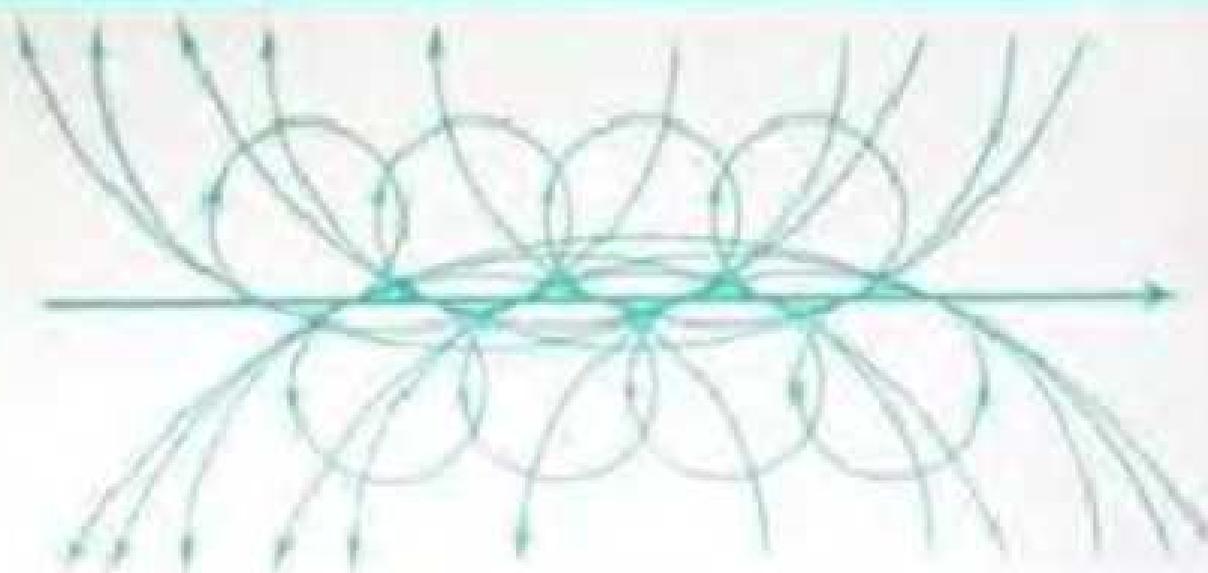


I.M. YAGLOM

LES NOMBRES COMPLEXES

ET LEURS APPLICATIONS
EN GÉOMÉTRIE



$$a + ib = (x + iy)^2$$

DUNOD

LES NOMBRES COMPLEXES

ET LEURS APPLICATIONS
EN GÉOMÉTRIE

PAR

I. M. YAGLOM

TRADUIT PAR

J. MAYER

Diplômée de l'École des Langues orientales

DUNOD
PARIS
1966

Traduction de l'ouvrage
publié en langue russe sous le titre

KOMPLIEKSNIÉ TCHISLA

par les ÉDITIONS DE LITTÉRATURE DE PHYSIQUE
ET DE MATHÉMATIQUES DE MOSCOU, 1963.

Copyright pour tous les pays, by MEJKNIGA.

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

AVANT-PROPOS

Le sujet de ce livre concerne à la fois l'algèbre et la géométrie. Les liens entre ces deux disciplines sont très divers et très féconds pour chacune d'elles. Depuis la plus lointaine antiquité de nombreuses applications réciproques étaient déjà connues. Plus près de nous on a vu naître et se développer la géométrie analytique d'où est sortie la géométrie algébrique en constant développement. Les méthodes algébriques de la géométrie projective sont un exemple de cette évolution. Et on ne saurait dire, au stade où elles sont parvenues actuellement, s'il faut considérer la géométrie descriptive comme une division de la géométrie ou de l'algèbre. De même l'étude des nombres complexes commencée en algèbre est maintenant étroitement liée à la géométrie. A tel point que la contribution des géomètres au développement de cette science est peut-être plus importante que celle des algébristes.

Les différents aspects des nombres complexes font l'objet d'études très poussées et posent d'importants problèmes encore non résolus.

Il n'est pas dans le propos de ce livre d'exposer au lecteur l'état actuel de la question, mais d'étudier un des nombreux chapitres communs aux nombres complexes et à la géométrie. Et nous ne prétendons nullement épuiser le sujet même dans ce domaine limité. Cependant, nous avons essayé de présenter de façon assez large l'ensemble des questions abordées. Nous ne nous sommes jamais bornés à introduire les notions fondamentales en nous efforçant de les utiliser pour la démonstration des théorèmes géométriques.

Ce livre est destiné à un cercle de lecteurs assez étendu. Si les premiers paragraphes de tous les chapitres peuvent être utilisés dans un cycle d'études élémentaires, les paragraphes suivants sont d'un niveau un peu supérieur.

Cela nous a astreint à un système assez complexe de désignations pour distinguer les différentes parties du livre.

Les paragraphes 1, 4, 7, 9, 13 et 15 constituent la ligne fondamentale de l'exposé ; ils sont sans astérisque. On y trouvera, à l'intention des professeurs et futurs professeurs de mathématiques, de nombreux exemples de géométrie élémentaire. Dans les paragraphes 8, 10, 14 et 16 marqués d'un astérisque, sont exposés les procédés d'applications des nombres complexes à la géométrie élémentaire. Chacun de ces quatre paragraphes a pour titre « Applications et exemples ». Il comprend différents théorèmes géométriques démontrés à l'aide de nombres complexes. Bien entendu les théorèmes rassemblés ici ont uniquement une valeur d'illustration. Seuls, peut-être, les théorèmes sur la puissance du point et de la droite par rapport à la circonférence (paragraphe 8 et 10) se rapprochent un peu plus de la ligne fondamentale de l'exposé. Ils sont utilisés dans le paragraphe 16 pour une nouvelle dénomination (« géométrie ») de l'inversion axiale (de LAGUERRE) qui joue un rôle essentiel dans le paragraphe 15.

L'étude des paragraphes 8, 10, 14 et 16 pourrait être omise sans nuire à la compréhension du reste du livre. Nous recommandons au lecteur de ne pas trop s'y attarder en première lecture. Par la suite, si l'on s'intéresse à la géométrie élémentaire on pourra retourner à ces paragraphes afin d'en assimiler les principes fondamentaux. Les paragraphes marqués de deux astérisques 5, 6, 11, 12, 17 et 18 ont un tout autre caractère. Nous y dépassons les frontières du sujet qui (de façon d'ailleurs souvent artificielle) est classé dans la géométrie élémentaire. En fait, les applications essentielles des nombres complexes à la géométrie ne se rapportent pas à la géométrie d'Euclide telle qu'on l'étudie dans le second degré mais à ce qu'on appelle les « géométries non euclidiennes » dont la plus connue est la géométrie de LOBATCHEWSKY. Il nous a semblé inadmissible, même dans un livre de vulgarisation, d'ignorer ce domaine essentiel des applications géométriques des nombres complexes (1). Nous avons donc introduit dans ce livre un court exposé sur le rôle des nombres complexes dans la géométrie de LOBATCHEWSKY. Les paragraphes correspondant à cet exposé sont destinés à un lecteur ayant quelques notions du principe de cette remarquable géométrie. Les connaissances nécessaires peuvent ne pas dépasser le niveau d'un livre de vulgarisation sur la géométrie non euclidienne. Le caractère particulier des paragraphes marqués de deux astérisques nous a contraint à modifier notre exposé. Les démonstrations dans ces paragraphes ne sont pas toujours intégralement développées, le soin en étant laissé au lecteur. Celui-ci pourra négliger les paragraphes 5, 6, 11, 12, 17 et 18, le reste du livre formant un

(1) On pourra consulter à ce sujet les livres et articles indiqués dans les notes en bas des pages 14, et 25.

tout dans sa partie élémentaire (celle qui ne concerne pas la géométrie non euclidienne).

L'origine de ce livre est le cours fait par l'auteur en 1958 dans les écoles moscovites aux membres du cycle d'Enseignement mathématique auprès de l'Université d'État de Moscou. Un exposé élargi de ce cours a été publié dans le numéro 6 des *Bulletins de l'Enseignement mathématique* (M. 1961). Les étudiants de l'Institut pédagogique de la Faculté de Moscou ont aussi bénéficié de ce cours.

L'auteur exprime sa reconnaissance à A. M. YAGLOM pour ses conseils, à ses élèves M.M. ARAPOVA et F. M. NAVIAJCKI, auxquels revient le mérite de certaines démonstrations, aux rédacteurs M.M. GORIATCHA et I. E. MOROZOVA, qui nous ont fait de nombreuses remarques utiles. Enfin l'auteur remercie le professeur Roland DEAUX, de l'Institut polytechnique de Mons (Belgique) qui nous a aimablement envoyé la dernière édition de son livre sur les nombres complexes.

I. M. YAGLOM.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — Les trois types de nombres complexes	1
1. Nombres complexes ordinaires	1
2. Nombres complexes généralisés	8
3. Nombres complexes très généralisés	10
4. Nombres duaux	14
5**. Nombres doubles	18
6**. Nombres hypercomplexes	22
 CHAPITRE II. — Interprétation géométrique des nombres complexes	 27
7. Nombres complexes ordinaires considérés comme points d'un plan	27
8*. Applications et exemples	34
9. Nombres duaux pris comme droites orientées d'un plan	80
10*. Applications et exemples	97
11**. Correspondance des nombres complexes ordinaires et des points d'un plan de Lobatchewsky	110
12**. Nombres doubles et droites orientées d'un plan de Lobatchewsky	119
 CHAPITRE III. — Transformations circulaires et géométriques circulaires ..	 131
13. Transformations circulaires ordinaires (transformations de Moebius)	131
14*. Applications et exemples	145
15. Transformations axiales circulaires (transformations de Laguerre)	156
16*. Applications et exemples	169
17**. Transformations circulaires d'un plan de Lobatchewsky	177
18**. Transformations axiales circulaires d'un plan de Lobatchewsky	185

CHAPITRE I

LES TROIS TYPES DE NOMBRES COMPLEXES

§ 1. NOMBRES COMPLEXES ORDINAIRES

L'introduction des nombres complexes en algèbre est liée à la résolution de l'équation du second degré.

Si par le mot « nombres » nous entendons seulement les nombres ordinaires réels, on est amené à considérer que l'équation du second degré :

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

a deux racines si $\Delta = p^2 - 4q > 0$; une racine si $\Delta = 0$; pas de racine si $\Delta < 0$. Ainsi, de très nombreuses équations, par exemple

$$x^2 + 1 = 0, \quad x^2 - 2x + 2 = 0, \quad x^2 + x + 1 = 0, \quad (2)$$

sont insolubles, c'est-à-dire n'ont pas de racines. Ce fait complique considérablement la théorie des équations. Afin d'éliminer cette difficulté, on a été amené à élargir la notion de nombre et on est convenu de considérer que l'équation $x^2 + 1 = 0$ a une racine : c'est un nombre d'une nature particulière (*imaginaire*) différente de celle des nombres *ordinaires* réels. On désignera ce nombre par une lettre spéciale « i ». En ajoutant à l'ensemble des nombres réels le nombre « i », nous sommes tenus d'expliquer comment s'effectuent la multiplication des nombres réels par i, et leur addition avec i. Nous pouvons multiplier les nombres l'un par l'autre et les additionner, mais tant que nous ne définissons pas ces opérations pour l'ensemble

« élargi » des nombres, nous n'avons pas de motif suffisant d'appeler i un nombre. De plus, il apparaît impossible de se borner à l'introduction du seul nombre i . Tous les produits bi du nombre réel b par i et toutes les sommes $a + bi$ du nombre réel a et du nombre bi ($b \neq 0$) sont aussi considérés comme nombres d'une nature spéciale et sont inclus dans l'ensemble des nombres, en plus des nombres réels et du nombre i . Une grande quantité de nombre de la forme $a + bi$ est ainsi obtenue (pour $b = 0$ qui comprend tous les nombres réels, et pour $a = 0$ — tous les nombres de la forme bi) et elle constitue l'ensemble des nombres complexes.

L'addition, la soustraction, et la multiplication des nombres complexes sont alors définies de la façon suivante :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (3)$$

(on utilise ici le fait que, par définition, i est la racine de l'équation

$$x^2 + 1 = 0,$$

de telle sorte que $i^2 + 1 = 0$ et $i^2 = -1$).

On peut alors établir de façon simple la règle de la division du nombre complexe par le réel :

$$(c + di) : a = (c + di) \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{a} + \frac{d}{a}i.$$

Si donc nous devons diviser un nombre complexe quelconque z_1 par un autre nombre complexe z , il suffit alors de leur associer un nombre \bar{z} , pour que le produit $z\bar{z}$ soit réel. Nous aurons alors

$$z_1 : z = (z_1\bar{z}) : (z\bar{z}), \quad (4)$$

Mais les règles de la multiplication des nombres complexes z_1 et \bar{z} , et la division du nombre complexe obtenu $z_1\bar{z}$ par le nombre réel $z\bar{z}$ nous sont déjà connues.

Posons $z = a + bi$; dans ce cas, pour \bar{z} , il est commode de choisir le nombre $a - bi$, pour lequel

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2. \quad (5)$$

Nous pouvons maintenant écrire la règle de la division par un nombre complexe de cette façon :

$$\begin{aligned} \frac{c + di}{a + bi} &= \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(ca + db) + (-cb + da) i}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + \frac{-cb + da}{a^2 + b^2} i. \end{aligned} \quad (6)$$

Le nombre $\bar{z} = a - bi$ est appelé le **conjugué** du nombre complexe $z = a + bi$ ⁽¹⁾ ; il est évident, inversement, que le nombre z est le conjugué du nombre \bar{z} (c'est-à-dire $\overline{\bar{z}} = z$). Notons que non seulement le produit $z \cdot \bar{z}$, mais aussi la somme $z + \bar{z}$ des nombres complexes sont des nombres réels. La somme $z + \bar{z} = 2a$ représente le double de la partie réelle a du nombre complexe $z = a + bi$; le produit $z\bar{z} = a^2 + b^2$ est le carré du nombre (positif)

$$r = + \sqrt{a^2 + b^2},$$

appelé module du nombre z et désigné par $|z|$. $|z|$ est réel s'il coïncide avec son conjugué et seulement dans ce cas (on a alors $\bar{z} = z$). On vérifiera facilement que les équations suivantes

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} &= \overline{\bar{z}_1} + \overline{\bar{z}_2}, & \overline{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} &= \overline{\bar{z}_1} - \overline{\bar{z}_2}, & \overline{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} &= \overline{\bar{z}_1} \cdot \overline{\bar{z}_2}, \\ \overline{\bar{z}_1 : \bar{z}_2} &= \overline{\bar{z}_1} : \overline{\bar{z}_2} \end{aligned} \quad (7)$$

découlent de la définition du nombre conjugué. (Autrement dit, la somme, la différence, le produit et le quotient des nombres conjugués de deux nombres complexes donnés, sont les complexes conjugués correspondant à la somme, la différence et le quotient de ces nombres.)

Nous nous servons souvent du fait que la différence $z - \bar{z}$ de 2 nombres complexes conjugués est un nombre *purement imaginaire* (c'est-à-dire qui a la forme bi , où b est réel).

Ainsi, nous pouvons additionner, soustraire, multiplier et diviser les nombres complexes, et toutes les lois auxquelles obéissent ces opérations coïncident exactement avec les lois des opérations sur les nombres réels ordinaires ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Par la suite on désignera par le symbole \bar{z} le nombre complexe conjugué de z .

⁽²⁾ On peut dire que les nombres complexes, de même que les réels forment un champ commutatif.

En particulier, comme pour des nombres réels, la division par un nombre complexe $z = a + bi$ n'est pas toujours possible : pour qu'elle le soit il est indispensable que le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ soit différent de zéro, et il existe un seul nombre complexe $0 = 0 + 0i$ pour lequel la division est impossible. Quand l'impossibilité de diviser par zéro est gênante on procède de la façon qui nous est déjà familière : on convient de considérer que le quotient $1 : 0$ existe, mais que c'est un nombre de nature spéciale pour lequel on introduit la notation ∞ ; en d'autres termes on élargit l'ensemble des nombres complexes en introduisant un nouveau nombre ∞ égal **par définition** à $1/0$. Les règles des opérations avec le symbole ∞ sont définies de la façon suivante

$$z + \infty = \infty, \quad z - \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{\infty}{z} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad (8)$$

où z est un nombre arbitraire, non nul dans la 3^e équation, et différent de ∞ dans la deuxième et les deux dernières. On considère d'une façon générale que la différence $\infty - \infty$, le produit $\infty \cdot \infty$ et le rapport ∞/∞ (et aussi le quotient $0/0 = 0$; $1/0 = 0 \cdot \infty$) n'ont pas de signification. Nous n'en aurons d'ailleurs pas l'emploi ici (1).

Il est important de ne pas perdre de vue que, si dans le domaine des nombres ordinaires, seuls les nombres positifs ont une racine carrée, dans celui des nombres complexes on peut extraire une racine carrée de *n'importe quel* nombre $z = a + bi$. Effectivement, en posant

$$a + bi = (x + yi)^2,$$

on obtient facilement

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b.$$

(1) Notons d'ailleurs que le rapport

$$\frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d},$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes arbitraires en vertu des identités

$$\frac{az + c}{cz + b} \equiv \frac{a + b \cdot \frac{1}{z}}{c + d \cdot \frac{1}{z}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\infty} = 0$$

conduit à penser qu'ils ont une signification tout à fait définie à savoir a/c . Cette remarque nous sera utile par la suite.

En résolvant ce dernier système d'équations on trouve

$$x = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{|z| - a}{2}},$$

où

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq a$$

(Les signes des radicaux x et y sont choisis de telle sorte que le produit xy ait le même signe que b .) Cela conduit aux formules

$$\begin{aligned} \sqrt{a + bi} &= \pm \left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + \sqrt{\frac{|z| - a}{2}} i \right), \\ \sqrt{a - bi} &= \pm \left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} - \sqrt{\frac{|z| - a}{2}} i \right), \quad b \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Il en découle immédiatement que *dans le domaine des nombres complexes chaque équation quadratique (1) (avec des coefficients réels ou quelconques complexes p et q) a deux racines (différentes ou identiques) :*

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (10)$$

En particulier pour p et q réels cette équation aura 2 racines réelles différentes

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

pour $\Delta > 0$; deux racines identiques (réelles aussi) $x_{1,2} = -p/2$ pour $\Delta = 0$; deux racines complexes (conjuguées) distinctes pour $\Delta < 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{-\Delta} i}{2}$$

Ainsi, par exemple, les équations (2) ont les racines suivantes

$$x_{1,2} = \pm i; \quad x_{1,2} = 1 \pm i; \quad x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \quad (11)$$

Dans une série de cas, il sera plus facile d'écrire autrement le nombre complexe $z = a + bi$, en mettant en évidence son module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Mettons en facteur le nombre $|z|$:

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right).$$

Les nombres réels

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ont la propriété d'avoir la somme de leurs carrés égale à 1.

Il s'ensuit l'existence d'un angle φ tel que :

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (12)$$

Si on désigne le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ du nombre z par la lettre r , alors nous aurons

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (13)$$

où

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}. \quad (13 a)$$

L'angle φ [défini par l'équation (13 a) à un multiple de 2π près] est appelé *argument* du nombre z et on le désigne par $\text{Arg } z$. Si, par exemple, on lui impose de ne varier que dans l'intervalle $-\pi < \varphi < \pi$, il sera alors nul pour les nombres réels positifs, et égal à π pour les négatifs. Les nombres conjugués auront le même module r et des arguments de signes opposés φ et $-\varphi$.

Cette forme d'écriture (113) des nombres complexes s'appelle **forme trigonométrique**. Elle est très utile lorsqu'on doit multiplier deux ou plusieurs nombres complexes.

En effet

$$\begin{aligned} r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) &= \\ rr_1[(\cos \varphi \cdot \cos \varphi_1 - \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1) + i(\cos \varphi \sin \varphi_1 + \sin \varphi \cos \varphi_1)] &= \\ = rr_1[\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1)]. & \quad (14) \end{aligned}$$

Ainsi, le module du produit de deux nombres complexes est égal au produit des modules de chacun des facteurs, mais l'argument du produit est égal à la somme des arguments des facteurs [comparez avec la formule (3), beaucoup moins commode], et le module du quotient de 2 nombres complexes est égal au quotient des modules de ces nombres, et l'argument du quotient à la différence des arguments correspondants

$$\frac{z_1}{z} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{r_1}{r} [\cos (\varphi_1 - \varphi) + i \sin (\varphi_1 - \varphi)] \quad (15)$$

De ces égalités on déduit immédiatement les lois qui permettent d'élever un nombre complexe z à n'importe quelle puissance et d'extraire les racines

$$\begin{aligned} [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n &= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi); \\ \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

(Il y a n racines différentes de z suivant qu'on détermine l'argument $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, selon les valeurs $k = 0, 1, \dots, n-1$, φ_0 étant une des valeurs possibles de l'argument.)

La méthode purement formelle utilisée ici pour introduire les nombres complexes est tout à fait générale et peut être utilisée dès le début du cours d'algèbre pour les nombres rationnels (fractionnaires) et relatifs (positifs et non positifs). En effet, seuls les nombres positifs entiers (et zéro) peuvent sans restriction s'additionner et se multiplier, bien que leur soustraction ne soit pas toujours possible. Afin de la rendre possible (c'est-à-dire de rendre résolubles toutes les équations $x + a = b$) il faut « élargir » l'ensemble des nombres positifs, en ajoutant, par exemple, la racine de l'expression $x + 1 = 0$, considérée comme un « nombre de nature particulière » ; cette racine est représentée par -1 . A partir de cette expression -1 , par addition et multiplication, on obtiendra tous les nombres négatifs entiers, et toutes les équations $x + a = b$ (à coefficients entiers) deviennent solubles. Par le même procédé, pour rendre possible la division (c'est-à-dire rendre solubles toutes les équations $ax = b$ à coefficients entiers) il nous faut élargir encore plus l'ensemble numérique, en introduisant d'autres « nombres de nature particulière » : les solutions $1/a$ de toutes les équations $ax = 1$, où a est entier positif ; après quoi nous obtenons naturellement un ensemble de fractions (de nombres rationnels) a/b , et toutes les équations du 1^{er} degré $ax = b$ à coefficients entiers deviennent résolubles. De façon analogue, on peut introduire aussi les irrationnels du second degré et les irrationnels de degrés plus élevés.

Soulignons enfin que l'intérêt fondamental des nombres complexes en algèbre est de permettre de passer de l'équation du second degré aux équations de degrés supérieurs sans ajouter aux nombres de formes $a + bi$ un nouveau nombre de « nature particulière » : il se trouve que *n'importe quelle équation de degré n , à coefficients réels ou complexes arbitraires, a obligatoirement une racine complexe, ce qui constitue le théorème fondamental de l'algèbre.*

§ 2. NOMBRES COMPLEXES GÉNÉRALISÉS

Revenons à l'introduction des nombres complexes. Pour résoudre une catégorie d'équations du second degré insolubles dans le domaine des nombres réels, nous avons ajouté à l'ensemble de ces nombres un nouvel élément, i , qui est par définition la racine d'une de ces équations non soluble à savoir de l'équation $x^2 + 1 = 0$, ceci nous a conduit à l'ensemble des nombres complexes $a + bi$ (a, b réels) qui permettent de résoudre désormais toutes les équations du second degré. Voyons maintenant si l'utilisation de l'équation $x^2 + 1 = 0$ est indispensable ou si on peut utiliser n'importe quelle autre équation du second degré ?

Il est facile de voir que l'équation $x^2 + 1 = 0$ ne se distingue pas fondamentalement des autres équations non solubles dans le domaine réel. Le choix de cette équation particulière n'est dicté que par sa simplicité relative (les coefficients p et q étant ici égaux à 0 et 1). En effet, désignons par I le « nombre de nature particulière » qui est par définition la racine de l'équation du 2^e degré arbitraire à discriminant négatif :

$$x^2 + px + q = 0, \quad \Delta = p^2 - 4q < 0 \quad (17)$$

et considérons l'ensemble des *nombres complexes généralisés* Z de la forme :

$$a + bI, \quad a, b \text{ réels} \quad (18)$$

On peut additionner, soustraire et multiplier ces nombres suivant les règles :

$$\left. \begin{aligned} (a + bI) + (c + dI) &= (a + c) + (b + d)I, \\ (a + bI) - (c + dI) &= (a - c) + (b - d)I, \\ (a + bI)(c + dI) &= ac + adI + bcI + bdI^2 = \\ &= (ac - qbd) + (ad + bc - pbd)I \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

($I^2 = -pI - q$, puisque par définition I est la racine de l'équation $x^2 + px + q = 0$).

A chaque nombre complexe généralisé $Z = a + bI$, on pourra associer un nombre \bar{Z} tel que le produit $Z\bar{Z}$ soit réel ; ainsi, par exemple,

$$\bar{Z} = (a - pb) - bI;$$

on a alors

$$Z\bar{Z} = a^2 - pab + qb^2 = \left(a - \frac{p}{2}b\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}b^2.$$

Ceci permet de définir la division des nombres complexes généralisés, à partir de l'égalité (4) ; ainsi pour la même valeur $Z\bar{Z} = 0$, pourvu que $a = 0$ et $b = 0$ car

$$\left(\frac{4q - p^2}{4} = \frac{-\Delta}{4} > 0\right),$$

le seul nombre par lequel la division n'est pas possible est le nombre $0 (= 0 + 0 \cdot I)$. Enfin, chaque équation du second degré (à coefficients réels ou complexes généralisés) dans le domaine des nombres complexes généralisés a deux racines (distinctes ou non). Ainsi, si par I on désigne la racine de la deuxième des équations (2), les racines des trois équations (2) seront égales à :

$$x_1 = -1 + I, \quad x_2 = 1 - I; \quad x_1 = I, \quad x_2 = 2 - I;$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}I, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}I,$$

et si I_1 est la racine de la 3^e équation (2), les racines de ces mêmes équations auront la forme

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}I_1, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}I_1;$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}I_1, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}I_1;$$

$$x_1 = I_1, \quad x_2 = -1 - I_1.$$

Tous ces résultats deviennent évidents si on se souvient que la racine I de l'équation (17) a la forme :

$$I = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i \quad \left(\text{ou } I = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i\right); \quad (20)$$

Inversement, on peut exprimer i à partir de I

$$i = \frac{p}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} I \quad \left(\text{ou } i = -\frac{p}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} I \right). \quad (21)$$

Ainsi : les nombres complexes généralisés $a + bI$ sont les mêmes nombres complexes ordinaires $a + bi$, mais écrits de façon un peu différente :

$$a + bI = a + b \left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i \right) = a_1 + b_1 i,$$

où

$$a_1 = a - \frac{p}{2} b, \quad b_1 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} b. \quad (22)$$

D'où il ressort que toutes les propriétés algébriques des nombres $Z = a + bI$ sont semblables aux nombres complexes ordinaires ⁽¹⁾.

§ 3. NOMBRES COMPLEXES TRÈS GÉNÉRALISÉS

Pour une plus grande généralisation de la notion du nombre complexe, voyons à quel point est essentiel dans le raisonnement du paragraphe précédent le caractère négatif du discriminant Δ de l'équation (17).

Il est clair, que si l'on considère les nombres complexes comme un moyen de résoudre les difficultés liées à la non résolution d'une catégorie d'équations du second degré, dans le domaine des nombres réels, le caractère négatif du discriminant Δ apparaît tout à fait essentielle. En effet, nous supposons

⁽¹⁾ L'identité des propriétés algébriques des nombres complexes généralisés Z et des nombres complexes ordinaires z découle de l'isomorphisme de ces deux ensembles de nombres, c'est-à-dire de l'existence d'une relation biunivoque $z \leftrightarrow Z$ entre ces nombres, telle que de $z_1 \leftrightarrow Z_1, z_2 \leftrightarrow Z_2$ il découle $z_1 + z_2 \leftrightarrow Z_1 + Z_2, z_1 - z_2 \leftrightarrow Z_1 - Z_2, z_1 \cdot z_2 \leftrightarrow Z_1 \cdot Z_2, z_1 : z_2 \leftrightarrow Z_1 : Z_2$, (nous obtenons cette représentation en associant au nombre $z = a + bi$ le nombre $Z = a_1 + b_1 I_1$ où

$$a_1 = a + \frac{pb}{-\Delta}, \quad b_1 = \frac{2b}{\sqrt{-\Delta}}$$

et par conséquent

$$a = a_1 - \frac{2}{p} b_1, \quad b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} b_1).$$

qu'en qualité « de nombre de nature particulière », nous avons ajouté à l'ensemble des nombres réels ordinaires, le nombre E , qui est par définition la racine de l'équation (1) avec un discriminant *positif*. Dans ce cas, dans le domaine des nombres de la forme $a + bE$ l'équation (1) aura au moins trois racines différentes : 2 racines réelles (10) (car $\Delta = p^2 - 4q > 0$) et une racine E (en réalité il y aura même quatre racines).

On démontre aussi facilement que toutes les équations à discriminant négatif restent insolubles (1). Nous ferons par la suite abstraction de la question de la résolution des équations du deuxième degré et nous ne considérerons les nombres complexes que comme certains nombres de nature particulière, proches des nombres ordinaires quant aux règles des opérations algébriques et ayant, comme nous le verrons, d'intéressantes applications en géométrie.

De ce nouveau point de vue, l'élargissement de l'ensemble des nombres réels par addition d'un nouvel élément E qui satisfait par définition à l'équation (1) apparaît légitime indépendamment du signe du discriminant Δ de cette équation. Toutes les combinaisons linéaires possibles

$$a + bE, \quad \text{où } a, b \text{ sont réels} \quad (23)$$

nous les appellerons *les nombres complexes très généralisés*.

L'addition, la soustraction et la multiplication seront effectuées d'après les règles habituelles suivantes

$$\left. \begin{aligned} (a + bE) + (c + dE) &= (a + c) + (b + d)E, \\ (a + bE) - (c + dE) &= (a - c) + (b - d)E, \\ (a + bE) \cdot (c + dE) &= ac + adE + bcE + bdE^2 = \\ &= (ac - qbd) + (ad + bc - pbd)E. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

(1) Menons la démonstration correspondante pour le cas particulier des équations de forme $x^2 + c = 0$, $c > 0$. Du fait que $E^2 = -pE - q$, s'ensuit que

$$(a + bE)^2 = (a^2 - qb^2) + (2ab - pb^2)E;$$

c'est pourquoi $(a + bE)^2$ sera un nombre réel seulement lorsque $2ab - pb^2 = 0$, c'est-à-dire $b = 0$ ou $b = 2/p \cdot a$. Mais ou bien $(a + bE)^2 = a^2 > 0$ (si $b = 0$), ou bien

$$(a + bE)^2 = a^2(1 - 4q/p^2) > 0$$

(si $b = 2/p \cdot a$; ici on utilise le fait que par hypothèse $p^2 - 4q > 0$). Ainsi pour aucune valeur de $x = a + bE$ le nombre x^2 ne peut être égal au nombre négatif $-c$. De manière analogue, peut être démontrée la non résolution dans le domaine des nombres de forme $a + bE$ de l'équation arbitraire du 2^e degré à discriminant négatif.

Il n'est pas difficile de voir que toutes les lois concernant l'addition, la soustraction et la multiplication des nombres complexes très généralisés coïncideront avec les lois des opérations sur les nombres réels ordinaires. Il n'en est pas tout à fait de même pour la division (dans le paragraphe précédent nous avons essentiellement utilisé pour cette opération le caractère négatif du discriminant $\Delta = p^2 - 4q$) ; et nous laisserons pour le moment la question de la division des nombres complexes très généralisés.

Il y a de nombreux systèmes de nombres complexes très généralisés : à chaque paire de nombres réels p et q on peut associer une équation de second degré ⁽¹⁾ et par conséquent son système.

Cependant, comme nous le savons déjà d'après le paragraphe précédent, tous les systèmes numériques semblables qui correspondent aux paires p et q tels que

$$\Delta = p^2 - 4q < 0,$$

ne diffèrent pas fondamentalement parmi : les nombres de forme $a + bE$ on trouve toujours un nombre $i = \alpha + \beta E$ tel que $i^2 = -1$ (on doit seulement pour cela poser $\alpha = p/\sqrt{-\Delta}$, $\beta = 2/\sqrt{-\Delta}$; ainsi $E = \alpha_1 + \beta_1 i$, où $\alpha_1 = -p/2$, $\beta_1 = \sqrt{-\Delta}/2$), on peut alors identifier le nombre $a + bE$ au nombre complexe ordinaire $a_1 + b_1 i$ (où $a_1 = a - pb/2$, $b_1 = \sqrt{-\Delta}/2 \cdot b$). De même dans le cas où

$$\Delta = p^2 - 4q = 0,$$

parmi les nombres de la forme $a + bE$ se trouve le nombre $\varepsilon = \alpha + \beta E$ tel que $\varepsilon^2 = 0$: on peut, par exemple, poser $\varepsilon = p/2 + E$; on a alors

$$\varepsilon^2 = \frac{p^2}{4} + pE + (-pE - q) = \frac{p^2}{4} - q = 0.$$

C'est pourquoi l'ensemble $a + bE$, pour $p^2 - 4q = 0$, peut toujours être ramené à la forme suivante qu'on appelle nombre dual) :

$$a + b\varepsilon, \quad a, b \text{ réels}, \quad \varepsilon^2 = 0. \quad (25)$$

Il convient d'identifier le nombre $a + bE$ au nombre dual $a_1 + b_1\varepsilon_1$, où $a_1 = a - p/2$, $b_1 = b$.

⁽¹⁾ On exprime le fait que les nombres complexes très généralisés peuvent s'additionner, se soustraire et se multiplier selon les lois habituelles de ces opérations mais qu'ils ne puissent absolument pas se diviser entre eux en disant que ces chiffres forment un anneau.

Enfin, pour

$$\Delta = p^2 - 4q > 0$$

$e = \alpha + bE$, est le nombre complexe tel que $e^2 = +1$; effectivement, si on pose

$$e = \frac{p}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\Delta}} E, \quad E = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} e,$$

on aura :

$$e^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\Delta}} E \right)^2 = \frac{p^2}{\Delta} + \frac{4p}{\Delta} E + \frac{2}{\Delta} (-pE - q) = 1.$$

Ceci permet de ramener notre système de nombres complexes très généralisés à ce qu'on appelle les **nombres doubles**.

$$a + be, \quad a, b \text{ réels}, \quad e^2 = 1; \quad (26)$$

il suffit d'identifier le nombre $a + bE$ au nombre double :

$$a_1 + b_1 e = \left(a - b \frac{p}{2} \right) + \left(b \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) e.$$

Et ainsi nous voyons qu'en fait tous les systèmes de nombres complexes très généralisés sont ramenés aux trois systèmes différents suivants ⁽¹⁾ :

<i>nombres complexes ordinaires</i>	$a + bi,$	$i^2 = -1 ;$
<i>nombres duals</i>	$a + b\varepsilon,$	$\varepsilon^2 = 0 ;$
<i>nombres doubles</i>	$a + be,$	$e^2 = 1.$

Les nombres complexes ordinaires sont étroitement liés à la question de la résolution des équations du deuxième degré et de degrés plus élevés. Ils jouent un rôle fondamental en algèbre et en analyse mathématique. Il n'est pas aisé de remonter à l'origine de ces nombres. On pense que ce sont des mathématiciens italiens du XVI^e siècle qui, les premiers commencèrent à les utiliser ; Girolamo Cardano (1501-1576) et Raphaël Bombelli (né en 1530 ; son « Algèbre » parut en 1572) ; cependant on peut déjà trouver ces nombres,

⁽¹⁾ De façon plus précise, pour $\Delta < 0$ les nombres complexes très généralisés sont isomorphes des nombres complexes ordinaires, pour $\Delta = 0$ — des nombres duals, pour $\Delta < 0$ — des nombres doubles (comparez note de bas de page 10). On appelle parfois ces nombres, nombres complexes *elliptiques* pour $\Delta < 0$, *nombres complexes paraboliques* pour $\Delta = 0$, *nombres complexes hyperboliques* pour $\Delta < 0$.

de façon assez confuse dans des travaux antérieurs ; et, encore longtemps après Cardona et Bombelli d'excellents mathématiciens n'avaient pas une notion claire des nombres complexes. Par contre, les nombres duals et doubles n'ont aucun lien avec la théorie des équations du deuxième degré à coefficients réels et d'une façon générale relativement peu de liens avec l'algèbre ; les applications essentielles de ces nombres se trouvent en géométrie ⁽¹⁾. Les nombres duals, ont été sans doute étudiés pour la première fois par un géomètre allemand renommé, de la fin du siècle dernier et du début de ce siècle, Eugène Studi (1862-1930). Les nombres doubles ont été introduits par un contemporain de Studi, le géomètre anglais William Clifford (1845-1879).

Les applications essentielles des nombres doubles appartiennent à la géométrie non euclidienne de Lobatchewski ⁽²⁾ ; c'est pourquoi dans notre exposé, nous concentrerons en premier lieu notre attention sur les nombres ordinaires et sur les nombres duals.

§ 4. NOMBRES DUAUX

L'addition, la soustraction et la multiplication des nombres duaux sont définies par les formules :

$$\left. \begin{aligned} (a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) &= (a + c) + (b + d)\varepsilon, \\ (a + b\varepsilon) - (c + d\varepsilon) &= (a - c) + (b - d)\varepsilon, \\ (a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) &= ac + (ad + bc)\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

La dernière de ces formules montre que le produit du nombre duals $z = a + b\varepsilon$ par un autre nombre $z_1 = c + d\varepsilon$ sera réel seulement dans le cas où $ad + bc = 0$; si $a \neq 0$, alors la dernière égalité peut s'écrire sous la forme $b/a = -d/c$. En particulier le produit des nombres

$$z = a + b\varepsilon \quad \text{et} \quad \bar{z} = a - b\varepsilon$$

⁽¹⁾ Quelques applications de ces systèmes de nombres complexes se trouvent aussi dans la théorie des nombres.

⁽²⁾ Et à quelques autres géométries différentes de la géométrie d'Euclide (par exemple à ce qu'on appelle la géométrie pseudoeuclidienne, qui joue un rôle fondamental dans la théorie physique de la relativité. La question du lien des nombres complexes avec les géométries non euclidiennes est étudiée d'un point de vue général dans l'article : I. M. YAGLOM, « Travaux du séminaire sur l'analyse vectorielle et tensorielle » ; VII, M. L., 1949, p. 276-318 ; il convient de préciser que cet article n'est pas un article de vulgarisation et s'adresse à un lecteur averti.

est réel :

$$z \cdot \bar{z} = (a + b\varepsilon)(a - b\varepsilon) = a^2. \quad (28)$$

On appelle $\bar{z} = a - b\varepsilon$, *nombre conjugué* du nombre $z = a + b\varepsilon$ (et réciproquement, z est le conjugué de \bar{z}) ; la racine carrée a du produit $z\bar{z}$ (qui coïncide avec la demi-somme $(z + \bar{z})/2$ des nombres conjugués z et \bar{z}) est appelée *module* du nombre dual z et on la représente par $|z|$ (remarquons que le module d'un nombre dual peut même être négatif !). La somme $z + \bar{z} = 2a$ de deux nombres conjugués est réelle ; la différence $z - \bar{z} = 2b\varepsilon$ est un nombre purement imaginaire (c'est-à-dire qui ne diffère de z que par un facteur réel). Remarquons aussi que, en complète analogie avec les nombres complexes ordinaires, le nombre dual z est réel lorsque, et seulement lorsqu'il coïncide avec son conjugué \bar{z} . Les formules (7) elles aussi restent entièrement valables pour les nombres duaux.

Nous pouvons maintenant écrire la règle de division du nombre dual $z = a + b\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \frac{c + d\varepsilon}{a + b\varepsilon} &= \frac{(c + d\varepsilon)(a - b\varepsilon)}{(a + b\varepsilon)(a - b\varepsilon)} = \frac{ca + (-cb + da)\varepsilon}{a^2} \\ &= \frac{c}{a} + \frac{-cb + da}{a^2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (29)$$

Ainsi, pour que la division d'un nombre dual soit possible, on voit qu'il est indispensable que le module $|z| = a$ de ce nombre soit différent de 0 ; et, à la différence des nombres complexes ordinaires, un nombre dual de module nul peut lui-même être différent de zéro. Dans les cas où la non division d'un nombre de module nul est gênante, nous pourrions considérer que les quotients $1/\varepsilon$ et $1/0$ sont des nombres de nature particulière, que nous conviendrons de représenter par ω et ∞ ; considérons aussi tous les nombres possibles de forme $c\omega$, où $c \neq 0$ est réel, n'importe quel nombre dual aura alors comme inverse :

$$\frac{1}{b\varepsilon} = \frac{1}{b} \omega \quad \text{pour} \quad b \neq 0; \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

Les règles des opérations sur le symbole ∞ sont définies ici par les mêmes formules (8) que plus haut (et le nombre z dans ces formules peut aussi

être un nombre de la forme $c\omega$) ; les lois des opérations sur les nombres $a\omega$ sont définies ainsi ⁽¹⁾ :

$$\left. \begin{aligned} (a + b\varepsilon) + c\omega &= c\omega, & (a + b\varepsilon) - c\omega &= (-c)\omega, \\ (a + b\varepsilon)c\omega &= (ac)\omega, \\ \frac{c\omega}{a + b\varepsilon} &= \frac{c}{a}\omega, & \frac{a + b\varepsilon}{c\omega} &= \frac{a}{c}\varepsilon, \\ c\omega \pm d\omega &= (c \pm d)\omega, & c\omega d\omega &= \infty. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Posons aussi

$$\overline{c\omega} = -c\omega, \quad \overline{\infty} = \infty ; \quad (30 a)$$

l'égalité $\overline{\overline{z}} = z$ et toutes les règles (7) restent valables lorsqu'on ajoute les nombres $c\omega$, ∞ à l'ensemble des nombres duaux. Les expressions $0/0$, ∞/∞ et $0 \cdot \infty$ restent sans signification, de plus il est naturel de poser

$$(az + b)/(cz + d)$$

pour $z = \infty$ égal à a/c [cf. la note ⁽¹⁾, p. 4 ; pour $z = k\omega$ la fraction $(az + b)/(cz + d)$ est égale à $(ak + b\varepsilon)/(ck + d\varepsilon)$, puisque $k\omega = k/\varepsilon$].

Le nombre $c\varepsilon$ de module nul peut être caractérisé par l'existence d'un nombre dual $z(= d\varepsilon)$ différent de zéro, dont le produit avec le nombre $c\varepsilon$ est égal à zéro :

$$c\varepsilon \cdot d\varepsilon = (cd)\varepsilon^2 = 0. \quad (31)$$

C'est pourquoi on appelle ces nombres *diviseurs de zéro*.

⁽¹⁾ Nous utilisons ici la possibilité d'assimiler

$$\begin{aligned} \frac{c\omega}{a + b\varepsilon} &= \frac{c/\varepsilon}{a + b\varepsilon} \\ \frac{c}{\varepsilon(a + b\varepsilon)} &= \frac{c}{a\varepsilon}, \end{aligned}$$

et de considérer égales

$$\begin{aligned} \frac{a + b\varepsilon}{c\omega} &= \frac{a + b\varepsilon}{c/\varepsilon} \\ \frac{\varepsilon(a + b\varepsilon)}{c} &= \frac{a\varepsilon}{c}. \end{aligned}$$

Les nombres duaux de module a non nul peuvent aussi s'écrire sous la forme, proche de « la forme trigonométrique » (13) du nombre complexe :

$$a + b\varepsilon = a \left(1 + \frac{b}{a} \varepsilon \right) = r(1 + \varepsilon\varphi). \quad (32)$$

comme précédemment, $r = a$ est le module du nombre $z = a + b\varepsilon$; quant au rapport $b/a = \varphi$ on l'appelle *argument* de ce nombre et on le désigne par $\text{Arg } z$ (r peut être un nombre réel arbitraire, différent de zéro ; φ est un nombre réel arbitraire). Il est évident que les nombres réels $a = a + 0 \cdot \varepsilon$ sont caractérisés par la valeur nulle de leurs arguments ; les nombres duaux conjugués $z = a + b\varepsilon$ et $\bar{z} = a - b\varepsilon$ ont le même module et des arguments de signes opposés φ et $-\varphi$.

La forme (32) des nombres duaux est très commode pour la multiplication et la division. En effet,

$$\begin{aligned} r(1 + \varepsilon\varphi) \cdot r_1(1 + \varepsilon\varphi_1) &= rr_1(1 + \varepsilon\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi\varphi_1) \\ &= rr_1[1 + \varepsilon(\varphi + \varphi_1)]; \end{aligned} \quad (33)$$

par conséquent, *le module du produit de deux nombres duaux est égal au produit des modules des facteurs* ⁽¹⁾, *et l'argument du produit à la somme des arguments* (cf. plus haut, p. 7). D'où *le module du quotient de deux nombres duaux est égal au quotient des modules de ces nombres, et l'argument du quotient à la différence des arguments correspondants*

$$\frac{z_1}{z} = \frac{r_1(1 + \varepsilon\varphi_1)}{r(1 + \varepsilon\varphi)} = \frac{r_1}{r} [1 + \varepsilon(\varphi_1 - \varphi)]. \quad (34)$$

Enfin, on déduit aussi de ces règles, les lois permettant d'élever un nombre dual à un degré quelconque et d'en extraire sa racine :

$$\left. \begin{aligned} [r(1 + \varepsilon\varphi)]^n &= r^n(1 + \varepsilon n\varphi); \\ \sqrt[n]{r(1 + \varepsilon\varphi)} &= \sqrt[n]{r} \left(1 + \varepsilon \frac{\varphi}{n} \right) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

(de la dernière formule, il s'ensuit que la racine d'ordre impair d'un nombre

⁽¹⁾ Cette proposition reste valable même dans le cas où le module d'un ou des deux facteurs est nul (car si $|z| = 0$, alors $|zz_1| = 0$; ainsi, par exemple $ce(a + b\varepsilon) = (ac)\varepsilon$).

dual pour $r \neq 0$ est déterminée de la même façon ; la racine paire elle n'existe pas, si $r < 0$, et a deux valeurs, si $r > 0$ (1)).

§ 5**. NOMBRES DOUBLES

Suivant ce qui a été exposé précédemment nous dirons que les nombres z et \bar{z} sont conjugués s'ils sont de la forme :

$$z = a + be \quad \text{et} \quad \bar{z} = a - be.$$

La somme $z + \bar{z} = 2a$ et le produit $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$ des nombres doubles conjugués sont réels ; la racine carrée du nombre $|z\bar{z}| = |a^2 - b^2|$ dont le signe coïncide avec le signe du plus grand en valeur absolue des nombres réels a, b , se nomme module du nombre $z = a + be$ et est représenté par $|z|$. Il est aisé de vérifier que, pour les nombres doubles, toutes les formules (7) restent valables ; de plus, il est clair que l'égalité $z = \bar{z}$ caractérise les nombres réels $a + 0 \cdot e = a$, et l'égalité $z = -\bar{z}$ les nombres purement imaginaires $0 + be = be$.

L'addition, la soustraction, la multiplication et la division des nombres doubles sont déterminées par les formules :

$$\left. \begin{aligned} (a + be) \pm (c + de) &= (a \pm c) + (b \pm d)e, \\ (a + be) \cdot (c + de) &= (ac + bd) + (ad + bc)e, \\ \frac{c + de}{a + be} &= \frac{(c + de)(a - be)}{(a + be)(a - be)} = \frac{(ca - db) + (-cb + da)e}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{ca - db}{a^2 - b^2} = \frac{-cb + da}{a^2 - b^2} e. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Donc ici aussi la division de $z = a + be$ n'est possible que dans le cas où $|z| = \sqrt{|a^2 - b^2|} \neq 0$. Les nombres doubles $a \pm be$, dont le module est égal à zéro, s'appellent « diviseurs de zéro » (remarquons que :

$$(a + be) \cdot (a - be) = a^2 - b^2 = 0.$$

(1) Il n'est pas difficile de voir qu'il est impossible d'extraire la racine d'un ordre entier $n > 1$ d'un nombre dual $z = be$ dont le module $|z|$ est égal à zéro (d'un nombre, qui est diviseur de 0).

Dans certains cas, il est commode de considérer les quotients :

$$\frac{1}{1+e} = \omega_1, \quad \frac{1}{1-e} = \omega_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{0} = \infty$$

comme des nombres de nature nouvelle ; et il apparaît indispensable d'élargir encore la notion de nombre double en introduisant complémentairement, le produit $c\omega_1$ et $c\omega_2$ des nouveaux nombres ω_1 et ω_2 par tous les nombres réels c possibles et les quotients :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1-e}{1+e} = \sigma_1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1+e}{1-e} = \sigma_2.$$

Les règles des opérations sur les symboles $c\omega_1$, $c\omega_2$, ∞ , σ_1 et σ_2 sont définies par les formules (8) et par l'ensemble des relations de même nature (30) ; par exemple ⁽¹⁾ :

$$\left. \begin{aligned} (a+be) \pm c\omega_1 &= (\pm c)\omega_1, \\ (a+be) \cdot c\sigma_2 &= (a+b)c\sigma_2, \\ \frac{a+be}{c\omega_2} &= \frac{a-b}{c}(1-e), \\ \frac{a+be}{c\sigma_1} &= \frac{a+b}{c}\sigma_2, \\ a\omega_1 \cdot b\omega_2 &= \infty, \quad a\omega_1 \cdot b\sigma_2 = ab\omega_2, \quad a\omega_1 \cdot b\omega_1 = \frac{ab}{2}\omega_1 \end{aligned} \right\} (37)$$

et ainsi de suite...

⁽¹⁾ Car il est naturel de penser que, par exemple

$$(a+be)c\sigma_2 = \frac{(a+be)(c+ce)}{1-e} = \frac{(a+b)c(1+e)}{1-e} = (a+b)c \cdot \sigma_2,$$

$$\frac{a+be}{c\omega_2} = \frac{(a+be)(1-e)}{c} = \frac{a-b}{c}(1-e),$$

$$\frac{a+be}{c\sigma_1} = \frac{(a+be)(1+e)}{c} = \frac{(a+b)(1+e)}{c(1-e)} = \frac{a+b}{c}\sigma_2,$$

$$a\omega_1 \cdot b\omega_1 = \frac{ab}{(1+e)^2} = \frac{ab}{2(1+e)} = \frac{ab}{2}\omega_1.$$

Il est naturel de poser aussi

$$\overline{c\omega_1} = c\omega_2, \quad \overline{c\omega_2} = c\omega_1, \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_2, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_1, \quad \overline{\infty} = \infty, \quad (37 a)$$

ce qui mène à l'identité $\bar{\bar{z}} = z$ pour l'ensemble des nombres doubles élargi, comme nous l'avons montré, et à toutes les relations (7).

Les nombres doubles de module non nul peuvent aussi s'écrire sous une forme analogue aux formes (13) et (32) des nombres complexes ordinaires et des nombres duaux, soit

$$r = \pm \sqrt{|a^2 - b^2|}$$

le module $|z|$ du nombre double ; de plus [cf. (13) et (13 a)]

$$z = a + be = r \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} e \right).$$

D'après la définition du module, il s'ensuit que

$$\left(\frac{a}{r} \right)^2 - \left(\frac{b}{r} \right)^2 = \pm 1$$

et que la plus grande (en valeur absolue) des fractions a/r et b/r est positive.

D'où

$$\frac{a}{r} = \operatorname{ch} \varphi, \quad \frac{b}{r} = \operatorname{sh} \varphi, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{r} = \operatorname{sh} \varphi, \quad \frac{b}{r} = \operatorname{ch} \varphi, \quad (38)$$

où φ est un certain nombre [défini par les formules (38), et $\operatorname{ch} \varphi$ et $\operatorname{sh} \varphi$ sont le **cosinus hyperbolique** et le **sinus hyperbolique** de l'argument φ (1)].

Ainsi, nous avons

$$z = r (\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi) \quad \text{ou} \quad z = r (\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi). \quad (39)$$

φ s'appelle l'**argument** du nombre double z et on le représente par $\operatorname{Arg} z$ (2).

(1) Au sujet de ces fonctions on peut consulter V. G. Chervatov, *Fonctions hyperboliques*, 1958.

(2) Dans certains cas il est commode de considérer que l'argument des nombres doubles ayant la 2^e des formes (39) est un nombre complexe (ordinaire) :

$$\operatorname{Arg} \left\{ r (\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi) \right\} = \varphi - i \frac{\pi}{2}.$$

Cette convention est utile, car dans ce cas on a toujours :

$$z = |z| [\operatorname{ch} (\operatorname{Arg} z) + e \operatorname{sh} (\operatorname{Arg} z)]$$

puisque

$$\operatorname{ch} \left(\varphi - i \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sh} \varphi, \quad \operatorname{sh} \left(\varphi - i \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{ch} \varphi ;$$

Voir par exemple, l'article de V. L. Goncharov, « Fonctions élémentaires d'une variable complexe » dans l'*Encyclopédie de Mathématiques élémentaires*, t. III, 1952.

La forme (39) des nombres doubles est très utile dans les cas où l'on doit multiplier deux ou plusieurs de ces nombres. En effet, des formules d'addition des fonctions hyperboliques il résulte que

$$\left. \begin{aligned} r (\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi) \cdot r_1 (\operatorname{ch} \varphi_1 + e \operatorname{sh} \varphi_1) &= \\ & rr_1 [\operatorname{ch} (\varphi + \varphi_1) + e \operatorname{sh} (\varphi + \varphi_1)] \\ r (\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi) \cdot r_1 (\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1) &= \\ & rr_1 [\operatorname{ch} (\varphi + \varphi_1) + e \operatorname{sh} (\varphi + \varphi_1)]; \\ r (\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi) \cdot r_1 (\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1) &= \\ & rr_1 [\operatorname{sh} (\varphi + \varphi_1) + e \operatorname{ch} (\varphi + \varphi_1)]. \end{aligned} \right\} (40)$$

ainsi, le module du produit de 2 nombres doubles est égal au produit des modules des facteurs, et l'argument du produit est égal à la somme des arguments; de plus, le produit a la 1^{re} ou la 2^e des formes (39) suivant que les facteurs ont une seule et même forme ou des formes différentes. Des formules (40) découlent immédiatement les règles de division des nombres doubles :

$$\begin{aligned} \frac{r_1 (\operatorname{ch} \varphi_1 + e \operatorname{sh} \varphi_1)}{r (\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi)} &= \frac{r_1 (\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1)}{r (\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi)} \\ &= \frac{r_1}{r} [\operatorname{ch} (\varphi_1 - \varphi) + e \operatorname{sh} (\varphi_1 - \varphi)]; \\ \frac{r_1 (\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1)}{r (\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi)} &= \frac{r_1 (\operatorname{ch} \varphi_1 + e \operatorname{sh} \varphi_1)}{r (\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi)} \\ &= \frac{r_1}{r} [\operatorname{sh} (\varphi_1 - \varphi) + e \operatorname{ch} (\varphi_1 - \varphi)]. \end{aligned} \quad (41)$$

Des formules (40) on déduit aussi les règles, qui permettent d'élever un nombre double à n'importe quelle puissance positive n et d'en extraire la racine de degré n :

$$\begin{aligned} [r (\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi)]^n &= r^n (\operatorname{ch} n\varphi + e \operatorname{sh} n\varphi), \\ [r (\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi)]^n &= \begin{cases} r^n (\operatorname{sh} n\varphi + e \operatorname{ch} n\varphi) & \text{pour } n \text{ impair,} \\ r^n (\operatorname{ch} n\varphi + e \operatorname{sh} n\varphi) & \text{pour } n \text{ pair,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{r(\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r} \left(\operatorname{ch} \frac{\varphi}{n} + e \operatorname{sh} \frac{\varphi}{n} \right) & \text{pour } n \text{ impair,} \\ \left. \begin{aligned} &\sqrt[n]{r} \left(\operatorname{ch} \frac{\varphi}{n} + e \operatorname{sh} \frac{\varphi}{n} \right) \\ &\sqrt[n]{r} \left(\operatorname{sh} \frac{\varphi}{n} + e \operatorname{ch} \frac{\varphi}{n} \right) \end{aligned} \right\} & \text{pour } n \text{ pair,} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{r(\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r} \left(\operatorname{sh} \frac{\varphi}{n} + e \operatorname{ch} \frac{\varphi}{n} \right) & \text{pour } n \text{ impair,} \\ & \text{n'existe pas pour } n \text{ pair.} \end{cases} \quad (42)$$

§ 6**. NOMBRES HYPERCOMPLEXES

Les nombres étudiés précédemment sont formés de la façon suivante : à l'ensemble des nombres réels on ajoute l'élément E , dont le carré est, par définition, égal à :

$$E^2 = -pE - q; \quad (43)$$

on considère ensuite toutes les sommes possibles de forme (23), dont la multiplication, la soustraction et la division sont définies par les formules (24).

Les nombres hypercomplexes sont une généralisation des nombres complexes obtenue par adjonction à l'ensemble des nombres réels de certains éléments complexes E_1, E_2, \dots, E_n . Ils sont de forme :

$$Z = a_0 + a_1 E_1 + a_2 E_2 + \dots + a_n E_n, \\ a_0, a_1, \dots, a_n \text{ réels} \quad (44)$$

La somme, la différence et le produit des nombres hypercomplexes sont définis par les formules :

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1 E_1 + \dots + a_n E_n) \pm (b_0 + b_1 E_1 + \dots + b_n E_n) \\ &= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) E_1 + \dots + (a_n \pm b_n) E_n, \\ &(a_0 + a_1 E_1 + \dots + a_n E_n) \cdot (b_0 + b_1 E_1 + \dots + b_n E_n) = \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 E_1 + \dots + a_0 b_n E_n + \\ &+ a_1 b_0 E_1 + a_1 b_1 E_1^2 + \dots + a_1 b_n E_1 E_n + \dots \\ &\dots + a_n b_0 E_n + a_n b_1 E_n E_1 + \dots + a_n b_n E_n^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Pour que le produit de deux nombres hypercomplexes soit un nombre de même nature, il est indispensable d'établir une table de multiplication des éléments complexes E_1, E_2, \dots, E_n ⁽¹⁾ :

$$E_i \cdot E_j = p_0^{(i,j)} + p_1^{(i,j)} E_1 + \dots + p_n^{(i,j)} E_n, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (46)$$

c'est-à-dire de se donner $n^2(n+1)$ nombres réels $p_k^{(i,j)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n$. Si $n = 1$, alors $n^2(n+1) = 2$ et les nombres $-q$ et $-p$ jouent le rôle des nombres $p_k^{(i,j)}$, p et q étant les coefficients de l'équation (1), à laquelle satisfait l'élément complexe (unique) E .

Pour $n > 1$ le système de nombres hypercomplexes sera, de façon générale, « non commutatif » et « non associatif », c'est-à-dire que le produit $Z_1 \cdot Z_2$ sera, comme il se doit, différent du produit $Z_2 \cdot Z_1$, et le produit $(Z_1 Z_2) Z_3$ — du produit $Z_1 (Z_2 \cdot Z_3)$. La commutativité et l'associativité exigent des nombres $p_k^{(i,j)}$ certaines conditions (comme par exemple, si $E_i E_j = E_j E_i$, alors, évidemment, $p_k^{(i,j)} = p_k^{(j,i)}$ pour n'importe quelle valeur de k), conditions qui en général ne sont pas satisfaites.

La théorie générale des nombres hypercomplexes constitue un chapitre de l'algèbre. En géométrie, on utilise principalement les systèmes de nombres hypercomplexes dans lesquels à chaque nombre Z on peut associer de façon univoque un conjugué \bar{z} de même module $|Z|$ ayant les mêmes propriétés que dans le cas des nombres complexes (c'est-à-dire $z = Z$, $|Z|^2 = Z\bar{Z}$ réel, $|Z_1 Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$, et obéissant aux équations (7)). Il a été démontré que *le nombre d'éléments complexes pour ces systèmes de nombres hypercomplexes ne peut être égal qu'à 1, 3 ou 7* ; et dans le cas $n = 3$ le système sera toujours non commutatif, dans le cas $n = 7$ — il sera de plus non associatif. Pour $n = 1$ nous arrivons aux nombres étudiés plus haut, ordinaires, duals et doubles. Pour $n = 3$ les conditions énoncées conduisent au système des

⁽¹⁾ On ne comprend pas toujours le nombre 1 dans la définition des nombres hypercomplexes, et le nombre hypercomplexe se définit :

$$Z = a_0 E_0 + a_1 E_1 + \dots + a_n E_n \quad (44')$$

la table de la multiplication des éléments complexes est alors définie par les formules

$$E_i \cdot E_j = p_0^{(i,j)} E_0 + p_1^{(i,j)} E_1 + \dots + p_n^{(i,j)} E_n, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (46')$$

Si l'élément complexe E_0 est tel que $E_0 E_i = E_0 E_0 = E_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, on peut le représenter par 1 et écrire les nombres hypercomplexes sous la forme (44).

La forme (44') des nombres hypercomplexes est aussi pratique dans le cas des nombres doubles $z = a + be$, dont l'étude est souvent basée sur deux éléments complexes $e_1 = (1 + e)/2$ et $e_2 = (1 - e)/2$. Il est clair que n'importe quel nombre double peut s'écrire sous la forme $z = a_1 e_1 + a_2 e_2$, où « la table de multiplication » des éléments de base a une forme extraordinairement simple : $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = 0$. Nous n'utiliserons jamais par la suite cette forme des nombres doubles.

quaternions (du latin quatuor-quatre), introduit par le célèbre mathématicien anglais (plus exactement irlandais) du XIX^e siècle William John Hamilton (1805-1865) :

$$\left. \begin{aligned} Z &= a + bi + cj + dk, & i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= -ji = k, & jk = -kj = i, & ki = -ik = j, \\ \bar{Z} &= a - bi - cj - dk, & |Z|^2 = Z\bar{Z} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

et aux systèmes parents des quaternions, **pseudoquaternions**, **quaternions dégénérés** et **quaternions doublement dégénérés**.

$$\begin{aligned} Z &= a + bi + ce + df, & Z &= a + bi + c\varepsilon + d\eta, \\ Z &= a + be + c\varepsilon + d\zeta & \text{et} & Z = a + b\varepsilon + c\eta + d\eta, \end{aligned} \quad (48)$$

pour lesquels les tables de multiplication des éléments complexes ont la forme

	i e f		i ε η		e ε ζ
i	-1 f -ε	i	-1 η -ε	e	1 ζ ε
e	-f 1 -i	ε	-η 0 0	ε	-ζ 0 0
f	e i 1	η	ε 0 0	ζ	-ε 0 0
			ε η ζ		
		ε	0 ζ 0		
	et	η	-ζ 0 0		
		ζ	0 0 0		

(49)

(c'est-à-dire $i^2 = ii = -1$, $ie = f$, $if = -e$, etc...), quant aux nombres hypercomplexes conjugués et aux modules, ils sont définis par les formules

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z} &= a - bi - ce - df, & |Z|^2 = Z\bar{Z} &= a^2 + b^2 - c^2 - d^2; \\ Z &= a - bi - c\varepsilon - d\eta, & |Z|^2 = Z\bar{Z} &= a^2 + b^2; \\ \text{et} \quad \bar{Z} &= a - be - c\varepsilon - d\zeta, & |Z|^2 = Z\bar{Z} &= a^2 - b^2 \\ \bar{Z} &= a - b\varepsilon - c\eta - d\zeta, & |Z|^2 = Z\bar{Z} &= a^2. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Enfin, pour $n = 7$ nous arrivons au système des octets (du latin octo-huit), étudié pour la première fois par le célèbre géomètre anglais de la fin du XIX^e siècle, Arthur Kiel (1821-1895),

$$Z = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 \quad (51)$$

avec la table de multiplication des éléments complexes

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	— 1	i_3	— i_2	i_5	— i_4	— i_7	i_6
i_2	— i_3	— 1	i_1	i_6	i_7	— i_4	— i_5
i_3	i_2	— i_1	— 1	i_7	— i_6	i_5	— i_4
i_4	— i_5	— i_6	— i_7	— 1	i_1	i_2	i_3
i_5	i_4	— i_7	i_6	— i_1	— 1	— i_3	i_2
i_6	i_7	i_4	— i_5	— i_2	i_3	— 1	— i_1
i_7	— i_6	i_5	i_4	— i_3	— i_2	i_1	— 1

(52)

et à la définition suivante du nombre conjugué et du module :

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= a_0 - a_1i_1 - a_2i_2 - a_3i_3 - a_4i_4 - a_5i_5 - a_6i_6 - a_7i_7, \\ |Z|^2 &= Z\bar{Z} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2, \end{aligned} \quad (53)$$

mais aussi à plusieurs systèmes de nombres hypercomplexes apparentés aux systèmes octets que nous pouvons appeler, **pseudo octet et octet dégénéré**. Tous ces systèmes de nombres hypercomplexes ont une application en géométrie, cependant, l'exposé des questions relatives à ces sujets nous emmènerait trop loin (1).

(1) Voir à ce propos, par exemple, B. A. Rosenfeld et I. M. Yaglom.

CHAPITRE II

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

§ 7. NOMBRES COMPLEXES ORDINAIRES CONSIDÉRÉS COMME POINTS D'UN PLAN

Le développement de la théorie des nombres complexes est lié pour une part importante à l'interprétation géométrique des nombres complexes ordinaires pris comme points d'un plan, mentionnés croit-on pour la première fois, par un arpenteur danois du XVIII^e siècle, Karl Vessel (1777-1885), mais introduits en mathématique, par les travaux des célèbres mathématiciens Karl F. Gauss (1777-1855) et Auguste Koch (1789-1857). Cette interprétation consiste à identifier un nombre complexe à un point d'un plan de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y ou des coordonnées polaires r, φ

$$z = x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

(fig. 1). Ainsi, aux nombres réels

$$z = x + 0 \cdot y \\ (= r (\cos 0 + i \sin 0))$$

correspondent les points de l'axe x (axe réel o); aux nombres de module

$r = 1$ correspondent les points du cercle S dont le centre est à l'origine O

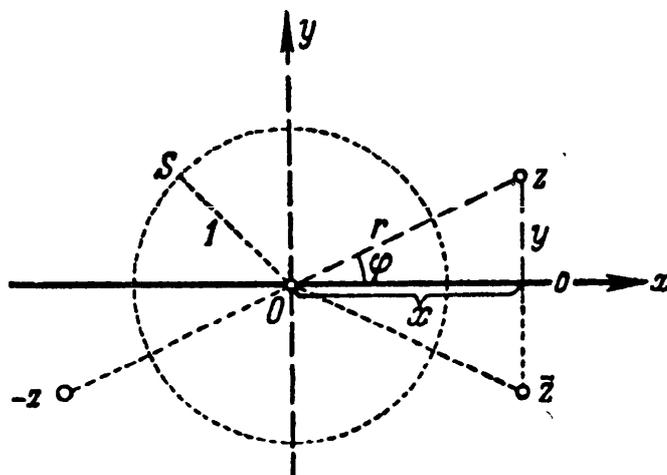


FIG. 1.

des coordonnées, et de rayon 1 (cercle unité). Aux nombres complexes conjugués

$$z = x + iy (= r (\cos \varphi + i \sin \varphi))$$

et

$$\bar{z} = x - iy (= r (\cos (-\varphi) + i \sin (-\varphi)))$$

correspondent des points, symétriques par rapport à la droite o . Par la suite, nous désignerons souvent le point correspondant au nombre complexe z par ce même signe z ; et les égalités

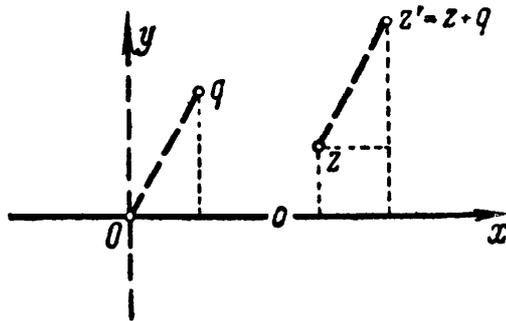


FIG. 2.

$$z' = -z \quad (1)$$

et

$$z' = \bar{z} \quad (2)$$

peuvent être considérées comme notations des transformations ponctuelles déterminées qui associent à chaque point z un nouveau

point z' . Les transformations (1) et (2) représentent respectivement **une symétrie par rapport au point O** et **une symétrie par rapport à la droite o** .

Soit les nombres complexes déterminés (points) $q = a + ib$ et $p = t$ (cas $\alpha + i \sin \alpha$) l'égalité

$$z' = z + q \quad ((x' + iy') = (x + iy) + (a + ib)) \quad (3)$$

signifie que $x' = x + a$, $y' = y + b$, c'est-à-dire que le vecteur zz' (vecteur dont l'origine est au point z et l'extrémité au point z') coïncide avec le vecteur Oq (interprétation géométrique de l'addition des nombres complexes). C'est pourquoi l'égalité (3) définit une **translation parallèle** du plan selon le vecteur Oq (fig. 2). L'égalité

$$\begin{aligned} z' &= pz(r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')) \\ &= t (\cos \alpha + i \sin \alpha) \times r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

signifie (fig. 3), que $r' = tr$, $\varphi' = \varphi + \alpha$, c'est-à-dire que $(O, z) = t \cdot (O, z)$ (où (O, z) est la distance entre les points O et z), $\angle \{Oz, Oz'\} = \alpha$ (interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes). Le symbole $\angle \{Oz, Oz'\}$ représente ce qu'on appelle l'« angle orienté » entre les rayons Oz et Oz' , c'est-à-dire l'angle dont il faut faire tourner Oz dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour l'appliquer sur Oz' (si la rotation s'opère

dans le sens des aiguilles d'une montre, l'angle sera alors affecté du signe moins; l'angle orienté entre deux rayons est défini à 2π près). Ainsi l'égalité (4) définit ce qu'on appelle une similitude **rotation centrale de similitude** qui se compose d'une **rotation** d'un angle autour de O et d'une **transformation centrale de similitude (homothétie)** de centre O et de coefficient de similitude t . En particulier, si le module t du nombre complexe p est égal à 1, la transformation (4) est une rotation d'un angle α (fig. 3, b).

On peut présenter chaque déplacement du plan comme une rotation autour d'un point fixe O , accompagnée d'une translation parallèle, ou comme

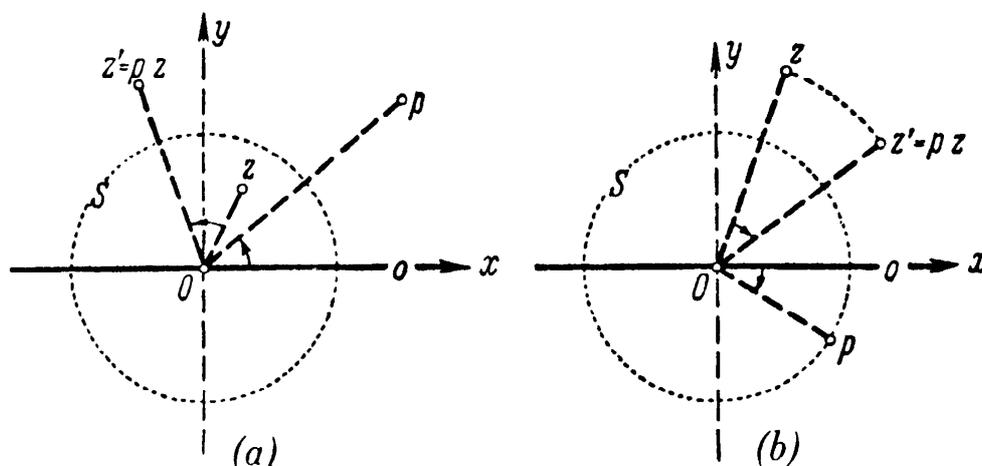


FIG. 3.

une symétrie par rapport à une droite fixe o , accompagnée d'une rotation autour d'un point O déterminé et d'une translation parallèle⁽¹⁾. D'où il s'ensuit, que *chaque déplacement d'un plan peut s'écrire sous la forme* ⁽²⁾

$$z' = pz + q, \quad |p| = 1 \quad (5)$$

ou

$$z' = p\bar{z} + q, \quad |p| = 1. \quad (5a)$$

Il est évident que la distance $d = (z_1, z_2)$ entre deux points z_1 et z_2 d'un plan coïncide avec le module $|w| = |z_2 - z_1|$ du nombre complexe $w = z_2 - z_1$ (car le vecteur z_1z_2 est égal au vecteur Ow ; fig. 4). En d'autres termes,

$$d = |z_2 - z_1|, \quad d^2 = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1). \quad (6)$$

⁽¹⁾ Voir par exemple I. M. YAGLOM, *Transformations géométriques*, I, M., Éditions d'État, 1955.

⁽²⁾ De façon analogue on peut montrer que *chaque transformation de similitude d'un plan peut s'écrire sous la forme*

$$z' = pz + q \quad \text{ou} \quad p\bar{z} + q.$$

La valeur de l'angle δ_0 entre les deux droites qui se coupent à l'origine O des coordonnées et qui sont déterminées par les points z_1^0 et z_2^0 (fig. 5), est évidemment,

$$\delta_0 = \text{Arg} \frac{z_2^0}{z_1^0} \quad (= \text{Arg} z_2^0 - \text{Arg} z_1^0). \quad (7)$$

Ce qui permet de définir aussi l'angle δ entre les droites, qui se coupent au point arbitraire z_0 et qui passent par les points z_1^0 et z_2^0 . La translation parallèle qui transfère z_0 en O est un déplacement élémentaire :

$$z' = z - z_0;$$

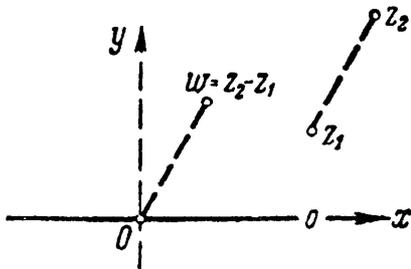


FIG. 4.

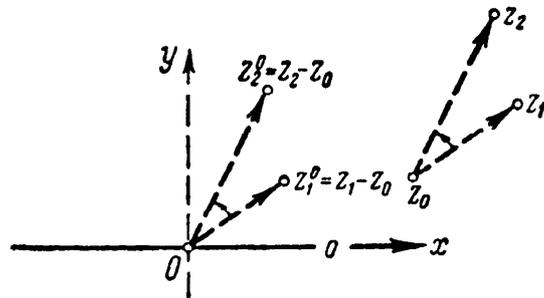


FIG. 5.

les points z_1 et z_0 sont transférés par cette translation parallèle aux points $z_1^0 = z_1 - z_0$ et $z_2^0 = z_2 - z_0$ (fig. 5). D'où il s'ensuit que l'angle δ_0 entre les droites qui se coupent à l'origine des coordonnées et qui passent par z_1^0 et z_2^0 ,

$$\delta = \text{Arg} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \quad (= \text{Arg} (z_2 - z_0) - \text{Arg} (z_1 - z_0)). \quad (8)$$

Le nombre complexe

$$V(z_2, z_1, z_0) = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

pourra s'appeler *rapport des trois points* (trois nombres complexes) z_2, z_1, z_0 . Ainsi, l'angle δ entre les droites, qui se coupent au point z_0 et passent par les points z_1 et z_2 , est égal à l'argument de l'expression $V(z_2, z_1, z_0)$ des points z_2, z_1, z_0 .

Notons que δ est l'angle dont il faut faire tourner, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, le vecteur $z_0 z_1$ de la première droite pour l'amener sur le vecteur $z_0 z_2$ de la deuxième droite. La droite, sur laquelle une des deux

orientations possibles a été choisie (on peut donner cette orientation, en désignant un rayon déterminé de la droite ; sur les figures l'orientation choisie est habituellement désignée par une flèche), s'appelle **droite orientée** ou « axe » ; la direction choisie de la droite orientée est souvent qualifiée de **positive**. Nous représenterons par $[z_1z_2]$ la droite orientée passant par les points z_1 et z_2 , dont l'orientation positive coïncide avec l'orientation de z_1 vers z_2 . L'**angle orienté** $\sphericalangle \{l_1, l_2\}$ entre les droites orientées l_1 et l_2 est défini comme l'angle dont il faut tourner dans le sens contraire des aiguilles d'une montre la droite l_1 , pour que sa direction positive coïncide avec la direction positive de la droite l_2 ; cet angle est donné à un multiple de 2π près. Ainsi, δ est l'angle orienté entre les droites orientées $[z_0z_1]$ et $[z_0z_2]$:

$$\delta = \sphericalangle \{ [z_0z_1], [z_0z_2] \}.$$

Pour que les trois points z_0, z_1 et z_2 soient sur une même droite il faut que l'angle $\sphericalangle \{ [z_1z_2], [z_0z_2] \}$ soit égal à 0 ou à π ou, en vertu de la formule (8) que le rapport de ces trois points

$$V(z_0, z_1, z_2) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2}$$

soit réel. On peut aussi écrire cette condition sous cette forme

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}. \quad (9)$$

D'où il s'ensuit que la droite l qui passe par les points z_1 et z_2 est le **lieu géométrique de ces points z** pour lesquels :

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}. \quad (10)$$

En d'autres termes on peut dire que l'équation de cette droite a la forme (10) ou bien la forme

$$(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z - (z_1 - z_2)\bar{z} + (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2) = 0. \quad (10 a)$$

Ainsi, l'équation de chaque droite peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (11)$$

C est purement imaginaire (1).

Il n'est pas difficile de montrer qu'inversement, *chaque équation de forme (11) exprime une certaine ligne droite* (qui passe par les points z_1 et z_2 tels que $z_1 - z_2 = \bar{B}$, $z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = C$).

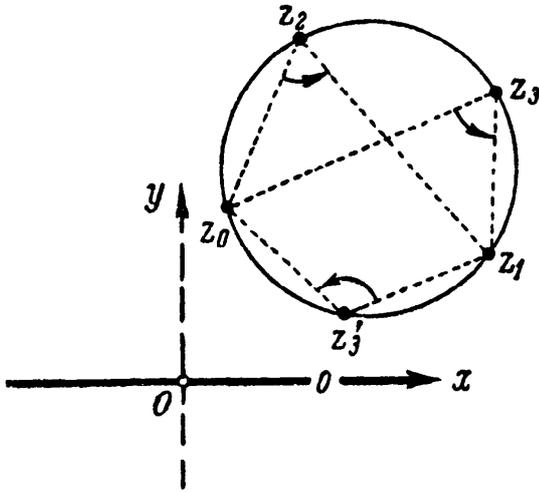


FIG. 6.

Pour que les quatre points z_0, z_1, z_2, z_3 soient sur un seul cercle (ou droite) il faut que la différence des angles (fig. 6)

$$\angle \{ [z_0z_2], [z_1z_2] \} - \angle \{ [z_0z_3], [z_1z_3] \}$$

soit égale à 0 ou à π , ou en vertu de (8) que le nombre suivant soit réel :

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}.$$

Le quotient des deux rapports des trios de points z_0, z_1, z_2 et z_0, z_1, z_3 nous l'appellerons **rapport anharmonique** des quatre points z_0, z_1, z_2, z_3 et nous le désignerons par $W(z_0, z_1, z_2, z_3)$.

(1) Il est évident que l'angle $\angle \{ l, o \}$ que forme la droite l décrite par l'équation (11) avec l'axe réel o est égal à

$$\text{Arg } B = \text{Arg} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = -\text{Arg} (z_1 - z_2),$$

puis, comme

$$|C| = |Bz - \bar{B}\bar{z}| \leq 2 |B| \cdot |z|$$

(d'ailleurs

$$|Bz - \bar{B}\bar{z}| = 2 |B| |z|,$$

seulement si Bz est purement imaginaire, c'est-à-dire si

$$\text{Arg } B + \text{Arg } z = \pm \text{Arg } i,$$

on a pour les points z de la droite $|z| \leq |C|/2|B|$, d'où il s'ensuit que $|C|/2|B|$ est la distance de l à l'origine des coordonnées.

On peut aussi déduire l'équation (11) du fait que l'on peut transférer la droite l par un déplacement (5) sur l'axe réel $z - \bar{z} = 0$. D'où nous obtenons

$$(pz + q) - (\bar{p}\bar{z} + \bar{q}) = 0 \quad \text{ou} \quad Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad \text{ou} \quad B = p, \quad C = q - \bar{q}.$$

Ce qui permet aussi de conclure que $\angle \{ l, o \} = \text{Arg } p = \text{Arg } B$ et que $|C|/2|B|$ est la distance de l à l'origine des coordonnées. L'équation (11) s'écrit aussi souvent sous la forme,

$$bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0,$$

où c est réel ; ici $b = Bi$, $c = Ci$.

Ainsi : *La condition pour quatre points z_0, z_1, z_2, z_3 , soient un seul cercle (ou droite) est que le rapport anharmonique*

$$W(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$$

de ces quatre points soit réel.

On peut écrire cette dernière condition ainsi :

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} : \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}. \quad (12)$$

D'où il s'ensuit, que l'équation du cercle ou de la droite passant par les points z_1, z_2 et z_3 a la forme

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} : \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3} \quad (13)$$

ou

$$(z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_3)[(z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)] = (z - z_3)(\bar{z} - \bar{z}_2)[(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)],$$

c'est-à-dire

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0,$$

où

$$A = (z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3),$$

$$B = -\bar{z}_3(z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}_2(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3),$$

$$C = z_2\bar{z}_3(z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - z_3\bar{z}_2(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3).$$

Ainsi, *l'équation de chaque cercle (ou droite) peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (14)$$

A et C sont purement imaginaires (1). Réciproquement *le lieu géométrique des points z qui satisfont à l'équation de forme (14) (si seulement ces points existent ; note (1) est un cercle ou une droite.*

(1) L'équation (14) peut aussi se déduire du fait que n'importe quel cercle S peut par translation parallèle (3) être amené à coïncider avec le cercle $z\bar{z} = r^2$ dont le centre est à l'origine des coordonnées O (r est le rayon du cercle). De là nous obtenons l'équation de S :

$$(z + q)(\bar{z} + \bar{q}) - r^2 = 0 \quad \text{ou} \quad az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0,$$

où $a = 1$ et $c = q\bar{q} - r^2$ sont réels, $b = \bar{q}$. D'après cette équation on voit que le carré du rayon r du cercle S est égal à

$$\frac{bb - ac}{a^2},$$

et que son centre est au point $-\bar{b}/a$. [Ainsi, pour $bb - ac = 0$ seul le point $z = -\bar{b}/a$ satisfait à l'équation du cercle S , et pour $bb - ac < 0$ aucun point du plan n'y satisfait.]

L'équation de S sous la forme donnée ici, est évidemment équivalente à l'équation (14) (pour passer de l'une à l'autre il suffit de poser $a = Ai$, $b = Bi$, $c = Ci$).

Nous savons déjà, que l'équation (14) représente une ligne droite dans le cas (et seulement dans ce cas) où

$$A = 0. \quad (15)$$

Notons aussi qu'en vertu des lois énoncées plus haut des opérations sur le symbole ∞ il convient d'écrire

$$\begin{aligned} W(z_1, z_2, z_3, \infty) &= \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - \infty}{z_2 - \infty} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \\ &= V(z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

[car $(z_1 - \infty)/(z_2 - \infty) = 1$; voir la note ⁽¹⁾ de bas de page 4]. Par conséquent, le rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, \infty)$ n'est réel que si le rapport simple $V(z_1, z_2, z_3)$ est réel, c'est-à-dire lorsque les points z_1, z_2 et z_3 sont alignés. C'est pourquoi, par analogie, on considérera que le point *infiniment éloigné* qui correspond au nombre ∞ (et dans certains cas il paraît légitime de considérer aussi ce « point fictif ») *est commun à toutes les droites*. En effet, si les trois points z_1, z_2, z_3 sont alignés, on peut alors définir la droite passant par ces points comme le lieu géométrique des points z tels que $W(z_1, z_2, z_3, z)$ soit réel ; même le « point » ∞ satisfait alors à cette condition.

§ 8*. APPLICATIONS ET EXEMPLES

Ce qui précède permet déjà d'utiliser les nombres complexes pour la démonstration de nombreux théorèmes, concernant les droites et les cercles. Nous en donnons ici quelques exemples.

Commençons par le théorème suivant. *Soit quatre cercles donnés S_1, S_2, S_3 et S_4 sur un plan, et soit z_1 et w_1 les points d'intersections de S_1 et S_2 ; z_2 et w_2 les points d'intersection de S_2 et S_3 ; z_3 et w_3 les points d'intersections de S_3 et S_4 ; enfin z_4 et w_4 les points d'intersection de S_4 et S_1 . Si les points z_1, z_2, z_3 et z_4 sont sur un seul cercle (ou sur une seule droite) Σ , les points w_1, w_2, w_3 et w_4 sont eux aussi sur un même cercle (ou sur une même droite) Σ' (fig. 7).*

Utilisons le fait que les points z_1, z_2, w_1 et w_2 sont tous sur S_2 ; les points z_2, z_3, w_2 et w_3 sont tous sur S_3 ; les points z_3, z_4, w_3 et w_4 sont tous sur S_4 ;

et z_4, z_1, w_4 et w_1 sur S_1 . Les quatre rapports anharmoniques suivants sont donc réels :

$$W(z_1, w_2, z_2, w_1) = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} : \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1},$$

$$W(z_2, w_3, z_3, w_2) = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} : \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2},$$

$$W(z_3, w_4, z_4, w_3) = \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} : \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3},$$

$$W(z_4, w_1, z_1, w_4) = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} : \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4},$$

Par conséquent, est aussi réelle l'expression :

$$\begin{aligned} & \frac{W(z_1, w_2, z_2, w_1) \cdot W(z_3, w_4, z_4, w_3)}{W(z_2, w_3, z_3, w_2) \cdot W(z_4, w_1, z_1, w_4)} = \\ & = \left\{ \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right\} \left\{ \frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} : \frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4} \right\} \\ & = W(z_1, z_3, z_2, z_4) W(w_1, w_3, w_2, w_4). \end{aligned}$$

C'est pourquoi, le rapport anharmonique $W(z_1, z_3, z_2, z_4)$ étant réel, le rapport $W(w_1, w_3, w_2, w_4)$ l'est aussi, ce qui démontre le théorème.

Cette proposition est assez élégante mais ne paraît pas particulièrement féconde — simple théorème comme il y en a beaucoup en géométrie élémentaire. Cependant, les conséquences qu'on peut en tirer peuvent, sans exagération, être qualifiées de remarquables.

Comme première application nous considérons une série de théorèmes établis par le géomètre anglais William Clifford déjà cité plus haut. Convenons d'appeler n droites d'un plan, **droites de « position commune »** si deux quelconques d'entre elles ne sont pas parallèles et si trois quelconques d'entre elles

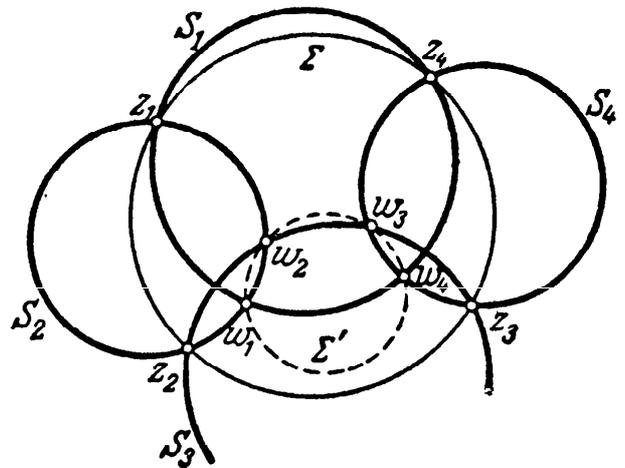


FIG. 7.

ne sont jamais concourantes. Nous appellerons le point d'intersection de deux droites de position commune (c'est-à-dire de droites qui se coupent) leur **point central** (fig. 8, a). A partir de trois droites de position commune on peut choisir

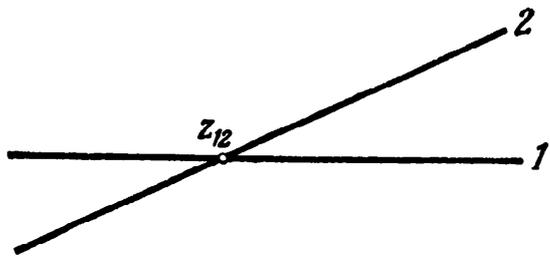


FIG. 8 a.

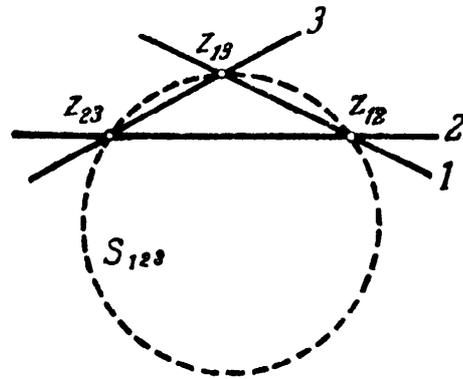


FIG. 8 b.

de trois façons différentes une paire de droites ; à ces trois paires de droites correspondent trois points centraux ; le cercle passant par ces points (c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle formé par les trois droites), nous l'appellerons **cercle central** de nos trois droites (fig. 82). De façon analogue, à partir de quatre droites de position commune on peut choisir de quatre façons

différentes un trio de droites ; à ces quatre trios correspondent quatre cercles centraux, qui *toujours passeront par un même point* ; ce point (fig. 8, c) est naturellement appelé **point central des quatre droites**. A partir de cinq droites de position commune on peut de cinq façons choisir quatre droites ; aux cinq quatuors de droites obtenues correspondent cinq points centraux, qui *seront toujours sur un même cercle* — **cercle central des cinq droites** (fig. 8, d). [Cette proposition est équivalente à la suivante : *Si on prolonge tous les deux côtés, les côtés d'un pentagone arbitraire* (qui peut ne pas être convexe ou

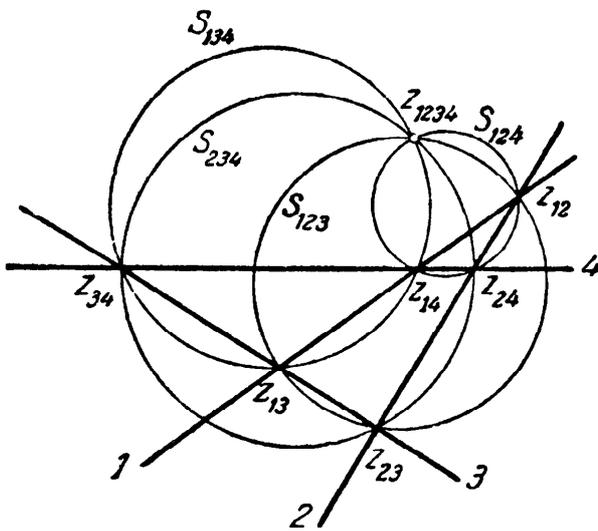


FIG. 8 c.

même se couper lui-même (étoilé) !] *jusqu'à l'intersection de ces côtés, et que l'on trace les cercles autour des cinq triangles formés, alors les cinq points d'intersection des cercles associés sont sur un seul cercle, cercle central des côtés du pentagone* (fig. 8, c).

On peut, de façon analogue, prolonger indéfiniment nos définitions — *et à chaque nombre pair de n droites de position commune correspondra leur point central, où se coupent les n cercles centraux de tous les systèmes possibles de n - 1 de ces droites, mais à chaque nombre impair n de droites correspond leur*

cercle central — auquel appartiennent les n points centraux de tous les systèmes possibles de $n - 1$ de ces droites !

Pour démontrer ceci considérons d'abord le cas de quatre droites 1, 2, 3 et 4. Les points d'intersection de ces droites — points centraux des paires de droites — seront désignés par z_{12} , z_{13} , z_{14} , z_{23} , z_{34} , comme on l'a fait sur la figure 8 c, le point d'intersection des cercles passant par les points z_{23} , z_{34} , z_{24} et z_{13} , z_{34} , z_{14} , — cercles centraux S_{234} et S_{134} des trios de droites 2, 3, 4 et 1, 2, 4, ce point différent de z_{34} , nous le désignerons par z_{1234} . Dans ce cas,

nous nous trouvons alors dans une situation qui nous est déjà familière ; le rôle des quatre cercles S_1 , S_2 , S_3 et S_4 est ici joué par le cercle S_{234} , la droite 2, la droite 1 et le cercle S_{134} ; le rôle des points z_1 , z_2 , z_3 et z_4 — par les points z_{23} , le point ∞ « indéfiniment éloigné » (par lequel « passent » toutes les droites ; voir la fin du paragraphe précédent), z_{13} et z_{34} ; le rôle des points w_1 , w_2 , w_3 et w_4 — par les points z_{24} , z_{12} , z_{14} et z_{1234} . Les points z_{23} , ∞ , z_{13} et z_{34} appartenant à une seule « circonférence ou droite (en fait — à

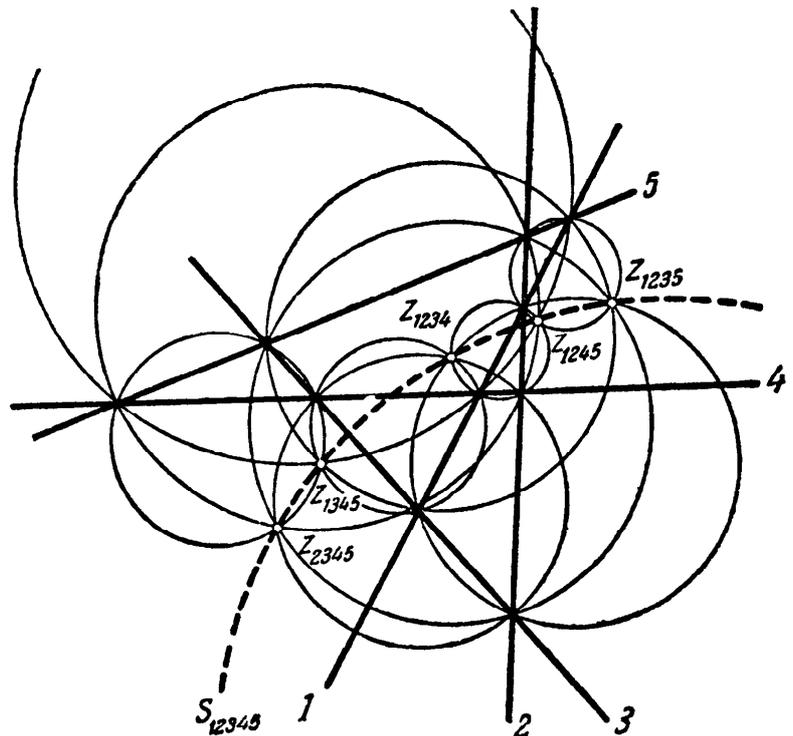


FIG. 8 d.

la droite 3), les points z_{24} , z_{12} , z_{14} et z_{1234} sont aussi sur le même cercle, c'est-à-dire que passant par z_{12} , z_{24} et z_{14} le cercle central S_{124} des droites 1, 2 et 4 passe par le point z_{1234} . De façon tout à fait analogue on démontre que le cercle central S_{123} des droites 1, 2 et 3 passe lui aussi par ce même point z_{1234} (pour démontrer ceci il suffit de prendre pour z_1 et z_3 les points z_{24} et z_{14} , et pour w_1 et w_3 — les points z_{23} et z_{13}), d'où il s'ensuit aussi que z_{1234} est le point central des quatre droites 1, 2, 3 et 4.

Considérons maintenant le cas de cinq droites 1, 2, 3, 4 et 5. Représentons par z_{1234} le point central des quatre droites 1, 2, 3, 4 et agissons de façon analogue pour les autres quatuors de droites ; le point d'intersection des droites 1 et 2 — point central de ces deux droites — nous le représenterons par z_{12} , etc. le cercle central des droites 1, 2 et 3 sera représenté par S_{123} nous opérons de façon analogue pour les autres trios de droites (voir fig. 8 e). Il nous faut démontrer que les points z_{1234} , z_{1235} , z_{1245} , z_{1345} et z_{2345} appartiennent au même cercle.

Mais pour cela, il suffit de s'assurer que quatre quelconques de ces points, par exemple les points z_{1234} , z_{1235} , z_{1245} et z_{1345} sont sur un même cercle. Ce qui résulte immédiatement du théorème démontré plus haut, puisque nous pouvons considérer ces quatre points comme les points d'intersection des cercles S_{134} et S_{123} , S_{123} et S_{125} , S_{125} et S_{145} , S_{145} et S_{134} , dont les deuxièmes points d'intersection — les points z_{13} , z_{12} , z_{15} et z_{14} sont sur un seul « cercle » ou une seule droite » (en fait la droite 1).

De la même façon, on démontre aussi les théorèmes recherchés dans le cas d'un nombre arbitraire n de droites, qu'on désigne naturellement par les nombres 1, 2, 3, ..., n .

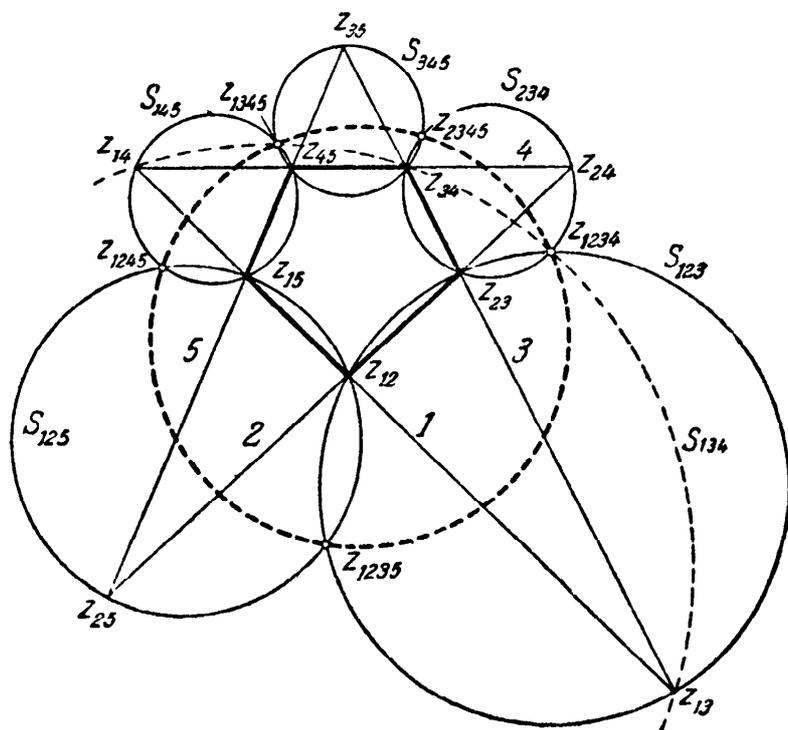


FIG. 8 e.

Supposons que pour n importe quel nombre m de droites, inférieur à n , notre théorème est déjà démontré ; le point central de k droites (où k est pair), obtenues à partir de nos n droites en excluant de $n-k$ droites i, j, \dots, r , sera désigné par $z_{1j \dots r}$, quant au cercle central de l droites (où l est impair), obtenues à partir de nos droites par rejet de $n-l$ droites i, j, \dots, s , nous le désignerons par $S_{i j \dots s}$. Si n est impair, le problème se réduit alors à démontrer qu'en des points centraux z_1, z_2, \dots, z_n de tous les ensembles possibles de $n-1$ de nos droites sont sur un même cercle ; afin de s'en assurer

il suffit de démontrer que quatre quelconques de ces points sont sur un même cercle, par exemple, les points z_1, z_2, z_3 et z_4 . Mais nous pouvons considérer ces points comme les points d'intersection des cercles S_{14} et S_{12} , S_{12} et S_{23} , S_{23} et S_{34} , S_{34} et S_{14} dont les seconds points d'intersection — les points z_{124} , z_{123} , z_{234} et z_{134} — sont sur le même cercle S_{1234} ! Si n est pair, le problème revient à démontrer que n des cercles S_1, S_2, \dots, S_n de tous les ensembles possibles de $n-1$ de nos droites se coupent au même point ; il suffit ici de vérifier que chaque trio de nos cercles, par exemple les cercles S_1, S_2 et S_3 se coupent au même point ⁽¹⁾.

(1) Il n'est pas difficile de construire quatre cercles qui, pris trois par trois ont un point d'intersection commun, mais qui n'ont pas tous le même point commun. Cependant il est assez simple de s'assurer que si le nombre de cercles dépasse quatre, puisque chaque trio de cercles se coupent au même point, tous les cercles ont nécessairement un point commun.

Mais ceci découle de l'étude des quatre cercles S_1 , S_{134} , S_{234} et S_2 . De ce que les points auxquels ces cercles se coupent deux par deux, sont sur un seul cercle S_{124} , il s'ensuit que les seconds points de leurs intersections eux aussi — les points z_{13} , z_{34} , z_{23} et le point d'intersection de S_2 et de S_1 — appartiennent à un seul cercle, c'est-à-dire que le point d'intersection de S_2 et S_1 est aussi sur le cercle S_3 , qui passe par les points z_{13} , z_{34} et z_{23} !

Voici encore une série de théorèmes analogues. Considérons deux droites de position commune ; sur chacune de ces droites choisissons arbitrairement un point différent de leur point d'intersection. Le cercle qui passe par ces deux points, et par le point d'intersection des deux droites données, nous l'appellerons « cercle pilote » des deux droites munies des points donnés (fig. 9, a). Considérons ensuite trois droites de position commune munies de points donnés ; dans ce cas *les trois cercles pilotes, correspondant aux trois paires de droites, que nous pouvons choisir à partir de nos trois droites, se coupent en un même point* (fig. 9 b) ; on peut appeler ce point **point pilote** des trois droites. Prenons maintenant sur le plan quatre droites de position commune et sur chacune d'entre elles choisissons un point par droite ; exigeons aussi que tous ces points soient sur un même cercle (ou droite). Dans ce cas *les quatre points pilotes des quatre trios de droites que nous pouvons choisir à partir de nos quatre droites, seront toujours sur un seul cercle* ; on peut appeler ce cercle **cercle pilote** de nos quatre droites (fig. 9, c). [Cette proposition est identique à la suivante : *Si on prend sur les côtés d'un quadrilatère arbitraire (il peut ne pas être convexe ou se couper lui-même !) un point par côté et de telle sorte que tous ces points soient sur un même cercle (ou une même droite), en les unissant successivement entre eux et en traçant les cercles circonscrits aux triangles formés, les quatre points d'intersection des cercles voisins sont sur un même cercle, « cercle pilote » des côtés du quadrilatère* (fig. 9, d).]

De la même façon, on peut associer à un nombre quelconque impair de droites de position commune, sur chacune desquelles on a pris un point (tous ces points étant sur un seul cercle ou sur une seule droite) un point pilote de ces droites ; et à un nombre quelconque pair de droites de position commune (les points pris sur ces droites étant sur le même cercle ou sur la même droite), un cercle pilote. Le point pilote de n droites se définit comme le point d'intersection des n cercles pilotes de tous les ensembles possibles de $n - 1$ de ces droites données, quant au cercle pilote de n droites on le définit comme le cercle auquel appartiennent les n points pilote de tous les ensembles possibles de $n - 1$ de ces droites données.

Pour la démonstration du cas de trois droites, il suffit de prendre comme cercles S_1 , S_2 , S_3 et S_4 du théorème de départ la droite 1, le cercle pilote S_{13} des droites 1 et 3, le cercle pilote S_{23} des droites 2 et 3 et la droite 2 (fig. 9, c). Pour tous points z_1 , z_2 , z_3 et z_4 on a les points u_{13} d'intersection des droites 1 et 3, le point u_{31} pris sur la droite 3, le point u_{23} d'intersection des droites 2 et 3 et

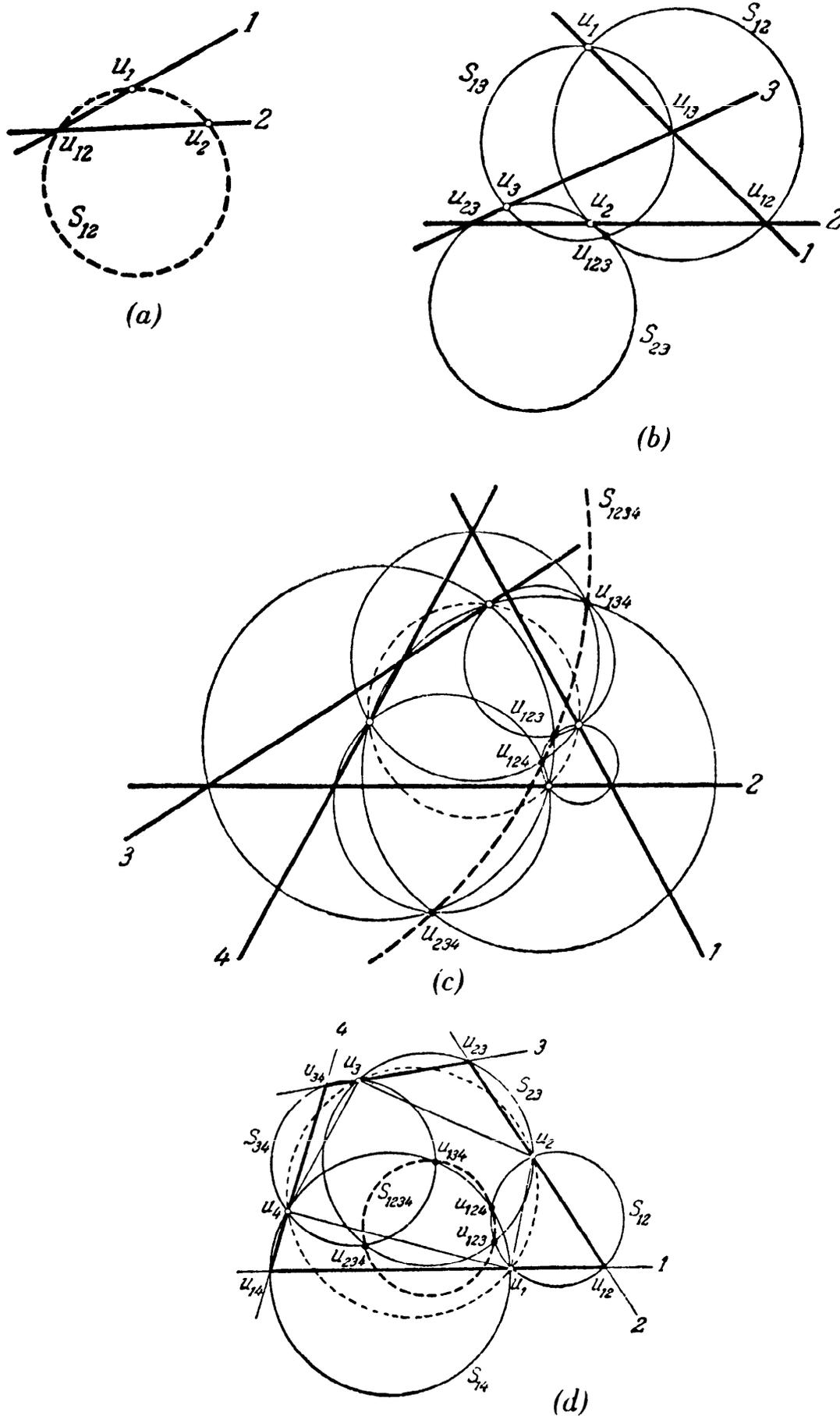


FIG. 9.

« le point ∞ », commun aux droites 1 et 3 ; ces quatre points appartiennent à la même « circonférence ou droite » (en fait à la même droite 3). Le rôle des points w_1, w_2, u_3 et u_4 sera joué par le point u , pris sur la droite 1, le point u_{123} d'intersection des cercles S_{13} et S_{23} , le point u_2 , pris sur la droite 2, et le point u_{12} d'intersection des droites 1 et 2 ; comme ces points doivent aussi être sur un même cercle, le point u_{123} sera aussi toujours sur le cercle pilote S_{12} des droites 1 et 2, passant par les points u_1, u_2 et u_{12} .

Pour démontrer le cas de quatre droites, il suffit de prendre pour cercles S_1, S_2, S_3 et S_4 , les cercles figurant dans l'énoncé de notre théorème initial, S_{12}, S_{23}, S_{34} et S_{41} , où, par exemple S_{12} est le cercle pilote des droites 1 et 2, et pour points z_1, z_2, z_3 et z_4 — les points u_2, u_3, u_4 et u_1 , pris sur les droites 2, 3, 4 et 1 (voir fig. 9, *d* ; les points u_1, u_2, u_3 et u_4 sont sur un seul cercle ou sur une seule droite selon le théorème). Dans ce cas les seconds points d'intersection de nos cercles seront les points $u_{123}, u_{234}, u_{134}$ et u_{124} où le point u_{123} est le point pilote des droites 1, 2 et 3 ; en vertu du théorème démontré plus haut ces points seront sur un même cercle S_{1234} , cercle pilote des droites 1, 2, 3 et 4.

Considérons maintenant n droites de position commune 1, 2, 3, ..., n , et les points pris sur elles $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ qui appartiennent à une seule droite ou à un seul cercle. Supposons encore, que pour n'importe quel nombre de droites inférieur à n , notre théorème est déjà démontré et désignons le cercle pilote de k droites (où k est pair) droites obtenues à partir des n droites données par rejet de $n - k$ droites avec les numéros i, j, \dots, r , par $S_{ij\dots r}$, quant au point pilote des l droites (où l est impair) obtenues à partir des droites données par rejet des $n - l$ droites de numéros i, j, \dots, s par $u_{ij\dots s}$. Si $n \geq 6$ est pair alors le problème est de démontrer que n points pilotes u_1, u_2, \dots, u_n de tous les ensembles possibles de $n - 1$ des droites données sont sur un même cercle, il suffit de s'assurer pour cela que quatre quelconques de ces points sont sur un seul cercle, par exemple les points u_1, u_2, u_3 et u_4 . Si $n \geq 5$ est impair, il faut alors démontrer que n cercles pilotes S_1, S_2, \dots, S_n de tous les ensembles possibles de $n - 1$ de droites se coupent au même point, il suffit pour cela que trois quelconques de ces cercles, disons les cercles S_1, S_2 et S_3 se coupent en un même point. En fait, ces démonstrations ne diffèrent pas des raisonnements utilisés dans la démonstration des théorèmes de Clifford (pour n arbitraire).

Tournons-nous maintenant vers d'autres notions et d'autres faits dont l'examen pourra nous aider dans l'étude des nombres complexes. Rappelons l'équation du cercle S

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (14)$$

A et C sont purement imaginaires.

Posons qu'une certaine droite l , passant par le point O coupe S aux points z_1 et z_2 (fig. 10). Déterminons la valeur du produit :

$$\{ O, z_1 \} \cdot \{ O, z_2 \},$$

où les accolades soulignent le fait qu'ici il est question de segments de droites orientées, c'est-à-dire que le produit $\{O, z_1\} \cdot \{O, z_2\}$ est considéré comme positif, si les directions des segments $\overline{Oz_1}$ et $\overline{Oz_2}$ (de O à z_1 , et de O à z_2 respectivement) coïncident et si les points z_1, z_2 sont d'un seul côté de O , et comme négatif, si les directions de ces segments sont opposées (les points z_1 et z_2 sont de chaque côté de O).

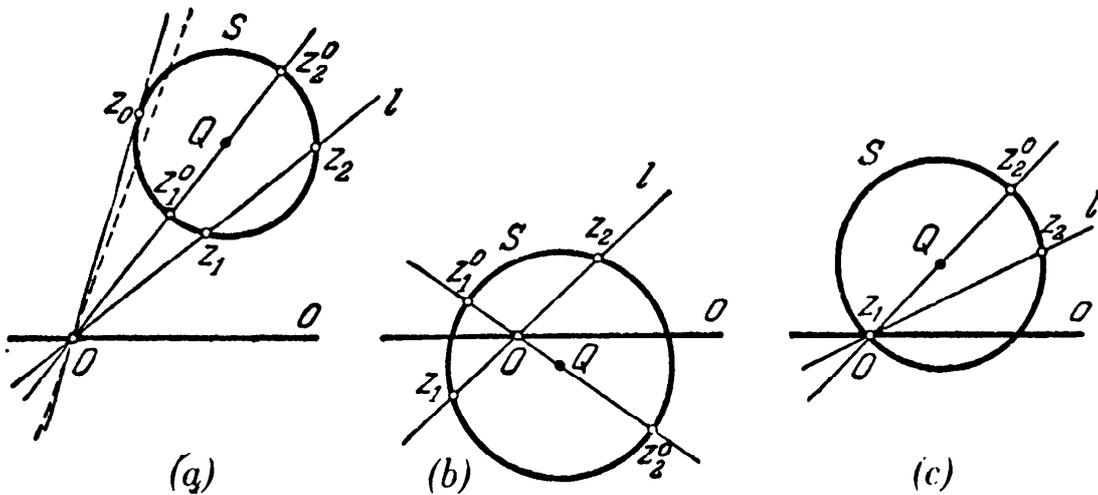


FIG. 10.

Comme les points z_1 et z_2 sont sur le cercle S , on a

$$Az_1\bar{z}_1 + Bz_1 - \bar{B}\bar{z}_1 + C = 0 \quad (16)$$

et

$$Az_2\bar{z}_2 + Bz_2 - \bar{B}\bar{z}_2 + C = 0 \quad (17)$$

D'autre part, puisque ces points sont sur une même droite passant par l'origine des coordonnées O , on a alors $\text{Arg } z_2 = \text{Arg } z_1$, $\text{Arg } \bar{z}_2 = -\text{Arg } z_1$ (fig. 10 *a*) ou $\text{Arg } z_2 = \text{Arg } z_1 + \pi$, $\text{Arg } \bar{z}_2 = -\text{Arg } z_1 - \pi$ (fig. 10, *b*) et par conséquent, le produit $z_1\bar{z}_2$. Dans tous les cas est réel

$$z_1\bar{z}_2 = k, \quad \bar{z}_1z_2 = \overline{z_1\bar{z}_2} = \bar{k} = k. \quad (18)$$

Multiplions maintenant l'égalité (16) par z_2 , l'équation (17) par z_1 et utilisons les égalités (18) ; nous obtenons

$$Akz_1 + Bz_1z_2 - \bar{B}k + Cz_2 = 0 \quad (16')$$

et

$$Akz_2 + Bz_1z_2 - \bar{B}k + Cz_1 = 0. \quad (17')$$

Soustrayons l'une de l'autre les deux égalités nous aurons

$$Ak(z_1 - z_2) - C(z_1 - z_2) = 0.$$

d'où il s'ensuit que si $z_1 \neq z_2$ et $z_1 - z_2 \neq 0$ alors

$$k = C/A.$$

Mais le produit

$$z_1 \bar{z}_2 = k$$

justement coïncide avec le produit $\{O, z_1\} \cdot \{O, z_2\}$ des segments (orientés) de droite $\overline{Oz_1}$ et $\overline{Oz_2}$. En effet, il est évident que

$$|k| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

est égal au produit $(O, z_1) \cdot (O, z_2)$ des segments (orientés !) de longueurs $\overline{Oz_1}$ et $\overline{Oz_2}$; d'autre part, le nombre k est positif, si les points z_1 et z_2 sont d'un seul côté de O , et $\text{Arg } \bar{z}_2 = -\text{Arg } z_1$; le nombre k est négatif si les points z_1 et z_2 sont de chaque côté de O et $\text{Arg } \bar{z}_2 = -\text{Arg } z_1 - \pi$.

Nous avons finalement

$$\{O, z_1\} \cdot \{O, z_2\} = k = C/A. \quad (19)$$

Cette relation a été établie en supposant que les points z_1 et z_2 sont distincts ; mais si $z_1 \cdot z_2 = z_0$ (voir fig. 10, a), le produit

$$\{O, z_1\} \cdot \{O, z_2\} = \{O, z_0\}^2$$

sera alors aussi égal à C/A ; ceci découle de ce que nous pouvons considérer la grandeur $\{O, z_0\}^2$ comme le cas limite de l'expression $\{O, z_1\} \cdot \{O, z_2\}$, où z_1 et z_2 sont les points d'intersection avec S de la sécante $[O, z_1]$, très proche de la tangente $[O, z_0]$ (et qui tend vers $[O, z_0]$). D'autre part, si le cercle S dégénère en un point (« ce cercle de rayon nul »), alors l'expression $k = C/A$ sera égale au carré de la distance (O, S) (car dans ce cas il y a une seule « sécante » $[Oz_1z_2]$ du « cercle » S , pour laquelle

$$\{O, z_1\} \cdot \{O, z_2\} = (O, S)^2).$$

si le cercle S passe par le point O (fig. 10 c) alors un des points z_1 et z_2 coïncide avec O et

$$\{O, z_1\} \cdot \{O, z_2\} = 0 ;$$

dans ce cas on a aussi $k = C/A = 0$, puisque dans l'équation (14) $C = 0$ (car le point $z = 0$ satisfait à cette équation).

L'expression de $k = C/A$ s'appelle « puissance du cercle S » (plus précisément « puissance du point O par rapport au cercle S » ⁽¹⁾ ; son sens géométrique est donné par l'égalité (19) (ainsi, « le produit $\{O, z_1\} \cdot \{O, z_2\}$ ne dépend pas du choix de la sécante l , passant par O , au cercle !). Si le point O est en dehors du cercle S , la puissance de O par rapport à S peut être définie aussi comme le carré $\{O, z_0\}^2$ de la longueur du segment de tangente, menée de O vers S (fig. 10, a) ; ensuite, en menant la sécante l par le centre a du cercle S et en représentant la distance OQ par d et le rayon de S par r , nous obtenons que la puissance de O par rapport à S , dans tous les cas est égale (en grandeur et en signe) à

$$(d + r)(d - r) = d^2 - r^2.$$

On peut aussi définir la *puissance* (arbitraire !) w d'un point par rapport au cercle S comme le produit

$$\{w, z_1\} \cdot \{w, z_2\},$$

où z_1 et z_2 sont les points d'intersection de la droite passant par w avec le cercle S (fig. 11, $a-c$). Si w est en dehors de S , alors la puissance de w par rapport à S est égale au carré $\{w, z_0\}^2$ de la longueur du segment de la tangente menée de w à S (fig. 11, a) ; si le rayon de S est égal à r , et la distance du centre de S à w égale à d , la puissance de w par rapport à S est égale à

$$(d + r)(d - r) = d^2 - r^2.$$

D'où il s'ensuit, que la puissance de w par rapport à S est positive, si w est situé en dehors de S , négative si w est situé à l'intérieur de S , et égale à zéro si w est sur S .

Afin de déterminer la valeur numérique de la puissance du point w (où w est un nombre complexe déterminé !) par rapport au cercle (14) il suffit

(1) Le rapport $C/A = k$ ne dépend pas seulement du cercle S , mais aussi du système de coordonnées (complexes, dans lequel l'équation S a la forme (14). Cependant, il est facile de voir, qu'en fait la grandeur C/A dépend seulement de la position de l'origine des coordonnées O , et non de la direction de l'axe réel o . Ceci découle du fait que par rotation autour de O

$$z = pz, \quad z = p'z', \quad \text{ou} \quad |p| = 1, \quad |p'| = \left| \frac{1}{p} \right| = 1$$

[cf. formule (4), p. 28] le cercle (14) devient le cercle

$$Ap'\bar{p}'z'\bar{z}' + Bp'z' - \bar{B}\bar{p}'\bar{z}' + C = 0,$$

pour lequel O a la même puissance $C/Ap'\bar{p}' = C/A = k$ (car $p'\bar{p}' = 1$).

d'introduire dans le plan de la variable complexe un nouveau système de coordonnées (complexes) :

$$Z = z - w, \quad z = Z + w,$$

auquel le point w servira d'origine. Le cercle (14) a dans le nouveau système de coordonnées l'équation

$$A(Z + w)\overline{(Z + w)} + B(Z + w) - \bar{B}\overline{(Z + w)} + C = 0$$

ou

$$AZ\bar{Z} + (A\bar{w} + B)Z - (-A\bar{w} - \bar{B})\bar{Z} + (Aw\bar{w} + Bw - \bar{B}\bar{w} + C) = 0.$$

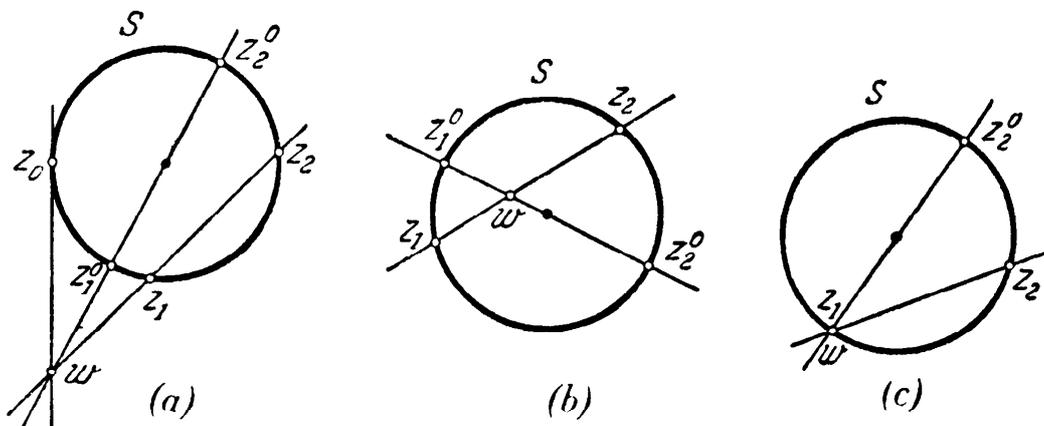


FIG. 11.

En considérant l'expression (19) comme la puissance de l'origine des coordonnées O par rapport au cercle (14), nous concluons, que la puissance du point w par rapport au cercle (14) est égale à

$$\frac{Aw\bar{w} + Bw - \bar{B}\bar{w} + C}{A} = w\bar{w} + \frac{B}{A}w - \frac{\bar{B}}{A}\bar{w} + \frac{C}{A}. \quad (20)$$

En d'autres termes, *la puissance du point w par rapport au cercle (14) est égal au nombre réel, obtenu par substitution de w dans l'équation du cercle normalisée en posant le coefficient de $z\bar{z} = à 1$ " (c'est-à-dire obtenue à partir de l'équation (14) par la division de tous ses termes par A).*

Ce résultat permet de résoudre d'emblée toute une série de problèmes se rapportant à la recherche des lieux géométriques. Ainsi *le lieu géométrique des points w , dont la puissance par rapport à un cercle donné (14) a la valeur comme k " est décrit par l'équation :*

$$\frac{Aw\bar{w} + Bw - \bar{B}\bar{w} + C}{A} = k \quad \text{ou} \quad Aw\bar{w} + Bw - \bar{B}\bar{w} + (C - Ak) = 0,$$

c'est-à-dire que *c'est aussi un cercle* (de plus, c'est un cercle concentrique au cercle d'origine ; cf. la note de la page 33). D'autre part, si on a deux cercles S_1 et S_2 d'équations :

$$Az\bar{z} + B_1z - \bar{B}_1\bar{z} + \bar{C}_1 = 0 \quad \text{et} \quad Az\bar{z} + B_2z - \bar{B}_2\bar{z} + C_2 = 0,$$

où pour simplifier nous considérons les coefficients de $\bar{z}z$ identiques (cette condition ne restreint pas la généralité des raisonnements puisqu'on y satisfait facilement en multipliant tous les termes d'une des équations par

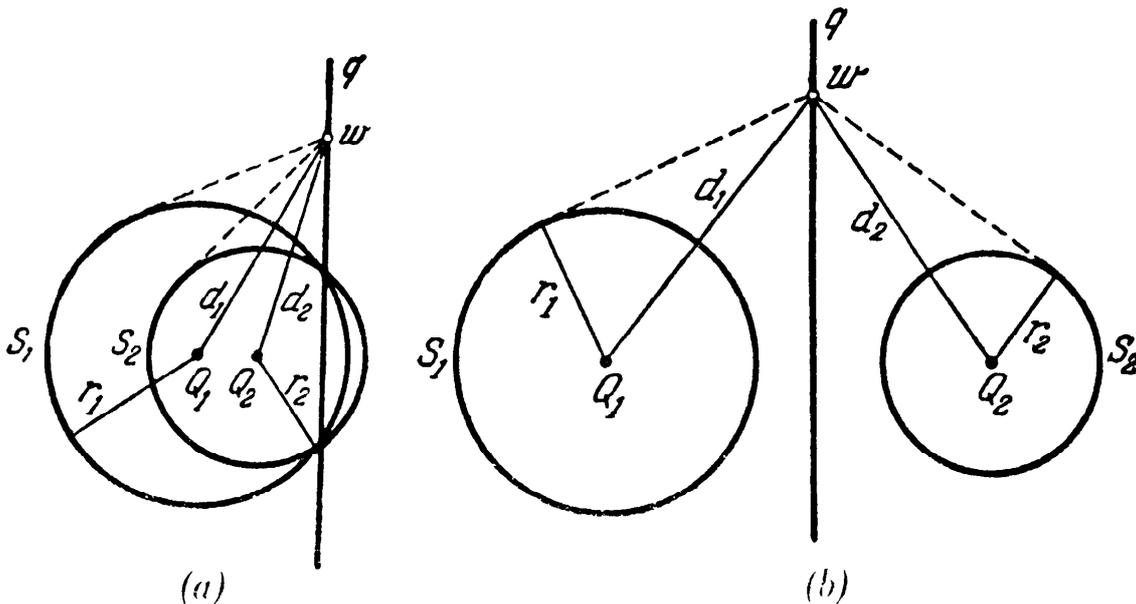


FIG. 12.

un nombre réel approprié), le lieu géométrique des points w qui ont des puissances égales par rapport à S_1 et S_2 est décrit par l'équation

$$\frac{Aw\bar{w} + B_1w - \bar{B}_1\bar{w} + C_1}{A} = \frac{Aw\bar{w} + B_2w - \bar{B}_2\bar{w} + C_2}{A}$$

ou

$$(B_1 - B_2)w - (\bar{B}_1 - \bar{B}_2)\bar{w} + (C_1 - C_2) = 0,$$

c'est-à-dire que *c'est une ligne droite* q ; cette droite s'appelle **axe radical** des cercles S_1 et S_2 . Il est clair que si les cercles S_1 et S_2 ont des points communs, q passe par ces points (puisque chacun de ces points a une puissance nulle par rapport à S_1 et S_2), c'est-à-dire coïncide avec la corde commune à S_1 et S_2 (fig. 12, a) ; si S_1 et S_2 n'ont pas de point commun, on peut caractériser q par le fait que les segments de tangentes, menées de chacun de

cette droite à S_1 et S_2 , sont égaux (fig. 12, *b*). Si on considère ensuite trois cercles S_1 , S_2 , et S_3 d'équations

$$Az\bar{z} + B_1z - \bar{B}_1\bar{z} + C_1 = 0,$$

$$Az\bar{z} + B_2z - \bar{B}_2\bar{z} + C_2 = 0,$$

$$Az\bar{z} + B_3z - \bar{B}_3\bar{z} + C_3 = 0,$$

leurs axes radicaux pris deux à deux sont caractérisés par les équations

$$(B_1 - B_2)w - (\bar{B}_1 - \bar{B}_2)\bar{w} + (C_1 - C_2) = 0,$$

$$(B_1 - B_3)w - (\bar{B}_1 - \bar{B}_3)\bar{w} + (C_1 - C_3) = 0,$$

$$(B_2 - B_3)w - (\bar{B}_2 - \bar{B}_3)\bar{w} + (C_2 - C_3) = 0.$$

En conséquence si les deux premiers axes radicaux se coupent en un certain point Q , par ce point passera aussi le troisième axe radical (car la dernière de nos trois équations est la différence des deux premières et par conséquent la satisfont toutes les solutions du système, formé par les deux premières opérations)): *Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux se coupent en un point appelé centre radical des trois cercles* (fig. 13), ou sont parallèles entre eux.

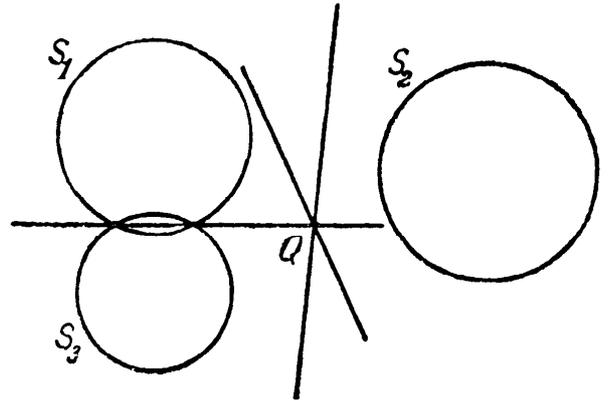


FIG. 13.

L'axe radical des deux cercles S_1 , et S_2 peut se définir comme le lieu géométrique des points dont le rapport des puissances par rapport à S_1 et S_2 est égal à l'unité (où la différence des puissances par rapport à S_1 et S_2 est égale à zéro). On peut aussi considérer le lieu géométrique des points dont la différence des puissances par rapport aux cercles S_1 et S_2 a une valeur donnée a (pour $a = 0$ nous arrivons à l'axe radical des cercles S_1 et S_2) et le lieu géométrique des points dont le rapport des puissances par rapport à S_1 et S_2 a une valeur donnée α (nous retrouvons ici l'axe radical de S_1 et S_2 , en posant $\alpha = 1$). Il est clair que le premier de ces deux lieux géométriques s'exprime par l'équation

$$\frac{Aw\bar{w} + B_1w - \bar{B}_1\bar{w} + C_1}{A} - \frac{Aw\bar{w} + B_2w - \bar{B}_2\bar{w} + C_2}{A} = a$$

ou

$$(B_1 - B_2)w - (\bar{B}_1 - \bar{B}_2)\bar{w} + (C_1 - C_2 - a) = 0,$$

c'est-à-dire que c'est aussi une ligne droite. Le deuxième lieu géométrique conduit à l'équation

$$\frac{Aw\bar{w} + B_1w - \bar{B}_1\bar{w} + C_1}{A} : \frac{Aw\bar{w} + B_2w - \bar{B}_2\bar{w} + C_2}{A} = \alpha$$

ou

$$(1 - \alpha)Aw\bar{w} + (B_1 - \alpha B_2)w - (\bar{B}_1 - \alpha \bar{B}_2)\bar{w} + (C_1 - \alpha C_2) = 0 ;$$

pour $\alpha = 1$ elle représente *une ligne droite* (axe radical de S_1 et S_2), et pour $\alpha \neq 1$, *un cercle*.

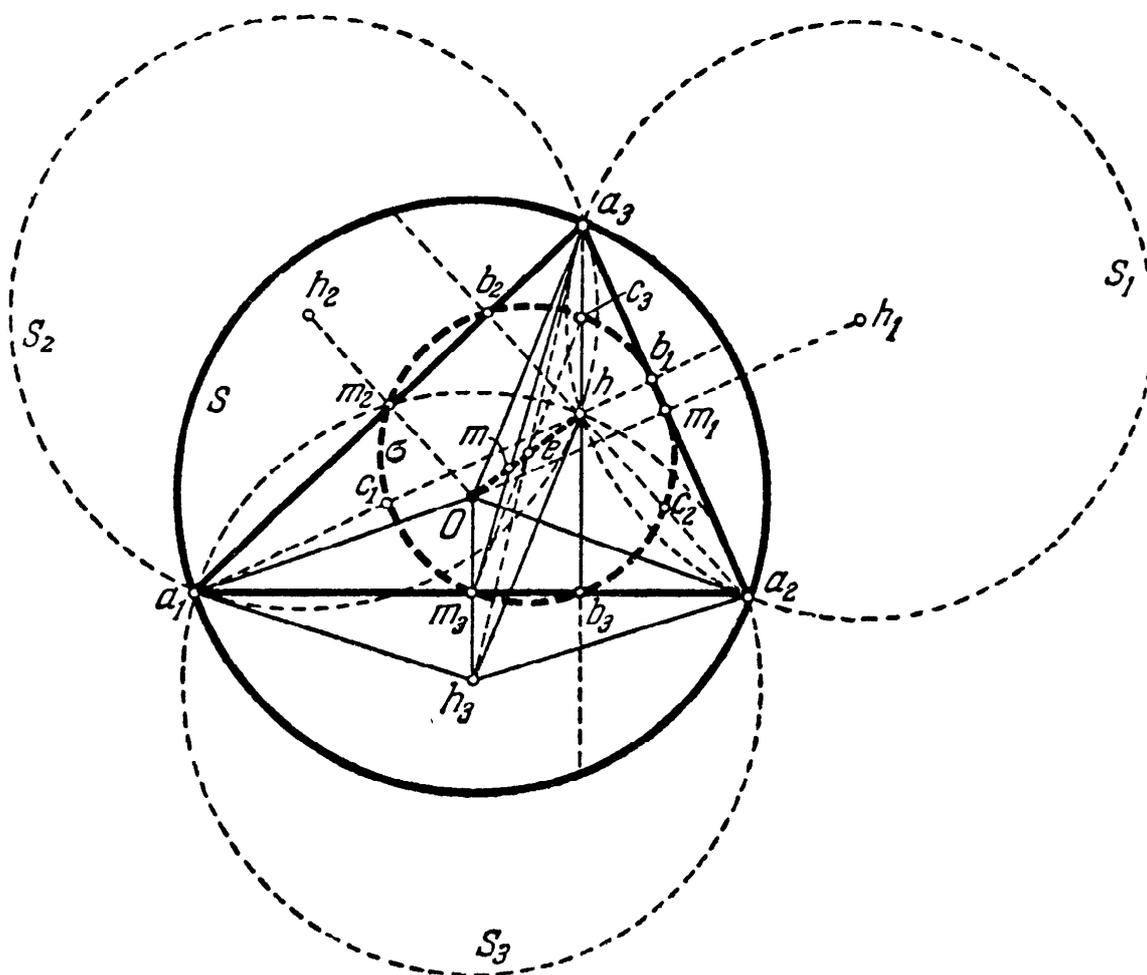


FIG. 14.

En particulier, si des points jouent le rôle des cercles S_1 et S_2 , nous avons alors : *Le lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances à deux points donnés S_1 et S_2 a une valeur donnée, est une droite ; le lieu géométrique des points, dont le rapport des carrés des distances à deux points donnés S_1 et S_2 a une valeur donnée α , est une droite pour $\alpha = 1$ et un cercle pour $\alpha \neq 1$. Il est clair que dans le dernier cas on peut aussi parler*

non plus du rapport des carrés des distances du point w à S_1 et S_2 , mais simplement du *rapport des distances* (w, S_1) et (w, S_2) . Le cercle, lieu géométrique des points, dont le rapport des distances à deux points donnés S_1 et S_2 une valeur constante α , est souvent appelé **cercle d'Apollonius** des deux points (du nom d'un remarquable géomètre de la Grèce ancienne Apollonius de Pergame, qui vivait dans la ville d'Asie Mineure de Pergame au II^e siècle environ avant notre ère).

Tournons-nous maintenant vers l'étude du triangle $\overline{a_1 a_2 a_3}$ (la parenthèse droite au-dessus des lettres signifie que c'est le triangle de sommets a_1, a_2, a_3 qui est précisément étudié mais non le produit des trois nombres complexes a_1, a_2 et a_3 ; nous utiliserons aussi des désignations analogues plus loin; cf. aussi plus haut (p. 42-43). Convenons de considérer, que $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$; géométriquement cela signifie, que tous les sommets du triangle appartiennent au « cercle unité » $z\bar{z} = 1$ (fig. 14) ainsi nous prenons le centre du cercle circonscrit du triangle considéré, comme origine des coordonnées, et le rayon de ce cercle comme unité de longueur). Dans ce cas, il est évident que le point $a_1 + a_2 = h_3$ est le sommet du losange $\overline{Oa_1 h_3 a_2}$ et par conséquent, les droites $[Oh_3]$ et $[a_1 a_2]$ sont perpendiculaires entre elles (comme diagonales du losange); le point

$$m_3 = \frac{h_3}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

est le milieu du côté $\overline{a_1 a_2}$ du triangle $\overline{a_1 a_2 a_3}$, le point

$$h = a_1 + a_2 + a_3 (= h_3 + a_3)$$

est le sommet du parallélogramme $\overline{Oh_3 h a_3}$. En d'autres termes, la droite

$$[a_3 h] \parallel [Oh_3] \quad [a_1 a_2],$$

c'est-à-dire que la droite $[a_3 h]$ est la hauteur du triangle a_1, a_2, a_3 et le point h_3 , le point d'intersection de cette droite avec le côté $[a_1 a_2]$, pied de la hauteur. On démontre de même que les droites $[a_1 h]$ et $[a_2 h]$ sont aussi hauteurs du triangle $\overline{a_1 a_2 a_3}$; c'est pourquoi $a_1 + a_2 + a_3 = h$ est le point d'intersection des hauteurs (orthocentre) du triangle $\overline{a_1 a_2 a_3}$.

La figure 14 montre aussi que

$$(h_3, h) = (O, a_3) (= 1)$$

distance de l'orthocentre h du triangle $\overline{a_1 a_2 a_3}$ au point h_3 symétrique du centre O du cercle circonscrit par rapport au côté $[a_1 a_2]$, est égale au rayon du cercle

circonscrit S du triangle. D'où il s'ensuit que le lieu géométrique des orthocentres des triangles $\overline{a_1a_2a_3}$ inscrits dans S , dont les deux sommets a_1 et a_2 sont fixes, alors que la troisième glisse sur le cercle S , est le cercle égal à S avec son centre au point $h_3 = a_1 + a_2$, symétrique de O par rapport au côté $[a_1a_2]$ (1). Si h_2 et h_1 sont des points symétriques du centre O du cercle circonscrit par rapport aux côtés $[a_1a_3]$ et $[a_2a_3]$, on a alors :

$$[h_2, h] = (O, a_2) = 1, \quad (h_1, h) = (O, a_1) = 1.$$

C'est pourquoi l'orthocentre du triangle quelconque $\overline{a_1a_2a_3}$ coïncide avec le point d'intersection des cercles S_1, S_2 et S_3 , égaux au cercle circonscrit S , dont les centres sont les points h_1, h_2 et h_3 , symétriques du centre O du cercle S par rapport aux côtés du triangle (voir la même figure 14).

Considérons ensuite le point

$$e = \frac{h}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}.$$

Il est clair que c'est le point d'intersection des diagonales du parallélogramme $\overline{Oa_3hh_3}$, la ligne médiane $[m_3c_3]$ du parallélogramme passe aussi par lui, c_3 est donné par

$$c_3 = \frac{a_3 + h}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3$$

(au point c_3 correspond le milieu du segment $\overline{a_3h}$ de la hauteur $[a_3b_3]$ du triangle). De plus,

$$(e, m_3) = (e, c_3) = \frac{1}{2} (O, a_3) = \frac{1}{2};$$

ainsi, le cercle σ de centre c et de rayon $1/2$ passe par le milieu m_3 du côté $\overline{a_1a_2}$ du triangle et par le milieu c_3 du segment $\overline{a_3h}$ de la hauteur, compris entre le sommet et l'orthocentre. On démontre de façon analogue que ce cercle passe aussi par les milieux $m_1 = (a_2 + a_3)/2$ et $m_2 = (a_1 + a_3)/2$ des deux autres côtés, et par les milieux $c_1 = (a_1 + a_3)/2 + a_1$ et $c_2 = (a_1 + a_3)/2 + a_2$ des segments $\overline{a_1h}$ et $\overline{a_2h}$ des deux autres hauteurs. Le cercle σ a été étudié pour la première fois pour le grand mathématicien suisse Léonard Euler (1707-1783), on l'appelle **cercle d'Euler** du triangle $\overline{a_1a_2a_3}$. Puisque les cordes

$[c_3b_3]$ et $[m_3b_3]$ du cercle σ sont perpendiculaires entre elles, et que c_3m_3 est diamètre de ce cercle, le cercle d'Euler σ passe aussi par la base b_3 de la hauteur $\overline{a_3b_3}$; on démontre de même que σ passe aussi par les bases b_1 et b_2 des deux autres hauteurs $\overline{a_1b_1}$ et $\overline{a_2b_2}$ du triangle. (Ainsi le cercle σ passe par neufs points significatifs du triangle $\overline{a_1a_2a_3}$, par les points m_1, m_2, m_3 ; b_1, b_2, b_3 ; c_1, c_2, c_3 ; c'est pourquoi on l'appelle souvent « cercle des neufs points » du triangle.)

Remarquons aussi, que le point m d'intersection des médianes du triangle $\overline{a_1a_2a_3}$ (centre de gravité ou centroïde du triangle) partage la médiane a_3m_3 dans le rapport :

$$(a_3, m) : (m, m_3) = 2 : 1.$$

Il n'est pas difficile de voir à partir de cela, que ce point coïncide aussi avec le point d'intersection des médianes du triangle $\overline{Oh_3a_3}$ (car $\overline{a_3m_3}$ est aussi la médiane de ce dernier triangle), et par conséquent, m partage la médiane \overline{Oe} dans le rapport :

$$(O, m) : (m, e) = 2 : 1.$$

Nous voyons ainsi, que le point m appartient à la droite $[Oe]$ et

$$(O, m) = \frac{2}{3} (O, e) \left(= \frac{1}{3} (O, h) \right),$$

c'est-à-dire

$$m = \frac{2}{3} e = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

La droite $[Oh]$ s'appelle « droite d'Euler » du triangle; lui appartiennent le centre O du cercle circonscrit du triangle $\overline{a_1a_2a_3}$ le point $m = (a_1 + a_2 + a_3)/3$ d'intersection des médianes — centroïde du triangle, le point $h = a_1 + a_2 + a_3$ d'intersection des hauteurs — orthocentre du triangle, et le centre $e = (a_1 + a_2 + a_3)/2$ du cercle d'Euler, de plus

$$(O, e) = \frac{1}{2} (O, h), \quad (O, m) = \frac{1}{3} (O, h).$$

On déduit aussi facilement par un calcul direct les théorèmes sur le cercle d'Euler. Remarquons avant tout qu'en vertu de la formule (6) (page 29)

$$(e, m_3) = |e - m_3| = \left| \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} - \frac{a_1 + a_2}{2} \right| = \left| \frac{a_3}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

et

$$(e, c_3) = |e - c_3| = \left| \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} - \left(\frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 \right) \right| = \left| \frac{-a_3}{2} \right| = \frac{1}{2};$$

de façon analogue on démontre aussi que

$$(e, m_1) = (e, m_2) = 1/2, \quad (e, c_1) = (e, c_2) = 1/2.$$

Il est un peu plus difficile de montrer que le cercle σ de centre e et de rayon $1/2$ passe par les points b_1, b_2, b_3 . Afin de calculer le nombre complexe b_3 , menons par a_3 la droite $[a_3d_3] \parallel [a_2a_1]$; nous désignerons par d_3 et f_3 les points d'intersections des droites $[a_3d_3]$ et $[a_3b_3]$ avec le cercle S . De l'égalité des arcs a_3a_3 et d_3a_1 du cercle S découle l'égalité des angles centraux

$$\angle a_2Oa_3 = \angle d_3Oa_1 = \alpha;$$

c'est pourquoi :

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_1}{d_3} (= \cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Ainsi, nous avons :

$$d_3 = \frac{a_1a_2}{a_3}.$$

D'autre part, puisque $[d_3f_3]$ est le diamètre du cercle S (car $[a_3d_3] \parallel [a_2a_1] \perp [a_3b_3]$) alors

$$f_3 = -d_3 = -\frac{a_1a_2}{a_3}.$$

De plus, puisque

$$(a_1, h) = |a_1 - h| = |a_1 - (a_1 + a_2 + a_3)| = |a_2 + a_3|$$

et

$$(a_1, f_3) = |a_1 - f_3| = \left| a_1 + \frac{a_1a_2}{a_3} \right| = \left| \frac{a_1}{a_3} \right| |a_2 + a_3| = |a_2 + a_3|$$

($ca_2 \mid a_1 \mid = \mid a_3 \mid = 1$), alors le triangle $\overline{a_1 h f_3}$ est isocèle; c'est pourquoi sa hauteur $[a_1 b_3]$ coïncide avec la médiane et b_3 est le milieu du segment $\overline{h f_3}$, d'où il s'ensuit

$$b_3 = \frac{h + f_3}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} - \frac{a_1 a_2}{2 a_3}.$$

Il est facile de voir à présent que

$$\begin{aligned} (e, b_3) &= |e - b_3| = \left| \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} - \frac{a_1 a_2}{2 a_3} \right) \right| \\ &= \left| \frac{a_1 a_2}{2 a_3} \right| = \frac{\mid a_1 \mid \cdot \mid a_2 \mid}{2 \mid a_3 \mid} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On démontre aussi de façon analogue l'égalité

$$(e, b_1) = (e, b_2) = \frac{1}{2}.$$

Passons maintenant au quadrilatère $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ inscrit dans le cercle S (fig. 15); le centre de ce cercle d'après ce qui précède est pris comme origine des coordonnées O ; quant au rayon de S nous le considérons comme égal à l'unité. Par analogie à ce qui a été exposé plus haut nous appellerons le point

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

centroïde (ou centre de gravité) du carré $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$; le point

$$h = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

sera son orthocentre et le cercle σ de rayon $1/2$ avec son centre au point

$$e = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}$$

sera le cercle d'Euler du quadrilatère.

Notre problème le plus immédiat consistera à donner à toutes ces figures une interprétation géométrique.

Examinons encore les centroïdes m_4, m_3, m_2 et m_1 , les orthocentres h_4, h_3, h_2 et h_1 et les centres des cercles d'Euler e_4, e_3, e_2 et e_1 des triangles

$$\overline{a_1 a_2 a_3}, \quad \overline{a_1 a_2 a_4}, \quad \overline{a_1 a_3 a_4} \quad \text{et} \quad \overline{a_2 a_3 a_4}.$$

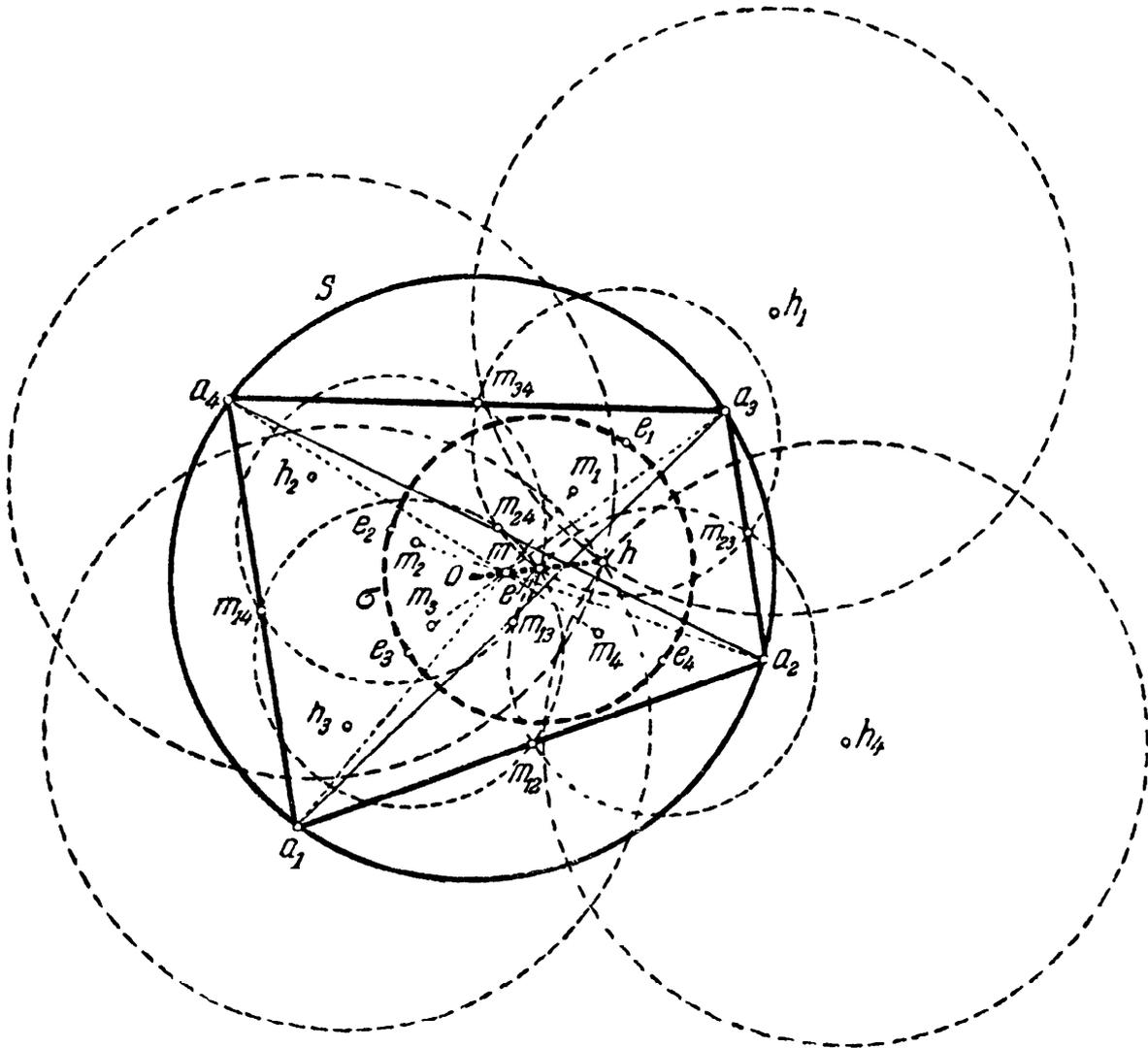


FIG. 15.

Remarquons tout d'abord que

$$(h, h_4) = |h - h_4| = |(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + a_3)| = |a_4| = 1$$

et par analogie

$$(h, h_1) = (h, h_2) = (h, h_3) = 1$$

Ainsi, quatre cercles, égaux au cercle circonscrit S d'un quadrilatère, dont les centres coïncident avec l'orthocentre des triangles

$$\overline{a_1 a_2 a_3}, \quad \overline{a_1 a_2 a_4}, \quad \overline{a_1 a_3 a_4} \quad \text{et} \quad \overline{a_2 a_3 a_4},$$

se coupent en un point h ; nous appellerons aussi ce point **orthocentre du quadrilatère** $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} (e, e_4) &= |e - e_4| \\ &= \left| \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} \right| = \left| \frac{a_4}{2} \right| = \frac{|a_4|}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et par analogie

$$(e, e_1) = (e, e_2) = (e, e_3) = \frac{1}{2}.$$

D'où il s'ensuit que « les cercles d'Euler » des quatre triangles

$$\overline{a_1a_2a_3}, \quad \overline{a_1a_2a_4}, \quad \overline{a_1a_3a_4} \quad \text{et} \quad \overline{a_2a_3a_4}$$

se coupent en un point e , et les centres de ces cercles sont sur un cercle σ de centre e et de rayon $1/2$; nous avons appelé ce cercle **cercle d'Euler** du quadrilatère $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

Enfin du fait que

$$a_4 - m = a_4 - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{3a_4 - a_1 - a_2 - a_3}{4}$$

et

$$m - m_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{3a_4 - a_1 - a_2 - a_3}{12},$$

$$a_4 - m = 3(m - m_4),$$

il s'ensuit que le point m appartient au segment $\overline{a_4m_4}$ et le divise dans le rapport

$$(a_4, m) : (m, m_4) = 3 : 1.$$

Par analogie, on montre que le point m appartient aux segments $\overline{a_1m_1}$, $\overline{a_2m_2}$ et $\overline{a_3m_3}$ et partage ces segments dans le rapport :

$$(a_1, m) : (m, m_1) = (a_2, m) : (m, m_2) = (a_3, m) : (m, m_3) = 3 : 1.$$

En d'autres termes *quatre segments* $\overline{a_1m_1}$, $\overline{a_2m_2}$, $\overline{a_3m_3}$ et $\overline{a_4m_4}$, qui relient chaque sommet d'un quadrilatère centroïde du triangle formé par les trois autres sommets se coupent en un point m et s'y divisent dans le rapport $3 : 1$. Nous appellerons aussi ce point *centroïde* du carré $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

On peut aussi remarquer, que *les points*

$$O, \quad m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}, \quad e = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}$$

et

$$h = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

sont sur une droite, de plus :

$$(O, m) = \frac{1}{4} (O, h), \quad (O, e) = \frac{1}{2} (O, h);$$

On peut appeler cette droite **droite d'Euler** du quadrilatère.

Ce qui a été dit plus haut résoud le problème de la définition géométrique du centroïde m , de l'orthocentre h et du cercle d'Euler σ du quadrilatère $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$. Cependant, nous ne nous bornerons pas à ces définitions et nous donnerons ici encore quelques théorèmes qui caractérisent ces mêmes points. Tout d'abord, on voit facilement que

$$\begin{aligned} m &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \\ &= \frac{\frac{a_1 + a_4}{2} + \frac{a_3 + a_2}{2}}{2} = \frac{\frac{a_1 + a_3}{2} + \frac{a_2 + a_4}{2}}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le point m est le milieu commun aux segments $\overline{m_{12}m_{34}}$,

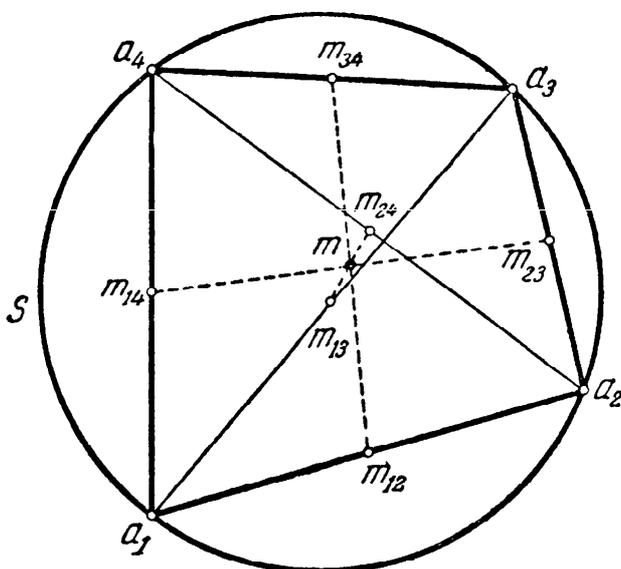


FIG. 16.

$\overline{m_{14}m_{23}}$, $\overline{m_{13}m_{24}}$, qui unissent les milieux m_{12} et m_{34} des côtés opposés $\overline{a_1 a_2}$ et $\overline{a_3 a_4}$ du quadrilatère; les milieux m_{14} et m_{23} des côtés opposés $\overline{a_1 a_4}$ et $\overline{a_2 a_3}$; les milieux m_{13} et m_{24} des diagonales $\overline{a_1 a_3}$ et $\overline{a_2 a_4}$: *trois segments, unissant les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales d'un quadrilatère $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ se coupent en un point m , centroïde du quadrilatère, et s'y divisent par moitié (fig. 16).*

Le centre e du cercle d'Euler σ d'un quadrilatère $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ est symétrique du centre O du cercle circonscrit par rapport au centroïde m . Remarquons aussi que

$$e = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} = \frac{(a_1 + a_2 + a_3) + a_4}{2} = \frac{h_4 + a_4}{2}$$

et par analogie

$$e = \frac{h_1 + a_1}{2} = \frac{h_2 + a_2}{2} = \frac{h_3 + a_3}{2}.$$

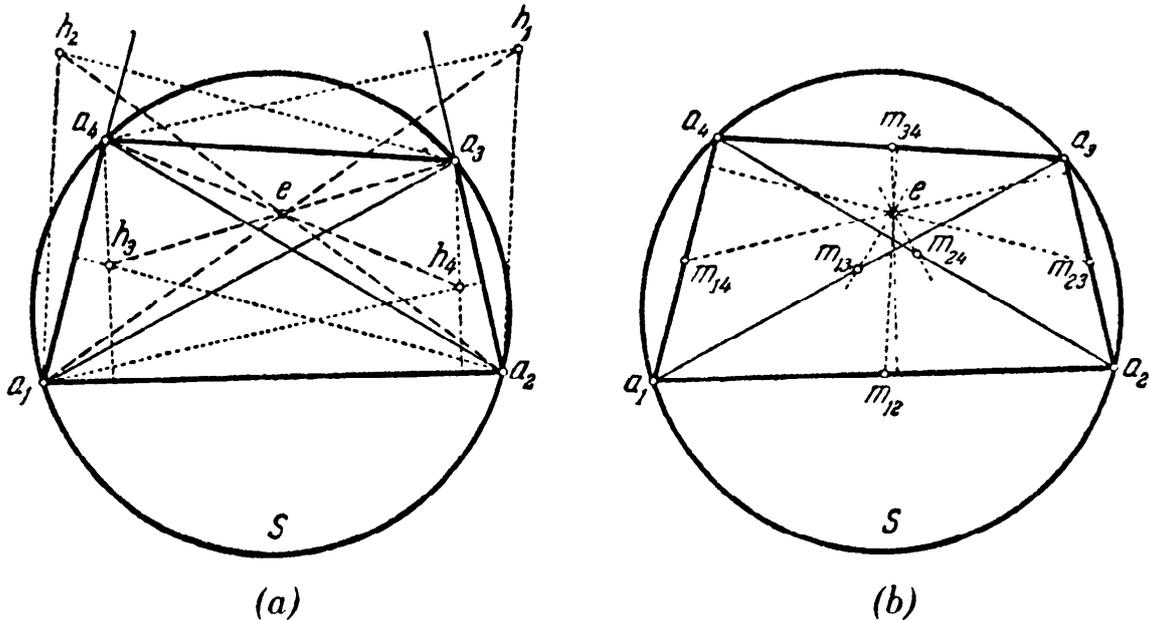


FIG. 17.

Par suite, les segments $\overline{a_1h_1}$, $\overline{a_2h_2}$, $\overline{a_3h_3}$ et $\overline{a_4h_4}$ passent tous par le point e et s'y divisent par moitié: quatre segments $\overline{a_1h_1}$, $\overline{a_2h_2}$, $\overline{a_3h_3}$ et $\overline{a_4h_4}$, qui unissent chaque hauteur d'un quadrilatère par l'orthocentre du triangle formé par les trois autres sommets se coupent en une pointe — centre du cercle d'Euler du quadrilatère — et s'y divisent par moitié (fig. 17, a).

Considérons encore l'angle φ_{12} entre les droites $[m_{12}e]$ et $[a_3a_4]$ (où $m_{12} = (a_1 + a_2)/2$, comme précédemment, est le milieu de côté $\overline{a_1a_2}$). Suivant la formule (8) (p. 30) nous avons

$$\varphi_{12} = \text{Arg} \frac{e - m_{12}}{a_3 - a_4}$$

Remarquons que si e_{12} est le point d'intersection des droites $[m_{12}e]$ et $[a_3a_4]$, alors on peut considérer que

$$\text{Arg}(e - e_{12}) = \text{Arg}(e - m_{12}), \quad \text{Arg}(a_3 - e_{12}) = \text{Arg}(a_3 - a_4).$$

Mais

$$e - m_{12} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} - \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a_3 + a_4}{2}$$

et en vertu des lois de division des nombres complexes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{e - m_{12}}{a_3 - a_4} &= \frac{(a_3 + a_4)(\bar{a}_3 - \bar{a}_4)}{2(a_3 - a_4)(\bar{a}_3 - \bar{a}_4)} \\ &= \frac{a_3\bar{a}_3 + a_4\bar{a}_3 - a_3\bar{a}_4 - a_4\bar{a}_4}{2(a_3\bar{a}_3 - a_4\bar{a}_3 - a_3\bar{a}_4 + a_4\bar{a}_4)} = \frac{\bar{a}_3a_4 - a_3\bar{a}_4}{2(2 - \bar{a}_3a_4 - a_3\bar{a}_4)} \end{aligned}$$

(rappelons que $a_3\bar{a}_3 = a_4\bar{a}_4 = 1$). Il en ressort que ce rapport est un nombre purement imaginaire (car il y a un nombre réel au dénominateur de la deuxième fraction alors que le numérateur — différence de deux nombres conjugués — est purement imaginaire) et donc

$$\varphi_{12} = \text{Arg} \frac{\bar{a}_3a_4 - a_3\bar{a}_4}{2(2 + \bar{a}_3a_4 + a_3\bar{a}_4)} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad [m_{12}e] \perp [a_3a_4].$$

On démontre de même que

$$\begin{aligned} [m_{23}e] \perp [a_4a_1], \quad [m_{34}e] \perp [a_1a_2], \quad [m_{41}e] \perp [a_2a_3], \\ [m_{13}e] \perp [a_2a_4], \quad [m_{24}e] \perp [a_1a_3]. \end{aligned}$$

Ainsi, six perpendiculaires abaissées du milieu de chacun des côtés et des diagonales d'un quadrilatère $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ au côté opposé (où à la diagonale opposé dans le cas des diagonales) se coupent en un point e , centre du cercle d'Euler du quadrilatère (fig. 17, b).

Enfin, l'orthocentre h du quadrilatère $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ est symétrique du centre O du cercle circonscrit par rapport au centre e du cercle d'Euler.

Il n'y a aucune difficulté à appliquer la plupart des résultats obtenus à des polygones quelconques inscrits dans le cercle S . Considérons, par exemple, le pentagone $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, nous prendrons, comme nous l'avons fait plus haut, le cercle S qui lui est circonscrit comme cercle unité $z\bar{z} = 1$ du

plan de la variable complexe (fig. 18). Soit aussi m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ; h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 et e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 les centroïdes orthocentres et centres des cercles d'Euler des quadrilatères

$$\overline{a_2 a_3 a_4 a_5}, \quad \overline{a_1 a_3 a_4 a_5}, \quad \overline{a_1 a_2 a_4 a_5}, \quad \overline{a_1 a_2 a_3 a_5} \quad \text{et} \quad \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

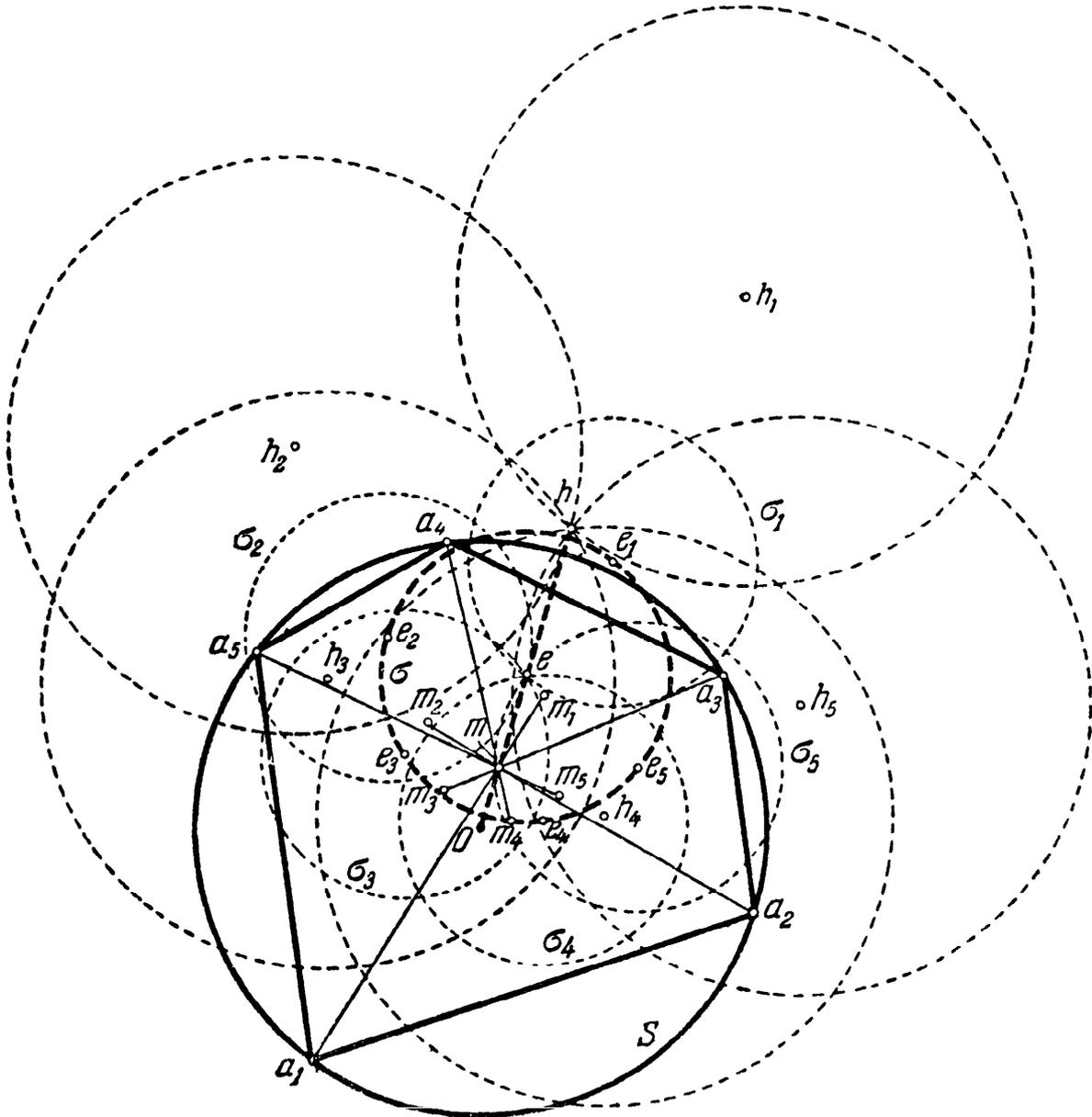


FIG. 18.

Les points

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}, \quad h = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

$$e = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2}$$

nous les appellerons respectivement *centroïde*, *orthocentre* et *centre du cercle d'Euler* du pentagone $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$; posons le rayon du cercle d'Euler σ égal à $1/2$.

On démontre, exactement comme plus haut, que les cinq cercles, égaux au cercle circonscrit S du pentagone $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ et ayant comme centres les orthocentres h_1, h_2, h_3, h_4 et h_5 des quadrilatères

$$\overline{a_2a_3a_4a_5}, \quad \overline{a_1a_3a_4a_5}, \quad \overline{a_1a_2a_4a_5}, \quad \overline{a_1a_2a_3a_5} \quad \text{et} \quad \overline{a_1a_2a_3a_4},$$

se coupent en un point h (**définition géométrique de l'orthocentre du pentagone**). Les cinq cercles d'Euler $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ et σ_5 de ces cinq quadrilatères se coupent en un point e , et leurs centres sont sur un cercle σ de centre e et de rayon $1/2$ (**définition géométrique du cercle d'Euler du pentagone**).

Enfin, cinq segments $\overline{a_1m_1}, \overline{a_2m_2}, \overline{a_3m_3}, \overline{a_4m_4}$ et $\overline{a_5m_5}$ qui relient les sommets du pentagone $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ aux centroïdes des quadrilatères formés par les quatre autres sommets, se coupent en un point m et s'y divisent dans le rapport $4 : 1$, en comptant à partir du sommet (**définition géométrique du centroïde du pentagone**). Il est clair aussi que les points O, m, e et h sont sur une même droite, avec cela

$$(O, m) = \frac{1}{5} (O, h), \quad (O, e) = \frac{1}{2} (O, h);$$

il est naturel d'appeler cette droite **droite d'Euler** du pentagone. On voit aussi facilement que l'orthocentre h du pentagone est symétrique du centre O du cercle circonscrit par rapport au centre e du cercle d'Euler.

On peut aussi aisément s'assurer que les dix segments reliant les milieux de chacun des côtés et de chaque diagonale d'un pentagone au centroïde des triangles, formés par les trois sommets, par lesquels ne passe pas ce côté ou cette diagonale, se coupent en un point m , « centroïde du pentagone » et s'y divisent dans le rapport $3 : 2$ (en comptant à partir du milieu du côté ou de la diagonale). Ensuite, les cinq segments, reliant chacun des sommets d'un pentagone à l'orthocentre du quadrilatère formé par les quatre autres sommets, se coupent en un point — centre du cercle d'Euler du pentagone — et s'y divisent par moitié. En outre les dix perpendiculaires abaissées des centres des cercles d'Euler des triangles, formés par trois quelconques des sommets du pentagone, sur les segments qui relient deux autres de ses sommets (sur un côté ou une diagonale du pentagone), se coupent en un point e — centre du cercle d'Euler du pentagone. De façon

analogue, si nous considérons les notions de « centroïde », d'« orthocentre » et de cercle d'Euler déjà définies pour tous les polygones inscrits dans un cercle, dont le nombre de côtés est inférieur à un nombre donné « n », l'orthocentre h du polygone à n côtés $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, inscrit dans le cercle S peut être défini comme étant *le point d'intersection de « n » cercles égaux à S ayant pour centres les orthocentres des polygones de « $n - 1$ » côtés, formés par les groupes de $n - 1$ sommets du polygone de n côtés. Le cercle d'Euler σ du polygone de n côtés $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ a comme définition : *Le cercle, auquel appartiennent les centres des cercles d'Euler, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ de ces mêmes n polygones de $n - 1$ côtés, de plus le centre e de ce cercle σ sera le point d'intersection des n cercles $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$* . Enfin, le centroïde « m » du polygone de n côtés inscrit dans le cercle S sera *le point d'intersection des « n » segments qui relient chaque sommet du polygone de n côtés au centroïde du polygone de $(n - 1)$ côtés, formé par tous les autres sommets S ; (le point m divise tous ces segments dans le rapport $(n - 1) : 1$, à compter du sommet du polygone de n côtés). Les points h, e et m ainsi définis appartiennent à une seule droite, qui passe aussi par O (de plus $(O, m) = \frac{1}{n}(O, h) (O, e) = \frac{1}{2}(O, h)$ — droite d'Euler du polygone de n côtés.**

Notons aussi, que tous les segments qui relient le centroïde du polygone de k côtés, formé par k sommets du polygone de n côtés $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, au centroïde du polygone de $(n - k)$ côtés formé par les $n - k$ sommets restants, passent par le point « m », centroïde du polygone de n côtés (qui les divisent dans le rapport $n - k : k$, à compter du centroïde du polygone de k côtés). De plus, les n segments qui relient chaque sommet du polygone de n côtés à l'orthocentre du polygone de $(n - 1)$ côtés, formé par les $n - 1$ sommets restants, se coupent en un point e — centre du cercle d'Euler du polygone à n côtés — qui les divise en deux.

Nous pouvons généraliser aussi ce dernier théorème : tous les segments qui unissent l'orthocentre du polygone de k côtés, formé par k quelconques des n sommets de notre polygone, et l'orthocentre du polygone de $(n - k)$ côtés formé par les $n - k$ sommets restants, passent par un point e qui les divise en deux. [Ici par « orthocentre » de la corde $a_i a_j$ du cercle S il faut comprendre le point $h_{i,j} = a_i + a_j$, symétrique du centre O du cercle S par rapport à cette corde.] En outre, $n(n - 1)/2$ perpendiculaires abaissées des centres des cercles d'Euler du polygone de $(n - 2)$ côtés, formé par $n - 2$ quelconques des sommets du polygone de n côtés, sur les segments qui relient les deux sommets restants (côté ou diagonale du polygone de

n côtés), se coupent en un point e , centre du cercle d'Euler du polygone de n côtés. On pourrait allonger la liste des théorèmes de ce genre.

Considérons maintenant les pieds u_1, u_2, u_3 des perpendiculaires abaissées d'un certain point u du « cercle unité » S du plan complexe sur les côtés $[a_1a_2]$, $[a_2a_3]$ et $[a_3a_1]$ du triangle $\overline{a_1a_2a_3}$ inscrit dans le cercle S (fig. 19). On a montré à la page 53 que le pied de la perpendiculaire abaissée du point a_3 du cercle S sur la corde $\overline{a_1a_2}$ du cercle est défini par le nombre

$$b_3 = \frac{1}{2} \left(a_1 + a_2 + a_3 - \frac{a_1a_2}{3} \right).$$

D'où il s'ensuit que

$$u_3 = \frac{1}{2} \left(a_1 + a_2 + u - \frac{a_1a_2}{u} \right);$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(a_2 + a_3 + u - \frac{a_2a_3}{u} \right);$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(a_3 + a_1 + u - \frac{a_3a_1}{u} \right).$$

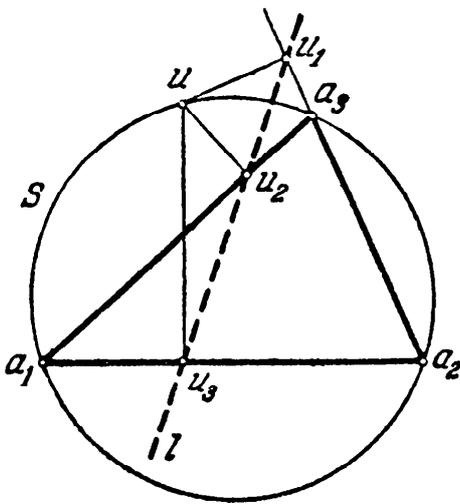


FIG. 19.

Notons maintenant que

$$\begin{aligned} V(u_1, u_2, u_3) &= (u_1 - u_3) : (u_2 - u_3) \\ &= \frac{1}{2} \left(a_3 - a_1 - \frac{a_2a_3}{u} + \frac{a_1a_2}{u} \right) : \frac{1}{2} \left(a_3 - a_2 - \frac{a_3a_1}{u} + \frac{a_1a_2}{u} \right) \\ &= \left[(a_3 - a_1) \left(1 - \frac{a_2}{u} \right) \right] : \left[(a_3 - a_2) \left(1 - \frac{a_1}{u} \right) \right] \\ &= \frac{(a_3 - a_1)(u - a_2)}{u} : \frac{(a_3 - a_2)(u - a_1)}{u} \\ &= \frac{a_3 - a_1}{u - a_1} : \frac{a_3 - a_2}{u - a_2} = W(a_3, u, a_1, a_2). \end{aligned}$$

Mais puisque les points a_3, u, a_1 et a_2 sont sur un seul cercle S , le rapport anharmonique $W(a_3, u, a_1, a_2)$ est réel ; c'est pourquoi le rapport $V(u_1, u_2, u_3)$ est lui aussi réel, et, par conséquent les trois points u_1, u_2 et u_3 sont sur une même

droite. On appelle cette droite droite de Simson (du point u par rapport au triangle $\overline{a_1 a_2 a_3}$ du nom du mathématicien anglais Robert Simson (1687-1768) qui établit le premier cette proposition.

Écrivons maintenant l'équation de la droite de Simson l . Nous partons de la forme (10 a) de l'équation de la droite qui passe par les deux points z_1 et z_2 (voir p. 32) ; nous normaliserons en outre encore cette équation en divisant tous ses membres par le coefficient de z :

$$z - \frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \bar{z} + \frac{z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} = 0. \quad (21)$$

En posant ici $z_1 \equiv u_1$ et $z_2 \equiv u_3$, nous obtenons l'expression suivante pour le coefficient de \bar{z} :

$$\begin{aligned} (u_1 - u_3) l (\bar{u}_1 - \bar{u}_3) &= \frac{(a_3 - a_1)(u - a_2)}{u} : \frac{(\bar{a}_3 - \bar{a}_1)(\bar{u} - \bar{a}_2)}{\bar{u}} \\ &= \frac{(a_3 - a_1)(u - a_2)}{u} : \frac{\left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1}\right) \left(\frac{1}{\bar{u}} - \frac{1}{\bar{a}_2}\right)}{\frac{1}{\bar{u}}} \\ &= \frac{(a_3 - a_1)(u - a_2)}{u} : \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - u)}{a_1 a_2 a_3} = \frac{a_1 a_2 a_3}{u} \end{aligned}$$

(puisque $a_1 \bar{a}_1 = 1$, $\bar{a}_1 = 1/a_1$ et de même $\bar{a}_2 = 1/a_2$, $\bar{a}_3 = 1/a_3$ et $u = 1/\bar{u}$). Maintenant, afin de déterminer le terme constant C de l'équation (21), il suffit de rapprocher cette équation

$$\frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 a_3}{u}$$

et

$$z = u_1 = \frac{1}{2} \left(a_2 + a_3 + u - \frac{a_2 a_3}{u} \right) ;$$

nous obtenons alors

$$\frac{1}{2} \left(a_2 + a_3 + u - \frac{a_2 a_3}{u} \right) - \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2 a_3}{u} \left(\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{u} - \frac{\bar{a}_2 \bar{a}_3}{\bar{u}} \right) + C = 0,$$

d'où, puisque $\bar{a}_2 = 1/a_2$, $\bar{a}_3 = 1/a_3$, $\bar{u} = 1/u$ et $\bar{a}_1 = 1/a_1$, nous avons :

$$C = -\frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3 + u) + \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2 a_3}{u} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{u}).$$

Ainsi, nous aboutissons finalement à l'équation suivante :

$$z - \frac{a_1 a_2 a_3}{u} \bar{z} - \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + a_3 + u) + \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2 a_3}{u} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{u}) \quad (22)$$

L'équation (22) montre d'emblée, que la droite de Simson du point u relatif au triangle $\overline{a_1 a_2 a_3}$ passe par le point

$$z = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + u}{2};$$

si on convient d'écrire a_4 à la place de u , alors la droite de Simson du sommet a_4

du quadrilatère $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ inscrit dans le cercle S , relativement au triangle $\overline{a_1 a_2 a_3}$ formé par les trois autres sommets de $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$, passe par le centre

$$e = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2}$$

du cercle d'Euler de ce quadrilatère. Ce qui permet aussi de donner une définition du centre du cercle d'Euler du quadrilatère. Les quatre droites de Simson des quatre sommets du quadrilatère $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ inscrit dans le cercle S , relativement aux triangles, formés par les trios de sommets restants de

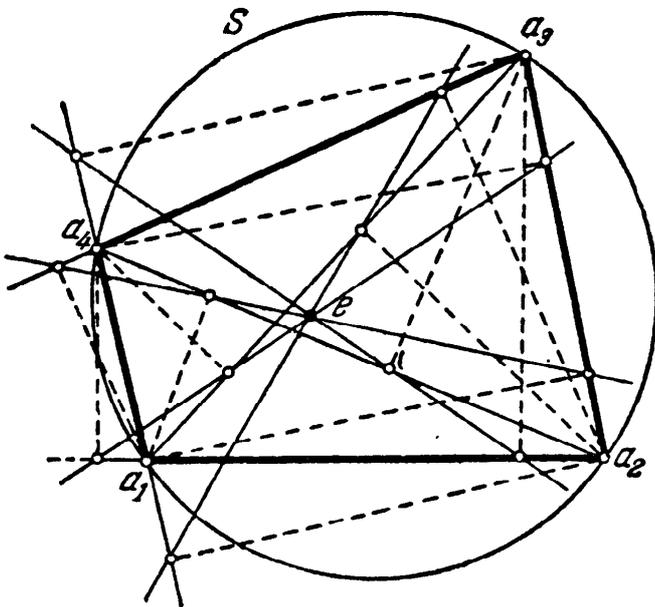


FIG. 20.

$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ se coupent en un point e — centre du cercle d'Euler du quadrilatère $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ (fig. 20).

Remarquons aussi, comme il est facile de le calculer que le pied de la perpendiculaire abaissée du point u sur la droite (22) est représenté par

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + 3u}{4} - \frac{a_1 a_2 a_3}{4u} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 - \bar{u}). \quad (23)$$

On peut, de cette formule, par un calcul direct déduire que si u est un point du cercle S circonscrit au quadrilatère $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ alors les pieds des perpendiculaires, abaissées du point u sur les droites de S de ce point relativement aux triangles $\overline{a_1 a_2 a_3}$, $\overline{a_1 a_2 a_4}$, $\overline{a_1 a_3 a_4}$ et $\overline{a_2 a_3 a_4}$, sont sur une même droite (fig. 21) ; on appelle cette droite droite de Simson du point u relativement au quadrilatère $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$.

Par analogie, les pieds des perpendiculaires abaissées du point u du cercle S circonscrit au pentagone $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ sur les droites de Simson, de ce point relativement aux cinq quadrilatères

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}, \quad \overline{a_1 a_2 a_3 a_5}, \quad \overline{a_1 a_2 a_4 a_5} \quad \text{et} \quad \overline{a_2 a_3 a_4 a_5},$$

sont sur une seule droite, droite de Simson du point u relativement au pentagone

$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$. Si enfin on définit de façon semblable les droites de Simson du point u du cercle S relativement à n'importe quel polygone inscrit dans S , ayant moins de n côtés et si on considère ensuite le polygone $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ inscrit dans S alors les pieds des perpendiculaires abaissées du point u sur n droites de Simson de ce point relativement à tous les polygones de $(n - 1)$ côtés possibles, formés par n'importe lesquels $n - 1$ sommets du polygone à n côtés, seront aussi toutes sur une droite — droite de Simson du point u relativement au

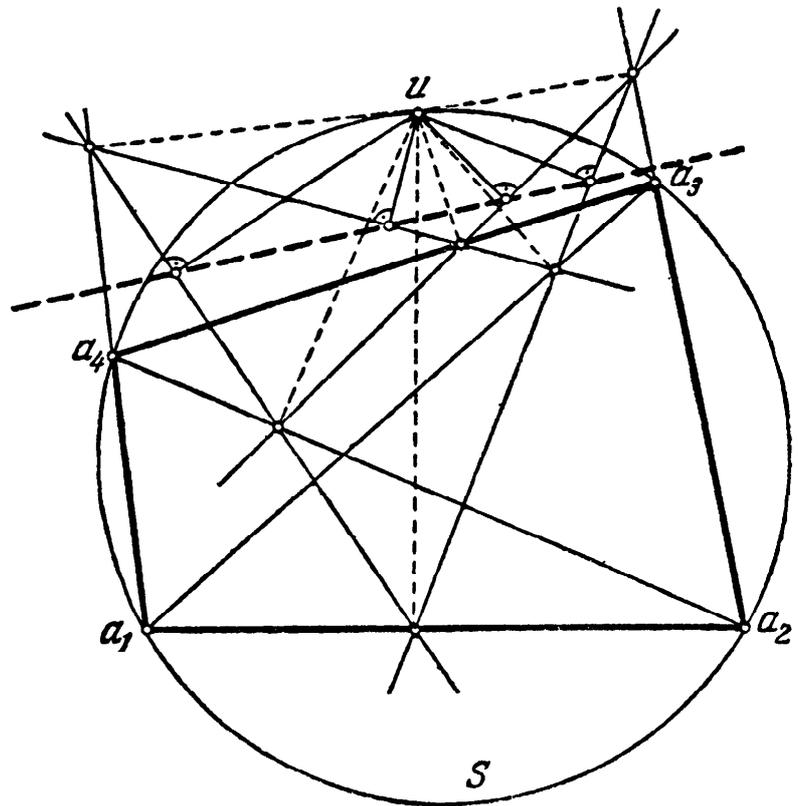


FIG. 21.

polygone de n côtés $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$. Si on prend le cercle S comme « cercle unité » du plan complexe, l'équation de la droite de Simson du point u relativement au polygone de n côtés $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ peut s'écrire ainsi

$$z + (-1)^n \frac{s_n}{u^{n-2}} \bar{z} = \frac{(2^{n-2} - 1)u^n + s_1 u^{n-1} - s_2 u^{n-2}}{2^{n-2} u^{n-1}} + \frac{s_3 u^{n-3} + \dots + (-1)^n s_{n-1} u + (-1)^n (2^{n-2} - 1) s_n}{2^{n-2} u^{n-1}}, \quad (24)$$

où

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \quad s_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n,$$

$$s_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n, \dots, s_n = a_1 a_2 \dots a_n.$$

[Remarquons que l'équation (22) peut s'écrire aussi :

$$z - \frac{a_1 a_2 a_3}{u} \bar{z} = \frac{u^3 + a_1 u^2 + a_2 u^2 + a_3 u^2 - a_2 a_3 u - a_1 a_3 u - a_1 a_2 u - a_1 a_2 a_3}{2u^2}$$

ou

$$z - \frac{s_3}{u} \bar{z} = \frac{(2 - 1)u^3 + s_1 u^2 - s_2 u - (2 - 1)s_3}{2u^2}, \quad (22a)$$

on voit que cela revient à un cas particulier de l'équation (24) à laquelle nous parvenons en posant $n = 3$]

Enfin, la définition du cercle d'Euler d'un polygone $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ inscrit dans le cercle S peut être considérablement généralisée. Associons au polygone de n côtés $a_1 a_2 \dots a_n$, où $n \geq 2$, inscrit dans « le cercle unité » S n cercles $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}, \dots, \sigma^{(n)}$; prenons pour centres de ces cercles les points

$$e^{(1)} = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad e^{(2)} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2},$$

$$e^{(3)} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{3}, \dots, e^{(n)} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

et posons leurs rayons égaux à $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n$. On peut appeler ces cercles 1^{er}, 2^e, 3^e, n -ième cercles d'Euler du polygone de n côtés ; de plus le 2^e cercle d'Euler — est ce même cercle que nous avons appelé plus haut simplement « cercle d'Euler », quant aux centres du 1^{er} et du n -ième cercle d'Euler ils coïncident respectivement avec l'orthocentre h et le centroïde m du polygone de n côtés. Il est clair que pour le segment $\overline{a_1 a_2}$ le 1^{er} cercle d'Euler $\sigma^{(1)}$ sera symétrique du cercle S par rapport à la droite $[a_1 a_2]$, tandis que le 2^e cercle d'Euler $\sigma^{(2)}$ aura son centre au milieu du segment et un rayon égal à $1/2$ (fig. 22, a). Pour le triangle $\overline{a_1 a_2 a_3}$ le 1^{er} cercle d'Euler $\sigma^{(1)}$ sera centré à l'orthocentre du triangle et aura pour rayon 1 ; le 2^e cercle d'Euler $\sigma^{(2)}$ coïncide avec le cercle des neuf points ; le 3^e cercle d'Euler $\sigma^{(3)}$ aura son centre au centroïde du triangle et aura pour rayon $1/3$ (fig. 22, b). De plus, comme il est facile de s'en assurer, *les centres des n -ièmes cercles d'Euler des n polygones de $(n - 1)$ côtés, formés par $n - 1$ quelconques des sommets du polygone à n côtés $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ inscrit dans le cercle S , appartiennent au i -ième cercle d'Euler du polygone à n côtés $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ (et ces mêmes n cercles se coupent en un point — centre $e^{(i)}$ du cercle $\sigma^{(i)}$). Enfin, le segment qui relie le centre du i -ième cercle d'Euler du polygone à k côtés formé par k quelconques des sommets du polygone $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, au centre du*

j-ième cercle d'Euler du polygone à $(n - k)$ côtés, formé par les $n - k$ sommets restants, passe par le centre $e^{(i+j)}$ du $(i + j)$ -ième cercle d'Euler du polygone à $(n - k)$ côtés, formé par les $n - k$ sommets restants du polygone à n côtés (et se divisent en ce point dans le rapport $j : i$, à compter du centre du cercle d'Euler du polygone à k côtés). De plus, les perpendiculaires abaissées des $n(n - 1)/2$ centres des i -ièmes cercles d'Euler de tous les polygones possibles à $(n - 2)$ côtés,

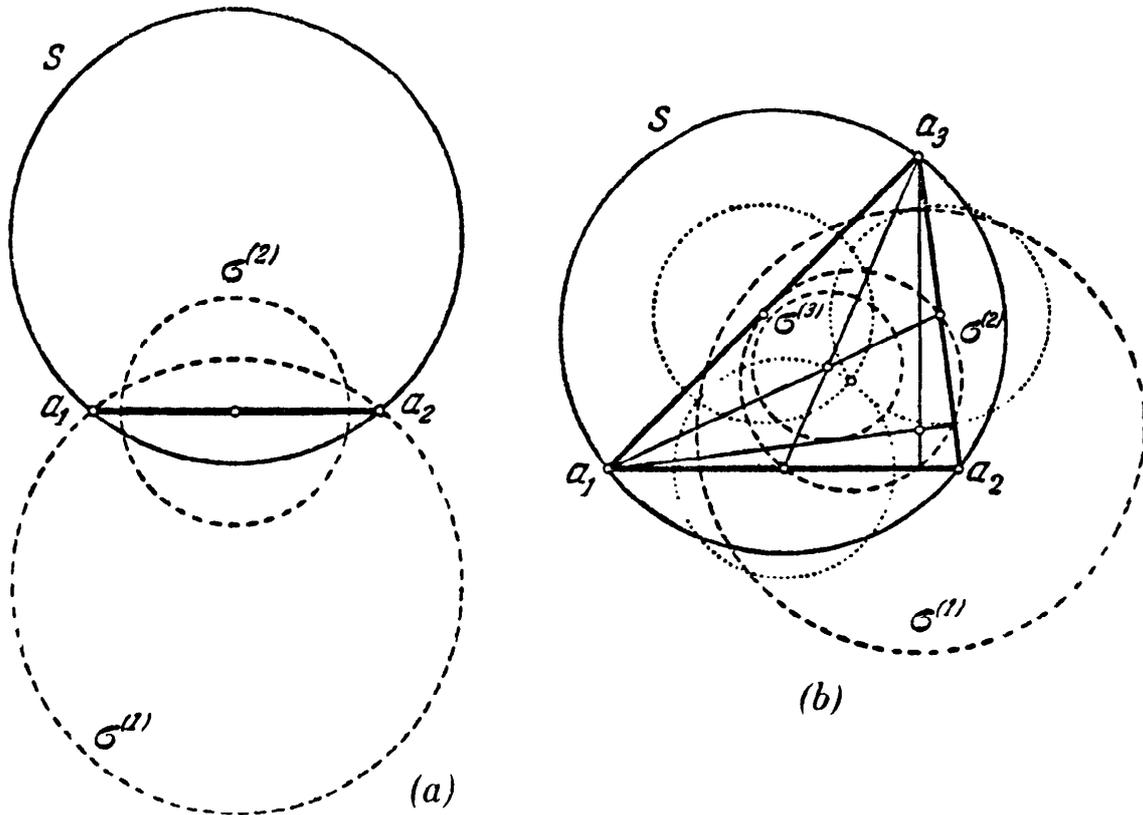


FIG. 22.

formés par $n - 2$ quelconques des sommets du polygone à n côtés $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, sur le segment reliant les deux sommets restant de $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ (côté ou diagonale du polygone à n côtés) se coupent en un point $e^{(i)}$ — centre du i -ième cercle d'Euler du polygone à n côtés. Il est clair aussi, que les centres de tous les cercles d'Euler d'un polygone sont sur une droite, qui passe par le centre du cercle circonscrit, — droite d'Euler du polygone.

Considérons maintenant le rapport

$$V(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

des trois points z_1, z_2, z_3 du plan et le rapport anharmonique

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

des quatre points z_1, z_2, z_3, z_4 . Éclaircissons de quelle façon ces valeurs changent par permutation des points qu'elles contiennent.

Désignons la première expression :

$$V(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

par λ ; on a alors,

$$V(z_2, z_1, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{1}{\lambda}$$

et

$$V(z_1, z_3, z_2) = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{(z_2 - z_3) - (z_1 - z_3)}{z_2 - z_3} = 1 - \lambda \quad (25)$$

L'expression V relative à trois points se change en son inverse par permutation des deux premiers points; la somme de l'expression V originale et de l'expression V obtenue par permutation des deux derniers points est égale à l'unité.

En appliquant ces règles, nous obtenons par conséquent

$$\left. \begin{aligned} V(z_3, z_1, z_2) &= \frac{1}{1 - \lambda}, \\ V(z_2, z_3, z_1) &= 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \\ V(z_3, z_2, z_1) &= 1 : \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (25 a)$$

Ainsi, le rapport V de trois points du plan (à trois nombres complexes z, z_2 et z_3) suivant l'ordre dans lequel sont pris les points peut avoir les six valeurs suivantes :

$$\lambda, \lambda_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_2 = 1 - \lambda, \quad \lambda_3 = \frac{1}{1 - \lambda},$$

$$\lambda_4 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \lambda_5 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Considérons maintenant un triangle quelconque $\overline{z_1 z_2 z_3}$. On peut associer à ce triangle le nombre complexe

$$\lambda = V(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3};$$

Cependant on parlera plus précisément de l'ensemble des six nombres $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 qui correspondent à notre triangle. Les nombres complexes $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont les sommets

de l'hexagone $\overline{\lambda\lambda_3\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_4}$ il peut être dégénéré ou étoilé); cet hexagone (fig. 23) ⁽¹⁾ a une relation étroite avec les propriétés du triangle de départ (ainsi, par exemple, tous les sommets de l'hexagone

$\overline{\lambda\lambda_3\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_4}$ sont alignés dans le cas et seulement dans le cas où tous les sommets du triangle $\overline{z_1z_2z_3}$ sont eux aussi alignés). Nous nous donnerons cependant à éclaircir ici un seul problème. Dans quels cas l'hexagone $\overline{\lambda\lambda_3\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_4}$ est dégénéré dans le sens que deux ou un plus grand nombre de ses sommets coïncident? Ainsi, on peut prendre comme « valeur initiale » de λ rapport des trois points n'importe quelle valeur des six valeurs possibles de ce rapport, et pour résoudre le problème posé il suffit de voir dans quels cas la valeur de λ est égale à l'un des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 . Mais si

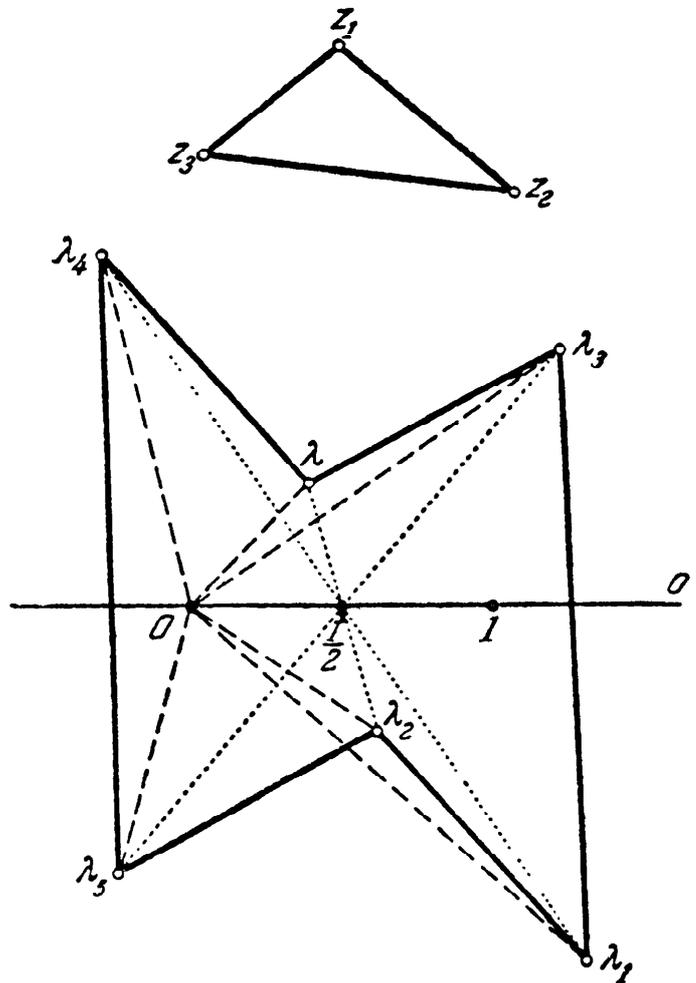


FIG. 23.

l'hexagone $\overline{\lambda\lambda_3\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_4}$ est dégénéré dans le sens que deux ou un plus grand nombre de ses sommets coïncident? Ainsi, on peut prendre comme « valeur initiale » de λ rapport des trois points n'importe quelle valeur des six valeurs possibles de ce rapport, et pour résoudre le problème posé il suffit de voir dans quels cas la valeur de λ est égale à l'un des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 . Mais si

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\lambda},$$

alors

$$\lambda = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = 1,$$

⁽¹⁾ Du reste, il apparaît clairement que l'hexagone $\overline{\lambda\lambda_3\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_4}$ est entièrement défini par un seul de ses sommets S . Afin de s'assurer de cette propriété, il suffit de remarquer qu'en vertu de la définition des nombres $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 les droites $[O\lambda]$ et $[O\lambda_1]$, $[O\lambda_2]$ et $[O\lambda_3]$, $[O\lambda_4]$ et $[O\lambda_5]$ sont symétriques par rapport à l'axe O ; $(O, \lambda_1) = 1/(O, \lambda)$, $(O, \lambda_3) = 1/(O, \lambda_2)$ et $(O, \lambda_5) = 1/(O, \lambda_4)$; les segments $\overline{\lambda\lambda_2}$, $\overline{\lambda_1\lambda_4}$ et $\overline{\lambda_3\lambda_5}$ se coupent au point $1/2$, qui est leur milieu commun (cf. fig. 23).

ce qui est impossible si les points z_1 , z_2 et z_3 sont distincts ou bien $\lambda = -1$;
si

$$\lambda = \lambda_2 = 1 - \lambda,$$

alors

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_4 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = -1 ;$$

si

$$\lambda = \lambda_5 = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

alors

$$\lambda = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = 0,$$

ce qui est aussi impossible si les points z_1 , z_2 et z_3 sont distincts ou bien $\lambda = 2$ et $\lambda_2 = 1 - \lambda = -1$. D'autre part si

$$\lambda = \lambda_3 = \frac{1}{1 - \lambda},$$

alors λ satisfait à l'équation du second degré

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

et par conséquent

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

ou bien

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2};$$

si

$$\lambda = \lambda_5 = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

alors λ satisfait à cette même équation du second degré. Notons que si

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2},$$

alors

$$\lambda_2 = 1 - \lambda = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

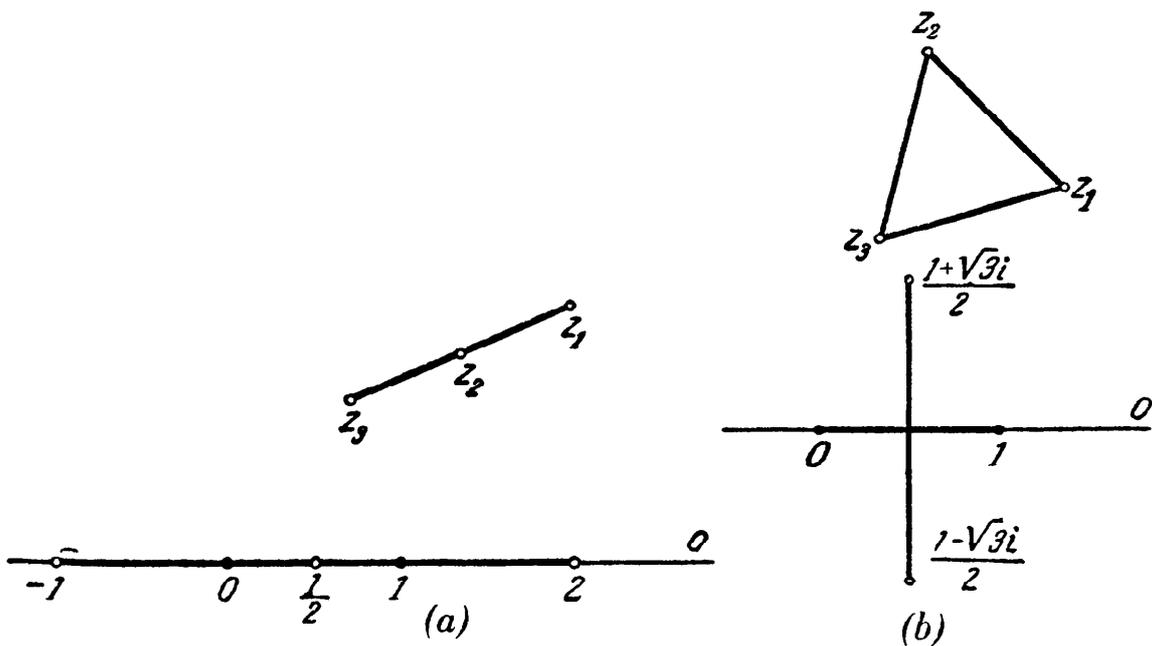


FIG. 24.

Nous parvenons ainsi à la conclusion suivante : L'hexagone $\overline{\lambda\lambda_3\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_4}$ (ou $\overline{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5}$) est dégénéré seulement dans le cas où une des six valeurs du rapport des trois points z_1, z_2 et z_3 est égale à -1 ou si une des six valeurs du rapport des trois points est égal à

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} (= \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ).$$

Dans le premier cas un des trois points z_1, z_2 et z_3 est le milieu du segment reliant les deux autres et l'hexagone $\overline{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5}$ dégénéré en « triangle »

$$\overline{-1 \frac{1}{2}},$$

dont trois « sommets » sont sur la droite O (fig. 24, *a*). Dans le deuxième cas, le triangle $\overline{z_1 z_2 z_3}$ est équilatéral et l'hexagone $\overline{\lambda \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}$ dégénère en un segment (fig. 24, *b*).

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

On peut tirer des conclusions analogues à propos du rapport anharmonique

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

des quatre points du plan. De la définition même du rapport anharmonique il s'ensuit que si $W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$, alors

$$\left. \begin{aligned} W(z_2, z_1, z_3, z_4) &= \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} : \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = \frac{1}{\lambda}, \\ W(z_1, z_2, z_4, z_3) &= \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{1}{\lambda}, \\ W(z_3, z_4, z_1, z_2) &= \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \lambda \end{aligned} \right\}$$

— le rapport anharmonique de quatre points se change en son inverse par permutation des deux premiers ou deux derniers points ; il ne change pas de valeur quand on échange la première et la deuxième paire de points.

De plus

$$\begin{aligned} W(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} = \frac{(z_2 - z_1)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} \\ &= \frac{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4) + (z_2 - z_4)(z_3 - z_1)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} \\ &= 1 - \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = 1 - \lambda \end{aligned}$$

le rapport anharmonique de quatre points ajouté au rapport anharmonique obtenu par échange des 2^e et 3^e points, donne l'unité.

L'application de ces lois simples permet de conclure qu'à tout changement de l'ordre des quatre points correspond six valeurs différentes du rapport anharmonique :

$$\begin{aligned}
 W(z_1, z_2, z_3, z_4) &= W(z_2, z_1, z_4, z_3) \\
 &= W(z_3, z_4, z_1, z_2) = W(z_4, z_3, z_2, z_1) = \lambda, \\
 W(z_1, z_2, z_4, z_3) &= W(z_2, z_1, z_3, z_4) \\
 &= W(z_3, z_4, z_2, z_1) = W(z_4, z_3, z_1, z_2) = \frac{1}{\lambda} = \lambda_1, \\
 W(z_1, z_3, z_2, z_4) &= W(z_2, z_4, z_1, z_3) \\
 &= W(z_3, z_1, z_4, z_2) = W(z_4, z_2, z_3, z_1) = a - \lambda = \lambda_2, \\
 W(z_1, z_3, z_4, z_2) &= W(z_2, z_3, z_1, z_4) \\
 &= W(z_3, z_1, z_2, z_4) = W(z_4, z_2, z_1, z_3) = \frac{1}{1 - \lambda} = \lambda_3, \\
 W(z_1, z_4, z_2, z_3) &= W(z_2, z_3, z_1, z_4) \\
 &= W(z_3, z_2, z_4, z_1) = W(z_4, z_1, z_3, z_2) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \lambda_4, \\
 W(z_1, z_4, z_3, z_2) &= W(z_2, z_3, z_4, z_1) \\
 &= W(z_3, z_2, z_1, z_4) = W(z_4, z_1, z_2, z_3) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \lambda_5.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Ainsi, à chaque quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ est associé un hexagone $\overline{\lambda \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}$ ⁽¹⁾ dont les propriétés sont étroitement liées aux propriétés du quadrilatère initial.

Voyons maintenant dans quels cas l'hexagone $\overline{\lambda \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}$ sera dégénéré, c'est-à-dire aura moins de six côtés distincts. Pour l'essentiel, cette question a déjà été résolue plus haut, au cours de l'étude du rapport $V(z_1, z_2, z_3)$ des trois points d'un plan : en effet les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 sont formés à partir du nombre λ exactement par le même procédé que précédemment. Ainsi, un quatuor de points tels que

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = -1; \tag{27}$$

(1) Cf. note du bas de page 69.

est un exemple de 4 points z_1, z_2, z_3 et z_4 dont le rapport anharmonique lors du changement de l'ordre des points ne prend pas six valeurs distinctes mais un nombre de valeurs distinctes inférieur au nombre des points; dans ces conditions, en changeant de toutes les façons possibles l'ordre des points z_1, z_2, z_3 et z_4 nous obtenons en tout trois valeurs différentes : — 1, 2 et $1/2$. Le groupe des quatre points z_1, z_2, z_3 et z_4 satisfaisant à l'équation (27) s'appelle quatuor harmonique (fig. 25 a) et le quadrilatère qui lui correspond

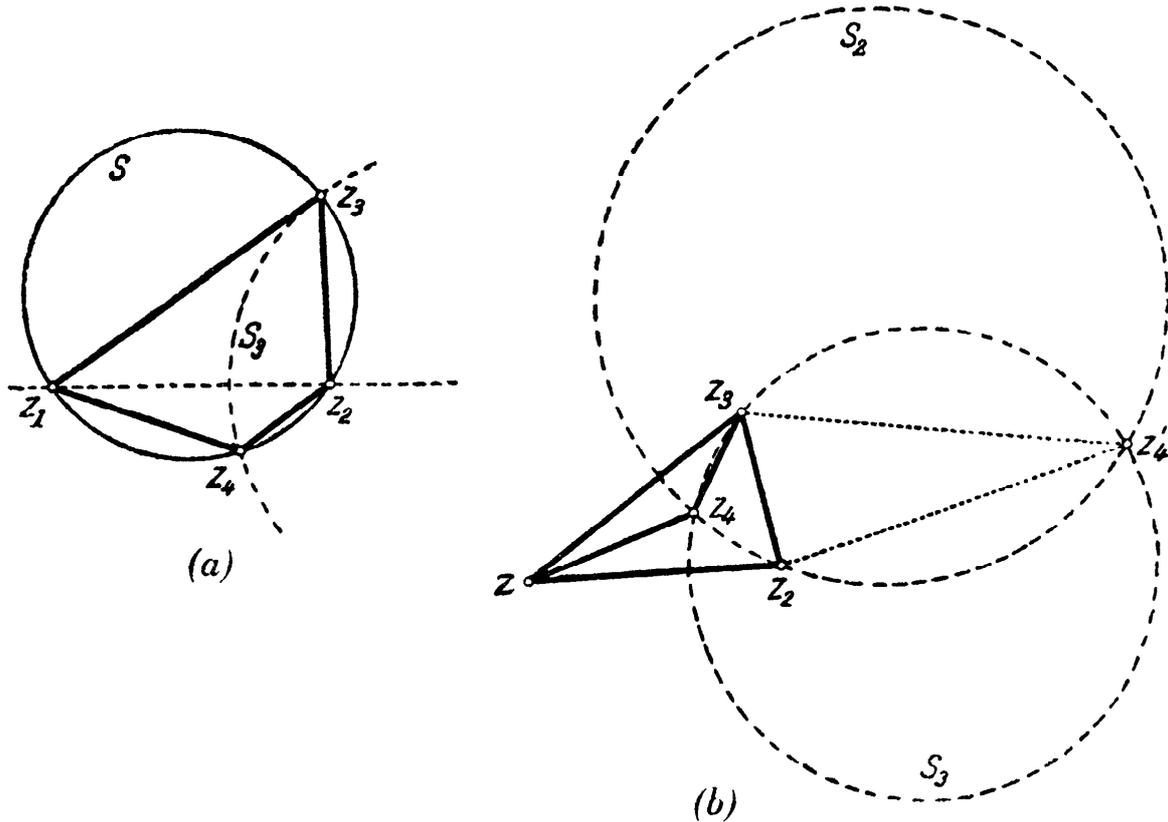


FIG. 25.

quadrilatère harmonique. Puisque dans ce cas le rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est réel on peut circonscrire un cercle au quadrilatère harmonique (cf. plus haut, p. 32-33; ce cercle peut dégénérer en droite).

D'autre part, de l'égalité

$$\begin{aligned} |W(z_1, z_2, z_3, z_4)| &= \left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \right| = \left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right| \cdot \left| \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \right| \\ &= \frac{(z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4)}{(z_2, z_3)(z_1, z_4)} = | -1 | = 1 \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$(z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4) = (z_1, z_4) \cdot (z_2, z_3);$$

ainsi, *les produits des longueurs des côtés opposés d'un quadrilatère harmonique sont égaux*. Il est clair que ces deux conditions caractérisent entièrement un quadrilatère harmonique : Si autour du quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ on peut circonscrire un cercle, alors le rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est réel, et si de plus

$$\frac{(z_1, z_3)(z_2, z_4)}{(z_1, z_4)(z_2, z_3)} = \left| \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \right| \cdot \left| \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \right| = 1,$$

alors $|W(z_1, z_2, z_3, z_4)| = 1$, d'où $W = -1$ (car le rapport anharmonique de quatre points distincts ne peut être égal à $+1$). D'où il résulte, par exemple, que le quadrilatère harmonique est un carré.

Pour trois points quelconques z_1, z_2, z_3 on peut toujours désigner un point z_4 tel que le quatuor z_1, z_2, z_3, z_4 soit harmonique : z_4 est le point d'intersection du cercle S circonscrit au triangle $\overline{z_1 z_2 z_3}$ avec le cercle d'Apollonius S_3 des points z_1 et z_2 , passant par le point z_3 (c'est-à-dire avec le lieu géométrique des points w , tels que

$$\frac{(w, z_1)}{(w, z_2)} = \frac{(z_3, z_1)}{(z_3, z_2)}$$

ou

$$(w, z_1) \cdot (z_3, z_2) = (w, z_2) \cdot (z_3, z_1),$$

(cf. p. 47-48). Dans le seul cas où le point z_3 est le milieu du segment $\overline{z_1 z_2}$ et où les deux « cercles » S et S_3 dégénèrent en droites, leur point d'intersection n'existera pas; dans ce cas z_4 jouera le rôle de « point indéfiniment éloigné » ∞ (car lorsque

$$W(z_1, z_2, z_3, \infty) = V(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = -1;$$

cf. plus haut, p. 34).

Nous obtenons un autre exemple d'un quatuor de points z_1, z_2, z_3, z_4 auquel ne correspondent pas six valeurs de rapport anharmonique W , mais un nombre inférieur au nombre de points en posant

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}; \quad (28)$$

en changeant par tous les moyens possibles l'ordre des points z nous aurons en tout deux valeurs différentes de rapport anharmonique :

$$\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$$

et

$$\cos (-60^\circ) + i \sin (-60^\circ) = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

le quatuor des points z_1, z_2, z_3, z_4 qui correspond à l'équation (28) s'appelle quatuor équi-harmonique des points, et le quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ — quadrilatère équiharmonique (fig. 25 b). Comme dans ce cas

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1, z_3)(z_2, z_4)}{(z_2, z_3) \cdot (z_1, z_4)} = |\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ| = 1,$$

on a comme précédemment

$$(z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4) = (z_1, z_4) \cdot (z_2, z_3).$$

D'autre part, des égalités

$$|W(z_1, z_3, z_2, z_4)| = |(\cos -60^\circ) + i \sin (-60^\circ)| = 1$$

et

$$|W(z_1, z_4, z_2, z_3)| = |\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ| = 1$$

il s'ensuit :

$$(z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4) = (z_1, z_4) \cdot (z_2, z_3)$$

et

$$(z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4) = (z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4).$$

ainsi, le produit des longueurs des côtés opposés (quelconques!) d'un quadrilatère équiharmonique est égal au produit des longueurs de ses diagonales

$$(z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4) = (z_1, z_4) \cdot (z_2, z_3) = (z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4).$$

Il est facile de voir que la dernière condition caractérise entièrement un quadrilatère équiharmonique ; en effet, on en déduit que $|\lambda| = 1$ et $|1 - \lambda| = 1$, où $\lambda = W(z_1, z_2, z_3, z_4)$, ce qui n'est possible que pour

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

ou

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

En particulier, le losange est un quadrilatère équiharmonique, dont le produit des diagonales est égal au carré du côté (losange de côté 1 et de diagonales $(\sqrt{3} + 1)/\sqrt{2}$ et $(\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$). Pour chaque triangle $\overline{z_1 z_2 z_3}$ on peut trouver deux points z_4 et z'_4 tels que les quadrilatères $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ et $\overline{z_1 z_3 z_2 z'_4}$ soient équiharmoniques. *Ce sont les points d'intersection du cercle d'Apollonius S_3 des points z_1 et z_2 qui passe par z_3 et du cercle d'Apollonius S_2 des points z_1 et z_3 qui passe par z_2 (d'où on peut déduire déjà que par ces points passe aussi le cercle d'Apollonius S_1 des points z_2 et z_3 passant par z_1). En effet, des égalités :*

$$\frac{(w, z_1)}{(w, z_2)} = \frac{(z_3, z_1)}{(z_3, z_2)} \quad \text{et} \quad \frac{(w, z_1)}{(w, z_3)} = \frac{(z_2, z_1)}{(z_2, z_3)}$$

on obtient aussi l'égalité

$$\frac{(w, z_2)}{(w, z_3)} = \frac{(z_1, z_2)}{(z_1, z_3)}$$

et

$$(z_1, z_2) \cdot (w, z_3) = (z_1, z_3) \cdot (w, z_2) = (z_2, z_3) \cdot (w, z_1).$$

Les points z_4 et z'_4 peuvent être définis comme des points dans le plan du triangle $\overline{z_1 z_2 z_3}$ dont les distances à deux sommets quelconques sont dans le même rapport que les longueurs des côtés correspondants (côtés issus du troisième sommet); on les appelle quelquefois **centres isodynamiques** du triangle $\overline{z_1 z_2 z_3}$. Chaque triangle a deux centres isodynamiques z_4 et z'_4 ; c'est seulement pour un triangle $z_1 z_2 z_3$ équilatéral pour lequel les deux cercles d'Apollonius S_3 et S_2 (et aussi le cercle S_1) sont des droites, qu'il n'existe qu'un seul centre isodynamique w_4 qui coïncide avec le centre du triangle (le point infiniment éloigné ∞ joue dans ce cas le rôle du centre w'_4 puisque

$$W(z_1, z_2, z_3, \infty) = V(z_1, z_2, z_3) = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \text{ou} \quad = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

En considérant la représentation et non le calcul on peut obtenir six valeurs du rapport des trois points du plan de façon « plus géométrique ». Notons que le rapport double

$$V(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

caractérise le groupe des trois points z_1, z_2, z_3 à une transformation de similitude près; cette façon de parler signifie que deux trios de points z_1, z_2, z_3 et z'_1, z'_2, z'_3 ont des rapports égaux $V(z_1, z_2, z_3) = V(z'_1, z'_2, z'_3)$ dans le cas

et seulement dans le cas où des triangles $\overline{z_1 z_2 z_3}$ et $\overline{z'_1 z'_2 z'_3}$ semblables sont formés par ces points; de plus dans cette similitude le point z'_1 doit correspondre à z_1 , le point z'_2 à z_2 et le point z'_3 à z_3 ; notons aussi que les « triangles » $\overline{z_1 z_2 z_3}$ et $\overline{z'_1 z'_2 z'_3}$ peuvent aussi être dégénérés puisque les points z_1, z_2 et z_3 peuvent être alignés). Cette affirmative est directement déduite du fait que le module $|V|$ d'un nombre complexe

$$V(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

est égal au rapport des longueurs des côtés $\overline{z_1 z_3}$ et $\overline{z_2 z_3}$ du triangle $\overline{z_1 z_2 z_3}$ et son argument $\text{Arg } V$ — à l'angle $\angle \{[z_3 z_2], [z_3 z_1]\}$ de ce même triangle.

Mais il est clair que

$$V(z, 1, 0) = \frac{z - 0}{1 - 0} = z.$$

c'est pourquoi, si

$$V(z_1, z_2, z_3) = \lambda = V(\lambda, 1, 0),$$

alors le triangle $\overline{z_1 z_2 z_3}$ est semblable au triangle $\overline{\lambda 1 0}$. D'où il résulte que pour trouver toutes les valeurs du rapport de trois points z_1, z_2, z_3 pris dans n'importe quel ordre, il faut construire sur le segment $\overline{01}$ tous les triangles possibles semblables au triangle donné $\overline{z_1 z_2 z_3}$. On peut le faire de six façons :

$$\begin{aligned} \overline{\lambda 1 0} \sim \overline{z_1 z_2 z_3}, \quad \overline{\lambda_1 1 0} \sim \overline{z_2 z_1 z_3}, \quad \overline{\lambda_2 1 0} \sim \overline{z_1 z_3 z_2}, \quad \overline{\lambda_3 1 0} \sim \overline{z_3 z_1 z_2}, \\ \overline{\lambda_4 1 0} \sim \overline{z_2 z_3 z_1} \quad \text{et} \quad \overline{\lambda_5 1 0} \sim \overline{z_3 z_2 z_1}, \end{aligned}$$

où les sommets correspondants sont désignés par l'ordre dans lequel ils sont écrits (fig. 26). De la similitude des triangles

$$\overline{1 \lambda_1 0}, \quad \overline{\lambda_2 0 1}, \quad \overline{1 0 \lambda_3}, \quad \overline{0 \lambda_4 1} \quad \text{et} \quad \overline{0 1 \lambda_5}$$

au triangle $\overline{\lambda 1 0}$ on peut aussi déduire que

$$\frac{\lambda_1}{1} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda_1 = \frac{1}{\lambda}; \quad \frac{\lambda_2}{1} = \frac{1 - \lambda}{1} = 1 - \lambda;$$

$$\frac{\lambda_3}{1} = \frac{0 - 1}{\lambda - 1} = \frac{1}{1 - \lambda};$$

$$\frac{\lambda_4}{1} = \frac{1 - \lambda}{0 - \lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_5}{1} = \frac{0 - \lambda}{1 - \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Pour établir dans quelles circonstances le rapport des trois points a moins de six valeurs différentes, il suffit d'éclaircir dans quels cas deux quelconques des six triangles formés sur la figure 26 coïncident. Un de ces cas paraît tout à fait évident, il correspond au cas où le triangle $\overline{01\lambda}$ est équilatéral et au lieu de six triangles nous n'en avons que deux : les points λ , λ_3 et λ_4 , de même que les points λ_1 , λ_2 et λ_5 coïncident entre eux (fig. 24 b). Dans ce cas

$$\lambda = \lambda_3 = \lambda_4 = 1 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

et

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 1 [\cos (-60^\circ) + i \sin (-60^\circ)] = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Un deuxième cas qu'on peut aussi observer sans peine, correspond au cas où les sommets λ et λ_2 du parallélogramme $\overline{0\lambda_1\lambda_2}$ coïncident ; il est clair que cela n'est possible que lorsque $\lambda = \lambda_2 = 1/2$ et le point λ est le milieu du segment $\overline{01}$, tandis que $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -1$ de telle sorte que tous les rapports possibles des trois points z_1, z_2 et z_3 ne prennent que trois valeurs : $-1, 2$ et $1/2$ (cf. fig. 24, a). Sur la figure 26 on voit aussi facilement que ces deux cas de diminution du nombre des triangles tracés sur cette figure sont les seuls.

Par analogie, dans le cas de quatre points z_1, z_2, z_3 et z_4 on peut aussi au lieu de six valeurs $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 du rapport anharmonique W de ces points considérer le triangle $\overline{01\lambda}$, donné « à une transformation de similitude près », c'est-à-dire de façon telle que deux de ces triangles semblables entre eux

(cette fois — sans tenir compte de l'ordre de leurs sommets !), soient identiques ; cette dernière condition associée à chaque triangle $\overline{01\lambda}$ encore cinq triangles « semblables à lui » $01\lambda_1, 01\lambda_2, 01\lambda_3, 01\lambda_4$ et $01\lambda_5$ (cf. fig. 26). Le triangle $\overline{01\lambda}$ est étroitement lié au quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$; nous l'appellerons **triangle associé** du quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$. Le lien entre le quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$

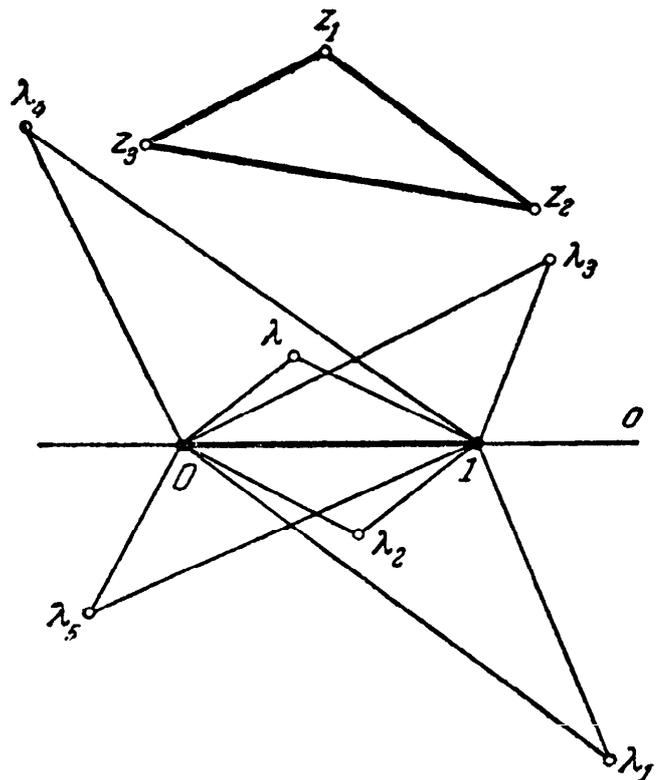


FIG. 26.

et le triangle $\overline{01\lambda}$ permet de déduire de nombreuses propriétés du quadrilatère des propriétés (plus simples !) du triangle qui lui est associé ; ainsi, par exemple, aux triangles dégénérés 01λ (c'est-à-dire tels que leurs sommets soient alignés) correspondent les quadrilatères $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ qu'on peut inscrire dans un cercle (plus exactement tels que leurs sommets soient sur un cercle ou une droite — le rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ ne sera réel que pour ces quadrilatères $\overline{z_1z_2z_3z_4}$). Nous aurons plus bas une occasion de nous attarder de façon plus détaillée sur les propriétés du triangle associé à un quadrilatère donné et d'expliquer clairement sa construction géométrique (voir § 14, p. 150). Nous nous bornerons ici à retenir que le triangle associé d'un quadrilatère harmonique dégénère en un segment et son milieu, tandis que le triangle associé à un quadrilatère équiharmonique est rectangle.

§ 9. NOMBRES DUAUX PRIS COMME DROITES ORIENTÉES D'UN PLAN

Nous allons traiter dans les pages suivantes exclusivement de droites orientées ; au cours de cette étude nous omettrons souvent le qualificatif « orienté ». Nous appellerons **angle orienté** $\angle \{a, b\}$ entre les droites orientées

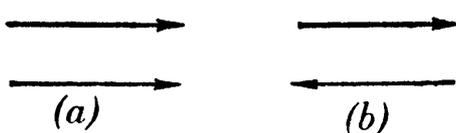


FIG. 27.

(p. 31) l'angle entre les droites a et b ; la distance entre les deux points A et B de la droite l désignera la **longueur orientée** du segment AB , sera représentée par $\{A, B\}$ et aura pour signification une longueur ordinaire, prise avec le signe « plus » ou « moins » suivant que la direction de A

à B coïncide ou non avec la direction positive de la droite l . Nous appellerons distance au point m à la droite orientée l la **distance orientée** $\{M, l\}$ de M à l , la distance prise avec le signe « plus » ou « moins » suivant que le point M est à gauche ou à droite de la droite orientée l . Nous dirons que deux droites orientées sont parallèles dans le cas où elles sont parallèles au sens ordinaire et où les directions de ces droites coïncident (fig. 27, a) ; des droites orientées parallèles de directions opposées nous dirons parfois qu'elles sont **anti-parallèles** (fig. 27, b). Par distance de la droite a à la droite b qui ne la coupe pas nous entendrons la distance orientée $\{a, b\}$ de a à b , c'est-à-dire la distance orientée d'un point quelconque de la droite a à la droite b ; il est évident que $\{a, b\} = -\{b, a\}$ si a et b sont parallèles, et $\{a, b\} = \{b, a\}$, si a et b sont antiparallèles.

Rappelons maintenant que les coordonnées polaires des points d'un plan sont déterminées à l'aide d'un point quelconque O (pôle du système de coordonnées) et de la droite orientée σ qui passe par le point O (axe polaire) ; la distance $r = OM$ du point M au pôle et l'angle $\varphi \angle \{O, m\}$ formé par la droite (orientée) m qui relie avec O et M (cf. fig. 1, p. 32) avec σ servent ici de coordonnées au point M . Par analogie, on peut déterminer les coordonnées polaires de droites (orientées) d'un plan pour lesquelles il faut aussi se donner une certaine droite (orientée) o (axe polaire) et un point O sur elle (pôle) ; l'angle $\theta = \angle \{o, l\}$ formé par l avec l'axe polaire o et la distance (orientée) $s = \{O, L\}$ de O au point L d'intersection de l et de o (fig. 28 a)

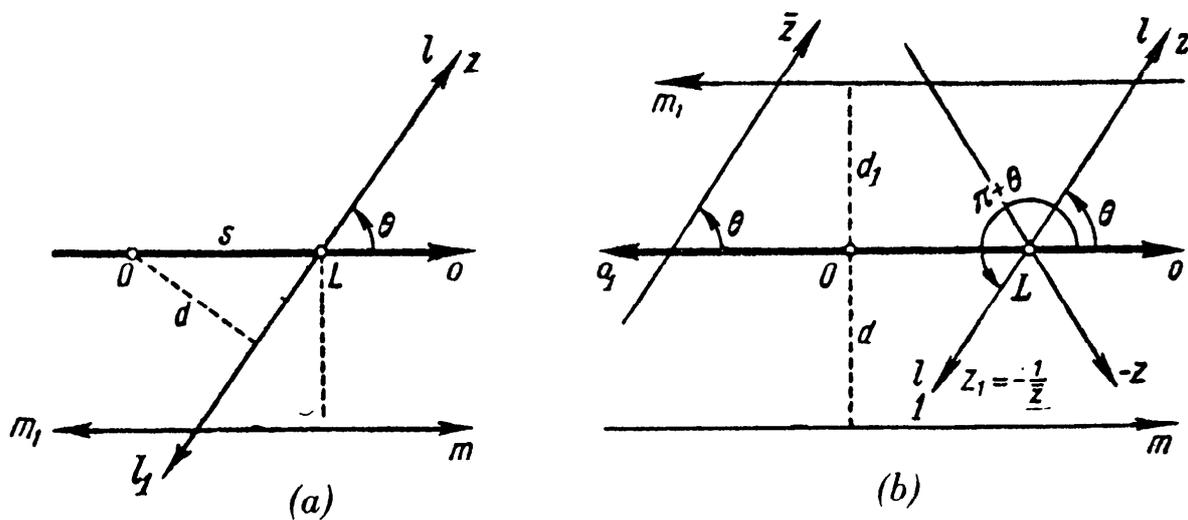


FIG. 28.

servent de coordonnées à la droite l . Il est évident que la coordonnée s de la droite orientée l peut avoir n'importe quelle valeur comprise entre $+\infty$ et $-\infty$; la coordonnée θ , n'importe quelle valeur comprise entre 0 et 2π . Il est naturel de penser que $\theta = 0$ pour les droites parallèles à l'axe polaire o , et $\theta = \pi$ pour les droites antiparallèles à o ; si la droite ne coupe pas l'axe o , elle n'a pas de coordonnée s (on peut estimer dans ce cas que $s = +\infty$).

Convenons maintenant d'associer à la droite orientée l de coordonnées polaires θ et s le nombre dual

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) = u + \varepsilon v, \quad u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad v = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot s \quad (29)$$

(fig. 28). De plus, il est naturel d'attribuer des nombres de module nul, c'est-à-dire diviseurs de $0\varepsilon v$ (cf. plus haut p. 16) aux droites parallèles à o pour lesquelles $\theta = 0$. Afin d'établir la correspondance exacte entre les droites

parallèles à o et les diviseurs de 0, remarquons que la distance $d = \{O, l\}$ de la droite l non parallèle à o au pôle O est égale à :

$$d = s \cdot \sin \theta = s \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \theta/2}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta/2} = \frac{2s \operatorname{tg} \theta/2}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta/2} = \frac{2v}{1 + |z|^2} \quad (30)$$

(fig. 28, *a*). Si nous voulons que la formule (30) soit aussi valable pour la droite parallèle à o , située à une distance $\{o, m\} = d$ de o , il nous faut associer à cette droite le nombre $z = d/2\varepsilon$, c'est-à-dire $z = u + \varepsilon v$, où $u = 0$ et

$$\frac{2v}{1 + |z|^2} = 2v = d$$

De plus aux deux droites l et l_1 coupant o , ne différant que par leur direction, et, par conséquent ayant des coordonnées polaires (θ, s) et $(\pi + \theta, s)$, correspondent les nombres duals

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s)$$

et

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{tg} \frac{\pi + \theta}{2} (1 + \varepsilon s) = -\operatorname{cot} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 - \varepsilon s)} = -1/\bar{z}. \end{aligned}$$

En admettant que cette relation reste valable pour les droites qui ne coupent pas o , nous convenons d'attribuer à la droite m_1 antiparallèle à o , située à une distance $\{o, m_1\} = d_1$ de o , le nombre

$$z = -\frac{1}{\left(-\frac{d_1}{2} \varepsilon\right)} = -\frac{2}{d_1} \omega$$

(Notons, que si la distance $\{o, m\}$ de o à la droite m parallèle à o , coïncidant par sa position sur le plan avec la droite m_1 , est égale à d , alors $d = -d_1$.)

Enfin nous associerons à la droite o_1 , ne différant de l'axe polaire o que par sa direction (axe inverse), le nombre :

$$\frac{1}{0} = \infty.$$

Ce faisant nous établissons une complète correspondance entre les droites orientées du plan et les nombres duals, y compris les nombres de forme $w\omega$, où $w \neq 0$ est réel, et le nombre ∞ .

Il est évident qu'aux nombres réels

$$z = u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon \cdot 0)$$

correspondent les droites qui passent par le pôle O ; aux nombres de module 1, les droites perpendiculaires à o (plus exactement les droites l telles que $\{o, l\} = \pi/2$; de façon générale aux nombres de module constant u correspondent les droites l qui forment avec o un angle constant $\angle \{o, l\} = 2 \operatorname{arctg} u$; aux nombres purement imaginaires $v\varepsilon$ (aux nombres de module nul) et « aux nombres de module infini » $w\omega$ correspondent respectivement les droites parallèles et antiparallèles à l'axe o . Aux nombres conjugués

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s)$$

et

$$\bar{z} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 - \varepsilon s)$$

correspondent les droites symétriques par rapport au pôle O , et aux nombres opposés

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s)$$

et

$$-z = -\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) = \operatorname{tg} \frac{2\pi - \theta}{2} (1 - \varepsilon s)$$

les droites symétriques par rapport à l'axe polaire o (c'est-à-dire qui coupent o en un seul et même point L et qui forment avec o des angles égaux :

$$\angle \{o, z\} = \angle \{-z, o\};$$

(voir fig. 28, *b*) ; aux nombres z et $-1/\bar{z}$ correspondent les droites qui ne diffèrent que par leur direction. Ainsi, les égalités

$$z' = \bar{z} \quad (a), \quad z' = -z \quad (b) \quad z' = -\frac{1}{z} \quad (c) \quad (31)$$

peuvent être considérées comme définissant des transformations déterminées de l'ensemble des droites orientées d'un plan : **symétries par rapport au point O , symétries par rapport à la droite o et changements d'orientation** (changements de la direction de toutes les droites du plan en la direction opposée.)

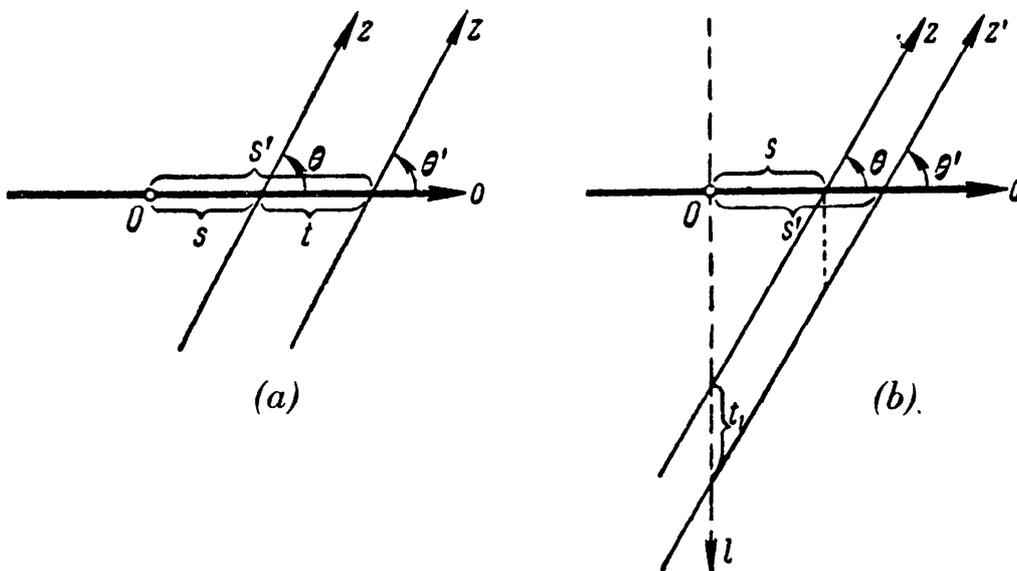


FIG. 29.

Étudions maintenant le problème de la description à l'aide des nombres duals de déplacements arbitraires (au nombre desquels nous compterons aussi le changement d'orientation qui laisse invariante les distances entre les points d'un plan). En premier lieu, il est clair qu'une translation parallèle à l'axe o d'une distance t transforme la droite, à laquelle correspond le nombre dual

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s),$$

en une droite à laquelle correspond le nombre

$$z' = \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} (1 + \varepsilon s') = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon (s + t))$$

(fig. 29, *a* ; par la suite nous parlerons par abréviation dans ce cas de :
« transfert de la droite

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s)$$

en la droite

$$z' = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon (s + \dots)).$$

Par conséquent, on peut aussi écrire cette translation parallèle sous la forme :

$$z' = pz, \quad \text{où} \quad p = 1 + \varepsilon t, \quad |p| = 1 \quad (32)$$

(car

$$[1 \cdot (1 + \varepsilon t)] \cdot \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) \right] = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} [1 + \varepsilon (s + t)].$$

Ensuite une **translation parallèle** d'une distance t , dans une direction perpendiculaire à o (dans la direction de la droite l , telle que $\angle \{l, o\} = \pi/2$) transfère la droite

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s)$$

en la droite

$$z' = \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} (1 + \varepsilon s') = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} [1 + \varepsilon (s + t_1 \cot \theta)]$$

(fig. 29, *b*). Mais

$$\begin{aligned} z' &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} [1 + \varepsilon (s + t_1 \cot \theta)] \\ &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) + \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{t_1 (1 - \operatorname{tg}^2 \theta/2)}{2 \operatorname{tg} \theta/2} \\ &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) + \varepsilon \frac{t_1}{2} - \varepsilon \frac{t_1}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = z + z \frac{t_1}{2} - \varepsilon \frac{t_1}{2} z^2. \end{aligned}$$

On peut écrire la dernière formule sous une forme plus élégante. Remarquons que

$$z + \varepsilon \frac{t_1}{2} - \varepsilon \frac{t_1}{2} z^2 = \left[z + \varepsilon \frac{t_1}{2} \right] \left[1 - \varepsilon \frac{t_1}{2} z \right] = \frac{z + \varepsilon \frac{t_1}{2}}{\varepsilon \frac{t_1}{2} z + 1};$$

ainsi, le transfert parallèle considéré se définit par la relation

$$z' = \frac{z + q}{qz + 1}, \quad \text{où} \quad q = \varepsilon \frac{t_1}{2}, \quad |q| = 0. \quad (32 a)$$

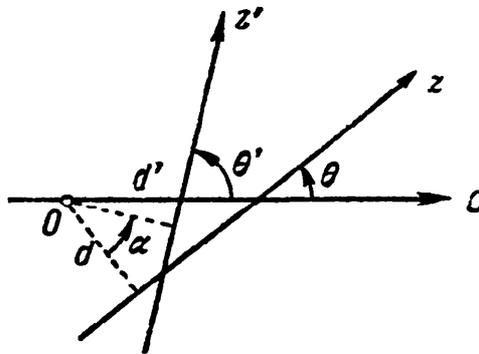


FIG. 30.

Par suite un transfert parallèle arbitraire, c'est-à-dire un transfert d'une distance t dans la direction de l'axe o et à une distance t_1 dans une direction perpendiculaire à o se traduira par la formule :

$$z' = \frac{(pz) + q}{q(pz) + 1}, \quad p = 1 + \varepsilon t, \quad q = \varepsilon \frac{t_1}{2},$$

ou, avec la notation $p = p_1^2$ (c'est-à-dire $p_1 = 1 + \varepsilon t/2$) et en utilisant le fait que :

$$q = \varepsilon \frac{t_1}{2} = \varepsilon \frac{t_1}{2} \left(1 + \varepsilon \frac{t}{2} \right) = qp_1, \quad \bar{p}_1 = 1 - \varepsilon \frac{t}{2} = \frac{1}{p_1}, \quad \bar{q} = -q,$$

par la formule :

$$z' = \frac{p_1^2 z + qp_1}{qp_1^2 z + p_1 \bar{p}_1} = \frac{p_1 z + q}{qp_1 z + \bar{p}_1} = \frac{p_1 z + q}{-\bar{q} z + \bar{p}_1}, \quad (33)$$

où

$$p_1 = 1 + \varepsilon \frac{t}{2}, \quad q = \varepsilon \frac{t_1}{2}; \quad |p_1| = 1, \quad |q| = 0.$$

Passons maintenant aux rotations d'un plan. Il est évident qu'une rotation autour de O d'un angle α transfère la droite

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s)$$

en la droite

$$z' = \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} (1 + \varepsilon s');$$

où $\theta' = \theta + \alpha$ (fig. 30). Ainsi

$$\begin{aligned} |z'| &= \operatorname{tg} \frac{\theta + \alpha}{2} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{|z| + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} |z| + 1} = \left| \frac{z + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} z + 1} \right| \quad (34) \end{aligned}$$

(ici on utilise le fait que si z_1 et z_2 sont des nombres duals, alors

$$|z_1 \pm z_2| = |z_1| \pm |z_2|, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{et} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|).$$

Ensuite si d et d' sont les distances des droites z et z' du pôle O , alors

$$s \cdot \sin \theta = d = d' = s' \cdot \sin \theta'$$

[cf. la relation (301)]; c'est pourquoi

$$\operatorname{Arg} z' = s' = s \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = s \frac{\sin \theta}{\sin (\theta + \alpha)}.$$

D'autre part, puisque

$$\operatorname{Arg} (u + \varepsilon v) = \frac{v}{u},$$

alors

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arg} \frac{z + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} z + 1} &= \operatorname{Arg} \left(z + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{Arg} \left(-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} z + 1 \right) \\
 &= \operatorname{Arg} \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right] \\
 &\quad - \operatorname{Arg} \left[-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) + 1 \right] \\
 &= \frac{s \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \frac{-s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)} s \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\sin \frac{\alpha + \theta}{2} \cos \frac{\alpha + \theta}{2}} s = \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \theta}{2} \cos \frac{\alpha + \theta}{2}} s \\
 &= \frac{\sin \theta}{\sin (\alpha + \theta)} s = \operatorname{Arg} z'. \tag{34 a}
 \end{aligned}$$

De (34) et (34 a) il s'ensuit que notre rotation se traduira par la formule ⁽¹⁾ :

$$z' = \frac{z + q_1}{-\bar{q}_1 z + 1}, \tag{35}$$

où $q_1 = \bar{q}_1 = \operatorname{tg} \alpha/2$, $\operatorname{Arg} q_1 = 0$.

⁽¹⁾ Dans cette formule pour le nombre $q_1 = \operatorname{tg} \alpha/2$ on peut aussi prendre la valeur ∞ , qui correspond à une rotation d'un angle de 180° . Si $q_1 = \infty$, nous aurons alors

$$z' = \frac{z + \infty}{-\infty \cdot z + 1} = -\frac{1}{z}$$

Enfin, le déplacement le plus général (cf. plus haut p. 29) représente une rotation (35) autour de O d'un certain angle α , cette rotation peut de plus être accompagnée d'une translation parallèle (33) :

$$z' = \frac{p_1 \frac{z + q_1}{-\bar{q}_1 z + 1} + q}{-\bar{q} \frac{z + q_1}{-\bar{q}_1 z + 1} + p_1} = \frac{(p_1 - q\bar{q}_1)z + (p_1 q_1 + q)}{-(\bar{p}_1 \bar{q}_1 + \bar{q})z + (\bar{p}_1 - \bar{q} q_1)}.$$

On peut écrire cette transformation sous une autre forme :

$$z' = \frac{Pz + Q}{-\bar{Q}z + \bar{P}}, \quad (36 a)$$

où $P = p_1 - \bar{p}q$, $Q = p_1 q_1 + q$.

Il est possible aussi que le déplacement initial soit une symétrie (31 b) par rapport à la droite o , accompagnée d'une transformation (36 a) (rotation autour de O et translation parallèle) :

$$z' = \frac{-Pz + Q}{\bar{Q}z + \bar{P}}. \quad (36 b)$$

Enfin le déplacement peut représenter un changement d'orientation (31 c), accompagné d'une des transformations (36 a) ou (36 b) :

$$z' = \frac{-P \frac{1}{\bar{z}} + Q}{\bar{Q} \frac{1}{\bar{z}} + \bar{P}} = \frac{P_1 \bar{z} + Q_1}{-\bar{Q}_1 \bar{z} + \bar{P}_1}, \quad (36 c)$$

où $P_1 = Q$, $Q_1 = -P$, ou bien

$$z' = \frac{P \frac{1}{\bar{z}} + Q}{-\bar{Q} \frac{1}{\bar{z}} + \bar{P}} = \frac{-P_1 \bar{z} + Q_1}{\bar{Q}_1 \bar{z} + \bar{P}_1}, \quad (36 d)$$

où $P_1 = -Q$, $Q_1 = P$.

(voir p. 16-17) ; il est évident que cette rotation conduit à une symétrie par rapport au point O (31 a) et au changement d'orientation (31 b) (notons que la symétrie définie plus haut (31 a) par rapport à O ne coïncide pas avec la rotation de 180° autour de O).

Il est évident, que l'angle orienté $\delta = \angle \{z_1, z_2\}$ entre les droites

$$z_1 = \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} (1 + \varepsilon s_1)$$

et

$$z_2 = \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} (1 + \varepsilon s_2)$$

est égal à $\theta_2 - \theta_1$ (fig. 31, a).

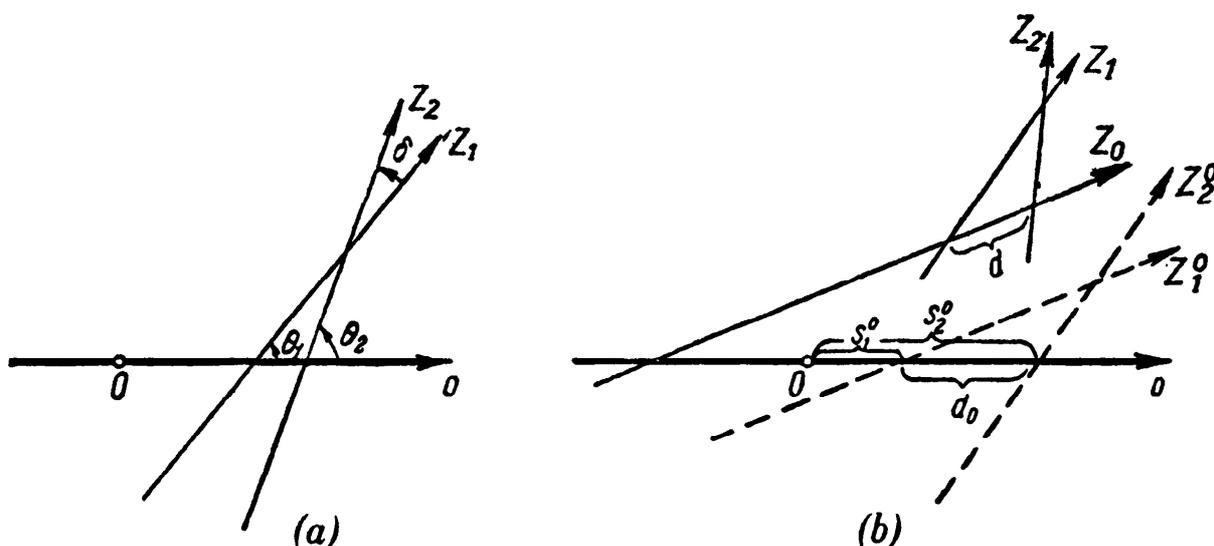


FIG. 31.

On peut l'écrire aussi :

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} = \frac{|z_2| - |z_1|}{1 + |z_2| \cdot |z_1|} = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 + z_1 \bar{z}_2} \right| ,$$

On peut aussi présenter le résultat obtenu sous la forme symétrique suivante :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{(1 + z_1 \bar{z}_2)(1 + \bar{z}_1 z_2)} . \quad (37)$$

Déterminons maintenant la *distance* (orientée)

$$d = \{ [z_1 z_0], [z_2 z_0] \}$$

entre les points $[z_1 z_0]$ et $[z_2 z_0]$ d'intersection de la droite déterminée z_0 avec les deux autres droites z_1 et z_2 (fig. 31, b). Il est évident que la distance d_0 entre les points d'intersection de la droite o avec les droites

$$z_1^0 = \operatorname{tg} \frac{\theta_1^0}{2} (1 + \varepsilon s_1^0)$$

et

$$z_2^0 = \operatorname{tg} \frac{\theta_2^0}{2} (1 + \varepsilon s_2^0)$$

est égal à :

$$d_0 = \operatorname{Arg} \frac{z_2^0}{z_1^0} \quad (= \operatorname{Arg} z_2^0 - \operatorname{Arg} z_1^0 = s_2^0 - s_1^0).$$

Un exemple de déplacement, transférant une droite donnée z_0 en la droite o est donné par la formule

$$z' = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z + 1};$$

ce déplacement transfère les droites z_1 et z_2 en droites

$$z_1^0 = \frac{z_1 - z_0}{\bar{z}_0 z_1 + 1}$$

et

$$z_2^0 = \frac{z_2 - z_0}{\bar{z}_0 z_2 + 1}.$$

D'où nous obtenons ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} d &= \operatorname{Arg} \frac{(z_2 - z_0) : (\bar{z}_0 z_2 + 1)}{(z_1 - z_0) : (\bar{z}_0 z_1 + 1)} \\ &= \operatorname{Arg} \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} : \frac{\bar{z}_0 z_2 + 1}{\bar{z}_0 z_1 + 1} \right) \quad \left(= \operatorname{Arg} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} - \operatorname{Arg} \frac{\bar{z}_0 z_2 + 1}{\bar{z}_0 z_1 + 1} \right). \quad (38) \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Si une des droites droites z_1, z_2 (ou même ces deux droites) ne coupe pas z_0 (ou coïncide avec z_0 par leur position), alors une des expressions

$$(z_2 - z_0) : (\bar{z}_0 z_2 + 1) \quad \text{et} \quad (z_1 - z_0) : (\bar{z}_0 z_1 + 1)$$

(et peut-être même les deux) ne mène pas à la formule (32) du § 4 (c'est-à-dire est un diviseur de zéro, ou son inverse et par conséquent n'a pas d'argument).

Pour que trois droites z_0 , z_1 et z_2 soient concourantes, il faut que la distance entre les points d'intersection z_1 et z_0 avec z_2 soit égale à zéro, c'est-à-dire en vertu de la formule (38) que le rapport

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{\bar{z}_2 z_0 + 1}{\bar{z}_2 z_1 + 1}$$

soit réel. On peut aussi écrire cette condition ainsi :

$$\frac{(z_0 - z_2)(\bar{z}_2 z_1 + 1)}{(z_1 - z_2)(\bar{z}_2 z_0 + 1)} = \frac{(\bar{z}_0 - \bar{z}_2)(z_2 \bar{z}_1 + 1)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_2 \bar{z}_0 + 1)}. \quad (39)$$

Par conséquent, l'équation du point, c'est-à-dire la condition à laquelle satisfont les droites z , passant par le point $[z_1 z_2]$ a la forme :

$$\frac{(z - z_2)(\bar{z}_2 z_1 + 1)}{(z_1 - z_2)(\bar{z}_2 z + 1)} = \frac{(\bar{z} - \bar{z}_2)(z_2 \bar{z}_1 + 1)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_2 \bar{z} + 1)},$$

ou (1)

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} - A = 0, \quad (40)$$

A , imaginaire pur.

Ici :

$$\begin{aligned} A &= z_2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_2 z_1 + 1) - \bar{z}_2(z_1 - z_2)(\bar{z}_2 \bar{z}_1 + 1) \\ &= (z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2)(1 + z_2 \bar{z}_2), \\ B &= (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_2 z_1 + 1) + \bar{z}_2^2(z_1 - z_2)(z_2 \bar{z}_1 + 1). \end{aligned}$$

Inversement, il n'est pas difficile de s'assurer que chaque équation de forme (40) définit un point.

(1) Ceci découle aussi de ce que par une translation parallèle (33) on peut amener n'importe quel point M au pôle O , dont l'équation a la forme :

$$z - \bar{z} = 0.$$

C'est pourquoi nous pouvons aussi écrire « l'équation » de M de cette façon

$$\frac{p_1 z + q}{-qz + \bar{p}_1} - \frac{\bar{p}_1 \bar{z} + \bar{q}}{-q\bar{z} + \bar{p}_1} = 0,$$

c'est-à-dire sous la forme (40), ou :

$$A = \bar{p}_1 \bar{q} - p_1 q = -\epsilon t_1, \quad B = p^2 + \bar{q}^2 = p^2 = 1 + \epsilon t,$$

Ici t et t_1 sont respectivement les valeurs du déplacement dans la direction de l'axe o et dans la direction perpendiculaire à o qui transfère le point M en O (t et t_1 sont les coordonnées rectangulaires du point M).

Étudions maintenant à quelle condition quatre points orientés z_0, z_1, z_2, z_3 sont sur un seul cercle orienté. Sous le nom de **cercle orienté** nous entendons ici l'ensemble (« le lieu géométrique ») de toutes les droites orientées l , dont la distance orientée (O, l) à un point donné O (centre du cercle) a une valeur fixe r . Le nombre r est appelé rayon du cercle ; ainsi, *le rayon d'un cercle orienté peut être aussi bien positif que négatif*. (Si $r = 0$, le cercle orienté dégénère alors en un point qui apparaît ainsi comme un cas particulier du cercle.) Sur les dessins, le cercle orienté est représenté comme un cercle ordinaire avec une flèche indiquant une direction déterminée de circulation coïncidant en chaque point avec la direction du cercle tangent en ce point (fig. 32). Suivant la définition de la distance orientée (O, l) du point O à la droite l (p. 80), le rayon du cercle orienté sera positif si la direction de circulation est l'inverse de celle des aiguilles d'une montre et négatif dans l'autre cas.

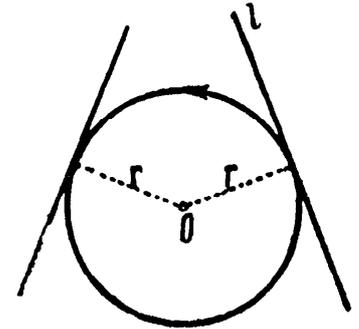


FIG. 32.

On peut montrer, que *quatre droites* (orientées) z_0, z_1, z_2 et z_3 *sont sur un seul cercle* (orienté) *ou passent par un point dans le cas et seulement dans cas où le* ⁽¹⁾

$$\{ [z_0z_2], [z_1z_2] \} + \{ [z_1z_3], [z_0z_3] \} = \{ [z_3z_0], [z_2z_0] \} + \{ [z_2z_1], [z_3z_1] \}. \quad (41)$$

Pour le vérifier, étudions la figure 33 sur laquelle sont représentés quatre tangentes (orientées) z_0, z_1, z_2 et z_3 du cercle (orienté) S [si les droites z_0, z_1, z_2 et z_3 passent par un même point alors la condition (41) est naturellement remplie !], qui touchent le cercle S respectivement aux points M, N, P et Q ; les points $[z_0z_2], [z_1z_2], [z_1z_3]$ et $[z_0z_3]$ par souci de brièveté seront désignés par A, B, C et D . De plus, nous aurons évidemment (tenez compte du fait que toutes les distances figurées plus bas sont orientées !) ⁽²⁾ :

$$\{ A, B \} + \{ C, D \} = \{ A, P \} + \{ P, B \} + \{ C, Q \} + \{ Q, D \}$$

et

$$\{ D, A \} + \{ B, C \} = \{ D, M \} + \{ M, A \} + \{ B, N \} + \{ N, C \}.$$

⁽¹⁾ Cf. la condition pour que quatre points z_0, z_1, z_2 et z_3 soient sur un cercle (condition qu'on peut écrire ainsi :

$$\sphericalangle \{ [z_0z_2], [z_1z_2] \} + \sphericalangle \{ [z_1z_3], [z_0z_3] \} = \sphericalangle \{ [z_3z_0], [z_2z_0] \} + \sphericalangle \{ [z_2z_1], [z_3z_1] \} ;$$

Voir § 7, p. 32, en particulier la figure 5).

⁽²⁾ On utilise ici le fait que si x, y, z sont trois points d'une droite orientée on a **dans tous les cas**

$$\{ X, Y \} + \{ Y, Z \} = \{ X, Z \}.$$

Mais de même qu'en vertu de la propriété connue des tangentes à un cercle

$$\{ A, P \} = \{ M, A \}, \{ P, B \} = \{ B, N \}.$$

$$\{ C, Q \} = \{ N, C \}, \{ Q, D \} = \{ D, M \}.$$

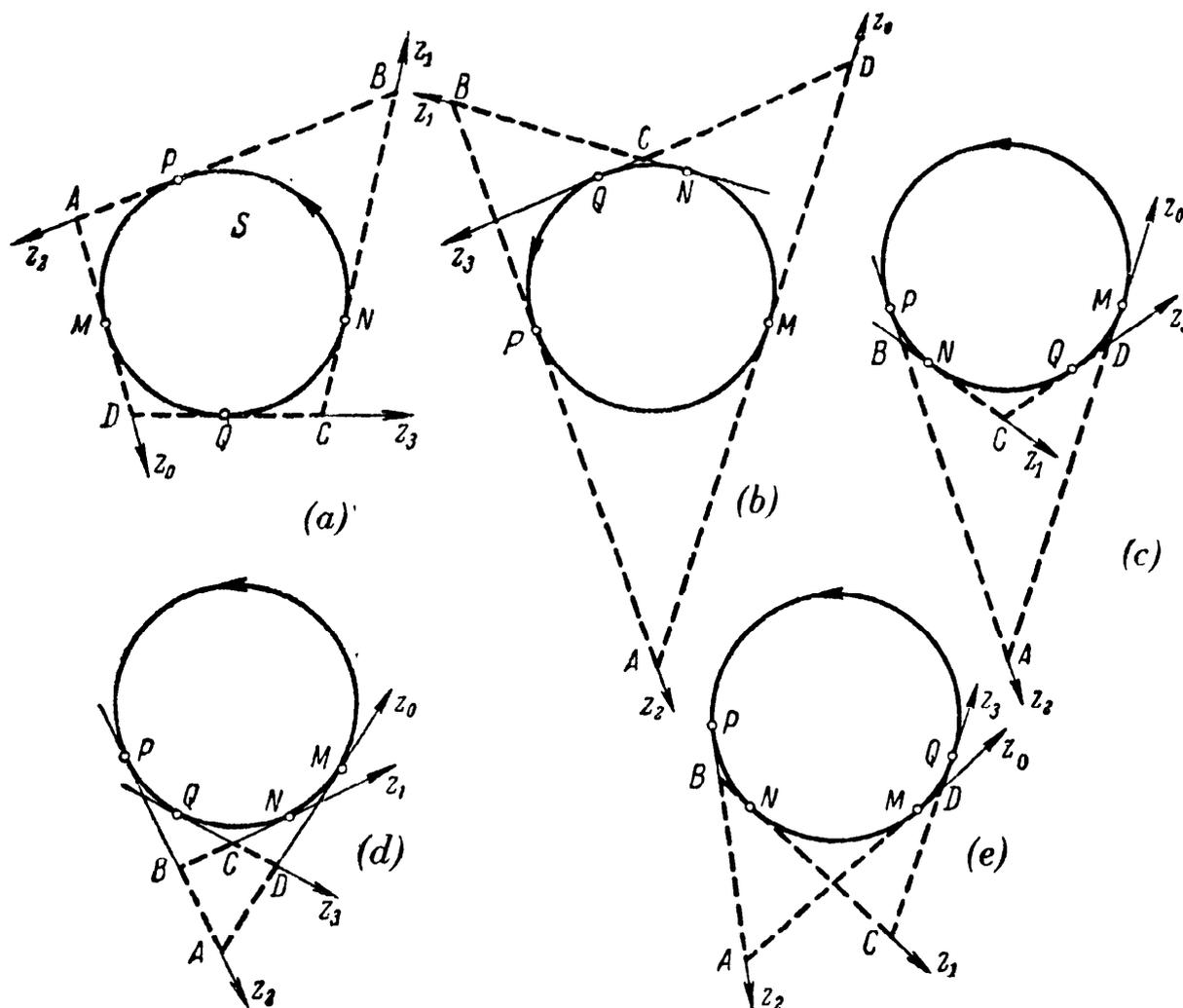


FIG. 33.

Ainsi dans tous les cas la condition (41) est remplie ⁽¹⁾

$$\{ AB \} + \{ CD \} + \{ DA \} + \{ BC \}.$$

Il est facile de s'assurer que de même inversement, si on a l'égalité (41) alors les quatre droites z_0, z_1, z_2 et z_3 sont sur un même cercle ou passent par

⁽¹⁾ Ceci est la forme correspondant exactement au théorème connu de l'égalité des sommes des côtés opposés du quadrilatère circonscrit. [Sans l'aide des distances orientées l'énoncé du théorème est beaucoup plus complexe. Dans ce cas on a soit l'égalité $AB + CD = AD + BC$ (fig. 33, a et b), soit l'égalité $AB - CD = AD - BC$ (fig. 33, c-d).]

un même point (1). En utilisant maintenant (38) nous pouvons transcrire (41) ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_2} - \operatorname{Arg} \frac{\bar{z}_2 z_1 + 1}{\bar{z}_2 z_0 + 1} + \operatorname{Arg} \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3} - \operatorname{Arg} \frac{\bar{z}_3 z_0 + 1}{\bar{z}_3 z_1 + 1} = \\ \operatorname{Arg} \frac{z_2 - z_0}{z_3 - z_0} - \operatorname{Arg} \frac{\bar{z}_0 z_2 + 1}{\bar{z}_0 z_3 + 1} + \operatorname{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} - \operatorname{Arg} \frac{\bar{z}_1 z_3 + 1}{\bar{z}_1 z_2 + 1}, \end{aligned}$$

en simplifiant le terme de gauche de la dernière égalité et en transformant le terme de droite, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3} \right) - \operatorname{Arg} \left(\frac{\bar{z}_2 z_1 + 1}{\bar{z}_2 z_0 + 1} : \frac{\bar{z}_3 z_1 + 1}{\bar{z}_3 z_0 + 1} \right) \\ = \operatorname{Arg} \left(\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3} \right) + \operatorname{Arg} \left(\frac{z_2 \bar{z}_1 + 1}{z_2 \bar{z}_0 + 1} : \frac{z_3 \bar{z}_1 + 1}{z_3 \bar{z}_0 + 1} \right). \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3} \right) = - \operatorname{Arg} \left(\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3} \right) \\ \left(\operatorname{car} \frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3} = 1 : \left(\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3} \right) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \left(\frac{\bar{z}_2 z_1 + 1}{\bar{z}_2 z_0 + 1} : \frac{\bar{z}_3 z_1 + 1}{\bar{z}_3 z_0 + 1} \right) = - \operatorname{Arg} \left(\frac{z_2 \bar{z}_1 + 1}{z_2 \bar{z}_0 + 1} : \frac{z_3 \bar{z}_1 + 1}{z_3 \bar{z}_0 + 1} \right) \\ \left(\operatorname{car} \frac{\bar{z}_2 z_1 + 1}{\bar{z}_2 z_0 + 1} : \frac{\bar{z}_3 z_1 + 1}{\bar{z}_3 z_0 + 1} = \overline{\left(\frac{z_2 \bar{z}_1 + 1}{z_2 \bar{z}_0 + 1} : \frac{z_3 \bar{z}_1 + 1}{z_3 \bar{z}_0 + 1} \right)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire l'équation (41) sous la forme simple suivante :

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3} \right) = 0. \quad (42)$$

Le nombre dual

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$$

(1) Cf. par exemple J. HADAMARD, *Géométrie élémentaire*, 1^{re} partie (M. 1957), solution du problème 87.

s'appellera naturellement **rapport anharmonique des quatre droites** z_0, z_1, z_2, z_3 ; nous le représenterons par le même symbole $W(z_0, z_1, z_2, z_3)$ que nous avons utilisé pour le rapport anharmonique de quatre points (cf. p. 32). Ainsi, pour que quatre droites z_0, z_1, z_2 et z_3 appartiennent à un seul cercle (orienté) (de rayon non nul ou de rayon nul, c'est-à-dire à un point) le rapport anharmonique

$$W(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$$

de ces quatre droites doit être réel (cf. plus haut p. 32-33).

La dernière condition peut aussi prendre la forme (12) qui nous est déjà connu :

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} : \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}, \quad (12)$$

D'où il s'ensuit que l'équation d'un cercle orienté (qui peut dans un cas particulier être un point) déterminée par trois droites données a la forme (113) (1) :

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} : \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}. \quad (13)$$

Ainsi, nous avons ici aussi l'assurance que *l'équation de tout cercle (orienté) (ou de tout point) d'un plan peut s'écrire sous la forme (14) (2) :*

$$Az\bar{z} + Bz - B\bar{z} + C = 0. \quad (14)$$

A et C purement imaginaires.

(1) Notons que tandis que trois droites non orientées données sont tangentes, en

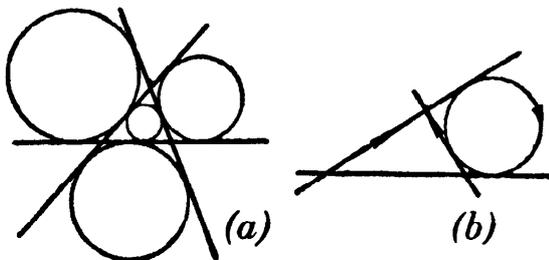


FIG. 34.

général, à quatre cercles distincts non orientés (fig. 34, a), trois droites orientées définissent un seul cercle orienté (fig. 34, b). [Cette dernière affirmation signifie seulement que trois droites orientées données ne peuvent être tangentes à deux cercles orientés; si deux des trois droites sont parallèles, il n'y a pas alors un seul cercle orienté qui contienne nos trois droites z_1, z_2 et z_3 — dans ce cas le rapport anharmonique $W(z, z_1, z_2, z_3)$ ne peut être réel quel que soit z .]

(2) Ce résultat peut aussi être obtenu en partant du fait que n'importe quel cercle S peut par une translation parallèle (33) être transformé en un cercle :

$$erz\bar{z} - z + \bar{z} + er = 0$$

Il n'est pas difficile de vérifier, qu'inversement, l'équation (14) définit toujours un cercle (ou un point).

Nous savons déjà que l'équation (14) définit une droite lorsque

$$A + C = 0. \quad (43)$$

§ 10*. APPLICATIONS ET EXEMPLES

La théorie développée plus haut permet d'utiliser les nombres duals dans la démonstration de nombreux théorèmes géométriques concernant les points, les droites et les cercles ; de plus la parenté des résultats des paragraphes 7 et 9 permet quelquefois d'utiliser un seul et même formalisme pour démontrer deux propositions différentes, il suffit pour cela de faire figurer dans le raisonnement dans un cas les nombres complexes ordinaires, et dans l'autre les nombres duals. Nous nous bornerons ici à donner quelques exemples illustrant ce qui a été dit.

Commençons par le théorème suivant : *Soit sur un plan quatre cercles donnés (orientés) S_1, S_2, S_3 et S_4 ; z_1 et w_1 sont les tangentes communes à S_1 et S_2 ; z_2 et w_2 , les tangentes communes à S_2 et S_3 ; z_3 et w_3 , les tangentes communes à S_3 et S_4 ; z_4 et w_4 les tangentes communes à S_4 et S_1 . Si les droites z_1, z_2, z_3 et z_4 sont tangentes à un seul cercle (orienté) Σ ou passent par un seul point, alors les droites w_1, w_2, w_3 et w_4 elles aussi seront tangentes à un seul cercle (orienté) Σ' ou passeront par un seul point (fig. 35).*

[On appelle naturellement « tangentes » du cercle orienté S les droites orientées qui font partie de S , compris comme le « lieu géométrique des droites ». Il est évident que, alors que deux cercles ordinaires (non orientés) ont, en général, quatre tangentes communes, deux cercles orientés S_1 et S_2

dont le centre est à l'origine des coordonnées O [r est le rayon du cercle ; cf. la formule (30)]. D'où il s'ensuit que l'équation S a la forme suivante :

$$\varepsilon r \frac{p_1 z + q}{-qz + p_1} \cdot \frac{\bar{p}_1 \bar{z} + \bar{q}}{-\bar{q}z + p_1} - \frac{p_1 z + q}{-qz + p_1} + \frac{\bar{p}_1 \bar{z} + \bar{q}}{-\bar{q}z + p_1} + \varepsilon r = 0,$$

c'est-à-dire la forme (14), où

$$A = \varepsilon r p_1 \bar{p}_1 + p_1 q - \bar{p}_1 \bar{q} + \varepsilon r q \bar{q} = \varepsilon (1 + t),$$

$$B = -p_1^2 - \bar{q}^2 = -(1 + \varepsilon t),$$

$$C = \varepsilon r q q - q p_1 + q p_1 + \varepsilon r p_1 p_1 = \varepsilon (r - t_1),$$

où t et t_1 sont les coordonnées du centre S (cf. la note de pied de page 91).

ne peuvent avoir plus de deux tangentes communes : ce seront les tangentes communes extérieures, si S_1 et S_2 ont une seule et même direction, et ce

seront les tangentes communes intérieures dans le cas contraire (fig. 36, a, b). Notons aussi que le théorème énoncé devient faux si on considère les cercles S_1, S_2, S_3, S_4 et Σ comme étant non orientés ; ainsi sur la figure 37 les droites w_1, w_2, w_3 et w_4 de façon évidente ne sont pas tangentes à un seul cercle.]

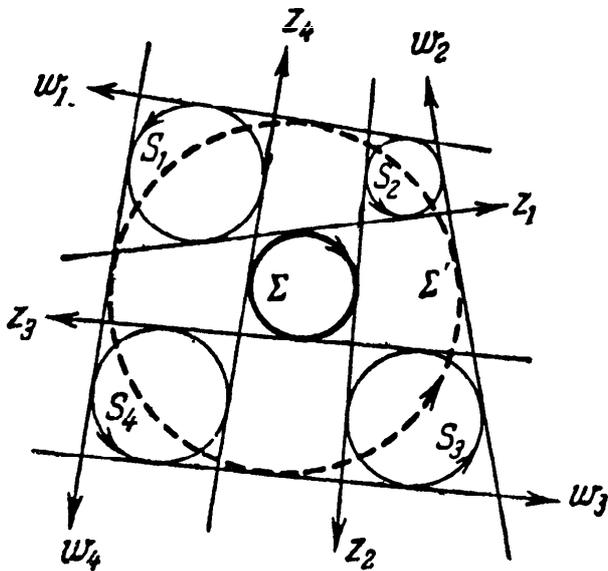


FIG. 35.

D'après le théorème, non seulement les rapports anharmoniques $W(z_1, z_2, w_1, w_2), W(z_2, z_3, w_2, w_3), W(z_3, z_4, w_3, w_4)$ et $W(z_4, z_1, w_4, w_1)$ sont réels, mais aussi le rapport anharmonique $W(z_1, z_3, z_2, z_4)$; il importe de

démontrer que le rapport anharmonique $W(w_1, w_3, w_2, w_4)$ est réel (voir plus haut p. 96). Cette démonstration a été donnée au début du paragraphe 8 (p. 35) ; les raisonnements développés démontrent à la fois le théorème qui a été énoncé pages 34-35 et le théorème qui nous occupe ici.

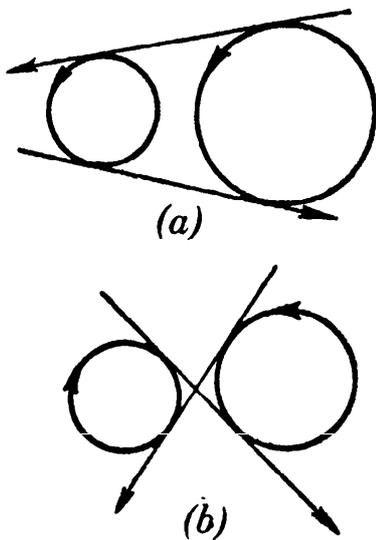


FIG. 36.

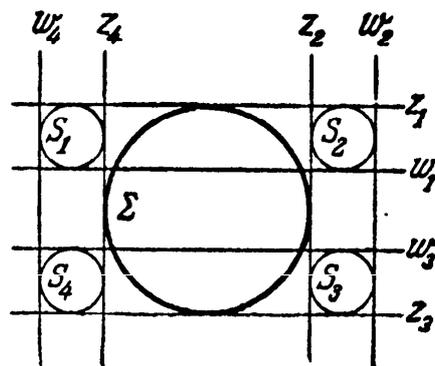


FIG. 37.

Considérons maintenant un cercle arbitraire (unique)

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \tag{14}$$

A et C purement imaginaires.

Prenons un point quelconque L de l'axe o , extérieur à S ; par ce point passent deux tangentes z_1 et z_2 au cercle S (fig. 38). Notre problème sera de définir la valeur du produit :

$$\operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z_1\}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z_2\}}{2}$$

(cf. § 8, p. 42).

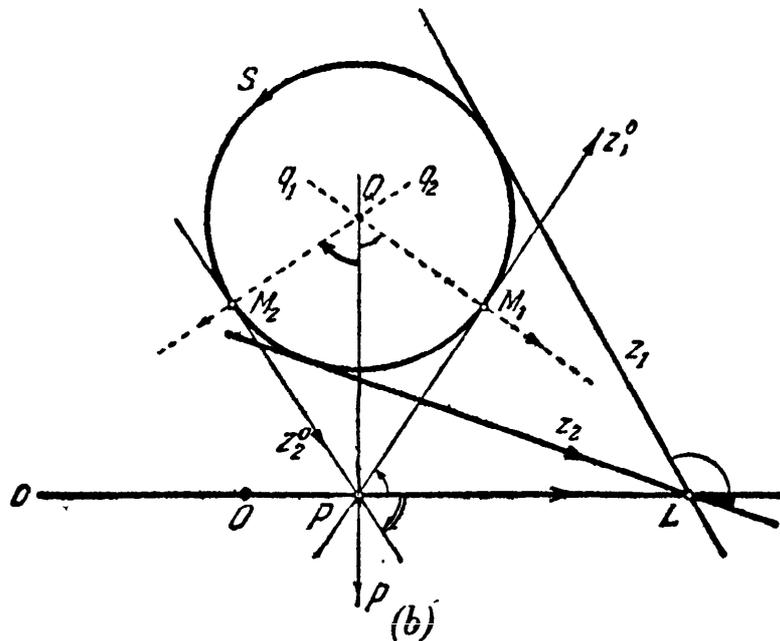
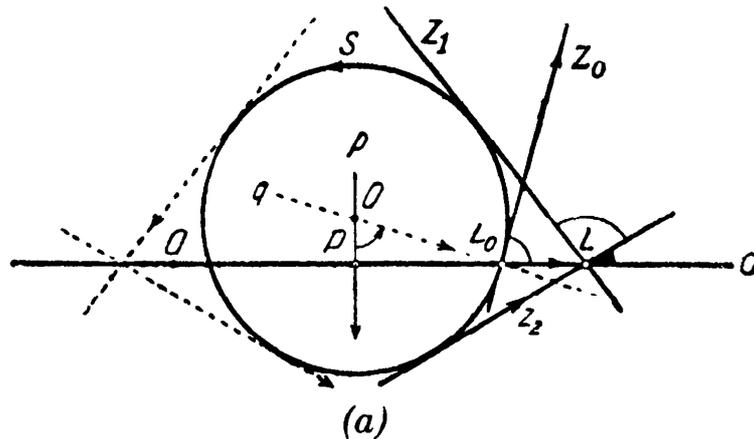


FIG. 38.

Du fait que les droites z_1 et z_2 sont tangentes au cercle S , elles satisfont à l'équation (14) :

$$Az_1\bar{z}_1 + Bz_1 - \bar{B}\bar{z}_1 + C = 0 \quad (16)$$

et

$$Az_2\bar{z}_2 + Bz_2 - \bar{B}\bar{z}_2 + C = 0. \quad (17)$$

Mais d'après la définition de l'argument d'un nombre dual z correspondant à une droite déterminée d'un plan (voir fig. 28, p. 81) $\text{Arg } z_2 = \text{Arg } z_1$, $\text{Arg } \bar{z}_2 = -\text{Arg } z_1$. D'où il s'ensuit que le produit $z_1 \bar{z}_2$ est un nombre réel :

$$z_1 \bar{z}_2 = k, \quad \bar{z}_1 z_2 = \bar{k} = k. \quad (18)$$

En multipliant l'équation (16) par z_2 , et l'équation (17) par z_1 et en utilisant les équations (18), on obtient

$$Akz_1 + Bz_1z_2 - \bar{B}k + Cz_2 = 0 \quad (16')$$

et

$$Akz_2 + Bz_1z_2 - \bar{B}k + Cz_1 = 0. \quad (17')$$

Soustrayons (17') de (16'), nous aurons

$$Ak(z_1 - z_2) - C(z_1 - z_2) = 0,$$

par conséquent pour $z_1 - z_2 \neq 0$ (c'est-à-dire pour $z_2 \neq z_1$)

$$k = C/A.$$

Notons maintenant

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 &= \text{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_1\}}{2} (1 + \varepsilon s) \cdot \text{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_2\}}{2} (1 - \varepsilon s) \\ &= \text{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_1\}}{2} \text{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_2\}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\text{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_1\}}{2} \text{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_2\}}{2} = k = \frac{C}{A}. \quad (44)$$

L'expressive $C/A = k$ s'appelle **puissance du cercle S** [plus exactement, puissance de la droite o par rapport à S ⁽¹⁾]; sa signification géométrique est donnée par l'équation (44) (ainsi, le produit

$$\text{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_1\}}{2} \cdot \text{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_2\}}{2}$$

(¹) La valeur de $k = C/A$ dépend non seulement du cercle (14), mais aussi du choix du système des coordonnées. Il est facile cependant de voir que h ne dépend que de la position de l'axe polaire o et ne dépend pas du choix du pôle O sur cet axe. Car pour un déplacement le long de o

$$z' = pz, \quad z = p'z', \quad \text{où} \quad |p| = 1, \quad |p'| = \left| \frac{1}{q} \right| = 1,$$

[voir la formule (32) du § 9, p. 85] le cercle (14) devient le cercle

$$Ap'\bar{p}'z'\bar{z}' + Bp'z' - B\bar{p}'\bar{z}' + C = 0,$$

avec la même puissance $k = A/C$ (car $p'\bar{p}' = 1$).

ne dépend pas du choix du point L de l'axe o). L'équation (44) a été obtenue dans l'hypothèse où les tangentes z_1 et z_2 du cercle S sont distinctes. Mais si L_0 est un point d'intersection de l'axe o avec le cercle S , par lequel on ne peut mener qu'une seule tangente z_0 au cercle (fig. 38, a), et $z_1 = z_2 = z_0$, alors le produit

$$\operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_1\}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_2\}}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\sphericalangle \{o, z_0\}}{2}$$

sera aussi égal à C/A : ceci vient de ce qu'on peut considérer la valeur de

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\sphericalangle \{p, z_0\}}{2}$$

comme la limite de l'expression

$$\operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_1\}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{o, z_2\}}{2},$$

où z_1 et z_2 sont les tangentes au cercle S passant par le point mobile de la droite o qui tend vers L_0 . Ainsi, la puissance de la droite o par rapport au cercle S qui la coupe est égale au carré de la tangente du demi-angle $\sphericalangle \{o, S\}$, formé par o et S (puisque par angle $\sphericalangle \{o, S\}$ entre la droite orientée o et le cercle orienté S qui la coupe on entend justement aussi l'angle entre o et la tangente à S à son point d'intersection avec o).

Désignons maintenant par P le pied de la perpendiculaire p abaissée du centre Q du cercle S sur la droite o et posons $\{Q, o\} = \{Q, P\} = d$ (ces égalités définissent aussi l'orientation de la droite p) et

$$\{Q, z_1\} = \{Q, z_2\} = r \quad (\text{fig. 38});$$

dans le cas où o coupe S , désignons par q la droite $[Q, L_0]$, dont l'orientation est définie par la condition $\{Q, L_0\} = r$ (fig. 38 a). On voit facilement que $\sphericalangle \{o, z_0\} = \sphericalangle \{p, q\}$ (comme angles ayant leurs côtés mutuellement perpendiculaires) et $\cos \sphericalangle \{p, q\} = d/r$. Par conséquent

$$\begin{aligned} k &= \operatorname{tg}^2 \frac{\sphericalangle \{o, z_0\}}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\sphericalangle \{p, q\}}{2} = \frac{1 - \cos \sphericalangle \{p, q\}}{1 + \cos \sphericalangle \{p, q\}} \\ &= \frac{1 - \frac{d}{r}}{1 + \frac{d}{r}} = \frac{r - d}{r + d}. \end{aligned}$$

D'autre part, si o ne coupe pas S (fig. 38 *b*) menons alors par P les tangentes z_1^0 et z_2^0 au cercle S ; nous désignerons par q_1 et q_2 les perpendiculaires abaissées de Q sur z_1^0 et z_2^0 et orientées de telle sorte que $\{Q, M_1\} = \{Q, M_2\} = r$, (M_1 et M_2 étant les points de tangence de z_1 et z_2 avec le cercle S).

Dans ce cas

$$\angle \{o, z_1^0\} = \angle \{p, q_1\}, \quad \angle \{o, z_2^0\} = \angle \{p, q_2\}$$

(comme angles ayant leurs côtés mutuellement perpendiculaires) et

$$\cos \angle \{p, q_1\} = \cos \angle \{p, q_2\} = \frac{r}{d}.$$

Comme de plus il est évident que

$$\angle \{o, z_2^0\} = -\angle \{o, z_1^0\}, \quad \operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z_2^0\}}{2} = -\operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z_1^0\}}{2}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} k &= \operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z_1^0\}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z_2^0\}}{2} = -\operatorname{tg}^2 \frac{\angle \{o, z_1^0\}}{2} \\ &= -\operatorname{tg}^2 \frac{\angle \{p, q_1\}}{2} = -\frac{1 - \cos \angle \{p, q_1\}}{1 + \cos \angle \{p, q_1\}} \\ &= -\frac{1 - \frac{r}{d}}{1 + \frac{r}{d}} = \frac{r - d}{r + d}. \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas :

$$k = \frac{r - d}{r + d}. \quad (45)$$

D'après la formule (45), la puissance de la droite o par rapport au cercle S est positive si o coupe S ; égale à zéro si o est tangente à S ; infinie si o est anti tangente à S (c'est-à-dire si la droite o_1 est tangente à S , et ne se distingue de o que par la direction); négative si o ne coupe pas S (dans ce dernier cas la puissance de o par rapport à S est égale à

$$-\operatorname{tg}^2 \frac{\angle \{z_1^0, z_2^0\}}{4} \quad \text{où} \quad \angle \{z_1^0, z_2^0\} = \varphi$$

est l'angle sous lequel est vu le cercle S du pied P de la perpendiculaire abaissée de Q sur o .

La notion de puissance d'un point par rapport à un cercle permet de donner une signification géométrique aux cas où les coefficients A ou C de l'équation (14) du cercle S deviennent nuls. Si $C = 0$, $A \neq 0$, alors la puissance (45) de la droite o par rapport à S est égale à zéro et, par conséquent, o est tangente à S . Si $A = 0$, $C \neq 0$, alors la puissance de o par rapport à S tend vers l'infini, c'est-à-dire que o est antitangente à S . Enfin les égalités $A = C = 0$ signifient que o est à la fois tangente et antitangente à S , c'est-à-dire que la droite o , de même que la droite o_1 de direction opposée, sont tangentes à S ; mais cela n'est possible que dans le cas où S est un point de la droite o [cf. la condition (43) pour que l'équation (14) corresponde à une droite]. Définissons maintenant la puissance k de la droite w (de direction arbitraire) par rapport au cercle S (orienté) comme le produit :

$$\operatorname{tg} \frac{\angle \{w, z_1\}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle \{w, z_2\}}{2},$$

où z_1 et z_2 sont les deux tangentes (prises dans un ordre indifférent) au cercle S , qui se coupent au point L de la droite w (fig. 39). De ce qui a été dit plus haut, il s'ensuit que si w coupe S la puissance de w par rapport à S est égale à :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\angle \{w, S\}}{2},$$

où par angle $\angle \{w, S\}$ entre la droite w et le cercle S on entend l'angle $\angle \{w, z_0\}$ entre w et la tangente z_0 à S au point d'intersection de w avec S ; si d est la distance (positive ou négative) du centre S à w , tandis que r est le rayon (positif ou négatif) de S , la puissance de w par rapport à S est égale à

$$\frac{r - d}{r + d}.$$

En particulier, la puissance de w par rapport à S est positive si w coupe S ; négative si w ne coupe pas S ; égale à zéro si w est tangente à S ; elle tend vers l'infini si w est antitangente à S .

Calculons la puissance de la droite arbitraire w (où w est un certain nombre dual :

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (1 + \varepsilon s)$$

par rapport au cercle (14). Notons que si on introduit un nouveau système de « coordonnées duales » des droites (1)

$$Z = \frac{z - w}{\bar{w}z + 1}, \quad z = \frac{Z + w}{-\bar{w}Z + 1}, \quad (46)$$

le rôle de l'axe o de ce système de coordonnées sera alors rempli par notre droite w (car de $Z = 0$ il s'ensuit que $z = w$). L'équation du cercle (14) dans le nouveau système de coordonnées prendra la forme

$$A \frac{Z + w}{-\bar{w}Z + 1} \cdot \frac{\bar{Z} + \bar{w}}{-w\bar{Z} + 1} + B \frac{Z + w}{-\bar{w}Z + 1} - \bar{B} \frac{\bar{Z} + \bar{w}}{-w\bar{Z} + 1} + C = 0.$$

ou

$$(A - Bw + \bar{B}\bar{w} + Cw\bar{w})Z\bar{Z} + [(A - C)\bar{w} + B + \bar{B}w\bar{w}]Z - \\ - [(C - A)w + \bar{B} + Bw\bar{w}]\bar{Z} + (Aw\bar{w} + Bw - \bar{B}\bar{w} + C) = 0.$$

et comme la droite w est l'axe du nouveau système de coordonnées, la *puissance de la droite w par rapport au cercle (14) est égale à*

$$k = \frac{Aw\bar{w} + Bw - \bar{B}\bar{w} + C}{A - Bw + \bar{B}\bar{w} + Cw\bar{w}} \quad (47)$$

[car la puissance de l'axe o par rapport au cercle (14) est égale à C/A .] Remarquons encore que d'après la formule (47) on a aussi

$$\frac{k - 1}{k + 1} = \frac{(A - C)w\bar{w} + 2Bw - 2\bar{B}\bar{w} + (C - A)}{(A + C)(w\bar{w} + 1)}. \quad (47 a)$$

(1) La droite z' à laquelle correspond dans le nouveau système de coordonnées le nombre dual z est obtenue à partir de la droite z , à laquelle correspond ce même nombre dans l'ancien système de coordonnées par un déplacement

$$z' = \frac{z + w}{-\bar{w}z + 1}, \quad (*)$$

qui représente un transfert parallèle $z_1 = z(1 - \varepsilon s)$ le long de o sur une distance $-s$, accompagné d'une rotation

$$z_2 = \frac{z_1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} z_1 + 1}$$

autour de O d'un angle φ et encore d'un transfert parallèle $z' = z_2(1 + \varepsilon s)$ dans la direction de o , mais maintenant sur une distance $+s$. On dit aussi quelquefois que le *système de coordonnées Z est obtenu à partir du système de coordonnées z par déplacement **.

on voit d'emblée d'après (47) par exemple que *toutes les droites w de puissance donnée k par rapport au cercle déterminé (14) satisfont à l'équation*

$$\frac{Aw\bar{w} + Bw - \bar{B}\bar{w} + C}{A - Bw + \bar{B}\bar{w} + Cw\bar{w}} = k$$

ou

$$(A - kC)w\bar{w} + (k + 1)Bw - (k + 1)\bar{B}\bar{w} + (C - kA) = 0,$$

c'est-à-dire sont tangentes à un certain cercle (et de plus, comme il est facile de le voir, ce cercle est concentrique au cercle initial).

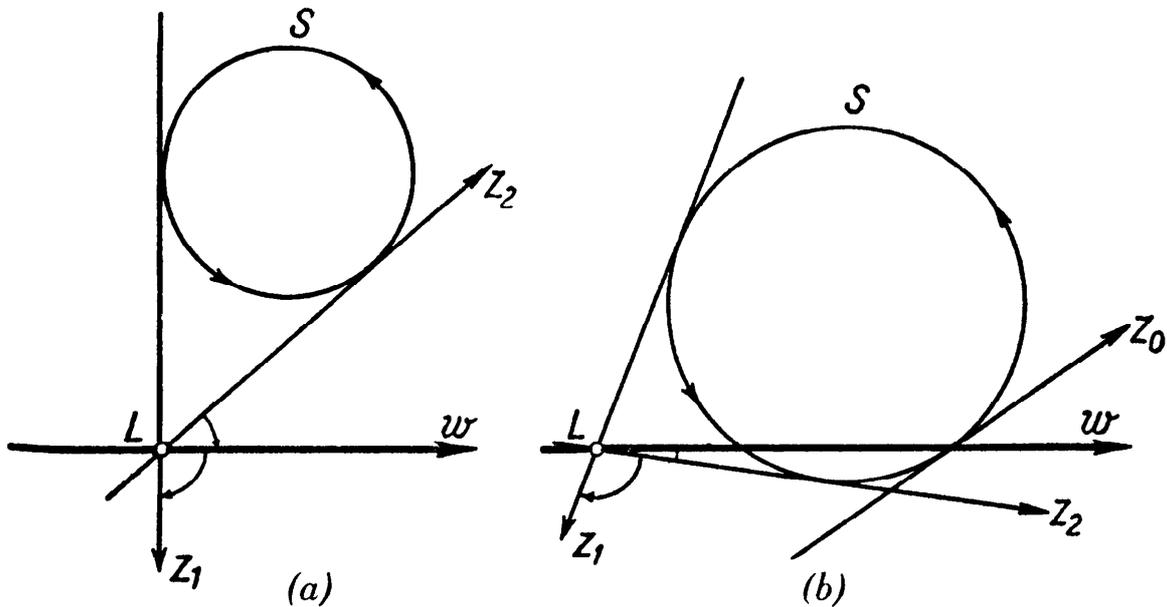


FIG. 39.

Considérons ensuite deux cercles S_1 et S_2 d'équations

$$A_1w\bar{w} + B_1w - \bar{B}_1\bar{w} + C_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_2w\bar{w} + B_2w - \bar{B}_2\bar{w} + C_2 = 0,$$

pour simplifier les calculs nous considérerons que dans ces équations les sommes des coefficients extrêmes sont semblables

$$A_1 + C_1 = A_2 + C_2$$

(si la dernière condition n'est pas remplie, on peut toujours la réaliser en multipliant une des équations par le nombre réel qui convient).

Il résulte de la formule (47 a) que toutes les droites w , dont les puissances par rapport à S_1 et S_2 sont égales satisfont à l'équation

$$\frac{(A_1 - C_1)w\bar{w} + 2B_1w - 2\bar{B}_1\bar{w} + (C_1 - A_1)}{(A_1 + C_1)(w\bar{w} + 1)} = \frac{(A_2 - C_2)w\bar{w} + 2B_2w - 2\bar{B}_2\bar{w} + (C_2 - A_2)}{(A_2 + C_2)(w\bar{w} + 1)}$$

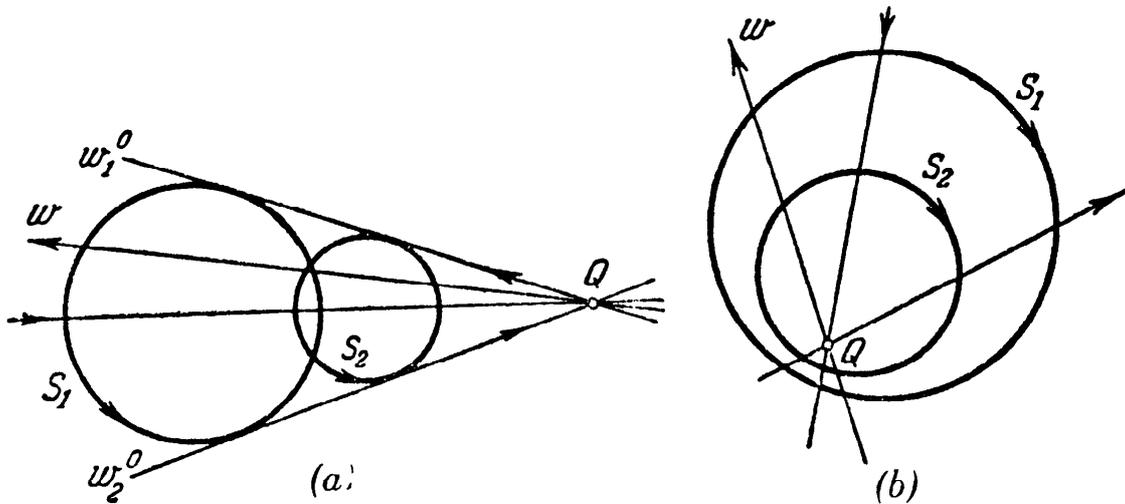


FIG. 40.

ou (notons qu'en vertu de notre convention $A_1 - A_2 = -(C_1 - C_2)$, c'est-à-dire $(A_1 - A_2) - (C_1 - C_2) = 2(A_1 - A_2)$) :

$$(A_1 - A_2)w\bar{w} + (B_1 - B_2)w - (\bar{B}_1 - \bar{B}_2)\bar{w} - (A_1 - A_2) = 0,$$

c'est-à-dire que toutes ces droites passent par un point Q [cf. l'équation (140) du point, p. 92].

Si les cercles S_1 et S_2 ont deux tangentes communes, Q coïncide alors avec leur point d'intersection [puisque les deux tangentes ont à la fois par rapport à S_1 et par rapport à S_2 une puissance nulle (voir la figure 40 a)]. Dans le cas général le point Q est caractérisé par le fait que toutes les droites passant par lui coupent S_1 et S_2 sous un seul et même angle (dont le carré de la demi-tangente est égal à la puissance de cette droite par rapport à S_1 et S_2). Le point Q s'appelle **centre de similitude** de S_1 et de S_2 (fig. 40) ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Il est facile de s'assurer que le point est le centre de la transformation centrale de similitude (homothétie), qui transfère S_1 en S_2 ; le coefficient de cette transformation est égal au rapport r_2/r_1 des rayons des cercles (cf. I. M. YAGLOM, *Transformations géométriques*, I. M., 1955, § 1, ch. I, 2^e partie).

Considérons enfin trois cercles S_1 , S_2 et S_3 d'équations

$$A_1 z \bar{z} + B_1 z - \bar{B}_1 \bar{z} + C_1 = 0,$$

$$A_2 z \bar{z} + B_2 z - \bar{B}_2 \bar{z} + C_2 = 0,$$

$$A_3 z \bar{z} + B_3 z - \bar{B}_3 \bar{z} + C_3 = 0,$$

de plus, comme précédemment, nous considérerons que

$$A_1 + C_1 = A_2 + C_2 = A_3 + C_3.$$

Les centres de similitude des cercles S_1 , S_2 et S_3 pris deux à deux seront caractérisés par les équations

$$(A_1 - A_2)w\bar{w} + (B_1 - B_2)w - (\bar{B}_1 - \bar{B}_2)\bar{w} - A_1 - A_2 = 0,$$

$$(A_1 - A_3)w\bar{w} + (B_1 - B_3)w - (\bar{B}_1 - \bar{B}_3)\bar{w} - (A_1 - A_3) = 0,$$

$$(A_2 - A_3)w\bar{w} + (B_2 - B_3)w - (\bar{B}_2 - \bar{B}_3)\bar{w} - (A_2 - A_3) = 0.$$

Ces équations montrent que la droite qui passe par les deux premiers centres de similitude, passe aussi par le troisième (car la dernière des trois équations écrites est la différence des deux premières, et toute droite w qui satisfait aux deux premières équations doit inévitablement la satisfaire aussi). *Ainsi, nous savons que les centres de similitude des trois cercles S_1 , S_2 et S_3 sont sur une même droite q . Cette droite s'appelle axe de similitude des trois cercles S_1 , S_2 et S_3 (fig. 41).*

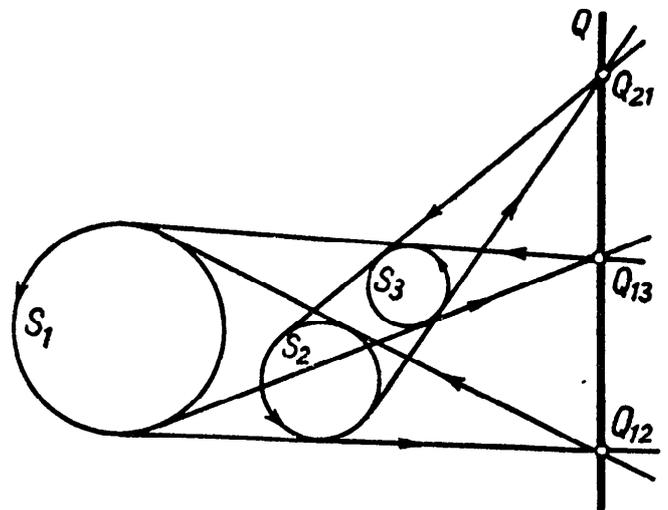


FIG. 41.

Tournons-nous à nouveau vers la notion de rapport anharmonique de quatre droites z_1 , z_2 , z_3 et z_4 . Il est clair que si ces droites ou certaines de ces droites sont déplacées le rapport anharmonique W sera changé; de plus d'après la définition du rapport anharmonique W , W se change en son inverse lors du changement de l'ordre des deux premiers ou des deux derniers points, ne change pas de valeur quand la première et la deuxième paire de points s'échangent; se change en l'unité moins la valeur initiale quand la deuxième et le troisième point échangent leur place (cf. plus haut, p. 72).

D'où, exactement comme précédemment, on peut conclure que pour tous les déplacements possibles des quatre points on a en tout six valeurs différentes de leur rapport anharmonique

$$\lambda, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_2 = 1 - \lambda, \quad \lambda_3 = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \lambda_4 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad \lambda_5 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

[cf. les formules (26), p. 73]. Ainsi, à chaque « quadrilatère » $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ (c'est-à-dire l'ensemble des quatre droites z_1, z_2, z_3 et z_4 — « côtés » du « quadrilatère ») correspond un « hexagone » déterminé, formé par les six droites (par six nombres duals) $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 ⁽¹⁾.

Étudions le cas où l'hexagone $\overline{\lambda \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}$ dégénérera, c'est-à-dire aura moins de six « côtés ». Il nous faut pour cela trouver dans quelles conditions le nombre (dual) λ sera égal à un des cinq nombres suivants :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_2 = 1 - \lambda, \quad \lambda_3 = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \lambda_4 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \lambda_5 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Nous savons déjà, que l'égalité $\lambda = \lambda_1$ donne $\lambda = -1$ (notons que

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \neq 1,$$

si les droites z_1, z_2, z_3 et z_4 sont différentes deux à deux); l'égalité $\lambda = \lambda_2$ donne $\lambda = 1/2$ et $\lambda_4 = -1$ de l'égalité $\lambda = \lambda_5$ il s'ensuit que $\lambda = 2$ et $\lambda_2 = -1$ (rappelons que l'égalité

$$\lambda = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = 0$$

est impossible si les droites z_1, z_2, z_3 et z_4 sont toutes différentes); enfin de l'égalité $\lambda = \lambda_3$ et $\lambda = \lambda_5$ il s'ensuit que $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ (cf. p. 70-72). Mais l'équation $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ n'est pas soluble dans le domaine des nombres duals (cf. plus haut, p. 71) : en effet, si $\lambda = a + b\varepsilon$ (où a et b sont réels), alors

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda + 1 &= (a^2 + 2abc\varepsilon) - (a + b\varepsilon) + 1 \\ &= (a^2 - a + 1) + (2ab - b)\varepsilon, \end{aligned}$$

et alors la « partie réelle » $a^2 - a + 1$ du dernier nombre n'est pas égale à zéro quel que soit a (réel !).

(1) Cet hexagone est entièrement défini par un seul de ses « côtés » λ .

Ainsi, le seul cas où le rapport anharmonique W de quatre droites (distinctes) prend moins des six valeurs possibles par échange des droites est le cas où les droites désignées par z_1, z_2, z_3 et z_4 satisfont à la condition (27)

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = -1. \quad (27)$$

Ce quatuor de droite s'appelle **quatuor anharmonique**; le quadrilatère formé par ces droites s'appelle **quadrilatère harmonique** (fig. 42). Comme

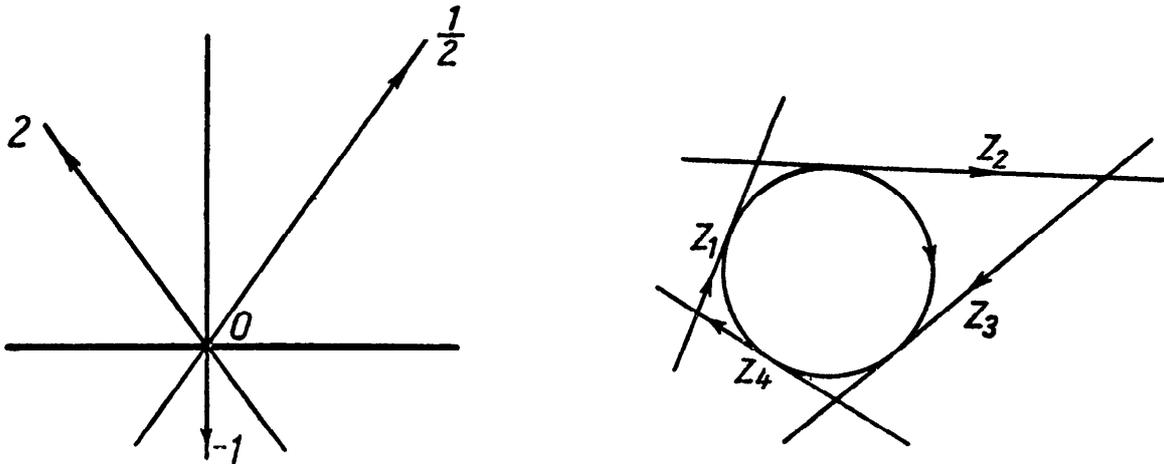


FIG. 42.

le rapport anharmonique des quatre « côtés » d'un quadrilatère harmonique est réel, on peut l'inscrire autour d'un cercle. D'autre part,

$$\begin{aligned} |W(z_1, z_2, z_3, z_4)| &= \left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right| : \left| \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \right| \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}} : \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_4}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_4}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}} : \frac{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{2}}{\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{2}}, \end{aligned}$$

où

$$\varphi_1 = \angle \{ z_1, o \}, \quad \varphi_2 = \angle \{ z_2, o \}, \quad \text{etc.}$$

(On utilise ici la formule

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \sin (\alpha - \beta) / \cos \alpha \cos \beta).$$

Et puisque

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \angle \{ z_1, o \} - \angle \{ z_3, o \} = \angle \{ z_1, z_3 \},$$

$$\varphi_1 - \varphi_4 = \angle \{ z_1, o \} - \angle \{ z_4, o \} = \angle \{ z_1, z_4 \}, \text{ etc.}$$

l'égalité $|W(z_1, z_2, z_3, z_4)| = 1$ peut s'écrire aussi :

$$\frac{\sin \frac{\angle \{ z_1, z_3 \}}{2}}{\sin \frac{\angle \{ z_2, z_3 \}}{2}} : \frac{\sin \frac{\angle \{ z_1, z_4 \}}{2}}{\sin \frac{\angle \{ z_2, z_4 \}}{2}} = 1$$

ou

$$\sin \frac{\angle \{ z_1, z_3 \}}{2} \cdot \sin \frac{\angle \{ z_2, z_4 \}}{2} = \sin \frac{\angle \{ z_2, z_3 \}}{2} \cdot \sin \frac{\angle \{ z_1, z_4 \}}{2}.$$

Ainsi, le produit des sinus de la moitié des angles opposés d'un quadrilatère harmonique $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ (par angles du quadrilatère on entend les angles orientés $\angle \{ z_1, z_3 \}, \angle \{ z_1, z_4 \}, \text{ etc.}$) sont égaux entre eux. On comprend facilement que ces deux dernières conditions caractérisent entièrement un quadrilatère harmonique; c'est pourquoi le carré peut servir d'exemple de quadrilatère harmonique (ses côtés étant orientés de telle façon qu'ils soient tous tangents à un seul cercle dont le centre est au centre du carré).

Le rôle de l'hexagone $\overline{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}$ correspondant au quadrilatère harmonique $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ est joué par le trio des droites $-1, 2$ et $1/2$ concourantes au pôle O du système des coordonnées (voir la même, fig. 42).

§ 11**. CORRESPONDANCE DES NOMBRES COMPLEXES ORDINAIRES ET DES POINTS D'UN PLAN DE LOBATCHEWSKY

On connaît bien la représentation des points d'un plan de Lobatchewsky sur des points à l'intérieur d'un cercle unitaire, par laquelle les droites du plan de Lobatchewsky sont représentées par des diamètres du cercle et par des arcs de cercles orthogonaux à la circonférence Σ ⁽¹⁾ qui limite notre

⁽¹⁾ Voir par exemple : I. M. YAGLOM, *Transformations géométriques*, II, M., 1956, annexe du chapitre II, 3^e partie.

cercle; cette représentation fut étudiée pour la première fois par l'éminent mathématicien et physicien français Henri Poincaré (1854-1912) et elle porte d'après son nom l'appellation de « modèle de Poincaré » d'un plan de Lobatchewsky.

On peut aussi considérer le « Modèle de Poincaré » comme la représentation du plan de Lobatchewsky sur le plan complexe ⁽¹⁾; elle permet d'établir un lien entre les nombres complexes (ordinaires) et les points d'un plan de Lobatchewsky. Cette correspondance est établie de la façon suivante : à un point du plan de Lobatchewsky de coordonnées polaires (r, φ) on associe un nombre complexe

$$z = \operatorname{th} \frac{r}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (48)$$

(ou, en d'autres termes, le nombre complexe

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

est représenté par les point du plan de Lobatchewsky de coordonnées polaires (r, φ) , où $r = 2 \operatorname{Arg} \operatorname{th} p$, c'est-à-dire $\operatorname{th} r/2 = p$. Ainsi tout le plan de Lobatchewsky est représenté par l'ensemble des nombres z tels que $|z|^2 = z\bar{z} < 1$, c'est-à-dire par l'ensemble des points du cercle unitaire (cf. § 7).

Afin d'étendre la correspondance entre les nombres complexes ordinaires et les points d'un plan de Lobatchewsky à tous les nombres complexes, on peut agir de façon analogue à ce qui a été fait au § 9 pour la représentation de droites euclidiennes par les nombres duals. Nous conviendrons notamment de considérer tous les points du plan de Lobatchewsky comme étant **orientés**, c'est-à-dire munis d'indication d'une direction définie de circulation autour de ce point, prise comme positive; sur les dessins l'orientation du point (c'est-à-dire son sens de rotation déterminée) sera indiquée par une petite flèche courbe (fig. 43). De plus la distance $d = (A, B)$ entre les deux points orientés A et B du plan de Lobatchewsky nous ne la considérerons égale à la longueur (non euclidienne) r du segment AB que dans le cas où les sens positifs de rotation autour de A et de B coïncident; dans

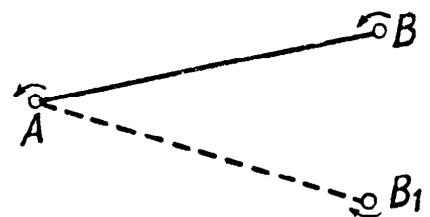


FIG. 43.

⁽¹⁾ Voir par exemple A. I. MARKOUCHEVITCH, *Éléments d'une théorie des fonctions analytiques*, M., 1944, § 4, chap. V.

le cas d'orientations différentes des points A et B (fig. 43) nous admettrons que la distance entre ces points est complexe — elle est égale à $r + i\pi$. Dans ce cas, en accord avec (48), à deux points orientés A et A_1 d'un plan de Lobatchewsky de coordonnées polaires (r, φ) , ne différant que par la direction, correspondront les nombres complexes

$$z = \text{th} \frac{r}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

et

$$\begin{aligned} z_1 &= \text{th} \left(\frac{r}{2} + i \frac{\pi}{2} \right) (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= \text{coth} \frac{r}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = 1/\bar{z}. \end{aligned}$$

Les points correspondants du plan complexe, sont « symétriques » par rapport au cercle $z\bar{z} = 1$; ces points sont sur un même rayon issu de l'origine des coordonnées O ; de plus $(O, z_1) = 1/(O, z)$, où (O, z) et (O, z_1) sont les distances euclidiennes du point O aux points z et z_1 .

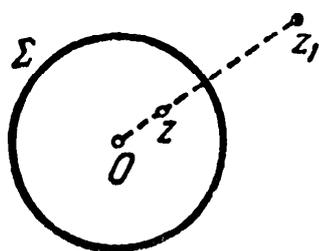


FIG. 44.

Nous aurons encore l'occasion de nous arrêter de façon détaillée sur la notion de symétrie par rapport au cercle (inversion). Sur la figure 44 le nombre complexe z correspond au point A , orienté comme le pôle O du système de coordonnées polaires, et le nombre z_1 , au

point A_1 , qui ne diffère de A que par son orientation (l'orientation de A_1 est l'opposée de l'orientation de O). Il est clair, qu'à l'axe O et à « l'antipôle » O_1 (point ne se distinguant de O que par son orientation) correspondront les nombres 0 et ∞ . Si on convient encore d'appeler les points du cercle $z\bar{z} = 1$ (absolu du modèle de Poincaré) points **indéfiniment éloignés** du plan de Lobatchewsky ⁽¹⁾ et d'estimer que pour ces points le rayon vecteur $r = \infty$, nous obtenons une correspondance biunivoque entre tous les points (en incluant les points orientés et infiniment éloignés) du plan de Lobatchewsky et tous les nombres complexes ordinaires (au nombre desquels on compte aussi le nombre ∞).

⁽¹⁾ Notons que les points indéfiniment éloignés du plan de Lobatchewsky n'ont pas d'orientation ; on peut illustrer de façon concrète et évidente ce fait en notant qu'autour d'un tel point on ne peut décrire un cercle dont la direction de rotation donnerait l'orientation du point.

Ainsi on peut interpréter géométriquement les nombres complexes ordinaires non seulement comme des points d'une surface ordinaire (euclidienne), mais aussi comme des **points orientés d'un plan de Lobatchewsky**. De plus, comme précédemment, aux nombres réels correspondent les points de l'axe polaire o ; aux nombres opposés z et $-z$ correspondent les points symétriques par rapport au pôle O , et aux nombres conjugués z et \bar{z} correspondent les points symétriques par rapport à l'axe polaire o (cf. plus haut, fig. 1); aux points ne différant que par leur orientation, correspondent les nombres complexes z et z_1 tels que $z_1 = 1/\bar{z}$. Ainsi les égalités

$$z' = -z \quad (a), \quad z' = \bar{z} \quad (b) \quad \text{et} \quad z' = \frac{1}{\bar{z}} \quad (c) \quad (49)$$

définissent dans le plan de Lobatchewsky une symétrie par rapport au point O , une symétrie par rapport à la droite o et une réorientation (un changement de l'orientation de chaque point en son opposée).

Un déplacement arbitraire du plan de Lobatchewsky est décrit par une de ces formules ⁽¹⁾ :

$$z' = \frac{pz + q}{\bar{q}z + \bar{p}} \quad \text{ou} \quad z = \frac{p\bar{z} + q}{\bar{q}\bar{z} + \bar{p}}, \quad \Delta = \left| \frac{p q}{q p} \right| \neq 0. \quad (50)$$

La distance d_0 du pôle O du système de coordonnées au point z est définie, en vertu de (48), par la formule

$$\text{th} \frac{d_0}{2} = |z|, \quad \text{th}^2 \frac{d_0}{2} = z\bar{z},$$

d'où, en utilisant (50) nous obtenons facilement l'expression de la distance $d(z_1, z_2)$ entre n'importe quels deux points z_1 et z_2 :

$$\text{th}^2 \frac{d}{2} = \frac{(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{(1 - z_1\bar{z}_2)(1 - \bar{z}_1z_2)}. \quad (51)$$

l'angle δ entre deux droites, concourantes au pôle O et passant par les points z_1^0 et z_2^0 , en vertu de cette même formule (48) s'exprime par la même rela-

⁽¹⁾ Cf. A. I. MARKOUCHEVITCH, *Éléments d'une théorie des fonctions analytiques*, M., 1944, p. 513.

tion (7) que dans le cas d'un plan euclidien. En utilisant (50) on peut obtenir l'expression suivante pour l'angle (orienté)

$$\delta = \sphericalangle \{ [z_0z_1], [z_0z_2] \}$$

entre les droites (orientées) $[z_0z_1[$ et $z_0z_2[$ (1) :

$$\delta = \text{Arg} \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} : \frac{1 - \bar{z}_0z_2}{1 - \bar{z}_0z_1} \right). \quad (52)$$

En vertu de (52) pour que trois points z_0, z_1 et z_2 soient sur une même droite il faut que le rapport

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{1 - \bar{z}_2z_0}{1 - \bar{z}_2z_1}$$

soit réel. Il est facile d'obtenir maintenant l'équation de la droite non-euclidienne de la géométrie de Lobatchewsky :

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + A = 0, \quad (53)$$

A imaginaire pur (cf. plus haut, p. 31-32 et 92 ; par droite nous entendons l'ensemble de tous les points orientés appartenant à une droite donnée) (2).

On sait que les *cycles* de la géométrie de Lobatchewsky, c'est-à-dire les cercles, les lignes limites (horicycles) et les équidistantes (hypercycles; au nombre des équidistantes on compte aussi les lignes droites considérées comme cas limite de l'équidistante) sont représentées par des cercles et des lignes droites du plan de la variable complexe (3).

Il convient de préciser un peu cette affirmation en précisant comment on doit comprendre le mot « cycle » en tenant compte de ce que les points d'un plan de Lobatchewsky sont considérés comme orientés. Il est naturel de penser ici que les cycles sont aussi orientés, de plus il convient de considérer le point A comme appartenant au cycle orienté S , si le sens de rotation autour de A est le sens de rotation lors du déplacement par rapport au cycle (voir la figure schématique 45, a , où le point A appartient au cycle \bar{S} ,

(1) Cette formule ne coïncide pas, bien entendu, avec la formule (8) du § 7, en dépit du fait que « l'angle non euclidien » entre deux courbes sur le modèle de Poincaré est représenté par l'angle ordinaire (euclidien) : c'est que la « droite non euclidienne » $[z_0z_1]$ (du point de vue de la géométrie d'Euclide, — c'est le cercle orthogonal Σ) est différente de la droite ordinaire (euclidienne) $[z_0z_1]$.

(2) L'équation (53) peut aussi se déduire du fait que chaque droite d'un plan de Lobatchewsky peut par un déplacement (50) être transformé en axe polaire o dont l'équation a la forme $z - \bar{z} = 0$.

(3) Cf. par exemple les livres cités plus haut de A. I. MARKOUCHVITCH et I. M. YAGLOM.

tandis que le point B n'est pas considéré comme lui appartenant. Ensuite, par équidistante (orientée) de base PQ nous penserons lieu géométrique des points situés à une distance constante h de la droite PQ et des deux côtés de cette droite; avec cela les points des branches inférieure et supérieure de l'équidistante doivent être orientés différemment (fig. 45 b) ⁽¹⁾.

Les droites d'un plan de Lobatchewsky seront considérées comme non orientées, comme dans le paragraphe 9 nous avons considéré les points comme non orientés ⁽²⁾; enfin nous compterons aussi parmi les cycles le « cercle infiniment éloigné » (absolu) Σ , lui aussi non orienté. L'ensemble de tous les cycles (orientés) du plan de Lobatchewsky coïncidera exactement avec l'ensemble de tous les cercles et droites du plan de la variable complexe (cf., en particulier, fig. 46, sur laquelle sont représentées la droite dans le plan de Lobatchewsky et l'équidistante S pour laquelle cette droite sert de base).

Ceci permet d'utiliser ici les résultats du § 7. En rappelant, en particulier, la condition d'appartenance des quatre points d'un plan complexe à un seul cercle (p. 32-33), nous concluons en disant que *la condition d'appartenance de quatre points donnés (orientés) z_0, z_1, z_2 et z_3 d'un plan de Lobatchewsky à un seul cycle (orienté) est la réalité du rapport anharmonique*

$$W(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$$

de ces points.

⁽¹⁾ De même que nous considérons la droite comme un cas limite de l'équidistante, auquel nous parvenons quand h tend vers zéro, il convient de considérer les points de la droite comme des points doubles en attribuant à chacun d'eux les deux orientations possibles (cf. fig. 45, b et c); ceci signifie que sur le plan de la variable complexe la droite est représentée par un cercle parfait orthogonal à l'absolu Σ (cercle $\bar{z}z = 1$).

⁽²⁾ La notion de cycle orienté a été introduite afin de fixer l'orientation des points appartenant à ce cycle: la direction des flèches, sur l'arc qui entoure le point, menées à partir du côté convexe du cycle doit coïncider avec la direction du cycle (fig. 45, a). Cependant, comme la droite n'est absolument pas convexe, nous ne pouvons pas distinguer la direction des points qui lui appartiennent (cf. fig. 45, c); c'est pourquoi on est amené à considérer les droites comme étant non orientées et tous leurs points comme étant des points doubles.

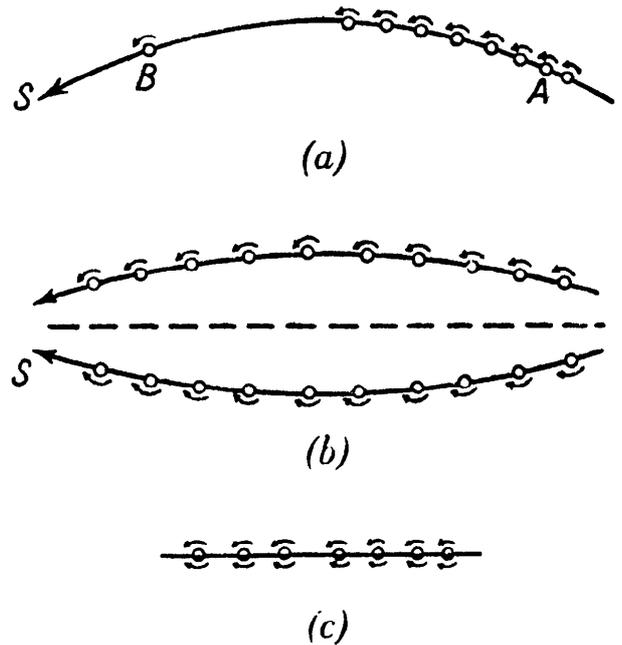


FIG. 45.

D'où il s'ensuit enfin que l'équation de tout cycle d'un plan de Lobatchewsky peut s'écrire sous la forme :

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (54)$$

A et C purement imaginaires.

L'équation (14) correspondra à un cercle, une ligne limite ou une équidistante suivant que le cercle (14) du plan de la variable complexe aura 0, 1 ou 2 points d'intersection avec le cercle $z\bar{z} = 1$ (absolu), c'est-à-dire dépendra du nombre de solutions du système d'équations

$$z\bar{z} = 1, \quad Bz - \bar{B}\bar{z} = -A - C.$$

D'où nous obtenons sans peine les résultats suivants :

Le cycle (14) est un cercle si :

$$AC + B\bar{B} > 0,$$

$$(A + C)^2 + 4B\bar{B} < 0 \quad (54 a)$$

(au nombre des cercles on compte aussi le cercle infiniment éloigné Σ);

Le cycle (14) est une ligne limite si

$$AC + B\bar{B} > 0,$$

$$(A + C)^2 + 4B\bar{B} = 0; \quad (54 b)$$

Le cycle (14) est une équidistante si

$$AC + B\bar{B} > 0, \quad (A + C)^2 + 4B\bar{B} > 0 \quad (54 c)$$

(au nombre des équidistantes on compte aussi les lignes droites ⁽¹⁾)

Nous avons déjà vu que l'équation (14) représente une droite dans le cas où

$$A - C = 0. \quad (55)$$

(¹) Si $AC + B\bar{B} = 0$ alors l'équation (14) représente un point unique; si $AC + B\bar{B} < 0$ aucun des points du plan de Lobatchewsky ne satisfait à l'équation (14).

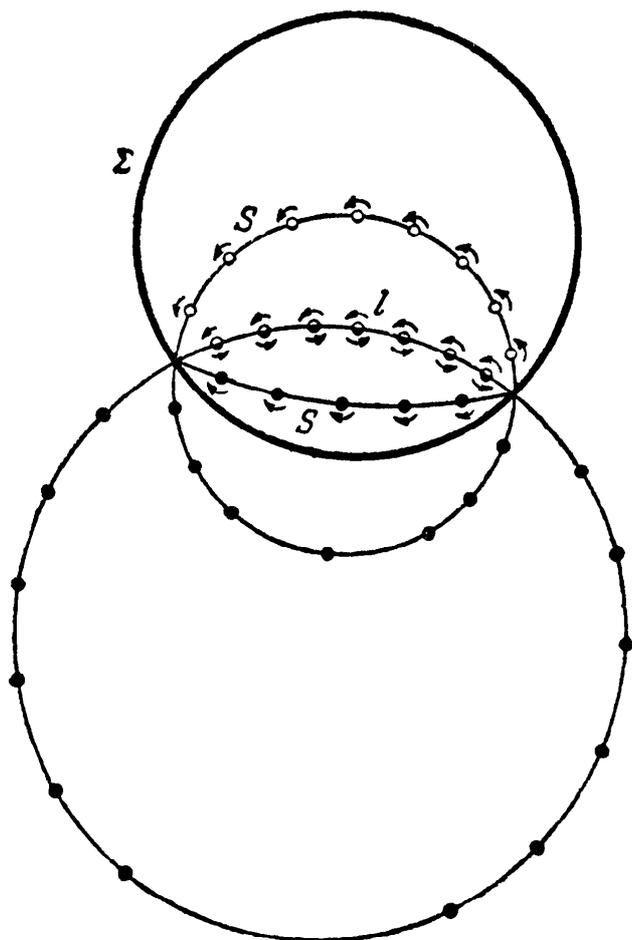


FIG. 46.

On peut déduire de ce qui a été dit la démonstration de nombreux théorèmes de la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky. Ainsi, par exemple, exactement comme aux pages 34-35 on démontre que si S_1, S_2, S_3, S_4 sont quatre cycles (orientés) d'un plan de Lobatchewsky, et que de plus les cycles S_1 et S_2 se coupent aux points (orientés) z_1 et w_1 : les cycles S_2 et S_3 aux points z_2 et w_2 , les cycles S_2 et S_3 aux points z_3 et w_3 , les points S_4 et S_1 aux points z_4 et w_4 et si les points (orientés) z_1, z_2, z_3 et z_4 appartiennent à un seul cycle (orienté), alors les points w_1, w_2, w_3 et w_4 appartiennent aux aussi à un seul cycle (1).

D'autres exemples de ce genre pourront être trouvés par le lecteur.

Signalons encore que par « modèle de Poincaré » de la géométrie plane de Lobatchewsky on entend souvent une représentation du plan de Lobatchewsky un peu différente de celle utilisée plus haut.

On appelle notamment « points » d'un plan de Lobatchewsky tous les points de n'importe quelle demi-surface, sans les points de la ligne qui limite cette demi-surface, et par « droites » on entend les rayons et demi-cercles perpendiculaires à o (autrement dit les

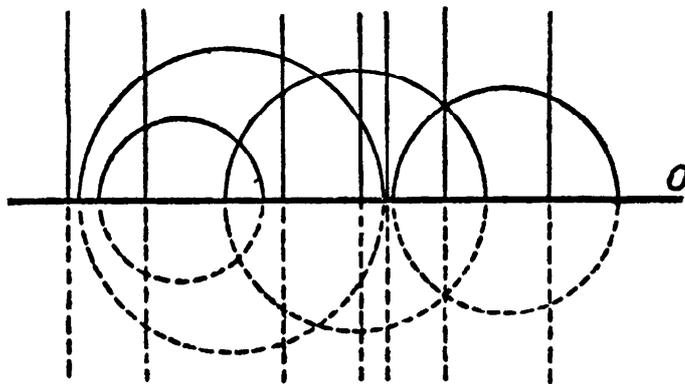


FIG. 47.

rayons perpendiculaires à o et les demi-cercles de centre o ; voir fig 47) (2). La « distance non euclidienne » entre deux points de « coordonnées complexes » $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ (où $y_1 > 0, y_2 > 0$, puisque les points du demi-plan supérieur $y > 0$ jouent ici le rôle « des points » d'un plan de Lobatchewsky) est définie par la formule :

$$\operatorname{th}^2 \frac{d}{2} = \frac{(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{(\bar{z}_2 - z_1)(z_2 - \bar{z}_1)}; \quad (56)$$

« l'angle non euclidien » entre deux droites est mesuré par l'angle euclidien entre les cercles qui représentent ces droites (ou par la droite et le cercle).

Convenons maintenant, comme nous l'avons fait auparavant, de considérer comme orientés les points d'une surface de Lobatchewsky, nous associons à deux points ne différant que par leur direction, deux points z et \bar{z} du plan de la variable complexe, symétriques par rapport à l'axe o . Si, de plus, on appelle les points de la droite o (absolu du modèle de Poincaré étudié sur la demi-sur-

(1) Notons d'ailleurs que ce théorème découle automatiquement du théorème démontré p. 34-35 du fait que les cycles de la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky sont représentés par les cercles du plan euclidien.

(2) Voir, par exemple B. V. KOUTOUZOV, *Géométrie de Lobatchewsky et éléments fondamentaux de géométrie*, M., 1950, § 45.

face) « points infiniment éloignés » du plan de Lobatchewsky (les points n'ont pas d'orientation), nous obtiendrons alors de nouveau *la représentation de tout le plan de la variable complexe* (tout l'ensemble des nombres complexes) *par l'ensemble des points* (orientés et indéfiniment éloignés) *des points d'un plan de Lobatchewsky*. En prenant, comme plus haut une convention d'orientation des cycles et d'appartenance des points (orientés) à des cycles (orientés), nous établirons de plus que *l'ensemble de tous les cycles d'une surface de Lobatchewsky est représenté par l'ensemble des droites et des cercles de la surface de la variable complexe*. D'où il s'ensuit que, comme précédemment, *la condition d'appartenance de quatre points* (orientés) z_1, z_2, z_3 et z_4 *à un seul cycle est la réalité du rapport anharmonique*

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

de ces quatre points et que l'équation du cycle (orienté) a la forme qui nous est bien connue :

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (14)$$

A et C purement imaginaires.

Et comme le cycle (14) est une équidistante, une ligne limite ou un cercle suivant qu'il a deux, un ou aucun point commun avec l'absolu $z - \bar{z} = 0$ (axe des nombres réels o), nous obtenons alors facilement les résultats suivants : *Le cycle (14) est un cercle pour*

$$(B - \bar{B})^2 - 4AC > 0,$$

une ligne limite pour

$$(B - \bar{B})^2 - 4AC = 0$$

et une équidistante pour

$$(B - \bar{B})^2 - 4AC < 0.$$

On vérifie aussi facilement que le cycle (14) est une ligne droite dans le seul cas où

$$B + \bar{B} = 0. \quad (57)$$

Enfin, notons que les déplacements d'une surface de Lobatchewsky s'écrivent, dans leur représentation par les points de coordonnées complexes considérés ici, de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{où} \quad ad - bc > 0, \\ \text{et} \\ z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \text{où} \quad ad - bc < 0; \end{array} \right\} \quad (58)$$

où a, b, c, d sont des nombres réels.

Nous nous attarderons à nouveau plus loin sur la question du lien entre deux « modèles de Poincaré » différents d'une surface de Lobatchewsky [de deux représentations d'une surface de Lobatchewsky sur le plan de la variable complexe (voir § 17, p. 185)].

§ 12**. NOMBRES DOUBLES ET DROITES ORIENTÉES D'UN PLAN DE LOBATCHEWSKY

De façon tout à fait analogue à ce qui a été fait au paragraphe 9 de ce chapitre, on peut associer aux droites orientées d'une surface de Lobatchewsky les nombres doubles. Et notamment, nous introduirons, comme dans le paragraphe 9, un système polaire de coordonnées pour les droites et nous attribuerons à chaque droite orientée l coupant l'axe polaire o , ayant les coordonnées polaires θ, s , le nombre double

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (\operatorname{ch} s + e \operatorname{sh} s), \quad (59)$$

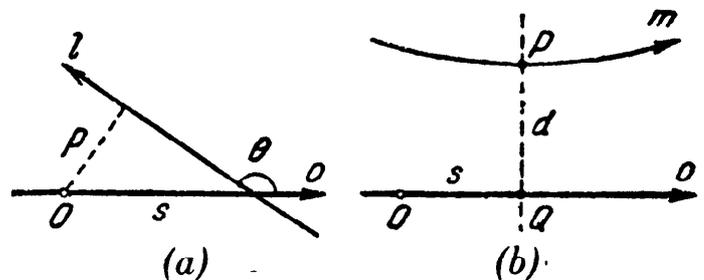


FIG. 48.

et à la droite m qui diverge de o , dirigée du même côté que o de la perpendiculaire PQ , le nombre :

$$z = \operatorname{th} \frac{d}{2} (\operatorname{sh} s' + e \operatorname{ch} s'), \quad (59 a)$$

où

$$d = \{ m, o \} = \{ P, Q \}$$

est la plus petite distance (orientée entre les droites m et o , c'est-à-dire la distance orientée de la projection P sur la droite m de la perpendiculaire commune aux droites m et o (cf. plus haut, p. 80), $s' = \{ O, Q \}$ — distance orientée du pôle O du système des coordonnées à la projection Q de la perpendiculaire commune sur o (fig. 48) ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ L'égalité (59 a) signifie qu'en conformité avec les formules générales de la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky les coordonnées polaires de la droite m sont considérées égales :

$$\theta = id \quad \text{et} \quad s = s' - i \frac{\pi}{2}$$

$$\text{car } \operatorname{tg} \frac{di}{2} \left[\operatorname{ch} \left(s' - i \frac{\pi}{2} \right) + e \operatorname{sh} \left(s' - i \frac{\pi}{2} \right) \right] = \operatorname{th} \frac{d}{2} (\operatorname{sh} s' + e \operatorname{ch} s').$$

Ensuite, de même que d'après la formule (59) il s'ensuit qu'on associera à deux droites l et l_1 coupant o qui ne diffèrent que par leur direction les nombres doubles

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (\operatorname{ch} s + e \operatorname{sh} s)$$

et

$$z_1 = \operatorname{tg} \frac{\theta + \pi}{2} (\operatorname{ch} s + e \operatorname{sh} s) = -\operatorname{cot} \frac{\theta}{2} (\operatorname{ch} s + e \operatorname{sh} s) = -\frac{1}{\bar{z}}.$$

Ainsi à la droite m_1 ne différant que par sa direction de la droite m qui correspond au nombre (59 a) et qui diverge de o , nous associerons le nombre

$$z = -\frac{1}{\operatorname{th} \frac{d}{2} (\operatorname{sh} s' + e \operatorname{ch} s')} = -\operatorname{coth} \frac{d}{2} (\operatorname{sh} s' + e \operatorname{ch} s'). \quad (59 b)$$

Les droites parallèles à l'axe o peuvent être considérées comme le cas limites des droites coupant l'axe o , qui correspondent à la valeur nulle de l'angle θ , ou comme le cas limite des droites qui divergent de la droite o et qui correspondent à la valeur nulle de la distance d . Comme des formules (59) et (59 a) il s'ensuit respectivement que $z\bar{z} = \operatorname{tg}^2 \theta/2$, et $z\bar{z} = -\operatorname{th}^2 d/2$, alors il est naturel d'attribuer aux droites parallèles à o , orientées de la même façon que la droite o , les diviseurs de 0, c'est-à-dire les nombres de forme $u \pm ue$. De plus, aux droites parallèles à o de direction positive ou négative, correspondent les nombres $u + uv$, pour lesquels $v = u$ ou $v = -u$, car il découle de (59) et (59 a) que la relation $v = u$ est équivalente à la relation $s = \infty$ ou $s' = \infty$, et la relation $v = -u$ à l'égalité $s = -\infty$ ou $s' = -\infty$. Ensuite d'après les formules de la trigonométrie non euclidienne la distance (orientée) $p = \{O, l\}$ du pôle O à la droite l , qui coupe o (fig. 48) et correspond au nombre double

$$z = u + ev = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (\operatorname{ch} s + e \operatorname{sh} s),$$

se trouve à partir de la relation

$$\operatorname{sh} p = \operatorname{sh} s \cdot \sin \theta = \operatorname{sh} s \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{sh} s}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2v}{1 + |z|^2} \quad (60)$$

[comparez avec (30) !]. C'est pourquoi aux droites parallèles à o , n et n' , situées à une distance

$$\{ O, n \} = \{ O, n' \} = p,$$

de O , on doit associer les nombres $u + ev$ (où $v \pm u$) pour lesquels $v = \text{sh } p/2$ c'est-à-dire les nombres :

$$z = \frac{\text{sh } p}{2} (1 + e) \quad \text{et} \quad z' = -\frac{\text{sh } p}{2} (1 - e).$$

Enfin, en partant de la relation $z_1 = -1/\bar{z}$, entre les nombres doubles z et z_1 , qui correspondent aux droites coupant l'axe o ou divergent de o , ne différant l'une de l'autre que par leur orientation, nous associerons aux droites n_1 et n'_1 antiparallèles à o (c'est-à-dire aux droites parallèles à o et de direction opposée), à une distance de O

$$\{ O, n_1 \} = \{ O, n'_1 \} = p_1,$$

les nombres

$$z_1 = \frac{2}{\text{sh } p_1} \omega_2 \quad \text{et} \quad z'_1 = -\frac{2}{\text{sh } p_1} \omega_1,$$

où w_1 et w_2 sont les nombres inverses des diviseurs de zéro $\omega_1 = 1/(1 + e)$, $\omega_2 = 1/(1 - e)$ (notons que si n et n_1 sont deux droites ne différant que par leur orientation, alors

$$p = \{ O, n \} = -\{ O, n_1 \} = -p_1).$$

A l'axe polaire o et à « l'antiaxe » o_1 (c'est-à-dire à la droite ne différant de o que par sa direction) nous associerons les nombres 0 et ∞ .

Pour le moment, aucune des droites ne correspond aux nombres doubles z tels que $z\bar{z} = -1$ (car $\text{th}^2 d/2 \neq 1$ et $\text{coth}^2 d/2 \neq 1$ quelle que soit d). Afin d'étendre la correspondance entre les droites d'une surface de Lobatchewsky et les nombres doubles à tous les nombres, nous allons introduire « les droites infiniment éloignées » de la surface de Lobatchewsky qu'on peut se représenter comme des tangentes à l'absolu Σ du modèle de Klein (fig. 49) ⁽¹⁾, ces droites de même que les points infiniment éloignés du § 11

⁽¹⁾ Pour ce qui concerne le modèle de Klein d'une surface de Lobatchewsky, voir par exemple, I. M. YAGLOM, *Transformations géométriques*, II. Applications : chap. I, 3^e partie du livre. [On appelle aussi souvent ce modèle de la géométrie de Lobatchewsky « modèle de Beltrami-Klein » ou « modèle de Beltrami-Klein », car elle fut étudiée par le remarquable géomètre italien Eugène Beltrami (1835-1900) avant de l'être par le célèbre mathématicien Felix Klein (1849-1925) ; cependant ce travail de Beltrami ne fut pas du tout remarqué de son temps et on n'y prêta attention qu'après la parution des travaux de Klein.

n'ont pas d'orientation ⁽¹⁾. Une droite k « non parallèle à o » (c'est-à-dire distincte des tangentes à Σ aux points d'intersection de Σ avec o) est caractérisée par le fait que $d = \{k, o\} = \pm \infty$; de plus il convient de considérer que $d = \infty$ si le « point infiniment éloigné » S de la surface de Lobatchewsky correspondant à k est disposé à droite de o , et $d = -\infty$ dans le cas contraire. Il est naturel de considérer SQ perpendiculaire à o , comme « la perpendiculaire commune » à k et o ; de plus la grandeur $s' = \{O, Q\}$ peut prendre n'importe quelle valeur et conformément à cela à chaque nombre double $z = \pm (\text{sh } s' + e \text{ch } s')$ tel que $z\bar{z} = -1$, on peut associer la droite déterminée k « infiniment éloignée » aux droites infiniment éloignées » i_1 et i_2 , « parallèles à o » (fig. 49) nous associerons les nombres $\sigma_1 = \omega_1/\omega_2$ et $\sigma_2 = \omega_2/\omega_1$.

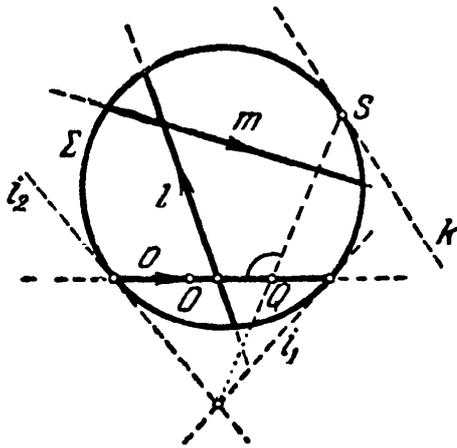


FIG. 49.

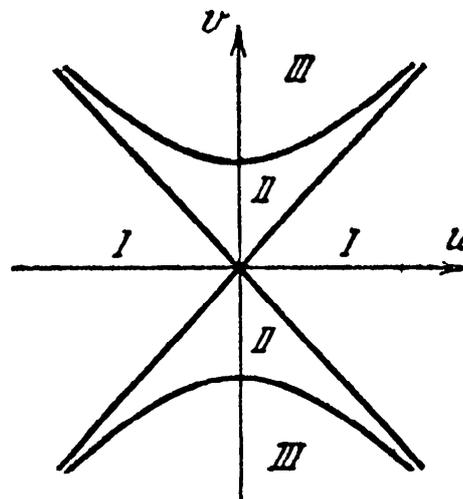


FIG. 50.

Nous avons maintenant établi la relation biunivoque entre l'ensemble des droites (orientées et infiniment éloignées) d'une surface de Lobatchewsky et l'ensemble des nombres doubles (complétés par les nombres $\omega_1, c\omega_2, \sigma_1, \sigma_2$ et ∞). De plus les droites l qui coupent l'axe polaire o , correspondent aux nombres doubles $z = u + ev$ pour lesquels $z\bar{z} = u^2 - v^2 > 0$, c'est-à-dire aux nombres représentés sur la surface (u, v) par les points de la région marquée sur la figure 50 par le chiffre I. Les droites m , divergeant de o et dirigées du même côté que o de la perpendiculaire commune à o et m correspondent aux nombres z pour lesquels $0 > z\bar{z} > -1$, c à d aux nombres représentés sur la figure 50 par les points de la région II. Divergeant de o les droites m_1 , dirigées à l'opposé de o par rapport à la perpendiculaire commune à m_1 , et

⁽¹⁾ On peut expliquer cela de façon évidente par le fait qu'il serait impossible de disposer sur ces droites un segment dont la direction indiquerait l'orientation de la droite (il n'y a pas où poser la flèche!).

à o correspondent aux nombres z , pour lesquels $z\bar{z} < -1$, c'est-à-dire aux nombres représentés par les points de la région III. Enfin, les droites n parallèles à o correspondent aux nombres de module nul, représentés par les deux droites $v = \pm u$, quant aux droites n_1 antiparallèles à 0 , elles correspondent aux nombres $c\omega_1, c\omega_2$ [ces nombres n'ont pas de représentation sur la surface (u, v)]; « les droites infiniment éloignées » k correspondent aux nombres z tels que $z\bar{z} = -1$, c'est-à-dire aux nombres représentés par les points de l'hyperbole $v^2 - u^2 = 1$ et aussi aux deux nombres σ_1, σ_2 .

Il est évident que, comme dans le cas d'une surface euclidienne, les relations :

$$z' = \bar{z}(a), \quad z' = -z(b) \quad \text{et} \quad z' = \frac{1}{z}(c) \quad (31)$$

expriment une **symétrie par rapport au point O** , une **symétrie par rapport à la droite o** et une **réorientation** (changement d'orientation de toutes les droites dans la direction opposée). Les déplacements arbitraires, comme on peut le démontrer, sont exprimés ici par les mêmes formules que dans le cas de la géométrie d'Euclide :

$$z' = \frac{Pz + Q}{-\bar{Q}z + \bar{P}}, \quad \text{ou} \quad z' = \frac{-Pz + Q}{\bar{Q}z + P}, \quad (36)$$

$$\text{ou} \quad z' = \frac{P\bar{z} + Q}{-\bar{Q}\bar{z} + \bar{P}}, \quad \text{ou} \quad z' = \frac{-P\bar{z} + Q}{\bar{Q}\bar{z} + \bar{P}};$$

seulement, ici, z' , z et les coefficients P, Q en tant que « paramètres » figurent ici non pas en tant que nombres duals, mais en tant que nombres doubles, en vertu de quoi il est de plus nécessaire que l'expression $P\bar{P} + Q\bar{Q}$ soit positive (si P et Q sont des nombres duals, alors cette dernière condition est automatiquement remplie, car les produits $P\bar{P}$ et $Q\bar{Q}$ ne peuvent être négatifs). De même l'**angle** (orienté) $\delta = \angle \{z_1, z_2\}$ entre les droites z_1 et z_2 et la **distance** (orientée) $d = \{[z, z_0], [z_2 z_0]\}$ entre les points d'intersection des droites z_1 et z_2 avec la droite z_0 sont définis par les formules connues ⁽¹⁾ :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{(1 + z_1 \bar{z}_2)(1 + \bar{z}_1 z_2)}, \quad (37)$$

$$d = \operatorname{Arg} \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} : \frac{\bar{z}_0 z_2 + 1}{\bar{z}_0 z_1 + 1} \right), \quad (38)$$

⁽¹⁾ Si les droites z_1 et z_2 sont divergentes, alors la partie droite de la formule (37) est négative, et cette formule définit la valeur complexe de l'angle $\delta = i\Delta$ entre les

D'après (38), la condition pour que trois droites z_0 , z_1 et z_2 se coupent en un seul point est la réalité du rapport

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2 z_0 + 1}{\bar{z}_2 z_1 + 1}.$$

D'où il s'ensuit l'équation d'un point de la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky a la forme ⁽¹⁾

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} - A = 0, \quad (40)$$

A imaginaire pur.

Les ensembles de (droites orientées et « infiniment éloignées ») d'une surface de Lobatchewsky qu'il convient de qualifier de « cycle » sont :

a)-c) l'ensemble des droites tangentes d'un des cycles orientés étudiées dans § 11, c'est-à-dire d'un cercle, d'une ligne limite ou d'une équidistante ⁽²⁾ ;

d) les « faisceaux de même pente », c'est-à-dire le faisceau de toutes les droites (orientées), formant un angle (orienté) constant avec l'axe fixe du faisceau ⁽²⁾ ;

e) le « faisceau parallèle », c'est-à-dire le faisceau de toutes les droites, parallèles (dans les deux directions) à l'axe fixe du faisceau ⁽²⁾ ;

f) « le cercle infiniment éloigné (non orienté) Σ ».

droites, où Δ est la plus courte distance entre z_1 et z_2 [cf. note de bas de page ⁽¹⁾, p. 119; nous considérons ici que z_1 et z_2 sont orientées du même côté de leur perpendiculaire commune].

Par analogie, si par exemple z_2 diverge de z_0 alors le nombre entre parenthèses dans la formule (38) aura la deuxième des formes (39) du § 5 et la distance d , définie d'après la formule (38) sera complexe : $d = D - i\pi/2$, où D est la distance du point $[z_0 z_1]$ à la projection de la perpendiculaire commune à z_0 et z_2 sur la droite z_0 (cf. notes p. 20 et 119).

⁽¹⁾ La distance $d = \{[z_1 z_0], [z_2 z_0]\}$, définie par la formule (38) sera égale à zéro non seulement dans le cas où z_1 et z_2 coupent z_0 en un seul point, mais aussi lorsque les droites z_0 , z_1 et z_2 divergentes ou parallèles supérieures ont une perpendiculaire commune (cf. note au bas de la page précédente), ou quand les trois droites z_0 , z_1 et z_2 sont parallèles entre elles. C'est pourquoi au nombre des points de la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky s'ajoutent aussi ici les « points infiniment éloignés » (c'est-à-dire les points de l'absolu du modèle de Klein) auxquels correspondent les faisceaux des droites parallèles entre elles, et les « points idéaux » (les points situés en dehors de l'absolu sur le modèle de Klein), auxquels correspondent les faisceaux de droites parallèles supérieures.

⁽²⁾ Parmi les cercles on compte aussi les points d'une surface de Lobatchewsky (cercles de rayon nul); parmi les équidistantes — les droites; parmi les faisceaux de pente égale on compte « les points idéaux » (faisceaux de pente $\pi/2$ ou « faisceaux orthogonaux »); enfin au nombre des faisceaux parallèles on compte « les points infiniment éloignés » (faisceaux parallèles, dont l'axe est « une droite infiniment éloignée »).

Avec cette conception du terme « cycle » nous obtenons que *la condition (nécessaire et suffisante) pour que quatre droites (orientées) z_0, z_1, z_2, z_3 d'une surface de Lobatchewsky appartiennent à un seul cycle est la réalité du rapport anharmonique*

$$W(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$$

de ces quatre droites. D'où il s'ensuit à nouveau que l'on peut écrire l'équation de chaque cycle sous la forme :

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (14)$$

A et C imaginaires purs.

Afin de résoudre la question de savoir si le cycle est un cercle, une ligne limite, une équidistante, un faisceau parallèle ou un faisceau de pente constante il faut trouver combien de droites communes avec « le cercle infiniment éloigné » (absolu) $z\bar{z} = -1$ a ce cycle (c'est-à-dire combien de solutions a le système $z\bar{z} = -1, Bz - \bar{B}\bar{z} = A - C$) et si l'angle (37) est réel ou imaginaire, entre les deux droites voisines du cycle). En utilisant cela, nous obtenons :

le cycle (14) est un cercle si

$$AC + B\bar{B} > 0, \quad (A - C)^2 - 4B\bar{B} < 0; \quad (61 a)$$

le cycle (14) est une ligne limite si

$$AC + B\bar{B} > 0, \quad (A - C)^2 - 4B\bar{B} = 0, \quad B \neq 0; \quad (61 b)$$

le cycle (14) est une équidistante si

$$AC + B\bar{B} > 0, \quad (A - C)^2 - 4B\bar{B} > 0; \quad (61 c)$$

le cycle (14) est un faisceau parallèle si

$$AC + B\bar{B} = 0; \quad (61 d)$$

le cycle (14) est un faisceau de pente égale si

$$AC + B\bar{B} < 0; \quad (61 e)$$

le cycle (14) est l'absolu Σ si

$$A = C, \quad B = 0. \quad (61 f)$$

Nous avons déjà vu que l'équation (14) représente un point (habituellement infiniment éloigné ou « idéal ») dans le cas où est satisfaite la relation :

$$A + C = 0. \quad (43)$$

Les résultats peuvent être appliqués à la démonstration de nombreux théorèmes de la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky. Ainsi, par exemple, exactement comme dans les pages 34 et 35, on peut démontrer que si S_1, S_2, S_3 et S_4 sont quatre cycles d'une surface de Lobatchewsky et z_1, w_1 des tangentes communes (orientées) à S_1 et S_2 , z_2, w_2 les tangentes (orientées) communes à S_2 et S_3 ; z_3 et w_3 les tangentes (orientées) communes à S_3 et S_4 ; z_4 et w_4 les tangentes (orientées) communes à S_4 et S_1 , dans le cas où les points z_1, z_2, z_3 et z_4

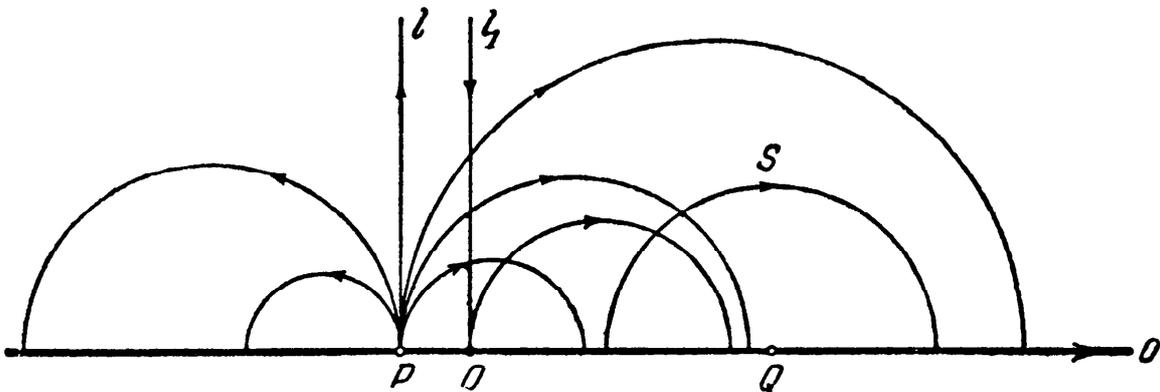


FIG. 51.

appartiennent à un seul cycle alors w_1, w_2, w_3 et w_4 eux aussi appartiennent à un seul cycle.

Le lecteur peut trouver de lui-même d'autres exemples d'application du formalisme des nombres doubles à la démonstration de théorèmes appartenant à la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky.

Remarquons pour conclure qu'on peut donner aussi une forme un peu différente à la représentation de l'ensemble des droites (orientées et infiniment éloignées) d'une surface de Lobatchewsky par l'ensemble des nombres doubles. Tournons-nous à nouveau vers le « modèle de Poincaré » sur un demi-plan de la géométrie de Lobatchewsky décrit à la fin du paragraphe précédent (voir p. 117 et 118). Dans ce modèle (non orienté) les points d'une surface de Lobatchewsky sont représentés comme des points de la demi-surface (supérieure), tandis que les droites sont représentées par des demi-cercles centrés sur la droite o limitant le demi-plan et par des rayons perpendiculaires à o (fig. 51).

Convenons maintenant d'attribuer à une droite (orientée) d'une surface de Lobatchewsky représentée par un demi-cercle de rayon r (r pouvant être ici positif ou négatif), ayant son centre au point Q d'abscisse x (c'est-à-dire en un

point Q tel que $\{OQ\} = x$, où O est choisi sur une droite orientée o comme origine, le nombre double

$$z = x + er.$$

La formule (62) établit une relation entre ces deux droites (orientées) d'une surface de Lobatchewsky qui sont représentées sur le modèle de Poincaré par des demi-cercles, et les nombres doubles $z = u \pm ue$, où $v \neq 0$. De plus aux « diviseurs de zéro » $u \pm ue$ correspondent les demi-cercles passant par le point O ; aux nombres $u + ev$ tels que $u^2 - v^2 > 0$ (aux nombres représentés par la première des formes (39) § 5 ; sur la figure 50 ils sont représentés par les points de la région I), — les droites représentées par des demi-cercles pour lesquels le point O est extérieur ; aux nombres $u + ev$ tels que $u^2 - v^2 < 0$ (aux nombres représentés par la deuxième des formes (39) § 5 ; sur la figure 50 ils sont représentés par les points des régions II et III), — les droites, représentées par des demi-cercles, par lesquels le point O est intérieur (1). Les nombres « purement imaginaires » de forme ve correspondent aux droites, représentées par des demi-cercles dont le centre est au point O . Les nombres doubles conjugués $z = u + ev$ et $\bar{z} = u - ev$ correspondent à des droites, ne différant que par leur orientation (pareillement à ce qui a été étudié à la fin du § 11 du « modèle de Poincaré sur un demi-plan » les nombres complexes conjugués correspondaient aux points qui ne diffèrent que par leur orientation). Il est clair d'autre part que si on considère comme souhaitable d'étendre cette représentation aussi aux « droites infiniment éloignées » d'une surface de Lobatchewsky représentées par les points de l'absolu (cf. p. 121-122), il est alors naturel d'associer à une « droite » semblable qui joue le rôle de « tangente à l'absolu o au point Q d'abscisse x » le nombre réel $z = x$ (de telle sorte qu'à la « tangente de l'absolu o au point O , correspondra le nombre 0, tandis qu'à la « tangente » de l'absolu o en son « point infiniment éloigné » correspondra le nombre ∞).

Les nombres doubles « particuliers » $c\omega_1, c\omega_2, \sigma_1, \sigma_2$ restent inutilisés pour le moment. D'autre part aucun nombre ne correspond aux droites représentées sur le modèle de Poincaré par des rayons (et non par des demi-cercles). Cependant, il est évident, qu'aux demi-cercles qui passent par le point fixe $P(y)$ et sont tangents en ce point du rayon l représenté sur la figure 51, correspondent les nombres doubles de forme $w = (y - r) + re$. De telle sorte que :

$$\frac{1}{\omega} = \frac{(y - r) - re}{y^2 - 2yr} = \frac{-\frac{y}{r} + (1 + e)}{-\frac{y^2}{r} + 2y}$$

(1) D'une façon générale le nombre $u^2 - v^2$ (carré du module du nombre double $z = u + ev$ pris avec le signe qui convient) sera égal à la puissance du demi-cercle correspondant à ce nombre (en d'autres termes, à la puissance du point O par rapport au cercle correspondant voir § 8, p. 44).

pour $|r| \rightarrow \infty$, tend vers le diviseur de zéro $(1 + e)$ il est alors naturel d'associer au rayon l le nombre

$$z = 2y\omega_1. \quad (62 a)$$

De même on montre qu'au rayon l_1 , de direction opposée au rayon l , il convient d'associer le nombre $z_1 = 2y\omega_2$ (où comme auparavant $z_1 = \bar{z}$; cf. la formule (37 a) § 5, p. 117). Les nombres doubles

$$\sigma_1 = \frac{1 - e}{1 + e} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{1 + e}{1 - e} = \bar{\sigma}_1$$

sont associés aux rayons i (parallèle à l) et i_1 (parallèle à l_1) passant par O .

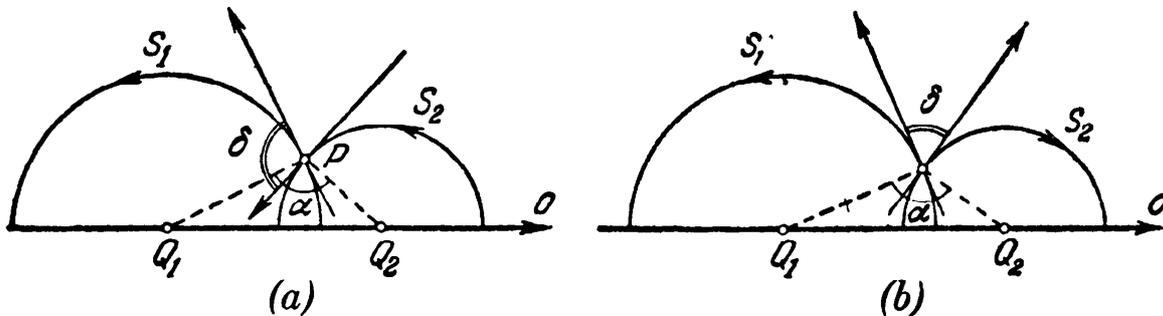


FIG. 52.

Cherchons maintenant l'angle $\delta = \angle \{z_1, z_2\}$ entre deux droites d'une surface de Lobatchewsky correspondant aux nombres $z_1 = x_1 + er_1$ et $z_2 = x_2 + er_2$; ces droites sont représentées sur le modèle de Poincaré par les demi-cercles S_1 et S_2 se coupant au point P de centres $Q_1(x_1)$, $Q_2(x_2)$ et de rayons r_1 , r_2 . Suivant que les demi-cercles S_1 et S_2 sont orientés pareillement ou différemment nous aurons :

$$|\delta| = \angle Q_1PQ_2 \quad \text{ou} \quad |\delta| = 180^\circ - \angle Q_1PQ_2$$

(fig. 52, a , b ; notons que l'angle δ est égal à l'angle euclidien entre les demi-cercles S_1 et S_2). Mais d'après le théorème des cosinus nous avons

$$\cos \angle Q_1PQ_2 = \frac{Q_1P^2 + Q_2P^2 - Q_1Q_2^2}{2Q_1P \cdot Q_2P} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - (x_1 - x_2)^2}{2|r_1||r_2|}.$$

C'est pourquoi dans tous les cas

$$\cos \delta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - (x_1 - x_2)^2}{2r_1r_2},$$

D'où nous obtenons

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta} = \frac{(x_1 - x_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}{(r_1 + r_2)^2 - (x_1 - x_2)^2}$$

ou

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{(\bar{z}_2 - z_1)(\bar{z}_1 - z_2)} \quad (63)$$

[cf. formule (56), p. 117]. Il est facile de vérifier que la formule (63) reste valable aussi dans le cas où une des droites considérées est représentée non par un demi-cercle mais par un rayon [il faut seulement alors substituer dans (63) — disons — à la place de z_1 un nombre de forme $a/(1 + e)$ ou $a/(1 - e)$].

Nous n'écrivons pas non plus la formule un peu plus complexe de la distance entre deux points [proche de la formule (38) p. 91]. Notons seulement que pour cela aussi il faut démontrer que *la condition nécessaire et suffisante pour que quatre droites (orientées) z_0, z_1, z_2, z_3 d'une surface de Lobatchewsky appartiennent à un seul cycle est la réalité du rapport anharmonique*

$$W(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$$

de ces quatre droites. D'où il s'ensuit que pour cette représentation aussi de l'ensemble des droites (orientées et infiniment éloignées) d'une surface de Lobatchewsky par l'ensemble des nombres doubles, les équations des cycles d'une surface de Lobatchewsky, comme précédemment aura la forme (14)

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (14)$$

A et C imaginaires purs.

Afin de déterminer si le cycle (14) est un cercle, une ligne limite, une équidistante, un faisceau parallèle ou un faisceau de pente constante, il faut trouver le nombre de « droites infiniment éloignées » appartenant au cycle, et aussi savoir si l'angle (63) entre deux droites voisines du cycle sera réel ou imaginaire. En conclusion, nous parvenons au théorème suivant :

le cycle (14) est un cercle si

$$AC + B\bar{B} > 0, \quad (B - \bar{B})^2 - 4AC < 0;$$

— *une ligne limite si*

$$AC + B\bar{B} > 0, \quad (B - \bar{B})^2 - 4AC = 0, \quad A^2 + C^2 \neq 0;$$

— *une équidistante si*

$$AC + B\bar{B} > 0, \quad (B - \bar{B})^2 - 4AC > 0;$$

— *un faisceau parallèle si*

$$AC + B\bar{B} = 0 ;$$

— *un faisceau de pente constante si*

$$AC + B\bar{B} < 0 ;$$

— *l'« absolu » o si*

$$A = C = 0, \quad B - \bar{B} < 0.$$

Il n'est pas difficile de prouver aussi que dans le cas et seulement dans le cas où intervient l'égalité (57) le cycle (14) est un point (ordinaire, « infiniment éloigné » ou « idéal »)

$$B + \bar{B} = 0. \quad (57)$$

Indiquons enfin que les déplacements d'une surface de Lobatchewsky pour les « droites de coordonnées complexes (plus exactement, doubles) » considérées ici s'écrivent ainsi :

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (64)$$

où a, b, c, d sont des nombres réels et $ad - bc \neq 0$ [cf. formule (58) du paragraphe précédent].

Le lien entre les deux représentations indiquées dans ce paragraphe de l'ensemble des droites d'une surface de Lobatchewsky par l'ensemble des nombres doubles sera établi dans le § 18 (p. 191).

CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES ET GÉOMÉTRIES CIRCULAIRES

§ 13. TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES (TRANSFORMATIONS DE MOEBIUS)

Nous considérons dans ce paragraphe des fonctions homographiques arbitraires de la variable complexe z et les **transformations homographiques d'un plan** qui leur correspond d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe 7, c'est-à-dire les transformations qui sont décrites par les formules

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

et

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}. \quad (1 a)$$

Si

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $a = kc$, $b = kd$, les fonctions (1) et (1 a) sont réduites à $z' = k$; ainsi seul présente un intérêt le cas où

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

(¹) Cf., par exemple, A. I. MARKOUCHEVITCH, *Éléments d'une théorie des fonctions analytiques*, M., 1944, § 3, chap. V.

et par la suite nous supposerons toujours cette dernière condition remplie. Dans ce cas les transformations (1) et (1 a) seront des transformations bi-univoques du plan de la variable complexe complété par l'introduction du nombre $1/0 = \infty$. En effet, à chaque nombre z correspond un seul nombre z' , défini par la formule (1) ou (1 a), et à chaque valeur de z' correspond une seule valeur z obtenue à partir de ces mêmes équations (1) et (1 a) :

$$z = \frac{dz' - b}{-cz' + a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{\bar{d}\bar{z} - \bar{b}}{-\bar{c}\bar{z} + \bar{a}}. \quad (2)$$

En particulier, au nombre $z = \infty$ les formules (1) et (1 a) associent la valeur $z' = a/c$ (1), tandis qu'au nombre $z = -d/c$ ou $z = -\bar{d}/\bar{c}$, tel que $cz + d = 0$ ou $c\bar{z} + \bar{d} = 0$, en vertu de ces mêmes formules correspond la valeur $z' = \infty$.

Les **transformations linéaires** sont un cas particulier des transformations homographiques

$$z' = pz + q, \quad p \neq 0 \quad (a) \quad \text{ou} \quad z' = p\bar{z} + p, \quad p \neq 0 \quad (b), \quad (3)$$

auquel nous parvenons, en posant dans les formules (1) et (1 a) $c = 0$ et en supposant $p = a/d$, $q = b/d$. On appelle parfois les transformations (1) **transformations homographiques propres** et (1 a), **transformations homographiques impropres**.

Nous avons déjà vu plus haut qu'une transformation linéaire représente une transformation de similitude constituée par une rotation centrale de similitude (homothétie et rotation de centre commun O), accompagnée d'un transfert parallèle et, peut-être, d'une symétrie par rapport à une droite ; en particulier, pour $|p| = 1$ la transformation linéaire est un déplacement (cf. § 7, p. 29). Nous avons aussi étudié les exemples concrets les plus simples de transformations linéaires — les transformations

$$z' = -z \quad (a) \quad \text{et} \quad z' = \bar{z} \quad (b), \quad (4)$$

qui représentent une **symétrie par rapport au point O** et une **symétrie par rapport à la droite O** , et aussi les transformations

$$z' = z + q \quad (a) \quad \text{et} \quad z' = pz \quad (b) \quad (5)$$

transfert parallèle et rotation centrale de similitude (§ 7, p. 28). Nous étudions ici de façon plus détaillée les propriétés géométriques des transformations homographiques arbitraires.

(1) Cf. note (1) du bas de page 4.

Remarquons avant tout que le *produit* (résultat d'opérations successives) de deux transformations homographiques est aussi une transformation homographique ; une transformation identique (ou singulière) qui laisse tous les points d'un plan à leur place est un cas particulier de la transformation homographique ; la transformation inverse de la transformation homographique (c'est-à-dire qui transfère chaque point z' du plan au point z à partir duquel a été obtenu z' par la transformation initiale) est aussi une transformation homographique. En effet, si, par exemple

$$z_1 = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{et} \quad z' = \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \quad (6 a)$$

et

$$z' = \frac{a_1 \frac{az + b}{cz + d} + b_1}{c_1 \frac{az + b}{cz + d} + d_1} = \frac{(a_1 a + b_1 c)z + (a_1 b + b_1 d)}{(c_1 a + d_1 c)z + (c_1 b + d_1 d)} \quad (6 b)$$

alors et par analogie on trouve le produit de transformations homographiques propre et impropre ou de deux transformations homographiques impropres (1). La transformation identique se traduit par la formule

$$z' = z, \quad (7)$$

qui est un cas particulier de la formule (1) (pour $b = c = 0$, $a = d = 1$). Enfin, la transformation inverse de (1) ou de (1 a) a la forme

$$z' = \frac{dz - b}{-cz + a} \quad \text{ou} \quad z' = \frac{\bar{d}\bar{z} - \bar{b}}{-\bar{c}\bar{z} + \bar{a}} \quad (8)$$

[cf. les formules (2)].

Notons la propriété fondamentale suivante des transformations homographiques : si z'_1, z'_2, z'_3 et z'_4 sont quatre points d'un plan en lesquels la trans-

(1) Il n'est pas difficile de prouver que le produit de deux transformations homographiques propres ou de deux transformations homographiques impropres est une transformation homographique propre, par contre le produit d'une transformation propre et d'une transformation impropre (prises dans n'importe quel ordre) est toujours une transformation homographique impropre.

formation homographique (1) ou (1 a) transfère quatre points donnés z_1, z_2, z_3 et z_4 alors

$$W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = W(z_1, z_2, z_3, z_4) \quad (9)$$

ou

$$W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = \overline{W(z_1, z_2, z_3, z_4)}, \quad (9 a)$$

où

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

est le *rapport anharmonique des quatre points* (propriété de l'invariance du rapport anharmonique). En effet, nous obtenons, par exemple à partir de la formule (1) :

$$\begin{aligned} W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) &= \frac{z'_1 - z'_3}{z'_2 - z'_3} : \frac{z'_1 - z'_4}{z'_2 - z'_4} \\ &= \frac{\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}}{\frac{az_2 + b}{cz_2 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}} : \frac{\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_4 + b}{cz_4 + d}}{\frac{az_2 + b}{cz_2 + d} - \frac{az_4 + b}{cz_4 + d}} \\ &= \frac{[(ad - bc)(z_1 - z_3)] : (cz_1 + d)}{[(ad - bc)(z_2 - z_3)] : (cz_2 + d)} : \frac{[(ad - bc)(z_1 - z_4)] : (cz_1 + d)}{[(ad - bc)(z_2 - z_4)] : (cz_2 + d)} \\ &= \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = W(z_1, z_2, z_3, z_4) \end{aligned}$$

et par analogie on prouve que

$$W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = \overline{W(z_1, z_2, z_3, z_4)}$$

si z et z' sont liés par la formule (1 a).

De la propriété d'invariance du rapport anharmonique découle immédiatement qu'une *transformation homographique transfère quatre points d'un cercle ou d'une droite, en quatre points qui appartiennent, aussi à un seul cercle ou à une seule droite* (propriété circulaire des transformations homographiques). En effet, de la réalité du rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ des quatre points initiaux découle aussi la réalité du rapport anharmonique $W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)$ des points transformés, d'où résulte aussi notre proposi-

tion (cf. § 7, p. 32-33). De ceci découle à son tour qu'une *transformation homographique transforme chaque cercle ou chaque ligne droite du plan à nouveau en un cercle ou une ligne droite* (1). Cette dernière circonstance explique l'appellation de transformations circulaires (on peut aussi parler de transformations circulaires propres et impropres) qu'on donne aux transformations homographiques du plan. Comme ces transformations furent étudiées pour la première fois à fond par le géomètre allemand Auguste Moebius (1790-1868), on les appelle souvent transformations circulaires de Moebius.

On peut démontrer *qu'il existe une seule transformation homographique propre* (1) *qui transfère trois points donnés* z_1, z_2 *et* z_3 *en trois autres points donnés* w_1, w_2 , *et* w_3 . En effet, si la transformation (1) transfère les points z_1, z_2, z_3 aux points w_1, w_2, w_3 et le point arbitraire z du plan en un point z' , alors en vertu de ce qui a été démontré plus haut

$$W(z, z_1, z_2, z_3) = W(z', w_1, w_2, w_3)$$

ou

$$\frac{z' - w_2}{w_1 - w_2} : \frac{z' - w_3}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z - z_3}{z_1 - z_3}. \quad (10)$$

Mais l'égalité (10) définit une transformation homographique ; si on s'en sert pour exprimer z' en fonction de z on obtient

$$z' = \frac{Az + B}{Cz + D},$$

où

$$A = (z_1 - z_2)w_1w_2 + (z_2 - z_3)w_2w_3 + (z_3 - z_1)w_3w_1,$$

$$B = [(z_3 - z_2)w_3w_2 + (w_2 - w_3)w_2z_2 + w_1(z_2w_3 - z_3w_2)](z_1 - z_3),$$

$$C = (w_1z_2 - w_2z_1) + (w_2z_3 - w_3z_2) + (w_3z_1 - w_1z_3),$$

$$D = (w_1 - w_3)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3).$$

(1) Il n'est pas difficile de montrer par un calcul que, par exemple, la transformation homographique (1) transforme un cercle ou une droite dont l'équation a la forme

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0,$$

A et C imaginaires purs, (cf. § 7, p. 33) en un cercle ou une droite

$$Az\bar{z} + B'z - \bar{B}'\bar{z} + C' = 0,$$

où

$$A' = Aa\bar{a} + Ba\bar{c} - \bar{B}a\bar{c} + Cc\bar{c}, \quad B' = Aa\bar{b} + Ba\bar{d} - \bar{B}c\bar{b} + Cc\bar{d},$$

$$C' = Ab\bar{b} + Bb\bar{d} - \bar{B}b\bar{d} + Cc\bar{d}.$$

De même on démontre qu'il existe une seule transformation homographique impropre (1 a) qui transfère z_1, z_2 et z_3 en w_1, w_2 et w_3 ; cette transformation est donnée par la formule

$$W(z', w_1, w_2, w_3) = \overline{W(z, z_1, z_2, z_3)}$$

ou

$$\frac{z' - w_2}{w_1 - w_2} : \frac{z' - w_3}{w_1 - w_3} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} : \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}. \quad (10 a)$$

Ces mêmes raisonnements démontrent que pour que quatre points donnés z_1, z_2, z_3 et z_4 puissent être transférés par une transformation circulaire en quatre autres points w_1, w_2, w_3 et w_4 , il faut et il suffit que l'on ait

$$W(w_1, w_2, w_3, w_4) = W(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

ou

$$W(w_1, w_2, w_3, w_4) = \overline{W(z_1, z_2, z_3, z_4)}.$$

De ce qui a été démontré il s'ensuit qu'on peut transformer un cercle ou une droite quelconque (et de plus, de diverses façons) par une transformation circulaire (1) ou (1 a) en un autre cercle quelconque donné ou en une autre droite quelconque donnée, de telle sorte que trois points quelconques du premier cercle soient transférés en trois points (n'importe lesquels !) du deuxième cercle. En particulier, on peut transformer d'une infinité de façons, un cercle en une ligne droite — possibilité qui apparaît souvent utile. Ainsi, du point de vue des transformations circulaires tous les cercles et les droites sont absolument semblables ; c'est pourquoi dans les problèmes liés aux transformations circulaires on ne distingue pas habituellement lignes droites et cercles, en considérant les premières comme des cas particuliers des secondes (« cercles de rayon infiniment grand »). Plus loin, nous parlerons souvent simplement de « cercle » dans des cas où il serait plus juste de dire « le cercle ou la droite ».

Précisons maintenant quel sens géométrique a le rapport $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ des quatre points z_1, z_2, z_3 et z_4 . Nous savons déjà que si ce rapport anharmonique est réel, c'est-à-dire si l'argument $\text{Arg } W$ du rapport anharmonique W est égal à zéro, les points z_1, z_2, z_3 et z_4 appartiennent à un seul cercle (ou droite). Nous avons donc, évidemment, en règle générale

$$\begin{aligned} \text{Arg } W(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \text{Arg} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \right) \\ &= \text{Arg} \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \text{Arg} \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \\ &= \angle \{ [z_3z_2], [z_3z_1] \} - \angle \{ [z_4z_2], [z_4z_1] \} \end{aligned}$$

[cf. formule (8) du § 7, p. 30]. Considérons deux cercles (dont l'un ou même les deux peuvent devenir des droites) passant par les points z_1, z_2, z_3 et z_1, z_2, z_4 ; nous pouvons désigner ces cercles par $[z_1z_2z_3]$ et $[z_1z_2z_4]$ (fig. 53); de même par la suite nous désignerons le cercle passant par les points z, v et w par le cercle $[zvw]$. Menons encore les tangentes t et t' à ces cercles au point z_1 . D'après les théorèmes connus sur les angles inscrits, il s'ensuit que, indépendamment de la position des points z_3 et z_4 sur les cercles $[z_1z_2z_3]$ et $[z_1z_2z_4]$

$$\angle \{ [z_3z_2], [z_3z_1] \} = \angle \{ [z_1z_2], t \}$$

ou

$$\angle \{ [z_4z_2], [z_4z_1] \} = \angle \{ [z_1z_2], t' \}.$$

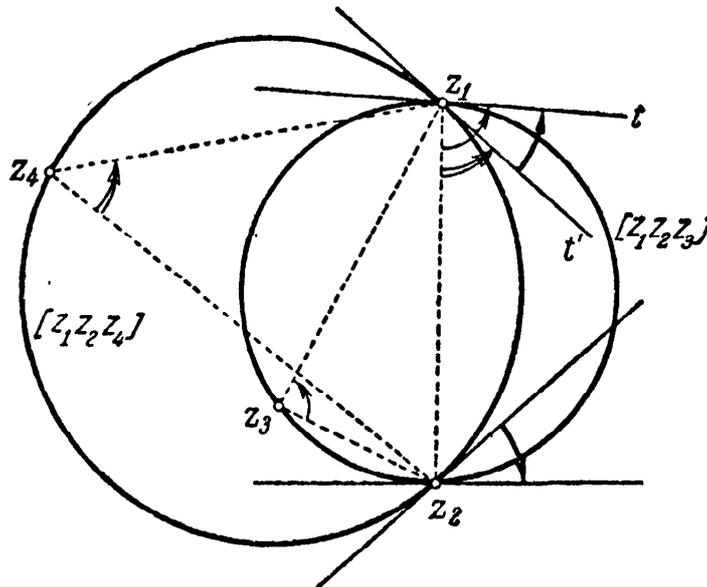


FIG. 53.

C'est pourquoi nous aurons :

$$\text{Arg } W(z_1, z_2, z_3, z_4) =$$

$$\angle \{ [z_1z_2], t \} - \angle \{ [z_1z_2], t' \} = \angle \{ t', t \}. \quad (11)$$

L'angle entre les tangentes aux cercles S_1 et S_2 menées au point z de leur intersection, s'appelle l'angle entre les cercles S_1 et S_2 et il est désigné par $\angle (S_1, S_2)$; si on considère l'angle orienté entre les tangentes, on parle de l'angle orienté $\angle \{ S_1zS_2 \}$ entre les cercles S_1 et S_2 . Nous voyons ainsi que l'argument $\text{Arg } W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ du rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ des quatre points z_1, z_2, z_3 , et z_4 est égal à l'angle (orienté)

$$\angle \{ [z_1z_2z_4]z_1[z_1z_2z_3] \}$$

entre les cercles $[z_1z_2z_4]$ et $[z_1z_2z_3]$.

De la propriété d'invariance du rapport anharmonique de quatre points il s'ensuit que les *transformations circulaires propres ne changent pas l'angle que font les cercles sécants* tandis que les transformations circulaires impropres changent le signe (c'est-à-dire le sens d'orientation) mais non la valeur absolue de cet angle ⁽¹⁾.

Cette propriété importante des transformations circulaires s'exprime souvent de la façon abrégée suivante : *Les angles entre les cercles sont conservés par les transformations circulaires* ⁽²⁾. En particulier, des cercles tangents (cercles dont l'angle entre eux est nul) sont transformés par la transformation circulaire en des cercles tangents.

Passons maintenant à l'étude du module $|W(z_1, z_2, z_3, z_4)|$ du rapport anharmonique W des quatre points du plan. En vertu de la formule (6) du § 7 (p. 55) nous avons :

$$\begin{aligned} |W(z_1, z_2, z_3, z_4)| &= \left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \right| \\ &= \left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right| : \left| \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \right| = \frac{(z_1, z_3)}{(z_2, z_3)} : \frac{(z_1, z_4)}{(z_2, z_4)}, \quad (12) \end{aligned}$$

où (z_1, z_3) , (z_2, z_3) , etc. sont les distances entre les points z_1 et z_3 , z_2 et z_3 , etc.

⁽¹⁾ En d'autres termes, si une transformation circulaire propre (ou impropre) transforme les cercles S_1 et S_2 en cercles S'_1 et S'_2 et le point z_1 d'intersection de S_1 et S_2 au point z'_1 , on a respectivement

$$\angle \{ S_1 z_1 S_2 \} = \angle \{ S'_1 z'_1 S'_2 \}, \quad \angle \{ S_1 z_1 S_2 \} = - \angle \{ S'_1 z'_1 S'_2 \}.$$

[Notons que si deux cercles S_1 et S_2 se coupent aux points z_1 et z_2 (cf. fig. 53) :

$$\angle \{ S_1 z_1 S_2 \} = - \angle \{ S_1 z_2 S_2 \}$$

c'est pourquoi en parlant d'un angle orienté entre deux cercles qui se coupent, il est indispensable de désigner le point d'intersection où considéré cet angle (un angle non orienté entre deux cercles ne dépend pas du choix de leur point d'intersection).]

⁽²⁾ De même, l'angle entre deux courbes quelconques γ_1 et γ_2 se coupant au point z (par définition cet angle coïncide avec l'angle entre les tangentes à γ_1 et γ_2 au point z), est égal à l'angle entre les cercles, passant par z , S_1 , et S_2 , tangents à nos courbes (fig. 54), et la transformation circulaire qui transforme les courbes γ_1 et γ_2 en de nouvelles courbes γ'_1 et γ'_2 , transforme S_1 et S_2 en cercles S'_1 et S'_2 , tangents à γ'_1 et γ'_2 , il s'ensuit que les angles entre les courbes arbitraires se conservent au cours de transformations circulaires. Toutes les transformations possédant cette dernière propriété s'appellent **transformations conformes**. C'est ainsi que les transformations circulaires sont des transformations conformes.

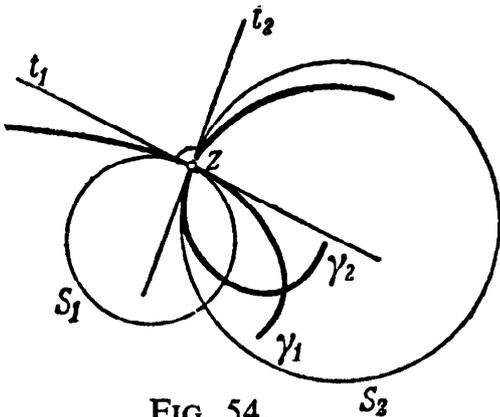


FIG. 54.

Nous appellerons le nombre réel

$$\frac{(z_1, z_3)}{(z_2, z_3)} : \frac{(z_1, z_4)}{(z_2, z_4)}$$

rapport anharmonique des distances entre les quatre points z_1, z_2, z_3 et z_4 et nous le désignerons par $\tilde{w}(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Nous avons ainsi

$$|W(z_1, z_2, z_3, z_4)| = \tilde{W}(z_1, z_2, z_3, z_4), \quad (12 a)$$

c'est-à-dire explicitement : *le module $|W(z_1, z_2, z_3, z_4)|$ du rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ des quatre points z_1, z_2, z_3, z_4 est égal au rapport anharmonique des distances entre ces points.* De la propriété d'invariance du rapport anharmonique nous pouvons maintenant conclure en disant que les transformations circulaires conservent les rapports anharmoniques des distances entre quatre points.

On peut maintenant énoncer de façon nouvelle les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un quatuor de points z_1, z_2, z_3, z_4 puisse être transformé par une transformation circulaire en un quatuor de points w_1, w_2, w_3 et w_4 : Il faut notamment pour cela que *l'angle entre les cercles $[z_1z_2z_3]$ et $[z_1z_2z_4]$ soit égal à l'angle entre les cercles $[w_1w_2w_3]$ et $[w_1w_2w_4]$ et que le rapport anharmonique des distances entre les points z_1, z_2, z_3, z_4 soit égal au rapport anharmonique des distances entre les points w_1, w_2, w_3, w_4 .*

Considérons aussi un peu le problème de la **description géométrique** des transformations circulaires arbitraires. Comme nous le savons les transformations linéaires (3) représentent des **transformations de similitude**. De plus le produit aussi, de deux ou de plusieurs transformations linéaires est une transformation linéaire⁽¹⁾; c'est pourquoi on ne saurait ramener toutes les transformations circulaires aux seules transformations de similitude.

Les transformations circulaires les plus simples, différentes des transformations de similitude sont les transformations

$$z' = \frac{1}{z} \quad (a) \quad \text{et} \quad z' = \frac{1}{z} \quad (b), \quad (13)$$

que nous pouvons aussi transcrire par les égalités :

$$\text{Arg } z' = -\text{Arg } z, \quad |z'| = \frac{1}{|z|} \quad (a)$$

et

$$\text{Arg } z' = \text{Arg } z, \quad |z'| = \frac{1}{z} \quad (b). \quad (14)$$

⁽¹⁾ Ainsi, par exemple, si $z_1 = az + b$ et $z' = a_1z_1 + b_1$, $z' = Az + B$, où $A = a_1a$, $B = a_1b + b_1$.

De ces deux transformations, la transformation (13 *b*) ou (14 *b*) a le sens géométrique le plus simple, on l'appelle **inversion singulière**. Par inversion chaque point z du plan est transformé en un point z' du rayon Oz (l'appartenance de z' au rayon Oz dérive de l'égalité $\text{Arg } z' = \text{Arg } z$) tel que

$$(O, z') = \frac{1}{(O, z)} \quad \text{ou} \quad (O, z) \cdot (O, z') = 1 \quad (15)$$

(fig. 55); l'inversion transforme le point O en « point » ∞ .

L'inversion est l'une des transformations circulaires les plus simples.

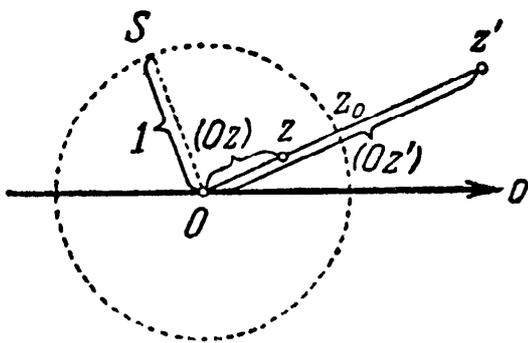


FIG. 55.

Comme toute transformation circulaire elle transforme chaque cercle ou droite à nouveau en un cercle ou une droite ; l'inversion conserve les angles entre des cercles (sécants) (par ailleurs les angles orientés changent de signe par inversion). L'inversion est une transformation circulaire (impropre); les rapports anharmoniques des distances d'un quatuor de points ne changent pas non plus par inversion. Les points du cercle unité $z\bar{z} = 1$ se changent par inversion en eux-mêmes. Ceci et aussi le fait que chaque point z extérieur au cercle $z\bar{z} = 1$ se change en point intérieur z' [situé sur le rayon Oz et tel que le rayon $(O, z_0) = 1$ du cercle unité soit la moyenne géométrique entre les longueurs des segments (O, z) et (Oz') ; cf. fig. 55], tandis que le point z' , inversement, se change en z , donne une base pour attribuer aussi à la transformation (13 *b*) ou (14 *b*) l'appellation de symétrie par rapport au cercle unité (1).

$z\bar{z} = 1$ se changent par inversion en eux-mêmes. Ceci et aussi le fait que chaque point z extérieur au cercle $z\bar{z} = 1$ se change en point intérieur z' [situé sur le rayon Oz et tel que le rayon $(O, z_0) = 1$ du cercle unité soit la moyenne géométrique entre les longueurs des segments (O, z) et (Oz') ; cf. fig. 55], tandis que le point z' , inversement, se change en z , donne une base pour attribuer aussi à la transformation (13 *b*) ou (14 *b*) l'appellation de symétrie par rapport au cercle unité (1).

(1) A ceci s'ajoute le fait que *n'importe quel cercle passant par les points z et z' qui correspondent l'un à l'autre dans l'inversion singulière sera orthogonal au cercle unité $z\bar{z} = 1$* (fig. 56 *a*) de même que *n'importe quel cercle passant par deux points z et z' , symétriques par rapport à une droite l , est orthogonal à l .*

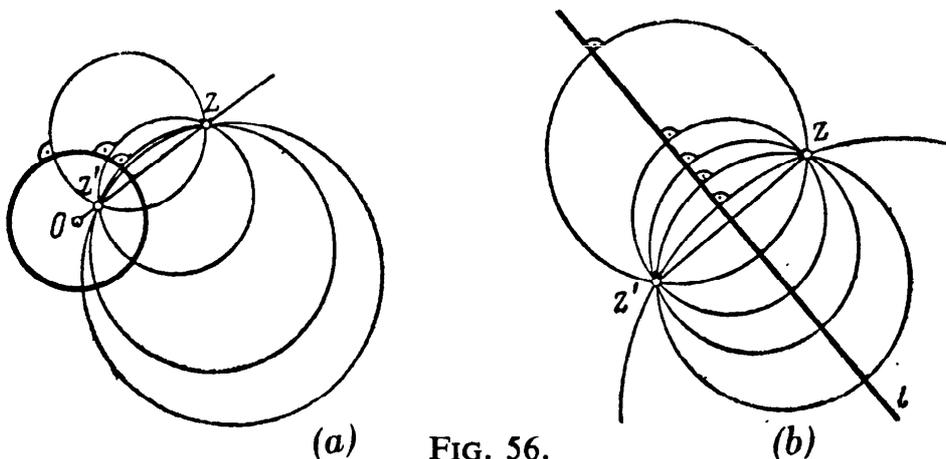


FIG. 56.

La transformation (13 a) ne mérite pas d'attention particulière — c'est, manifestement le produit d'une inversion singulière (symétrie par rapport au cercle unité) (13 b) et d'une symétrie (4 b) par rapport à l'axe o . L'inversion de degré arbitraire k est aussi assimilée aux transformations déjà considérées

$$z' = \frac{k}{\bar{z}}, \quad k \text{ réel}, \quad (16)$$

représentant le produit d'une inversion singulière (13 b) et d'une homothétie $z' = kz$ avec comme coefficient d'homothétie k (1). Et en général toute transformation circulaire représente une transformation de similitude et une inversion; la démonstration de cette proposition reste notre but fondamental.

Précisons avant tout les formules qui décrivent la transformation d'inversion. Une inversion singulière se définit géométriquement comme une transformation qui transforme un point arbitraire z du plan en un point z' du rayon Oz (où le point O est fixe) tel que la relation (15) soit satisfaite. Ainsi, le point O joue le rôle important dans la description géométrique de l'inversion; ce point s'appelle *centre* de l'inversion. Si le centre de l'inversion coïncide avec le pôle du système des coordonnées (avec le point O), alors l'inversion est décrite par la formule (13 b). Si le point arbitraire w du plan sert de pôle (fig. 57) alors l'inversion, cela est évident, s'écrit ainsi :



FIG. 57.

$$z' - w = \frac{1}{z - w} \quad \text{ou} \quad z' = \frac{w\bar{z} + (1 - w\bar{w})}{\bar{z} - \bar{w}}. \quad (17)$$

On vérifie aisément que toute transformation circulaire propre

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

différente d'une transformation de similitude (c'est-à-dire telle que $c \neq 0$) est le produit de la transformation de similitude $z' = p\bar{z} + q$ où

$$p = -\frac{\bar{c}^2}{\Delta}, \quad q = \frac{a\bar{a}\bar{d} - c\bar{c}\bar{d} - a\bar{c}\bar{b}}{c\bar{\Delta}}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

(1) Pour $k > 0$ on dit aussi d'une inversion de puissance k que c'est une symétrie par rapport au cercle de rayon \sqrt{k} (du cercle $z\bar{z} = k$). On peut considérer l'inversion de puissance $k < 0$ comme le produit de l'inversion de puissance positive k et de la symétrie (4 a) par rapport au pôle O .

et de l'inversion (17), où $w = a/c$; chaque transformation circulaire impropre

$$z = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

où $c \neq 0$, est le produit de la transformation de similitude $z' = pz + q$, où

$$p = \frac{c^2}{\Delta}, \quad q = \frac{a\bar{a}d - c\bar{c}d - \bar{a}cb}{\bar{c}\Delta},$$

et de la même inversion que plus haut. En effet, si, par exemple

$$z_1 = -\frac{\bar{c}^2}{\bar{\Delta}}\bar{z} + \frac{a\bar{a}\bar{d} - c\bar{c}\bar{d} - \bar{a}c\bar{b}}{c\Delta}$$

— transformation de similitude transformant le point z en point z_1 , et

$$z = \frac{\frac{a}{c}\bar{z}_1 + \left(1 - \frac{a\bar{a}}{c\bar{c}}\right)}{\bar{z}_1 - \frac{\bar{a}}{\bar{c}}},$$

— inversion transformant le point z_1 , en point z' , nous avons alors

$$z' = \frac{\frac{a}{c} \left\{ -\frac{c^2}{\Delta}z + \frac{a\bar{a}d - c\bar{c}d - \bar{a}cb}{\bar{c}\Delta} \right\} + \left(1 - \frac{a\bar{a}}{c\bar{c}}\right)}{-\frac{c^2}{\Delta}z + \frac{a\bar{a}d - c\bar{c}d - \bar{a}cb}{\bar{c}\Delta} - \frac{\bar{a}}{c}} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Ainsi, toutes les transformations circulaires du plan différentes des transformations de similitude se ramènent de façon univoque à l'inversion singulière (1).

En conclusion de ce paragraphe, arrêtons-nous encore sur quelques principes fondamentaux relatifs aux transformations circulaires. Nous avons vu précédemment que l'ensemble de toutes ces transformations :

a) contient le produit de deux quelconques des transformations de cet ensemble;

(1) De ce qui a été démontré, il s'ensuit aussi que toute transformation circulaire différente d'une transformation de similitude peut être présentée sous forme du produit d'une inversion ayant une certaine puissance k et d'un déplacement.

b) contient une transformation inverse d'une quelconque transformation de cet ensemble ;

c) contient une transformation identité (singulière).

L'ensemble des transformations possédant toutes les propriétés de *a)* à *c)* est un **groupe** de transformations. Ainsi, *les transformations circulaires forment un groupe.*

Voyons parmi les propriétés géométriques des figures planes celles qui *se conservent au cours des transformations circulaires* ; parmi ces propriétés seront classées, par exemple, la propriété d'une ligne d'être un cercle ou une ligne droite (mais non la propriété d'une ligne d'être une droite, puisqu'une ligne droite peut être transformée en cercle après une transformation circulaire) ou la propriété pour deux cercles de se couper sous un angle déterminé α . On peut appeler ces propriétés, propriétés circulaires des figures, et la science qui se restreint à l'étude de ces propriétés la géométrie circulaire.

La définition de la géométrie circulaire s'apparente à celle de la géométrie ordinaire, comme science étudiant les propriétés des figures, ne dépendant pas de leur position sur le plan, c'est-à-dire *qui se conservent au cours de tous les déplacements possibles* (notons, à ce propos, que l'ensemble de tous les déplacements possibles forme, évidemment aussi un groupe) ⁽¹⁾. De plus, comme l'ensemble des transformations circulaires est plus étendu que l'ensemble des déplacements (puisque chaque déplacement $z' = pz + q$, où $p\bar{p} = 1$ est un cas particulier d'une transformation circulaire, alors qu'une transformation circulaire ne peut se traduire entièrement par un déplacement), la géométrie circulaire est « partie intégrante » de la géométrie tout entière. Il convient de comprendre cette dernière affirmation dans le sens que des propriétés circulaires des figures — c'est seulement quelques-unes d'entre elles qui sont étudiées par la géométrie ordinaire (d'Euclide).

Du point de vue de la géométrie circulaire, des figures d'un plan sont considérées comme indiscernables (possédant les mêmes propriétés) si elles se transforment l'une en l'autre par transformation circulaire ; en géométrie circulaire, on peut qualifier ces figures de « semblables » ou « d'égales ». Comme les transformations circulaires forment un groupe, en géométrie circulaire :

a) si la figure Φ est « égale » à la figure Φ_1 , et la figure Φ_1 « égale » à la figure Φ_2 , la figure Φ est, elle aussi, « égale » à la figure Φ_2 (car Φ est trans-

⁽¹⁾ Voir à ce propos I. M. YAGLOM, *Transformations géométrique*, I et II, Introductions aux 1^{re}, 2^e et 3^e parties du livre.

formée en Φ_2 par le produit des transformations qui transforment Φ en Φ_1 et Φ_1 en Φ_2);

b) si la figure Φ est « égale » à la figure Φ_1 , la figure Φ_1 elle aussi est « égale » à la figure Φ (car Φ_1 est transformée en Φ par une transformation inverse de la transformation qui transforme Φ en Φ_1);

c) chaque figure Φ est « égale » à elle-même (car Φ est transformée en elle-même par une transformation d'identité, et cette dernière transformation est aussi circulaire).

Ainsi, « l'égalité » des figures en géométrie circulaire possède les trois propriétés indispensables à l'emploi du terme « égalité ». Le fait que les transformations circulaires forment un groupe est fondamental parce que à partir d'elles découlent les propriétés a) à c) de « l'égalité » des figures, définie à l'aide des transformations circulaires.

La notion de géométrie circulaire désigne une certaine classe de propriétés géométriques des figures que l'on ne peut étudier que par ces seules et mêmes méthodes. En particulier, l'utilisation des transformations circulaires apparaît très utile pour la démonstration des propriétés circulaires des figures; grâce à elles on peut parfois simplifier considérablement la figure correspondante; c'est que du point de vue de la géométrie circulaire toutes ces figures obtenues les unes des autres avec l'aide des transformations circulaires sont semblables et c'est pourquoi nous pouvons utiliser n'importe laquelle à notre convenance. Le lecteur trouvera dans le paragraphe suivant une série d'exemples d'une semblable utilisation des transformations circulaires.

Il existe une autre méthode d'approche de la géométrie circulaire qu'il convient de n'utiliser pour la démonstration des « propriétés circulaires » des figures que les théorèmes et les notions qui se rattachent à la géométrie circulaire (c'est-à-dire qui conservent leur signification au cours des transformations circulaires). De ce point de vue, aucune des figures obtenues l'une à partir de l'autre par transformations circulaires n'a de raison d'être préférée, puisque toutes les figures représentées ont exactement les mêmes « propriétés circulaires ». Le rétrécissement de l'ensemble des propriétés qu'il est permis d'utiliser pour l'élaboration de la géométrie circulaire, complique naturellement le problème de la démonstration des théorèmes se rattachant à cette géométrie; ceci est en partie compensé par le fait que la limitation de l'ensemble des démonstrations possibles peut parfois faciliter la recherche de la bonne voie. La valeur de la méthode d'approche indiquée pour la géométrie circulaire consiste en ceci qu'elle permet de

considérer cette géométrie comme une discipline indépendante dans ce sens qu'elle a la même signification intrinsèque que la géométrie ordinaire (euclidienne). Cette science représente une nouvelle branche de la géométrie semblable, disons, à la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky.

§ 14*. APPLICATIONS ET EXEMPLES

Nous avons vu plus haut qu'un triangle quelconque $\overline{z_1z_2z_3}$ peut être transformé par une transformation circulaire déterminée en un autre triangle quelconque $\overline{w_1w_2w_3}$, c'est-à-dire que les points z_1 , z_2 et z_3 peuvent être transformés en points w_1 , w_2 , et w_3 (bien entendu les côtés du premier triangle en général ne se transforment pas en côtés du deuxième triangle, ils se transforment en cercle). Pour les quadrilatères cela n'est déjà plus valable; — pour qu'un quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ puisse être transformé en un quadrilatère $\overline{w_1w_2w_3w_4}$ (c'est-à-dire les sommets du premier — en sommets du second, il faut (et il suffit) que

$$W(w_1, w_2, w_3, w_4) = W(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

$$\text{(ou } W(w_1, w_2, w_3, w_4) = \overline{W(z_1, z_2, z_3, z_4)} \text{);}$$

en d'autres termes que

$$\angle ([w_1w_2w_3]w, [w_1w_2w_4]) = \angle ([z_1z_2z_3]z, [z_1z_2z_4])$$

et

$$\tilde{W}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \tilde{W}(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

(cf. p. 136 et suivantes; les angles ne sont pas orientés, car au cours de transformations circulaires impropres l'orientation des angles est changée en sens inverse). Mais

$$\angle \{ [z_1z_2z_3]z_1, [z_1z_2z_4] \} = \angle \{ [z_3z_2], [z_3z_1] \} - \angle \{ [z_4z_2], [z_4z_1] \}$$

(cf. p. 136-138) et

$$\tilde{W}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4)}{(z_2, z_3) \cdot (z_1, z_4)};$$

de plus si on se limite pour simplifier le tableau au cas des quadrilatères convexes $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ et $\overline{w_1w_2w_3w_4}$, les angles orientés

$$\sphericalangle \{ [z_3z_2], [z_3z_1] \} \quad \text{et} \quad \sphericalangle \{ [z_4z_2], [z_4z_1] \}$$

seront orientés différemment et c'est pourquoi leur différence se réduit à la somme des angles z_3 et z_4 du quadrilatère (fig. 58). D'où nous obtenons :

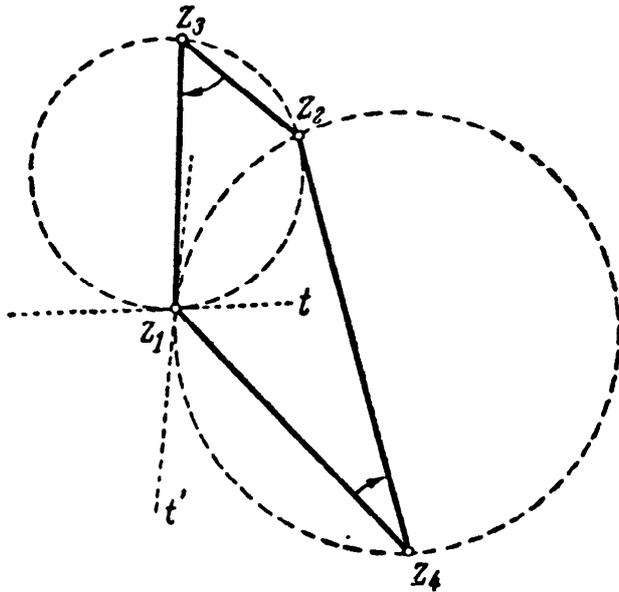


FIG. 58.

Pour qu'un quadrilatère convexe $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ puisse être transformé par une transformation circulaire en un quadrilatère convexe $\overline{w_1w_2w_3w_4}$, il faut et il suffit que la somme des angles opposés z_3 et z_4 du premier quadrilatère soit égale à la somme des angles opposés w_3 et w_4 du deuxième quadrilatère et que le rapport

$$\frac{(z_1, z_3)(z_2, z_4)}{(z_2, z_3)(z_1, z_4)}$$

des produits des côtés opposés du premier quadrilatère soit égal au rapport

$$\frac{(w_1, w_3)(w_2, w_4)}{(w_2, w_3)(w_1, w_4)}$$

des produits des côtés opposés du deuxième quadrilatère.

De cette proposition, découle en particulier que tout quadrilatère convexe $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ peut par transformation circulaire être transformé en un parallélogramme $\overline{z_1^0z_2^0z_3^0z_4^0}$ dont les angles sont égaux à la demi-somme des angles opposés du quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$, et les carrés des côtés — aux produits des côtés opposés du quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$. Dans le cas où le quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ peut s'inscrire dans un cercle (c'est-à-dire le cas où les sommes de ses angles opposés sont égales), ce quadrilatère peut être transformé en un rectangle par une transformation circulaire; si les produits des côtés opposés du quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ sont égaux entre eux il peut être transformé en losange; enfin si le quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ peut être inscrit dans un cercle et que le produit de ses côtés opposés sont égaux (c'est-à-dire si le quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$

est **harmonique**; cf. § 8, p. 74), on peut par une transformation circulaire le changer en carré. Il n'est pas difficile d'extraire de ce qui précède toute une série de propriétés différentes des quadrilatères.

Notons tout d'abord que si un quatuor de points $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ peut être transformé par une transformation circulaire en un quatuor de points $z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0$:

$$\begin{aligned} \frac{(z_1, z_2)(z_3, z_4)}{(z_1, z_3)(z_2, z_4)} &= \tilde{W}(z_1, z_4, z_2, z_3) = \tilde{W}(z_1^0, z_4^0, z_2^0, z_3^0) \\ &= \frac{(z_1^0, z_2^0) \cdot (z_3^0, z_4^0)}{(z_1^0, z_3^0) \cdot (z_2^0, z_4^0)}. \end{aligned}$$

C'est pourquoi, par exemple, *si on peut inscrire un quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ dans un cercle, et que les produits de ses côtés opposés sont égaux entre eux, le produit de ses diagonales sera égal au double produit de deux côtés opposés* (ce sera évidemment le cas du carré $\overline{z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0}$; fig. 59 a).

On peut généraliser cette dernière hypothèse au quadrilatère arbitraire $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ que l'on peut inscrire dans un cercle ; pour un tel quadrilatère *la somme des produits des côtés opposés*

$$(z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4) + (z_2, z_3) \cdot (z_1, z_4)$$

est égale au produit des diagonales $(z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4)$ (théorème de Ptolémée).

En effet, si le quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ peut être transformé par une transformation circulaire en un rectangle $\overline{z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0}$ (fig. 59 b),

$$\begin{aligned} \frac{(z_1, z_2)(z_3, z_4)}{(z_1, z_3)(z_2, z_4)} + \frac{(z_2, z_3)(z_1, z_4)}{(z_1, z_3)(z_2, z_4)} \\ &= \tilde{W}(z_1, z_4, z_2, z_3) + \tilde{W}(z_1, z_2, z_4, z_3) \\ &= \tilde{W}(z_1^0, z_4^0, z_2^0, z_3^0) + \tilde{W}(z_1^0, z_2^0, z_4^0, z_3^0) \\ &= \frac{(z_1^0, z_2^0)(z_3^0, z_4^0)}{(z_1^0, z_3^0)(z_2^0, z_4^0)} + \frac{(z_2^0, z_3^0) \cdot (z_1^0, z_4^0)}{(z_1^0, z_3^0) \cdot (z_2^0, z_4^0)} = \frac{(z_1^0, z_2^0)^2 + (z_2^0, z_3^0)^2}{(z_1^0, z_3^0)^2} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut considérer le théorème de Ptolémée comme une généralisation du théorème de Pythagore qui établit un lien entre les longueurs des côtés et la longueur des diagonales du rectangle.

Essayons maintenant de trouver une relation analogue reliant les longueurs et des diagonales d'un quadrilatère entièrement arbitraire $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$.

Supposons que ce quadrilatère soit transformé par une transformation circulaire en un parallélogramme $\overline{z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0}$ avec un angle aigu $\angle z_1^0 = \varphi$ (fig. 59, c). Alors, il est évident que :

$$(z_2^0, z_4^0)^2 = (z_1^0, z_2^0)^2 + (z_1^0, z_4^0)^2 - 2(z_1^0, z_2^0)(z_1^0, z_4^0) \cos \varphi$$

et

$$(z_1^0, z_3^0)^2 = (z_1^0, z_2^0)^2 + (z_1^0, z_4^0)^2 + 2(z_1^0, z_2^0)(z_1^0, z_4^0) \cos \varphi ;$$

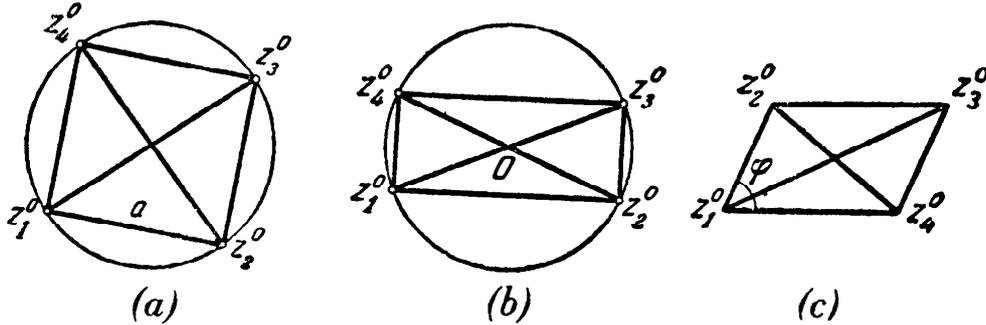


FIG. 59.

par conséquent

$$\begin{aligned} (z_1^0, z_3^0)^2 (z_2^0, z_4^0)^2 &= [(z_1^0, z_2^0)^2 + (z_1^0, z_4^0)^2] - 4(z_1^0, z_2^0)(z_1^0, z_4^0) \cos^2 \varphi \\ &= (z_1^0, z_2^0)^4 + (z_1^0, z_4^0)^4 - 2(z_1^0, z_2^0)^2 (z_1^0, z_4^0)^2 (2 \cos^2 \varphi - 1) \\ &= (z_1^0, z_2^0)^4 + (z_1^0, z_4^0)^4 - 2(z_1^0, z_2^0)^2 (z_1^0, z_4^0)^2 \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Mais 2φ est la somme des angles opposés z_1^0 et z_3^0 du parallélogramme $\overline{z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0}$, elle est égale, comme nous le savons, à la somme des angles opposés du quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$. D'où nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\frac{(z_1, z_2)^2 (z_3, z_4)^2 + (z_1, z_4)^2 (z_2, z_3)^2}{(z_1, z_3)^2 (z_2, z_4)^2} = \\ &\quad \frac{2[(z_1, z_2)(z_3, z_4)][(z_1, z_4)(z_2, z_3)] \cos 2\varphi}{(z_1, z_3)^2 (z_2, z_4)^2} = \\ &= [\tilde{W}(z_1, z_4, z_2, z_3)]^2 + [\tilde{W}(z_1, z_2, z_4, z_3)]^2 \\ &\quad - 2\tilde{W}(z_1, z_4, z_2, z_3)\tilde{W}(z_1, z_2, z_4, z_3) \cos 2\varphi \\ &= [\tilde{W}(z_1^0, z_4^0, z_2^0, z_3^0)]^2 + [W(z_1^0, z_2^0, z_4^0, z_3^0)]^2 \\ &\quad - 2\tilde{W}(z_1^0, z_4^0, z_2^0, z_3^0)\tilde{W}(z_1^0, z_2^0, z_4^0, z_3^0) \cos 2\varphi \\ &= \frac{(z_1^0, z_2^0)^4 + (z_1^0, z_4^0)^4 + 2(z_1^0, z_2^0)^2 (z_1^0, z_4^0)^2 \cos 2\varphi}{(z_1^0, z_3^0)^2 \cdot (z_2^0, z_4^0)^2} = 1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la somme des produits des carrés des côtés opposés d'un quadrilatère arbitraire moins le double produit de tous ses côtés par le cosinus de la somme des angles opposés est égale au produit des carrés des diagonales du quadrilatère. En particulier, pour $2\varphi = \pi/2$ on obtient : si la somme des angles opposés d'un quadrilatère est égale à $\pi/2$, la somme des produits des carrés de ses côtés opposés est égale au produit des carrés des diagonales du quadrilatère (comparez avec le théorème de Ptolémée : si la somme des angles opposés d'un quadrilatère est égale à π , la somme des produits de ses côtés opposés est égale au produit des diagonales du quadrilatère).

On peut parvenir à ces résultats par un autre chemin.

Transformons par une transformation circulaire le quadrilatère $\overline{Z_1Z_2Z_3Z_4}$ en un « quadrilatère » $\overline{Z_1Z_2Z_3\infty}$, où ∞ — est un « point infiniment éloigné » du plan; avec cela nous aurons :

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = W(Z_1, Z_2, Z_3, \infty) = V(Z_1, Z_2, Z_3)$$

(voir § 7, p. 34). La relation

$$V(Z_1, Z_2, Z_3) = \frac{Z_1 - Z_3}{Z_2 - Z_3}$$

donne la relation des côtés

$$\frac{(Z_1, Z_3)}{(Z_2, Z_3)} = \frac{|Z_1 - Z_3|}{|Z_2 - Z_3|} = |V|$$

du triangle $\overline{Z_1Z_2Z_3}$ et son angle

$$\angle \{ [Z_1Z_3], [Z_2Z_3] \} = \text{Arg} \frac{Z_1 - Z_3}{Z_2 - Z_3} = \text{Arg } V;$$

ainsi, le triangle $\overline{Z_1Z_2Z_3}$ est déterminé par le quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ « à une similitude près ». (Cette dernière expression signifie que toute paire de triangles $\overline{Z_1Z_2Z_3}$ et $\overline{Z'_1Z'_2Z'_3Z'_4}$ tels qu'on puisse transformer $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ par des transformations circulaires à la fois en $\overline{Z_1Z_2Z_3\infty}$ et en $\overline{Z'_1Z'_2Z'_3\infty}$ sont semblables entre eux.) Le triangle $\overline{Z_1Z_2Z_3}$ s'appelle **triangle associé** au quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ (cf. § 8, p. 79).

Il est évident que

$$\begin{aligned} \frac{(Z_1, Z_3)}{(Z_2, Z_3)} &= |W(z_1, z_2, z_3, z_4)| = \tilde{W}(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ &= \frac{(z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4)}{(z_1, z_4) \cdot (z_2, z_3)}; \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{(Z_1, Z_2)}{(Z_3, Z_2)} &= \frac{|Z_1 - Z_2|}{|Z_3 - Z_2|} = |V(Z_1, Z_3, Z_2)| = |W(Z_1, Z_3, Z_2, \infty)| \\ &= |W(z_1, z_3, z_2, z_4)| = \tilde{W}(z_1, z_3, z_2, z_4) = \frac{(z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4)}{(z_1, z_4) \cdot (z_2, z_3)}. \end{aligned}$$

Ainsi, le rapport des longueurs des côtés du triangle associé $\overline{Z_1 Z_2 Z_3}$ est égal au rapport des produits des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$:

$$(Z_1, Z_2) : (Z_1, Z_3) : (Z_2, Z_3) =$$

$$[(z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4)] : [(z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4)] : [(z_1, z_4) \cdot (z_2, z_3)].$$

D'où il s'ensuit que si on transforme par une transformation circulaire

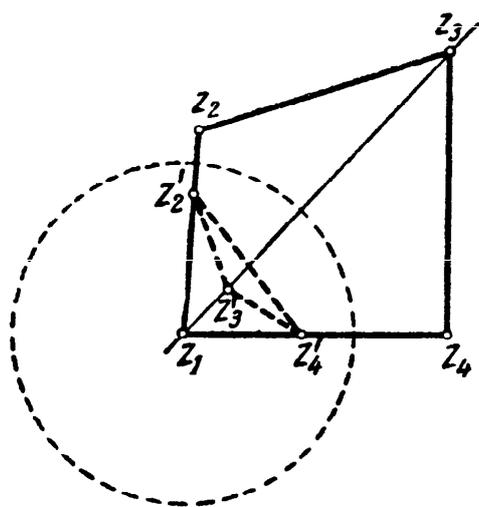


FIG. 60.

le quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ en un « quadrilatère » $\overline{z'_1 z'_2 z'_3 z'_4}$ où l'un des points $z'_1, z'_2, z'_3,$ et z'_4 est un « point infiniment éloigné » ∞ , le triangle formé par les trois autres points sera associé à $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ (c'est-à-dire sera semblable au triangle considéré plus haut $\overline{Z_1 Z_2 Z_3}$). En effet, si, par exemple, $z'_3 = \infty$, $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ est transformé en $\overline{z'_1 z'_2 z'_4 \infty}$, d'où il s'ensuit que

$$(z'_1, z'_2) : (z'_1, z'_4) : (z'_2, z'_4) = [(z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4)] :$$

$$[(z_1, z_4) \cdot (z_2, z_3)] : [(z_1, z_3) \cdot (z_2, z_4)]$$

et, donc, les triangles $\overline{Z_1 Z_2 Z_3}$ et $\overline{z'_1 z'_2 z'_4}$ sont semblables (ils ont un seul et même rapport de côtés). D'où il s'ensuit que le triangle associé du qua-

drilatère $z_1z_2z_3z_4$ peut être obtenu, par exemple, en transformant trois sommets de $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ à l'aide d'une inversion ayant son centre au quatrième sommet (n'importe lequel !) du quadrilatère (fig. 60). Notons maintenant que si le quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ est convexe :

$$\begin{aligned} \angle \{ [Z_2Z_3], [Z_2Z_1] \} &= \text{Arg } V(Z_1, Z_3, Z_2) = \text{Arg } W(Z_1, Z_3, Z_2, \infty) \\ &= \text{Arg } W(z_1, z_3, z_2, z_4) = \angle z_1 + \angle z_3 = 2\varphi \end{aligned}$$

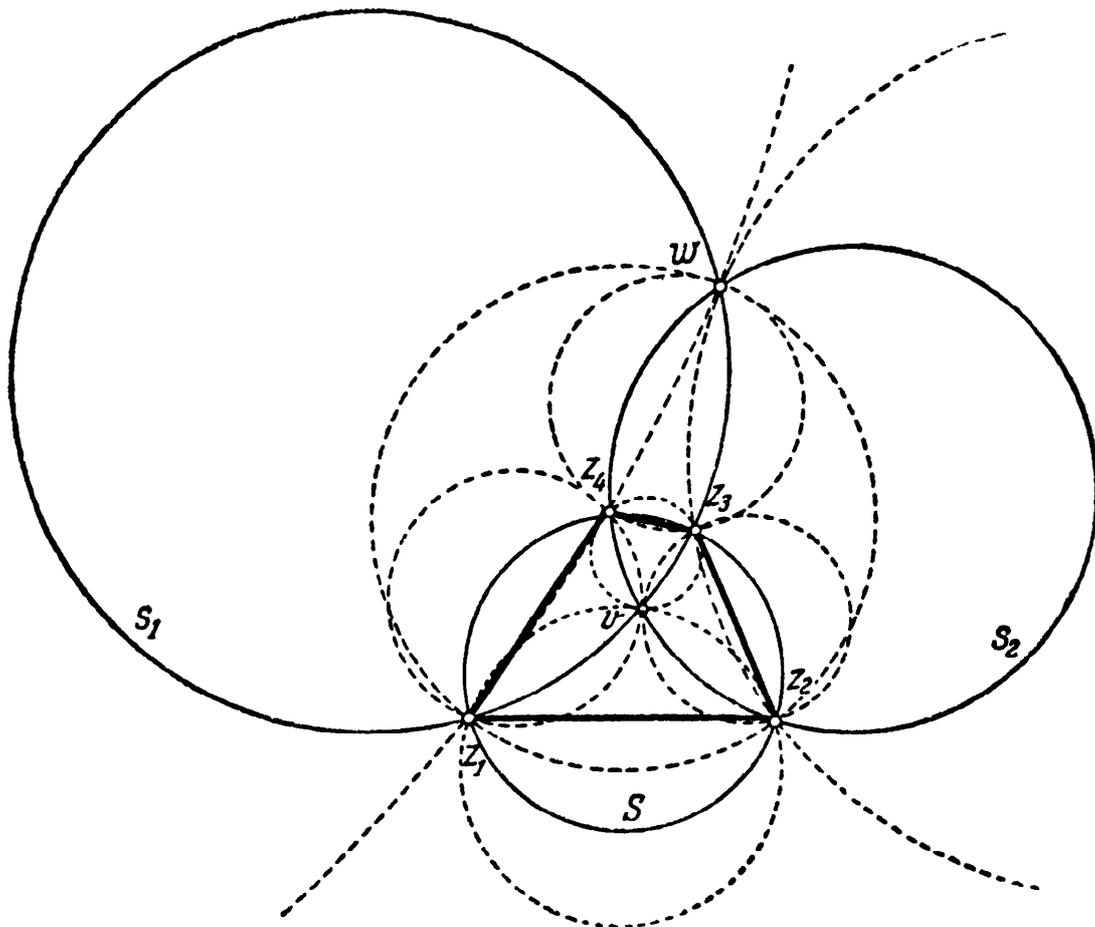


FIG. 61.

(voir p. 34 et 146). D'où il s'ensuit que la relation obtenue plus haut

$$(z_1, z_3)^2 \cdot (z_2, z_4)^2 = (z_1, z_2)^2 \cdot (z_3, z_4)^2 + (z_1, z_4)^2 \cdot (z_2, z_3)^2 -$$

$$2(z_1, z_2) \cdot (z_2, z_3) \cdot (z_3, z_4) \cdot (z_4, z_1) \cos 2\varphi$$

représente simplement le **théorème des cosinus** appliqué au triangle associé.

Par analogie, le théorème se rapportant au cas de $2\varphi = 90^\circ$ et le théorème de Ptolémée peuvent aussi facilement être déduits de l'étude du triangle associé au quadrilatère $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ (qui est dans ces cas rectangle ou dégénéré).

Voici encore un groupe de résultats se rattachant aux quadrilatères que l'on peut déduire de cette même possibilité de transformer un quadrilatère quelconque en un parallélogramme (ou en un losange ou en un carré). Les diagonales $[z_1^0 z_3^0]$ et $[z_2^0 z_4^0]$ du rectangle sont des « cercles » menés par les sommets opposés du rectangle $\overline{z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0}$ orthogonalement ⁽¹⁾ au cercle circonscrit; le centre O du rectangle et le point ∞ (par lequel passent toutes les droites du plan) sont les points d'intersection de ces cercles. Ensuite, les côtés du rectangle sont les cercles $\overline{z_1^0 z_2^0 \infty}$, $\overline{z_2^0 z_3^0 \infty}$, $\overline{z_3^0 z_4^0 \infty}$ et $\overline{z_4^0 z_1^0 \infty}$; il est facile ainsi de se représenter de quelle façon on choisit les cercles $[z_1^0 z_2^0 O]$, $[z_2^0 z_3^0 O]$, $[z_3^0 z_4^0 O]$ et $[z_4^0 z_1^0 O]$ (voir plus haut, fig. 59 b). D'où nous obtenons : si S_1 et S_2 sont les cercles passant par les sommets opposés du quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ inscrit dans le cercle S et orthogonaux à S , tandis que v et w sont les points d'intersection de ces cercles, les cercles $[z_1 z_2 v]$ et $[z_3 z_4 v]$, $[z_2 z_3 v]$ sont tangents entre eux, de plus les deux premiers cercles sont orthogonaux aux deux derniers; par analogie les cercles $[z_1 z_2 w]$ et $[z_3 z_4 w]$, $[z_1 z_4 w]$ et $[z_2 z_3 w]$ sont eux aussi tangents, et les deux premiers de ces cercles sont orthogonaux aux deux derniers (fig. 61). Le fait que le point O est le milieu des diagonales $\overline{z_1^0 z_3^0}$ et $\overline{z_2^0 z_4^0}$ du rectangle $\overline{z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0}$ conduit aussi à des propositions intéressantes concernant un quadrilatère arbitraire $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ que l'on peut inscrire dans un cercle : de ceci s'ensuit que

$$\tilde{W}(z_1, z_3, v, w) = \tilde{W}(z_2, z_4, v, w) = 1,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{(z_1, v)}{(z_3, v)} = \frac{(z_1, w)}{(z_3, w)} \quad \text{et} \quad \frac{(z_2, v)}{(z_4, v)} = \frac{(z_2, w)}{(z_4, w)}.$$

De la figure 59 a découle que si les produits des côtés opposés d'un quadrilatère $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ (inscrit dans le cercle S) sont égaux entre eux, les cercles S_1 et S_2 seront orthogonaux; de plus les cercles $[z_1 z_2 v]$, $[z_2 z_3 v]$, $[z_3 z_4 v]$ et $[z_4 z_1 v]$ seront orthogonaux aux cercles $[z_1 z_2 w]$, $[z_2 z_3 w]$, $[z_3 z_4 w]$ et $[z_4 z_1 w]$ respectivement. Enfin, on peut aussi utiliser la plupart de ces résultats pour un quadrilatère absolument arbitraire (qui n'est pas obligatoirement inscrit dans un cercle) $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$; mais alors on doit comprendre pour S_1 et S_2 , un cercle passant par les sommets opposés z_1 et z_3 du quadrilatère et formant des

⁽¹⁾ On dit des cercles qu'ils sont orthogonaux quand l'angle entre eux est égal à $\pi/2$.

angles égaux avec les cercles $\overline{z_1 z_2 z_3}$ et $\overline{z_1 z_3 z_4}$, respectivement, — cercle passant par z_2 et z_4 et formant des angles égaux avec $z_2 z_3 z_4$ et $[z_2 z_4 z_1]$ (si le quadrilatère initial est un parallélogramme S_1 et S_2 sont les diagonales du parallélogramme; voir fig. 59 c). Nous laissons le lecteur étudier seul ce cas. Remarquons, pour conclure, que les exemples considérés illustrent bien cette méthode de démonstration des théorèmes de la géométrie circulaire dont nous avons parlé à la fin du précédent paragraphe : Notre démarche consiste à formuler une certaine propriété « circulaire » d'un quadrilatère $z_1 z_2 z_3 z_4$, c'est-à-dire une propriété qui se conserve au cours des transformations circulaires (par exemple liée au rapport anharmonique des sommets du quadrilatère), et nous transformons ensuite le quadrilatère en une forme

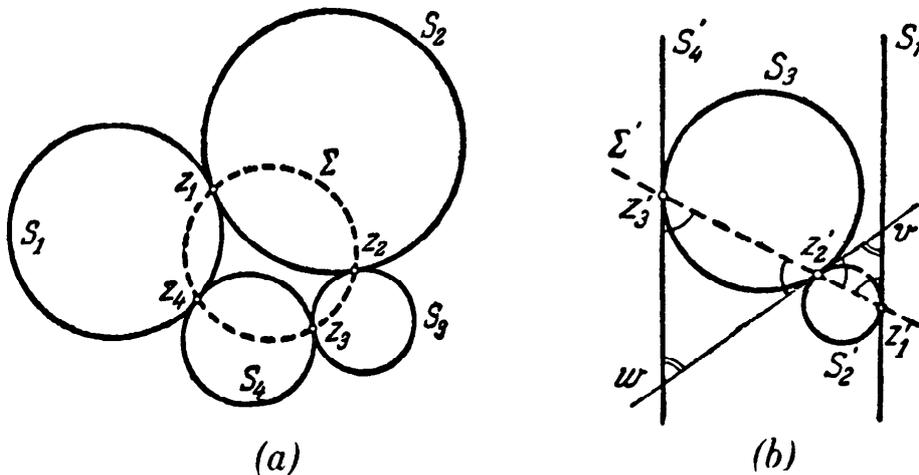


FIG. 62.

telle que cette propriété soit plus facile à étudier que dans le quadrilatère de départ (par exemple, nous transformons $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ en un parallélogramme $\overline{z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0}$ ou en un « quadrilatère » $\overline{Z_1 Z_2 Z_3 \infty}$). Cette méthode permet de démontrer une grande variété de théorèmes se rapportant aux polygones et aux cercles. Nous nous bornerons encore ici à un seul exemple très simple.

Considérons quatre cercles non sécants deux à deux S_1 , S_2 , S_3 et S_4 tels que S_1 et S_3 soient tangents à S_2 et S_4 (fig. 62, a); il faut démontrer que les quatre points de tangence des cercles [représentons-les par z_1 , z_2 , z_3 et z_4 appartiennent à un seul cercle (ou droite) Σ ⁽¹⁾.

Transformons par une transformation circulaire le point z_4 en « point infiniment éloigné » ; les cercles S_1 et S_4 qui passent par z_4 sont transformés

(¹) Si les cercles S_1 et S_3 ou S_2 et S_4 sont sécants, la condition du théorème peut ne pas être remplie (on peut ne pas exiger aussi que les cercles ne se coupent pas, si on suppose qu'ils sont orientés : cf. note p. 161).

en droites parallèles S'_1 et S'_4 (fig. 62 *b* ; S'_1 et S'_4 ne peuvent être sécants, puisque S_1 et S_4 ont un seul point commun z_4). D'après la figure 62 *b* il s'ensuit que les points z'_1 , z'_2 et z'_3 transformés des points z_1 , z_2 et z_3 appartiennent à une seule droite Σ' ; en effet,

$$\angle (z'_1 v z'_2) = \angle (z'_2 w z'_3),$$

et par conséquent,

$$\angle (z'_1 z'_2 v) = \angle (z'_3 z'_2 w)$$

D'où il s'ensuit que le nombre

$$V(z'_1, z'_2, z'_3) = W(z'_1, z'_2, z'_3, \infty)$$

est réel, et donc que le rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est réel ; mais justement ceci démontre le théorème.

Arrêtons-nous encore sur les connexions entre les transformations d'inversion et la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle introduite dans le § 8 (p. 44 et suivantes). Dans le § 8 on a montré que le rapport

$$\frac{C}{A} = k \quad (18)$$

des coefficients C et A de l'équation du cercle S

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0 \quad (19)$$

est égal au produit

$$\{ O, z_1 \} \cdot \{ O, z_2 \} \quad (20)$$

des longueurs (orientées) des segments $\overline{Oz_1}$ et $\overline{Oz_2}$, où z_1 et z_2 sont les points d'intersection de S avec la droite arbitraire passant par O ; nous avons appelé ce produit **puissance du cercle S** (ou **puissance du point O par rapport au cercle S**). Mais, d'autre part, l'inversion de puissance k

$$z' = \frac{k}{\bar{z}}, \quad k \text{ réel}, \quad (16)$$

transforme chaque point z en un point z' de la droite $[Oz]$, tel que

$$\{ O, z \} \cdot \{ O, z' \} = k$$

(cf. la description géométrique de l'inversion singulière, p. 140). D'où il s'ensuit immédiatement que si la puissance du point O par rapport à S est

égale à k , l'inversion de degré k transforme S en lui-même (transforme chaque point z_1 du cercle S en un deuxième point z_2 d'intersection de la droite $[Oz_1]$ avec S).

Il n'est pas difficile de démontrer le fait que le cercle (19) tel que $C/A = k$ est transformé en lui-même par l'inversion de puissance k sans avoir recours à la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle ; de cette démonstration on peut ensuite déduire la constance des produits (20), où z_1 et z_2 sont les points d'intersection de notre cercle S avec la droite passant par O (c'est-à-dire le théorème sur la puissance d'un point par rapport au cercle). En effet, l'inversion (16) que nous pouvons aussi écrire sous la forme

$$z = \frac{k}{z'}, \quad \bar{z} = \frac{k}{\bar{z}'}, \quad (16 a)$$

transforme le cercle (19) en lieu géométrique des points z' , pour lesquels

$$A \cdot \frac{k}{\bar{z}'} \cdot \frac{k}{z'} + B \cdot \frac{k}{\bar{z}'} - \bar{B} \frac{k}{z'} + C = 0$$

ou

$$Cz'\bar{z}' + Bkz' - \bar{B}k\bar{z}' + Ak^2 = 0.$$

Comme $C = Ak$, $A = C/k$, la dernière équation peut s'écrire ainsi :

$$Akz'\bar{z}' + Bkz' - \bar{B}k\bar{z}' + Ck = 0,$$

d'où il s'ensuit que l'inversion (16) transforme le cercle (19) en lui-même.

Pour chaque inversion (16) il existe une infinité de cercles que cette inversion transforme en eux-mêmes. Ce sont les cercles de puissance k ; ils sont décrits par les équations (19), où $C/A = k$ est fixe, c'est-à-dire par les équations

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + Ak = 0. \quad (19 a)$$

Les droites $Bz - \bar{B}\bar{z} = 0$ qui passent par O qui sont aussi transformées en elles-mêmes par l'inversion (16), sont décrites par ces mêmes équations (19 a) (où l'on doit seulement poser $A = 0$). L'ensemble des cercles (et des droites) (19 a) qui sont transformées en eux-mêmes par les inversions (16) de puissance k s'appellent **faisceaux de cercles** ; le nombre k , **puissance** du faisceau, quant au point O : son **centre**. On peut démontrer que chaque faisceau de cercles est formé de tous les cercles (et droites) coupant un certain cercle fixe Σ sous un angle droit ; ou de tous les cercles (et droites) tangents à un

certain cercle fixe, cercle Σ ; ou de tous les cercles (et droites), coupant un certain cercle fixe Σ en des points diamétralement opposés. Nous ne nous attarderons pas ici sur ces considérations.

§ 15. TRANSFORMATIONS AXIALES CIRCULAIRES (TRANSFORMATIONS DE LAGUERRE)

Nous considérerons dans ce paragraphe les fonctions homographiques

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

et

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (1 a)$$

d'une variable duale, où il convient maintenant de poser que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

n'est pas un diviseur de 0. A ces fonctions correspondent les transformations des droites orientées (axes) de la surface euclidienne, que nous appellerons transformations homographiques ⁽²⁾. Comme précédemment il nous sera parfois commode d'appeler les transformations (1) : **transformations homographiques axiales propres** et les transformations (1 a) : **transformations homographiques axiales impropres**. Les fonctions homographiques (1) et (1 a) d'une variable duale sont des fonctions univoques, appliquées à l'ensemble de tous les nombres duals, élargi par l'introduction des nombres $c\omega$, c réel, et ∞ ⁽³⁾ ; conformément à cela les transformations homographiques axiales sont des transformations biunivoques de l'ensemble de tous les axes (droites orientées) du plan. **La symétrie par rapport au point O , la symétrie par rapport à la droite O et la réorientation sont des cas particuliers** des transformations homographiques axiales

$$z' = \bar{z} \quad (a) \quad z' = -z \quad (b) \quad \text{et} \quad z' = -\frac{1}{z} \quad (c), \quad (21)$$

⁽¹⁾ Voir par exemple B. H. DELONE et O. K. JITOMIRSK, *Recueil de géométrie*, M, 1959, problèmes 273-291.

⁽²⁾ Par opposition avec les transformations étudiées dans le précédent paragraphe où les transformations homographiques de l'ensemble des points du plan pourraient être appelées transformations homographiques ponctuelles.

⁽³⁾ Voir plus haut page 16-17.

et aussi le déplacement arbitraire

$$z' = \frac{pz + q}{-\bar{q}z + \bar{p}} \quad (a), \quad z = \frac{-pz + q}{\bar{q}z + \bar{p}} \quad (b), \quad z' = \frac{p\bar{z} + q}{-\bar{q}\bar{z} + \bar{p}} \quad (c)$$

$$z' = \frac{-p\bar{z} + q}{\bar{q}\bar{z} + \bar{p}} \quad (d); \quad \Delta = p\bar{p} + q\bar{q} \neq 0 \quad (22)$$

[voir les formules (36 a-d) du § 9, p. 89].

En particulier comme dans le § 13, on démontre que *le produit de deux transformations homographiques axiales et une transformation inverse de la transformation homographique axiale, seront aussi des transformations de ce type-là; enfin la transformation identique peut, elle aussi, être considérée comme homographique axiale. Ce qui sera très important pour nous c'est le fait que si z'_1, z'_2, z'_3 et z'_4 sont quatre droites (orientées du plan, en lesquelles une transformation homographique circulaire (1) ou (1 a) transforme quatre droites données z_1, z_2, z_3 et z_4 on a la relation :*

$$\text{ou} \quad W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = W(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

$$W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = \overline{W(z_1, z_2, z_3, z_4)} \quad (9)$$

propriété d'invariance du rapport anharmonique) ; la démonstration de cette propriété ne se distingue pas non plus de la démonstration correspondante au § 13. D'où s'ensuit immédiatement que *les transformations homographiques axiales transforment quatre droites (orientées) appartenant à un seul cercle (orienté) ou à un point, en quatre droites appartenant aussi à un seul cercle ou point ; en d'autres termes, une transformation homographique axiale transforme chaque cercle (orienté) ou point à nouveau en un cercle ou un point* ⁽¹⁾. Cette circonstance permet d'appeler les transformations homographiques axiales du plan : **transformations axiales circulaires** (de plus on appelle les transformations (1), **transformations axiales circulaires propres**, et les transformations (1 a) : **transformations axiales circulaires impropres** ⁽²⁾. Comme les transformations axiales circulaires furent étudiées pour la première fois par l'éminent mathématicien français Edmond Laguerre (1834-1886) on les appelle souvent **transformations de Laguerre**.

⁽¹⁾ Cf. note ⁽¹⁾ page 135.

⁽²⁾ On peut montrer que toutes les transformations de l'ensemble des droites orientées du plan transformant les cercles (orientés) (parmi lesquels on compte aussi les points) à nouveau en cercles sont épuisées par les transformations homographiques (1) et (1 a) accompagnées aussi dans certain cas, d'une transformation de similitude (cf. I. M. YAGLOM, *Transformations géométriques*, II, § 5, chap. II, p. 314-321).

Tout comme dans le § 13 on montre qu'il existe une seule transformation homographique axiale propre (1) et une seule transformation homographique axiale impropre (1 a) qui transforment trois droites (orientées) données z_1, z_2 et z_3 , dont deux quelconques ne sont pas parallèles, en trois autres droites données (orientées) w_1, w_2 et w_3 dont aussi deux quelconques d'entre elles ne sont pas parallèles (1). Ces transformations sont décrites par les égalités (10) et (10 a) démontrées dans le § 13 :

$$\frac{z' - w_2}{w_1 - w_2} : \frac{z' - w_3}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z - z_3}{z_1 - z_3}, \quad (10)$$

$$\frac{z' - w_2}{w_1 - w_2} : \frac{z' - w_3}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} : \frac{z - z_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}. \quad (10 a)$$

D'autre part, quatre droites (orientées) z_1, z_2, z_3 et z_4 ne peuvent pas toujours être transformées par une transformation axiale circulaire en quatre autres droites (orientées) w_1, w_2, w_3 et w_4 . Afin que cela soit possible, *il faut et il suffit que l'une des égalités suivantes soit satisfaite :*

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & W(w_1, w_2, w_3, w_4) = W(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ & W(w_1, w_2, w_3, w_4) = \overline{W(z_1, z_2, z_3, z_4)}. \end{aligned} \quad (9)$$

De ce qui a été démontré s'ensuit qu'on peut transformer (et cela par de nombreux moyens) *un cercle quelconque (orienté) ou un point en un autre cercle quelconque ou en un point par une transformation axiale circulaire*, pour cela il faut seulement que trois tangentes (orientées) au premier cercle soient

(1) Il est facile de voir que *chaque transformation axiale circulaire transforme des droites parallèles à nouveau en parallèles*; ceci vient, par exemple de ce que, en vertu des formules (1) et (1 a) :

$$|z'| = \frac{|a| |z| + |b|}{|c| |z| + |d|}$$

et cela signifie que si $|z_1| = |z_2|$ on a aussi $|z'_1| = |z'_2|$. C'est pourquoi si les droites z_1 et z_2 sont parallèles, w_1 et w_2 doivent aussi être parallèles (si $z_1 - z_2$ est un diviseur de zéro, tandis que $w_1 - w_2$ n'est pas un diviseur de zéro, le déterminant Δ de la transformation homographique (10) est un diviseur de zéro]. En général, pour que puisse exister une transformation axiale circulaire (propre), qui transforme trois droites z_1, z_2, z_3 en trois droites w_1, w_2 et w_3 , il est indispensable que deux quelconques des droites z et deux quelconques des droites w ne soient pas parallèles, ou que deux droites z et les deux points w leur correspondant soient parallèles, tandis que la troisième droite z et la troisième droite w ne sont pas parallèles aux deux premières, ou bien que $z_1 \parallel z_2 \parallel z_3$, $w_1 \parallel w_2 \parallel w_3$ et :

$$\{ z_1, z_2 \} : \{ z_1, z_3 \} = \{ w_1, w_2 \} : \{ w_1, w_3 \}.$$

transformées en trois tangentes (n'importe lesquelles !) orientées du deuxième cercle. En particulier, *on peut par une transformation axiale circulaire transformer un cercle quelconque (orienté) en un point*, en vertu de quoi, dans les problèmes liés à ces transformations on ne distingue pas habituellement entre eux les points et les cercles, considérant le point comme un cas particulier du cercle (« cercle de rayon nul »).

Éclaircissons maintenant ce que représente géométriquement l'argument $\text{Arg } W$ et le module $|W|$ du rapport anharmonique

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

des quatre droites (orientées) z_1, z_2, z_3 et z_4 . Nous avons démontré effectivement plus haut (voir § 9, chap. II) que

$$\begin{aligned} \text{Arg } W(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \text{Arg } \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \text{Arg } \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \\ &= \frac{1}{2} (\{ [z_1z_3], [z_2z_3] \} + \{ [z_2z_4], [z_1z_4] \} - \\ &\qquad \qquad \qquad \{ [z_4z_1], [z_3z_1] \} - \{ [z_3z_2], [z_4z_2] \}) \end{aligned}$$

(cf. p. 95-96). Considérons maintenant deux cercles (orientés) S_1 et S_2 , déterminés par les droites z_1, z_2, z_3 et z_1, z_2, z_4 , ou, comme nous les désignerons souvent par la suite, les cercles $[z_1z_2z_3]$ et $[z_1z_2z_4]$ (fig. 63). Désignons respectivement les points de tangence des cercles S_1 et S_2 avec les droites z_1, z_2, z_3 et z_1, z_2, z_4 par P_1, P_2, P_3 , et Q_1, Q_2, Q_4 ; de plus convenons pour simplifier d'écrire au lieu de $[z_1z_3]$, $[z_2z_3]$, $[z_2z_4]$ et $[z_1z_4]$ A, B, C et D . Il est évident que nous obtenons (cf. plus haut, p. 94-95)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\{ A, E \} + \{ C, D \} - \{ D, A \} - \{ B, C \}) &= \\ \frac{1}{2} (\{ A, P_3 \} + \{ P_3, B \} + \{ C, Q_4 \} + \{ Q_4, D \} - \\ \{ D, Q_1 \} - \{ Q_1, P_1 \} - \{ P_1, A \} - \{ B, P_2 \} - \{ P_2, Q_2 \} - \{ Q_2, C \}) & \end{aligned}$$

Ensuite, en vertu des propriétés des tangentes

$$\begin{aligned} \{ AP_3 \} &= \{ P_1A \}, & \{ P_3B \} &= \{ BP_2 \}, & \{ CQ_4 \} &= \{ Q_2C \}, \\ \{ Q_4D \} &= \{ DQ_1 \} \end{aligned}$$

et

$$\{ P_2Q_2 \} = \{ Q_1P_1 \} = - \{ P_1Q_1 \}.$$

D'où nous obtenons

$$\text{Arg } W(z_1, z_2, z_3, z_4) = P_1Q_1. \tag{23}$$

La longueur du segment de la tangente commune (orientée) z aux cercles S_1 et S_2 compris entre les points de tangence, s'appelle **distance tangentielle**

de ces cercles et on la désigne par (S_1S_2) ; si on considère la longueur **orientée** du segment de la tangente commune aux cercles S_1 et S_2 on parle de **distance tangentielle orientée** $\{S_1zS_2\}$ de ces cercles. Ainsi, nous voyons que l'argument $\text{Arg } W$ du rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ des quatre droites (orientées) z_1, z_2, z_3 et z_4 est égal à la distance tangentielle orientée $\{[z_1, z_2, z_3]z_1[z_1z_2z_4]\}$ des cercles $[z_1z_2z_3]$ et $[z_1z_2z_4]$.

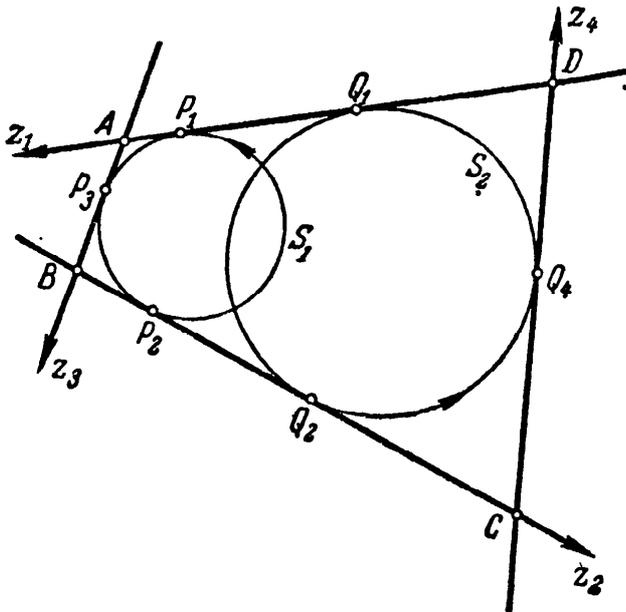


FIG. 63.

De la propriété d'invariance de rapport anharmonique de quatre droites (orientées) il s'ensuit que les transformations axiales circulaires propres

ne changent pas la distance tangentielle orientée des cercles, tandis que les transformations axiales circulaires impropres changent le signe, mais non la valeur absolue de cette distance. Cette importante propriété des transformations axiales circulaires est habituellement énoncée ainsi : les transformations axiales circulaires conservent les distances tangentielles des cercles ⁽¹⁾. En particulier, les cercles (orientés) tangents (cercles dont la distance tangen-

⁽¹⁾ Soient γ_1 et γ_2 deux courbes arbitraires et z leur tangente commune (fig. 64) ; la distance $(A_1, A_2) = (\gamma_1, \gamma_2)$ entre les points A_1 et A_2 de contact de γ_1 et de γ_2 avec z s'appelle **distance tangentielle** de γ_1 et γ_2 . Mais évidemment, $(\gamma_1, \gamma_2) = (S_1, S_2)$, où S_1 et S_2 sont les cercles tangents aux courbes γ_1 et γ_2 aux points A_1 et A_2 ; de plus, une transformation axiale circulaire qui transforme les courbes γ_1 et γ_2 en d'autres courbes γ'_1 et γ'_2 , transforme S_1 et S_2 en cercles S'_1 et S'_2 tangents à γ'_1 et γ'_2 . C'est pourquoi de ce qui a été démontré il s'ensuit que les transformations axiales circulaires conservent les distances tangentielles des courbes arbitraires. Les transformations de l'ensemble des courbes du plan possédant cette dernière propriété s'appellent **transformations équilogales** ; ainsi les transformations axiales circulaires sont des transformations équilogales.

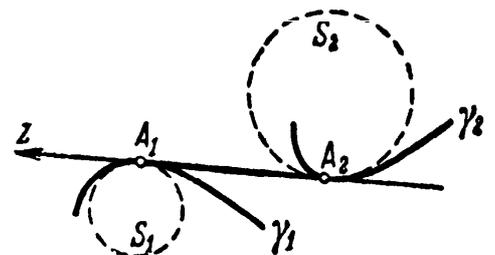


FIG. 64.

tielle est égale à zéro) sont transformés par les transformations circulaires axiales en cercles tangents (1).

Prenons maintenant le module $|W|$ du rapport anharmonique $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ des quatre droites (orientées) z_1, z_2, z_3 et z_4 . En utilisant la formule de base (29) § 9 (p. 81) et aussi le fait que le module du quotient ou de la différence de deux nombres duals est égal au quotient ou à la différence correspondante des modules de ces nombres on obtient

$$|W(z_1, z_2, z_3, z_4)| = \frac{\operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{z_1 0\}}{2} - \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{z_3 0\}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{z_2 0\}}{2} - \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{z_3 0\}}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{z_1 0\}}{2} - \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{z_4 0\}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{z_2 0\}}{2} - \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle \{z_4 0\}}{2}}.$$

En tenant compte aussi que

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta},$$

nous aurons

$$|W(z_1, z_2, z_3, z_4)| = \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \sphericalangle \{z_3 z_1\} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \sphericalangle \{z_3 z_2\} \right)} : \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \sphericalangle \{z_4 z_1\} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \sphericalangle \{z_4 z_2\} \right)}.$$

le nombre réel

$$\frac{\sin \left(\frac{1}{2} \sphericalangle \{z_3 z_1\} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \sphericalangle \{z_3 z_2\} \right)} : \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \sphericalangle \{z_4 z_1\} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \sphericalangle \{z_4 z_2\} \right)}$$

(1) Notons qu'on dit de cercles orientés qu'ils sont tangents s'ils ont une seule direction commune de contact c'est-à-dire s'ils sont tangents au sens habituel et si leurs sens de rotation au point de contact coïncident. Des cercles tangents au sens habituel dont les sens de rotation au point de contact sont opposés peuvent être transformés par des transformations axiales circulaires en cercles qui se coupent ou en cercles n'ayant pas de point commun.

nous l'appellerons *rapport anharmonique des angles entre quatre droites* (orientées) z_1, z_2, z_3 et z_4 et nous le désignerons par $\hat{W}(z_1, z_2, z_3, z_4)$; ainsi

$$|W(z_1, z_2, z_3, z_4)| = \hat{W}(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

De l'invariance des rapports anharmoniques d'un quatuor de droites orientées dans les transformations axiales circulaires nous pouvons conclure que les *transformations axiales circulaires conservent les rapports anharmoniques des angles entre des quatuors de droites (orientées)*. Nous pouvons aussi dire maintenant que *quatre droites (orientées) z_1, z_2, z_3 et z_4 peuvent être transformées par une transformation axiale circulaire, en quatre autres droites w_1, w_2, w_3 et w_4 dans le cas, et dans ce seul cas où la distance tangentielle des cercles $[z_1z_2z_3]$ et $[z_1z_2z_4]$ est égale à la distance tangentielle des cercles $[w_1w_2w_3]$ et $[w_1w_2w_4]$ et où le rapport anharmonique des angles entre z_1, z_2, z_3 et z_4 est égal au rapport anharmonique des angles entre w_1, w_2, w_3 et w_4 .*

Voyons encore la question de la représentation géométrique de toutes les transformations axiales circulaires. L'une des transformations les plus simples de ce genre, distincte des déplacements (22) est la transformation

$$z' = \frac{k}{z} \quad (a) \quad \text{et} \quad z' = \frac{k}{\bar{z}} \quad (b), \quad k \text{ réel}$$

Pour le différent de ± 1 ⁽¹⁾, ces transformations peuvent aussi s'écrire ainsi :

$$\text{Arg } z' = -\text{Arg } z, \quad |z'| = \frac{k}{|z|} \quad (a)$$

et

$$\text{Arg } z' = \text{Arg } z, \quad |z'| = \frac{k}{|z|}. \quad (b)$$

La transformation (25 b) ou (26 b) est la plus simple de ces deux transformations, on l'appelle **inversion axiale de puissance k** ; la droite o s'appelle **axe** de cet inversion. Une inversion axiale de puissance k transforme chaque droite (orientée) z du plan en une droite z' , coupant l'axe d'inversion o en un même point M que z et telle que

$$\text{tg } \frac{\angle \{z, o\}}{2} \cdot \text{tg } \frac{\angle \{z', o\}}{2} = k \quad (27)$$

⁽¹⁾ Pour $k = \pm 1$ les transformations (25 a) et (26 b) sont évidemment des déplacements — ce sont des cas particuliers des transformations (22) pour $p = 0, q = 1$; ainsi la transformation $z' = -1/\bar{z}$ représente une réorientation [voir la formule (21 c)].

(fig. 65 ; il est évident que la droite z' se transforme en z). L'inversion axiale (25 b) transforme la droite $t = p\varepsilon/2$ parallèle à o , à une distance orientée de o $\{o, t\} = p$, en droite $t' = k/\bar{t} = -2k\omega/p$ antiparallèle à o et à une distance de o $\{s, t'\} = p/k$ (tandis qu'elle transforme t' en t) ; en particulier notre transformation transforme l'axe o en droite o_1 qui ne diffère de o que par sa direction, tandis que cette transformation change l'axe o_1 en o . En ce qui concerne la transformation (25 a) on voit ainsi qu'elle est composée d'une inversion axiale (25 b) de puissance k et d'une symétrie (21 a) par rapport au pôle O .

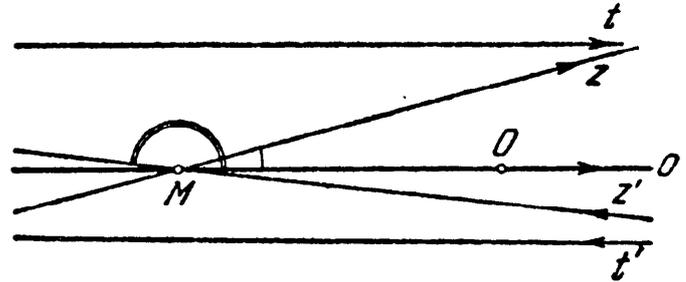


FIG. 65.

Sur le même plan que les déplacements

$$z' = \frac{pz + q}{-\bar{q}z + \bar{p}} \quad (a), \quad z' = \frac{-pz + q}{\bar{q}z + \bar{p}} \quad (b),$$

$$z' = \frac{p\bar{z} + q}{-\bar{q}\bar{z} + \bar{p}} \quad (c) \quad \text{ou} \quad z' = \frac{-\bar{p}z + q}{\bar{q}\bar{z} + \bar{p}} \quad (d) \quad (22)$$

et l'inversion

$$z' = k/\bar{z} \quad (25 b)$$

une autre transformation axiale circulaire intéressante mérite aussi une attention particulière, à savoir

$$z' = \frac{z + q}{-qz + 1}, \quad \text{où} \quad q = \varepsilon \frac{t}{2}, \quad |q| = 0 \quad (28)$$

(cf. le transfert parallèle dans une direction perpendiculaire à l'axe polaire $z' = (z + q)/(qz + 1)$, où $q = \varepsilon t/2$; cf. la formule (32 a), § 9, p. 86). Le sens géométrique de cette transformation est tout à fait simple : elle transforme chaque droite

$$z = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s)$$

en droite

$$\begin{aligned}
 z' &= \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} (1 + \varepsilon s') = \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) + \varepsilon \frac{t}{2}}{-\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon s) \varepsilon \frac{t}{2} + 1} \\
 &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \left[1 + \varepsilon \left(s + \frac{t}{2} \cot \frac{\theta}{2} \right) \right] : \left(1 - \varepsilon \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \\
 &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + \varepsilon) \left[s + \frac{t}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} \right) \right] \\
 &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \left[1 + \varepsilon \left(s + \frac{t}{\sin \theta} \right) \right] a
 \end{aligned}$$

parallèle à z , (car $|z'| = |z|$) et telle que les distances p et p' des droites z et z' du pôle O du système polaire des coordonnées soient liées par la relation [cf. formule (30), § 9, p. 82]

$$p' = s' \sin \theta' = \left(s + \frac{t}{\sin \theta} \right) \sin \theta = s \sin \theta + t = p + t. \quad (29)$$

En d'autres termes la droite z' est parallèle à la droite z , et la distance $\{z, z'\}$ de la droite z à la droite z' , est égale à t (fig. 66). La transformation (28)

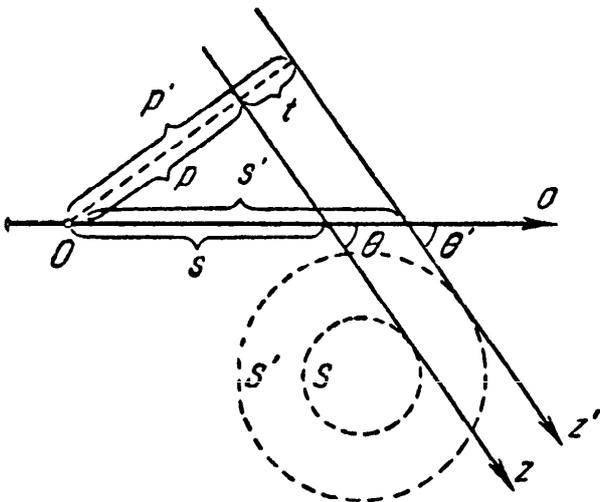


FIG. 66.

s'appelle **extension** (positive ou négative!) par la grandeur t . Il est évident que le cercle (orienté) S de rayon r (positif ou négatif) est transformé par l'extension en un cercle S' concentrique à S de rayon $r + t$; en particulier, les points sont transformés en cercles de rayon t , tandis que les cercles de rayon $-t$ sont transformés en points.

Montrons maintenant que toute transformation axiale circulaire (1) ou (1 a), distincte du déplacement (22) représente le produit d'un déplacement et

d'une inversion axiale ou le produit d'un déplacement et d'une extension. On pourrait s'en assurer par un calcul direct, semblable à celui que nous avons indiqué au § 13, en combinant le déplacement et l'inversion axiale (ou le déplacement et l'extension) dont le produit fournit la transformation axiale

circulaire (1) ou (1 a) donnée. Cependant, comme cette méthode comprend des calculs assez complexes nous donnerons ici la préférence à l'autre méthode.

Remarquons avant tout qu'on peut réaliser une transformation axiale circulaire (1) ou (1 a) par la succession d'un déplacement et d'une inversion axiale dans le cas, et dans ce seul cas où cette transformation transforme au moins une paire de droites z et z_1 ne différant que par leur orientation, en droites z' et z'_1 ne différant aussi que par leur orientation. En effet, supposons qu'une transformation axiale circulaire représente le produit d'un déplacement et d'une inversion axiale d'axe z'_1 ; cette transformation transforme les droites ne différant que par leur orientation en droites z'_1 et z' (où $z' = -1/\bar{z}_1$ ne diffère de z'_1 que par son orientation). Considérons maintenant une transformation axiale circulaire propre arbitraire (1) possédant la propriété de transformer les droites z et $z_1 = -1/\bar{z}$ en droites z' et $z'_1 = -1/\bar{z}'$; supposons

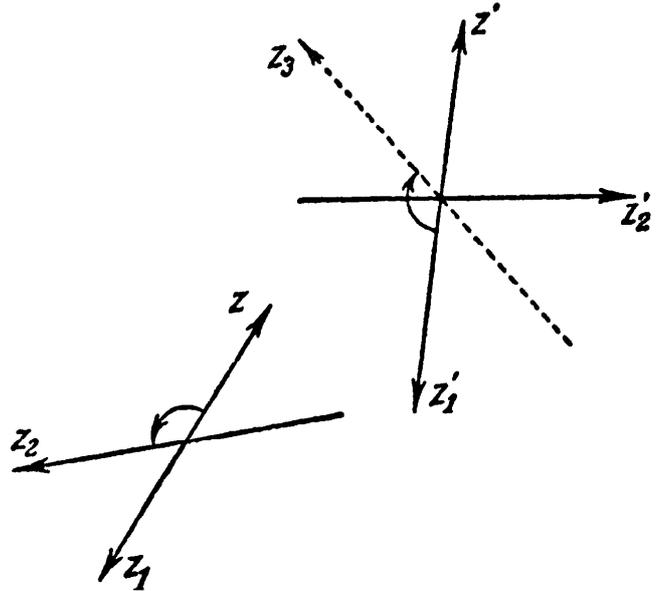


FIG. 67.

encore que cette transformation change la droite z_2 parallèle ni à z ni à z_1 en droite z'_2 (fig. 67 ; z'_2 n'est parallèle ni à z' ni à z'_1 , car les transformations axiales circulaires ne transforment en parallèles que des droites parallèles ⁽¹⁾). Nous affirmons que notre transformation coïncide avec le produit du déplacement « impropre » (22 c, d) qui transfère z en z'_1 , z_1 en z' , et la droite z_2 en une certaine droite z'_3 , coupant z_1 au même point que z'_3 , par l'inversion axiale d'axe z'_1 et de puissance

$$k = \operatorname{tg} \frac{\angle \{ z'_1 z'_2 \}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle \{ z'_1 z'_3 \}}{2} \quad (2).$$

En effet, le produit considéré du déplacement et de l'inversion axiale transforme z en z'_1 , z_1 en z' et z_2 en z'_2 , et il n'existe qu'une seule transformation axiale circulaire propre qui transforme trois droites données non parallèles deux à deux en trois droites déterminées. On démontre aussi exactement de

⁽¹⁾ Voir la note ⁽¹⁾ p. 158.

⁽²⁾ Si la transformation initiale elle-même est un déplacement $k = \pm 1$.

la même façon que si une transformation axiale circulaire (1 *a*) impropre transforme une paire de droites ne différant que par leur orientation en droites ne différant que par leur orientation, elle représente le produit d'un déplacement « impropre » (22 *a, b*) et d'une inversion.

Montrons maintenant *qu'on peut présenter toute transformation axiale circulaire (1) sous la forme du produit d'un déplacement (22 *c, d*) et d'une inversion axiale ou d'un déplacement (22, *a, b*) et d'une extension*. Le premier cas se produit lorsque (1) transforme une paire de droites qui ne diffèrent que par leur orientation z et $z_1 = -1/\bar{z}$ en des droites qui ne diffèrent que par leur orientation

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{et} \quad z'_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{-a + b\bar{z}}{-c + d\bar{z}} = -\frac{1}{\bar{z}'}$$

Ainsi, nous parvenons à l'équation

$$\frac{az + b}{cz + d} = -\frac{-\bar{c} + \bar{d}z}{-\bar{a} + \bar{b}z},$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$(az + b)(-\bar{a} + \bar{b}z) + (cz + d)(-\bar{c} + \bar{d}z) = 0$$

ou

$$Az^2 + 2Bz - \bar{A} = 0, \quad (30)$$

où

$$A = a\bar{b} + c\bar{d}, \quad B = \frac{1}{2}(-a\bar{a} + b\bar{b} - c\bar{c} + d\bar{d}); \quad B \text{ réel} \quad (30 a)$$

Il nous faut établir dans quels cas l'équation (30) a une solution. Supposons en premier lieu que $|A| \neq 0$, c'est-à-dire $A = t(1 + \varepsilon\alpha)$, $t \neq 0$. En posant $z = r(1 + \varepsilon\varphi)$, nous obtenons

$$tr^2(1 + \varepsilon(\alpha + 2\varphi)) + 2Br(1 + \varepsilon\varphi) - t(1 - \varepsilon\alpha) = 0$$

ou

$$[tr^2 + 2Br - t] + [(tr^2 + 2Br - t)\varphi + (tr^2 + t)(\alpha + \varphi)]\varepsilon = 0.$$

D'où l'on voit que le nombre $z = r(1 + \varepsilon\varphi)$ est la solution de (30) où

$$\varphi = -\alpha; \quad tr^2 + 2Br - t = 0, \quad r = -B + \sqrt{B^2 + t^2}.$$

Puis, si $|A| = 0$, mais $A \neq 0$ c'est-à-dire $A = \varepsilon\alpha$, $\alpha \neq 0$, alors en posant $z = \varepsilon\varphi$ on obtient à partir de (30) :

$$2B \cdot \varepsilon\varphi + \varepsilon\alpha = 0;$$

ainsi, si $B \neq 0$, la solution de l'équation (30) a la forme

$$z = -\frac{\alpha}{2B} \varepsilon.$$

Enfin, si $A = 0$, on a comme racine de l'équation (30) :

$$z = 0.$$

Cependant, si $A = \varepsilon\alpha$, où $\alpha \neq 0$ et $B = 0$ en posant $z = r(1 + \varepsilon\varphi)$, nous obtenons :

$$\varepsilon\alpha \cdot r^2 + \varepsilon\alpha = 0,$$

ce qui est impossible quel que soit r ; en posant $|z| = 0$, $z = \varepsilon\varphi$ nous parvenons à l'égalité $\varepsilon\alpha = 0$ qui n'est pas non plus satisfaite. Ainsi, nous arrivons à la conclusion qu'une transformation axiale circulaire (1) ne peut être représentée sous forme du produit d'un déplacement et d'une inversion axiale que dans le cas et dans ce seul cas où

$$a\bar{b} + c\bar{d} \neq 0, \quad |a\bar{b} + c\bar{d}| = 0, \quad a\bar{a} + c\bar{c} = b\bar{b} + d\bar{d} \quad (31)$$

(c'est-à-dire si dans l'équation (30) $A \neq 0$, $|A| = 0$, $B = 0$).

Voyons maintenant dans quel cas la transformation (1) peut être mise sous la forme du produit d'un déplacement et d'une extension. Supposons que (1) soit le produit des transformations (22 a) et (28) ; nous avons

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{z_1 + \varepsilon \frac{t}{2}}{-\varepsilon \frac{t}{2} z_1 + 1}, \quad \text{où} \quad z_1 = \frac{pz + q}{-\bar{q}z + \bar{p}},$$

$$|\Delta| = |p\bar{p} + q\bar{q}| \neq 0.$$

d'où nous obtenons

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\left(p - \varepsilon \frac{t}{2} \bar{q}\right)z + \left(q + \varepsilon \frac{t}{2} \bar{p}\right)}{\left(-\varepsilon \frac{t}{2} p - \bar{q}\right)z + \left(-\varepsilon \frac{t}{2} q + \bar{p}\right)}; \quad (32)$$

c'est pourquoi nous pouvons poser

$$\left. \begin{aligned} a &= p - \varepsilon \frac{t}{2} \bar{q}, & b &= q + \varepsilon \frac{t}{2} \bar{p}, \\ c &= -\varepsilon \frac{t}{2} p - \bar{q}, & d &= -\varepsilon \frac{t}{2} q + \bar{p}. \end{aligned} \right\} \quad (32 a)$$

Des égalités (32 a) il s'ensuit

$$\begin{aligned} a\bar{b} + c\bar{d} &= -\varepsilon t(p^2 + \bar{q}^2) = -\varepsilon t |p^2 + \bar{q}^2| = -\varepsilon t |\Delta| \neq 0, \\ |a\bar{b} + c\bar{d}| &= 0, & a\bar{a} + c\bar{c} &= b\bar{b} + d\bar{d} = p\bar{p} + q\bar{q} = \Delta; \end{aligned}$$

donc, si on peut représenter la transformation (1) par le produit d'un déplacement (22 a) et d'une extension (28), les conditions (31) sont parfaitement remplies.

Soit maintenant, inversement, une transformation (1) telle que les conditions (31) soient satisfaites ; supposons aussi que $|a|$ et $|d|$ ont le même signe. Démontrons que notre transformation peut se mettre sous la forme (32) c'est-à-dire qu'elle représente le produit du déplacement (22 a) et de l'extension (28.) Notons tout d'abord que de (31) il s'ensuit

$$|a\bar{b} + c\bar{d}| = |a| \cdot |b| + |c| \cdot |d| = 0, \quad |a| : |c| = -|d| : |b|$$

et

$$|a|^2 + |c|^2 = |d|^2 + |b|^2;$$

comme nous avons supposé que $|a|$ et $|d|$ ont le même signe il s'ensuit que

$$|a| = |d| \quad \text{et} \quad |c| = -|b|.$$

En vertu de cela et d'après les équations (32 a) on peut définir p , q et t :

$$p = \frac{a + \bar{d}}{2}, \quad q = \frac{b - \bar{c}}{2}, \quad 2 \frac{\bar{d} - a}{\bar{b} - c} = 2 \frac{b + \bar{c}}{\bar{a} + d} = \varepsilon t. \quad (33)$$

Ainsi si les conditions (31) sont remplies et si $|a|$ et $|d|$ ont le même signe, la transformation axiale circulaire (1) peut se représenter sous la forme du produit d'un déplacement (22 a) et d'une extension (28). On démontre exactement

de la même façon que la condition nécessaire et suffisante pour pouvoir représenter les transformations (1) sous forme de produit d'un déplacement (22 b) et d'une extension (28) consiste en ce que soient satisfaites les conditions (32) et les égalités

$$|a| = -|d|, \quad |c| = |b|$$

(nous parvenons à ces égalités en supposant que $|a|$ et $|d|$ ont des signes différents).

Nous avons constamment parlé plus haut de transformation axiale circulaire propre (1) seulement par souci de précision. Tous les raisonnements exposés s'appliquent aussi presque sans changement au cas où la transformation axiale circulaire initiale est impropre ; les conditions pour que la transformation (1 a) représente le produit d'un déplacement (22 c-d) et d'une extension (28) ont la même forme (31). Ainsi on peut *affirmer que toute transformation circulaire axiale (1) ou (1 a) qui ne satisfait pas aux conditions (31) peut se représenter par le produit d'un déplacement (22) et d'une inversion axiale ; par contre dans le cas où les conditions (31) sont remplies, la transformation (1) ou (1 a) représente le produit d'un déplacement (22) et d'une extension.*

Nous avons déjà noté (voir p. 157) que les *transformations axiales circulaires forment un groupe*. Ce fait permet de considérer l'étude des propriétés des figures, qui se conservent au cours de toutes ces transformations comme une division spéciale de la géométrie. On peut donner à cette division le nom de **géométrie axiale circulaire**. Dans le paragraphe suivant nous citons une série d'exemples de théorèmes qu'on peut classer dans la géométrie circulaire axiale.

§ 16*. APPLICATIONS ET EXEMPLES

Pour que quatre droites (orientées) données z_1, z_2, z_3 et z_4 du plan puissent être transformées par une transformation axiale circulaire en quatre autres droites w_1, w_2, w_3 et w_4 (condition de l'« égalité » de ces quatuors de droites au sens de la géométrie axiale circulaire) il faut comme nous le savons que la distance tangentielle des cercles $[z_1z_2z_3]$ et $[z_1z_2z_4]$ soit égale à la distance tangentielle des cercles $[w_1w_2w_3]$ et $[w_1w_2w_4]$ et que le rapport

anharmonique des angles entre les droites z_1, z_2, z_3 et z_4 soit égal au rapport anharmonique des angles entre les droites w_1, w_2, w_3 et w_4 :

$$([z_1z_2z_3], [z_1z_2z_4]) = ([w_1w_2w_3], [w_1w_2w_4])$$

et

$$\hat{W}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \hat{W}(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

(voir p. 162). Mais comme

$$\begin{aligned} \{ [z_1z_2z_3]z_1[z_1z_2z_4] \} &= \frac{1}{2} \{ [z_1z_3], [z_2z_3] \} + \\ &\quad \{ [z_2z_4], [z_1z_4] \} - \{ [z_4z_1], [z_3z_1] - \{ [z_3z_2], [z_4z_2] \} \} \end{aligned}$$

et

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_3z_1 \} \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_4z_2 \} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_3z_2 \} \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_4z_1 \} \right)},$$

Nous obtenons en particulier : *un quadrilatère convexe $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ ⁽¹⁾ peut être transformé par une transformation axiale circulaire en un autre quadrilatère convexe $\overline{w_1w_2w_3w_4}$ lorsque et seulement lorsque la différence*

$$(\{ AB \} + \{ CD \}) - (\{ DA \} + \{ BC \}), \quad (\text{où } A \equiv [z_1z_3],$$

$$B \equiv [z_2z_3], C \equiv [z_2z_4], D \equiv [z_1z_4])$$

entre les sommes des côtés opposés du 1^{er} quadrilatère est égale à la différence des sommes des côtés opposés du deuxième quadrilatère et lorsque le rapport

$$\frac{\sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_3z_1 \} \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_4z_2 \} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_3z_2 \} \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_4z_1 \} \right)}$$

des produits des sinus de la moitié des angles opposés du premier quadrilatère est égal aux produits des sinus de la moitié des angles opposés du deuxième

(1) On appelle ici un quadrilatère — convexe —, $\overline{z_1z_2z_3z_4}$, un quadrilatère qui est entièrement situé d'un seul côté (à gauche ou à droite) de chacun de ses côtés z_1, z_2, z_3 et z_4 . [Notons que les angles $\angle \{ z_1z_3 \}$, $\angle \{ z_1z_4 \}$ et les autres coïncident avec les angles externes du quadrilatère compris dans le sens ordinaire.]

quadrilatère. D'où il s'ensuit que tout quadrilatère convexe peut, par une transformation axiale circulaire, être transformé en parallélogramme ; avec cela, si un cercle peut être inscrit dans le quadrilatère de départ, ce parallélogramme sera un losange ; si les produits des sinus des demi-angles opposés du quadrilatère sont égaux, le parallélogramme sera un rectangle ; enfin, si les deux conditions sont remplies ensemble, le quadrilatère peut par une transformation circulaire axiale être transformé en carré. Ainsi, le quadrilatère harmonique (voir § 10, chap. II, p. 109-110) peut être caractérisé comme celui qui peut être transformé en carré par une transformation axiale circulaire (comme celui qui « est égal » à un carré au sens de la géométrie axiale circulaire). De ce qui a été dit il s'ensuit que toutes les « propriétés axiales circulaires, disons, d'un quadrilatère harmonique (les propriétés qui se conservent au cours de transformations axiales circulaires) coïncident avec les propriétés correspondantes du carré ; les propriétés axiales circulaires du quadrilatère où est inscrit le cercle $\overline{z_1z_2z_3z_4}$ coïncident avec les propriétés du losange, etc... cette circonstance peut être utilisée pour déduire une série de propriétés des quadrilatères (cf. § 14, p. 146 et suivantes) ; cependant nous laissons le lecteur faire cela lui-même.

Voici encore un exemple de théorème pour la démonstration duquel peuvent être utilisées les transformations axiales circulaires : si quatre cercles (orientés) S_1, S_2, S_3 et S_4 tels que S_1 et S_3 soient tangents à S_2 et S_4 , les tangentes communes w_1, w_2, w_3 et w_4 aux cercles S_1 et S_2, S_2 et S_3, S_3 et S_4, S_4 et S_1 menées à leurs points de contact, sont tangentes à un seul cercle

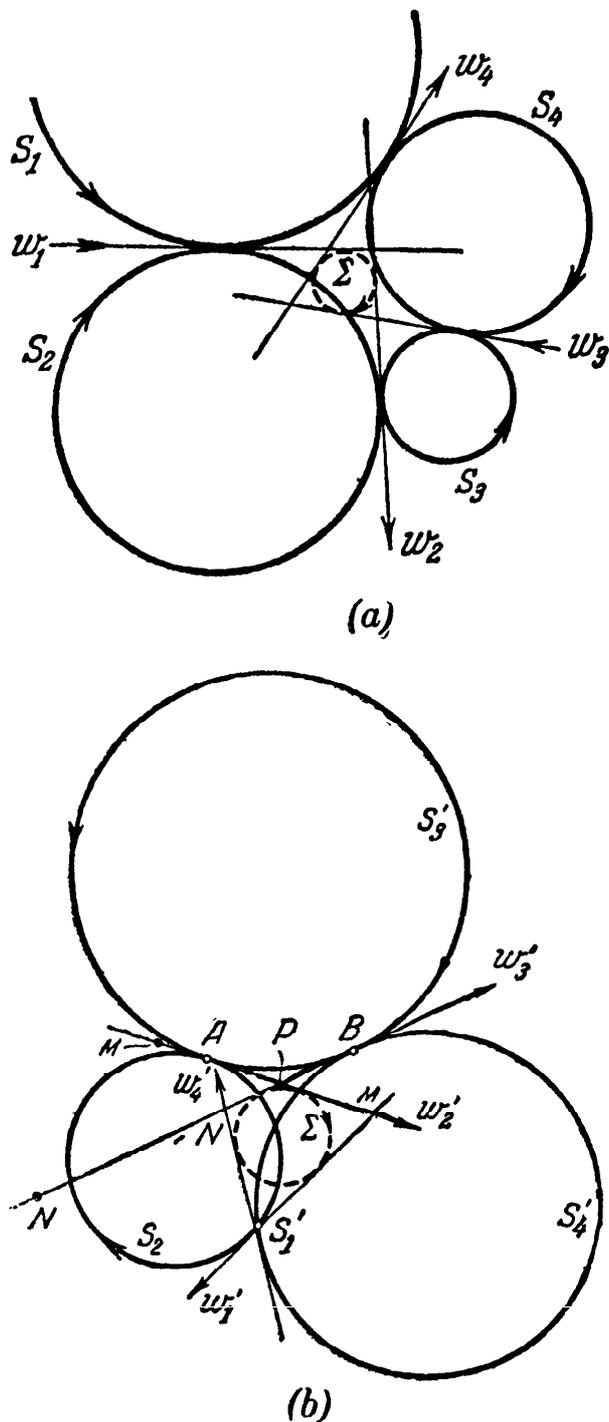


FIG. 68.

Σ (fig. 68 *a* ; cf. p. 153, en particulier, fig. 62, *a*). Pour la démonstration, transformons le cercle S_1 en point S'_1 ; supposons avec cela que S_2, S_3 et S_4 soient transformés en cercles S'_2, S'_3 et S'_4 , tandis w_1, w_2, w_3 et w_4 en droites w'_1, w'_2, w'_3 et w'_4 . Les points de tangence des cercles S'_2 et S'_3, S'_3 et S'_4 nous les désignons par A et B , et les points d'intersection des droites w'_2 et w'_3 avec les droites w'_1 et w'_4 et entre elles respectivement par M, N et P (fig. 68, *b*).

D'après la propriété connue des tangentes à un cercle nous avons

$$\{ S'_1, M \} = \{ M, A \}, \{ B, N \} = \{ N, S'_1 \}, \{ B, P \} = \{ P, A \}.$$

En additionnant les deux premières de ces égalités et en soustrayant leur somme de la troisième, nous obtenons

$$\{ S'_1, M \} + \{ P, N \} = \{ M, P \} + \{ N, S'_1 \},$$

d'où il s'ensuit que l'on peut inscrire le cercle Σ dans le « quadrilatère » S'_1MPN (c'est-à-dire qu'il existe un cercle Σ' tangent à quatre droites orientées w'_1, w'_2, w'_3 et w'_4 ; cf. p. 95).

Passons maintenant au problème du lien entre l'inversion axiale et la notion de puissance d'une droite (orientée) par rapport à un cercle (orienté), lien qui nous permet de donner une description « géométrique » de la transformation d'inversion. Nous avons appelé plus haut le rapport des coefficients extrêmes de l'équation (19) :

$$C/A = k ; \tag{18}$$

puissance du cercle S représenté par l'équation

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \tag{19}$$

[ou plus exactement **puissance de la droite o par rapport au cercle** (19)].

Cette puissance est un nombre réel (ou le « nombre » ∞ ; la puissance k est égale à ∞ si $A = 0$). En particulier comme aux pages 154-155, on montre que l'inversion axiale de puissance k

$$z' = \frac{k}{z} \tag{25 b}$$

transforme S en lui-même. D'où il s'ensuit que si z_0 et z'_0 sont deux tangentes (orientées) au cercle S , se coupant au point M de l'axe o

$$z'_0 = \frac{k}{z_0}, \quad \bar{z}_0 \cdot z'_0 = k$$

(puisque ces droites se correspondent l'une à l'autre dans l'inversion (25 b) et donc

$$\operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z_0\}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z'_0\}}{2} = k; \quad (34)$$

les tangentes t_0 et t'_0 , parallèle et antiparallèle à o , au cercle S sont telles que

$$\bar{t}_0 \cdot t'_0 = k \quad \text{ou} \quad \frac{i \{o, t_0\}}{\{o, t'_0\}} = -k \quad (34 a)$$

(fig. 69). Ainsi, nous arrivons de nouveau à la définition donnée dans le § 10, chap. II (p. 101) de la puissance k du cercle S comme étant le produit (34) où z_0 et z'_0 sont les deux tangentes (orientées) à S menées à ce cercle par un quelconque des points M de l'axe o (n'importe lequel!).

L'ensemble de tous les cercles (19) transformés en eux-mêmes par une inversion (25 b) de puissance fixe k , c'est-à-dire l'ensemble des cercles ayant un seul et même degré k

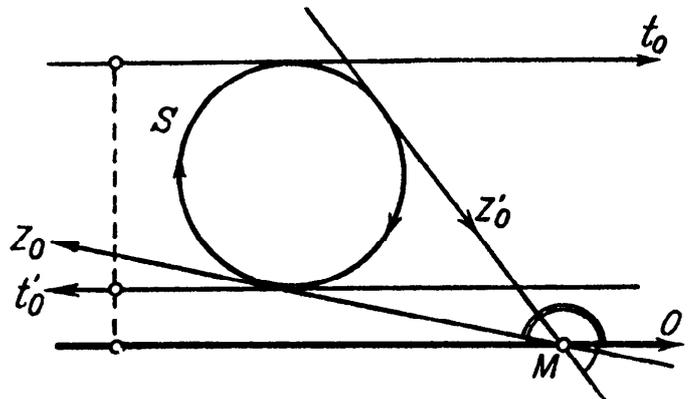


FIG. 69.

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + Ak = 0 \quad (19 a)$$

s'appelle un **faisceau de cercles** ; le nombre k s'appelle **puissance** du faisceau, et la droite o son axe. Puisque la puissance de S (puissance de o par rapport à S) est égale à $(r - d)/(r + d)$ où r est le rayon (positif, nul ou négatif) de S , d la distance (positive nulle ou négative) du centre de S à o [cf. § 10, chap. II, en particulier la formule (45), p. 102], le faisceau comprend toutes les droites (orientées) d'un plan, pour lesquelles

$$\frac{r - d}{r + d} = k \quad \text{ou} \quad \left(\frac{r}{d} = \frac{1 + k}{1 - k} \right).$$

En particulier, pour k positif le faisceau représente l'ensemble des cercles, coupant o sous un angle constant φ tel que $\operatorname{tg}^2 \varphi/2 = k$ (car la puissance du cercle S coupant o sous l'angle φ est égale à $\operatorname{tg}^2 \varphi/2$) ; pour $k = 0$ le réseau consiste en tous les cercles tangents à o ; pour $k = \infty$ le réseau consiste en tous les cercles antitangents à o ; pour k négatif le réseau consiste

en tous les cercles que l'on voit du pied de la perpendiculaire abaissée sur o du centre du cercle, sous un angle constant ψ , tel que $\text{tg}^2(\psi/4) = k$ (fig. 70 *a-d* ; cf. plus haut p. 102-103).

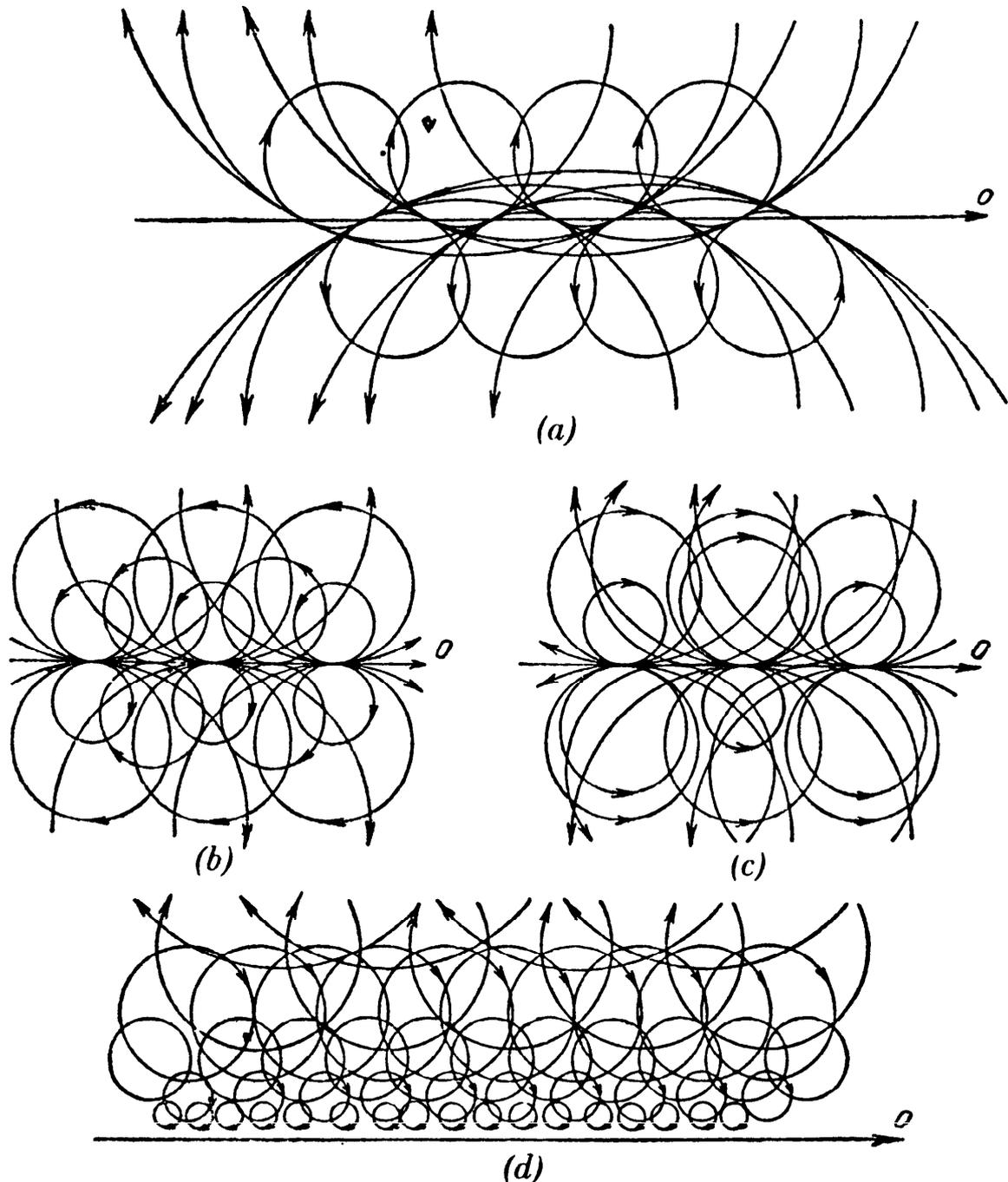


FIG. 70.

Tournons-nous maintenant vers l'inversion axiale d'axe o et de puissance k . Choisissons un cercle Σ (n'importe lequel) du faisceau d'axe o et de puissance k ; appelons ce cercle **cercle directeur** de notre inversion axiale (ainsi l'inversion axiale a une infinité de cercles directeurs). Il découle de

la définition de l'inversion axiale que si z et z' sont les droites correspondant l'une à l'autre dans cette inversion, on a

$$\operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z\}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle \{o, z'\}}{2} = k$$

ou (si z est parallèle, et z' antiparallèle à o)

$$\frac{\{o, z\}}{\{o, z'\}} = -k.$$

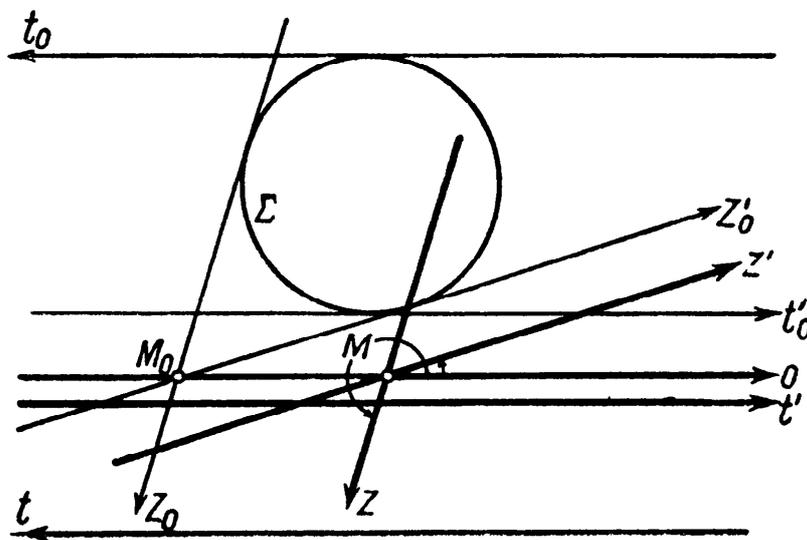


FIG. 71.

D'autre part pour les tangentes z_0 et z'_0 aux cercles Σ coupant l'axe o au point M_0 et pour les tangentes t_0 et t'_0 ne coupant pas o , on a les relations (34) et (34 a). D'où il s'ensuit que pour construire l'image z' de la droite z dans l'inversion (25 b), il suffit de mener la tangente z_0 parallèle à z au cercle Σ , puis la tangente z'_0 à ce même cercle, coupant o au même point que z_0 , et enfin la droite z' parallèle à z'_0 coupant o au même point que z (ou si z ne coupe pas o mener la tangente $t_0 \parallel z$ au cercle Σ ; puis la tangente t'_0 à ce même cercle, elle aussi ne coupant pas o , et enfin la droite $z' \parallel t'_0$ telle que

$$\frac{\{o, z\}}{\{o, z'\}} = \frac{\{o, t_0\}}{\{o, t'_0\}},$$

(voir fig. 71). Cette description de la construction de la droite z' à partir de la droite z peut être prise comme une définition de l'inversion axiale (donnée par l'axe o et le cercle orienté Σ).

La description géométrique de l'inversion axiale et le théorème suivant lequel chaque transformation axiale circulaire représente le produit d'un déplacement et d'une inversion axiale ou d'un déplacement et d'une extension (voir § 15, p. 165) permettent de donner une signification géométrique assez concrète d'une transformation axiale circulaire. En particulier, la multiplication d'un nombre dual z par un nombre fixe p

$$z' = pz \tag{5 b}$$

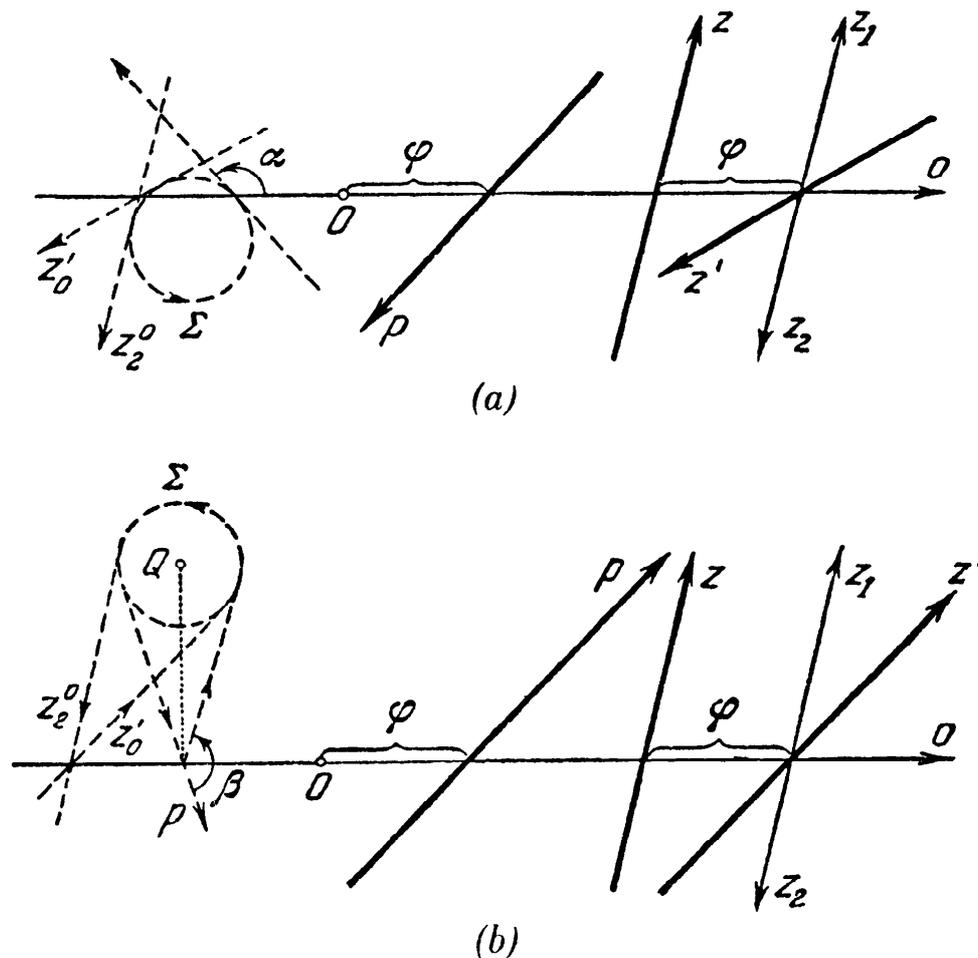


FIG. 72.

pour p réel, représente le produit d'une réorientation (21 c) et d'une inversion axiale (25 b) de puissance $k = -p$:

$$z_1 = -\frac{1}{\bar{z}}; \quad z = -p/\bar{z}_1.$$

Si par contre $p = r(1 + \varepsilon\varphi)$, la transformation (5 b) se réduit à un transfert parallèle $z_1 = (1 + \varepsilon\varphi)z$ dans la direction de l'axe o sur une distance φ ,

une réorientation $z_2 = -1/\bar{z}_1$ et une inversion axiale $z' = -r/\bar{z}_2$ de puissance $-r$.

$$z' = -\frac{r}{\bar{z}_2} = rz_1 = r(1 + \varepsilon\varphi)z$$

(« représentation géométrique de la multiplication des nombres duals » ; voir fig. 72 *a* et *b*, sur lesquelles $\operatorname{tg}^2(\alpha/2) = -r$, et respectivement $\operatorname{tg}^2(\beta/4) = r$). De façon analogue, on peut décrire aussi la transformation $z' = z + q$ (c'est-à-dire donner une interprétation géométrique à l'addition des nombres duals) ; nous laissons le lecteur le faire.

§ 17**. TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES DU PLAN DE LOBATCHEWSKY

L'interprétation géométrique des nombres complexes ordinaires qui a été exposée dans le § 11, chap. II, permet de considérer les transformations homographiques (propres et impropres) comme des transformations dans l'ensemble des points orientés du plan de Lobatchewsky. De la propriété d'invariance du rapport anharmonique

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}$$

(voir plus haut p. 133-134) et de la condition, introduite au § 11, d'appartenance de quatre points (orientés) à un seul cycle (orienté) s'ensuit que ces transformations *transforment chaque cycle (orienté) de Lobatchewsky à nouveau en cycle* ⁽¹⁾ — circonstance qui permet d'appeler les transformations (1) et (1 *a*) **transformations circulaires (propres et impropres) du plan de Lobatchewsky** ⁽²⁾. Comme dans le paragraphe 13 on démontre qu'il n'existe qu'une seule transformation circulaire propre (et une seule improprie) qui transforme trois points donnés z_1, z_2, z_3 en trois autres points déterminés

⁽¹⁾ Ceci, d'ailleurs, découle d'emblée de la propriété correspondante des transformations circulaires de la surface euclidienne et le fait que les cycles de la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky sont représentés par des cercles de la surface euclidienne.

⁽²⁾ On appelle aussi quelquefois ces transformations transformations de Moebius du plan de Lobatchewsky.

w_1, w_2, w_3 . Cependant quatre points (orientés) du plan de Lobatchewsky peuvent être transformés en quatre autres points déterminés w_1, w_2, w_3, w_4 dans le cas, et dans ce seul cas où

$$W(w_1, w_2, w_3, w_4) = W(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

$$\text{ou} \quad W(w_1, w_2, w_3, w_4) = \overline{W(z_1, z_2, z_3, z_4)}. \quad (9)$$

Précisons maintenant le sens géométrique du rapport anharmonique de quatre points. Il est facile de comprendre que

$$\text{Arg } W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \angle \{ [z_1 z_2 z_4] z_1 [z_1 z_2 z_3] \},$$

où

$$\angle \{ [z_1 z_2 z_4] z_1 [z_1 z_2 z_3] \}$$

est l'angle orienté que forment au point z les angles $[z_1 z_2 z_4]$ et $[z_1 z_2 z_3]$ qui passent respectivement par les points z_1, z_2, z_4 et z_1, z_2, z_3 ⁽¹⁾. On peut montrer ensuite que :

$$|W(z_1, z_2, z_3, z_4)| = \frac{\text{sh} \left(\frac{1}{2} \{ z_3 z_1 \} \right)}{\text{sh} \left(\frac{1}{2} \{ z_3 z_2 \} \right)} : \frac{\text{sh} \left(\frac{1}{2} \{ z_4 z_1 \} \right)}{\text{sh} \left(\frac{1}{2} \{ z_4 z_2 \} \right)},$$

où, par exemple $\{ z_3 z_1 \}$ est la distance entre les points orientés z_3 et z_1 (qui peuvent aussi être imaginaires ; voir § 11, chap. II). Il est logique de désigner l'expression qui est à droite, dans la dernière formule par un signe spécial, par exemple $\overset{*}{W}(z_1, z_2, z_3, z_4)$; nous l'appellerons *rapport anharmonique des distances entre les points z_1, z_2, z_3 et z_4* (cf. § 13, p. 137). Ainsi de la propriété d'invariance du rapport anharmonique de quatre points s'ensuit que les *transformations circulaires du plan de Lobatchewsky conservent les angles*

(1) En d'autres termes,

$$\angle \{ [z_1 z_2 z_4] z_1 [z_1 z_2 z_3] \}$$

est l'angle (orienté) entre les tangentes aux cycles $[z_1 z_2 z_4]$ et $[z_1 z_2 z_3]$ au point z_1 . La démonstration de la proposition correspondante découle immédiatement de ce qui a été dit au § 13 (p. 136-137) au sujet du sens géométrique de l'arg $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$, où z_1, z_2, z_3, z_4 sont quatre points arbitraires de la surface euclidienne, et du fait que les cycles du plan de Lobatchewsky sont représentés par des cercles euclidiens, de plus l'angle entre les cycles qui se coupent est égal à l'angle entre les cercles qui les représentent.

entre les cycles (orientés) ⁽¹⁾ et conservent les rapports anharmoniques de la distance entre les points, ce qui permet d'utiliser ces transformations dans de nombreux problèmes.

Arrêtons-nous encore sur le problème de la description géométrique de toutes les transformations circulaires du plan de Lobatchewsky. Notons tout d'abord que toute transformation homographique (1) ou (1 a) du plan de Lobatchewsky qui transforme en lui-même l'absolu $z\bar{z} = 1$ est un déplacement ⁽²⁾

$$z' = \frac{pz + q}{\bar{q}z + \bar{p}} \quad \text{ou} \quad z' = \frac{pz + q}{\bar{q}\bar{z} + \bar{p}}, \quad \Delta = \left| \frac{p}{q} \frac{q}{p} \right| \neq 0 \quad (35)$$

(on compte ici au nombre des déplacements aussi la « réorientation des points » $z' = 1/\bar{z}$). D'où il s'ensuit que deux représentations quelconques transformant un seul et même cycle S en absolu Σ ne diffèrent que par un déplacement (c'est-à-dire que chacune de ces deux transformations représente le produit de l'autre transformation et d'un déplacement) ; c'est pourquoi la classification de toutes les transformations circulaires du plan de Lobatchewsky revient à rechercher certaines transformations « typiques » qui transforment en Σ , un cercle, une ligne limite ; une équidistante (en particulier une ligne droite).

Un exemple d'une transformation qui transforme en absolu Σ un cercle S de centre O et de rayon ρ (équation du cercle)

$$z\bar{z} = k^2 = \text{th}^2 \frac{\rho}{2}$$

est fourni par l'inversion de première espèce

$$z' = k/\bar{z}. \quad (36)$$

Cette transformation change chaque diamètre du cercle S en lui-même. La transformation (36) transforme chaque point intérieur au cercle S , orienté

⁽¹⁾ D'où il s'ensuit que toute transformation circulaire du plan de Lobatchewsky conserve les angles entre des lignes arbitraires, c'est-à-dire est une transformation conforme (ce qui d'ailleurs découle d'emblée de la conformité des transformations circulaires de la surface euclidienne et de ce que l'angle « non euclidien » entre les lignes arbitraires est égal à l'angle ordinaire entre leurs représentations sur le modèle de Poincaré).

⁽²⁾ Cf. A. I. MARKOUCHEVITCH, *Éléments d'une théorie des fonctions analytiques*. M, 1944, p. 513-514.

comme O , en un point z' du rayon Oz , d'orientation contraire à O , tel que les distances r et r' de ces points à O soient liées par la relation

$$\operatorname{th} \frac{r}{2} : \operatorname{th} \frac{r'}{2} = k = \operatorname{th} \frac{\rho}{2}$$

(et transforme le point z' en z) ; ainsi, chaque rayon OM du cercle S (M , point du cercle) « s'étend » sur tout le rayon OM . La transformation (36)

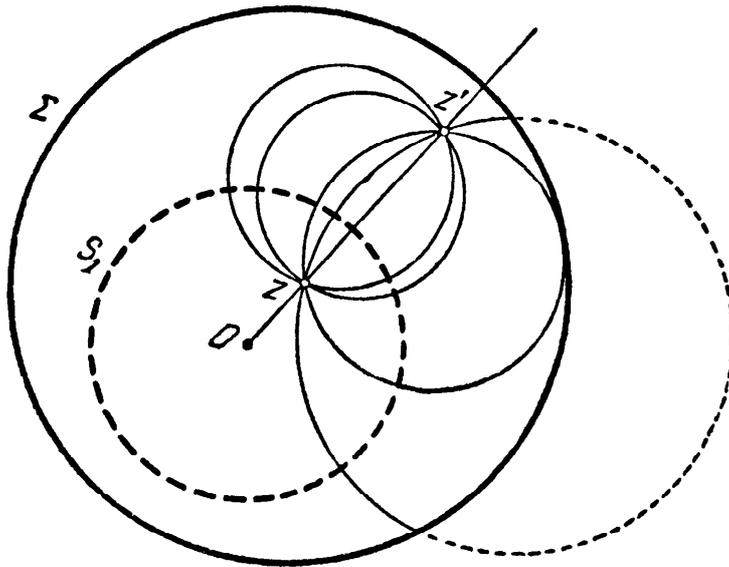


FIG. 73.

transforme le point z extérieur par rapport au cercle, orienté comme O , en un point z' du rayon Oz tel que les distances z et r' des points z et z' à O soient liées par la relation

$$\operatorname{th} \frac{r}{2} \cdot \operatorname{th} \frac{r'}{2} = k = \operatorname{th} \frac{\rho}{2}$$

(z et z' sont pareillement orientés) ; ainsi le segment du rayon OM extérieur par rapport au cercle se change en lui-même, de plus le point M passe au point infiniment éloigné et le point infiniment éloigné passe au point M .

On peut encore décrire autrement la transformation (36). On voit facilement que cette transformation transforme en lui-même le cercle S_1 d'équation

$$z\bar{z} = k = \operatorname{th}^2 \frac{\rho_1}{2},$$

c'est-à-dire le cercle dont le rayon ρ_1 est défini par la relation $\text{th } \rho/2 = \text{th}^2 \rho_1/2$. De plus chaque point z se change en un point z' du rayon Oz tel que

$$\text{th} \left(\frac{1}{2} \{ Oz \} \right) \cdot \text{th} \left(\frac{1}{2} \{ Oz \} \right) = \text{th}^2 \frac{\rho_1}{2};$$

autrement dit, chaque point z passe en un point z' tel que tous les cycles perpendiculaires à S_1 de la géométrie non euclidienne de Lobatchewsky qui passent par z , passent aussi par z' (fig. 73) cf. note (1) p. 139. Cette dernière circonstance permet d'appeler la transformation (36) : **symétrie par rapport au cercle S_1** .

Un exemple de transformation circulaire qui transforme une ligne limite S d'équation

$$2z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 0,$$

est donné par l'inversion de deuxième espèce

$$z' = \frac{i\bar{z} + 1}{3\bar{z} + i}. \quad (37)$$

Cette transformation transforme chaque diamètre de la ligne limite en lui-même. Chaque point z situé à l'intérieur de la ligne limite, orienté comme les points de la ligne elle-même (c'est-à-dire comme le point O) se change ainsi en un point z' , d'orientation contraire à z , tel que les distances orientées d et d' , mesurées par rapport au diamètre $[zz']$, des points z et z' de la ligne S sont liées par la relation

$$\cot \frac{\bar{d}}{2} - \cot \frac{\bar{d}'}{2} = 1$$

(ici \bar{d} est l'angle de parallélisme, correspondant au segment d), et le point z' passe en z ; ainsi le rayon du diamètre intérieur à S « s'étend » sur toute la droite. La transformation (37) transforme le point z , orienté comme le point S , en un point z' , tel que les distances d et d' des points z et z' à S soient liées par la relation

$$\cot \frac{\bar{d}}{2} + \cot \frac{\bar{d}'}{2} = 1$$

(z et z' sont pareillement orientés) ; ainsi un rayon du diamètre extérieur à S se change en lui-même, de plus le point M de la ligne S passe au « point infiniment éloigné » et « le point infiniment éloigné » passe en M .

On peut encore décrire autrement la transformation (37). Il n'est pas difficile de voir que cette transformation transforme en elle-même la ligne limite S_1 , définie par l'équation

$$3z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0 ;$$

enfin, chaque point z passe en un point z' tel que tous les cycles perpendiculaires à la ligne S_1 et passant par le point z , passent aussi par le point z' (fig. 74). La transformation (37) peut s'appeler **symétrie par rapport à la ligne limite S_1** .

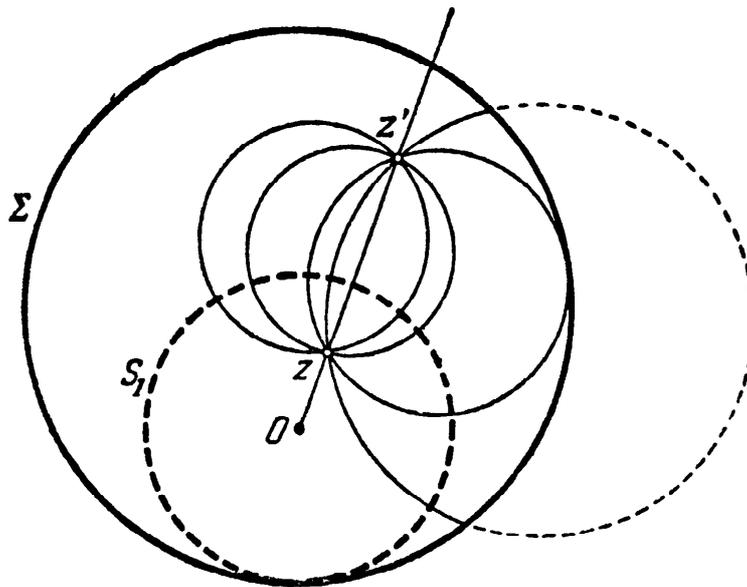


FIG. 74.

Un exemple de transformation circulaire transformant l'équidistante S d'axe o , et de distance des points S à l'axe (largeur de l'équidistante) h , en absolu est donné par une inversion de troisième espèce

$$z = \frac{-(1 - \alpha) i\bar{z} + (1 + \alpha)}{(1 + \alpha)\bar{z} - (1 - \alpha) i}, \quad \alpha = \operatorname{th} \frac{h}{2}. \quad (38)$$

Cette transformation transforme en lui-même chaque diamètre de l'équidistante. Avec cela le segment PM du diamètre compris entre l'axe et l'équidistante dont les points sont orientés comme le point M de l'équidistante s'étend sur un rayon infini limité par le point M_1 du diamètre tel que $M_1P = h_1$ soit un segment complémentaire du segment $MP = h$, c'est-à-dire que les angles h et h_1 soient complémentaires ($h + h_1 = \pi/2$) : si d et d' sont les distances du point z du segment considéré et de son image z' , à l'axe o de l'équidistante :

$$\bar{d} - \bar{d}' = \bar{h}$$

(la barre sur le segment représente comme précédemment l'angle de parallélisme, les orientations des points z et z' sont opposées ; z' inversement passe en z). Le rayon du diamètre situé en dehors de l'équidistante, limité par le point M , se change lui-même, de plus M passe au « point infiniment éloigné », tandis que « le point infiniment éloigné » passe en M ; si d et d' sont les distances du point z de ce rayon et de son image z' à l'axe o . On a

$$\bar{d} + \bar{d}' = \bar{h}$$

(z et z' sont orientés comme le point M de l'équidistante). Enfin les points du segment PM_1 orientés inversement à M se transforment en les points d'un segment PM'_1 qui lui est égal, situé de l'autre côté de l'axe ; si d et d' sont les distances correspondant l'une à l'autre dans les transformations (38) des points z et z' des segments PM et $P'M$ à l'axe o , on a

$$\bar{d} + \bar{d}' = \bar{h}_1$$

(d est considéré comme positif, l'orientation des points z et z' est opposée).

En posant, en particulier, la largeur h de l'équidistante égale à zéro nous obtenons la transformation

$$z' = \frac{-i\bar{z} + 1}{\bar{z} - i}, \quad (39)$$

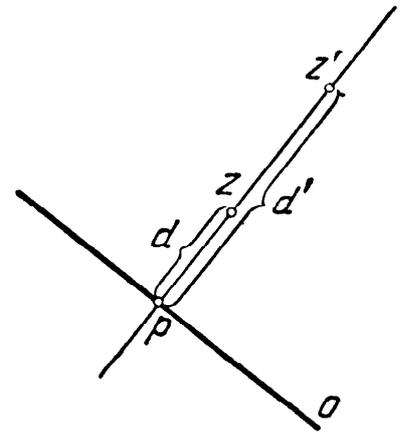


FIG. 75.

qui transforme en absolu la droite o du plan de Lobatchewsky. Cette transformation transforme en elle-même chaque droite perpendiculaire à o . De plus le point z du rayon de cette droite limité par le point p de la droite o passe, suivant son orientation, soit au point z' de ce même rayon (si les distances non euclidiennes (p, z) et (p, z') sont égales à d et d' :

$$\bar{d} + \bar{d}' = \pi/2,$$

c'est-à-dire que d et d' sont des segments complémentaires (fig. 75), soit en un point z' du deuxième rayon de cette droite (de plus dans ce cas les segments \overline{pz} et $\overline{pz'}$ sont complémentaires). Le géomètre allemand Heinrich Liebman parvint le premier à cette transformation à partir de considérations tout à fait différentes ⁽¹⁾ :

⁽¹⁾ Cette transformation a été étudiée en détail dans le livre de V.F. KAGAN, *Fondements de la géométrie*, 1^{re} partie, M. L., 1949, § 34. Notons que V. F. Kagan, comme Libman lui-même, n'utilise pas de points orientés ce qui complique un peu l'exposé.

La transformation (38) transforme en elle-même l'équidistante S_1 d'équation

$$e^h z\bar{z} - iz + i\bar{z} - e^h = 0,$$

c'est-à-dire l'équidistante d'axe o et de largeur h_1 telle que $\text{sh } h_1 = e^h$; elle transforme chaque point z du plan en un point z' tel que toutes les perpendiculaires du cycle S_1 passant par z passent aussi par z' (fig. 76). Il est naturel d'appeler cette transformation **symétrie par rapport à l'équidistante S_1** . En particulier, la transformation de Liebman (39) représente une symétrie par rapport à l'équidistante de largeur h_1 , où $\text{sh } h_1 = 1$.

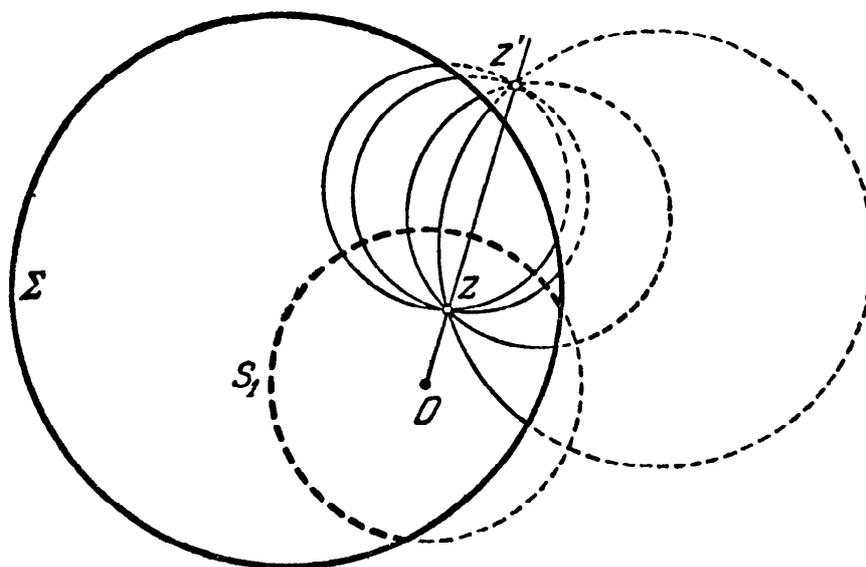


FIG. 76.

Ainsi, une classification complète des transformations circulaires du plan de Lobatchewsky est donnée par le théorème suivant :

Chaque transformation du plan de Lobatchewsky représente soit un déplacement, soit un déplacement accompagné d'une symétrie par rapport à un certain cycle S_1 (inversions de première, deuxième ou troisième espèce).

Remarquons aussi que chaque transformation homographique (circulaire) du plan des nombres complexes fournit une modification déterminée du modèle de Poincaré de la géométrie de Lobatchewsky. En effet, soit un point A sur un modèle de Poincaré initial du plan de Lobatchewsky représenté par le point z (nombre complexe). Nous obtenons la modification indiquée du modèle de Poincaré en convenant de représenter un point A du plan de Lobatchewsky non par le point z , mais le point z' (nombre complexe), en lequel notre transformation change le point z . Les propriétés des transformations circulaires per-

mettent d'affirmer que les cycles seront aussi représentés par des cercles du plan des nombres complexes et l'« angle non euclidien » entre les cycles sera égal à l'angle (ordinaire) entre les cercles qui représentent ces cercles dans le « modèle de Poincaré modifié » obtenu de cette façon. En particulier, ce qu'on appelle la transformation de Kiel

$$z' = \frac{iz + i}{-z + 1}, \quad (40)$$

qui transforme le cercle $z\bar{z} = 1$ en axe réel $z - \bar{z} = 0$, connecte « le modèle de Poincaré à l'intérieur du cercle unité » avec « le modèle de Poincaré sur le demi-plan » (voir § 11, chap. II, p. 117-118).

§ 18**. TRANSFORMATIONS AXIALES CIRCULAIRES DU PLAN DE LOBATCHEWSKY

Considérons maintenant les transformations homographiques

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

et

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad (1 a)$$

où z et z' sont des nombres doubles; de plus comme précédemment nous supposons que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

n'est pas un diviseur de zéro. En vertu de ce qui a été dit au § 12, chap. II, on peut interpréter ces transformations comme des transformations dans l'ensemble des **droites orientées** du plan de Lobatchewsky. Exactement comme précédemment de la propriété d'invariance du rapport anharmonique

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

et de la condition indiquée au § 12 de l'appartenance de quatre droites orientées z_1, z_2, z_3, z_4 à un seul cycle s'ensuit que *les transformations* (1)

et (1 a) transforment chaque cycle du plan de Lobatchewsky à nouveau en un cycle ; en vertu de ceci il est normal d'appeler ces transformations : **transformations axiales circulaires (propres et impropres)** du plan de Lobatchewsky (1).

Le rapport anharmonique de quatre droites (orientées) z_1, z_2, z_3 et z_4 est l'invariant fondamental des transformations axiales circulaires ; plus exactement, si la transformation (1) ou (1 a) transforme les droites z_1, z_2, z_3 et z_4 en droites z'_1, z'_2, z'_3 et z'_4 on a

$$W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = W(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

ou

$$W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = \overline{W(z_1, z_2, z_3, z_4)}. \quad (9)$$

Il est facile de préciser le sens géométrique de l'expression $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Et notamment l'argument $\text{Arg } W$ du rapport anharmonique est égal à la distance tangentielle orientée $\{[z_1 z_2 z_4] z_1 [z_1 z_2 z_3]\}$, mesurée par rapport à la tangente z_1 , entre les cycles $[z_1 z_2 z_3]$ et $[z_1 z_2 z_4]$ déterminés par les trios des droites z_1, z_2, z_3 et z_1, z_2, z_4 ; quant au module $|W|$ de ce rapport il est égal au **rapport anharmonique des angles entre les droites**, déterminé exactement comme dans le § 15,

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_3 z_1 \} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_3 z_2 \} \right)} : \frac{\sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_4 z_1 \} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \angle \{ z_4 z_2 \} \right)}.$$

De la propriété d'invariance du rapport anharmonique il s'ensuit que les *transformations axiales circulaires du plan de Lobatchewsky conservent les distances tangentielles entre les cycles* (2) et les *rapports anharmoniques des angles entre les quatuors de droites* ; ceci permet d'utiliser les transformations circulaires axiales dans de nombreux problèmes de la géométrie non euclidienne.

Donnons encore pour conclure la description géométrique du plan de Lobatchewsky. On peut facilement vérifier que chaque transformation

(1) On appelle aussi quelquefois ces transformations Transformations de Laguerre du plan de Lobatchewsky.

(2) D'où il s'ensuit que *les transformations axiales circulaires du plan de Lobatchewsky conservent les distances tangentielles entre des courbes arbitraires c'est-à-dire sont des transformations équilogales du plan de Lobatchewsky*, cf. note (1), p. 160.

axiale circulaire (1) ou (1 *a*) du plan de Lobatchewsky qui transforme en lui-même l'absolu $z\bar{z} = -1$ est un déplacement

$$z' = \frac{pz + q}{-\bar{q}z + \bar{p}}, \quad \text{ou} \quad z' = \frac{-pz + q}{\bar{q}z + \bar{p}}, \quad \text{ou} \quad z' = \frac{p\bar{z} + q}{-\bar{q}\bar{z} + \bar{p}},$$

$$\text{ou} \quad z' = \frac{-p\bar{z} + q}{\bar{q}\bar{z} + \bar{p}}, \quad p\bar{p} + q\bar{q} > 0. \quad (41)$$

Comme, de plus, toute *transformation axiale circulaire transforme un faisceau parallèle*, comme il est facile de le voir, à nouveau en *faisceau parallèle*, le problème de la classification de toutes les transformations axiales circulaires du plan de Lobatchewsky conduit à la recherche des transformations « types » qui transforment en absolu Σ l'équidistante, la ligne limite, le cercle (en particulier le point), un faisceau de pente égale.

Pour la suite, il nous sera commode d'introduire la notion suivante. Associons aux droites (orientées) du plan de Lobatchewsky perpendiculaires à l'axe fixe l (aux droites « du faisceau orthogonal » d'axe l) les points orientés d'intersection de ces droites avec l , et ceci de façon qu'aux droites dirigées d'un seul côté de l correspondent les points pareillement orientés. En vertu de cette correspondance, à chaque transformation dans l'ensemble des droites orientées (axes) du faisceau orthogonal correspondra une certaine transformation dans l'ensemble des points orientés, appartenant à la droite l . Ces transformations — ponctuelles et axiales — nous les nommerons **associées**.

Un exemple de transformation axiale circulaire qui transforme en absolu Σ l'équidistante S d'axe o et de largeur h donnée par l'équation

$$z\bar{z} = -k^2 = -\text{th}^2 \frac{h}{2},$$

est fournie par l'inversion axiale de première espèce

$$z' = -k/\bar{z}. \quad (42)$$

La transformation (42) transforme chaque droite z coupant l'axe de l'équidistante S en un certain point M , en une droite z' , coupant o en même point M ; de plus

$$\text{tg} \frac{\{oz\}}{2} \cdot \text{tg} \frac{\{oz'\}}{2} = k.$$

La droite z , parallèle à o dans l'une des deux directions de cette droite est transformée en droite z' antiparallèle à o de direction opposée, tandis que z' est transformée en z ; de plus si p et p' sont les distances orientées du pôle O à z et à z' du système polaire des coordonnées situé sur o , on a :

$$\operatorname{sh} p : \operatorname{sh} p_1 = -k.$$

Enfin chaque faisceau orthogonal, construit sur le diamètre l de l'équidistante S , est transformé en lui-même, avec cela, la transformation des droites de ce faisceau est associée à la transformation que subissent les points du diamètre l du cercle \bar{S} « inscrit » dans l'équidistante S (le rayon du cercle \bar{S} est égal à h , et le centre coïncide avec le point P d'intersection de l avec l'axe o) une inversion ponctuelle de première espèce qui transforme \bar{S} en absolu.

L'exemple d'une transformation axiale circulaire transformant en absolu Σ la ligne limite S d'équation

$$2z\bar{z} + ez - e\bar{z} = 0,$$

est fourni par l'**inversion axiale de seconde espèce**

$$z' = \frac{e\bar{z} - 1}{3\bar{z} + e}. \quad (43)$$

La transformation (43) transforme le faisceau des diamètres de la ligne limite en lui-même. Le faisceau orthogonal dont l'axe est le diamètre l de la ligne S est aussi transformé en lui-même, de plus la transformation des droites de ce faisceau est associée à la transformation des points de diamètre l dans une inversion ponctuelle de deuxième espèce (37).

Un exemple de transformation axiale circulaire qui transforme en Σ le **cercle** S de rayon r , ayant son centre au pôle du système des coordonnées O (l'équation de ce cercle à la forme

$$\operatorname{sh} r \cdot z\bar{z} - ez + e\bar{z} + \operatorname{sh} r = 0)$$

est donné par l'**inversion axiale de troisième espèce**

$$z' = \frac{(1 - \alpha)e\bar{z} + (1 + \alpha)}{-(1 + \alpha)\bar{z} + (1 - \alpha)e}, \quad \alpha = \operatorname{th} \frac{r}{2}. \quad (44)$$

La transformation (44) transforme en lui-même chaque faisceau orthogonal dont l'axe est le diamètre l du cercle; de plus la transformation des

droites de ce faisceau est associée à la transformation des points l dans une inversion ponctuelle de première espèce qui transforme en Σ l'équidistante \bar{S} « inscrite » autour de S (la largeur de l'équidistante \bar{S} est égale à r , son axe est perpendiculaire à l et coupe l au point O). En particulier, en posant que le rayon r du cercle est égal à zéro, nous parvenons à la transformation

$$z' = \frac{e\bar{z} + 1}{-\bar{z} + e}, \quad (45)$$

qui transforme en absolu Σ le point O . Au cours de cette transformation la droite z est transformée en droite z' perpendiculaire à la droite $OP \perp z$ et la coupant en un point P' tel que les distances $OP = d$ et $OP' = d'$ de O à z et à z' sont les segments complémentaires

$$\bar{d} + \bar{d}' = \pi/2$$

(fig. 77).

Remarquons encore, que les transformations (42), (43) et (44) laissent respectivement en place toutes les droites (orientées) appartenant à l'équidistante S_1 , d'équation $z\bar{z} = -k$, à la ligne limite S_1 d'équation

$$3z\bar{z} + ez - e\bar{z} + 1 = 0,$$

ou au cercle S_1 d'équation

$$azz\bar{z} - ez + e\bar{z} + a = 0,$$

où a est un nombre réel, lié au rayon r du cercle S par la relation $a = e^r$; ici $e \approx 2,7$ est la base des logarithmes naturels (non des unités doubles !). De plus, toutes ces transformations transforment chaque point z en un point z' qui à son tour est transformé en point z . C'est pourquoi on peut aussi respectivement appeler ces transformations *symétrie axiale par rapport à l'équidistante*, *par rapport à la ligne limite* ou *par rapport au cercle S_1* . En particulier, la transformation (45) représente une symétrie axiale par rapport au cercle S_1 de rayon r qui est défini à partir de la relation $\text{sh } r_1 = 1$.

Considérons enfin la transformation circulaire spéciale suivante du plan de Lobatchewsky :

$$z' = ez.$$

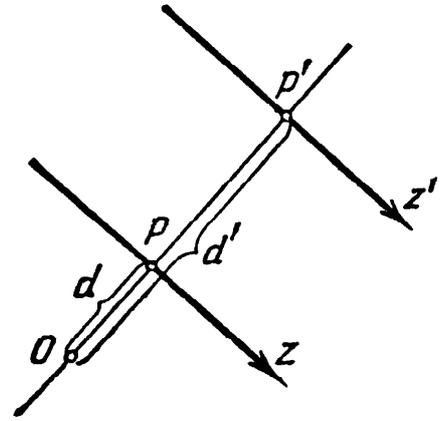


FIG. 77.

La transformation (46) transforme chaque droite z qui coupe l'axe o en droite z' divergeant de o , tandis que z' se transforme en z ; la droite z parallèle à o est transformée en droite z' parallèle à o (z et z' sont parallèles à o dans des directions opposées; z' se transforme en z) et les droites antiparallèles à o sont transformées de façon analogue. De plus le faisceau des droites qui coupent o en un certain point M , se transforme en un faisceau orthogonal qui a pour axe la perpendiculaire l à l'axe o menée au point M ; l'angle $\varphi = \angle \{o, z\}$ est lié à la distance $d = \{o, z'\}$ de o de l'image z' de la droite z par la relation

$$\operatorname{th} \frac{d}{2} = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, & \text{si } \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \leq 1, \\ \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, & \text{si } \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| > 1, \end{cases}$$

pour $|\operatorname{tg} \varphi/2| \leq 1$ la droite z' est dirigée du même côté de l que o , et pour $|\operatorname{tg} \varphi/2| > 1$ du côté opposé. Le faisceau de droites, coupant l'axe polaire o sous un angle constant $\varphi \neq \pi/2$, se transforme en équidistante d'axe o ; le faisceau *orthogonal* d'axe o se transforme en absolu Σ ; inversement Σ est transformé en faisceau orthogonal d'axe o . La transformation (46) transforme chaque équidistante, ligne limite ou cercle en un faisceau de pente égale et inversement. On peut appeler la transformation (46) « **retournement** ».

Il nous est facile maintenant de donner un exemple de transformation qui transforme en Σ un faisceau de pente égale φ avec l'axe o (un faisceau de droites qui coupent o sous un angle constant φ ; l'équation de ce faisceau a la forme

$$z\bar{z} = k^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

Cet exemple est formé d'une inversion axiale de première espèce (42) et d'un « retournement » (46)

$$z' = -k/z_1, \quad \text{où} \quad z_1 = ez,$$

c'est-à-dire

$$z' = ke/\bar{z}. \tag{47}$$

La transformation (47) peut s'appeler **inversion axiale de quatrième espèce**.

Finalement nous obtenons *que chaque transformation axiale circulaire du plan de Lobatchewsky représente un déplacement ou un déplacement accompagné d'une symétrie axiale par rapport à un certain cycle S_1 (inversion axiale de première, deuxième ou troisième espèce), ou, enfin, un déplacement accompagné d'une symétrie axiale par rapport à l'équidistante et d'un « retournement » (c'est-à-dire accompagné d'une inversion axiale de quatrième espèce).*

En conclusion, indiquons encore que chaque transformation axiale circulaire permet de donner une nouvelle représentation de l'ensemble des droites orientées du plan de Lobatchewsky par l'ensemble des nombres doubles ; en d'autres termes, de nouvelles « coordonnées complexes (plus exactement doubles) » des droites : pour cela il suffit d'associer à la droite ayant la « coordonnée » z , le nombre

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}.$$

De plus dans le nouveau « système de coordonnées » la condition d'appartenance des quatre droites z_0, z_1, z_2, z_3 à un seul cycle aura la même forme qu'avant

$$W(z_0, z_1, z_2, z_3) = \overline{W(z_0, z_1, z_2, z_3)};$$

les cycles seront décrits par les équations habituelles (19) (p. 154) ; les transformations axiales circulaires auront la forme (1) et (1 a), etc. En particulier, la transformation

$$z' = \frac{ez + 1}{z - e} \quad (48)$$

transforme les coordonnées complexes (59), (59 a), (59 b) les droites du plan de Lobatchewsky étudiées dans la partie essentielle du § 12, chap. II, en « coordonnées complexes » que l'on trouve à la fin du § 12 (p. 126-129).