$

On peut bien entendu poursuivre dans cette voie et développer une « trigonométrie hyperbolique » par analogie avec l'étude du plan euclidien ; nous ne nous y arrêterons pas.

17. Revenons au cas général. Un fait essentiel de la géométrie euclidienne est que les sous-espaces de E de dimension donnée m forment *une seule classe d'intransitivité* pour le groupe orthogonal $\mathbf{O}(E)$; il n'en est plus du tout de même pour la géométrie d'une forme de signature (p, q) avec p et q non nuls.

Lemme 1. — *Soient* V, W *deux sous-espaces vectoriels orthogonaux* (donc tels que $V \subset W^{\perp}$, ou, ce qui est équivalent, $W \subset V^{\perp}$) *et tels que* $V \cap W = \{0\}$. *Pour que* $V + W$ *soit totalement isotrope* (resp. *non isotrope*), *il faut et il suffit que* V *et* W *le soient.*

La nécessité des conditions est immédiate, si l'on observe qu'un vecteur $x \in V$ orthogonal à $V + W$ est aussi orthogonal à V. Inversement, si V et W sont totalement isotropes, et si $x \in V$, $y \in W$, on a, d'après (29), $\Phi(x + y, x + y) = 0$, donc $V + W$ est totalement isotrope. Si V et W sont non isotropes, et si $x + y$ est orthogonal à $V + W$, comme y est orthogonal à V, on en déduit d'abord que $x \in V$ doit être orthogonal à V, donc $x = 0$ par hypothèse, et de même $y = 0$, si bien que $x + y = 0$, $V + W$ est non isotrope.

Lemme 2. — *Soient* D *une droite isotrope dans* E, $H = D^{\perp} \supset D$ *l'hyperplan* (*isotrope*) *orthogonal à* D. *Tout plan* P *contenant* D *et non contenu dans* H *est un plan hyperbolique* (donc non isotrope et dont D est l'une des deux droites isotropes) ; E *est donc somme directe de* P *et de* $P^{\perp}$, *et la restriction de* Φ *à* $P^{\perp} \times P^{\perp}$ *est une forme non dégénérée de signature* $(p - 1, q - 1)$.

Soit $a \in D$ et soit b un vecteur de P non dans H, de sorte que $\Phi(a, b) \neq 0$; $P^{\perp}$ est l'intersection de H et de l'hyperplan H′ orthogonal à b ; comme $P^{\perp} \subset H$, $D \cap P^{\perp} = \{0\}$ et que $P \cap H = D$, on a $P \cap P^{\perp} = \{0\}$ et P est donc non isotrope ; comme il contient une droite isotrope, c'est un plan hyperbolique. Il y a par suite une base $\{e_1, e_2\}$ de P telle que $\Phi(e_1, e_1) = 1$, $\Phi(e_2, e_2) = -1$; on peut donc en appliquant au sous-espace non isotrope P la prop. 1 obtenir une base orthogonale $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E telle que les e_i d'indice $\geqslant 3$ forment une base de $P^{\perp}$ et que $\Phi(e_i, e_i) = \pm 1$ pour tout i ; la dernière assertion du lemme résulte donc de la loi d'inertie.

On observera que ce lemme implique que le cône isotrope *n'est pas contenu dans un hyperplan* H, car si $D \subset H$ est une droite isotrope, il existe des plans contenant D et non contenus ni dans H, ni dans l'hyperplan $D^{\perp}$.

Nous dirons que le nombre $\nu = \min(p, q)$ est l'*indice* de la forme Φ. On peut se borner au cas où $\nu = q$ (en changeant au besoin Φ en $-\Phi$), et c'est ce que nous supposerons dans la suite.

Proposition 5. — (i) *Tout sous-espace vectoriel totalement isotrope est de dimension* $\leqslant \nu$ *et est contenu dans un sous-espace vectoriel totalement isotrope de dimension* ν.

(ii) *Soit* V *un sous-espace vectoriel totalement isotrope de dimension* $r \leqslant \nu$; *alors il existe un sous-espace vectoriel totalement isotrope* W *de même dimension* r *tel que* $W \cap V^{\perp} = \{0\}$.

(iii) *Soient* V, W *deux sous-espaces vectoriels totalement isotropes de même dimension* r, *tels que* $W \cap V^{\perp} = \{0\}$. *Alors on a* $V \cap W^{\perp} = \{0\}$ *et le sous-espace* $F = V + W$, *somme directe de* V *et* W, *est non isotrope. Pour toute base* $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *de* V, *il y a une base* $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *de* W *telle que*

$\Phi(a_i, b_j) = \delta_{ij}$ (indice de Kronecker) *pour tout couple d'indices. Enfin, la restriction à* $F^\perp \times F^\perp$ *de la forme* Φ *est de signature* $(p - r, q - r)$ *et d'indice* $\nu - r$.

Démontrons d'abord (ii) par récurrence sur r : pour $r = 1$ cela résulte du lemme 2, en prenant pour W la seconde droite isotrope d'un plan contenant la droite V et non contenu dans l'hyperplan $V^\perp$. Dans le cas général, considérons une droite $D \subset V$, un plan P contenant D et non contenu dans $H = D^\perp$; il est hyperbolique par le lemme 2 et contient donc une seconde droite isotrope D', et E est somme directe de P et de $P^\perp = H \cap H'$, où $H' = D'^\perp$. On a $V \subset H$, donc $V_1 = V \cap P^\perp$ est aussi égal à $V \cap H'$, et comme V n'est pas contenu dans H' (puisque $D \not\subset H'$), V_1 est un sous-espace totalement isotrope de dimension $r - 1$ dans $P^\perp$, donc, par l'hypothèse de récurrence, il existe dans $P^\perp$ un sous-espace vectoriel totalement isotrope W_1 de dimension $r - 1$ tel que $W_1 \cap V_1^\perp = \{0\}$. Alors $W = D' + W_1$ (somme directe) répond à la question. En effet, si $x = y + z \in W$ est orthogonal à V, avec $y \in D'$ et $z \in W_1$, en écrivant que x est orthogonal à D', on voit d'abord que y est orthogonal à D (puisque z l'est), donc $y = 0$; écrivant maintenant que z est orthogonal à V_1, on voit que $z = 0$, d'où notre assertion, compte tenu du lemme 1 qui prouve que W est totalement isotrope.

Le même raisonnement prouve aussi (i) : il suffit de noter que l'indice de $P^\perp$ est $\nu - 1$ et que V_1 est de dimension $r - 1$ pour obtenir par récurrence l'inégalité $r \leqslant \nu$. En outre V_1 est contenu dans un sous-espace totalement isotrope U_1 de dimension $\nu - 1$, et $U = D + U_1$ est, en vertu du lemme 1, un sous-espace totalement isotrope de dimension ν contenant V.

Enfin, on prouve aussi (iii) par la même méthode. Il suffit ici de prendre pour D la droite D_{Oa_1} ; il y a alors un vecteur b_1 contenu dans W et non orthogonal à a_1 : en effet, si T est un sous-espace de dimension $r - 1$, supplémentaire de D dans V, on a $\dim(T^\perp) = n - r + 1$; donc $W \cap T^\perp$ contient une droite D' en vertu de la relation de Grassmann ; si W était orthogonal à a_1, D' serait à la fois orthogonale à T et à D, donc à $V = T + D$ contrairement à l'hypothèse. On peut supposer que $\Phi(a_1, b_1) = 1$; on prend alors $P = P_{Oa_1b_1}$, et on pose $V_1 = P^\perp \cap V$, $W_1 = P^\perp \cap W$. On voit comme dans la démonstration de (ii) que V_1 et W_1 sont des sous-espaces totalement isotropes de dimension $r - 1$; en outre $W_1 \cap V_1^\perp = \{0\}$, car tout vecteur de cette intersection est orthogonal à V_1 et à D, donc à $V_1 + D = V$: prenant dans V_1 et W_1 des bases respectives $(a_i)_{2 \leqslant i \leqslant r}$, $(b_i)_{2 \leqslant i \leqslant r}$ telles que $\Phi(a_i, b_j) = \delta_{ij}$ (ce qui est possible par l'hypothèse de récurrence), on obtient deux bases $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de V et W respectivement vérifiant les relations voulues ; le fait que $F = (V_1 + W_1) + P$ est non isotrope résulte encore de l'hypothèse de récurrence et du lemme 1 ; enfin $F^\perp$ est aussi le sous-espace de $P^\perp$ orthogonal à $V_1 + W_1$, ce qui achève de prouver la proposition.

18. Nous pouvons maintenant caractériser les *classes d'intransitivité* du groupe $\mathbf{O}(E)$ dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E :

Proposition 6. — *Soient* V *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension m, d la dimension du sous-espace totalement isotrope* $U = V \cap V^{\perp}$. *Pour tout sous-espace* W *de* V *supplémentaire de* U *dans* V, *la restriction de* Φ *à* W *est non dégénérée et sa signature* (r, s) (avec $r + s = m - d$, $r \leqslant p - d$, $s \leqslant q - d$) *est indépendante du supplémentaire* W *choisi. La classe d'intransitivité de* V *pour le groupe* $\mathbf{O}(E)$ *est alors formée de tous les sous-espaces vectoriels pour lesquels les trois nombres* d, r, s *sont les mêmes.*

Si un vecteur $x \in W$ est orthogonal à W tout entier, il est aussi par définition orthogonal à $U + W = V$, donc contenu dans U, et par suite égal à 0, ce qui prouve la première assertion. Si W′ est un second sous-espace vectoriel de V supplémentaire de U et si p est la projection sur W parallèle à U, on a $x - p(x) \in U$ pour tout $x \in W'$, donc $\Phi(x - p(x), y) = 0$ pour tout $y \in V$, et par suite $\Phi(x, y) = \Phi(p(x), p(y))$ pour tout couple de vecteurs x, y dans W′ ; cela démontre la seconde assertion. Prenons alors dans W une base orthogonale $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m-d}$ telle que $\Phi(e_i, e_i) = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $\Phi(e_i, e_i) = -1$ pour $r + 1 \leqslant i \leqslant r + s = m - d$. Considérons maintenant le sous-espace orthogonal $W^{\perp}$ de dimension $n - (m - d)$, qui est supplémentaire de W dans E et contient U ; il contient donc un second sous-espace totalement isotrope U′ de même dimension d tel que $U + U'$ soit non isotrope (prop. 5) ; soit T l'orthogonal de $U + U'$ dans $W^{\perp}$, qui est non isotrope et tel que la restriction de Φ à $T \times T$ soit de signature $(p - r - d, q - s - d)$ (prop. 5). Utilisant encore la prop. 5, on voit donc qu'on peut compléter la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m-d}$ de W en une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E tout entier, telle que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ soit une base de V et que la matrice de Φ relativement à $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p-r-d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{q-s-d} \end{pmatrix}$$

Comme cette matrice est entièrement déterminée par les nombres p, q, r, s, d cela achève de prouver la proposition.

19. On peut se demander si, lorsque V et V′ sont dans une même classe d'intransitivité pour le groupe $\mathbf{O}(E)$, ils le sont aussi pour le *groupe des rotations* $\mathbf{O}^{+}(E)$. En vertu de la prop. 6, la réponse est affirmative *sauf* pour le cas où $m = d = n/2$ (ce qui implique donc que n est *pair* et $\nu = n/2$).

En effet, dans tout autre cas, la transformation orthogonale f changeant de signe un des e_i *autres* que ceux de la base de $U + U'$, et laissant fixes les autres, a pour déterminant -1 et laisse invariant (globalement) V ; donc, si $u \in \mathbf{O}(E)$ est telle que $u(V) = V'$, on a aussi $u(f(V)) = V'$ et $\det(u \circ f) = -\det(u)$, ce qui prouve notre assertion.

Par contre, pour $n = 2\nu$, il y a *deux* classes d'intransitivité pour le groupe des rotations $\mathbf{O}^+(E)$ dans l'ensemble N des sous-espaces totalement isotropes de *dimension maxima* ν. Il suffit en effet de montrer que si V est un tel sous-espace, tout $u \in \mathbf{O}(E)$ laissant globalement invariant V est nécessairement une *rotation*. Or, si l'on applique la prop. 5, on voit qu'il y a une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2\nu}$ de E telle que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant \nu}$ soit une base de V, $(e_i)_{\nu+1 \leqslant i \leqslant 2\nu}$ une base d'un second sous-espace totalement isotrope W, et enfin que $\Phi(e_i, e_{\nu+j}) = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant i \leqslant \nu$, $1 \leqslant j \leqslant \nu$. Ecrivant que u est une transformation orthogonale et laisse invariant V, on trouve sans peine que sa matrice relativement à (e_i) est de la forme

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & {}^tX^{-1} \end{pmatrix}$$

où X est une matrice inversible de type (ν, ν), d'où $\det(u) = 1$ (les détails du calcul sont laissés au lecteur ; on pourra utiliser le fait qu'il y a une bijection linéaire $x^* \to g(x^*)$ du dual V^* de V sur W telle que $x^*(x) = \Phi(x, g(x^*))$ pour tout $x \in V$ et tout $x^* \in V^*$).

De là on déduit la proposition suivante, d'aspect plus général :

Proposition 7. — *Supposons que* $n = 2\nu$, *et soient* V, W *deux sous-espaces totalement isotropes de dimension* ν *tels que* $\dim(V \cap W) = r$. *Alors, pour toute transformation orthogonale* u *telle que* $u(V) = W$, *on a* $\det(u) = (-1)^{\nu-r}$.

Si u' est une seconde transformation orthogonale telle que $u'(V) = W$, $u'^{-1}u$ est une transformation orthogonale laissant invariant V, donc une rotation, et il suffit de prouver la proposition pour *une* transformation orthogonale particulière u telle que $u(V) = W$. Posons $U = V \cap W$, de sorte que V et W sont contenus dans $U^\perp$. Il y a (prop. 5) un second sous-espace totalement isotrope U' de dimension r tel que $U' \cap U^\perp = \{0\}$ et que $F = U + U'$ soit non isotrope. E est somme directe de F et de $F^\perp$, avec $\dim(F^\perp) = 2(\nu - r)$; comme $V^\perp = V$, $V_1 = F^\perp \cap V$ est l'orthogonal de $F + V = V + U'$, on a $\dim(V_1) = n - \dim(V) - \dim(U') = \nu - r$ et de même $W_1 = F^\perp \cap W$ est de dimension $\nu - r$; autrement dit, V_1 et W_1 sont deux sous-espaces totalement isotropes de dimension maxima $\nu - r$ dans l'espace $F^\perp$, et ils sont supplémentaires dans cet espace par définition de U. On voit donc (prop. 5) qu'il y a une base de E formée par la réunion d'une base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de U, d'une base $(a'_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de U', d'une base $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant \nu-r}$ de V_1 et d'une base $(e'_j)_{1 \leqslant j \leqslant \nu-r}$ de W_1 telles que $\Phi(a_i, a'_h) = \delta_{ih}$ et $\Phi(e_j, e'_k) = \delta_{jk}$. Cela étant, on vérifie aussitôt que l'automorphisme u de E tel que u laisse invariants les a_i et a'_i et vérifie les relations $u(e_j) = e'_j$,

$u(e'_j) = e_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant v - r$, est orthogonal et tel que $u(\mathrm{V}) = \mathrm{W}$; le calcul de son déterminant est immédiat et donne $(-1)^{v-r}$, ce qui achève la démonstration.

En résumé, si $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$ sont les deux classes d'intransitivité de $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ dans N, on voit qu'on a les lois suivantes :

1° si V et W appartiennent à la *même* classe N_1 (ou N_2), $r = \dim(\mathrm{V} \cap \mathrm{W})$ *a la même parité que* $v = n/2$ (autrement dit, $v - r$ est *pair*) ;

2° si V et W appartiennent à deux classes différentes, $r = \dim(\mathrm{V} \cap \mathrm{W})$ *n'a pas la même parité que* v (autrement dit, $v - r$ est *impair*).

20. L'existence des vecteurs isotropes $\neq 0$ complique bien davantage encore la détermination des classes d'éléments conjugués dans le groupe orthogonal (correspondant aux résultats du n° 9 pour le cas euclidien), et plus généralement, la classification des endomorphismes *normaux* ; nous nous contentons de renvoyer sur ce point à [6], § 4, exerc. 12.

De même l'étude du groupe orthogonal $\mathbf{O}(\mathrm{E})$ ne peut plus se faire suivant les mêmes méthodes que dans les n^{os} 10 à 13. En premier lieu, le raisonnement de (5.1.13) montre encore que si u est une *involution* dans $\mathbf{O}(\mathrm{E})$, E est somme directe des sous-espaces propres $\mathrm{E}(1\,; u)$ et $\mathrm{E}(-1\,; u)$ qui doivent être *orthogonaux*, donc *non isotropes* puisqu'ils sont supplémentaires ; il n'y a donc de *symétries orthogonales* que par rapport à des sous-espaces vectoriels *non isotropes*. C'est pourquoi les raisonnements des n^{os} 10 à 13 ne peuvent s'étendre tels quels. On peut cependant démontrer encore les résultats suivants :

1° Toute transformation orthogonale u est produit d'au plus n symétries par rapport à des hyperplans non isotropes.

2° Toute rotation est produit d'un nombre fini de renversements (symétries orthogonales par rapport à des sous-espaces non isotropes de dimension $n - 2$).

3° Le groupe des commutateurs $\mathbf{O}^{++}(\mathrm{E})$ du groupe des rotations $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ est *d'indice* 2 dans $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$. Il peut s'obtenir de la façon suivante : les notations étant celles de la prop. 1, soit h la projection orthogonale sur E^+ ; alors, pour tout $u \in \mathbf{O}(\mathrm{E})$, $h \circ u$ est une bijection de E^+ sur lui-même, et si l'on pose $\sigma(u) = \operatorname{sgn}(\det(h \circ u))$, σ est un *homomorphisme* de $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ dans $\mathbf{R}^*$, et son noyau est $\mathbf{O}^{++}(\mathrm{E})$ (groupe des *rotations orthochrones*).

4° Le centre de $\mathbf{O}^{++}(\mathrm{E})$ est réduit à 1_E sauf lorsque p et q sont *tous deux pairs*, auquel cas il est égal à $\{1_\mathrm{E}, -1_\mathrm{E}\}$. En outre pour $n \geqslant 3$, $\mathbf{O}^{++}(\mathrm{E})$ ne contient *aucun sous-groupe distingué* autre que lui-même, son centre et le sous-groupe réduit à 1_E sauf pour $n = 4$, $v = 2$.

Pour les démonstrations, voir [1], [10], et [6], § 7, exerc. 27.

21. Enfin, une similitude $u \in \mathbf{GO}(\mathrm{E})$ transforme nécessairement un sous-espace totalement isotrope de dimension maxima v en un sous-espace de même nature. Or (avec l'hypothèse $p \geqslant q$), il résulte aussitôt de la prop. 5

qu'il y a une décomposition de E en somme directe $\mathbf{V} + \mathbf{W} + \mathbf{T}$, où $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ sont totalement isotropes de dimension maxima ν, $\mathbf{T}$ de dimension $n - 2\nu = p - q$, $\mathbf{T}$ étant orthogonal à $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ et la restriction de Φ à $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ étant *positive non dégénérée*. Comme u conserve l'orthogonalité, E est somme directe des sous-espaces totalement isotropes $u(\mathbf{V})$ et $u(\mathbf{W})$, de dimension ν, et du sous-espace $u(\mathbf{T})$ de dimension $p - q$, qui est orthogonal à $u(\mathbf{V}) + u(\mathbf{W})$; en vertu de la loi d'inertie, la restriction de Φ à $u(\mathbf{T}) \times u(\mathbf{T})$ est positive non dégénérée. Donc le multiplicateur de u est *nécessairement positif, sauf* lorsque $\mathbf{T} = \{0\}$, c'est-à-dire lorsque $p = q = \nu$, $n = 2\nu$. Si $p \neq q$, on voit comme dans (5.1.12) que $\mathbf{GO}(E)$ est *produit direct* du groupe orthogonal $\mathbf{O}(E)$ et du groupe $Z^+(E)$ des homothéties de rapport >0. Si au contraire $n = 2\nu$, il existe des similitudes de multiplicateur <0, comme on l'a vu dans le n° 16 ; le groupe $\mathbf{GO}'(E)$ des similitudes de multiplicateur >0 est alors distingué et d'indice 2 dans $\mathbf{GO}(E)$, et il est lui-même produit direct de $\mathbf{O}(E)$ et de $Z^+(E)$.

C) *Les langages « projectif » et « non euclidien ».*

22. Ce que l'on appelait autrefois « géométrie projective (réelle) » consiste à *traduire* les résultats de l'Algèbre linéaire (sur $\mathbf{R}$) suivant le *dictionnaire* que voici :

espace vectoriel E de dimension n	espace projectif $\mathbf{P}(E)$ de dimension $n - 1$
droite vectorielle	point
plan vectoriel	droite projective
espace vectoriel à 3 dimensions	plan projectif
sous-espace vectoriel à p dimensions	variété linéaire projective à $p - 1$ dimensions
hyperplan vectoriel	hyperplan projectif
cône isotrope (pour une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Φ de signature différente de $(n, 0)$ ou $(0, n)$)	quadrique projective non dégénérée Q de dimension $n - 2$ (dite aussi parfois hyperquadrique)
droites orthogonales (pour Φ)	points conjugués (par rapport à Q)
hyperplan orthogonal (pour Φ) à une droite	hyperplan polaire d'un point (par rapport à Q)
droite orthogonale (pour Φ) à un hyperplan	pôle d'un hyperplan (par rapport à Q)
sous-espace isotrope (pour Φ)	variété linéaire projective tangente à Q
sous-espace totalement isotrope (pour Φ)	variété linéaire projective contenue dans Q

etc. etc.

De façon plus précise, on prend pour $\mathbf{P}(E)$ l'*ensemble des droites vectorielles de* E (ou parfois l'ensemble de ces droites *privées de* 0). Tout automorphisme $u \in \mathbf{GL}(E)$ donne une application bijective $\bar{u}$ de $\mathbf{P}(E)$ sur lui-même ; ces applications sont appelées *projectivités* (ou *applications linéaires projectives*) de $\mathbf{P}(E)$ sur lui-même ; elles forment un *groupe* $\mathbf{PGL}(E)$ (ou $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathbf{PGL}(n, \mathbf{R})$) dit *groupe projectif* de $\mathbf{P}(E)$, et l'application $u \to \bar{u}$ est un homomorphisme de $\mathbf{GL}(E)$ *sur* $\mathbf{PGL}(E)$, de noyau le *centre* $Z(E)$ de $\mathbf{GL}(E)$ (de sorte que $\mathbf{PGL}(E)$ est isomorphe au quotient $\mathbf{GL}(E)/Z(E)$).

Les théorèmes d'Algèbre linéaire prennent parfois une forme plus « parlante » lorsqu'on leur applique le dictionnaire précédent ; c'est son seul intérêt connu au niveau de la « Géométrie élémentaire ». En Topologie et en Géométrie différentielle, la notion d'espace projectif a par contre une importance considérable, non pas à cause des traductions précédentes, mais parce que l'on définit sur ces espaces de nouvelles structures (topologiques, différentiables, analytiques, etc.) qui en font des outils très utiles (pour un mathématicien).

23. Soit E un espace vectoriel de dimension n, et considérons l'espace vectoriel $\mathbf{R} \times E$ de dimension $n + 1$, et, dans cet espace, l'hyperplan $E_1 = \{1\} \times E$, dont la direction est l'hyperplan $E_0 = \{0\} \times E$. Si une droite vectorielle D de $\mathbf{R} \times E$ n'est pas contenue dans E_0, elle rencontre E_1 en *un seul point* $(1, x)$ (3.3.8), et réciproquement par tout point $(1, x)$ de E_1 passe une seule droite vectorielle $\varphi(x)$. Avec le dictionnaire du n° 22, on voit que l'on a ainsi défini une *injection* canonique $x \to \varphi(x)$ de E dans $\mathbf{P}(\mathbf{R} \times E)$ au moyen de laquelle on *identifie* E à son image $\varphi(E)$. L'image par φ de toute *variété linéaire affine* V de dimension p dans E est la trace sur $\varphi(E)$ d'une *variété linéaire projective* unique de même dimension p, engendrée par $\varphi(V)$.

Historiquement, c'est l'idée d'« immerger » ainsi un espace vectoriel dans un espace plus vaste qui a conduit à la notion d'espace projectif. Le complémentaire de $\varphi(E)$ dans $\mathbf{P}(\mathbf{R} \times E)$ est l'hyperplan projectif E_0, dit « *hyperplan à l'infini* » pour cette raison. Dire que deux variétés linéaires dans E ont *même direction* signifie encore que leurs images par φ engendrent des variétés linéaires projectives ayant *même intersection avec l'hyperplan à l'infini*.

Une quadrique projective non dégénérée Q dans $\mathbf{P}(\mathbf{R} \times E)$ n'est pas contenue dans E_0 (n° 17) ; l'intersection $S = Q \cap \varphi(E)$ est dite *quadrique affine* non dégénérée. On peut montrer ([6], § 6, exerc. 25) que si Q_1, Q_2 sont deux quadriques projectives distinctes, les quadriques affines correspondantes sont aussi distinctes, de sorte qu'il y a correspondance biunivoque entre « quadriques projectives » et « quadriques affines » de dimension $n - 1$, les premières s'obtenant à partir des secondes par « adjonction de points à l'infini ». Par exemple, si E est un espace *euclidien*, une *sphère* S de centre a et de rayon ρ dans E est identifiée à la trace sur $\varphi(\mathrm{E})$ de la quadrique projective correspondant à la forme

$$\Phi((\xi, x), (\eta, y)) = (x - \xi a | y - \eta a) - \rho^2 \xi \eta$$

de signature $(n, 1)$ sur $\mathbf{R} \times \mathrm{E}$.

24. Fixons maintenant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Φ, de signature (p, q) avec $0 < q \leqslant p$, sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ (E étant un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$). La « géométrie » de la forme Φ, dont nous avons donné les résultats principaux dans les n$^{\text{os}}$ 14 à 21, se traduit suivant un *autre* dictionnaire en ce qui concerne les propriétés de l'espace projectif liées à la forme Φ. La quadrique Q correspondant à Φ est appelée « *absolu* », les points de $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ correspondant aux droites vectorielles sur lesquelles $\Phi(x, x) < 0$ pour $x \neq 0$, forment ce que l'on appelle l'*espace non euclidien* F de dimension $n - 1$ associé à Φ, et ce qu'on appelle *variétés linéaires non euclidiennes* dans cet espace sont les *traces* sur F de celles des variétés linéaires projectives de $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ qui rencontrent F. Le *groupe* de cette « géométrie » est ici l'image $\mathbf{PO}(\mathrm{E}, \Phi)$ (ou $\mathbf{PO}(\mathrm{E})$) dans $\mathbf{PGL}(\mathrm{E})$ du *groupe orthogonal* $\mathbf{O}(\mathrm{E}, \Phi)$, autrement dit le quotient de ce groupe par son centre. En vertu de la prop. 6, ce groupe opère *transitivement* dans F, mais en général il n'opére pas transitivement sur les *droites* de F (i.e. les plans vectoriels dans E dans lesquels $\Phi(x, x)$ prend des valeurs <0 pour certains vecteurs du plan) : prenant en effet une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans E telle que $\Phi(e_i, e_i) = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $\Phi(e_i, e_i) = -1$ pour $p + 1 \leqslant i \leqslant p + q = n$, on voit aussitôt que *si* $q \geqslant 2$, les deux plans $\mathrm{P}_{\mathrm{O}e_{n-1}e_n}$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{O}e_1e_n}$ ne peuvent être transformés l'un dans l'autre par une transformation orthogonale, puisque la restriction de Φ au premier a pour signature $(0, 2)$, et la restriction de Φ au second a au contraire pour signature $(1, 1)$.

25. On restreint donc d'ordinaire le « langage non euclidien » précédent au *seul* cas $q = 1$, $p = n - 1$. L'indice de Φ est alors $\nu = 1$; si V est un sous-espace vectoriel *isotrope* dans E, le nombre d de la prop. 6 est nécessairement égal à 1, et par suite le nombre s (dans cette même proposition) est nul ; on en conclut aussitôt que dans un tel sous-espace V, $\Phi(x, x)$ ne peut prendre que des valeurs $\geqslant 0$, autrement dit la variété linéaire projective correspondante V *ne rencontre pas* F. Par suite, pour toute variété linéaire projective de dimension $m - 1$ *rencontrant* F, la restriction de Φ au sous-espace vectoriel correspondant est toujours non dégénérée et a toujours pour indice $(m - 1, 1)$, de sorte que le groupe $\mathbf{PO}(\mathrm{E})$ *opère transitivement* dans l'ensemble des variétés linéaires « non euclidiennes » de même dimension, exactement comme dans le cas de la géométrie euclidienne. Mais bien entendu, la différence avec la géométrie euclidienne (et qui, historiquement, a été au début le caractère distinctif de cette nouvelle « géométrie ») est que si D est une droite non euclidienne, A un point non contenu dans D et P le plan non euclidien contenant A et D, il existe dans P

une *infinité* de droites non euclidiennes D′ contenant A et *ne rencontrant pas* D (dans F) (et, pour cette raison, parfois dites « parallèles » à D) : en effet, dans le plan vectoriel $V \subset E$ correspondant à D il y a une infinité de droites vectorielles L sur lesquelles $\Phi(x, x) > 0$ pour $x \neq 0$, et il suffit de prendre pour D′ une droite non euclidienne dont la droite projective qui la contient passe par un des points de **P**(E) correspondant à ces droites vectorielles L.

26. Soient A_1, A_2 deux points distincts de F, D la droite non euclidienne qui les contient ; elle correspond à un plan vectoriel V dans lequel la signature de la restriction de Φ est (1, 1), et qui par suite contient deux droites isotropes L, L′ ; si L_1, L_2 sont les droites vectorielles de V correspondant à A_1, A_2, les formules (35) et (36) conduisent à définir dans F la *distance non euclidienne* de A_1, A_2 comme le nombre

$$d(A_1, A_2) = \tfrac{1}{2}\left|\log\begin{bmatrix} L & L' \\ L_2 & L_1 \end{bmatrix}\right|.$$

Cette définition se justifie par le fait suivant : si A'_1, A'_2 sont deux points distincts de E, pour qu'il existe une transformation $\bar{u}$ de **PO**(E) telle que $\bar{u}(A_1) = A'_1$ et $\bar{u}(A_2) = A'_2$, il faut et il suffit que l'on ait $d(A_1, A_2) = d(A'_1, A'_2)$. Cela résulte aussitôt de ce qu'on a vu dans le n° 16 et de ce que **PO**(E) opère transitivement dans l'ensemble des droites non euclidiennes.

De même, si A est un point de F, L la droite vectorielle correspondante dans E, H l'hyperplan orthogonal (pour Φ) à L, il résulte de la loi d'inertie que la restriction de Φ à H est *positive non dégénérée.* Comme il y a correspondance biunivoque canonique entre les *droites vectorielles* dans H et les *droites non euclidiennes* passant par A, on peut définir l'*angle* $\widehat{(D_1, D_2)}$ de deux droites non euclidiennes D_1, D_2 passant par A comme l'angle $\widehat{(L_1, L_2)}$ des droites vectorielles correspondantes (pour une certaine orientation du plan vectoriel $L_1 + L_2$) défini comme dans (7.2.5). Cette définition se justifie encore par le fait que, pour qu'il existe une transformation de **PO**(E) transformant D_1, D_2 respectivement en deux droites non euclidiennes D'_1, D'_2 passant par un même point A′, il faut et il suffit que $\widehat{(D_1, D_2)} = \widehat{(D'_1, D'_2)}$ pour des orientations convenables, comme il résulte aussitôt du fait que **PO**(E) opère transitivement sur les plans et droites non euclidiens. On dira en particulier que D_1 et D_2 sont *perpendiculaires* si les droites L_1, L_2 correspondantes sont *orthogonales* dans H ; cette définition entraîne en particulier que la réunion des droites D_2 passant par A et perpendiculaires à D_1 est un *hyperplan non euclidien* (dit *perpendiculaire* ou *normal* à D_1), image de l'hyperplan euclidien (dans H) orthogonal à L_1.

Ici encore, l'intérêt de ces définitions n'apparaît qu'en relation avec les conceptions générales de la géométrie des espaces de Riemann.

27. La géométrie non euclidienne que nous venons d'évoquer brièvement est encore appelée « *hyperbolique* ». On peut aussi définir une géométrie non euclidienne, dite cette fois « *elliptique* », pour une forme Φ *positive non dégénérée*. Ici il n'y a pas d'« absolu », et l'espace non euclidien est simplement $\mathbf{P}(E)$ tout entier ; comme deux droites projectives dans un même plan projectif ont toujours au moins un point commun, il n'y a pas de notion de « parallèle ». La notion d'*angle* de deux droites non euclidiennes passant par un même point se définit comme au n° 26, et par suite aussi la notion de droites *perpendiculaires* en leur point d'intersection, ou de droite *perpendiculaire* (ou *normale*) à un hyperplan non euclidien au point où elle le rencontre.

Quant à la notion de « distance », on prend ici $d(A_1, A_2)$ égal à la valeur absolue de la « mesure » en radians de l'angle $\widehat{(L_1, L_2)}$ comprise entre $-\pi$ et π. Ces définitions se justifient comme au n° 26, mais n'ont de véritable intérêt que dans le cadre de la Géométrie différentielle.

Inversions et groupe conforme

1. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ (où nous utiliserons les notations de (5.1)), c un point de E, α un scalaire $\neq 0$. Pour tout $x \neq c$ dans E, il existe un point $x' \in \mathrm{E} - \{c\}$ et un seul, appartenant à la droite D_{cx} et tel que $(x - c|x' - c) = \alpha$: en effet, tout point $x' \in \mathrm{D}_{cx}$ peut s'écrire d'une seule manière $x' = c + \lambda(x - c)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$, et la condition imposée à x' s'écrit $\lambda\|x - c\|^2 = \alpha$, qui a une solution unique puisque $x \neq c$ par hypothèse. En raison de la symétrie du produit scalaire, on voit que l'on a ainsi défini une *permutation involutive* $i_{c,\alpha}$ de $\mathrm{E} - \{c\}$ sur lui-même, dite *inversion de pôle c et de puissance* α.

Il est clair que pour toute *variété linéaire* V passant par c, $\mathrm{V} - \{c\}$ est *globalement invariant* par $i_{c,\alpha}$; par abus de langage, on dit que $i_{c,\alpha}$ *transforme* V (au lieu de $\mathrm{V} - \{c\}$) *en elle-même.*

Il est immédiat que le produit $i_{c,\alpha} \circ i_{c,\beta}$ est la restriction à $\mathrm{E} - \{c\}$ de l'*homothétie* $h_{c,\alpha\beta^{-1}}$.

Pour étudier les inversions de pôle *fixe* c, on peut bien entendu se limiter au cas où $c = 0$, puisque $i_{c,\alpha} = t_c \circ i_{\mathrm{O},\alpha} \circ t_c^{-1}$.

2. Soit S une sphère de centre a et de rayon ρ passant par le pôle d'inversion c ; alors l'image de $\mathrm{S} - \{c\}$ par $i_{c,\alpha}$ est un hyperplan H orthogonal à la droite D_{ac}. En effet, on peut se borner au cas où $c = 0$; en posant pour abréger $i_{\mathrm{O},\alpha} = i$, on a $i(x) = \alpha x/\|x\|^2$ pour $x \neq 0$, et comme l'équation de S s'écrit $\|x\|^2 = 2(x|a)$ puisque $\rho^2 = \|a\|^2$ par hypothèse, on en tire, pour tout $x \neq 0$, $(i(x)|a) = \alpha/2$, d'où la conclusion (cf. (5.2.3) et (7.1.4), dont les démonstrations s'étendent aussitôt à un espace euclidien de dimension finie quelconque). La réciproque est évidente. Par abus de langage, on dit parfois que H est transformé *de* S (au lieu de $\mathrm{S} - \{c\}$) et S (au lieu de $\mathrm{S} - \{c\}$) transformée de H par l'inversion $i_{c,\alpha}$.

3. Si S est une sphère de centre a et de rayon ρ, ne contenant pas 0, et D une droite vectorielle rencontrant S en deux points x_1, x_2, on sait que le milieu $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ du segment x_1x_2 est la projection orthogonale de

a sur D ((5.1.10) appliqué dans un plan vectoriel contenant D et a), donc par le th. de Pythagore

$$\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 + x_2 - 2a\|^2 = 4\|a\|^2$$

et d'autre part

$$\|x_1 - x_2\|^2 + \|x_1 + x_2 - 2a\|^2 = 4\rho^2$$

d'où par soustraction

$$(x_1|x_2) = \|a\|^2 - \rho^2$$

ce qui prouve que la sphère S est globalement invariante par l'inversion de pôle 0 et de puissance $\|a\|^2 - \rho^2$. On en conclut que l'image de S par une inversion de pôle 0 et de puissance quelconque α est aussi l'image de S par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\alpha(\|a\|^2 - \rho^2)^{-1}$.

En outre, les points x_1 et x_2 sont *symétriques* par rapport à l'hyperplan H passant par a et orthogonal à D ; comme il en est de même des droites D_{ax_1} et D_{ax_2}, puisque $a \in H$, on en conclut (5.1.10) que les directions de ces droites sont *symétriques* par rapport à l'hyperplan vectoriel H_0 orthogonal à D.

4. Soient maintenant S_1, S_2 deux sphères *coorthogonales*, de centres a_1, a_2 (section (5.1), exerc. 4). Si 0 n'appartient ni à S_1, ni à S_2, les images de S_1 et S_2 par une inversion i de pôle 0 sont deux sphères S'_1, S'_2 ; montrons que ces sphères sont *coorthogonales*. En effet, soient a'_1, a'_2 les centres de S'_1, S'_2, x_1 un point de l'intersection $S_1 \cap S_2$, $x'_1 = i(x_1)$, H_0 l'hyperplan vectoriel orthogonal à D_{0x_1}. Il résulte du n° 3 que les directions des droites $D_{a'_1x'_1}$, $D_{a'_2x'_1}$ sont respectivement *symétriques* par rapport à H_0 de celles des droites $D_{a_1x_1}$, $D_{a_2x_1}$; ces dernières étant par hypothèse orthogonales, cela prouve notre assertion. En second lieu, si $0 \in S_1$ mais $0 \notin S_2$, $i(S_1)$ est un *hyperplan diamétral* de la sphère $S'_2 = i(S_2)$. En effet, avec les mêmes notations les directions de D_{0a_1} et $D_{a_1x_1}$ sont symétriques par rapport à H_0, et il en est de même des directions de $D_{a_2x_1}$ et $D_{a'_2x'_1}$; comme les directions de $D_{a_1x_1}$ et $D_{a_2x_1}$ sont orthogonales, il en est de même de celles de D_{0a_1} et de $D_{a'_2x'_1}$, d'où la conclusion. On dit encore qu'une sphère et un hyperplan diamétral sont *coorthogonaux*. Enfin, si $0 \in S_1 \cap S_2$, les images $i(S_1), i(S_2)$ sont des hyperplans dont les directions sont respectivement orthogonales à D_{0a_1} et D_{0a_2}, qui par hypothèse sont deux droites *orthogonales* ; deux hyperplans respectivement orthogonaux à des droites orthogonales sont dits *coorthogonaux*. Les réciproques de ces deux dernières propriétés se prouvent exactement de la même façon. Il est commode d'appeler les hyperplans « *sphères dégénérées* », et d'appeler *normale* à une sphère L (dégénérée ou non) en un point x de cette sphère la droite joignant x au centre de la sphère si cette dernière est non dégénérée, et la droite perpendiculaire à L en x si L est un hyperplan. Avec cette définition, dire que deux sphères

(dégénérées ou non) sont *coorthogonales* signifie qu'elles se rencontrent et qu'en chacun de leurs points communs leurs normales sont des droites de directions *orthogonales*. On peut alors résumer les résultats des n^{os} 2, 3 et 4 en disant (avec l'abus de langage signalé aux n^{os} 1 et 2) qu'une inversion *transforme une sphère (dégénérée ou non) en une sphère (dégénérée ou non)* et qu'elle *transforme deux sphères (dégénérées ou non) coorthogonales en deux sphères coorthogonales.*

5. Considérons une inversion $i_{c,\alpha}$ de puissance *positive* $\alpha = \rho^2$; alors on dit que la sphère Σ de centre c et de rayon ρ est *la sphère de l'inversion* $i_{c,\alpha}$: c'est évidemment l'ensemble des points de $E - \{c\}$ qui sont *invariants* par $i_{c,\alpha}$. En vertu de la section (5.1), exerc. 4, il revient au même de dire que deux points distincts x, x' sont images l'un de l'autre par $i_{c,\alpha}$, ou que *toute sphère (dégénérée ou non) contenant x et x' est coorthogonale à Σ* ; une telle sphère est donc *globalement invariante* par $i_{c,\alpha}$ (avec l'abus de langage signalé au n° 1 lorsque cette « sphère » est un hyperplan diamétral de Σ).

6. Comme les inversions ne sont pas définies dans l'espace E tout entier, il n'est pas possible de les *composer*, ni à plus forte raison de parler du groupe qu'elles engendrent. En passant dans un espace E_1 convenable de dimension $n + 1$, nous allons pouvoir donner un sens à cette dernière expression.

Pour cela, prenons pour E_1 l'espace produit $\mathbf{R} \times E$, où nous définissons une forme bilinéaire symétrique *positive non dégénérée* Φ_1 par

$$\Phi_1((\xi, x), (\eta, y)) = \xi\eta + (x|y). \tag{1}$$

Dans E_1 muni de la structure d'espace euclidien définie par Φ_1, nous noterons C_1 la *sphère unité*, de centre 0 et de rayon 1 ; notons que dans E_1, E est un hyperplan diamétral de C_1, et que si p est le point $(-1, 0)$ de E_1, la droite D_{0p} est orthogonale à E. On en conclut (n° 2) que si s désigne l'inversion de pôle p et de puissance 2 on a $s(E) = C_1 - \{p\}$. La restriction s_0 (resp. s_0^{-1}) de s à E (resp. à $C_1 - \{p\}$) est appelée, par abus de langage, *projection stéréographique* de E sur C_1 (resp. de C_1 sur E), de *point de vue p* (cf. (5.4.10)). Considérons maintenant une inversion $i_{c,\alpha}$ *dans* E ; alors $s_0 i_{c,\alpha} s_0^{-1}$ est une *permutation involutive* de l'ensemble $C_1 - \{s_0(c), p\}$; on la prolonge en une permutation involutive i' de C_1 *tout entier* en posant $i'(p) = s_0(c)$, $i'(s_0(c)) = p$; on dit alors que i' est une *inversion dans* C_1. De même, si v est une *symétrie par rapport à un hyperplan* dans E, $s_0 v s_0^{-1}$ est une *permutation involutive* de l'ensemble $C_1 - \{p\}$; on la prolonge en une permutation involutive v' de C_1 tout entier en posant $v'(p) = p$, et on dit que v' est une *symétrie dans* C_1. On peut maintenant parler du *groupe* Γ *engendré par les symétries et les inversions dans* C_1, que nous appellerons *groupe conforme de* C_1 (ou *de* E par abus de langage) ; nous nous proposons de déterminer sa structure.

7. En premier lieu, nous allons montrer qu'on peut engendrer Γ par une *partie* de l'ensemble des générateurs précédents, savoir l'ensemble formé des symétries dans C_1 et des inversions dans C_1 correspondant aux inversions $i_{c,\alpha}$ dans E de *puissance positive.* En effet, si $\alpha > 0$, on a vu (n° 1) que l'on a $i_{c,-\alpha} = i_{c,\alpha} \circ h_{c,-1}$; tout revient donc à montrer que $h_{c,-1}$ est un *produit de symétries* par rapport à des hyperplans de E. Or, on peut écrire $h_{c,-1} = t_c \circ h_{-1} \circ t_c^{-1}$ (3.2.18), et toute translation est un produit de deux symétries par rapport à des hyperplans (5.1.16). D'autre part, h_{-1}, c'est-à-dire la symétrie $x \to -x$ par rapport à l'origine, est produit des n symétries par rapport aux hyperplans orthogonaux respectivement à n vecteurs d'une base orthogonale de E, ce qui prouve notre assertion.

8. Considérons maintenant une inversion $i = i_{c,\alpha}$ *dans* E, de puissance $\alpha > 0$, et soit Σ la *sphère* de cette inversion *dans* E (n° 5). Soit i_1 l'inversion de pôle c et de puissance α *dans* E_1 ; la sphère Σ_1 de cette inversion est donc la sphère de même centre et de même rayon que Σ *dans* E_1 ; elle a par suite E pour *hyperplan diamétral,* et $E \cap \Sigma_1 = \Sigma$. Supposons d'abord que $p \notin \Sigma_1$; alors $s(\Sigma_1) = \Sigma'_1$ est une *sphère coorthogonale à* C_1 (n° 4), dont le centre c_1 est sur la droite $D_{pc} = D_{p,s_0(c)}$. Désignons par i'_1 l'inversion *dans* E_1 dont Σ'_1 est la sphère ; elle laisse (globalement) invariante C_1, et de façon précise transforme tout point x_1 de C_1 en le point x'_1 où la droite $D_{c_1x_1}$ recoupe C_1 (et en x_1 lui-même si cette droite est tangente à C_1) ; on notera que puisque $c_1 \notin C_1$, $i'_1(x_1)$ est défini pour tout $x_1 \in C_1$. Cette transformation i', restriction de i'_1 à C_1, n'est autre que l'*inversion dans* C_1 déduite de $i_{c,\alpha}$ par le procédé du n° 6. En effet, comme c_1 est sur la droite $D_{p,s_0(c)}$, on a $i'(p) = s_0(c)$ et $i'(s_0(c)) = p$; d'autre part, pour que deux points x_1, x'_1 de C_1 soient transformés l'un de l'autre par i'_1, il faut et il suffit que toute sphère S'_1 (dégénérée ou non) passant par ces deux points soit coorthogonale à Σ'_1 (n° 5) ; il revient au même de dire que si $x = s_0^{-1}(x_1)$ et $x' = s_0^{-1}(x'_1)$, toute sphère (dégénérée ou non) S_1 passant par x et x' est coorthogonale à Σ_1, et (comme x et x' sont dans E), cela équivaut à dire que x et x' sont transformés l'un de l'autre par $i_{c,\alpha}$ (n° 5) ; d'où notre assertion.

Supposons maintenant que $p \in \Sigma_1$, de sorte que $s(\Sigma_1 - \{p\})$ est un *hyperplan diamétral* H'_1 de C_1. Alors i' est la restriction à C_1 de la *symétrie par rapport à* H'_1 : en effet, il résulte du n° 2 que la droite $D_{p,s_0(c)} = D_{pc}$ est orthogonale à H'_1, et d'autre part (avec les mêmes notations que ci-dessus) tout hyperplan passant par x_1 et x'_1 est coorthogonal à H'_1 puisque son image par s est une sphère coorthogonale à Σ_1.

Considérons en second lieu dans E une symétrie v par rapport à un hyperplan H, et soit H_1 l'hyperplan *dans* E_1 coorthogonal à E et contenant H (autrement dit, si H_0 est la direction de H, H_1 est l'hyperplan contenant H et de direction $H_0 + D_{0p}$) ; alors $s(H_1) = \Sigma_1 - \{p\}$, où Σ_1 est une sphère coorthogonale à C_1 et passant par p ; le même raisonnement montre encore que la « symétrie » v' *dans* C_1 déduite de v par le procédé du n° 6 n'est autre que la restriction à C_1 de l'inversion dont la sphère est Σ_1.

Enfin, si on considère réciproquement, dans E_1, une inversion de puissance positive dont la sphère est *coorthogonale à* C_1, ou une symétrie par rapport à un *hyperplan diamétral* de C_1, les mêmes raisonnements montrent que la *restriction* à C_1 de cette transformation est une inversion (resp. une symétrie) *dans* C_1 telle qu'elle a été définie au n° 6.

9. Nous allons obtenir la structure de Γ en passant cette fois dans un espace E_2 à $n + 2$ dimensions. Nous prendrons $E_2 = \mathbf{R} \times E_1$, et nous définirons cette fois dans E_2 une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Φ_2 *de signature* $(1, n + 1)$ par la formule

$$\Phi_2((\xi, x_1), (\eta, y_1)) = \xi\eta - \Phi_1(x_1, y_1). \tag{2}$$

Nous nous proposons de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1. — *Le groupe conforme* Γ *est canoniquement isomorphe au groupe* $\mathbf{PO}(\Phi_2)$ *de la géométrie non euclidienne hyperbolique définie par* Φ_2 (Annexe II, n° 24).

Nous allons cette fois identifier E_1 à l'hyperplan $\{1\} \times E_1$ de E_2 (ne passant pas par 0), de sorte que C_1 est la trace sur E_1 du *cône isotrope* C_2 pour la forme Φ_2.

Soit $c_1 \in E_1$ un point *extérieur* à la boule de centre 0 et de rayon 1 dans E_1 ; la restriction à C_1 de l'inversion de pôle c_1 et dont la sphère est coorthogonale à C_1 s'obtient, comme on l'a vu, en faisant correspondre à tout point $x_1 \in C_1$ le second point x'_1 où la droite $D_{c_1x_1}$ rencontre à nouveau C_1 (et le point x_1 lui-même si cette droite est tangente à C_1). Désignons par D_2 la droite D_{0c_1} dans E_2, par L_2 et L'_2 les droites D_{0x_1} et $D_{0x'_1}$ dans E_2 ; soit H_2 l'hyperplan orthogonal à D_2 (pour Φ_2) ; montrons que L_2 et L'_2 sont transformées l'une de l'autre par la *symétrie par rapport à l'hyperplan non isotrope* H_2. En effet c'est évident si $x'_1 = x_1$, car alors le plan $P_2 = D_2 + L_2$ est un plan isotrope (pour Φ_2), la droite $D_{c_1x_1}$ étant tangente à C_1, et L_2 étant donc orthogonale (pour Φ_2) à toute droite de P_2, en particulier à D_2, d'où $L_2 \subset H_2$. Supposons au contraire $x_1 \neq x'_1$, de sorte que le plan $P_2 = L_2 + L'_2$ est un plan hyperbolique dans lequel L_2 et L'_2 sont les droites isotropes (pour la restriction de Φ_2) ; ce plan contient D_2, et la droite $D'_2 = P_2 \cap H_2$ est orthogonale à D_2 (pour la restriction de Φ_2). La symétrie par rapport à H_2 laisse donc P_2 globalement invariant, et *permute* L_2 et L'_2 (Annexe II, n° 16), ce qui prouve notre assertion.

Considérons en second lieu un hyperplan diamétral H_1 de C_1, et soit H_2 l'hyperplan de E_2 contenant 0 et H_1, de sorte que $H_1 = E_1 \cap H_2$. Si $E'_1 = \{0\} \times E_1$, tous les hyperplans H_2 ainsi obtenus sont les hyperplans contenant la droite orthogonale à E'_1 ; la symétrie par rapport à H_1 dans E_1 est la restriction à E_1 de la *symétrie par rapport à* H_2 dans E_2.

Désignons par Γ_2 le groupe engendré par les symétries (pour Φ_2) par rapport aux hyperplans non isotropes H_2 qui *rencontrent* le cône isotrope C_2, et par la symétrie $z \to -z$ dans E_2. Le groupe Γ est alors formé des restrictions à C_1 des transformations appartenant au *quotient* $P\Gamma_2$ de Γ_2 par le groupe formé des deux homothéties $\pm 1_{E_2}$, comme il résulte des raisonnements précédents. Or le groupe Γ_2 est en fait identique au *groupe orthogonal* $\mathbf{O}(\Phi_2)$. Il suffit en effet, en vertu de ce qui a été énoncé dans l'Annexe II, n° 20, de prouver que Γ_2 contient *toute* symétrie (pour Φ_2) par rapport à un hyperplan non isotrope. Or, dire qu'un hyperplan non isotrope H_2 *ne rencontre pas* C_2 signifie (en vertu de la loi d'inertie et du fait que $n + 2 \geqslant 3$) que la restriction de Φ_2 à H_2 est *négative non dégénérée* ; il y a donc une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$ de E_2 telle que $\Phi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$, $\Phi(e_1, e_1) = 1$, $\Phi(e_i, e_i) = -1$ pour $i \geqslant 2$, les e_i pour $i \geqslant 2$ formant une base de H_2. Cela étant, si s_i désigne la symétrie par rapport à l'hyperplan F_i orthogonal à e_i (de sorte que s_1 est la symétrie par rapport à $F_1 = H_2$), on a $s_1 = -s_2 s_3 \ldots s_{n+2}$. Mais les hyperplans F_i pour $i \geqslant 2$ contiennent des droites isotropes, puisque la signature de la restriction de Φ_2 à un tel hyperplan est $(1, n)$; donc les s_i pour $i \geqslant 2$ appartiennent à Γ_2 par définition, et il en est donc de même de s_1.

Il reste à prouver que l'homomorphisme $P\Gamma_2 \to \Gamma$ qui à toute transformation de $P\Gamma_2$ fait correspondre sa restriction à C_1 est *bijectif*, ou encore qu'une transformation de $\mathbf{O}(\Phi_2)$ qui laisse invariante *toute* droite isotrope est égale à $\pm 1_{E_2}$. Notons pour cela qu'une telle transformation laisse alors globalement invariant tout *plan vectoriel hyperbolique* dans E_2, et comme $n + 2 \geqslant 3$, toute droite vectorielle contenant un vecteur z tel que $\Phi_2(z, z) > 0$ (droite passant par un point de la boule ouverte B_1 (dans E_1) de centre 0 et de rayon 1) est l'intersection de deux plans vectoriels hyperboliques distincts (comme il est immédiat en prenant une base comme ci-dessus) donc est invariante par la transformation considérée. Mais dans un plan vectoriel hyperbolique une transformation orthogonale ayant cette propriété est nécessairement l'identité ou la symétrie $z \to -z$, ce qui termine la démonstration.

10. La prop. 1 fournit un *dictionnaire* permettant de passer automatiquement de la géométrie du groupe $\mathbf{O}(\Phi_2)$ à la géométrie du groupe conforme. Par exemple, on peut montrer (en transposant dans le langage « non euclidien » à un nombre quelconque de dimensions le raisonnement de (7.2.2)) que tout élément de $\mathbf{PO}(\Phi_2)$ est produit d'au plus $n + 2$ symétries par rapport à des hyperplans non isotropes *rencontrant* C_2. On en conclut que tout élément du groupe conforme est produit d'*au plus* $n + 2$ *inversions ou symétries* dans C_1. De même la démonstration du n° 9 fait apparaître une *correspondance biunivoque* entre *la complémentaire, dans l'espace projectif* $\mathbf{P}(E_2)$, *de l'ensemble des points qui appartiennent à* C_1 *ou à l'intérieur* B_1 *de la boule unité dans* E_1, d'une part, et *l'ensemble des sphères* (*dégénérées*

ou non) coorthogonales à C_1 *dans* E_1. Il est facile de montrer que dans cette correspondance, deux points *conjugués* par rapport à la quadrique projective C_1 correspondent à deux sphères *coorthogonales.*

11. La prop. 1 permet aussi, en sens inverse, de donner un nouveau « dictionnaire » pour la géométrie *non euclidienne hyperbolique* en termes de « géométrie conforme » dans un espace de *même* dimension.

On a vu que l'« espace non euclidien hyperbolique » de dimension $n + 1$ s'identifie à la boule ouverte $\mathbf{B}_1$ de centre 0 et de rayon 1 dans E_1 ; le groupe Γ_1 engendré par les restrictions à $\mathbf{B}_1$ des inversions (dans E_1) de sphère orthogonale à C_1 et des symétries par rapport aux hyperplans diamétraux de C_1 est *isomorphe à* Γ : en effet, si la restriction à C_1 d'un produit v de telles inversions et symétries est l'identité, il en est de même de sa restriction à $\mathbf{B}_1$, car tout élément de Γ_1 transforme la trace sur $\mathbf{B}_1$ d'une sphère (dégénérée ou non) coorthogonale à C_1 en un ensemble de même nature, et un tel ensemble est entièrement déterminé par la trace *sur* C_1 de la sphère (dégénérée ou non) correspondante ; d'où l'on conclut, par un raisonnement facile que nous laissons au lecteur, que si v laisse invariants tous les points de C_1, il laisse aussi invariants tous les points de $\mathbf{B}_1$. Un calcul facile que nous laissons également au lecteur permet de s'assurer que la *bijection* $f : x \to \dfrac{2x}{1 + \|x\|^2}$ de $\mathbf{B}_1$ sur lui-même transforme les traces sur $\mathbf{B}_1$ des *sphères coorthogonales* à C_1 en les « *hyperplans non euclidiens* » dans $\mathbf{B}_1$, et que l'on a $\Gamma_2 = f\Gamma_1 f^{-1}$. Tout énoncé de géométrie euclidienne faisant intervenir des sphères (dégénérées ou non) coorthogonales à C_1, ou des intersections de telles sphères, se « transporte » donc en un énoncé faisant intervenir les hyperplans non euclidiens correspondants et leurs intersections. L'interprétation ainsi obtenue est due à H. Poincaré ; par une inversion de pôle contenu dans C_1, on peut d'ailleurs transformer $\mathbf{B}_1$ en un *demi-espace* déterminé par un hyperplan de E_1, et la « géométrie » ainsi obtenue dans ce demi-espace est ce que l'on appelle la géométrie du « demi-espace de Poincaré ». Elle est surtout importante pour $n = 1$(*) et $n = 2$ en liaison avec la théorie des *fonctions automorphes.*

12. Il y a enfin un « dictionnaire » analogue à celui du n° 11 pour la géométrie *non euclidienne elliptique* (Annexe II, n° 27). On considère cette fois la bijection $g : x \to \dfrac{2x}{1 - \|x\|^2}$ de $\mathbf{B}_1$ sur *l'espace* E_1 *tout entier* ; les images réciproques par g des hyperplans dans E_1 sont les traces sur $\mathbf{B}_1$ des sphères telles que la *puissance* de 0 par rapport à ces sphères (section (5.1), exerc. 4) soit égale à -1, et des hyperplans diamétraux de C_1 ou encore les sphères (dégénérées ou non) *globalement invariantes* par l'inversion

(*) Pour $n = 1$, il est très facile de vérifier que le « groupe conforme » est isomorphe au *groupe projectif* $\mathbf{PGL}(2, \mathbf{R})$; cela montre donc que pour une forme bilinéaire symétrique Φ de signature (2, 1), le groupe $\mathbf{PO}(\Phi)$ est *isomorphe à* $\mathbf{PGL}(2, \mathbf{R})$.

$i_{0,-1}$(*). Pour avoir une interprétation de la géométrie non euclidienne elliptique, il faut prolonger g à la sphère C_1 où on *identifie* deux points diamétralement opposés, et faire correspondre à ces deux points le « point à l'infini » dans $\mathbf{P}(E_2)$ du diamètre qui les joint.

(*) Traditionnellement, on dit que ces sphères sont « (co)orthogonales à une *sphère imaginaire* de centre 0 et de rayon i », passant ainsi *sans le dire* dans l'espace obtenu par *extension à* **C** du corps des scalaires. Il convient de proscrire absolument ce langage imprécis, malheureusement universel chez tous les auteurs du XIX[e] siècle (et même plus tard) ; pour un exemple des confusions qu'il peut provoquer, même chez les plus grands mathématiciens, voir C. JORDAN, *Oeuvres*, t. III, p. VIII et suiv.

Quaternions et rotations

1. Le fait que l'on puisse définir dans le plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ une multiplication qui (avec l'addition provenant de la structure d'espace vectoriel de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$) fasse de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ un *corps commutatif* (5.5.2) amène à se demander s'il est possible de généraliser cette définition à des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$ de dimension $\geqslant 3$.

Nous allons montrer d'abord qu'il est *impossible* d'obtenir une structure analogue sur un *espace à trois dimensions*. De façon précise, soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, de dimension 3, et supposons qu'il existe une application $(x, y) \to xy$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans E vérifiant (avec l'application $(x, y) \to x + y$) les axiomes (R 1) à (R 9) du chap. I ; nous supposons en outre que pour tout scalaire $\alpha \in \mathbf{R}$, et tout couple de vecteurs x, y de E, on ait

$$(1) \qquad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

Soit $e_0 \neq 0$ l'élément unité de E pour la multiplication supposée ainsi définie dans E. Pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, les quatre vecteurs e_0, x, x^2, x^3 sont nécessairement linéairement dépendants, autrement dit, on a

$$(2) \qquad \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta e_0 = 0$$

pour quatre scalaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ non tous nuls. Si x n'est pas de la forme λe_0, il n'est pas possible que l'on ait $\alpha = \beta = 0$, car l'hypothèse $e_0 \neq 0$ entraînerait que $\gamma \neq 0$ et on aurait $x = \delta\gamma^{-1}e_0$ contrairement à l'hypothèse. Si $\alpha \neq 0$, on sait (par (1.33)) que l'on peut alors écrire

$$(x - \lambda e_0)(x^2 + \mu x + \nu e_0) = 0$$

pour des scalaires λ, μ, ν, convenables. Comme la conclusion de (1.5) doit être valable dans E, on doit avoir, soit $x = \lambda e_0$, soit $x^2 + \mu x + \nu e_0 = 0$ et comme la première hypothèse est exclue, on voit que l'on a alors une relation de la forme

$$(3) \qquad x^2 + \alpha x + \beta e_0 = 0.$$

En outre, on a nécessairement $\alpha^2 - 4\beta < 0$, sans quoi il y aurait deux scalaires λ, μ tels que l'on ait

$$(x - \lambda e_0)(x - \mu e_0) = 0$$

et par application de (1.5), on arrive de nouveau à une conclusion inacceptable. Notons que (3) s'écrit aussi

$$(4) \qquad \left(x + \frac{\alpha}{2} e_0\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right) e_0$$

et par suite, en posant $x' = \gamma^{-1}(x + (\alpha/2)e_0)$, où $\gamma^2 = \beta - (\alpha^2/4)$, on obtient

$$(5) \qquad x'^2 = -e_0.$$

Soit alors $\{e_0, e_1, e_2\}$ une *base* de E ; il résulte de ce qui précède qu'en remplaçant au besoin e_1 et e_2 par deux vecteurs de la forme $\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_0$ et $\alpha_2 e_2 + \beta_2 e_0$ avec $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$ (de sorte que ces nouveaux vecteurs forment encore avec e_0 une *base* de E), on peut supposer que l'on a

$$(6) \qquad e_1^2 = -e_0, \qquad e_2^2 = -e_0.$$

Cela étant, il existe trois scalaires λ, μ, ν tels que l'on ait

$$(7) \qquad e_1 e_2 = \lambda e_0 + \mu e_1 + \nu e_2.$$

Multiplions à droite les deux membres de cette équation par e_2 ; compte tenu de (1), de (6) et de (R 6) et (R 7) supposés valables dans E, il vient

$$(8) \qquad -e_1 = \lambda e_2 + \mu e_1 e_2 - \nu e_0$$

et en comparant cette relation avec (7) et tenant compte de ce que $\{e_0, e_1, e_2\}$ est une base, il vient en particulier

$$\mu = -1/\mu$$

ce qui est absurde et prouve l'impossibilité annoncée.

On observera que dans cette démonstration on ne s'est pas vraiment servi de la *commutativité* de la multiplication (R 5), mais seulement des autres axiomes (R 1) à (R 9), et des axiomes « symétriques » de (R 7), (R 8) et (R 9), savoir :

(R 7′) On a $\xi\varepsilon = \xi$.

(R 8′) On a $\xi''\xi = \varepsilon$.

(R 9′) On a $(\eta + \zeta)\xi = \eta\xi + \zeta\xi$.

Ces axiomes découlent évidemment des autres et de (R 5), mais lorsqu'on n'admet plus (R 5), il faut les poser séparément. Un *corps non commutatif* est par définition un ensemble où on s'est donné deux opérations vérifiant (R 1) à (R 4), (R 6) à (R 9), ainsi que (R 7′), (R 8′) et (R 9′), mais qui ne vérifie pas (R 5). On peut donc dire qu'*il n'y a pas de structure de corps* (*commutatif ou non*) sur E vérifiant (1).

2. Nous allons par contre voir que sur un espace vectoriel E *de dimension* 4 sur **R**, on peut définir une structure de *corps non commutatif* vérifiant les relations (1). Les axiomes de distributivité (R 9) et (R 9′) expriment (avec les relations (1)) que la « multiplication » $(x, y) \to xy$ à définir dans $E \times E$ doit être une application *bilinéaire* de $E \times E$ dans E. Elle est donc déterminée par ses valeurs pour tous les couples de vecteurs d'une *base* de E (cf. (4.2.1)). Soit donc $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et posons, par définition

$$(9)\quad \begin{cases} e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = -e_0, \quad e_2^2 = -e_0, \quad e_3^2 = -e_0 \\ e_0e_1 = e_1e_0 = e_1, \quad e_0e_2 = e_2e_0 = e_2, \quad e_0e_3 = e_3e_0 = e_3 \\ e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3, \quad e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1, \quad e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2 \end{cases}$$

de sorte que pour deux vecteurs

$$x = \xi_0e_0 + \xi_1e_1 + \xi_2e_2 + \xi_3e_3, \quad y = \eta_0e_0 + \eta_1e_1 + \eta_2e_2 + \eta_3e_3$$

on a

$$(10)\; xy = (\xi_0\eta_0 - \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 - \xi_3\eta_3)e_0 + (\xi_0\eta_1 + \xi_1\eta_0 + \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)e_1$$
$$+ (\xi_0\eta_2 + \xi_2\eta_0 + \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)e_2 + (\xi_0\eta_3 + \xi_3\eta_0 + \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)e_3$$

Il s'agit de prouver qu'avec ces définitions les conditions (R 1) à (R 4) et (R 6) à (R 9) du chap. I, (R 7′), (R 8′), (R 9′) et (1) du n° 1 sont toutes satisfaites. C'est immédiat (sur (10)) pour les conditions (1) ; quant aux conditions (R 1) à (R 4), elles sont vérifiées par hypothèse puisque l'on a pris pour E un espace vectoriel. L'élément $e_0 \neq 0$ vérifie (R 7) et (R 7′), autrement dit est *élément unité* pour la multiplication ; (R 9) et (R 9′) résultent de la façon dont le produit xy a été défini à partir de ses valeurs pour les vecteurs de base (4.2.1). Il reste à s'occuper de (R 6), (R 8) et (R 8′).

Pour prouver que l'on a $(xy)z = x(yz)$ quels que soient x, y, z dans E, on observe que les deux membres sont des fonctions *trilinéaires* de x, y, z, et pour prouver qu'elles coïncident, il suffit de voir qu'elles prennent la même valeur pour tout triplet (e_i, e_j, e_k) formé d'éléments de la base. Le fait que e_0 soit élément unité prouve aussitôt que la relation $(xy)z = x(yz)$ est vraie lorsque l'un des trois vecteurs x, y, z est égal à e_0 ; on peut donc supposer i, j, k différents de 0, ce qui laisse $3^3 = 27$ triplets ; si on observe en outre que le système de relations (9) ne change pas par permutation circulaire de e_1, e_2, e_3, il reste finalement 9 vérifications à faire :

$$(e_1^2)e_1 = e_1(e_1^2), \quad (e_1^2)e_2 = e_1(e_1e_2), \quad (e_1^2)e_3 = e_1(e_1e_3)$$
$$(e_1e_2)e_1 = e_1(e_2e_1), \quad (e_1e_2)e_2 = e_1(e_2^2), \quad (e_1e_3)e_1 = e_1(e_3e_1)$$
$$(e_1e_3)e_3 = e_1(e_3^2), \quad (e_1e_2)e_3 = e_1(e_2e_3), \quad (e_1e_3)e_2 = e_1(e_3e_2)$$

qui s'effectuent par inspection de chaque cas, en utilisant (9).

3. Pour prouver (R 8) et (R 8′), nous associerons d'abord, à tout élément $x = \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$, l'élément

$$\bar{x} = \xi_0 e_0 - \xi_1 e_1 - \xi_2 e_2 - \xi_3 e_3 \tag{11}$$

dit *conjugué* de x ; il est immédiat que l'application $x \to \bar{x}$ de E dans lui-même est un *automorphisme involutif* de cet espace vectoriel ; en outre, on a

$$\overline{xy} = \bar{y}\,.\,\bar{x} \tag{12}$$

En effet, les deux membres de (12) sont des fonctions *bilinéaires* de x, y et il suffit donc encore de prendre pour x, y des vecteurs de la base (e_i) pour vérifier (12), ce qui est immédiat en vertu de (9).

D'autre part, on a, en vertu de (10) et (11),

$$x\bar{x} = \bar{x}x = (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)e_0 \tag{13}$$

et on voit par suite que si $x \neq 0$, on a $x\bar{x} \neq 0$, et $x\bar{x} = \bar{x}x$ *commute* (comme e_0) avec tous les éléments de E. On peut alors prouver (R 8) et (R 8′) immédiatement : si $x \neq 0$, l'élément $x' = (\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{-1}\bar{x}$ vérifie d'après (13) les relations $xx' = x'x = e_0$. On écrira donc x^{-1} au lieu de x'.

4. Le corps non commutatif ainsi défini est appelé un *corps des quaternions* et ses éléments sont dits *quaternions.*(*) L'application $\xi \to \xi e_0$ de $\mathbf{R}$ dans E est un *isomorphisme* du corps $\mathbf{R}$ sur un *sous-corps* $Z = \mathbf{R}e_0$ de E.

Lemme 1. — *Le sous-corps* $Z = \mathbf{R}e_0$ *est le centre de* E.

En effet, un élément $x = \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ qui appartient au centre de E doit en particulier permuter à e_1, e_2, e_3 ; en écrivant les relations correspondantes et utilisant (9), il vient aussitôt $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Pour tout $x \in E$, on a

$$x + \bar{x} = 2\xi_0 e_0 \tag{14}$$

et comme on a $x^2 - (x + \bar{x})x + \bar{x}x = 0$, on voit que tout $x \in E$ vérifie une équation du second degré

$$x^2 - \alpha x + \beta e_0 = 0 \tag{15}$$

avec $\alpha = 2\xi_0$ et $\beta = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ (on prendra garde que dans E une telle équation a en général *une infinité* de racines, car si elle est vérifiée par x, elle l'est aussi par tout transformé sxs^{-1} de x par un automorphisme intérieur, avec $s \in E$ non nul, et on a $sxs^{-1} \neq x$ pour une infinité de quaternions s lorsque x n'est pas dans le centre Z).

(*) Pour fixer la terminologie, le plus souvent on prend pour E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$, pour base les vecteurs

$$e_0 = (1, 0, 0, 0), \qquad e_1 = (0, 1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 0, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 0, 1).$$

C'est le corps de quaternions correspondant qu'on appelle d'ordinaire *le* corps des quaternions ; on le note $\mathbf{H}$.

Ce résultat montre que, pour tout $x \neq 0$ dans E, l'ensemble des éléments $\lambda e_0 + \mu x$, où λ et μ parcourent $\mathbf{R}$, est un *sous-corps commutatif* $\mathbf{R}(x)$ de E. Si $x \in Z$, ce sous-corps est identique à Z ; sinon il est *isomorphe à* $\mathbf{C}$, car le même raisonnement que dans le n° 1 montre que dans l'équation (15) on a nécessairement $\alpha^2 - 4\beta < 0$ et qu'il existe $x' \in \mathbf{R}(x)$ tel que $x'^2 = -e_0$.

Les nombres réels $2\xi_0$ et $\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ sont appelés respectivement la *trace réduite* et la *norme réduite* du quaternion x, et notés $\mathrm{Tr}(x)$ et $\mathrm{N}(x)$. Il est clair que $x \to \mathrm{Tr}(x)$ est une *forme linéaire* sur E telle que

$$\mathrm{Tr}(\bar{x}) = \mathrm{Tr}(x). \tag{16}$$

En outre,

$$\mathrm{Tr}(yx) = \mathrm{Tr}(xy) \tag{17}$$

comme il résulte de (10) ; on en déduit

$$\mathrm{Tr}(sxs^{-1}) = \mathrm{Tr}(x) \tag{18}$$

pour tout quaternion $s \neq 0$, puisque $x = (xs^{-1})s$.

On a d'autre part

$$\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y) \tag{19}$$

car on peut écrire $(xy)(\overline{xy}) = xy\bar{y}\bar{x}$ et comme $y\bar{y}$ est dans le centre de E, $xy\bar{y}\bar{x} = (x\bar{x})(y\bar{y})$, d'où (19).

Les quaternions x tels que $\bar{x} = -x$ (ou encore $\mathrm{Tr}(x) = 0$) sont dits quaternions *purs* ; leur ensemble F est l'hyperplan dans E ayant pour base e_1, e_2, e_3. Il résulte de (18) que l'on a

$$sFs^{-1} = F \tag{20}$$

pour tout quaternion $s \neq 0$. L'espace vectoriel E est somme directe de $Z = \mathbf{R}e_0$ et de F, autrement dit tout quaternion z s'écrit d'une seule manière

$$z = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(z)e_0 + \tfrac{1}{2}(z - \bar{z})$$

où $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(z)e_0 = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ est encore appelée la *partie scalaire* de z, $\frac{1}{2}(z - \bar{z})$ la *partie pure* de z. Si $z = \alpha e_0 + x$, où x est pur, on a $\mathrm{Tr}(z) = 2\alpha$, $\mathrm{N}(z) = \alpha^2 + \mathrm{N}(x)$ et $x^2 = -\mathrm{N}(x)e_0$.

5. Il résulte de (16) que l'application $(x, y) \to \mathrm{Tr}(x\bar{y}) = \mathrm{Tr}(y\bar{x})$ est une *forme bilinéaire symétrique* Φ sur $E \times E$; elle est *positive non dégénérée*, car $\mathrm{Tr}(x\bar{x}) = \mathrm{N}(x)$. Nous munirons E de la structure d'*espace euclidien* correspondant à Φ, et écrirons donc $(x|y)$ au lieu de $\mathrm{Tr}(x\bar{y})$ et $\|x\|^2$ au lieu de $\mathrm{N}(x)$; la relation (19) s'écrit

$$\|xy\| = \|x\| . \|y\|, \tag{21}$$

et comme $\mathrm{N}(e_0) = 1$, cela entraîne

$$\|x^{-1}\| = \|x\|^{-1}. \tag{22}$$

Ces formules montrent que l'ensemble des quaternions *de norme* 1 est un *sous-groupe* $\mathbf{S}_3$ du groupe multiplicatif E^* des quaternions $\neq 0$; en outre, comme tout quaternion s'écrit d'une seule manière $x = \rho z$, avec $\rho = \|x\|$ et $\|z\| = 1$, on voit aussitôt que E^* est *produit direct* de $\mathbf{S}_3$ et du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ (identifié au groupe des quaternions ρe_0 tels que $\rho > 0$).

La relation (21) montre que si a et b sont deux quaternions *de norme* 1, l'application

$$x \to axb \tag{23}$$

est une *transformation orthogonale.* Nous nous proposons de montrer qu'on obtient ainsi *toutes les rotations* dans E.

6. La remarque précédente et l'équation (20) montrent d'abord que le sous-espace F est *stable* par la transformation orthogonale $x \to sxs^{-1}$ de E ; nous établirons en premier lieu la

Proposition 1. — *Toute rotation dans l'espace* F *des quaternions purs peut s'écrire sous la forme*

$$u_s : x \to sxs^{-1} \tag{24}$$

où s est un quaternion $\neq 0$. Pour que $u_s = u_{s'}$, il faut et il suffit que $s' = \lambda s$, où λ est un scalaire $\neq 0$.

La seconde assertion est immédiate, car si $sxs^{-1} = s'xs'^{-1}$ pour tout quaternion pur x, cela s'écrit aussi $(s'^{-1}s)x = x(s'^{-1}s)$, autrement dit le quaternion $s'^{-1}s$ commute avec tous les quaternions purs. Comme il commute aussi avec tous les éléments du centre $\mathbf{R}e_0$, il appartient nécessairement au centre (puisque $E = \mathbf{R}e_0 + F$), d'où la conclusion. Pour prouver la première assertion, il suffit d'observer que l'on a

$$u_{st} = u_s u_t \tag{25}$$

et en tenant compte de l'Annexe II, prop. 2, il suffit de démontrer l'existence de $s \in E$ tel que $-u_s = v$ lorsque v est une *symétrie* par rapport à un hyperplan. On a dans ce cas (5.1.13.1)

$$v(x) = x - 2\frac{(x|a)}{(a|a)}a \tag{26}$$

pour tout $x \in F$, avec $a \neq 0$ dans F. Or, si y et z sont deux quaternions *purs*, on a

$$\begin{aligned} 2(y|z)e_0 &= ((y+z|y+z) - (y|y) - (z|z))e_0 \\ &= -((y+z)^2 - y^2 - z^2) = -(yz+zy) \end{aligned} \tag{27}$$

et la formule (26) donne donc, dans le corps E,

$$v(x) = x + 2(x|a)a^{-1} = x - (xa + ax)a^{-1} = -axa^{-1}$$

ce qui achève la démonstration.

Il est intéressant de noter en passant que pour deux quaternions *purs* y, z, non seulement on a, d'après (27), $-\mathrm{Tr}(yz) = (y|z)$, mais la partie *pure* du produit yz de ces deux quaternions n'est autre que le *produit vectoriel* $y \barwedge z$ défini en (7.1.7) ; autrement dit, on a

$$yz = -(y|z)e_0 + y \barwedge z \tag{28}$$

comme il résulte de (10) et de (7.1.7.4).

7. Avant d'aller plus loin, tirons quelques conséquences de ce qui vient d'être dit, pour la géométrie euclidienne à *trois* dimensions (rappelons que tous les espaces euclidiens de même dimension sont *isomorphes*, en particulier tous les espaces euclidiens de dimension 3 sont isomorphes à F). La prop. 1 montre d'abord qu'on peut toujours écrire une rotation dans F sous la forme $x \to sxs^{-1}$ où s est un quaternion *de norme* 1, en multipliant au besoin s par un scalaire. Tenant compte de (25), on voit donc qu'on a défini un *homomorphisme surjectif* $s \to u_s$ du groupe $\mathbf{S}_3$ sur le groupe $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$, le *noyau* de cet homomorphisme étant le sous-groupe à deux éléments $\{1, -1\}$ dans $\mathbf{S}_3$; en d'autres termes, à toute rotation $v \in \mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$ correspondent *deux* quaternions opposés $\pm s$ de norme 1, tels que $u_s = v$, et nous verrons un peu plus loin qu'il n'est pas possible de « choisir » un de ces deux quaternions (pour tout $v \in \mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$) de façon « raisonnable ». Mais on peut facilement relier « géométriquement » s et u_s :

Proposition 2. — Soit $s = \alpha e_0 + t$ un quaternion, où t est un quaternion pur $\neq 0$ et α un scalaire. Alors l'axe de la rotation u_s (7.2.3) *est la droite* D_{0t}, *et l'angle de cette rotation (pour une orientation convenable du plan orthogonal à* D_{0t} *dans* F (7.2.5)) *est l'angle plat lorsque $\alpha = 0$, et, lorsque $\alpha \neq 0$, l'angle $\theta > 0$ tel que* $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\|t\|}{\alpha}$.

Le fait que D_{0t} est l'axe de u_s résulte de ce que les quaternions λt *permutent* à t et aux scalaires, donc à s. Pour prouver la seconde assertion, notons qu'en vertu de la transitivité du groupe des rotations $\mathbf{O}^+(\mathrm{F})$ dans F et de la prop. 1, pour deux quaternions purs x, y de même norme, il existe toujours un quaternion z tel que $y = zxz^{-1}$; en particulier, il y a un quaternion z tel que $ztz^{-1} = \rho e_1$, où $\rho > 0$; comme $u_{zsz^{-1}} = u_z u_s (u_z)^{-1}$, on peut se borner au cas où $t = \rho e_1$. Compte tenu de l'expression de s^{-1} (n° 3), on voit que l'on a

$$u_s(e_2) = \frac{1}{\alpha^2 + \rho^2}(\alpha e_0 + \rho e_1)e_2(\alpha e_0 - \rho e_1) = \frac{\alpha^2 - \rho^2}{\alpha^2 + \rho^2}e_2 + \frac{2\alpha\rho}{\alpha^2 + \rho^2}e_3$$

et par suite (5.4.4), en prenant dans le plan $P_{Oe_2e_3}$ de la rotation u_s l'orientation telle que le couple (e_2, e_3) soit direct, on a pour l'angle θ de cette rotation $\cos\theta = \dfrac{\alpha^2 - \rho^2}{\alpha^2 + \rho^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2\alpha\rho}{\alpha^2 + \rho^2}$, ce qui achève la démonstration.

8. La prop. 1 permet d'autre part de prouver des propriétés des quaternions en utilisant les propriétés du groupe $\mathbf{O}^+(\mathrm{F})$. Par exemple, tout quaternion z *de norme* 1 est un *commutateur* $tst^{-1}s^{-1}$ de deux quaternions s, t de norme 1. Il suffit en effet (par automorphisme intérieur) de le prouver pour $z = \alpha e_0 + \beta e_1$, et on constate alors aisément que l'on peut prendre $t = e_2$, $s = \lambda e_2 + \mu e_3$ avec $\|s\| = 1$, tenant compte de ce que $t^{-1} = -t$ et $s^{-1} = -s$. Ce même calcul prouve que tout quaternion est *produit de quaternions purs.* Il est facile aussi de déterminer ainsi, à l'aide de la prop. 1, tous les quaternions *permutables* à un quaternion donné, ou tous les couples de quaternions s, t tels que $ts = -st$; nous laissons ces questions au lecteur à titre d'exercices.

A l'aide de ce que nous venons de voir, nous allons montrer qu'*il n'existe pas d'homomorphisme* φ *du groupe* $\mathbf{O}^+(\mathrm{F})$ *dans* $\mathbf{S}_3$ *tel que* $u_{\varphi(v)} = v$ pour toute rotation v. En effet l'image $\varphi(\mathbf{O}^+(\mathrm{F}))$ serait alors dans $\mathbf{S}_3$ un sous-groupe d'*indice* 2, donc nécessairement *distingué*, et il existerait par suite un homomorphisme *surjectif* π de $\mathbf{S}_3$ sur le sous-groupe $\{1, -1\}$. Mais comme tous les quaternions *purs* de norme 1 sont conjugués dans $\mathbf{S}_3$, $\pi(z)$ aurait la même valeur pour tout $z \in \mathbf{S}_3 \cap \mathrm{F}$; comme $e_3 = e_1e_2$, on aurait nécessairement $\pi(e_3) = (\pi(e_1))^2 = 1$, donc $\pi(z) = 1$ pour tout z *pur* dans $\mathbf{S}_3$. Mais puisque l'on vient de voir que tout quaternion de $\mathbf{S}_3$ est produit de quaternions *purs* (que l'on peut supposer être aussi dans $\mathbf{S}_3$ par produit par des scalaires), on en conclurait que $\pi(z) = 1$ pour *tout* $z \in \mathbf{S}_3$, contrairement à l'hypothèse que π est surjectif. C'est ce résultat négatif qui exprime de façon précise l'impossibilité de « choisir » dans $\mathbf{S}_3$ des « représentants » des rotations dans F de façon sensée (on exprime encore ce fait en disant que le groupe $\mathbf{S}_3$ est un *revêtement non trivial* du groupe $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$, revêtement qui est aussi noté Spin(3, $\mathbf{R}$)).

9. Nous pouvons maintenant déterminer de même une « représentation paramétrique » du groupe des rotations de l'espace euclidien E à 4 dimensions :

Proposition 3. — *Toute rotation dans l'espace des quaternions* E *peut s'écrire sous la forme*

$$u_{a,b} : z \to azb \tag{29}$$

où a, b *sont deux quaternions* $\neq 0$ *et tels que* $\mathrm{N}(a)\mathrm{N}(b) = 1$. *En outre, pour que* $u_{a,b} = u_{a',b'}$, *il faut et il suffit que* $a' = \lambda a$, $b' = \lambda^{-1}b$, *où* $\lambda \neq 0$ *est un scalaire.*

La seconde assertion est immédiate, car si $azb = a'zb'$ pour tout z, cela s'écrit $a'^{-1}az = zb'b^{-1}$; faisant $z = e_0$, on a déjà $a'a^{-1} = b'b^{-1} = c$, et ensuite on voit que le quaternion c doit *permuter* à tout $z \in E$, donc être dans le centre de E. Pour prouver qu'une rotation quelconque dans E est de la forme $u_{a,b}$, il suffit d'observer que l'on a

(30) $$u_{a,b}u_{a',b'} = u_{aa',b'b}$$

et, utilisant l'Annexe II, prop. 3, on est ramené à prouver la proposition pour un *renversement* r (symétrie par rapport à un plan P dans E).

Distinguons deux cas :

1° P contient la droite $Z = \mathbf{R}e_0$. Alors l'orthogonal $P^\perp$ est contenu dans F, et F est donc globalement invariant par r, la restriction r' de r à F étant un renversement dans cet espace à 3 dimensions. En vertu de la prop. 1, il y a un quaternion t tel que la restriction de $z \to tzt^{-1}$ à F soit égale à r' ; comme par ailleurs cette rotation laisse invariants les points de Z, elle coïncide avec r, et la proposition est prouvée dans ce cas.

2° Cas général. Il suffit de montrer qu'il existe deux quaternions a, b tels que le plan $u_{a,b}(P)$ contienne Z ; en effet, on aura alors d'après 1°, $u_{a,b}r(u_{a,b})^{-1} = u_{t,t^{-1}}$, et comme $(u_{a,b})^{-1} = u_{a^{-1},b^{-1}}$, la proposition sera démontrée. Or, en vertu de la relation de Grassmann, $P \cap F$ contient une droite D, et il y a donc un $s \in E$ tel que $u_{s,s^{-1}}(D) = D_{Oe_1}$; d'autre part, il est clair d'après (9) que $u_{e_1,e_0}(e_1) = -e_0$, donc on répond à la question en prenant $a = e_1 s$, $b = s^{-1}$, puisque $N(e_1) = N(e_0) = 1$.

En multipliant a par un scalaire λ et b par λ^{-1}, on peut toujours, dans $u_{a,b}$, supposer que l'on a $N(a) = N(b) = 1$; la formule (30) et la prop. 3 montrent donc que l'application $\varphi : (s,t) \to u_{s,t}$ est un *homomorphisme surjectif* du groupe *produit* $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3$ *sur* $\mathbf{O}^+(E)$, le *noyau* N de φ étant formé des deux couples $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ (noter que ce sous-groupe *n'est pas* le centre T de $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3$, qui est le produit $\{1, -1\} \times \{1, -1\}$, et par suite est un sous-groupe d'ordre 4 contenant N). On voit ainsi que le groupe $\mathbf{O}^+(E)$ est isomorphe à $(\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3)/N$; il contient deux sous-groupes distingués $G_1 = \varphi(\mathbf{S}_3 \times \{1\})$, $G_2 = \varphi(\{1\} \times \mathbf{S}_3)$, dont chacun est isomorphe à $\mathbf{S}_3$ (l'intersection de $\mathbf{S}_3 \times \{1\}$ ou de $\{1\} \times \mathbf{S}_3$ avec N étant réduite à l'élément neutre), et $G_1 \cap G_2 = T/N$ est le centre $Z_0(E)$ de $\mathbf{O}^+(E)$, groupe $\{1, -1\}$ à 2 éléments. On a par suite dans $\mathbf{O}^+(E)$ deux suites de Jordan-Hölder

$$\mathbf{O}^+(E) \supset G_1 \supset Z_0(E) \supset \{1\}, \qquad \mathbf{O}^+(E) \supset G_2 \supset Z_0(E) \supset \{1\}$$

dont les quotients successifs sont les groupes simples $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$, $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$, $\{1, -1\}$. On voit ainsi, comme il avait été annoncé dans l'Annexe II, n° 12, que la dimension 4 est tout à fait *exceptionnelle* en ce qui concerne la structure du groupe des rotations dans un espace euclidien.

10. Cette structure très spéciale du groupe des rotations se reflète dans divers phénomènes géométriques, dont le plus connu est ce que l'on appelle le « parallélisme de Clifford ». Il est commode ici d'adopter le langage

de l'espace « non euclidien elliptique » $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ à 3 dimensions (Annexe II, n° 27). Les « déplacements non euclidiens » dans $\mathbf{PO}(\mathrm{E})$ qui sont les images des rotations de la forme u_{a,e_0} (resp. $u_{e_0,b}$) sont appelés « *translations de Clifford de première* (resp. *seconde*) *espèce* ». Ce sont des bijections de $\mathbf{P}(\mathrm{E})$ qui forment un groupe PG_1 (resp. PG_2) *isomorphe à* $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$. Ces groupes opèrent chacun de façon *simplement transitive* dans $\mathbf{P}(\mathrm{E})$, car pour deux quaternions donnés x, y non nuls, il y a un seul quaternion a (resp. b) tel que $ax = y$ (resp. $xb = y$), savoir $a = yx^{-1}$ (resp. $b = x^{-1}y$), et la multiplication de x ou y par un scalaire ne fait que multiplier aussi a (resp. b) par un scalaire. Les translations de Clifford autres que l'identité ne laissent donc *aucun point invariant*. En outre, si l'on considère une *droite non euclidienne* D (c'est-à-dire un plan vectoriel P dans E), les translations de Clifford de première (resp. seconde) espèce qui laissent *globalement invariante* cette droite forment un sous-groupe *commutatif* $\mathrm{T}_1(\mathrm{D})$ (resp. $\mathrm{T}_2(\mathrm{D})$) isomorphe au quotient de $\mathbf{O}_2^+(\mathbf{R})$ par son centre. En effet, utilisant la transitivité du groupe $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ dans l'ensemble des plans vectoriels, on peut supposer que $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathrm{O}e_0e_1}$, et dire qu'un quaternion a est tel que $ae_0 \in \mathbf{R}(e_1)$ (resp. $e_0a \in \mathbf{R}(e_1)$) signifie que $a \in \mathbf{R}(e_1)$, corps isomorphe à $\mathbf{C}$, comme on l'a vu (n° 4). Ce même raisonnement prouve en outre que, pour toute translation de Clifford $v \in \mathrm{PG}_1$, *ou bien* $v(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$, *ou bien* $v(\mathrm{D}) \cap \mathrm{D} = \phi$; les droites non euclidiennes de la forme $v(\mathrm{D})$, où v parcourt PG_1, sont appelées les *parallèles de Clifford de première espèce à* D, et cette définition au moyen d'un groupe de transformations prouve aussitôt que la relation de « parallélisme de Clifford de première espèce » est une *relation d'équivalence* (d'où le nom de « parallèles »). En outre, par tout point $\mathrm{A} \in \mathbf{P}(\mathrm{E})$ il passe *une et une seule* droite non euclidienne parallèle de Clifford de première espèce à D, savoir l'ensemble des points $w(\mathrm{A})$, où w parcourt le groupe $\mathrm{T}_1(\mathrm{D})$.

L'analogue avec la notion classique de parallèle se poursuit encore plus loin. Condidérons en effet une droite D′ parallèle de Clifford de première espèce à D et distincte de D ; soient A un point de D, A′ un point de D′, v l'*unique* élément de PG_1 transformant A en A′. Soit D_1 la droite (non euclidienne) passant par A et A′ ; comme $v(\mathrm{D}_1)$ rencontre D_1 au point A′, on a nécessairement $v(\mathrm{D}_1) = \mathrm{D}_1$. Donc, puisque les transformations de $\mathbf{PO}(\mathrm{E})$ conservent les « angles » non euclidiens, l'angle de D et D_1 est *égal* à celui de D′ et D_1 (pour des orientations convenables).

Si maintenant on considère un plan (non euclidien) P contenant D, rencontrant nécessairement D′ en un seul point A′ (puisque D et D′ ne sont pas dans un même plan projectif), $w(\mathrm{P})$, pour $w \in \mathrm{T}_1(\mathrm{D})$, est un plan qui contient D et rencontre D′ au point $w(\mathrm{A}')$. La même remarque que ci-dessus montre cette fois que les angles (convenablement orientés) de D′ avec les normales aux deux plans P, $w(\mathrm{P})$ aux points A′ et $w(\mathrm{A}')$

respectivement, sont *égaux* (propriété qui, elle, n'a aucune analogue en géométrie euclidienne).

On a bien entendu des définitions et propriétés analogues pour le groupe PG_2 (« parallélisme de Clifford de seconde espèce »). Nous nous bornerons ici à ces quelques exemples, qu'il serait facile de multiplier (voir [8] et [2]).

11. Enfin, on peut « traduire » les propriétés des parallèles de Clifford à l'aide de la bijection indiquée à la fin de l'Annexe III, n° 12, qui fait passer de l'espace non euclidien elliptique à 3 dimensions à la boule ouverte **B** de centre 0 et de rayon 1 dans l'espace euclidien à 3 dimensions, et des plans non euclidiens aux traces sur cette boule des sphères telles que 0 ait une puissance -1 par rapport à chacune d'elles. Les droites non euclidiennes deviennent donc par cette transformation des cercles dont le plan contient 0 et tels que 0 ait une puissance -1 par rapport à chacun d'eux (ou plutôt les traces de ces cercles sur **B**), et aux parallèles de Clifford correspondent ce que l'on appelle des *cercles paratactiques* (voir, pour ces traductions, [2]).

Bibliographie

[1] E. Artin, *Algèbre géométrique* (trad. M. Lazard), Paris (Gauthier-Villars), 1962.

[2] A. Bloch, Sur les cercles paratactiques et la cyclide de Dupin, *Journ. de Math.*, (9), t. III (1924), p. 51–78.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. II : *Algèbre linéaire*, 3^e éd., Paris (Hermann), 1962.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. IV–V : *Polynômes et fractions rationnelles. Corps commutatifs*, 2^e éd., Paris (Hermann), 1959.

[5] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. VI–VII : *Groupes et corps ordonnés. Modules sur les anneaux principaux*, 2^e éd., Paris (Hermann), 1964.

[6] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. IX ; *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, Paris (Hermann), 1959.

[7] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. V–VIII : *Groupes à un paramètre. Espaces numériques et espaces projectifs. Les groupes additifs* $\mathbf{R}^n$. *Nombres complexes*, 2^e éd., Paris (Hermann), 1963.

[8] H. S. M. Coxeter, *Non euclidean Geometry*, Univ. of Toronto Press, 1957.

[9] J. Dieudonné, *Fondements de l'Analyse moderne* (trad. D. Huet), Paris (Gauthier-Villars), 1963.

[10] J. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, 2^e éd., Berlin–Göttingen–Heidelberg (Springer), 1963.

[11] C. F. Gauss, *Recherches arithmétiques* (trad. Poullet-Delisle), Paris, 1807 (second tirage, Paris (A. Blanchard), 1953).

[12] R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Paris (Hermann), 1963.

[13] T. Schneider, *Introduction aux nombres transcendants* (trad. P. Eymard), Paris (Gauthier-Villars), 1959.

[14] N. Tschebotaröw, *Grundzüge der Galois'schen Theorie* (trad. Schwerdtfeger) Groningen (Noordhoff), 1950.

Index des notations

Index terminologique

Solutions des exercices

III, 1

1) Si u, u' dans U, $v \in$ V, $w \in$ W sont tels que $u + v = u' + w$, on a $w = u - u' + v \in$ V donc $w \in$ V $\cap$ W. Pour le contre-exemple, prendre dans un espace à 3 dimensions pour U une droite passant par 0, pour V, W deux plans distincts passant par 0 et ne contenant pas U.

2) Si $u \in$ U, $v \in$ V, $w \in$ W et $u = v + w$, on a $w = u - v \in$ U, donc $w \in$ U $\cap$ W. Pour le contre-exemple, prendre pour U, V, W trois droites distinctes passant par 0 et dans un même plan.

3) Soient u_1, u_2 dans U, $v \in$ V $\cap$ U', $w \in$ V $\cap$ V' tels que $u_1 + v = u_2 + w$; on en tire $w - v \in$ U ; mais $w - v \in$ V, donc $w - v \in$ U $\cap$ V = U' $\cap$ V' ; comme $v \in$ U', on a aussi $w \in$ U', donc $w \in$ U' $\cap$ V' = U $\cap$ V $\subset$ U, et $u_2 + w \in$ U.

4) Si $u \in$ U, on peut écrire $u = v + w$ avec $v \in$ V et $w \in$ W ; mais $w = u - v \in$ U, donc $w \in$ U $\cap$ W.

III, 2

1) Si $p^2 = p$, on a, pour tout $x \in$ E, $p(x - p(x)) = 0$, donc $x - p(x) \in p^{-1}(0)$; d'autre part, si $p(x) = 0$ et $x = p(y)$, on a $p(x) = p^2(y) = p(y) = 0$, donc $x = 0$. Si p_1, p_2 sont des projecteurs et $p_1^{-1}(0) \subset p_2^{-1}(0)$, la relation $p_1(x - p_1(x)) = 0$, valable pour tout $x \in$ E, entraîne $p_2(x - p_1(x)) = 0$. Si $p_1 + p_2$ est un projecteur, on tire de $(p_1 + p_2)^2 = p_1 + p_2$ que $p_1p_2 + p_2p_1 = 0$; on en tire par multiplication à droite ou à gauche par p_1 que $p_1p_2 + p_1p_2p_1 = 0$ et $p_1p_2p_1 + p_2p_1 = 0$, donc $p_1p_2 = p_2p_1$ et finalement $2p_1p_2 = 0$.

2) Si p est la projection sur W parallèlement à V, considérer la restriction de p à W'.

4) On a $(1 + u)(1 - u) = (1 - u)(1 + u) = 1$.

5) De $1 = p + q$ on déduit $p = p^2 + pq$, avec $p^2 \in$ L et $pq \in$ L' ; mais on peut aussi écrire $p = p + 0$ avec $p \in$ L et $0 \in$ L', d'où $p^2 = p$, $pq = 0$; on prouve de même $q^2 = q$, $qp = 0$. Si maintenant $x \in$ L, on a de même $x = xp + xq$ et on en tire $x = xp$, donc L = Ap et de même L' = Aq. Si $u \in$ A est tel que $p^{-1}(0) \subset u^{-1}(0)$, on a $u(x - p(x)) = 0$ pour tout $x \in$ E. Si $w \in$ Hom(V, W), on peut prolonger w en un endomorphisme u de E en posant $u(x) = 0$ dans W ; on a alors $w = qup$.

6) Si $f : \mathbf{R} \times \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bilinéaire, prendre $u(x) = f(1, x)$.

8) Observer que

$$v(x, y, z) = u(x + y + z) - u(x + y) - u(z + x) - u(y + z) + u(x) + u(y) + u(z).$$

Faisant $\lambda = \mu = \nu$, on obtient $\lambda^3 v(x, y, z) = \lambda^2 v(x, y, z)$.

10) Si $u(v(x)) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, on a aussi $v(x) \neq 0$; on a $v(u(v(x))) = \lambda v(x)$.

14) Prendre pour origine un point invariant par u.

III, 3

3) Prendre pour origine un point de V.

4) Composer la translation $t_{-u(0)}$ avec u pour se ramener à une application linéaire. Pour trouver le centre de $u_1 \circ u_2$ lorsque $u_1 \circ u_2$ est une homothétie, considérer la droite joignant les centres de u_1 et u_2.

5) Une variété linéaire non parallèle à un hyperplan contient au moins une droite non parallèle à cet hyperplan. Si D est une droite contenue dans V, passant par 0, et non contenue dans H, H et D sont supplémentaires, et comme $V \supset D$, D et $V \cap H$ sont supplémentaires dans V (section (3.1), exerc. 4).

6) Pour montrer que γ est indépendant du choix de $a \notin H$, noter que tout $a' \notin H$ s'écrit $a' = \lambda a + s$ avec $s \in H$ et $\lambda \neq 0$ et calculer $u(a')$.

Si $\gamma \neq 1$, trouver un vecteur propre de u de la forme $a + x$ avec $x \in H$. Si $S \not\subset V$, $V \not\subset H$ et $D \subset V$ est une droite non contenue dans H, on a $(S + D) \cap V = D$, $u(D) \subset S + D$ et $u(D) \neq D$, donc $u(V) \neq V$.

Si $\gamma = 1$, tout $x \in E$ s'écrit d'une seule manière $x = g(x)a + y$, où g est une forme linéaire sur E et $y \in H$. Si $T \not\subset V$ et $V \not\subset H$, il y a dans V une droite D non contenue dans H, et $(T + D) \cap V = D$; on a $u(D) \subset T + D$ et $u(D) \neq D$, donc $u(V) \neq V$.

Les transvections de droite donnée T sont de la forme $u(x) = x + g(x)c$, où c est fixe et g parcourt l'ensemble des formes linéaires sur X telles que $g(c) = 0$.

Si deux dilatations ou transvections u, u' distinctes de 1_E sont permutables, et $H \neq H'$, on a pour tout $x \in H \cap \complement H'$, $u'(u(x)) = u'(x) = u(u'(x))$, donc $u'(x) \in H$; comme le plan contenant x et $u'(x)$ contient D', on a $D' \subset H$ et on voit de même que $D \subset H'$. Si u et u' sont des dilatations et $H = H'$, on a $u'(u(D)) = u'(D) = u(u'(D))$ et comme $D \not\subset H$, $u'(D) = D$; mais alors $D = D'$.

IV, 1

3) Si u est de rang 1, $u^{-1}(0)$ est une droite ; soit $e_1 \neq 0$ sur D ; prenons une base $\{e_1, e_2\}$ de E et soit $u(e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2 \neq 0$. Si $\beta \neq 0$, on peut écrire $\alpha = \beta\lambda$ et $u(\lambda e_1 + e_2) = \beta(\lambda e_1 + e_2)$. Si $\beta = 0$ on a $u(\alpha^{-1} e_2) = e_1$.

4) Si u n'est pas une homothétie, il existe $e_1 \in E$ tel que $u(e_1)$ ne soit pas sur la droite passant par e_1 (section (3.3), problème 4). Prenant e_1 et $u(e_1)$ comme base, on a la forme voulue pour $M(u)$.

5) B) Si $uv = 0$ avec $v \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $v(x) \neq 0$ et $u(v(x)) = 0$, donc u est de rang 0 ou 1 ; si $vu = 0$ avec $v \neq 0$, on a $u(E) \subset v^{-1}(0)$ et $v^{-1}(0)$ est $\{0\}$ ou une droite, donc u est de rang $\leqslant 1$. Réciproquement, si u est de rang 1, on détermine un endomorphisme v (resp. w) de rang 1 tel que $v^{-1}(0) = u(E)$ (resp. $w(E) = u^{-1}(0)$) et on a $v \circ u = 0$ (resp. $u \circ w = 0$). Pour trouver les exemples d'endomorphismes nilpotents demandés, utiliser l'exerc. 3.

C) Soit $\{a, b\}$ une base de E telle que $a \in u(E) = p(E)$ et $b \in p^{-1}(0)$. Il existe $c \in E$ tel que $u(c) = a$; on détermine v par $v(a) = c$ et $v(b) = 0$. Même méthode pour déterminer w. Utiliser ensuite l'exerc. 5 de la section (3.2).

D) Pour voir que B_0 est maximal, remarquer que si un sous-anneau de A contient B_0 et en est distinct, il contient la matrice

$$\begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour un $\delta \neq 0$. Pour voir que C_0 ou C'_0 est maximal parmi les sous-anneaux commutatifs, déterminer les matrices permutant à toutes les matrices de C_0 ou C'_0. Pour déterminer les idéaux à gauche (par exemple) de B_0, observer que si $\alpha\gamma \neq 0$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

est inversible et ne peut donc appartenir à aucun idéal $\neq B_0$.

6) A) Si $u \in \mathbf{GL}(E)$ n'est pas une homothétie, il existe un vecteur $a \neq 0$ dans E tel que $u(a)$ et a forment une base de E (section (3.3), exerc. 4); il existe une transvection v telle que $v(u(a)) = a$, et par suite a est invariant par vu. On est donc ramené aux transformations de $\mathbf{GL}(E)$ laissant invariant un vecteur $\neq 0$. Si h_λ est une homothétie avec $\lambda \neq 1$, il existe une transvection w transformant $h_\lambda(a) = \lambda a$ en un vecteur b formant avec a une base de E, et on applique ce qui précède à wh_λ.

Pour voir qu'une transvection est produit de deux quasi-symétries, considérer les quasi-symétries laissant globalement invariante la droite de la transvection.

B) Prendre une base de E dont un vecteur est dans D.

C) Observer que si D_1, D_2, D_3 sont distinctes, il y a trois vecteurs non nuls $a_1 \in D_1$, $a_2 \in D_2, a_3 \in D_3$ telles que $a_3 = a_1 + a_2$.

Si x, y ne sont pas sur une même droite passant par 0, il y a une transvection transformant x en y.

Si D, D′ ne passent pas par 0 et ont un point commun c, considérer une transvection dont la droite passe par le point c.

D) Soient D, D′ les droites vectorielles contenant les vecteurs de la base choisie. Si la matrice Y n'appartient pas à B, elle transforme D en une droite $D_1 \neq D$, et il existe une matrice bien déterminée $X_1^{-1} \in U$ (une transvection) qui transforme D_1 en D′, donc $PX_1^{-1}Y$ laisse D invariante et appartient donc à B; par suite elle s'écrit d'une seule manière DX_2 avec $D \in T$ et $X_2 \in U$. Ceci prouve l'existence et l'unicité de la décomposition de Bruhat de Y, et montre en même temps que B est un sous-groupe maximal de $\mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$, et *a fortiori* son propre normalisateur.

7) I) Si $u(a)$, $u(b)$ et $u(c)$ étaient sur une même droite Δ, en considérant, pour un point x quelconque de E, les droites qui le joignent à a, b, c, on verrait que $u(x) \in \Delta$, contrairement à l'hypothèse que $u(E)$ engendre E.

II) Si u est bijective, tout point $y \in D'$ est nécessairement de la forme $u(x)$ et on ne peut avoir $x \notin D$ en vertu de I). Cela prouve que si D_1 et D_2 sont parallèles et distinctes, $u(D_1)$ et $u(D_2)$ ne peuvent avoir de point commun.

III) Pour construire ηa_2, mener par ηa_1 une droite de vecteur directeur $a_2 - a_1$ et prendre son intersection avec D_{0a_2}; pour construire $\xi a_1 + \eta a_2$, mener par ξa_1 une parallèle à D_{0a_2} et par ηa_2 une parallèle à D_{0a_1}; enfin, pour construire $(\xi + \eta)a_1$, mener par $\xi a_1 + \eta a_2$ une droite de vecteur directeur $a_2 - a_1$. Procéder de même pour la construction de $\xi\eta a_1$.

8) La matrice $(\beta_1 \ \beta_2)$ représente une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ et la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ une application linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$; le produit considéré doit donc représenter une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même.

9) Si $x \neq 0$, $u(x) = x$ et si f permute avec u, on doit avoir $u(f(x)) = f(x)$; or si $f(x)$ n'était pas proportionnel à x, il existerait de tels automorphismes u transformant $f(x)$ en n'importe quel vecteur z non proportionnel à x. Si pour un $a \neq 0$ dans E, $f(a) = \gamma a$, remarquer ensuite que pour tout $x \neq 0$ dans E il existe un automorphisme u tel que $u(a) = x$ et en déduire que $f(x) = \gamma x$.

Pour déterminer g, remarquer d'abord que $g(0, 0) = 0$ en notant qu'il y a des automorphismes v de E tels que 0 soit le seul vecteur invariant par v. Considérer ensuite $g_1(x, y) = g(x, y) - g(0, y)$ et observer que l'on a encore $g_1(v(x), v(y)) = v(g_1(x, y))$; puis utiliser le début de l'exercice.

10) Noter que $x_1 \in D_1$, $\rho x_2 \in D_2$, $x_1 + \rho x_2 \in D_4$.

IV, 2

1) Pour la dernière partie, utiliser la section (4.1), exerc. 4.

3) Prendre des endomorphismes de rang 1 tels que $uv = 0$, $vu \neq 0$.

5) Si les deux valeurs propres de u sont distinctes, on peut prendre pour base de E les vecteurs propres correspondants. Dans le cas contraire on peut toujours remplacer un des vecteurs de base par un multiple scalaire de ce vecteur, en laissant l'autre inchangé.

7) A) Utiliser la section (4.1), exerc. 6 A), et noter que le déterminant d'une transvection est égal à 1, et le déterminant d'une quasi-symétrie égal à -1.

B) Le centralisateur de u, déterminé dans l'exerc. 5, contient des automorphismes de déterminant arbitraire.

C) Noter que deux quasi-symétries sont conjuguées dans $\mathbf{GL}(E)$. Pour prouver que $u \in \mathbf{SL}(E)$, de matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

est un commutateur de deux éléments v, w de $\mathbf{SL}(E)$, observer que pour la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

de w, où $xt - yz = 1$, cela entraîne la relation $x\lambda + (t/\lambda) = x + t$, où $t = \lambda x$; inversement, si on a cette relation et si x est pris tel que $(1 + \lambda)^2 x^2 > 4$, puis yz tels que $yz = xt - 1 = \lambda x^2 - 1$, uw et w sont conjugués par B).

D) Pour voir qu'il existe $v \in \mathbf{SL}(E)$ tel que $(vuv^{-1})(D_1) = D_2$, montrer qu'il suffit de prendre v tel que $D_1 = v(D)$ et $D_2 = v(u(D))$. Pour voir que $\mathbf{SL}(E) = L \cdot \Theta(E, D)$, observer que toute transvection peut s'écrire ut, où $u \in L$ et $t \in \Theta(E, D)$, en utilisant le fait que L est distingué. Pour voir que tout commutateur de $\mathbf{SL}(E)$ appartient à L, utiliser le fait que $\Theta(E, D)$ est commutatif.

8) Si $\mathrm{Tr}(u) = 0$ et $u \neq 0$, u n'est pas une homothétie et on peut prendre une base de E pour laquelle la matrice de u ait la forme de l'exerc. 4 de la section (4.1) ; prendre alors pour v la quasi-symétrie ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9) Si $u = t_b \circ v$ est une application linéaire affine de E dans lui-même, les points invariants par u vérifient la relation $x - v(x) = b$; pour que u ne laisse invariant aucun point, il faut et il suffit donc que $u(x) = x - w(x) + b$, où w est de rang $\leqslant 1$ et $b \notin w(E)$.

10) Si Φ n'est pas identiquement nulle mais est dégénérée, N est de dimension 1, et on prend un des vecteurs de base dans N. Si Φ n'est pas dégénérée, il y a un vecteur $a \neq 0$ tel que $\Phi(a, a) \neq 0$; prendre une base formée de vecteurs αa et βb, où $\Phi(a, b) = 0$, et α et β sont deux scalaires convenables.

IV, 3

1) Montrer que les triplets $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ dont deux quelconques des demi-droites ne sont pas opposées forment 4 classes d'intransitivité pour $\mathbf{GL}(E)$ en prenant les

vecteurs d'une base dans Δ_1 et Δ_2 et considérant le sous-groupe laissant invariantes Δ_1 et Δ_2. Procéder de même pour $\mathbf{GL}^+(E)$.

2) Par définition, $\Psi(x, u(x))$ est équivalente à $\Psi(v^{-1}(x), u(v^{-1}(x)))$ et cette dernière égale à $\Psi(x, v(u(v^{-1}(x))))$ en vertu de (4.2.6.1) et de ce que $v = \lambda w$, où $\lambda > 0$, $w \in \mathbf{SL}(E)$. Pour une transvection t, calculer $\Psi(x, t(x))$ en prenant un des vecteurs de base sur la droite de la transvection.

4) Utiliser l'exerc. 1.

V, 1

1) Tout $x \in E$ s'écrit d'une seule manière $x = y + z$ où $y \in D$ et $z \in H$; si l'on écrit que x est orthogonal à toutes les droites de H, on a en particulier $(x|z) = 0$, et comme $(y|z) = 0$, cela donne $(z|z) = 0$, donc $z = 0$, $x \in \mathbf{D}$.

2) On peut supposer la sphère de centre 0, donc $a' = -a$; la relation $(x - a|x - a') = 0$ s'écrit alors $\|x\|^2 - \|a\|^2 = 0$.

4) On peut supposer la sphère de centre 0. Alors on a $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)|\frac{1}{2}(x_1 - x_2)) = \frac{1}{4}(\|x_1\|^2 - \|x_2\|^2) = 0$; si on pose $b = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, on peut écrire $x_1 - a = (b - a) + y$, $x_2 - a = (b - a) - y$ et comme y et $b - a$ sont proportionnels, $(b|b - a) = 0$, donc $\|b - a\|^2 = -(a|b) + \|a\|^2 = \|a\|^2 - \|b\|^2$. Finalement $(x_1 - a|x_2 - a) = \|b - a\|^2 - \|y\|^2 = \|a\|^2 - \rho^2$.

5) Un élément h du centralisateur de $\mathbf{O}(E)$ doit transformer en lui-même tout hyperplan vectoriel de E et la droite orthogonale à cet hyperplan, qui sont les sous-espaces propres de la symétrie par rapport à l'hyperplan ; il suffit d'appliquer l'exerc. 4 de (3.3).

6) A) On a, pour des vecteurs x, y quelconques et des scalaires λ, μ quelconques,

$$(u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y)|u(z)) = 0$$

pour tout $z \in E$, et comme $u(z)$ parcourt tout E, cela entraîne la linéarité de u.

B) Si $u(0) \neq 0$, il y a une homothétie v de rapport $\alpha^{\frac{1}{2}}$ transformant $u(0)$ en 0, et $w = vu$ est telle que $w(0) = 0$ et $d(w(x), w(y)) = \alpha d(x, y)$. En vertu de (5.1.1.5), on a aussi $(w(x)|w(y)) = \alpha(x|y)$ et on est ramené à A).

C) Des relations $(u(x)|u(y + y')) = (u(x)|u(y)) + (u(x)|u(y'))$ on tire que x est orthogonal à $\mu(y + y')(y + y') - \mu(y)y - \mu(y')y'$; comme x est arbitraire on a

$$(\mu(y + y') - \mu(y))y + (\mu(y + y') - \mu(y'))y' = 0;$$

prenant y et y' linéairement indépendants on en déduit $\mu(y + y') = \mu(y) = \mu(y')$. Comme tout vecteur $z \neq 0$ est alors linéairement indépendant de y ou de y', on a aussi $\mu(z) = \mu(y) = \mu(y')$. Il n'est pas possible d'omettre l'hypothèse que u est linéaire, car si $x \to \varphi(x)$ est une application de E dans $\mathbf{R}$ telle que $\varphi(x)$ est constante et $\neq 0$ dans toute droite vectorielle (la constante dépendant de cette droite), alors $u\colon x \to \varphi(x)x$ est une application bijective de E sur lui-même conservant l'orthogonalité.

7) Si u est une symétrie par rapport à un hyperplan H, $w = vuv^{-1}$ laisse invariants les points de l'hyperplan $v(\mathrm{H})$ et n'est pas l'application identique ; si $w \in \mathbf{O}(E)$, cela entraîne que w est une symétrie par rapport à $v(\mathrm{H})$. Si D est la droite orthogonale à H, on a $w(x) = -x$ pour tout vecteur $x \in v(\mathrm{D})$, ce qui implique que $v(\mathrm{D})$ est la droite orthogonale à H ; donc v conserve l'orthogonalité.

8) Remarquer que

$$2\,d(x, t) \leqslant d(x, y) + d(y, t) + d(x, z) + d(z, t)$$

et majorer de même $2\,d(y, z)$.

V, 2

1) Comme $u^*u = 1_E = u^2$, on a $u^* = u$ et réciproquement. La propriété relative aux projecteurs s'en déduit en notant qu'un projecteur p est orthogonal si et seulement

si $p(\mathrm{E})$ et $p^{-1}(0)$ sont des sous-espaces orthogonaux, et que ces sous-espaces sont les espaces propres de l'involution $u = 2p - 1_{\mathrm{E}}$ (section (3.2), problème 1).

2) On déduit (3) de (1) en considérant la forme $\Phi(x, y) = (h(x)|y)$ et en prenant $y = h(x)$.

Pour obtenir un endomorphisme hermitien positif g tel que $g^m = h$, on suppose h rapportée à une base orthonormale formée de vecteurs propres, donc ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$; on prend alors g ayant pour matrice par rapport à cette base

$$\begin{pmatrix} \lambda^{1/m} & 0 \\ 0 & \mu^{1/m} \end{pmatrix}$$

3) Il est immédiat que pour un endomorphisme hermitien h, les relations $h(x) = 0$, $h^2(x) = 0$ sont équivalentes, en réduisant h à la forme diagonale. Notons que l'on a $\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (u^*u(x)|x) = (h_1^2(x)|x) = \|h_1(x)\|^2$ puisque h_1 est hermitien, donc $\|u(x)\| = \|h_1(x)\|$. Si V est orthogonal à $u^{-1}(0) = h_1^{-1}(0)$, on a $h_1(\mathrm{V}) = \mathrm{V}$ puisque h_1 est hermitien, et u est une bijection de V sur $u(\mathrm{V})$. Il y a donc une application linéaire et une seule v_0 de V sur $u(\mathrm{V})$ telle que $u(x) = v_0(h_1(x))$ pour tout $x \in \mathrm{V}$. On prolonge v_0 en une transformation orthogonale v en prenant pour restriction de v à $u^{-1}(0)$ une transformation isométrique de $u^{-1}(0)$ sur le sous-espace orthogonal à $u(\mathrm{V})$; v n'est donc entièrement déterminée par v_0 que si $u^{-1}(0) = \{0\}$. La construction de v donne aussitôt $u = vh_1$, d'où $u^*u = vh_1^2v^* = vh_1^2v^{-1}$; comme $vh_1^2v^{-1}$ est le carré de l'endomorphisme hermitien positif vh_1v^{-1}, l'unicité de la racine carrée hermitienne d'un tel endomorphisme donne $h_2 = vh_1v^{-1}$.

Une matrice carrée X d'ordre 2 peut être considérée comme matrice d'un endomorphisme u de E par rapport à une base orthonormale ; introduisant pour cet endomorphisme les endomorphismes v et h_1 comme ci-dessus, il résulte de (5.2.7) qu'il y a une matrice orthogonale U telle que la matrice de h_1 par rapport à la base donnée soit $U^{-1}DU$, où D est une matrice diagonale. Il suffit alors de prendre $W = VU^{-1}$, où V est la matrice de v.

Si Φ est une forme bilinéaire symétrique positive, on peut l'écrire $\Phi(x, y) = (g(x)|y)$, où g est un opérateur hermitien positif (exerc. 2) ; comme $g = h^2$, où h est hermitien positif, on a $\Phi(x, y) = (h(x)|h(y))$. Dire que Φ est non dégénérée revient à dire que g est bijective ; mais il en alors de même de h (exerc. 2).

4) Il y a deux vecteurs unitaires opposés sur D_{0a_1} ; la condition $(a_1|e_1) > 0$ détermine entièrement l'un d'eux. Il y a alors deux vecteurs unitaires opposés orthogonaux à e_1 ; la condition $(a_2|e_2) > 0$ détermine entièrement l'un d'eux.

On interprète X comme matrice d'un endomorphisme v rapporté à une base orthonormale $\{c_1, c_2\}$; soient $a_1 = v(c_1)$, $a_2 = v(c_2)$ ses colonnes, et soit $\{e_1, e_2\}$ la base orthonormale déduite de $\{a_1, a_2\}$ par le procédé d'orthonormalisation. On peut écrire $v = wu$, où $u(c_1) = e_1$, $u(c_2) = e_2$ et $w(e_1) = a_1$, $w(e_2) = a_2$, de sorte que u est une transformation orthogonale ; il suffit de prendre pour L la matrice de w par rapport à $\{e_1, e_2\}$ et pour U la matrice de u par rapport à $\{c_1, c_2\}$. Pour passer à la décomposition d'Iwasawa droite, il suffit de considérer la décomposition d'Iwasawa gauche de X^{-1}.

Si $\det(X) = 1$, comme $\det(L) > 0$ et $\det(U) = \pm 1$, on a nécessairement $\det(U) = 1$, donc $\det(L) = 1$.

Si H est une matrice symétrique *positive* inversible, on peut écrire $H = X^2$, où X est une matrice hermitienne positive inversible. Comme $X = {}^tX$ on a $H = LU\,.\,{}^tU\,.\,{}^tL = L\,.\,{}^tL$. Comme la relation $X^2 = L\,.\,{}^tL$ s'écrit aussi $L^{-1}X = {}^t(X^{-1}L)$, $L^{-1}X$ doit être orthogonale, d'où l'assertion d'unicité d'après ce qui précède.

5) Si a_1, a_2 sont les éléments de la diagonale de D, les éléments de ${}^tXDY$ sont de la forme $a_1\xi_{1i}\eta_{1j} + a_2\xi_{2i}\eta_{2j}$, donc on a

$$|a_1\xi_{1i}\eta_{1j} + a_2\xi_{2i}\eta_{2j}|^2 \leqslant f^2(D)||\xi_{1i}\eta_{1j}| + |\xi_{2i}\eta_{2j}||^2$$

et on applique (1) à la forme positive $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$.

Dans la preuve de (5) à partir de (4), on notera que ${}^t(UX)(UX) = {}^tX\,.\,X$.

Pour prouver (6), on note que

$$g^2(X_1X_2X_3) = g^2({}^t({}^tX_2{}^tX_1)X_3) \leqslant f(X_1X_2{}^tX_2{}^tX_1)f({}^tX_3X_3)$$
$$\leqslant f(X_1{}^tX_1)\varphi(X_2{}^tX_2)f({}^tX_3X_3)$$

en appliquant (4) (avec $D = I$) puis (5). On observe ensuite que (5) avec $X = I$ donne $g({}^tYY) \leqslant \varphi({}^tYY) = \varphi(Y.{}^tY)$ compte tenu de l'exerc. 3 ; a fortiori $f({}^tYY) \leqslant \varphi({}^tYY) = \varphi(Y{}^tY)$, et on obtient ainsi (7) à partir de (6). En faisant $X_1 = {}^tX$, $X_2 = I$, $X_3 = X$ dans (6), on obtient $g({}^tX\,.\,X) = f({}^tX\,.\,X)$ donc $g(H) = f(H)$ pour H hermitienne positive ; par contre on n'a pas $g^2({}^tX\,.\,X) \leqslant f({}^tX\,.\,X)f(X\,.\,{}^tX)$, c'est-à-dire $f({}^tX\,.\,X) \leqslant f(X\,.\,{}^tX)$ en général ; il suffit pour le voir de prendre une matrice dont la seconde colonne est formée de zéros. Pour un exemple où dans (6) on ne peut remplacer $\varphi({}^tX_2X_2)$ par $f({}^tX_2X_2)$, il suffit de prendre tous les X_i égaux à la matrice dont tous les éléments sont 1.

6) L'endomorphisme $(u^* + \lambda v^*)(u + \lambda v)$ étant hermitien positif, on écrit que sa trace est $\geqslant 0$ quel que soit λ. Pour prouver $\mathrm{Tr}(H_1H_2) \geqslant 0$ lorsque H_2 est diagonale, on observe que les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne positive sont tous $\geqslant 0$. Pour prouver la première inégalité de (10), noter que $\varphi(H_1)I - H_1$ est hermitienne positive. Pour obtenir (11), remarquer que $\mathrm{Tr}(v^*u^*uv) = \mathrm{Tr}(vv^*u^*u)$.

7) La caractérisation de ρ_1 et ρ_2 par les valeurs de $\|u(x)\|$ résulte de la relation $\|u(x)\| = \|h_1(x)\|$ (exerc. 3). Pour obtenir la base orthonormale par rapport à laquelle la matrice de u est triangulaire, prendre un vecteur de cette base proportionnel à un vecteur propre de u correspondant à la valeur propre λ_1. En calculant u^*u pour cette base orthonormale, on trouve $(s(u))^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_{12}^2$.

Pour montrer que $X = LU$ et L ont mêmes valeurs stationnaires, noter que ${}^tU = U^{-1}$.

8) Montrer que $u^*(b_1) - \lambda_2 b_1$ est orthogonal à a_1 et a_2.

9) Si $\{c_1, c_2\}$ est une base formée de vecteurs propres de H_1, et si l'on pose $b_i = \sum_j \zeta_{ij}c_j$, noter que si λ_i est la valeur propre de H_1 correspondant à c_i, on a $\Phi(x,x) = \sum_h \lambda_h\Phi_2(y_h, y_h)$, où $y_h = (\zeta_{hi}\xi_i)_{i=1,2}$.

V, 3

1) Pour prouver que h permute avec u, noter que $v^* = (w^*)^{-1}u^*w^*$ et que u^* (resp. v^*) est proportionnel à u^{-1} (resp. v^{-1}), et $v^{-1} = wu^{-1}w^{-1}$. Si w est dans $\mathbf{GO}^+(\mathrm{E})$, on a $v = u$ puisque $\mathbf{GO}^+(\mathrm{E})$ est commutatif. Sinon, w est produit d'une symétrie s par rapport à une droite et d'une similitude directe ; on a $v = sus^{-1} = h_\lambda srs$. Or rs est une symétrie s' par rapport à une droite, donc $srs = ss' = r^{-1}$.

2) On a $(vuv^{-1})^* = (v^*)^{-1}u^*v^*$ et comme $v^*v = \alpha\,.\,1_{\mathrm{E}}$, $(vuv^{-1})^* = vu^*v^{-1}$; on en conclut aussitôt que si u est normal il en est de même de vuv^{-1}. Pour trouver les endomorphismes normaux, prendre leur matrice par rapport à une base orthonormale.

3) Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme sans valeur propre u est de la forme $\mathrm{X}^2 - 2\alpha\mathrm{X} + (\alpha^2 + \beta^2)$, donc égal à celui d'une similitude directe. Il résulte de l'exerc. 1 que si v est une solution de $u = wvw^{-1}$, la seule autre solution est v^*, et si $u = w'v^*w'^{-1}$, on a nécessairement alors $\det(w'w^{-1}) > 0$. Ceci donne les deux classes

d'intransitivité de $\mathbf{GL}^+(\mathrm{E})$ (ou de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$) dans l'ensemble des endomorphismes ayant même polynôme caractéristique que u.

5) Si u est une isométrie affine, et $u(0) = a$, il y a une symétrie s_1 par rapport à une droite telle que $s_1(a) = 0$, et alors $s_1 u$ appartient au groupe $\mathbf{O}(\mathrm{E})$, donc est une symétrie par rapport à une droite ou un produit de deux telles symétries. Si u_1, u_2 sont deux rotations affines de centres a_1, a_2, on peut se borner au cas où $a_1 = 0$, et si t est la translation de vecteur a_2, on a $u_2 = tv_2t^{-1}$, où v_2 est une rotation de centre 0 ; comme $tv_2 = v_2t'$, où t' est une translation, on a $u_1u_2 = u_1v_2t't^{-1}$, donc u_1u_2 est une translation si et seulement si $u_1v_2 = 1_\mathrm{E}$, autrement dit les rotations (linéaires) associées à u_1 et u_2 doivent être inverses l'une de l'autre.

6) Bornons-nous au cas où $\mathbf{M}$ contient trois points non en ligne droite; on peut supposer, par des translations, que 0 appartient à $\mathbf{M}$ et à N et que $f(0) = 0$. Quels que soient les points a, b de $\mathbf{M}$, on a alors $(f(a)|f(b)) = (a|b)$ par (5.1.1.5) ; si $\{a, b\}$ forme une base de E, on a $(a|b) \neq \|a\| . \|b\|$, donc $(f(a)|f(b)) \neq \|f(a)\| . \|f(b)\|$, et $\{f(a), f(b)\}$ est une base de E. Il y a alors une transformation orthogonale u telle que $u(a) = f(a)$ et $u(b) = f(b)$; montrons que pour tout $x \in \mathbf{M}$, on a $u(x) = f(x)$. En effet, cela résulte des relations

$$(x|a) = (f(x)|f(a)) = (u(x)|f(a)) \quad \text{et} \quad (x|b) = (f(x)|f(b)) = (u(x)|f(b)).$$

V, 4

1) Une rotation s'écrit ss', où s et s' sont des symétries par rapport à deux droites D, D' ; si t est une rotation telle que $t(\mathrm{D}) = \mathrm{D}'$, on a $s' = tst^{-1} = ts^{-1}t^{-1}$, donc $ss' = sts^{-1}t^{-1}$. Comme $\mathbf{O}(\mathrm{E})/\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$ est commutatif, le groupe des commutateurs de $\mathbf{O}(\mathrm{E})$ est contenu dans $\mathbf{O}^+(\mathrm{E})$, et ce qui précède prouve qu'il lui est égal.

2) La proposition relative aux endomorphismes sans valeurs propres résulte de ce qu'un tel endomorphisme est de la forme wvw^{-1} où v est une similitude directe, et réciproquement ; or une similitude v s'écrit $h_\lambda r$, avec $\lambda > 0$ et r une rotation ; comme une rotation est toujours un carré, et que $h_\lambda = (h_{\lambda^{1/2}})^2$, v est aussi un carré. Une homothétie h_λ est toujours un carré, car on vient de le voir lorsque $\lambda \geqslant 0$, et si $\lambda < 0$, on peut écrire $h_\lambda = h_{-1}h_{|\lambda|}$, et h_{-1} est une rotation. Enfin, il résulte de l'exerc. 5 de la section (4.2) que le carré d'un endomorphisme ayant des valeurs propres est un endomorphisme ayant des valeurs propres $\geqslant 0$. Il résulte de l'exerc. 1 de la section (5.3) que si $v^2 = r$, où r est une rotation, v commute avec r, donc est nécessairement une rotation, et dans le cas où u n'a pas de valeur propre, l'équation $v^2 = u$ a donc deux solutions opposées (cf. (5.5.8)). Le même raisonnement montre que si u a deux valeurs propres distinctes $\geqslant 0$, l'équation $v^2 = u$ a 4 solutions si aucune des valeurs propres n'est 0, 2 solutions dans le cas contraire. Si u a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

par rapport à une base convenable, avec $\lambda > 0$, on vérifie directement que $v^2 = u$ a 2 solutions opposées. Enfin, si $\lambda > 0$, l'équation $v^2 = h_\lambda$ a une infinité de solutions égales à $h_{\lambda^{1/2}} . s$, où s est une involution dans $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$; si $\lambda < 0$, $v^2 = h_\lambda$ a une infinité de solutions égales à $h_{|\lambda|^{1/2}} . w$, où w parcourt l'ensemble des conjugués de r_0, rotation de l'angle droit δ, ou de $-r_0$; si $\lambda = 0$, l'équation $v^2 = 0$ a une infinité de solutions toutes conjuguées (section (4.1), exerc. 3).

4) On prend une base orthonormale dont les vecteurs sont vecteurs propres de v. Le fait que u_1 et u_2 soient conjugués lorsqu'ils ont même trace résulte de la section (4.2), exerc. 7 B). Pour voir s'ils peuvent être conjugués dans $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$, il faut examiner si le

centralisateur de u_1 dans $\mathbf{GL}(E)$ peut contenir des endomorphismes de déterminant arbitraire ; c'est certainment le cas si u_1 a des valeurs propres distinctes, et cela donne la condition $(\lambda + (1/\lambda))^2 \cos^2\alpha \geqslant 4$, où α est l'angle de la rotation r_1.

Pour mettre r sous forme $vuv^{-1}u^{-1}$ où u, v sont dans $\mathbf{SL}(E)$, on cherche à obtenir $u = r_1 w$, $vuv^{-1} = r_2 w$, avec $r_2 = rr_1$; il faut que l'on ait $r_2 = r_1^{-1}$, ou encore $r_2^2 = r$, et si $r \neq -1_E$, cela donne pour r_1 une rotation d'angle distinct d'un angle droit, donc en prenant pour w un endomorphisme hermitien ayant une valeur propre assez grande, on peut prendre $v \in \mathbf{SL}(E)$.

5) Si u n'a pas de valeur propre, on peut, en utilisant l'exerc. 3 de la section (5.3), supposer que u est une rotation ; comme $-u$ doit être conjuguée de u, on doit nécessairement avoir $-u = u^* = u^{-1}$ d'après la section (5.3), exerc. 1, donc $u^2 = -1_E$, u doit être une rotation d'un angle droit ; en outre (section (5.3), exerc. 1), on peut alors se ramener au cas où v est une symétrie par rapport à une droite. Si u admet des valeurs propres, elles sont nécessairement opposées puisque $-u$ est conjugué de u ; on peut donc se borner au cas où u est une symétrie par rapport à une droite ; si alors v a des valeurs propres, on voit que ses sous-espaces propres sont deux droites transformées l'une dans l'autre par la symétrie u ; par un automorphisme intérieur, on peut donc supposer que v est aussi une symétrie par rapport à une droite, et alors uv est une rotation d'un angle droit ; il est impossible dans ce cas que w ait des valeurs propres, car ses sous-espaces propres devraient se transformer l'un dans l'autre à la fois par u et par v.

6) L'expression $\sin(\theta + \theta') = \alpha \cos\theta' - \beta \sin\theta'$, où $\alpha = \sin\theta > 0$ et $-\beta = \cos\theta < 0$ peut être rendue négative en prenant $\cos\theta'$ assez petit.

7) La première assertion n'est autre que (5.4.7). Les classes d'intransitivité de $\mathbf{O}(E)$ sont les couples de demi-droites (resp. de droites) de même angle ou d'angle opposé.

V, 5

1) Il faut résoudre $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$ pour $n = 3, 4, 5$ (les solutions de $z^{2n} = 1$ se déduisent de celles de $z^n = 1$ par extraction de racines carrées). Pour $n = 3$, il vient $z^2 + z + 1 = 0$, donc $z = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$; pour $n = 4$, $(z+1)(z^2+1) = 0$ donc $z = -1$ et $z = \pm i$. Enfin, pour $n = 5$, on pose $u = z + (1/z)$; comme $u^2 = z^2 + (1/z^2) + 2$ et que l'équation s'écrit

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$$

il vient $u^2 + u - 1 = 0$, donc $u = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

2) Si S est un sous-anneau contenant un endomorphisme sans valeur propre, on peut supposer, grâce à la section (5.3), exerc. 3, que S contient $\mathbf{C}(E)$. Montrons que si S contient un endomorphisme n'appartenant pas à $\mathbf{C}(E)$, il est égal à End (E) tout entier. En effet, compte tenu de (5.3.3.1), on voit alors que par rapport à une base orthonormale de E, S contient une matrice dont une ligne ou une colonne arbitraire est nulle. Si S contient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il contient aussi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

quels que soient α et β, donc aussi

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

et finalement

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

puisque S contient

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Raisonner de même lorsque S contient une matrice dont trois termes sont nuls. Finalement, si S contient la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 0\end{pmatrix}$$

avec $\neq 0$, il contient aussi

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + \beta\lambda & 0\\ -\beta + \alpha\lambda & 0\end{pmatrix}$$

quels que soient α, β et par combinaison linéaire on voit qu'il contient aussi

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Il reste à examiner le cas où S ne contient que des endomorphismes ayant des valeurs propres. Si S contient un endomorphisme ayant deux valeurs propres distinctes, on peut supposer qu'il contient les matrices

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

L'anneau engendré par ces matrices et le centre est l'anneau des matrices diagonales, donc n'est pas maximal. Il contient donc une matrice non diagonale, donc par différence une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}0 & \beta\\ \alpha & 0\end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ et le produit de cette matrice à gauche ou à droite par

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

donne

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha & 0\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix}0 & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

S ne peut contenir à la fois les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puisqu'il n'est pas égal à End(E), donc il contient une seule de ces matrices, et est par suite conjugué de B_0.

Pour terminer, il faut prouver que S ne peut se composer uniquement d'endomorphismes ayant deux valeurs propres égales. Comme S n'est pas réduit au centre, on peut supposer qu'il contient une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0$, donc il contient l'anneau commutatif des matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix};$$

comme ce dernier n'est pas maximal, S contient nécessairement, par différence, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha \neq 0$, cette matrice a deux valeurs propres distinctes. Si $\alpha = 0$, S contient aussi le produit

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui a encore deux valeurs propres distinctes, ce qui achève la démonstration.

VI, 1

1) Pour ramener la matrice de t à la forme $M(t)$, prendre le plan de la transvection engendré par e_1 et e_3, la droite de la transvection engendrée par e_1, et choisir convenablement e_2.

Les produits par les $B_{ij}(\lambda)$ revienent à ajouter à une ligne (resp. colonne) une autre ligne (resp. colonne) multipliée par λ, les produits par les matrices de permutation à permuter les lignes ou les colonnes. Les formes possibles de RUS en prenant pour R et S des produits de matrices $B_{ij}(\lambda)$ ou de matrices de permutation sont les matrices diagonales ayant l'une des diagonales $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, \delta)$ avec $\delta \neq 0$.

2) Supposons d'abord u de rang 1. Si P est le noyau de u, qui est un plan, et $D = u(E)$, qui est une droite, considérer deux cas suivant que $D \not\subset P$ ou $D \subset P$.

Si u est de rang 2, son noyau N est une droite et $u(E) = F$ est un plan. Si $N \not\subset F$, on prend une base de E dont un vecteur est dans N et les deux autres dans F, de sorte que $u|F$ est un automorphisme de F, auquel on applique l'exerc. 4 de la section (4.1). Si $N \subset F$, $u(F) \subset F$ est de dimension 1. On peut avoir $u(F) = N$; il y a alors une droite $D \subset F$ telle que F soit somme directe des droites D et N, et $u(D) = N$, puis une droite D' telle que $D' \cap F = \{0\}$ et que $u(D') = D$; on prend pour vecteurs de base $e_1 \in D'$, $e_2 = u(e_1) \in D$ et $e_3 = u(e_2) \in N$. On peut aussi avoir pour $u(F)$ une droite D supplémentaire de N dans F; comme $u(D) \neq \{0\}$ et $u(D) \subset u(F) = D$, D contient un vecteur propre de u correspondant à une valeur propre $\gamma \neq 0$; d'autre part $u^{-1}(N)$ est un plan contenant N ; si D′ est une droite supplémentaire de N dans $u^{-1}(N)$, on prend $e_1 \in D'$, $e_2 = u(e_1) \in N$ et $e_3 \in D$.

3) B) Si u est diviseur de 0 et est $\neq 0$, il ne peut être inversible, donc est de rang $\leqslant 2$. Si u est de rang $\leqslant 2$, on détermine un endomorphisme v (resp. w) tel que $v^{-1}(0) = u(E)$ (resp. $w(E) = u^{-1}(0)$), et puisque $u(E) \neq E$ et $u^{-1}(0) \neq 0$, cela est toujours possible avec $v \neq 0$ et $w \neq 0$.

C) Supposons par exemple que le rang maximum des éléments de l'idéal à droite R considéré soit 2, et soit $u \in R$ un endomorphisme de rang 2. Soit $F = u(E)$, et soit F′ un sous-espace de dimension 2 supplémentaire de $u^{-1}(0)$ et tel que $u(F') = F$; si $\{a, b\}$ est une base de F et c un troisième vecteur formant une base de E avec a et b, considérons l'endomorphisme w tel que $w(c) = 0$, et que $w(a)$ et $w(b)$ forment la base $\{a', b'\}$ de F′ telle que $u(a') = a, u(b') = b$; alors on a $p = uw \in R$, et p est un projecteur de rang 2 tel que $p(E) = F$. On a alors pour tout $v \in R$, $v = pv + (1 - p)v$, et comme $p \in R$, $(1 - p)v \in R$; montrons que $(1 - p)v = 0$; dans le cas contraire, $v' = (1 - p)v$ serait un endomorphisme de rang 1 tel que $v'(E) = \mathbf{R}c$; on forme comme ci-dessus un projecteur $p' \in R$ tel que $p'(a) = p'(b) = 0$, $p'(c) = c$; mais alors $p + p'$ serait l'identité, ce qui est absurde. On a donc $v = pv$ pour tout $v \in R$, donc $R = pA$. On raisonne de même dans les autres cas. Il y a donc une correspondance biunivoque $V \to R(V)$ (resp. $V \to L(V)$) entre sous-espaces vectoriels V de E et idéaux à droite (resp. à gauche) de A, R(V) étant l'ensemble des endomorphismes $u \in A$ tels que $u(E) \subset V$ et L(V) l'ensemble des endomorphismes $u \in A$ tels que $V \subset u^{-1}(0)$. D'où la détermination des idéaux bilatères de A.

D) Si un sous-anneau R de A contient B_0 et une matrice n'appartenant pas à B_0, il contient aussi, par différence, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec λ, μ non tous deux nuls. Si pour abréger on désigne par E_{ij} la matrice n'ayant qu'un seul terme $\neq 0$, le terme figurant dans la ligne d'indice i et la colonne d'indice j, qui est égal à 1 (de sorte que les E_{ij} forment une base de l'espace vectoriel $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$), la matrice précédente est $\lambda E_{13} + \mu E_{23}$; on en déduit que R contient aussi la matrice $E_{11}(\lambda E_{13} + \mu E_{23}) = \lambda E_{13}$ et $E_{22}(\lambda E_{13} + \mu E_{23}) = \mu E_{23}$. Si par exemple $\mu \neq 0$, R contient aussi $E_{12}(\mu E_{23}) = \mu E_{13}$; donc, puisque R contient le centre de A, R contient E_{13}, et on voit de même qu'il contient E_{23}, donc est identique à A.

Pour prouver que les anneaux commutatifs considérés sont maximaux dans A, il suffit de chercher leurs centralisateurs.

4) A) Supposons $1_E - u$ de rang 2, et soit P un plan supplémentaire de D. Définissons l'automorphisme v de P de la façon suivante : pour tout $y \in P$, $v(y)$ est la composante de $u(y)$ dans P, pour la décomposition en somme directe de E en P et D, autrement dit on a $u(y) - v(y) \in D$. Comme $u(P)$ est supplémentaire de $u(D) = D$, v est bien un automorphisme de P (section (3.2), exerc. 2). Supposons d'abord que $v = 1_P$; pour tout $y \neq 0$ dans P, on a $u(y) \neq y$, sans quoi $1_E - u$ ne serait pas de rang 2 ; si H est le plan contenant D et ne contenant pas un vecteur $a \neq 0$ de P, il existe une transvection t de plan H et de droite D telle que $t(a) = u(a)$, donc, puisque t laisse invariants les points de D, $1_E - t^{-1}u$ est de rang 1, et par suite $t^{-1}u$ est une transvection ou une dilatation. Supposons en second lieu que v ne soit pas une homothétie. Il existe alors $a \neq 0$ dans P tel que a et $v(a)$ forment une base de P, donc a n'appartient pas au plan H contenant D et le vecteur $c = u(a) - a$; on prend alors une transvection t de plan H et de droite contenant c et on voit comme ci-dessus que $t^{-1}u$ est une transvection

ou une dilatation. Si enfin v est une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$, on voit aisément qu'on peut trouver un plan P supplémentaire de D et tel que $u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$, la restriction de u à P étant l'homothétie de rapport λ (prendre une base de E dont un vecteur est dans D). Considérons un plan H contenant D; alors, si t est une transvection de plan H et de droite distincte de D, il est facile de voir que pour $u_1 = tu$, $\mathrm{E}(1\,; u_1) = \mathrm{D}$, et que si l'on forme l'endomorphisme v_1 de P à partir de u_1 comme v à partir de u, v_1 ne peut être une homothétie, donc u_1 est produit de deux transvections ou d'une transvection et d'une dilatation.

Si $1_{\mathrm{E}} - u$ est de rang 3 et si u n'est pas une homothétie de rapport $\neq 1$, il existe un vecteur $a \neq 0$ tel que $u(a)$ et a ne soient pas proportionnels, donc une transvection t telle que $t(a) = u(a)$; alors $t^{-1}u$ laisse invariants les points d'une droite et on est ramené au cas précédent. Lorsque u est une homothétie de rapport $\neq 1$, considérer le produit tu de u et d'une transvection t, et remarquer que tu ne peut être une homothétie.

B) Si $utu^{-1} = t$ pour toute transvection $t \in \Theta(\mathrm{E}, \mathrm{P})$, u doit laisser invariante la droite de t, c'est-à-dire toutes les droites du plan P, et on applique la section (3.3), exerc. 4. Si u centralise $\Gamma(\mathrm{E}, \mathrm{P})$, il doit aussi laisser invariante les droites des dilatations appartenant à $\Gamma(\mathrm{E}, \mathrm{P})$, donc toutes les droites de E. L'homomorphisme de $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ sur $\mathbf{GL}(\mathrm{P})$ consiste à associer à tout $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ sa restriction $u|\mathrm{P}$. Si $u \in \mathbf{GL}(\mathrm{E})$ est tel que $uvu^{-1} \in \Gamma(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ pour toute transvection $v \in \Theta(\mathrm{E}, \mathrm{P})$, il doit transformer P en lui-même, donc appartient à $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$.

C) Il résulte de (6.1.8) qu'il y a un automorphisme tel que $u(\mathrm{D}_i) = \mathrm{D}'_i$ pour $i = 1, 2, 3$; on peut donc déjà se borner au cas où $\mathrm{D}'_i = \mathrm{D}_i$ pour $i = 1, 2, 3$, et on peut prendre une base $\{a_1, a_2, a_3\}$ de E telle que $a_i \in \mathrm{D}_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Alors D_4 (resp. D'_4) est définie par un vecteur (ξ_1, ξ_2, ξ_3) (resp. (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3)) dont les trois coordonnées sont $\neq 0$; il suffit de prendre u tel que $u(a_i) = \alpha_i a_i$ avec $\alpha_i \xi_i = \xi'_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

D) Pour obtenir la forme voulue pour B, prendre une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ telle que $e_3 \in \mathrm{D}$ et $e_2 \in \mathrm{P}$. Montrer que le groupe des commutateurs de U est le sous-groupe de U formé des matrices pour lesquelles $\alpha_{21} = \alpha_{32} = 0$, en calculant le produit de deux matrices de U et l'inverse d'une matrice de U. Montrer ensuite que, en prenant $v \in \mathrm{T}$, on peut faire en sorte que dans $uvu^{-1}v^{-1}$, où $u \in \mathrm{U}$, les éléments α_{21} et α_{32} soient arbitraires, et conclure que le groupe engendré par les commutateurs $uvu^{-1}v^{-1}$, où $u \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{B}$, est U tout entier, et que U est aussi le groupe des commutateurs de B. Pour trouver le normalisateur de U (ou de B), noter que si $vuv^{-1} \in \mathrm{B}$ pour $u \in \mathrm{U}$, vuv^{-1} laisse globalement invariants $v(\mathbf{D})$ et $v(\mathrm{P})$.

Pour voir que $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{D})$ est maximal, considérer un élément $u \notin \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{D})$, de sorte que $u(\mathrm{D}) = \mathrm{D}' \neq \mathrm{D}$; en utilisant la structure de $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{D})$ vue dans B), montrer qu'il existe $v \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{D})$ telle que $v(\mathrm{D}')$ soit une droite quelconque $\neq \mathrm{D}$; en déduire que le groupe G engendré par u et $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{D})$ contient *tous* les sous-groupes $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{D}')$, donc toutes les transvections et dilatations, et conclure par l'exerc. 4A).

Le normalisateur W de T doit laisser invariant l'ensemble des droites portant les vecteurs propres de toutes les transformations de T, d'où sa détermination en prenant une base formée de vecteurs sur ces trois droites.

Pour prouver l'existence et l'unicité de la décomposition de Bruhat de u, il y a 5 cas à examiner; on se bornera au cas " le plus général ", celui où $u(\mathrm{D}) \not\subset \mathrm{P}$ et $\mathrm{D} \not\subset u(\mathrm{P})$; soit $\mathrm{D}' = \mathrm{P} \cap u(\mathrm{P})$; on prend pour X_1^{-1} la matrice de l'unique automorphisme $w \in \mathrm{U}$ tel que $w(u(e_3))$ soit sur la droite $\mathbf{R}e_1$ et que $w(\mathrm{D}') = \mathbf{R}e_2$; puis on prend $P = P^{-1}$ matrice de l'endomorphisme p tel que $p(e_1) = e_3$, $p(e_2) = e_2$, $p(e_3) = e_1$; alors $p \circ w \circ u$ appartient à B. On raisonne de même dans les autres cas.

5) Commencer par prouver que, si u est injective et transforme trois points en ligne droite en trois points en ligne droite, u transforme quatre points dans un même plan en quatre points dans un même plan, puis que u transforme trois points non en ligne droite (resp. quatre points non dans un même plan) en trois points non en ligne droite (resp.

quatre points non dans un même plan) (on suppose bien entendu que la variété linéaire affine engendrée par $u(\mathrm{E})$ est E). Prouver ensuite que si D_1, D_2 sont deux droites parallèles, les droites D'_1, D'_2 contenant respectivement $u(\mathrm{D}_1)$ et $u(\mathrm{D}_2)$ sont dans un même plan ; si on suppose en outre u bijective, D'_1 et D'_2 sont parallèles. Composant ensuite u avec une transformation affine, on peut supposer que u laisse invariants l'origine et trois vecteurs formant une base de E. Appliquer le résultat de la section (4.1), exerc. 7 aux plans déterminés par deux de ces trois vecteurs, puis à un plan quelconque contenant l'un d'eux.

6) Remarquer que, si u est l'endomorphisme dont on considère la matrice par rapport à une base $\{e_1, e_2, e_3\}$, les trois vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ sont sur une droite de paramètres directeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls.

8) Prendre pour vecteurs de base de E un vecteur $c \in \mathrm{D}$ et deux vecteurs a, b sur D_1 et D_2 respectivement, tels que $a + b \in \mathrm{D}_3$; si Q' est un second plan ne contenant pas D, D'_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ son intersection avec P_i, a' et b' les vecteurs de D'_1 et D'_2 qui se projettent parallèlement à D sur a et b alors $a' + b' \in \mathrm{D}'_3$ se projette sur $a + b$, et $a' + \rho b' \in \mathrm{D}'_4$ sur $a + \rho b \in \mathrm{D}_4$.

VI, 2

1) L'invariance de $\mathrm{Tr}(u)$ s'obtient comme conséquence de l'invariance du polynôme caractéristique de $M(u)$, ou en remplaçant u par uv^{-1} dans $\mathrm{Tr}(vu) = \mathrm{Tr}(uv)$. Pour la caractérisation de la trace parmi les formes linéaires sur $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$, remplacer X et Y par les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ (section (6.1), problème 3).

3) Lorsque $\alpha = 0$, la somme des dimensions de N et de $u(\mathrm{E})$ est 3, donc si $u^{-1}(\mathrm{N}) \cap u(\mathrm{E}) = \{0\}$, on a nécessairement $u^{-1}(\mathrm{N}) = \mathrm{N}$ (puisque $u^{-1}(\mathrm{N})$ contient toujours N), et E est somme directe des sous-espaces stables $u^{-1}(0) = \mathrm{N}$ et $u(\mathrm{E})$. On est ramené à la classification des endomorphismes de $u(\mathrm{E})$ (section (4.2), exerc. 5). Si $\dim \mathrm{N} = 2$, u est de rang 1, donc si $\mathrm{N} \cap u(\mathrm{E}) \neq \{0\}$, on a $u(\mathrm{E}) \subset \mathrm{N}$; on prend alors dans E une base dont un vecteur e_2 est dans $u(\mathrm{E})$, un vecteur e_1 tel que $\{e_1, e_2\}$ soit une base de N, et un troisième vecteur e_3 tel que $u(e_3) = e_2$ et on retombe sur une matrice du second des types (1) avec $\alpha = 0$. Si $\dim \mathrm{N} = 1$, u est de rang 2, et si $\mathrm{N} \cap u(\mathrm{E}) \neq \{0\}$, on a nécessairement $\mathrm{N} \subset u(\mathrm{E})$, et la restriction de u à $u(\mathrm{E})$ est donc un endomorphisme de rang 1. On peut avoir $u^2(\mathrm{E}) \cap \mathrm{N} = \{0\}$ ou $u^2(\mathrm{E}) = \mathrm{N}$; dans le premier cas, $u^2(\mathrm{E})$ contient un vecteur propre de u pour une valeur propre $\beta \neq 0$, on a nécessairement $u(\mathrm{E}) \neq u^{-1}(\mathrm{N})$, et on prend une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ telle que $e_3 \in u^2(\mathrm{E})$, $e_1 \in \mathrm{N}$, $e_2 \in u^{-1}(\mathrm{N})$ tel que $u(e_2) = e_1$; on obtient encore le troisième des types (1). Enfin, si $u^2(\mathrm{E}) = \mathrm{N}$, on a $u(\mathrm{E}) = u^{-1}(\mathrm{N})$, on prend une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ telle que $e_1 \in \mathrm{N}$, e_2 dans $u^{-1}(\mathrm{N})$ tel que $u(e_2) = e_1$ et e_3 tel que $u(e_3) = e_2$ et on obtient la troisième des types (1).

Pour passer de (3) à la troisième matrice de (1), il suffit de permuter les vecteurs de la base.

5) A) Utiliser les résultats de la section (6.1), exerc. 4A).

C) Une transvection t est de la forme $t^2 t^{-1}$, et comme t est conjuguée de t^2, on a $t^{-1} = vt^{-2}v^{-1}$ pour un $v \in \mathbf{SL}(\mathrm{E})$.

D) Utiliser encore le fait que $\Theta'(\mathrm{E}, \mathrm{D})$ est commutatif.

6) Prouver d'abord l'équivalence de a) et c) ; pour voir que a) implique c), considérer deux cas, suivant que la droite considérée D est invariante ou non par u. Dans le second cas, prendre x dans D ; dans le premier, considérer une base formée d'un vecteur $a \in \mathrm{D}$, d'un vecteur $b \notin \mathrm{D}$ et de $u(b)$, et écrire la condition a) pour tout $x = a + \xi b$. Pour voir que a) implique d), considérer un plan invariant P contenant x ; la restriction de u à P peut être une homothétie, auquel cas $u(x) = \lambda x$; sinon, il y a dans P un vecteur y tel que y et $u(y)$ forment une base de P, et alors $u(x)$ et $u^2(x)$ sont dans P. Pour montrer

que a) implique d), considérer l'intersection D d'un plan P et de $u(\mathrm{P})$, supposé distinct de P ; si D n'était pas globalement invariante, on aurait $u^2(\mathrm{P}) = u(\mathrm{P})$, donc $u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$. Pour voir que d) entraîne a), noter que si x, $u(x)$ et $u^2(x)$ n'étaient pas dans un même plan, et si P est le plan défini par x et $u(x)$, alors $\mathrm{P} \cap u(\mathrm{P})$ contiendrait $u(x)$ et serait distincte de $u(\mathrm{P}) \cap u^2(\mathrm{P})$. Pour voir que b) est entraînée par les autres propriétés, distinguer deux cas suivant que le plan P est invariant par u ou non ; dans le second cas, utiliser d), et dans le premier, considérer une droite non dans P et un plan invariant passant par cette droite.

Utilisant b) et c), déterminer les formes possibles de u en prenant une base comme au début.

7) Examiner ce que sont les carrés des matrices des types (1) ou (2) de l'exerc. 3.

8) La relation $w^2 = 1$ donne $u^{-1} = v^{-1}uv^{-1} = vuv^{-1}$ puisque $v^2 = 1$. Pour établir la réciproque, on note d'abord que les valeurs propres de u^{-1} doivent être les mêmes que celles de u, donc les valeurs propres de u ne peuvent être que ± 1, ou se répartir par paires (λ, λ^{-1}) avec $\lambda \neq \pm 1$; comme il y a au plus trois valeurs propres, 1 ou -1 est toujours valeur propre et en changeant au besoin u en $-u$, on obtient les trois dernières formes de matrices indiquées et les matrices diagonales ayant leurs termes égaux à ± 1, donc correspondant à des involutions. Lorsque 1 est racine simple du polynôme caractéristique de u, il existe un plan unique supplémentaire de la droite portant un vecteur invariant par u, et globalement invariant par u, donc par u^{-1}, et h doit laisser ce plan invariant. On est donc ramené au même problème pour un espace de dimension 2 ; utiliser alors la section (5.3), exerc. 3, et noter que deux similitudes directes conjuguées dans $\mathbf{GO}^+(\mathrm{E})$ ont même multiplicateur.

Pour prouver la réciproque, utiliser la décomposition en produit de deux quasi-symétries des éléments de $\mathbf{SL}(\mathrm{E})$ lorsque E est de dimension 2 (section (4.2), exerc. 7 A)) ; il ne reste alors à considérer que les automorphismes u dont une matrice par rapport à une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquer alors que u^{-1} a la même matrice par rapport à la base $\{e_1, -e_2, e_3 + e_2\}$, et montrer qu'il existe un quasi-symétrie s telle que $s(e_1) = e_1$, $s(e_2) = -e_2$, $s(e_3) = e_3 + e_2$.

10) Remarquer tout d'abord que si $\Phi(x, x) = 0$ quel que soit $x \in \mathrm{E}$, Φ est nécessairement identiquement nulle, en considérant $\Phi(x + y, x + y)$. Si Φ est non dégénérée, il y a donc a_1 tel que $\Phi(a_1, a_1) \neq 0$, et en considérant un vecteur $e_1 = \lambda a_1$, on peut supposer que $\Phi(e_1, e_1) = \pm 1$. On considère alors le plan P des $x \in \mathrm{E}$ tels que $\Phi(e_1, x) = 0$; P est supplémentaire de $\mathbf{R}e_1$ parce que Φ est non dégénérée, et la restriction de Φ à P est non dégénérée ; on est alors ramené au résultat de la section (4.2), exerc. 10. Si V, V′ sont deux sous-espaces maximaux où $\Phi(x, x) \geqslant 0$, et W un sous-espace supplémentaire de V, où $\Phi(x, x) \leqslant 0$, et tel que $\Phi(x, y) = 0$ pour $x \in \mathrm{V}$ et $y \in \mathrm{W}$, remarquer que $\mathrm{V}' \cap \mathrm{W} = \{0\}$.

VII, 1

1) Pour calculer $\mathrm{G}(x_1, x_2)$, utiliser le calcul précédent de $\mathrm{G}(x_1, x_2, x_3)$ en prenant x_3 orthogonal à un plan P contenant x_1 et x_2 : pour calculer d, décomposer x en ses composantes suivant $\mathbf{R}x_3$ et $\mathrm{P}_{0x_1x_2}$.

2) Prendre une base formée de $b_1 \barwedge b_2$ et de deux vecteurs orthogonaux dans le plan $0b_1b_2$.

3) Montrer que l'on a

$$(u^*(x \barwedge y)|z) = \Psi(x, y, u(z))$$

et utiliser la définition de $\det(u)$.

5) Le processus d'« orthonormalisation » décrit dans la section (5.2), exerc. 4, se poursuit de même pour 3 dimensions : il y a deux vecteurs unitaires opposés orthogonaux à e_1 et e_2 ; la condition $(a_3|e_3) > 0$ détermine entièrement l'un d'eux. Les autres exercices 3) à 6) de la section (5.2) se généralisent sans modification sensible. Le seul point qui demande un commentaire est la fin de l'exerc. 2 de la section (5.2). Si u est un automorphisme hermitien de E, dire que la restriction de u à P est positive signifie que l'on a $(u(x)|x) \geqslant 0$ pour $x \in$ P. Si l'on désigne par p la projection orthogonale sur P, et si l'on pose $v(x) = p(u(x))$ pour $x \in$ P, on voit aussitôt que v est un endomorphisme hermitien de P et qu'il revient au même de dire qu'il est positif ou que la restriction $u|$P est positive. Notons maintenant que si $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormale de P, on a $(u^{-1}(z)|u(e_i)) = (z|e_i) = 0$ pour $i = 1, 2$. Il est clair que la condition $(u^{-1}(z)|z) > 0$ est nécessaire pour que u soit bijectif et positif. Inversement, si elle est remplie, $u^{-1}(z)$ n'appartient pas à P, donc tout point de E s'écrit d'une seule manière $\lambda u^{-1}(z) + y$ avec $y \in$ P, et on a $(\lambda z + u(y)|\lambda u^{-1}(z) + y) = \lambda^2(z|u^{-1}(z)) + (u(y)|y) > 0$. Pour la matrice $M(h)$, la condition $(h(y)|y) \geqslant 0$ pour $y \in$ P donne les deux conditions

$$\alpha_{11} > 0 \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0$$

en vertu de l'exerc. 2 de la section (5.2) appliqué à $p \circ h$. Pour écrire la condition $(h^{-1}(e_3)|e_3) > 0$, on détermine les coordonnées de $h^{-1}(e_3)$ par les formules de Cramer (il suffit de déterminer la troisième), et compte tenu de la condition

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0$$

on obtient la troisième inégalité de l'énoncé.

Les trois conditions sur $M(h)$ exprimant que h est positif sont évidemment vérifiées pour une matrice de Gram, donc sont nécessaires ; inversement, si elles sont vérifiées, et si u est la racine carrée de h, endomorphisme hermitien positif, on a $h = u^*u$, et par suite $M(h)$ est la matrice de Gram correspondant aux $x_i = u(e_i)$.

6) On peut se borner au cas $\lambda = 0$; si $v(x) = 0$, on a $0 = (v(x)|y) = (x|v^*(y))$ pour tout $y \in$ E, donc $v^*(\mathrm{E})$ est orthogonal à $v^{-1}(0)$, et le même calcul repris en sens inverse montre que si x est orthogonal à $v^*(\mathrm{E})$, alors $v(x)$ est orthogonal à E tout entier, donc $v(x) = 0$.

7) Dans le plan $\mathrm{P}_{0a_1a_2}$, un point $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$ est tel que

$$(u(x)|x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2$$

et si $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$, cela montre que $\lambda_1 \geqslant (u(x)|x) \geqslant \lambda_2$. Si en outre $(x|z) = 0$, on en déduit par définition $(u(x)|x) \leqslant \rho_u(z)$, d'où $\lambda_2 \leqslant \rho_u(z)$.

Pour prouver $\lambda_2 \leqslant \lambda'_1 + \lambda''_2$, on note que si z est choisi tel que $\rho_{u''}(z) = \lambda''_2$, $\rho_u(z)$, borne supérieure de $(u'(x)|x) + (u''(x)|x)$, est au plus égal à $(u'(x_0)|x_0) + \lambda''_2$, x_0 étant choisi tel que $\|x_0\| = 1$, $(x_0|z) = 0$ et $(u''(x_0)|x_0) = \rho_{u''}(z) = \lambda''_2$. L'inégalité résulte de ce que $(u'(x_0)|x_0) \leqslant \lambda'_1$. Les inégalités pour $-u$ donnent

$$\lambda_3 \geqslant \lambda'_3 + \lambda''_3, \qquad \lambda_2 \geqslant \lambda'_3 + \lambda''_2, \qquad \lambda_2 \geqslant \lambda'_2 + \lambda''_3$$
$$\lambda_1 \geqslant \lambda'_3 + \lambda''_1, \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda'_1 + \lambda''_3, \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda'_2 + \lambda''_2$$

Lorsque u'' est hermitien positif, on a $\lambda''_i \geqslant 0$ pour tout i, d'où les inégalités $\lambda_i \geqslant \lambda'_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

VII, 2

1) On a $(u(x)|x) = \lambda(x|x) = (x|u^*(x))$, donc $u^*(x) - \lambda x$ est orthogonal à x ; on peut donc poser $u^*(x) = \lambda x + z$, où z est orthogonal à x. Comme $(u(x)|u(x)) = (u^*u(x)|x) = (uu^*(x)|x) = (u^*(x)|u^*(x))$, il vient

$$\lambda^2(x|x) = \lambda^2(x|x) + (z|z)$$

d'où $z = 0$. Si y est orthogonal à x, on a $(u^*(x)|y) = \lambda(x|y) = 0$, mais cela s'écrit aussi $(x|u(y)) = 0$, donc $u(\mathrm{P}) \subset \mathrm{P}$, et de même $u^*(\mathrm{P}) \subset \mathrm{P}$. La restriction $u|\mathrm{P}$ est donc un endomorphisme normal, et il suffit d'appliquer l'exerc. 2 de la section (5.3).

2) Soit v la restriction $u|\mathrm{P}$; on décompose v en produit de deux symétries dans P, s', s'' par rapport à deux droites D', D'' de P (5.3.2) et on considère s' et s'' comme les restrictions à P des symétries t', t'' *dans* E par rapport à D' et D''. Comme pour tout vecteur $a \in \mathrm{D}$, on a $t'(a) = t''(a) = -a$, d'où $t't''(a) = a$, donc $t't''$ coïncide avec u dans D et dans P, donc est égal à u.

3) On peut prendre une base orthonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ telle que $u(e_3) = e_3$, $u(e_1) = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$; on cherche à déterminer D' par un vecteur $e_1 + \lambda e_3$, d'où $u(e_1 + \lambda e_3) = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta + \lambda e_3$; en écrivant $(e_1 + \lambda e_3 | u(e_1 + \lambda e_3)) = 0$, il vient $\cos\theta + \lambda^2 = 0$, ce qui a une solution dans $\mathbf{R}$ si $\cos\theta < 0$. Si maintenant Γ est un sous-groupe distingué de $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$, non réduit à 1_E, il contient une rotation u d'angle $\theta \neq 0$, donc aussi u^n, rotation d'angle $n\theta$, et on peut supposer n pris tel que $\cos n\theta < 0$. Alors $v = t'ut'u^{-1} = (t'ut'^{-1})u^{-1} \in \Gamma$ est une symétrie par rapport une droite. Comme Γ est distingué, il contient toutes les symétries wvw^{-1} ($w \in \mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$) par rapport à toutes les droites de E, et est donc égal à $\mathbf{O}_3^+(\mathbf{R})$ en vertu de l'exerc. 2.

5) L'equation en t, $u = (1_\mathrm{E} + t)(1_\mathrm{E} - t)^{-1}$ s'écrit $t(u + 1_\mathrm{E}) = u - 1_\mathrm{E}$, donc a une solution $t = (u - 1_\mathrm{E})(u + 1_\mathrm{E})^{-1}$, pourvu que $u + 1_\mathrm{E}$ soit inversible, c'est-à-dire que -1 ne soit pas valeur propre de u, ce qui signifie que u n'est pas une symétrie par rapport à une droite. On a en outre $(u^* + 1_\mathrm{E})t^* = u^* - 1_\mathrm{E}$, et comme $u^* = u^{-1}$, $u^* \pm 1_\mathrm{E} = u^{-1}(1_\mathrm{E} \pm u)$, on obtient bien $t^* = -t$ (on notera que $u + 1_\mathrm{E}$ et $u - 1_\mathrm{E}$ sont permutables, donc aussi $u - 1_\mathrm{E}$ et $(u + 1_\mathrm{E})^{-1}$).

6) On a $b = b' + a\cos\beta$, $c = c' + a\cos\gamma$, donc

$$\cos\alpha = (b|c) = (b'|c') + \cos\beta\cos\gamma.$$

D'autre part, on peut écrire $b' = b''\sin\beta$, $c' = c''\sin\gamma$, où b'' et c'' sont unitaires, et par définition $(b'|c') = \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi$.

Comme $\cos\varphi \geqslant -1$, on a $\cos\alpha \geqslant \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta + \gamma)$, et l'hypothèse $\beta + \gamma > 0$ entraîne donc $\alpha < \beta + \gamma$.

7) Soit $n = r \circ t_b$, soit Δ une droite rencontrant D et de direction orthogonale à celle de D, et soit s la symétrie par rapport à Δ ; on peut alors écrire $t_b = s's$, où s' est la symétrie par rapport à la droite $t_{b/2}(\Delta) = \Delta'$; mais alors rs' est une symétrie s'' par rapport à une droite faisant avec Δ' un angle $-\theta/2$, où θ est l'angle de r, et on a bien $rt_b = ss''$. Pour la réciproque, on suppose $u = vv'$, où v et v' sont des symétries par rapport à des droites D, D' non dans un même plan. Soit L la droite rencontrant D et D' et de direction orthogonale à chacune d'elles, et soit D'' la droite parallèle à D' et passant par le point commun à L et D. Si v'' est la symétrie par rapport à D'', on a $u = (vv'')(v''v')$ et $v''v' = t_b$ avec $b \in \mathrm{L}$, $vv'' = r$, où r est une rotation d'axe L.