CLASSIC REPRINT SERIES

Elemens de Geometrie

Contenant les Six Premiers Livres d'Euclide

by
Samuel Koenig Euclid

Forgotten Books

Forgotten Books

Elemens de Geometrie

Contenant les Six Premiers Livres d'Euclide

by

Samuel Koenig Euclid

Published by Forgotten Books 2013
Originally published 1762

PIBN 1200117040

www.ForgottenBooks.org

LES

ELEMENS D'EUCLIDE,

LIVRE PREMIER.

ELEMENS DE GEOMETRIE,

CONTENANT

LES SIX PREMIERS LIVRES

D'EUCLIDE,

MIS DANS UN NOUVEL ORDRE, ET À LA PORTÉE DE LA JEUNESSE SOUS LES DIRECTIONS

DE MR. LE PROFESSEUR KOENIG,

AUGMENTÉS DE L'ONZIÈME ET DOUZIEME LIVRE

PAR J. J. BLASSIERE.

A LA HAYE,

Chez PIERRE VAN OS,

M. D. CC. LXII.

A V I S
D U
L I B R A I R E

JE publiai en 1754 un projet de Souſcription pour une nouvelle Edition des ELEMENS D'EUCLIDE. J'y promettois d'en délivrer des Exemplaires complets vers la fin de 1755. Les Souſcripteurs ont eu ſans doute lieu de ſe plaindre des délais que j'ai eté forcé de mettre à l'exécution de mes promeſſes. J'en rougirois moi-même, ſi je n'étois perſuadé que le Public, ſuffiſamment inſtruit des raiſons qui m'ont empêché & qui m'ont preſque mis dans l'impoſſibilité de remplir mes engagements, voudra bien ſe prêter à excuſer cette faute, involontaire de ma part.

Pour remplir mes promeſſes, du moins autant qu'il m'eſt poſſible, j'offre ici les ſix premiers Livres d'EUCLIDE qui forment la Premiere Partie de mon Ouvrage. Je me propoſe de mettre la derniere main à mon Edition en publiant, le plutot qu'il me ſera poſſible, les Onzieme & Douzieme Livres. Cette Entrepriſe ſeroit même achevée, ſi une circonſtance imprevue, mais prête à être décidée, n'avoit ſuſpendu ſa conſommation.

Le Public peut être perſuadé que le reſpect qu'il mérite de ma part, & que l'honneur de ma preſſe me font voir avec peine que je ne puiſſe fixer le tems où je ferai paroître ces deux Livres.

Il ne tiendra pas à moi d'abreger l'intervale que je ſuis obligé de mettre à l'impatience des Amateurs de la GÉOMETRIE; & je ne négligerai rien pour completter mon Edition. Mais j'espére qu'en attendant, le Public, instruit de mes peines & de mes travaux, rendra justice à mon zele, & voudra bien pour le present se contenter de la Premiere Partie de cette Edition des ELEMENS D'EUCLIDE, une des plus parfaites qui aient paru jusqu'à present.

AVER-

AVERTISSEMENT.

LE Libraire P. VAN OS, proprietaire actuel de l'Edition des *ſix premiers Livres des Elemens d'Euclide*, *donnés au Public ſous les Directions de Monſieur le Profeſſeur Köenig*, m'aïant prié de mettre la dernière main à cet ouvrage en y ajoutant les onzieme & douzieme Livres de ces Elemens, j'ai tâché de répondre à ſon attente, en ſuivant la méthode de Mr. Köenig dans les Demonſtrations: je ne me ſuis point écarté de celles qu'Euclide a donnée lui-même; elles paroitront peut-être trop longues à quelques perſonnes, ſurtout dans pluſieurs Propoſitions du douzieme Livre; j'avoue qu'on pourroit les abreger, mais c'eſt ce que je n'ai pû faire, étant obligé de ſuivre le plan de l'ouvrage. J'eſpere avoir réuſſi, & je prie le Lecteur de vouloir pardonner les fautes de ſtile qui pouroient m'être échapées.

la Haye ce 16. Septembre 1761.

J. J. BLASSIERE.

Geomètre.

AVERTISSEMENT

SUR CETTE

NOUVELLE EDITION.

LE Siecle des Mathématiques commence à renaître; on voit depuis quelque tems paroître, presque tous les jours, de nouveaux Traités de Géometrie. Nous ne chercherons point à déprimer ces Productions; elles ont certainement leur mérite. Mais les Auteurs de ces Traités donneront, avec nous, la preférence aux ELEMENS D'EUCLIDE: ce sont de ces Chefs-d'œuvres qu'on peut imiter, mais qu'il est impossible de surpasser.

Il seroit donc inutile de chercher à assurer à EUCLIDE, une supériorité que personne ne lui dispute. Notre unique but doit être d'indiquer ici les avantages de cette nouvelle Edition sur celles qui l'ont précedée.

1°. On a conservé, avec toute l'attention possible, toutes les Propositions & les Démonstrations d'EUCLIDE, qu'on a laissées dans le même ordre où elles se trouvent dans les meilleures Editions.

2°. Comme ce fameux Géometre avoit l'esprit Philosophique & que tous ses raisonnemens se suivent, on en a conservé, autant qu'il a été possible, la forme, la liaison & toute l'exactitude.

3°. Après avoir exposé, avec toute la clarté & la precision possible, les parties essentielles de ses Propositions, on a développé le sens de ses raisonnemens, & on l'a exposé dans un si beau jour, que l'œil tant soit peu attentif peut l'appercevoir. Pour rendre ces Elemens encore plus faciles, on a distingué en plusieurs Articles separés, les différentes opérations & les raisonnemens essentiels à une bonne Démonstration.

4°. Pour faire quelques progrès dans l'etude des Mathématiques, il faut s'appliquer à découvrir la liaison & le rapport qu'il y a entre les Propositions; se former une juste idée du nombre & des qualités des argumens qui servent à etablir une nouvelle vérité; connoître, en un mot, toutes les parties intrinseques d'une Démonstration.

Or comme il est impossible d'aquerir ces connoissances, sans savoir ce qui entre dans la composition d'un Théorême & d'un Problême. 1°. On a distingué la Préparation & la Démonſtration. 2°. Après avoir enoncé la Propoſition, on a fait connoître ſous le nom d'*Hypotheſe* les choſes qu'on ſuppoſe dans cette Propoſition, & ſous celui de *Theſe* celles qu'on y affirme. 3°. On a rangé dans des Articles ſeparés, toutes les opérations néceſſaires pour faire ſervir des vérités connues à la preuve d'une vérité inconnue. 4°. On s'eſt particulierement attaché à ſuivre, dans la Démonſtration, la méthode qu'on s'étoit preſcrite, c'eſt-à-dire, qu'on a eu ſoin de faire connoître, comme il eſt dit dans le *Projet*, par des citations de divers fondemens de chaque Propoſition relative à la figure, laquelle eſt la *Mineure* de l'argument. Une Citation marginale rappelle auſſi la vérité dejà démontrée, qui en eſt la *Majeure*. En un mot on n'a rien négligé pour fixer l'attention des Commençans, pour leur faire connoître la chaine des raiſonnemens Géometriques & pour leur apprendre à en ſuivre le fil.

5°. Les Géometres modernes ſe ſervent ordinairement des parties aliquotes dans leurs Démonſtrations touchant les raiſons & proportions des grandeurs en général. Comme cette méthode leur paroît plus facile que celle des equimultiples, ils ſont ſurpris qu'EUCLIDE, ce fameux Géometre, ait eu recours, dans les Démonſtrations de la plûpart de ſes Livres, à ces equimultiples, au lieu d'avoir fait uſage des parties aliquotes. On explique fort au long, dans les Définitions du cinquieme Livre, les raiſons qui l'ont engagé à en agir ainſi.

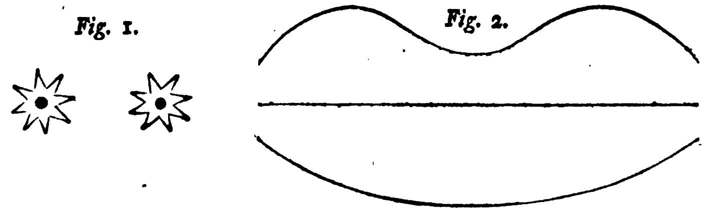
6°. On découvre, dans un Appendice que Mr. *Koenig* y a joint, la méthode de trouver les Logarithmes par le ſeul moïen des proportions etablies & démontrées dans le cinquieme Livre.

7°. La beauté de l'impreſſion, l'ordonnance & la régularité des figures & l'attention qu'on a eue de prévenir juſqu'aux moindres petites fautes ſoit dans les calculs, ſoit dans les Lettres, ſoit dans les chiffres, ſoit dans les citations marginales &c. relevent encore le mérite de cette Edition qui ne peut manquer d'être favorablement reçue du Public.

ELEMENS

Fig. 1.

Fig. 2.



DEFINITIONS.

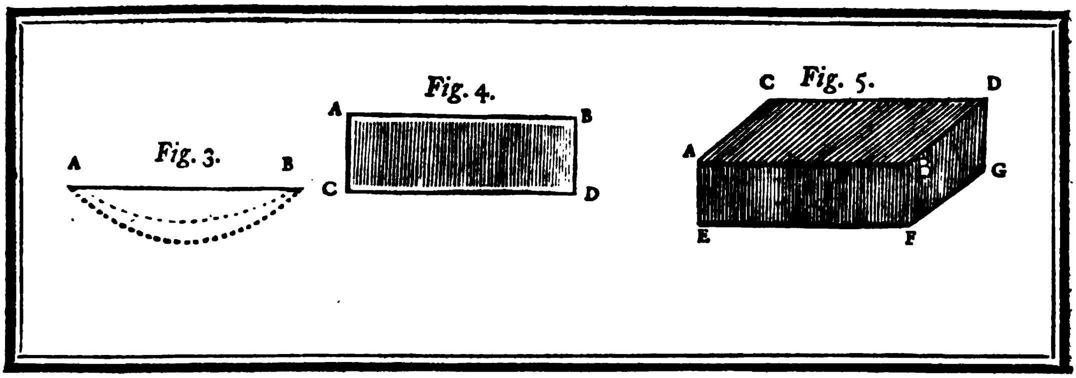
I.

LE *Point* eſt une marque ſans parties. *Fig.* 1.

Dans cette définition, auſſi bien que dans la ſeconde & la cinquième, Euclide explique ſimplement la maniere de concevoir les premiers objets de la Géométrie, le point, la ligne, & la ſurface; *il ne démontre pas qu'il y ait de tels objets dans la claſſe des êtres réels. Ces notions, quoique très utiles en Géométrie, ne ſont que des abſtractions, qu'il faut éviter de réaliſer, en ſe les repréſentant comme ayant une exiſtence effective hors de l'eſprit, où elles ont pris naiſſance. Il n'exiſte pas de points mathématiques dans la nature, (du moins ce qu'Euclide en dit ne le prouve pas); mais il exiſte des choſes étendues, qu'on eſt en droit de traiter comme de ſimples marques non-étendues, toutes les fois qu'on ne veut pas les conſidérer comme ayant des parties, mais ſimplement comme limites de quelque autre étendue. Ainſi, lorſqu'il eſt queſtion de meſurer la diſtance de deux aſtres, l'Aſtronome procède comme ſi ces aſtres n'étoient que des points ſans parties: & il a raiſon; puiſqu'il ne veut point connoître leur étendue, mais celle de la diſtance qui les ſépare, & dont il les enviſage comme les termes. Il en eſt de même des autres notions de cette eſpece. On ſe repréſente ſous l'image d'une ligne, ou bien d'une longueur ſans largeur, toute étendue dont la ſeule longueur nous intéreſſe, quelle que puiſſe être ſa largeur & ſa profondeur, ou ſes autres qualités. L'imagination, toûjours diſpoſée à transformer en réalités ce qui n'en a point, forme de ces abſtractions une claſſe d'êtres qui paroiſſent avoir de l'exiſtence hors de l'entendement. Il eſt très permis au Géometre d'adopter ces êtres, entant qu'ils peuvent lui ſervir à faire entendre facilement ce qu'il veut propoſer ſur les différentes manieres d'enviſager l'étendue; mais il ne lui eſt nullement permis de ſe faire illuſion ſur leur origine & leur véritable uſage.*

II.

La Ligne eſt une longueur ſans largeur. *Fig.* 2.



DEFINITIONS.

III.

LEs *Extrémités de la Ligne* ſont des points (A, B,). *Fig.* 3.

IV.

La Ligne Droite eſt celle qui eſt également ſituée entre ſes extrêmités (A, B,). *Fig.* 3.

Cette définition eſt imparfaite, puiſqu'elle n'offre aucune marque eſſentielle de la ligne droite; auſſi Euclide n'en a-t'il rien pu tirer; elle ne ſe trouve plus citée dans le corps de l'ouvrage. Il eſt obligé d'avoir recours à d'autres principes (par exemp. à l'axiome 12.), *toutes les fois qu'il a beſoin d'employer des vérités qui dépendent d'une définition parfaite de la ligne droite.*

V.

La Superficie, ou *Surface*, eſt une étendue ayant de la longueur & de la largeur ſans profondeur. *Fig.* 4.

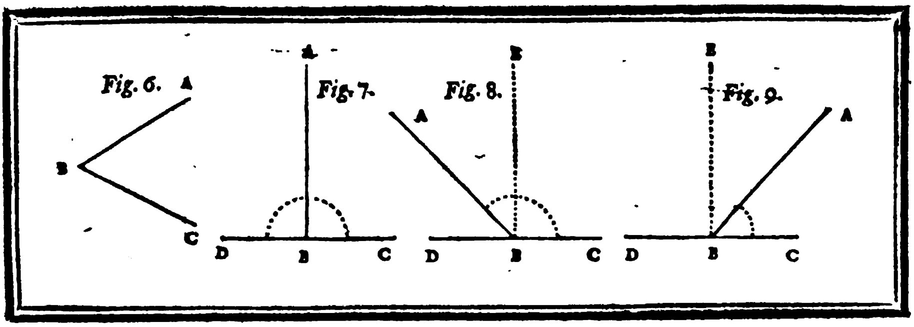
V I.

Les *Extrêmités de la Superficie* ſont des lignes (AB, CD, AC, BD,). *Fig.* 4.

VII.

On nomme *Superficie Plane*, ou ſimplement un *Plan* (AD), celle qui eſt également ſituée entre ſes extrêmités. (AB, CD, AC, BD). *Fig.* 5.

Cette définition eſt encore dans le cas de la quatrieme.



DEFINITIONS.

VIII.

L'*Angle Plan* eſt l'inclinaiſon mutuelle de deux lignes (AB, BC,) qui ſe rencontrent, & qui ſe trouvent ſituées dans un même plan. *Fig.* 6.

IX.

L'Angle eſt nommé *Rectiligne*, ſi les lignes, entre leſquelles il eſt compris, ſont droites. *Fig.* 6.

X.

Quand une ligne droite (AB), tombant ſur une autre ligne droite (CD), fait les angles contigus (ABD, ABC) égaux entr'eux, ces angles ſont appellés *Angles Droits.* La ligne (AB), qui tombe de cette maniere ſur l'autre (CD), eſt appellée *Perpendiculaire. Fig.* 7.

XI.

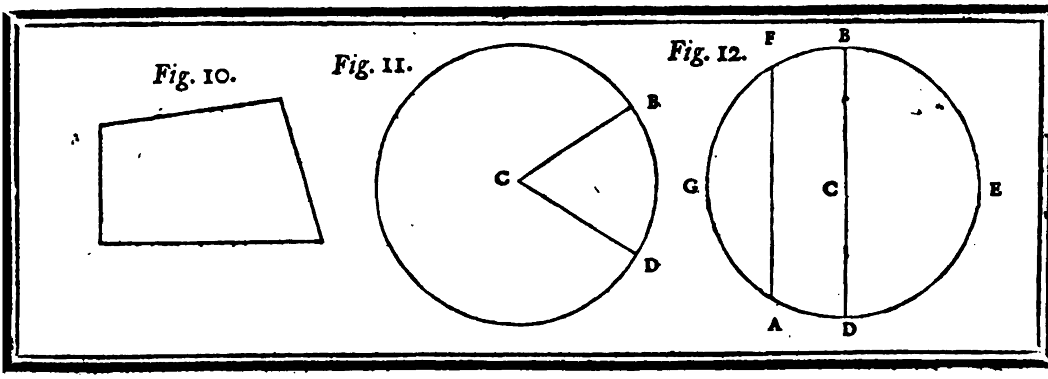
L'Angle Obtus (ABC) eſt un angle plus grand qu'un angle droit (EBC). *Fig.* 8.

XII.

L'Angle Aigu (ABC) eſt un angle plus petit qu'un angle droit (EBC). *Fig.* 9.

XIII.

On nomme *Terme* l'extrêmité de quelque étendue.



DEFINITIONS.

XIV.

Une *Figure* eſt une étendue limitée d'un ou de pluſieurs termes. *Fig.* 10.

XV.

Le Cercle eſt une figure plane terminée par une ſeule ligne, ayant la propriété que toutes les lignes droites (CB, CD,) tirées d'un même point (C) à cette ſeule ligne, nommée *Circonférence*, ſont égales entr'elles. *Fig.* 11.

XVI.

On nomme ce point (C) *Centre*, & les droites (CB, CD,) tirées du centre à la circonférence, des *Rayons*. *Fig.* 11.

XVII.

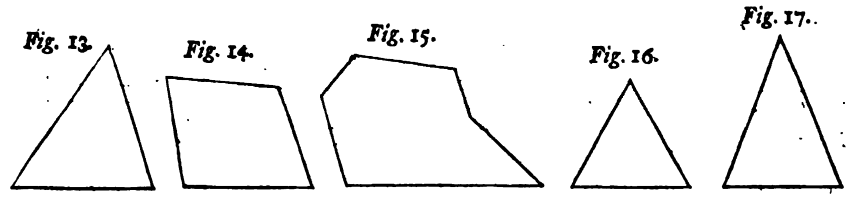
On nomme *Diametre* du cercle toute droite (DB) tirée par le centre, & terminée à la circonférence de part & d'autre (*Fig.* 12). Un diametre partage le cercle en deux parties égales.

XVIII.

Le *Demi-cercle* eſt une figure plane (DEB) terminée par le diametre (DB) & par la demi-circonférence (DEB), c. a. d. cette portion de la circonférence (DEB) qui aboutit de part & d'autre à ce diametre (DB). *Fig* 12.

XIX.

Un *Segment de cercle* eſt une figure compriſe d'une ligne droite (AF), nommée *Corde*, & d'une partie de la circonférence (AGF ou AEF) qu'on appelle *Arc*. *Fig.* 12.



DEFINITIONS.

XX.

ON appelle en général *Figures Rectilignes*, toutes celles qui ſont terminées par des lignes droites. *Fig.* 13. 14. 15. 16. 17.

XXI.

Et en particulier *Figures Trilatéres*, ou figures à trois côtés, celles qui ſont compriſes de trois lignes droites. *Fig.* 13. 16. 17.

XXII.

De même *Figures Quadrilatéres*, ou Figures à quatre côtés, toutes celles qui ſont compriſes de quatre lignes droites. *Fig.* 14.

XXIII.

Et généralement *Figures Multilatéres*, ou figures à pluſieurs côtés, toutes celles qui ſe trouvent terminées par plus de quatre lignes droites. *Fig.* 15.

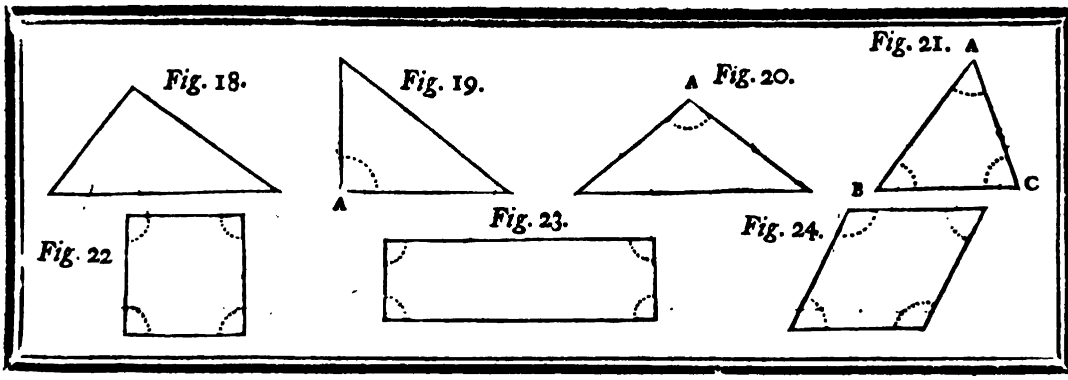
XXIV.

Pour ce qui eſt des figures trilatéres en particulier:

On nomme *Triangle Equilatéral*, celui dont les trois côtés ſont égaux entr'eux. *Fig.* 16.

XXV.

Mais s'il n'y a que deux côtés égaux entr'eux, le *Triangle* eſt *Iſoſcéle*. *Fig.* 17.



DEFINITIONS

XXVI.

ET lorsque les trois côtés sont inégaux entr'eux, le *Triangle* est *Scalene. Fig.* 18.

XXVII.

Pareillement; parmi ces mêmes figures trilatéres:

On nomme *Triangle Rectangle*, un Triangle qui a un angle droit. *Fig.* 19.

XXVIII.

Et *Triangle Amblygone*, ou *Obtus-angle*, un Triangle qui a un angle obtus (A). *Fig.* 20.

XXIX.

Enfin, on appelle *Triangle Oxygone*, ou *Acutangle*, un Triangle qui a les trois angles aigus (A, B, C,). *Fig.* 21.

XXX.

De la même maniere dans l'espece des figures quadrilatéres:

On nomme *Quarré*, celle qui est quadrilatére, équilatérale & rectangulaire. *Fig.* 22.

XXXI.

Et on entend par *Rectangle*, une figure quadrilatére, rectangulaire, non-équilatérale. *Fig.* 23.

XXXII.

Par *Rhombe*, une figure quadrilatére, équilatérale, non-rectangulaire. *Fig.* 24.

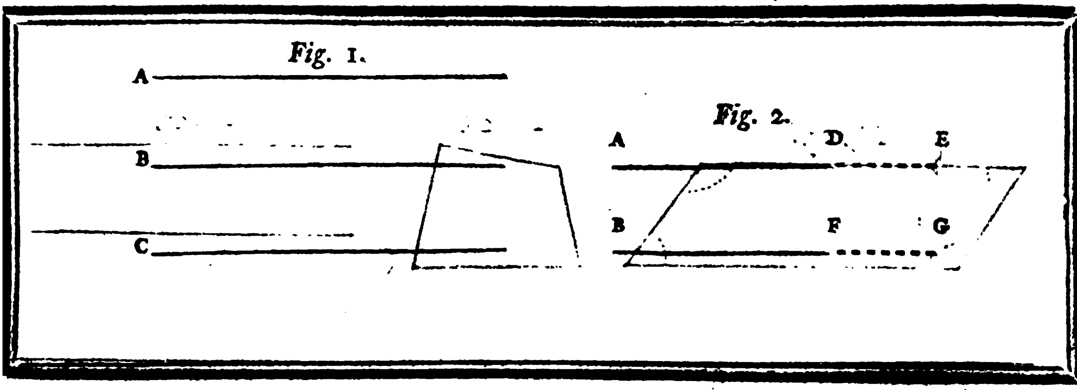
Sorry, this page is unavailable to Free Members

You may continue reading on the following page

Upgrade your Forgotten Books Membership to view this page

10	**$2.99** / month	**10 Books per month** Monthly payment $0.30 per book	Purchase
100	**$4.99** / month	**100 Books per month** Monthly payment $0.05 per book	Purchase
10	**$19.99** / year	**10 Books per month** Yearly payment $0.17 per book Save $15.89	Purchase
100	**$35.99** / year	**100 Books per month** Yearly payment $0.03 per book Save $23.89	Purchase

Memberships can be cancelled at anytime



DEMANDES.

I.

ON demande que d'un point à un autre point on puisse mener une ligne droite.

II.

Qu'on puisse prolonger une ligne droite quelconque à l'infini.

III.

Que d'un centre quelconque & d'un rayon quelconque, on puisse décrire un cercle.

AXIOMES OU NOTIONS COMMUNES.

I.

Deux grandeurs égales à une même troisieme sont égales entr'elles.

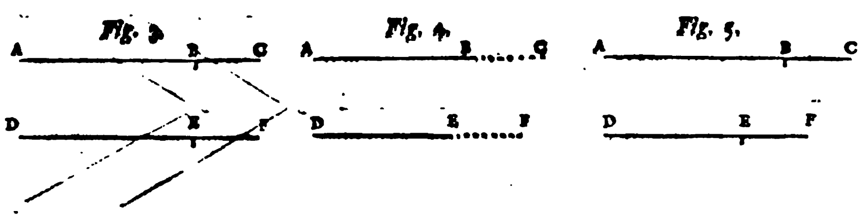
Si la ligne A est égale à la ligne B, & la ligne C égale à la même ligne B; la ligne A sera égale à la ligne C. Fig. 1.

II.

Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les Touts seront égaux.

Si à la ligne AD on ajoute la partie DE, & qu'à la ligne BF, qui est égale à la ligne AD, on ajoute la partie FG, égale à la partie DE; les Touts AE, BG, seront égaux entr'eux. Fig. 2.

SI



AXIOMES.

III.

Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales; les reſtes ſont égaux.

Si de la ligne entiere AC, on retranche la partie BC, & de la ligne entiere DF, égale à AC, on retranche la partie EF, égale à BC; les reſtes AB, DE, ſeront égaux. Fig. 3.

IV.

Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales; les touts ſont inégaux.

Si à la ligne AB, on ajoute la partie BC, & qu'à la ligne DE, plus petite que AB, on ajoute la partie EF, égale à la partie BC; les touts AC, DF, ſeront inégaux. Fig. 4.

V.

Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales; les reſtes ſont inégaux.

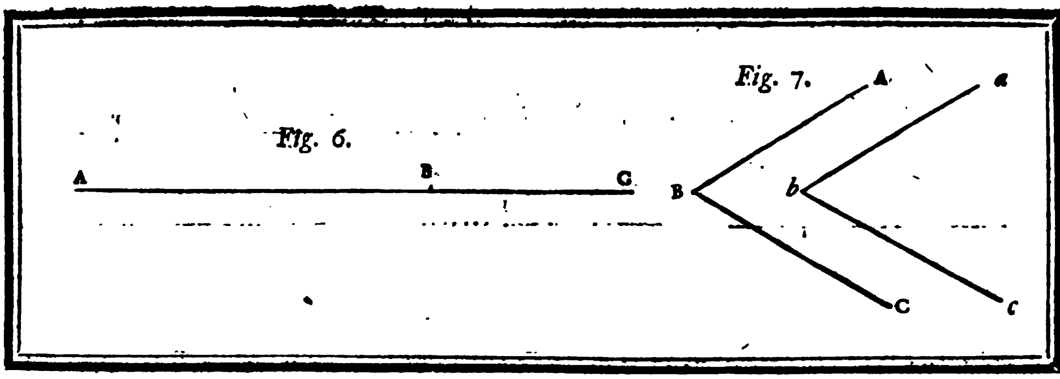
Si de la ligne AC, on retranche la partie BC, & de la ligne DF plus petite que AC, on retranche la partie EF, égale à BC; les reſtes AB, DE, ſont inégaux. Fig. 5.

VI.

Les grandeurs doubles, ou *également multiples d'une même grandeur*; ſont égales entr'elles.

VII.

Les grandeurs égales à la moitié, ou *également ſousmultiples d'une même grandeur*, ſont égales entr'elles.



AXIOMES.

VIII.

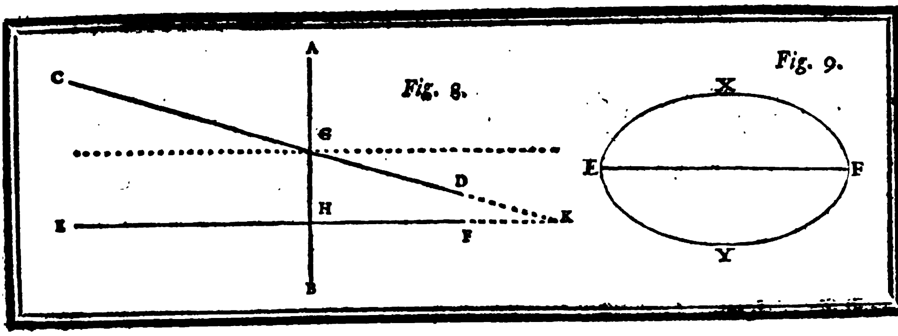
LE Tout eſt plus grand que ſa partie.

Toute la ligne AC eſt plus grande que ſa partie BC. Fig. 6.

IX.

Les grandeurs (c. à. d. *les étendues limitées*), qui conviennent; ſont égales & ſemblables. Et réciproquement; les *grandeurs égales & ſemblables conviennent.*

Cet axiome eſt appellé le principe de la congruence; *& il tient par une liaiſon intime au grand principe de la* ſimilitude, *dont il ſera queſtion au commencement du VI Livre. Ces deux principes ſont les grandes ſources d'invention en Géométrie. Pour ce qui eſt de la notion de la congruence, elle renferme la notion* des termes, *& la notion de la* poſſibilité de leur coïncidence. *Deux étendues limitées conviennent, entant que leurs limites peuvent coïncider parfaitement; entant qu'elles peuvent être renfermées dans les mêmes bornes. Euclide regarde le principe de la congruence comme une notion commune: il y eſt autoriſé par l'uſage où tous les hommes ſont, d'examiner l'égalité des choſes qui doivent avoir cette propriété, en les ajuſtant les unes ſur les autres, ou en les renfermant entre les mêmes bornes, de maniere que l'œil puiſſe juger de la coïncidence de leurs limites. On auroit tort de s'imaginer, qu'une telle maxime ne peut conduire qu'à une pratique de tâtonnement, incompatible avec la préciſion de la Géométrie. Euclide ſait faire de cette maxime un principe très ſcientifique. Il ne ſuppoſe ſur la congruence, qu'un fort petit nombre de vérités ſimples, deſquelles il démontre rigoureuſement, les vérites plus compoſées qui en dépendent. Voici ces vérités ſimples.*



AXIOMÉS.

1. Tous les points conviennent.

2. Les lignes droites égales entr'elles conviennent. Et réciproquement; les lignes droites dont les extrêmités conviennent; sont égales.

3. Si dans deux angles égaux (ABC, abc,) les sommets, (B & b,) conviennent, & une des jambes (BA) à une des jambes (ba); l'autre jambe (BC) conviendra aussi à l'autre jambe (bc). *Item*, tous les angles dont les jambes conviennent; sont égaux, *Fig*. 7.

Euclide n'a pas énoncé séparément, ces axiomes particuliers subordonnés à l'axiome général, mais il n'en fait pas moins usage; comme il est aisé de s'en convaincre par l'analyse de plusieurs de ses démonstrations.

X.

Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

XI.

Si une ligne droite (AB) coupe deux autres lignes droites (CD, EF,) situées sur un même plan, ensorte qu'elle fasse les angles interieurs (DGH, FHG,) du même côté, moindres que deux droits; ces deux lignes (CD, EF) prolongées à l'infini se rencontreront du côté (K), où les deux angles sont moindres que deux droits. *Fig.* 8.

Cette vérité n'est pas assez simple, pour pouvoir être reçue au nombre des axiomes. Elle est une suite de la XXVII proposition du premier Livre; ce n'est que là où elle pourra être établie convenablement.

XII.

Il est impossible, que deux lignes droites puissent renfermer un espace.

Si les deux lignes EF & EXF renferment un espace, ces deux lignes ne peuvent être toutes les deux des lignes droites, il faut absolument que l'une du moins comme EXF soit une ligne courbe.

EXPLICATION DES SIGNES.

$\perp$ - - - - Perpendiculaire

$<$ - - - - Plus grand que.

$>$ - - - - Plûs petit que.

$+$ - - - - Plus

$-$ - - - - Moins.

$\forall$ - - - - Angle

$\llcorner$ - - - - Angle droit

$\triangle$ - - - - Triangle

$=$ - - - - Egal

$\square$ - - - - Quarré

$\odot$ - - - - Cercle

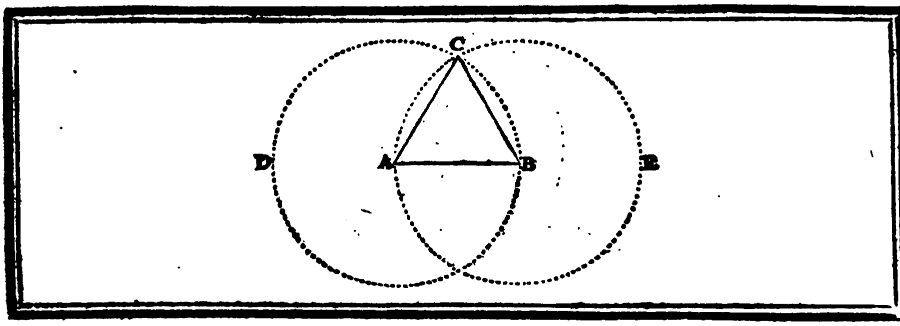
$\circ$ - - - - Circonférence

ABREVIATIONS.

Plle. - - - - Parallele.

Pgr. - - - - Parallélogramme.

Rgle. - - - - Rectangle.



PROPOSITION I. *PROBLEME I.*

Sur une droite donnée & terminée (AB); construire un triangle équilatéral (ABC).

DONNEE	CHERCHEE.
La droite terminée AB.	*La construction d'un △ équilatéral sur la droite terminée AB.*

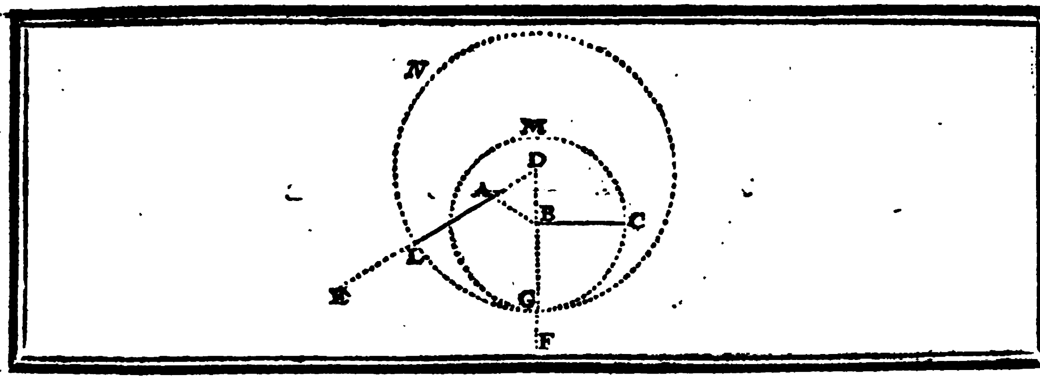
Résolution.

1. Du point A comme centre & du rayon AB decrivez le cercle BCD. Dem. 3.
2. Du point B comme centre & du rayon BA decrivez le cercle ACE. Dem. 3.
3. Marquez le point d'interſection C.
4. Du point A au point C tirez la droite AC. Dem. 1.
5. Du point B au point C tirez la droite BC. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puiſque le point A eſt le centre du ⊙ BCD *(Ref. 1)*, & que les lignes AB, AC ſont tirées du centre A à la ○ BCD *(Ref. 4.)*.
1. Ces deux lignes AB, AC ſont des rayons d'un même ⊙. D. 16. L. 1.
2. Par conſéquent, la ligne AC eſt = à la ligne AB. D. 15. L. 1.
De meme, puiſque le point B eſt le centre du ⊙ ACE *(Ref. 2.)*, & que les lignes BA, BC, ſont tirées du centre B à la ○ ACE *(Ref. 5.)*.
3. Ces deux lignes ſont encore des rayons d'un même cercle ACE. D. 16. L. 1.
4. Partant, la ligne BC eſt auſſi = à la même ligne AB. D. 15. L. 1.
5. Les lignes AC, BC ſont donc = à une même troiſiéme AB. *(Arg. 2. & 4.)*
Or *ſi deux grandeurs ſont égales à une même troiſieme elles ſont égales entr'elles.* Ax. 1.
6. La ligne AC eſt donc = à la ligne BC.
Mais chacune de ces deux lignes = entr'elles *(Arg 6.)* eſt auſſi = à la ligne AB, *Arg. 5)*.
7. Donc les trois lignes AB, BC, AC, qui forment les trois cotes du △ ABC, ſont toutes les trois = entr'elles.
8. Partant, le △ ABC conſtruit ſur la droite donnée & terminée AB, eſt un triangle équilatéral. D. 24. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION II. PROBLEME II.

D'Un point donné (A); mener une droite (AL), égale à une autre droite donnée (BC).

Donnees

1. *Le Point A.*
2. *La droite BC.*

Cherchee.

A L = B C.

Résolution.

1. Du point A au point B tirez la droite AB. Dem. 1.
2. Sur cette droite AB construisez le △ équilatéral ADB. P. 1. L. 1.
3. Prolongez à l'infini les côtes DA & DB de ce △. Dem. 2.
4. Du point B comme centre, & de la droite BC comme rayon décrivez le ⊙ CGM. Dem. 3.
5. Item; du point D comme centre, & de la droite DG comme rayon décrivez le ⊙ GLN, qui coupe la droite prolongée DA quelque part en L. Dem. 3.

Demonstration.

Puisque les lignes BC & BG sont menées du centre B à la O CGM. (*Ref.* 4.)

1. Ces deux lignes sont des rayons d'un même ⊙ CGM. D. 16. L. 1.
2. Par conséquent, BC = BG. D. 15. L. 1.

De même; les lignes DG & DL étant tirées du centre D à la O GLN (*Ref.* 5.)

3. Ces lignes sont aussi des rayons d'un même ⊙ GLN. D. 16. L. 1.
4. Et par la même raison, DG = DL. D. 15. L. 1.

Or les lignes DA & DB, étant des côtes d'un △ équilatéral ADB (*Ref.* 2.)

5. La ligne DA est = à la ligne DB. D. 24. L. 1.

Retranchant donc des lignes égales DG, DL (*Arg.* 4.), leurs parties égales DB, DA (*Arg.* 5.)

6. La ligne restante AL est = à la ligne restante BG. Ax. 3.

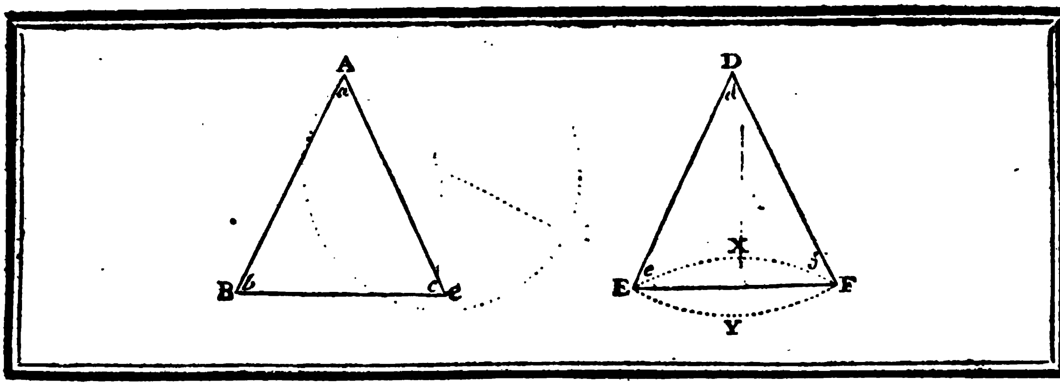
Puisque la ligne AL est donc = à la ligne BG (*Arg.* 6.) & que la ligne BC est aussi = à la même ligne BG (*Arg.* 2.)

7. La ligne AL est = à la ligne BC. Ax. 1.

Mais il est manifeste, que cette ligne AL, est une ligne menée du point donné A (*Ref.* 3.)

8. Partant on a mené du point donné A, une droite AL, égale à la droite donnée BC.

C. Q. F. F.



PROPOSITION IV. *THEOREME. I.*

SI deux triangles (BAC, EDF), ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun; (c. à. d. AB = DE, & AC = DF), & de plus, l'angle compris (a) égal à l'angle compris (d): ils auront aussi la base (BC), égale à la base (EF); & les deux autres angles (b & c) égaux aux deux autres angles (e & f), chacun à chacun de ceux qui se trouvent opposés à des côtés égaux; & le triangle entier (BAC) sera égal au triangle entier (EDF).

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB = DE.	*I. BC = EF.*
II. AC = DF.	*II. ∀ b = ∀ e & ∀ c = ∀ f.*
III. ∀ a = ∀ d.	*III. △ BAC = △ EDF.*

Préparation.

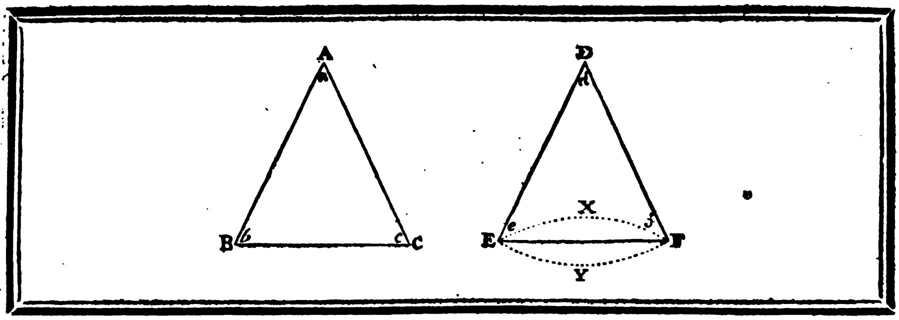
Imaginez que le △ BAC soit posé sur le △ EDF; de maniere que
1. Le sommet A tombe sur le sommet D.
2. Et que le côté AB tombe sur le côté DE.

DEMONSTRATION.

PUisque la ligne AB est = à la ligne DE (*Hyp.* 1), que le point A tombe sur le point D (*Prep.* 1), & la ligne AB sur la ligne DE (*Prep.* 2).

1. Le point B tombera nécessairement sur le point E. Ax. 9.
De même, puisque ∀ a = ∀ d (*Hyp.* 3), que le sommet A tombe sur le sommet D (*Prep.* 1) & la jambe AB sur la jambe DE (*Prep.* 2.)
2. La jambe AC tombera nécessairement sur la jambe DF. Ax. 9.
De plus, à cause que cette jambe AC est = à la jambe DF.
3. Il faut, que le point C tombe aussi sur le point F. Ax. 9.
4. C'est pourquoi les extrêmités B & C de la base BC, conviennent aux extrêmités E & F de la base EF.
5. Et par consequent, la base entiere BC convient à la base entiere EF.
Car si la base BC ne convenoit pas à la base EF, nonobstant que les extrêmités B & C de la base BC, conviennent aux extrêmités E & F de la base EF; deux lignes droites renfermeroient un espace (EXF, ou EYF); ce qui est impossible. Ax. 12.
Puis donc que la base BC convient à la base EF. (*Arg.* 5.)

6. Cette



6. Cette base B C sera = à la base E F. Ax. 9.

C. Q. F. D. I.

Derechef, la base BC convenant à la base E F *(Arg.* 5), & les deux autres côtés A B, A C du △ B A C convenant aux deux autres côtes D E, D F du △ E D F *(Prep.* 2, *Arg.* 2.)

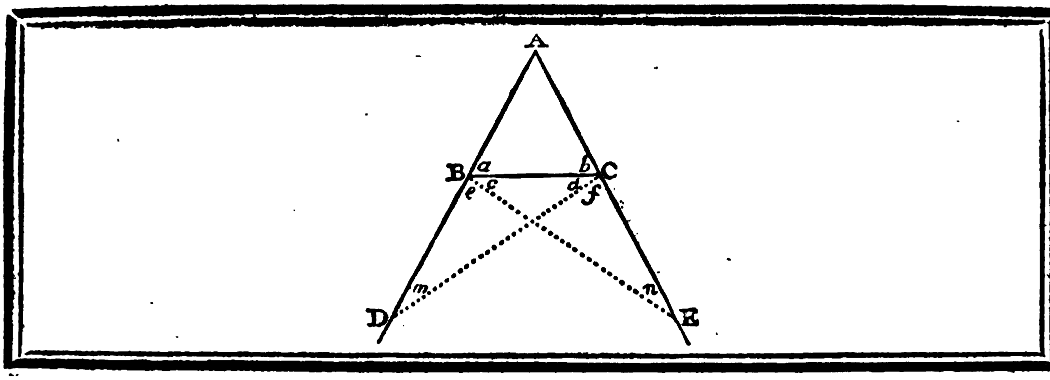
7. Ces deux △ B A C, E D F sont nécessairement égaux entr'eux. Ax. 9.

C. Q. F. D. III.

Enfin, puisque les ∀ *b* & ∀ *e* opposés aux côtés égaux A C, D F *(Hyp* 2); Item, les ∀ *c* & ∀ *f* opposés aux côtés égaux A B, D E *(Hyp.* 1), convienent & par leurs sommets & par leurs jambes. *(Arg.* 1. 2. 3. 5.)

8. Il s'en suit, que les ∀ *b* & ∀ *e* de même que les ∀ *c* & ∀ *f*, opposés à des côtés égaux, sont égaux entr'eux. Ax. 9.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION V. *THEOREME. II.*

Dans tout triangle isoscéle (BAC) : les angles (*a* & *b*) sur la base (BC) sont égaux entr'eux, & les côtés égaux (AB, AC) étant prolongés : les angles (*c* + *e*, & *d* + *f*) sous la base (BC) sont aussi égaux entr'eux.

Hypothese.	These.
I. Le △ BAC est isoscéle.	*I. ∀ a & ∀ b sur la base sont = entr'eux.*
II. AB & AC sont prolongés indéfiniment.	*II. ∀ c + e & ∀ d + f sous la base sont aussi = entr'eux.*

Préparation.

1. Sur le côté prolongé AB prenez un point quelconque D.
2. Faites AE = AD. Prop. 3. L. 1.
3. Par les points B & E, item C & D tirez les droites BE, CD. Dem. 1.

Demonstration.

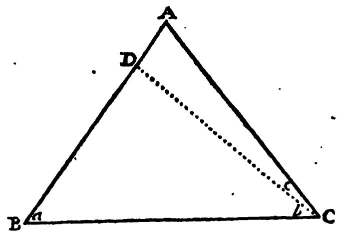
Puisque dans le △ DAC les deux côtés AD, AC sont égaux aux deux côtés AE, AB du △ EAB chacun à chacun (*Prep.* 2. *Hyp.* 1); & que ∀ A compris entre ces côtés égaux est commun aux deux △.

1. La base DC est = à la base BE ; & les deux autres ∀ *m* & *b* + *d* du △ DAC, sont égaux aux deux autres ∀ *n* & *a* + *c* du △ EAB chacun à chacun de ceux qui sont opposés à des côtés égaux. Prop. 4. L. 1.
De plus la ligne entiere AD étant = à la ligne entière AE (*Prep.* 2), & la partie AB = à la partie AC (*Hyp.* 1.); *en retranchant &c.*
2. Les lignes restantes BD, CE sont aussi = entr'elles. Ax. 3.
Derechef, puisque dans le △ DBC les côtés DB, DC sont égaux aux côtés CE, EB du △ ECB chacun à chacun (*Arg.* 2. & 1.) & qu'outre cela ∀ compris *m* est égal à ∀ compris *n* (*Arg.* 1.).
3. Les deux autres ∀ sont = aux deux autres ∀ opposés à des côtés égaux, chacun à chacun c. à. d. ∀ *c* + *e* = ∀ *d* + *f* & ∀ *d* = ∀ *c*. Prop. 4. L. 1.
Les ∀ entiers *a* + *c* & *b* + *d* étant donc = entr'eux, & leurs parties ∀ *c* & ∀ *d* l'étant de même (*Arg.* 1 & 3.); *en retranchant &c.*
4. Les ∀ restants *a* & *b* sont aussi = entr'eux. Ax. 3.
Mais ces ∀ sont les deux ∀ sur la base BC.
5. Donc ∀ *a* & ∀ *b* sur la base BC sont = entr'eux.

C. Q. F. D. I.

De plus, puisque ∀ *e* + *c* est = ∀ *d* + *f* (*Arg.* 3.) sont les ∀ sous la base
6. Il est clair que les ∀ *e* + *c* & ∀ *d* + *f* sous la base sont aussi = entr'eux.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION VI. *THEOREME III.*

SI un triangle (ABC) a deux angles (*a* & *b* + *c*) égaux entr'eux : les côtés opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
Dans le △ ACB, ∀ a = ∀ b + c.	*Le côté CA = au côté BA.*

DEMONSTRATION.

Si non,

1. Les côtés CA, BA seront nécessairement inégaux.	N. C.
2. Par conséquent l'un, comme AB, sera > l'autre AC.	N. C.

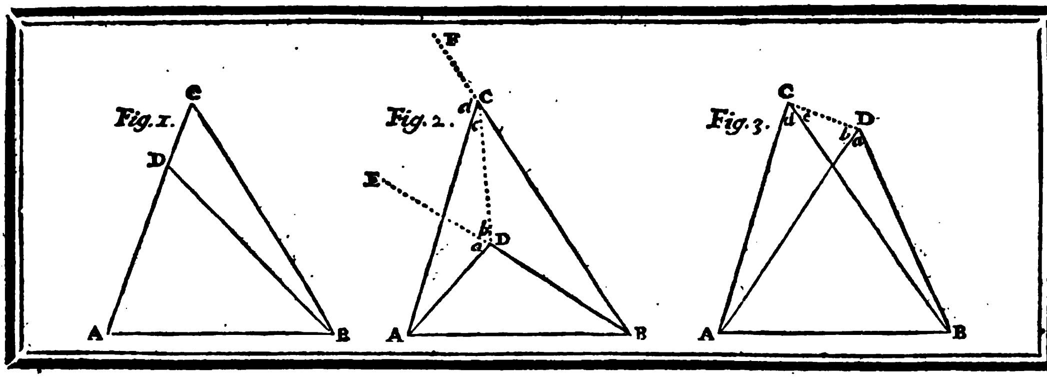
Préparation.

1. Retranchez donc du > côté BA, une partie égale au < côté CA.	P. 3. L. 1.
2. Menez du point C au point D la droite CD.	Dem. 1.

DAns les △ ACB, DBC le côté BD = au côté CA (*Prep.* 1), le côté BC est commun aux deux △, & ∀ compris *a* = ∀ compris *b* + *c* (*Hyp.*)

1. Partant deux △ ACB, DBC ont deux côtés = à deux côtés chacun à chacun, & ∀ compris *a* = ∀ compris *b* + *c*.
2. C'est pourquoi le △ ACB est = au △ DBC. — P. 4. L. 1.
   Mais le △ ACB étant le tout, & le △ DBC sa partie.
3. Il s'ensuivroit que le tout seroit = à sa partie. — Ax. 8.
4. Ce qui est impossible.
   Les côtés CA, BA, opposés aux ∀ égaux *a* & *b* + *c*, ne pouvant donc être inégaux. — N. C.
5. Ces côtés sont égaux entr'eux, ou AC = AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. *THEOREME IV.*

DEs extrêmités (A & B) d'une ligne droite (AB), desquelles on a mené à un même point (C), deux droites (AC, BC): on ne peut mener à quelqu'autre point (D), situé du même côté de cette ligne, deux autres droites (AD, BD), égales aux deux premieres chacune à chacune.

Hypothese.

1. AC, BC, item AD, BD sont des droites;
2. tirées des mêmes points A & B;
3. à deux points differens D & C, situés du même côté par rapport à la ligne AB.

These.

Il est impossible que AC soit = AD, & BC = BD.

Demonstration.

Si non.
Il y a du même côté de la ligne AB un point D tel, que AC soit = AD, & BC = BD. Par conséquent ce point se trouvera
Cas 1. Ou sur un des côtes AC, ou BC. *Fig.* 1.
Cas 2. Ou dans le △ ACB. *Fig.* 2.
Cas 3. Ou hors du △ ACB. *Fig.* 3.

CAS. I. Si on suppose le point D sur un des côtés, comme sur le côté AC. *Fig.* 1.

PUis donc qu'on suppose, que le point D est un point dans AC différent du point C:
1. La ligne AD est ou > ou < la ligne AC.
2. Partant il est impossible que AD soit = AC. N. C.

C. Q. F. D.

CAS. II. Si on suppose le point D au dedans du △ ACB. *Fig.* 2.

Préparation.

1. Du point D au point C tirez la droite DC. Dem. 1.
2. Prolongez à discrétion BD en E, & BC en F. Dem. 2.

Puisque AC est supposée $=$ AD.

1. Le Δ CAD sera un Δ isoscéle. D. 25. L. 1.
2. Par conséquent les $\forall$ sur la base $a+b$ & c seront égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
   De même BC étant supposée $=$ BD.
3. Le Δ CBD sera aussi un Δ isoscéle. D. 25. L. 1.
4. Et à cause de cela les $\forall$ sous la base, b & $c+d$, seront aussi égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
   C'est pourquoi, si on ôte de $\forall$ $c+d$ sa partie $\forall$ d.
5. $\forall$ b sera $>$ $\forall$ c. N. C.
   Et si au même $\forall$ b, on ajoute ensuite $\forall$ a.
6. $\forall$ entier $a+b$ sera à plus forte raison $>$ $\forall$ c. N. C.
7. Partant $\forall$ $a+b$ & $\forall$ c ne sont point égaux. N. C.
   Mais on a démontré qu'en vertu de la supposition de ce cas, $\forall$ $a+b$ & $\forall$ c doivent être égaux (*Arg.* 2).
8. D'où il suit que cette supposition ne sçauroit avoir lieu, à moins que ces $\forall$ ne soient à la fois égaux & inégaux.
9. Ce qui est impossible. N. C.
10. Partant, la supposition, qui fait AC $=$ AD & BC $=$ BD, est impossible elle-même.

C. Q. F. D.

CAS III. Si on suppose le point D hors du Δ ACB. *Fig.* 3.

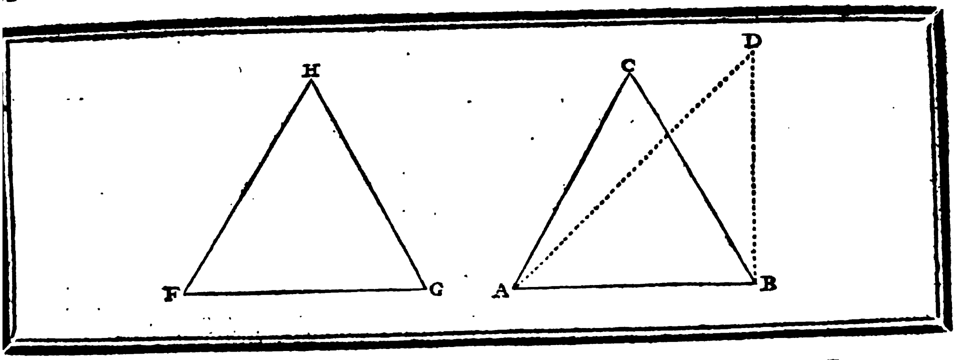
Préparation.

Du point D au point C tirez donc la droite DC. Dem. 1.

Puisqu'on suppose AC $=$ AD

1. Le Δ CAD sera un Δ isoscéle. D. 25. L. 1.
2. Par conséquent $\forall$ b & $\forall$ $d+c$ sur la base sont égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
   Derechef, puisqu'on suppose aussi BC $=$ BD;
3. Le Δ CBD sera aussi un Δ isoscéle. D. 25. L. 1.
4. Par conséquent $\forall$ c & $\forall$ $b+a$ sur la base seront aussi égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
   Otant donc du dernier de ces $\forall$ $b+a$ sa partie $\forall$ a.
5. L' $\forall$ c sera $>$ $\forall$ restant b. N. C.
   Si à ce même $\forall$ c on ajoute donc $\forall$ d.
6. L' $\forall$ entier $c+d$ sera à plus forte raison $>$ $\forall$ b. N. C.
7. Partant, $\forall$ $c+d$ & $\forall$ b ne sont point égaux entr'eux.
   Or, on vient de prouver, qu'en vertu de la supposition de ce cas, $\forall$ $d+c$ & $\forall$ b sont égaux entr'eux (*Arg.* 2).
8. D'où il suit encore que cette supposition ne sçauroit avoir lieu, à moins que ces angles ne soient à la fois égaux & inégaux.
9. Ce qui est impossible. N. C.
10. Partant, la supposition, qui fait AC $=$ AD & BC $=$ BD est impossible.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII. *THEOREME. V.*

Tous les triangles, (FHG, ACB), qui ont les trois côtés (FH, HG, GF) égaux aux trois côtés (AC, CB, BA) chacun à chacun: font égaux entr'eux, & les angles compris par des côtés égaux, font aussi égaux chacun à chacun.

HYPOTHESE.
I. FH = AC.
II. HG = CB.
III. GF = BA.

THESE.
$\triangle\ FHG = \triangle\ ACB$, *et* $\left\{\begin{array}{l} \forall F = \forall A, \\ \forall G = \forall B \\ \forall H = \forall C \end{array}\right.$

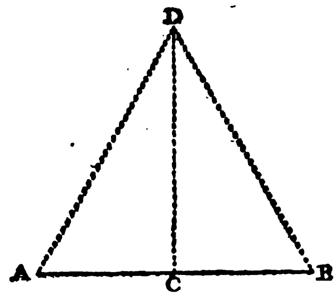
Préparation.

Qu'on s'imagine, que le △ FHG soit posé sur le △ ACB, ensorte
1. Que le point F convienne au point A.
2. Et la base FG à la base AB.

DEMONSTRATION.

Puis donc que le point F convient au point A (*Prep.* 1) & la ligne FG à la ligne AB (*Prep.* 2), & que ces lignes font égales (*Hyp.* 3). Ax. 9.
1. Il faut que le point G convienne au point B.
Les points extrêmes F & G du côté FG, convenant donc aux points extrêmes A & B du côté AB, (*Prep.* 1. *Arg.* 1.); & les droites FH, GH étant égales aux droites AC, BC, chacune à chacune.
2. Les droites FH, GH, conviendront nécessairement aux droites AC, BC, chacune à chacune.
Si non; on pourroit tirer des extrêmités A & B, d'une ligne AB, à deux points differens C & D, & du même côté, deux droites AC, BC égales à deux autres droites AD, BD chacune à chacune. Ce qui est impossible. P. 7. L. 1.
3. Ces côtés conviennent donc.
4. Mais la base FG convenant à la base AB (*Prep.* 2.), le côté FH au côté AC & le côté GH au côté BC (*Arg.* 2.)
5. Il suit que les △ ACB, FGH font égaux entr'eux; aussi bien que leurs ∀ compris par des côtés égaux chacun à chacun. Ax. 9.

C. Q. F. D.



PROPOSITION X. *PROBLEME V.*

COuper en deux parties égales, (AC, CB) une ligne donnée & terminée (AB).

DONNEE.	CHERCHER.
La droite terminée AB	*AC = BC.*

Résolution.

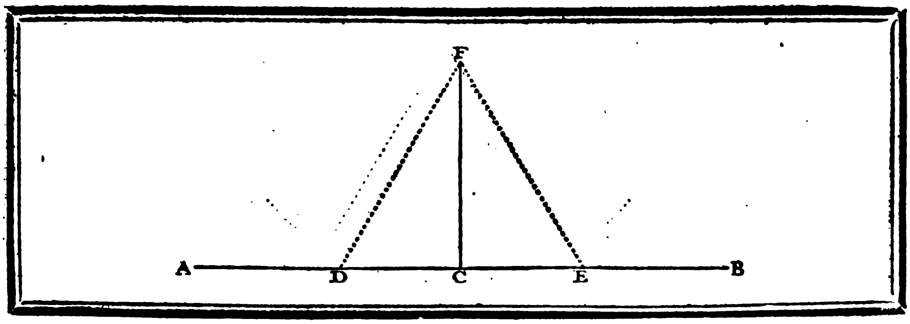
1. SUr la droite AB conſtruiſez le △ équilatéral ADB. P. 1. L. 1.
2. Coupez en deux parties égales ∀ ADB par la droite DC. P. 9. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque AD = BD (*Ref.* 1.), que le côté DC eſt commun aux deux △ ADC, BDC & ∀ compris ADC = ∀ compris BDC (*Ref.* 2.).

1. Ces deux △ ADC, BDC, ont deux côtez égaux à deux côtez chacun à chacun ; & ∀ compris ADC = ∀ compris BDC (*Ref.* 2.).
2. Partant, la baſe AC = à la baſe BC. P. 4. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XI. *PROBLEME VI.*

D'un point quelconque (C), dans une droite indéfinie (AB), élever une perpendiculaire (CF) sur cette droite.

DONNEE	CHERCHEE.
La droite indéfinie AB & le point C dans cette droite.	*La droite CF elevée du point C ⊥ sur AB.*

Résolution.

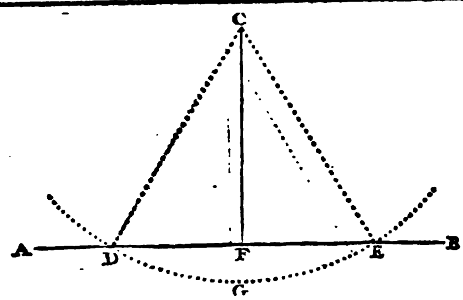
1. DE part & d'autre du point C, prenez les droites CD, CE = entr'elles. — Prop. 3. L. 1.
2. Sur la droite DE construisez le △ équilatéral DFE. — Prop. 1. L. 1.
3. Du point F au point C tirez la droite FC. — Dem .1.

DEMONSTRATION.

PUisque CD est = à CE (*Ref.* 1), FD = FE (*Ref.* 2), & que le côté CF est commun aux deux △ DFC, EFC.

1. Il est évident que ces deux △ ont les trois côtés égaux aux trois côtés chacun à chacun.
2. Par conséquent, les ∀ contigus FCD, FCE (compris par les côtés égaux FC, CD, item FC, CE) sont égaux entr'eux. — Prop. 8. L. 1.
4. Mais c'est la droite FC qui tombant sur AB, forme ces ∀ contigus = entr'eux.
3. Partant, la droite FC est ⊥ sur AB. — Def. 10. L 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XII. PROBLEME VII.

D'un point donné (C), hors d'une ligne droite indéfinie (AB); abaisser sur cette droite une ligne perpendiculaire (CF).

DONNEE	CHERCHEE.
La droite indéfinie AB et le point C hors de cette droite.	*La droite CF abaissée du point C ⊥ sur AB.*

Résolution.

1. DE l'autre côté de la droite AB, par rapport au point donné C, prenez un point quelconque G.
2. Du point C comme centre, & du rayon CG, décrivez un arc de ⊙ DGE, qui coupe la ligne indéfinie AB en deux points D & E. Dem. 3.
3. Coupez la ligne DE en deux parties égales, au point F. P. 10. L. 1.
4. Du point C au point F tirez la droite CF. Dem. 1.

Préparation.

Du point C aux points D & E tirez les droites CD & CE. Dem. 1.

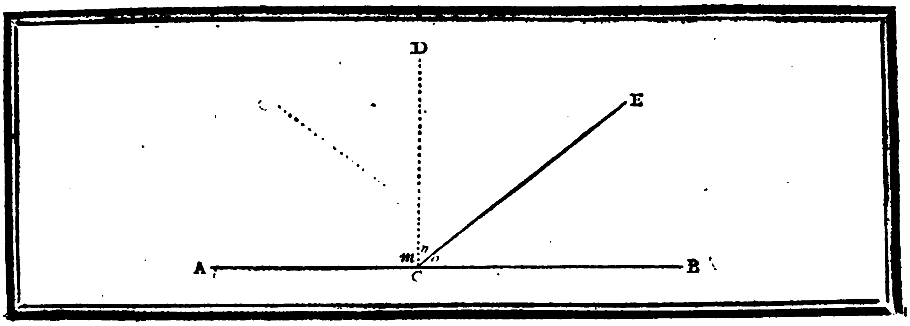
DEMONSTRATION.

PUisque les lignes CD, CE, font tirées du centre C à la ○ DGE (*Ref.* 2. & *Prep.*),
1. Ces lignes font des rayons d'un même ⊙. D. 16. L. 1
2. Partant, la ligne CD est = à la ligne CE. D. 15. L. 1

Puis donc que CD est = à CE (*Arg.* 2), DF = FE (*Ref.* 3) & que le côté CF est commun aux deux △ DCF, ECF
3. Ces deux △ ont les trois côtés égaux aux trois côtés chacun à chacun.
4. Partant, les ∀ CFD, CFE, compris par les côtés égaux FC, FD, & FC, FE font = entr'eux. P. 8. L. 1.

Mais ces deux ∀ CFD, CFE = entr'eux (*Arg.* 4), font des ∀ contigus formés par la ligne CF qui tombe sur la ligne AB,
5. Partant, chacun de ces deux ∀ CFD, CFE, est un ∟, & la ligne CF est ⊥ sur la ligne AB. D. 10. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII. THEOREME VI.

Si une ligne droite (EC) tombe sur une autre ligne droite (AB): elle fait ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

Hypothese	These.
EC est une droite tombant sur AB, au point C.	*I. Ou chacun des ∀ ACE, ECB est un ∟.* *II. Ou leur somme est = à deux ∟.*

SUP. I. Si ∀ ACE est = à ∀ ECB

DEMONSTRATION.

Puisque les angles contigus ACE, ECB, formés par les droites CE & AB sont égaux entr'eux *(Sup)*.

1. Il s'ensuit que chacun d'eux est un ∟. — D. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

SUP. II. Si ∀ ACE n'est pas = à ∀ ECB.

Préparation.

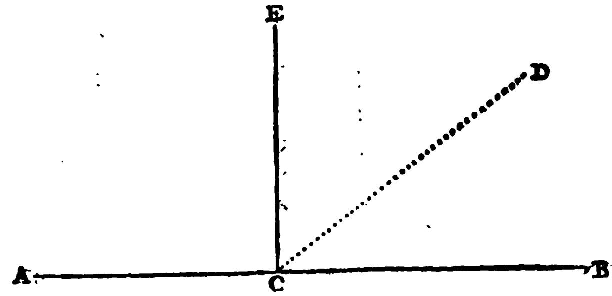
Du point de rencontre C élevez sur AB la ⊥ CD. — P. 11. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque DC est ⊥ sur AB *(Prep)*.

1. Les deux ∀ DCA & DCB sont des ∟. — D. 10. L. 1.
   Mais comme ∀ DCB est = aux deux ∀ *n* + *o*; si on ajoute de part & d'autre ∀ DCA ou ∀ *m*.
2. Les deux ∀ DCA + DCB sont = aux trois ∀ *m* + *n* + *o*. — Ax. 2.
   Derechef, puisque ∀ ECA est = aux deux ∀ *m* + *n*. si on ajoute de part & d'autre ∀ ECB ou ∀ *o*.
3. Les deux ∀ ECA, ECB sont aussi = à ces mêmes trois ∀ *m* + *n* + *o*. — Ax. 2.
4. Par conséquent, les deux ∀ ECA & ECB sont = aux deux ∀ DCA & DCB. — Ax. 1.
   Mais les deux ∀ DCA & DCB étant deux ∟ *(Arg. 1)*.
5. Il est évident, que la somme des deux ∀ ECA & ECB est aussi = à deux ∟. — Ax. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. THEOREME VII.

Si deux droites (AC, BC) rencontrent de part & d'autre une droite (EC), en un même point (C), faisant avec cette droite (EC) la somme des deux angles contigus (ACE, ECB) égale à deux angles droits: ces deux lignes droites (AC, BC) se rencontreront directement.

Hypothese.	These.
I. Les deux lignes AC, BC se rencontrent au point C.	*Les lignes AC, BC, se rencontrent directement*
II. Les ∀ contigus ACE + ECB sont = à deux ∟.	*c. à. d. elles ne forment qu'une même ligne droite AB.*

Demonstration.

Si non.

On pourra prolonger AC quelque part de C, en D, ensorte que le prolongement DC ne fasse avec AC, qu'une même ligne droite ACD. Dem. 2.

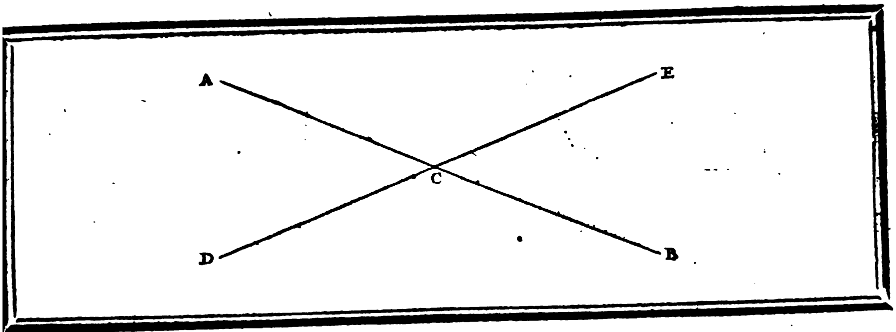
Préparation.

Prolongez donc AC, de C en D. Dem. 2.

Puis donc que la ligne ACD est une ligne droite sur laquelle tombe la ligne EC.

1. Il s'ensuit, que la somme des ∀ contigus ACE + ECD est = à deux ∟. P. 13. L. 1.
   Mais les ∀ ACE + ECB étant aussi = à deux ∟ (*Hyp.* 2).
2. Les deux ∀ ACE + ECB sont donc = aux deux ∀ ACE + ECD. Ax. 1.
   Otant donc de part & d'autre ∀ commun ACE. Ax. 3.
3. Les ∀ restans ECB & ECD seront égaux entr'eux.
   Mais ∀ ECB étant le tout, & ∀ ECD sa partie,
4. Il s'ensuit, que le tout est égal à sa partie. Ax. 8.
5. Ce qui est impossible.
6. Partant, les lignes AC & BC se rencontrent directement; ou ne forment qu'une même ligne droite AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. *THEOREME VIII.*

Si deux lignes droites (AB, DE) s'entre-coupent (en C): les angles (ECA, DCB & ACD, BCE), opposés au sommet (C), sont égaux entr'eux.

Hypothese.	These.
AB, DE sont des lignes droites, qui s'entre-coupent au point C.	*I.* ∀ *ECA* = ∀ *DCB.* *II.* ∀ *ACD* = ∀ *BCE.*

Demonstration.

Puisque la droite AC tombe sur la droite DE (*Hyp.*),

1. La somme des deux ∀ contigus ECA + ACD est = à deux L. Prop. 13. L. 1.

Derechef, puisque la droite DC tombe sur la droite AB (*Hyp.*),

2. La somme des ∀ contigus ACD + DCB est aussi = à deux L. Prop. 13. L. 1.

3. Par conséquent, les ∀ ECA + ACD sont égaux aux ∀ ACD + DCB. Ax. 1.

Retranchant donc de ces sommes égales (*Arg.* 3), ∀ ACD, qui leur est commun:

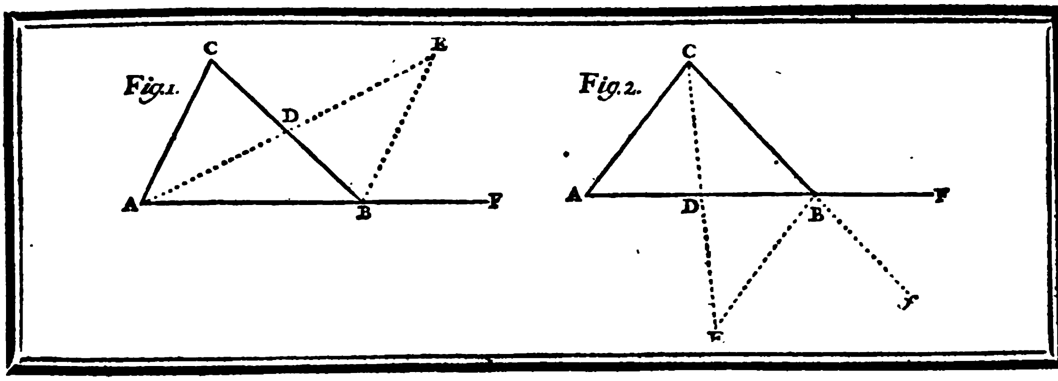
4. Les ∀ restans ECA, DCB, opposés au sommet C, sont = entr'eux. Ax. 3.

C. Q. F. D. I.

Par un raisonnement semblable on prouvera

5. Que ∀ ACD est = à ∀ BCE qui lui est opposé au sommet.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XVI. THEOREME IX.

EN tout triangle (ACB), dont un des côtés (comme AB) eſt prolongé, l'angle extérieur (CBF) eſt plus grand que chacun des intérieurs oppoſés (ACB, CAB).

HYPOTHESE.	THESE.
I. ACB eſt un △. *II. ∀ CBF eſt un ∀ extérieur formé par le côté prolongé AB.* *III. Les ∀ ACB & CAB ſont intérieurement oppoſés.*	*∀ extérieur CBF > que ∀ intérieur oppoſé ACB, ou CAB.*

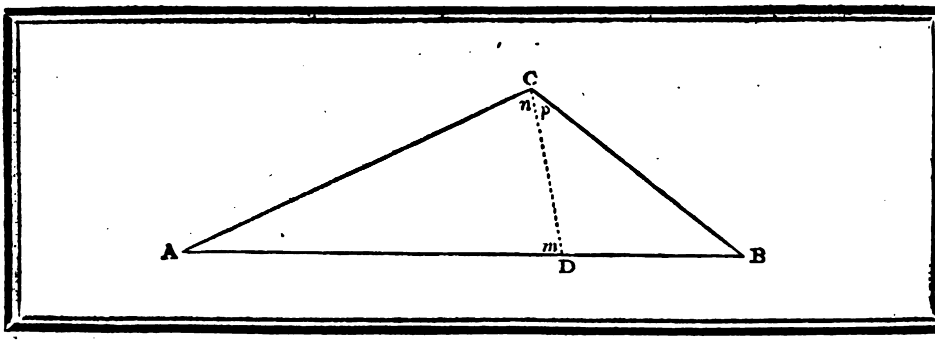
Préparation.

1. PArtagez CB en deux également au point D (*Fig.* 1).	P. 10. L. 1.
2. Du point A au point D tirez la ligne AD & prolongez la indéfiniment en E.	Dem. 1.
3. Faites DE = DA.	Prop. 3. L. 1.
4. Du point B au point E tirez la droite BE.	Dem. 1.

DEMONSTRATION.

LEs droites AE, BC (*Fig.* 1) s'entre-coupent au point D. (*Prep.* 2).	
1. Par conſequent, les ∀ oppoſés au ſommet CDA, BDE ſont = entr'eux.	Prop. 15. L. 1.
Puis donc que dans les △ ACD, DEB, le côté CD eſt = au côté DB (*Pr.* 1, AD = DE (*Prep.* 3) & ∀ compris CDA eſt = à ∀ compris BDE. (*Arg.* 1).	
2. Il ſuit que les autres ∀ ſont = aux autres ∀, chacun à chacun de ceux qui ſont oppoſés à des côtés égaux.	Prop. 4. L. 1.
Or les ∀ ACD, DBE ſont oppoſés aux côtés égaux AD, DE (*Prep.* 3).	
3. Donc ∀ ACD eſt = à ∀ DBE.	
Or ∀ CBF étant le tout, & ∀ DBE ſa partie.	
4. Il s'enſuit que ∀ CBF > ∀ DBE.	Ax. 8.
5. Partant, ∀ extérieur CBF eſt auſſi > ∀ intérieur ACB.	N. C.
De la même manière, en partageant le côté AB en deux également, au point D (*Fig.* 2), on prouvera par un raiſonnement ſemblable,	
6. Que ∀ extérieur AB*f* eſt > ∀ intérieur CAB.	
Mais cet ∀ AB*f* eſt oppoſé au ſommet à ∀ CBF.	Prop. 15. L. 1.
7. D'où il ſuit que ∀ AB*f* = ∀ CBF.	N. C.
8. Partant, il eſt encore vrai que ∀ extérieur CBF > ∀ intérieur CAB.	

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII. *THEOREME XI.*

DAns tout triangle (ACB) ; les plus grands côtés sont opposés aux plus grands angles.

HYPOTHESE.	THESE.
ACB est un △, ou AB est un côté > AC.	*∀ ACB, opposé au > côté AB, est plus grand que ∀ ABC opposé au moindre côté AC.*

Préparation.

Puisque le côté AB > AC (*Hyp.*).

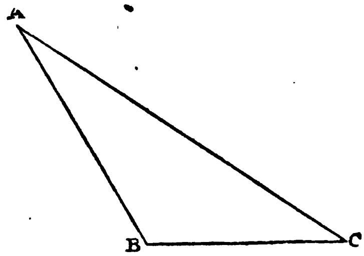
1. Faites AD = AC. — Prop. 3. L. 1.
2. Du point C au point D tirez la droite CD. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque le côté AD est = au côté AC (*Prep.* 1).

1. Le △ ACD est isoscéle. — D. 25. L. 1.
2. Partant, les ∀ *m* & *n* sur la base CD sont = entr'eux. — Prop. 5. L. 1.
   Or ∀ *m* étant un ∀ extérieur du △ DCB.
3. Il s'ensuit, qu'il est > ∀ intérieur opposé DBC. — Prop. 16. L. 1.
   Mais ∀ *m* est = à ∀ *n* (*Arg.* 2).
4. Donc ∀ *n* est aussi > ∀ DBC — N. C.
   Et si à ∀ *n* on ajoute encore ∀ *p*.
5. ∀ *n*+*p*, ou ∀ ACB, opposé au plus grand côté AB, sera à plus forte raison > ∀ DBC, ou ABC opposé au moindre côté AC. — N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX. *THEOREME XII.*

EN tout triangle (BAC), les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés.

HYPOTHESE.	THESE.
Dans le △ BAC, ∀ C est > ∀ A.	*Le côté AB opposé à ∀ C est > le côté CB opposé à ∀ A.*

DEMONSTRATION.

SI non. Le côté AB est ou égal, ou plus petit que le côté CB. N. C.

CAS. I. Supposé que AB soit = à CB.

PUis donc que le côté AB est = au côté CB (*Sup.* 1).

1. Le △ BAC est isocèle. Def. 25. L. 1.
2. Partant, les ∀ C & A sur la base sont = entr'eux. Prop. 5. L. 1.

Or ces ∀ C & A ne sont pas = entr'eux (*Hyp*).

3. Donc les côtés AB & CB ne sont point = entr'eux non plus.

CAS. II. Supposé que AB soit < CB.

PUis donc que le côté AB est < le côté CB (*Sup.* 2).

1. Il s'ensuit que ∀ C, opposé au plus petit côté AB, est < ∀ A opposé au plus grand côté CB. Prop. 18. L. 1.

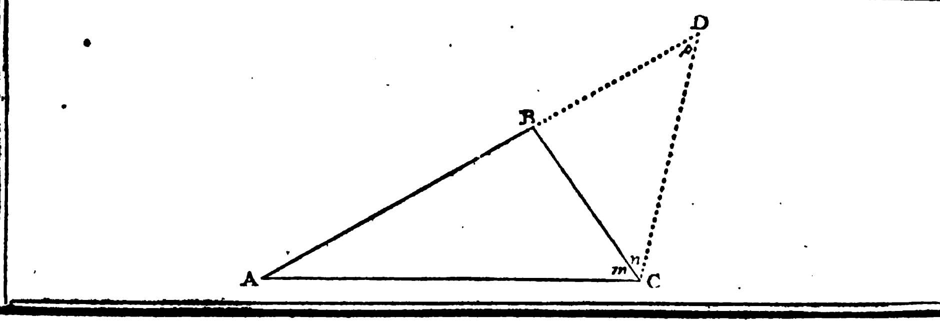
Or ∀ C n'est pas < ∀ A (*Hyp*).

2. Par conséquent le côté AB ne sauroit être < le côté CB.

Le côté AB n'étant donc ni = au côté CB (*Cas.* 1.); ni < le côté CB (*Cas.* 2).

3. Il s'ensuit, que ce côté AB est > le côté CB. N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XX. THEOREME XIII.

En tout triangle (ABC): deux côtés quelconques (AB, BC) sont plus grands que le troisieme (AC).

Hypothese.
ABC est un △,

These.
Deux côtés quelconques, comme AB+BC, sont > le troisieme AC,

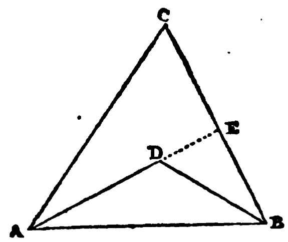
Préparation.

1. Prolongez un des deux côtés, comme AB, à l'infini. — Dem. 2.
2. Faites BD = à BC. — Prop. 3. L. 1.
3. Du point C au point D tirez la droite CD. — Dem. 1.

Demonstration.

Puisque dans le △ BDC le côté BD est = au côté BC (*Prep.* 2).
1. Ce triangle est isoscéle. — Def. 25. L. 1.
2. Par conséquent, les ∀ sur la base *n* & *p* sont = entr'eux. — Prop. 5. L. 1.
Or ∀ *m*+*n* étant le tout & ∀ *n* sa partie.
3. Il s'ensuit, que ∀ *m*+*n* est > ∀ *n*. — Ax. 8.
Mais ∀ *m*+*n* étant > ∀ *n* (*Arg.* 3) & cet ∀ *n* étant = à ∀ *p* (*Arg.* 2).
4. Il est évident, que ∀ *m*+*n* est > ∀ *p*. — N. C.
∴ Puis donc que dans le △ ADC, ∀ *m*+*n* est > ∀ *p* (*Arg.* 4).
5. Le côté AD opposé au plus grand ∀ *m*+*n* est aussi > le côté AC opposé au plus petit ∀ *p*. — Prop. 19. L. 1.
Mais à cause que la droite BD est = à la droite BC (*Prep.* 2); si on ajoute de part & d'autre le côté AB,
6. Il s'ensuit, que AB+BD, ou AD est = à la somme des deux côtés AB+BC — Ax. 2.
Mais AD est > le côté AC (*Arg.* 5).
7. Partant, la somme des deux côtés AB+BC est aussi > le troisieme côté AC. — N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. *THEOREME XIV.*

Si des extrêmités (A & B) d'un côté (AB) de quelque triangle (ACB), on tire à un point quelconque (D), pris au dedans de ce triangle, deux lignes droites (DA, DB): ces deux droites seront plus petites que les deux côtés (CA, CB) de ce triangle; mais elles comprendront un plus grand angle (ADB).

Hypothese.	These.
DA, DB sont deux droites tirées, des points A & B au point D, pris au dedans du △ ACB.	*I. DA + DB < CA + CB.* *II. ∀ ADB > ∀ C.*

Préparation.

Prolongez la droite DA, jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté CB en E. Dem. 2.

Demonstration.

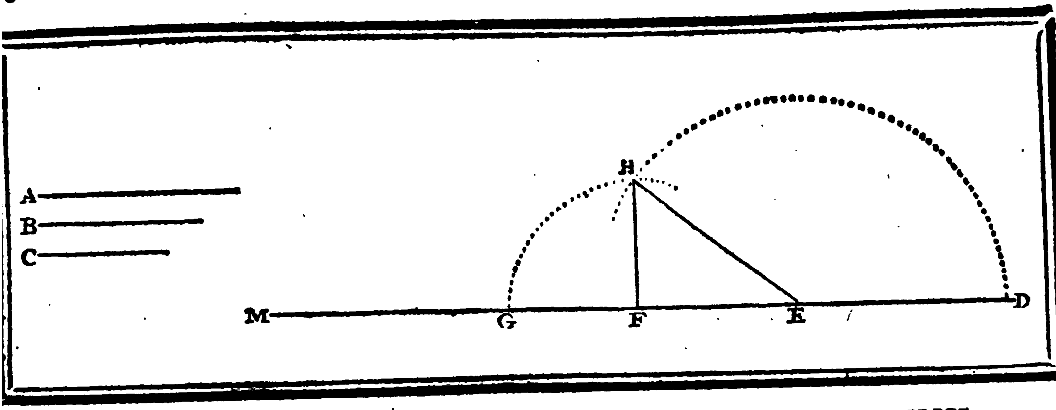
Puisque la figure ACE est un △ (*Def.* 21. *L.* 1).

1. Les deux côtés CA + CE sont > le troisieme AE. Prop. 20. L. 1.
Si on ajoute de part & d'autre la ligne EB,
2. Les côtes CA + CB (c. à. d. CA + CE + EB) sont > les lignes AE + EB. Ax. 4.
Derechef, la figure DEB étant aussi un △ (*Def.* 21. *L.* 1).
3. Les deux côtés EB + ED sont > le troisieme DB. Prop. 20. L. 1
Si on ajoute donc de part & d'autre, la partie commune DA;
4. Les lignes AE + EB (c. à. d. EB + ED + DA) sont > les lignes DA + DB. Ax. 4.
Mais on a prouvé, que les côtés CA + CB sont > les lignes AE + EB (*Arg.* 2).
5. Partant, à plus forte raison les côtes CA + CB seront > les lignes DA + DB. N. C.

C. Q. F. D. I.

De même; puisque ∀ ADB est un ∀ extérieur du △ DEB (*Prep.*) & que ∀ DEB est son intérieur opposé,
1. Il suit, que ∀ ADB est > ∀ DEB. Prop. 16. L. 1.
2. Par la même raison; ∀ DEB est > ∀ C.
Or puisque ∀ ADB > ∀ DEB (*Arg.* 1), & que ∀ DEB est > ∀ C (*Arg.* 2).
3. Il est évident, que ∀ ADB est à plus forte raison > ∀ C. N. C.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXII. *PROBLEME VIII.*

De trois lignes droites, égales à trois autres droites données (A, B, C), construire un triangle (FHE); en supposant que deux quelconques de ces droites données soient plus grandes que la troisieme.

DONNEES.

Les lignes droites A, B, C telles que $A+B>C$, $A+C>B$, $C+B>A$.

CHERCHEE.

La construction d'un △ FHE, tel que EH soit $=A$, $FE=B$, *&* $FH=C$.

Résolution.

1. Tirez la droite indéterminée DM. — Dem. 1.
2. Faites ED = à la donnée A, FE = à la donnée B, & FG = à la donnée C. — Prop. 3. L. 1.
3. Du point E comme centre & du rayon ED décrivez le ⊙ DH. — Dem. 3.
4. Du point F comme centre & du rayon FG décrivez le ⊙ GH.
5. Des points E & F, au point d'intersection H, tirez les droites EH, FH. — Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Les droites ED, EH étant tirées du centre E à la ○ DH (*Ref.* 3 & 5).

1. Ces deux droites ED, EH sont des rayons d'un même ⊙ DH. — Def. 16. L. 1.
2. Par consequent, la droite ED est = à la droite EH. — Def. 15. L. 1.

   Puis donc que ED est = à EH (*Arg.* 2) & que la droite donnée A est aussi = à la même ligne ED (*Ref.* 2). — Ax. 1.
3. Il s'ensuit, que EH est = à la donnée A.

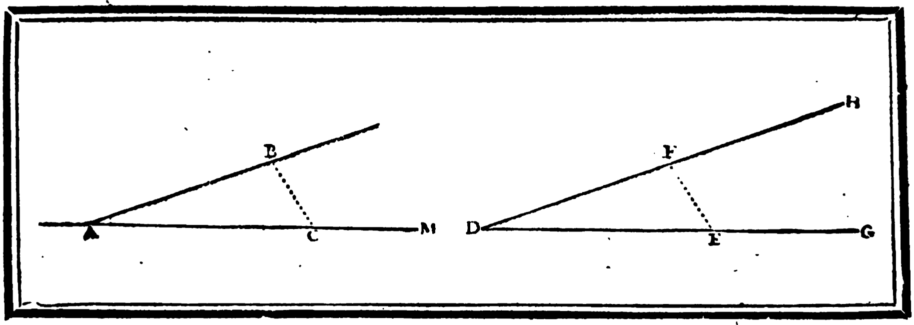
   Par un raisonnement semblable on prouvera, que
4. La ligne FH est = à la donnée C.

   Or le côté EH étant = à la donnée A (*Arg.* 3), le côté FH = à la donnée C (*Arg.* 4), & enfin le côté FE = à la donnée B (*Ref.* 2).
5. Il est évident, que les trois côtés EH, FE, FH du △ FHE, que l'on vient de construire, sont = aux trois droites données A, B, C.

C. Q. F. F.

REMARQUE.

La condition ajoutée, que deux des données quelconques soient plus grandes que la troisieme, est essentielle, en vertu de la XX Prop. *du* 1 Livre; *sans cette condition les cercles décrits des centres* E & F *ne sçauroient s'entre-couper, défaut qui rendroit la construction impossible.*



PROPOSITION XXIII. PROBLEME IX.

UNe droite indéterminée (AM) étant donnée, avec un de ses points (A); décrire sur cette droite & à ce point un angle rectiligne (BAC), égal à un autre angle rectiligne donné (HDG).

Donnee	Cherchee.
I. La droite indéterminée AM,	*Un angle BAC décrit sur AM,*
II. Le point A dans la droite AM.	*au point A = à ∀ HDG.*
III. L'angle rectiligne HDG.	

Résolution.

1. SUr les jambes DG, DH, de l'angle donné HDG, prenez deux points quelconques E & F.
2. Du point E au point F tirez la droite EF. Dem. 1.
3. Sur la droite indéterminée AM & au point A, construisez un △ ABC, dont les trois côtés soient égaux aux trois côtés du △ DFE. Prop. 22. L. 1.

DEMONSTRATION.

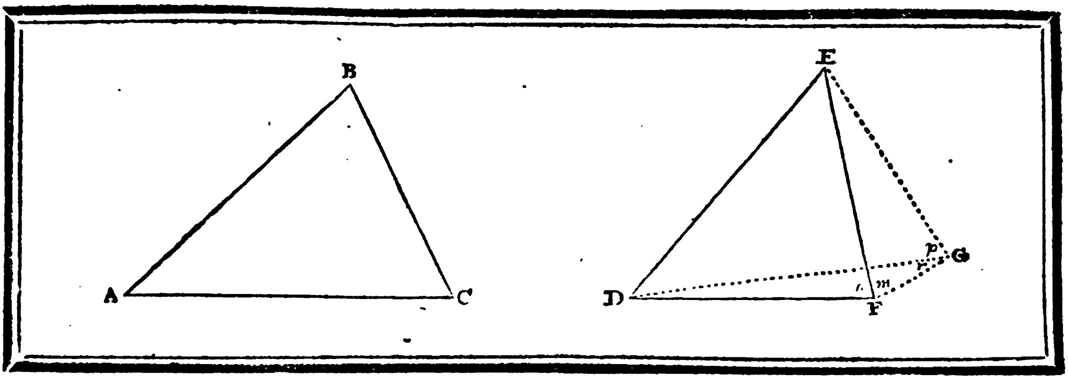
PUisque les trois côtés AB, AC, BC du △ ABC sont = aux trois côtés DF, DE, FE du △ DFE chacun à chacun (*Ref.* 3).

1. Il s'ensuit, que les ∀ BAC & HDG, opposés aux côtés égaux BC, FE, sont = entr'eux. Prop. 8. L. 1.

Mais ∀ BAC étant = à ∀ donné HDG, & se trouvant décrit outre cela sur la droite donnée AM au point donné A (*Ref.* 3).

2. Il s'ensuit, qu'on a décrit sur une droite donnée AM, & à son point donné A, un ∀ rectiligne BAC = à un autre ∀ rectiligne donné HDG.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXIV. *THEOREME XV.*

SI deux triangles (ABC, DEF), ont deux côtés (BA, BC) égaux à deux côtés (ED, EF) chacun à chacun; mais l'angle compris (B) plus grand que l'angle compris (DEF): la base (AC) opposée au plus grand angle, sera aussi plus grande que la base (DF) opposée au plus petit angle.

Hypothese.	These.
I. *BA* $=$ *ED*	*La base AC est* $>$ *la base DF.*
II. *BC* $=$ *EF.*	
III. ∀ *B* $>$ ∀ *DEF.*	

Préparation.

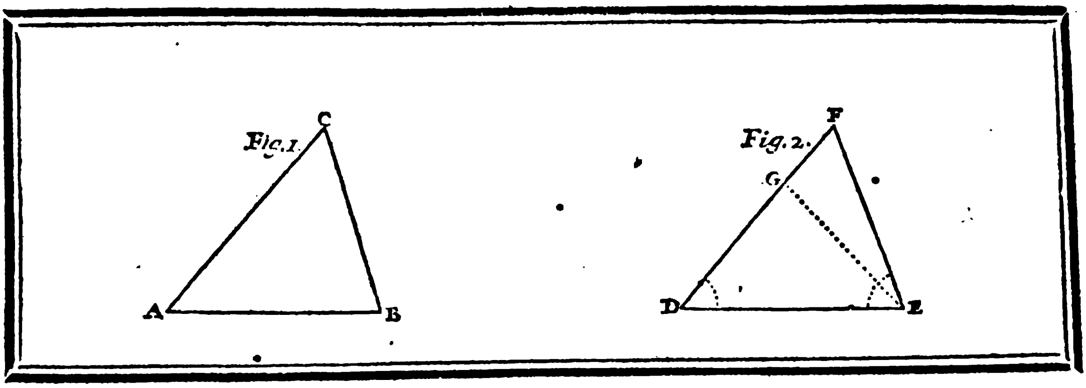
1. SUr la ligne DE au point E décrivez ∀ DEG $=$ à ∀ donné B. Prop. 23. L. 1.
2. Faites EG $=$ à BC ou à EF. Prop. 3. L. 1.
3. Des points D & F au point G tirez les droites DG, FG. Dem. 1.

Demonstration.

PUisque dans le △ ABC les côtés BA, BC sont $=$ aux côtés ED, EG du △ DEG (*Hyp.* 1. *Prep.* 2) & ∀ compris B $=$ à ∀ compris DEG (*Prep.* 1).

1. Il suit, que la base AC est $=$ à la base DG. Prop. 5. L. 1.
   Derechef; puisque EG est $=$ au côté EF (*Prep.* 2. *Hyp.* 2).
2. Le △ FEG est un △ isoscéle. Def. 25. L. 1.
3. Partant, ∀ *m* $=$ ∀ *r* $+$ *p*. Prop. 5. L. 1.
   Puis donc que ∀ *m* $=$ ∀ *r* $+$ *p* (*Arg.* 3); si on retranche du dernier sa partie *p*,
4. L'angle *m* sera $>$ ∀ *r*. N. C.
   Et si à ∀ *m* on ajoute encore ∀ *n*;
5. L'angle entier *m* $+$ *n* sera beaucoup $>$ ∀ *r*. N. C.
6. Par conséquent, le côté DG, opposé au plus grand ∀ *m* $+$ *n*, est $>$ le côté DF opposé au plus petit ∀ *r*. Prop. 19. L. 1.
   Or la droite DG étant $>$ DF (*Arg.* 6) & cette même droite DG étant $=$ à la base AC (*Arg.* 1).
7. Il est évident, que la base AC est aussi $>$ la base DF. N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVI. THEOREME XVII.

Si deux triangles (ACB, DFE), ont deux angles (A & B) égaux à deux angles (D & FED) chacun à chacun, & un côté égal à un côté; soit, que ce côté, (comme AB & DE) soit adjacent aux deux angles égaux; soit, qu'il se trouve opposé (comme AC & DF) à un de ces angles: ils auront aussi les deux autres côtés (AC, BC ou AB, BC) égaux aux deux autres côtés (DF, EF ou DE, EF) chacun à chacun, & le troisieme angle (C) égal au troisieme angle (F).

CAS. I.

Hypothese		These
I. ∀ *A* = ∀ *D.*	Lorsque les côtés égaux AB, DE	*I.* *AC* = *DF.*
II. ∀ *B* = ∀ *FED.*	sont adjacens aux angles égaux A & D,	*II.* *BC* = *EF.*
III. *AB* = *DE.*	item B & FED, (*Fig.* 1 & 2).	*III.* ∀ *C* = ∀ *F.*

Demonstration.

Si non.

Les côtés sont inégaux, & l'un, comme DF, sera > l'autre AC.

Préparation.

1. Retranchez donc du plus grand côté DF une partie DG = à AC. Prop. 3. L. 1.
2. Du point G au point E tirez la droite GE. Dem. 1.

Puis donc que dans les △ ACB, DGE le côté AC est = au côté DG (*Prep.* 1), AB = DE (*Hyp.* 3) & que ∀ compris A est = à ∀ compris D (*Hyp.* 1).

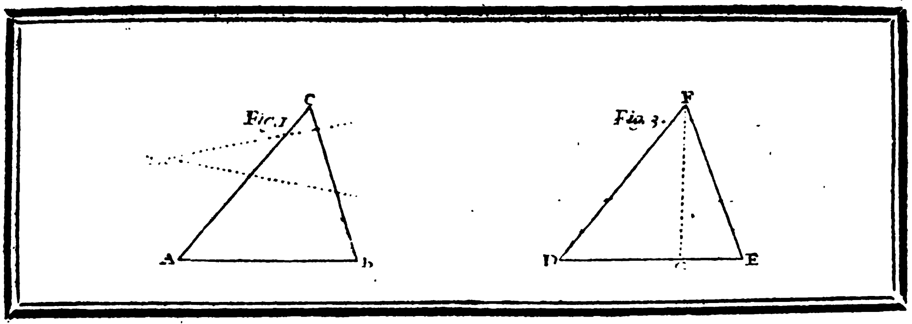
1. Les ∀ B & GED, opposés aux côtés égaux AC & DG, sont = entr'eux. Prop. 4. L. 1.
   Mais ∀ B etant = à ∀ GED (*Arg.* 1) & ce même ∀ B étant aussi = à ∀ FED (*Hyp.* 2).
2. Il s'ensuit, que ∀ GED est = à ∀ FED. Ax. 1.
   Or ∀ FED étant le tout & ∀ GED sa partie.
3. Le tout seroit = à sa partie.
4. Ce qui est impossible. Ax. 8.
5. Les côtés AC, DF ne sont donc point inégaux. N. C.
6. Partant, il sont égaux, ou AC = DF.

C. Q. F. D. I.

Puis donc que dans les △ ACB, DFE, le côté AC est = au côté DF (*Arg.* 6), AB = DE (*Hyp.* 3), & que ∀ compris A est = à ∀ compris D (*Hyp.* 1).

7. Le troisieme côté BC est aussi = au troisieme côté EF, & les ∀ C & F opposés aux côtés égaux AB, DE sont aussi = entr'eux. Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. II. & III.



CAS. II.

Hypothese.		These.
I. ∀ A = ∀ D.	Lorſque les côtés égaux A C, D F	I. A B = D E.
II. ∀ B = ∀ E.	ſe trouvent oppoſés aux angles égaux	II. B C = E F.
III. A C = D F.	B & E (*Fig.* 1 & 3).	III. ∀ C = ∀ F.

Demonstration.

Si non.

Les côtés A B, D E ſont inégaux: & l'un, comme D E, ſera > l'autre A B.

Préparation.

1. Retranchez donc du plus grand côté D E une partie D G = à A B. — Prop. 3. L. 1.
2. Du point G au point F tirez la droite G F. — Dem. 1.

Puis donc que dans les △ A C B, D F G le côté A C eſt = au côté D F (*Hyp.* 3), A B = D G (*Prep.* 1) & que ∀ compris A eſt = à ∀ compris D (*Hyp.* 1).

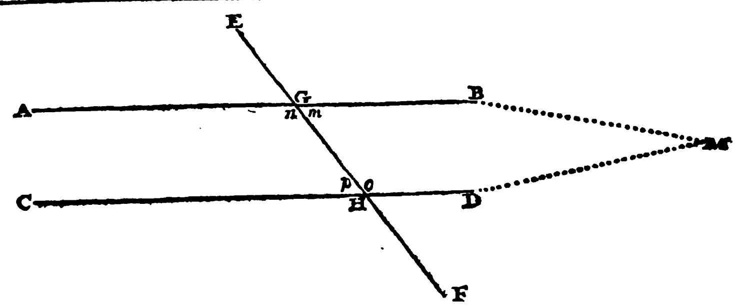
1. Les autres ∀ B & D G F, oppoſés aux côtés égaux A C, D F, ſont = entr'eux. — Prop. 4. L. 1.
   L'angle B étant donc = ∀ D G F (*Arg.* 1) & ce même ∀ B étant auſſi égal à ∀ E (*Hyp.* 2).
2. Il s'enſuit, que ∀ E eſt = à ∀ D G F. — Ax. 1.
   Mais l'angle D G F eſt un ∀ extérieur du △ GFE & ∀ E eſt ſon intérieur oppoſé.
3. Donc ∀ extérieur ſeroit égal à ſon intérieur oppoſé.
4. Ce qui eſt impoſſible. — Prop. 16. L. 1.
5. Partant, les côtés A B, D E ne ſont point inégaux.
6. Ils ſont donc égaux, ou A B = D E. — N. C.

C. Q. F. D. I.

Puis donc que dans les △ A C B, D F E le côté A C eſt = au côté D F (*Hyp.* 3), A B = D E (*Arg.* 6) & que ∀ compris A eſt = à ∀ compris D (*Hyp.* 1).

7. Il eſt évident, que le troiſieme côté B C eſt = au troiſieme côté E F & que les ∀ C & F, oppoſés aux côtés égaux A B, D E, ſont = entr'eux. — Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. II. & III.



PROPOSITION XXVII. *THEOREME XVIII.*

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (AB, CD) situées dans un même plan, fait les angles alternes (*m* & *p* ou *n* & *o*) égaux entr'eux: ces deux lignes (AB, CD) sont paralleles.

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB, CD sont deux lignes droites, situées dans un même plan, *II. La ligne EF les coupe tellement que ∀ m = ∀ p ou ∀ n = ∀ o.*	*Les lignes AB, CD sont Plles*

DEMONSTRATION.

SI non.
Les droites AB, CD prolongées doivent se couper quelque part. D. 35. L. 1.

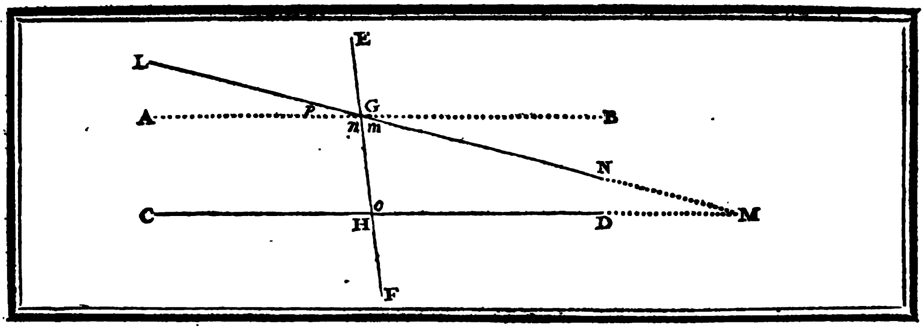
Préparation.

Prolongez les donc jusqu'à ce qu'elles se coupent en M. Dem. 2.

PUis donc que ∀ *n* est un angle extérieur du △ GMH, & ∀ *o* son intérieur opposé; Prop. 16. L. 1.

1. L'angle *n* est > ∀ *o*.
   Mais ∀ *n* est = à ∀ *o* (*Hyp.* 2). N. C.
2. Cet ∀ *n* n'est donc point > ∀ *o*.
3. Partant il est impossible que les droites AB, CD s'entrecoupent en un point comme M. Def. 35. L. 1.
4. D'où il suit qu'elles sont des droites Plles.

C. Q. F. D.



REMARQUE.

SI on reçoit au nombre des axiomes, la proposition qu'Euclide suppose comme évidente par elle-même, * *à sçavoir*, qu'une ligne droite (EF), qui coupe une de deux paralleles (comme AB), en coupera nécessairement l'autre (CD) aussi, pourvû que cette ligne coupante (EF) soit prolongée suffisamment : *on peut démontrer sans peine l'axiome XI, dont la vérité est un peu éloignée des notions communes, & qui sert cependant de fondement à la Proposition XXIX. Voici de quelle maniere cela se peut faire.*

LEMME.

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (LN, CD) situées dans un même plan, fait les angles alternes ($p + n$ & o) inégaux entr'eux : ces deux lignes (LN & CD), prolongées suffisamment, s'il est nécessaire, se rencontreront quelque part (en M), du côté où se trouve le plus petit des angles alternes (o).

Préparation.

CAr puisqu'on suppose ∀ $p + n$ > ∀ o.

1. On peut décrire dans le plus grand ∀ $p + n$, sur la droite EF au point G, l'angle n = ∀ o, — Prop. 23. L. 1.
2. Et prolonger AG à volonté en B. — Dem. 2.

DEMONSTRATION.

PUis donc que les deux lignes AB, CD sont coupées par une troisieme EF, ensorte que les ∀ alternes n & o sont = entr'eux (*Prep.* 1).

1. Ces deux lignes AB, CD sont Plles. — Prop. 27. L. 1.

Mais la ligne LN coupe une des deux Plles, à sçavoir AB en G.

2. Donc, si on la prolonge suffisamment, elle coupera aussi l'autre CD quelque part en M, du côté où se trouve le plus petit des ∀ alternes o. — Ax. Sup.

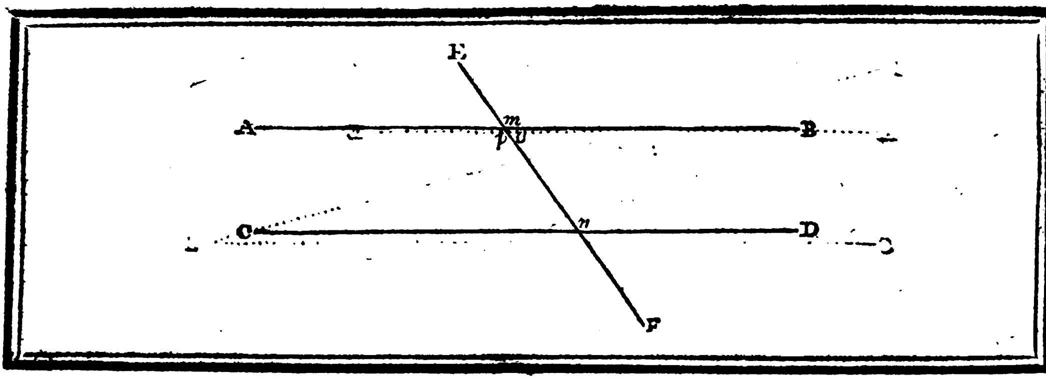
C. Q. F. D.

Corollaire.

LOrsque ∀ o < ∀ $p + n$, les deux angles intérieurs $o + m$ sont nécessairement < deux ∟ ; vû que les deux angles $p + n$ & m sont égaux à deux ∟. — P. 13. L. 1.
Par conséquent, lorsque les deux ∀ intérieurs sont < deux ∟ ; les lignes LN, CD, qui forment ces angles avec EF, se rencontreront quelque part du côté de la ligne EF, où ces angles se trouvent placés, pourvû qu'on les prolonge suffisamment. — Lem.

C. Q. F. D.

* Voyez la Prép. des Propositions XXX, XXXVII & de plusieurs autres.



PROPOSITION XXVIII. *THEOREME XIX.*

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (AB, CD) situées dans un même plan, fait l'angle extérieur (*m*) égal à son intérieur (*n*) opposé du même côté; ou bien les deux intérieurs ($o + n$) du même côté égaux à deux droits: ces deux lignes (AB, CD) sont paralleles entr'elles.

CAS. I.

Hypothese.	These.
∀ *m* = ∀ *n*.	*AB, CD sont des lignes Plles.*

Demonstration.

Puisque les ∀ *m* & *p* sont des ∀ opposés au sommet.

1. Ils sont = entr'eux. — Prop. 15. L. 1.

   L'angle *p* étant donc = à ∀ *m* (*Arg.* 1) & ∀ *n* étant = au même ∀ *m* (*Hyp.*).
2. Il est évident que ∀ *p* est aussi = à ∀ *n*. — Ax. 1.

   Mais les ∀ égaux *p* & *n* (*Arg.* 2), sont en même tems des ∀ alternes.
3. Par conséquent, les droites AB, CD sont Plles. — Prop. 27. L. 1.

CAS. II.

Hypothese.	These.
Les ∀ $o + n$ sont = à 2 ∟.	*AB, CD sont des lignes Plles.*

Demonstration.

Puisque la droite EF, tombant sur la droite AB, forme avec elles les ∀ contigus *o* & *p*.

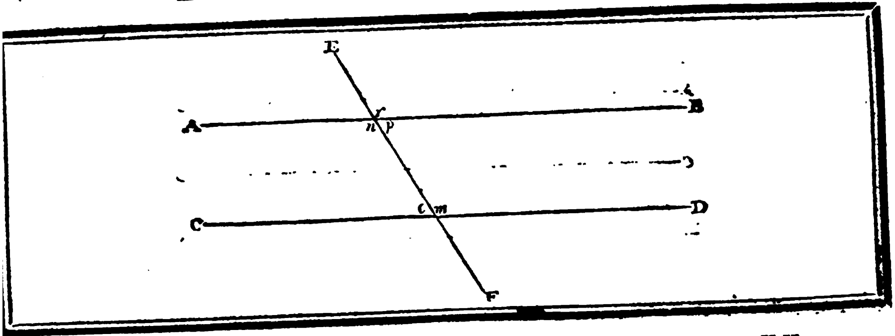
1. Ces ∀ $o + p$ sont = à deux ∟. — Prop. 13. L. 1.

   Les ∀ $o + p$ étant donc = à deux ∟ (*Arg.* 1) & les ∀ $o + n$ étant aussi = à deux ∟ (*Hyp.*).
2. Il s'ensuit que les ∀ $o + p$ sont = aux ∀ $o + n$. — Ax. 1.

   Et si on retranche de part & d'autre l'angle commun *o*;
3. Les ∀ restans *p* & *n* seront = entr'eux. — Ax. 3.

   Or ces ∀ égaux *p* & *n* (*Arg.* 3), sont en même tems des ∀ alternes.
4. Par conséquent, les droites AB, CD sont Plles. — Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIX. *THEOREME XX.*

UNe ligne droite (EF), tombant sur deux autres droites paralleles (AB, CD), fait les angles alternes (*n* & *m*) égaux; de plus l'angle extérieur (*r*) égal à son intérieur opposé du même côté (*m*); & enfin les deux intérieurs opposés du même côté (*p* + *m*) égaux à deux droits.

HYPOTHESE.	THESE.
AB, CD sont deux lignes Plles, coupées par une même droite EF.	*I.* ∀ *n* = ∀ *m*. *II.* ∀ *r* = ∀ *m*. *III. Les* ∀ *p* + *m* = *à* 2 ∟.

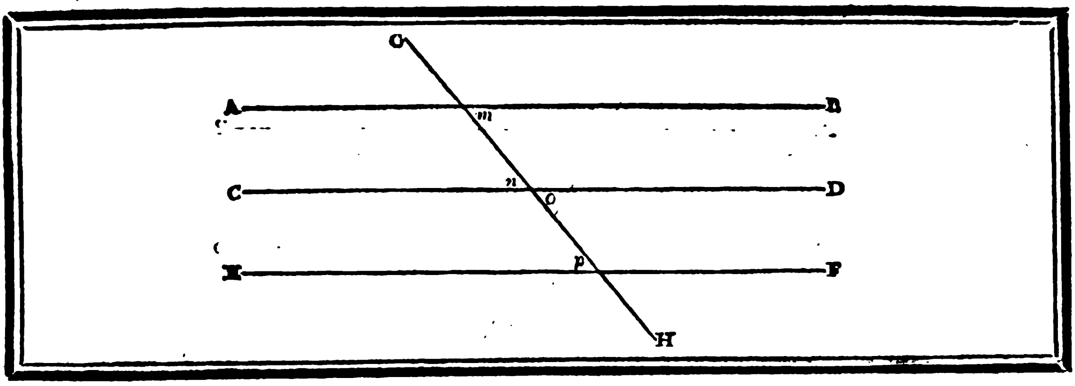
DEMONSTRATION.

SI non.
Les ∀ *m* & *n* sont inégaux,
Et l'un comme ∀ *m* sera < l'autre ∀ *n*. N. C.

PUis donc que ∀ *m* < ∀ *n*; si on ajoute de part & d'autre ∀ commun *p*.
1. Les ∀ *m* + *p* seront < les ∀ *n* + *p*. Ax. 4.
Mais à cause que ∀ *n* & ∀ *p* sont des ∀ contigus, formés par la droite EF, qui tombe sur AB.
2. Ces ∀ *n* + *p* sont = à deux ∟. Prop. 13. L. 1.
3. Partant, les ∀ *m* + *p* (moindres que les ∀ *n* + *p*) sont aussi < deux ∟. N. C.
4. D'où il suit que les lignes AB, CD ne sont pas Plles. Corol. du Lem
Mais les droites AB, CD sont Plles (*Hyp.*).
5. Par conséquent, les ∀ *m* & *n* ne sont point inégaux. Prop. 27. L. 1.
6. Ils sont donc égaux, ou ∀ *n* = ∀ *m*. N. C.
C. Q. F. D. I.

De plus, ∀ *r* & ∀ *n* étant opposés au sommet.
7. Ces angles sont = entr'eux. Prop. 15. L. 1.
Mais ∀ *m* étant = à ∀ *n* (*Arg.* 6) & ∀ *r* étant = au même ∀ *n* (*Arg.* 7).
8. Il s'ensuit, que ∀ *r* est = à ∀ *m*. Ax. 1.
C. Q. F. D. II.

De même; ∀ *n* étant = à ∀ *m* (*Arg.* 6); si on ajoute ∀ commun *p*.
9. Les ∀ *n* + *p* seront = aux ∀ *m* + *p*. Ax. 2.
Mais les ∀ *n* + *p* sont = à deux ∟ (*Arg.* 2).
10. D'où il suit que les ∀ *m* + *p* sont aussi = à deux ∟. Ax. 1.
C. Q. F. D. III.



PROPOSITION XXX. *THEOREME XXI.*

LEs lignes droites (AB, EF), paralleles à une même droite (CD), sont paralleles entr'elles.

HYPOTHESE.	THESE.
AB, EF sont des droites Plles à CD.	*Les droites AB, EF sont Plles entr'elles.*

Préparation.

TIrez la droite GH qui coupe les trois lignes AB, CD, EF.

DEMONSTRATION.

PUisque les droites AB, CD sont deux Plles (*Hyp.*) coupées par une même droite GH (*Prep.*).

1. Les ∀ alternes *m* & *n* sont = entr'eux. — Prop. 29. L. 1.

De même, puisque les droites CD, EF sont deux Plles (*Hyp.*) coupées par une même droite GH (*Prep.*).

2. L'angle extérieur *n* est = à son intérieur *p* opposé du même côté. — Prop. 29. L. 1.

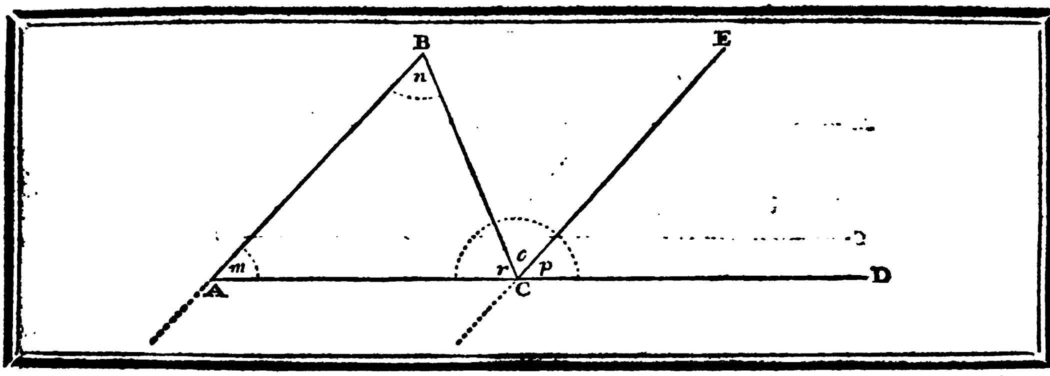
Mais ∀ *n* étant = à ∀ *m* (*Arg.* 1), & le même ∀ *n* étant aussi = à ∀ *p* (*Arg.* 2).

3. Les ∀ *m* & *p* seront = entr'eux. — Ax. 1.

Or ces ∀ égaux *m* & *p* (*Arg.* 3), sont des ∀ alternes, formés par les deux droites AB, EF, qui sont coupées par la droite GH.

4. Par conséquent, ces droites AB, EF sont Plles. — Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXII. THEOREME XXII.

En tout triangle (ABC), un des côtés (comme AC) étant prolongé: l'angle extérieur ($o+p$) eſt égal à la ſomme des deux intérieurs oppoſés ($n+m$); & les trois angles du triangle ($n+m+r$) ſont égaux à deux droits.

Hypotheſe.	Theſe.
ABC eſt un △, dont un des côtés	I. ∀ $o+p$ *eſt* = *aux* ∀ $m+n$.
AC eſt prolongé indéfiniment en D.	II. *Les* ∀ $n+m+r$ *ſont* = *à* 2 ∟.

Préparation.

Par le point C tirez la droite CE Plle à la droite AB. — Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

Puiſque les droites AB, CE ſont deux Plles (*Prep.*) coupées par une même droite BC,

1. Les ∀ alternes n & o ſont = entr'eux. — Prop. 29. L. 1.

De même; puiſque les droites AB, CE ſont deux Plles (*Prep.*) coupées par une même droite AD,

2. L'angle extérieur p eſt = à ſon intérieur m oppoſé du même côté. — Prop. 29. L. 1.

L'angle o étant donc = à ∀ n (*Arg.* 1) & ∀ p = ∀ m (*Arg.* 2).

3. L'angle $o+p$ eſt = aux angles n & m pris enſemble. — Ax. 2.

C. Q. F. D. I.

Puis donc que ∀ $o+p$ eſt = aux ∀ $n+m$ (*Arg.* 3); ſi on ajoute de part & d'autre l'angle commun r,

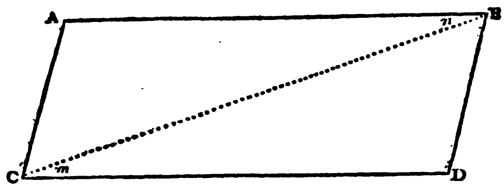
4. Les ∀ $o+p+r$ ſeront = aux trois ∀ $n+m+r$ du △ ABC. — Ax. 2.

Mais ces ∀ $o+p+r$ ſont des ∀ contigus, formés par la ligne BC, qui rencontre AD au même point C.

5. Par conſéquent, les ∀ $o+p+r$ ſont = à deux ∟. — Prop. 13. L. 1.

6. Partant, les trois ∀ $n+m+r$, qui ſont = aux ∀ $o+p+r$ (*Arg.* 4), ſont auſſi = à deux ∟. — Ax. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXXIII. THEOREME XXIII.

Les droites (A C, B D), qui joignent de même part les extrêmités (A, C & B, D) de deux autres droites (A B, C D) égales & paralleles : sont aussi égales & paralleles entr'elles.

Hypothese.

A C, B D sont deux droites, qui joignent de même part les extrêmités de deux autres droites = & Plles A B, C D.

These.

I. Les droites A C, B D sont égales,
II. Et ces droites A C, B D sont Plles.

Préparation.

Du point B au point C tirez la droite B C.

Demonstration.

Puisque les droites A B, C D sont deux Plles (*Hyp.*), coupées par une même droite B C (*Prep.*).

1\. Les ∀ alternes *n* & *m* sont = entr'eux. — Prop. 29. L. 1.

Puis donc que dans les deux △ C A B, B D C le côte C D est = au côté A B (*Hyp.*), le côté B C commun aux deux △ & ∀ compris *m* = à ∀ compris *n* (*Arg.* 1).

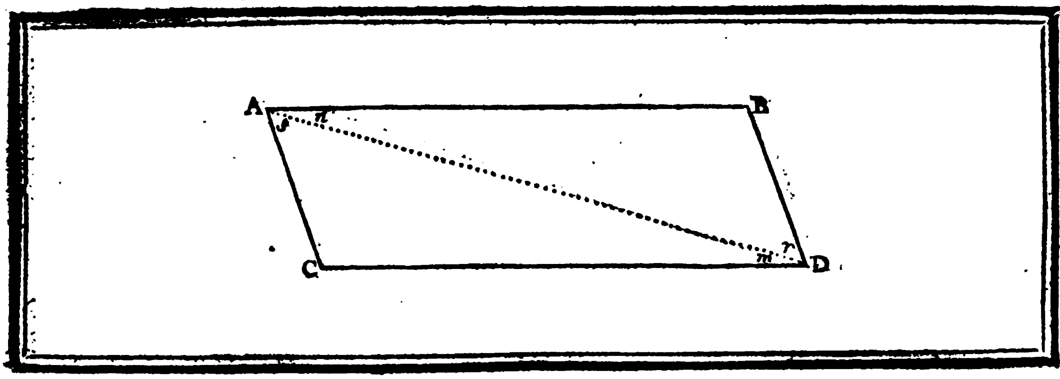
2\. Il s'ensuit, que la base A C est = à la base B D; C. Q. F. D. 1.

3\. Item, que les ∀ A C B, D B C qui sont opposés aux côtés égaux A B C D, sont aussi = entr'eux. — Prop. 4. L. 1.

Or ces ∀ égaux A C B, D B C (*Arg.* 3) sont des ∀ alternes formés par les droites A C, B D coupées par la droite B C.

5\. Par conséquent, les droites A C, B D sont Plles. — Prop 27 L 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXXIV. *THEOREME XXIV.*

EN tout parallélogramme (BC), les côtés opposés (AC, BD item CD, AB) & les angles opposés (B, C item $m + r$, $n + s$) sont égaux entr'eux & la diagonale (AD) le coupe en deux également.

Hypothese.

I. BC est un Pgr.
II. AD est la diagonale de ce Pgr.

These.

I. Les côtés AC, BD item CD, AB sont = entr'eux, & ∀ C = ∀ B.
II. ∀ $m + r$ = ∀ $n + s$.
III. Les △ CAD, BDA formés par la diagonale sont = entr'eux.

Demonstration.

Puisque les droites AB, CD sont deux Plles (*Hyp.* 1) coupées par une même droite AD (*Hyp.* 2).

1. Les ∀ alternes *m* & *n* sont = entr'eux. — Prop. 29. L. 1.

Derechef, puisque les droites AC, BD sont deux Plles (*Hyp.* 1) coupées par une même droite AD (*Hyp.* 2).

2. Les ∀ alternes *r* & *s* sont = entr'eux. — Prop. 29. L. 1.

Mais les △ CAD, BDA ont deux ∀ *m* & *s* = à deux ∀ *n* & *r* (*Arg.* 1 & 2). & le coté AD adjacent à ces ∀ égaux est commun aux deux △.

3. Partant, les côtés AC & BD, opposés aux ∀ égaux *m* & *n*, item les côtés CD, AB, opposés aux ∀ égaux *s* & *r* sont = entr'eux & le troisieme ∀ C est = au troisieme ∀ B. — Prop. 26. L. 1.

C. Q. F. D. I.

Or ∀ *m* étant = à ∀ *n* (*Arg.* 1) & ∀ *r* = ∀ *s* (*Arg.* 2);

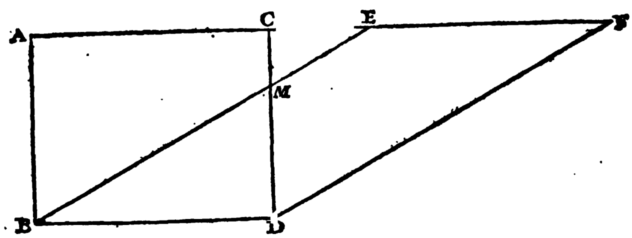
4. L'angle entier $m + r$ est = à l'angle entier $n + s$. — Ax. 2.

C. Q. F. D. II.

Enfin, puisque dans les △ CAD, BDA le côté CD est = au côté AB (*Arg.* 3), le côté AD commun aux deux △ & ∀ compris *m* = à ∀ compris *n* (*Arg.* 1).

5. Ces deux △ CAD, BDA, formés par la diagonale AD sont = entr'eux. — Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. III.



PROPOSITION XXXV. *THEOREME XXV.*

Les parallélogrammes (AD, ED) placés sur la même base (BD) & entre les mêmes paralleles (AF, BD): sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE

I. AD & ED sont deux Pgrs,
II. Et ces deux Pgrs sont placés sur la même base BD & entre les mêmes Plles AF, BD.

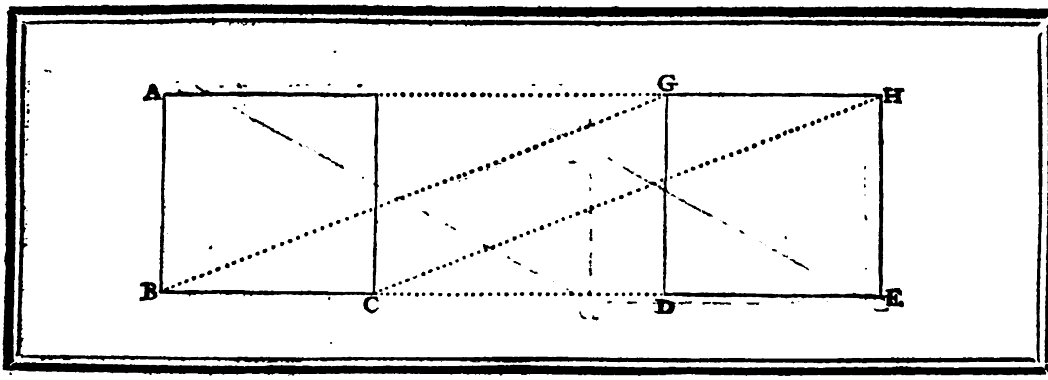
THESE.

Le Pgr AD est = au Pgr BD.

DÉMONSTRATION.

Puisque la figure AD est un Pgr (*Hyp.* 1).
1. Les côtés opposés AC, BD & AB, CD sont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
De même; puisque la figure ED est un Pgr (*Hyp.* 1).
2. Les côtés opposes EF, BD & BE, DF sont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
Or la droite AC étant = à la droite BD (*Arg.* 1) & la droite EF étant aussi = à la même droite BD (*Arg.* 2).
3. Il s'ensuit, que la droite AC est = à la droite EF. Ax. 1.
Puis donc que AC est = à EF (*Arg.* 3); si on ajoute de part & d'autre la droite commune CE.
4. La droite AE est nécessairement = à la droite CF. Ax. 2.
Dans les △ ABE, CDF le côté AB est donc = au côté CD (*Arg.* 1), le côté BE est = au côté DF (*Arg.* 2) & la base AE est = à la base CF (*Arg.* 4).
5. Par conséquent, le △ ABE est = au △ CDF. Prop. 8. L. 1.
Retranchant donc de ces △ égaux ABE, CDF (*Arg.* 5) leur partie commune CME;
6. Les trapezes restans ABMC, MDFE sont = entr'eux. Ax. 3.
Ajoutant enfin a ces trapezes égaux ABMC, MDFE (*Arg.* 6) la partie commune MBD,
7. Les Pgrs AD & ED seront = entr'eux. Ax. 2.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVI. *THEOREME XXVI.*

LEs parallélogrammes (AC, GE), placés sur des bases égales (BC, DE) & entre les mêmes paralleles (AH, BE), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. AC, GE sont deux Pgrs, *II. Et ces deux Pgrs sont placés sur des bases égales BC, DE & entre les mêmes Plles AH, BE.*	*Le Pgr AC est = au Pgr. GE.*

Préparation.

1. DU point B au point G tirez la droite BG.
2. Du point C au point H tirez la droite CH. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la figure GE est un Pgr (*Hyp.* 1).

1. Les côtés opposés DE, GH sont = entr'eux. — Prop. 34. L. 1.

Or la droite BC est = à DE (*Hyp.* 2) & GH est = à la même droite DE (*Arg.* 1).

2. Donc BC est = à GH. — Ax. 1.

Mais puisque BC est = à GH (*Arg.* 2): & que ces droites sont outre cela des Plles (*Hyp.* 2), dont les extrémités sont jointes par les droites GB, HC (*Prep.* 1 & 2).

3. Il est évident, que ces droites GB, HC sont = & Plles. — Prop. 33. L. 1.
4. Partant, la figure GC est un Pgr. — Def. 35. L. 1.

De plus, les Pgrs AC, GC étant placés sur la même base BC, & entre les mêmes Plles AH, BE (*Hyp.* 2).

5. Ces Pgrs AC, GC sont = entr'eux. — Prop. 35. L. 1.

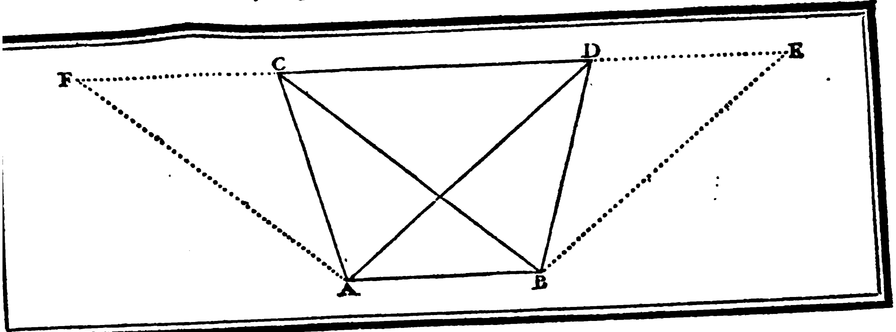
Par un raisonnement semblable on prouvera,

6. Que le Pgr GC est = au Pgr GE.

Puis donc que le Pgr AC est = au Pgr GC (*Arg.* 5), & que le Pgr GE est = au même Pgr GC (*Arg.* 6).

7. Il s'ensuit que le Pgr AC est = au Pgr GE. — Ax. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVII. THEOREME XXVII.

Les triangles (ACB, ADB), placés sur une même base (AB) & entre les mêmes paralleles (AB, CD), font égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

I. ACB, ADB sont deux △,
II. Et ces deux △ sont placés sur la même base AB & entre les mêmes Plles AB, CD.

THESE.

Le △ ACB est = au △ ADB.

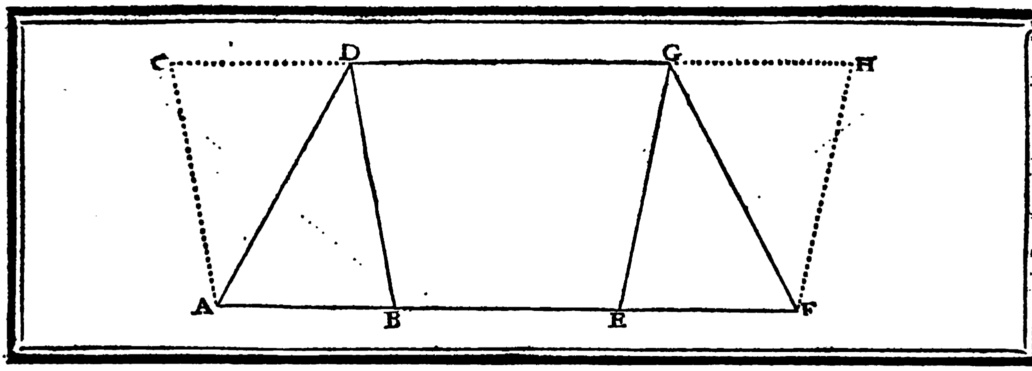
Préparation.

1. Prolongez la droite CD de part & d'autre à l'infini. Dem. 2.
2. Par les points A & B tirez les droites AF, BE Plles aux côtés BC, AD; qui rencontreront la prolongée CD quelque part en F & en E (*Rem. de la Prop. XXVII*). Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans la figure BF les côtés opposés AB, FC & AF, BC sont Plles (*Hyp.* 2. & *Prep.* 2). Def. 35. L. 1.
1. La figure BF est un Pgr.
Par un raisonnement semblable on prouvera,
2. Que la figure AE est un Pgr.
Mais les Pgrs BF, AE, sont placés sur la même base AB & entre les mêmes Plles AB, FE (*Hyp.* 2. & *Prep.* 1). Prop. 35. L. 1.
3. Par conséquent, le Pgr BF est = au Pgr AE.
Or les droites AC, BD sont des diagonales des Pgrs BF, AE (*Prep.* 1 & 2).
4. C'est pourquoi ces diagonales AC, BD partagent les Pgrs BF, AE en deux également. Prop. 34. L. 1.
5. Partant, le △ ACB est la moitié du Pgr BF & le △ ADB la moitié du Pgr AE.
Puis donc que les Pgrs entiers, BF, AE sont égaux entr'eux (*Arg.* 3), & que les △ ACB, ADB sont les moitiés de ces Pgrs (*Arg.* 5). Ax. 7.
6. Il est évident que les △ ACB, ADB sont aussi égaux entr'eux.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVIII. THEOREME XXVIII.

LEs triangles (ADB, EGF), placés sur des bases égales (AB, EF) & entre les mêmes paralleles (AF, DG), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. ADB, EGF sont deux △,	*Le △ ADB est = au △ EGF.*
II. Et ces deux △ sont placés sur des bases = AB, EF.	
& entre les mêmes Plles AF, DG.	

Préparation.

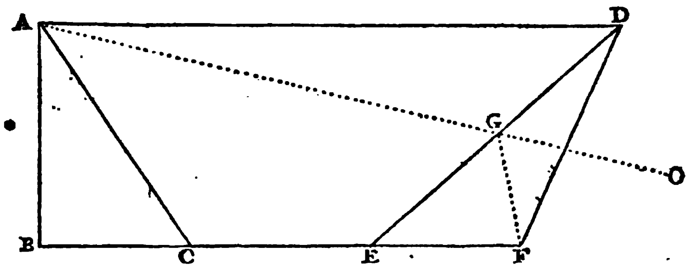
1. PRolongez la droite DG de part & d'autre à l'infini. Dem. 2.
2. Par les points A & F tirez les droites AC, FH Plles aux côtés BD, EG; qui rencontreront la prolongée DG quelque part en C & en H (*Rem. de la Prop. XXVII*). Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque dans la figure BC les côtés opposés AB, CD & AC, BD sont Plles (*Hyp.* 2 & *Prep.* 2);

1. La figure BC est un Pgr. Def. 35. L. 1.
Par un raisonnement semblable on prouvera,
2. Que la figure EH est un Pgr.
Mais les Pgrs BC, EH (*Arg.* 1 & 2) sont placés sur des bases = AB, EF & entre les mêmes Plles AF, CH (*Hyp.* 2).
3. Par conséquent, le Pgr BC est = au Pgr EH. Prop 36. L. 1.
Or les droites AD, FG étant des diagonales des Pgrs BC, EH. (*Prep.* 1. & 2).
4. Ces droites AD, FG partagent les Pgrs BC, EH en deux egalement. Prop 34. L. 1.
5. Partant, le △ ADB est la moitié du Pgr BC, & le △ EGF la moitié du Pgr EH.
Puis donc que les Pgrs entiers BC, EH sont = entr'eux (*Arg.* 3) & que les △ ADB, EGF sont leurs moitiés de ces Pgrs (*Arg.* 5).
6. Il s'ensuit que ces △ ADB, EGF sont aussi = entr'eux. Ax. 7.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XL. *THEOREME XXX.*

LEs triangles égaux (BAC, EDF), placés sur des bases égales (BC, EF) & du même côté, sont entre les mêmes paralleles (BF, AD).

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les △ BAC, EDF, sont égaux,	*Les △ BAC, EDF sont entre*
II. Et ces △ sont placés sur des bases = BC, EF.	*les mêmes Plles BF, AD.*

DEMONSTRATION.

SI non.

Les droites BF, AD ne sont pas Plles, & on pourra tirer par le point A quelque autre droite AO Plle à BF.

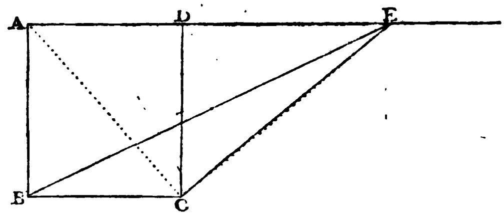
Préparation.

1. TIrez donc par le point A la droite AO Plle à BF; laquelle coupera la droite ED quelque part en G (*Rem. de la Prop. XXVII*). Prop. 31. L. 1
2. Du point F au point d'intersection G tirez la droite FG. Dem. 1.

PUisque les △ BAC, EGF sont placés sur des bases égales BC, EF (*Hyp.* 2), & entre les mêmes Plles BF, AO (*Prep.* 1).

1. Le △ BAC est = au △ EGF. Prop. 38. L. 1.
Or le △ EDF est = au △ BAC (*Hyp.* 1), & le △ EGF est = au même △ BAC (*Arg.* 1).
2. C'est pourquoi le △ EDF est = au △ EGF. Ax. 1.
Mais le △ EDF étant le tout, & le △ EGF sa partie,
3. Il s'ensuit que le tout est égal à sa partie.
4. Ce qui est impossible. Ax. 8.
5. Partant AO n'est pas Plle à BF.
On prouvera de même que nulle autre droite, hormis la seule AD ne peut être Plle à BF.
6. Par conséquent, la droite AD, tirée par les sommets des △ BAC, EDF, est Plle à la droite BF.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLI. *THEORÊME XXXI.*

SI un parallélogramme (BD) & un triangle (BEC) font placés fur une même bafe (BC), & entre les mêmes paralleles (BC, AE): le parallélogramme fera double du triangle.

HYPOTHESE.

I. BD eft un Pgr, & BEC un △.
II. Ces figures font placées fur la même bafe BC, & entre les mêmes Plles BC, AE.

THESE.

Le Pgr BD eft double du △ BEC.

Préparation.

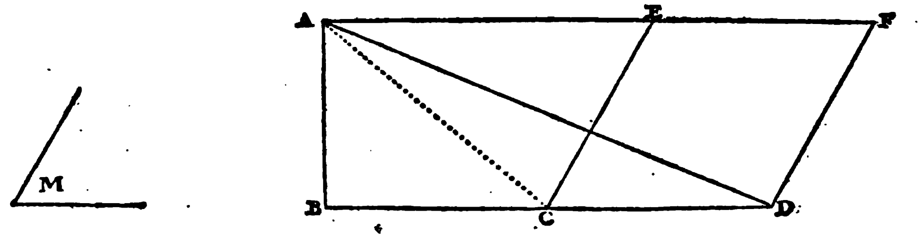
DU point A au point C tirez la droite AC. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUifque les △ BAC, BEC font placés fur une même bafe BC & entre les mêmes Plles BC, AE *(Hyp. 2).*

1. Le △ BAC eft = au △ BEC. Prop. 37. L. 1.
Or la droite AC étant la diagonale du Pgr BD *(Prep.).*
2. Cette diagonale partage le Pgr en deux également. Prop. 34. L. 1.
3. Partant, le Pgr BD eft double du △ BAC.
Mais ce △ BAC étant = au △ BEC *(Arg. 1).*
4. Le Pgr BD eft auffi double du △ BEC. Ax. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLII. PROBLEME XI.

Construire un parallélogramme (ED); égal à un triangle donné (BAD); & qui ait un angle (DCE) égal à un angle rectiligne donné (M).

Donnees	Cherchee.
I. Le △ BAD.	*La Construction d'un Pgr = au △ BAD;*
II. Et ∀ rectiligne M.	*& qui ait un ∀ DCE = à ∀ donné M.*

Résolution.

1. Coupez la base BD en deux parties égales, au point C. Prop. 10. L. 1.
2. Sur la droite BD au point C construisez un ∀ DCE = à ∀ donné M. Prop. 23. L. 1.
3. Par le point A tirez la droite AF Plle à BD. Prop. 31. L. 1.
4. Prolongez la jambe CE de l'angle DCE, jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite AF en un point E (*Rem. de la Prop. XXVII*). Dem. 2.
5. Par le point D tirez DF Plle à CE, & prolongez la jusqu'à ce qu'elle rencontre AF en un point F (*Rem. de la Prop. XXVII*). Prop. 31. L. 1. Dem. 2.

Préparation.

Du point A au point C tirez la droite AC. Dem. 1.

Demonstration.

Puisque les △ BAC, CAD sont placés sur des bases égales BC, CD (*Ref.* 1) & entre les mêmes Plles BD, AF (*Ref.* 3).

1. Le △ BAC est = au △ CAD. Prop. 38. L. 1.
2. Partant, le △ BAD est double du △ CAD. N. C.

Mais dans la figure ED les côtés CD, EF & CE, DF sont Plles (*Ref.* 3 & 5).

3. Par consequent, ED est un Pgr. Def. 35. L. 1.

Or ce Pgr ED & le △ CAD sont placés sur une même base CD, & entre les mêmes Plles BD, AF (*Ref.* 1. 3 & *Prep.*).

4. D'où il suit, que le Pgr ED est double du △ CAD. Prop. 41. L. 1.

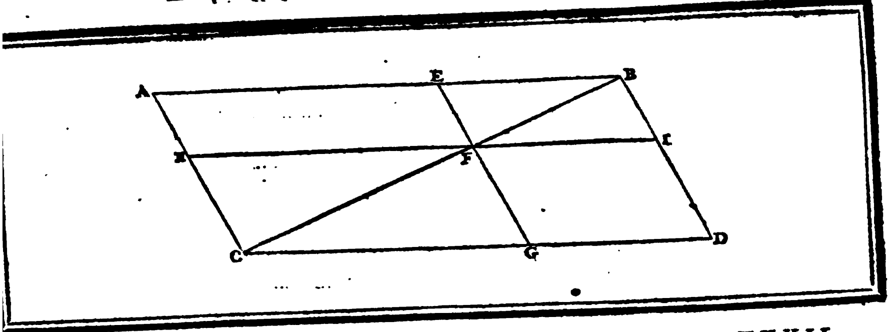
Puis donc que le Pgr ED est double du △ CAD (*Arg.* 4) & que le △ BAD est aussi double du même △ CAD (*Arg.* 2).

5. Il est évident, que le Pgr ED est = au △ BAD, Ax. 6.

Et comme son angle DCE est outre cela = à ∀ donné M (*Ref.* 2).

6. Ce Pgr ED est = au △ donné BAD; & a un ∀ DCE = à ∀ donné M.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XLIII. *THEOREME XXXII.*

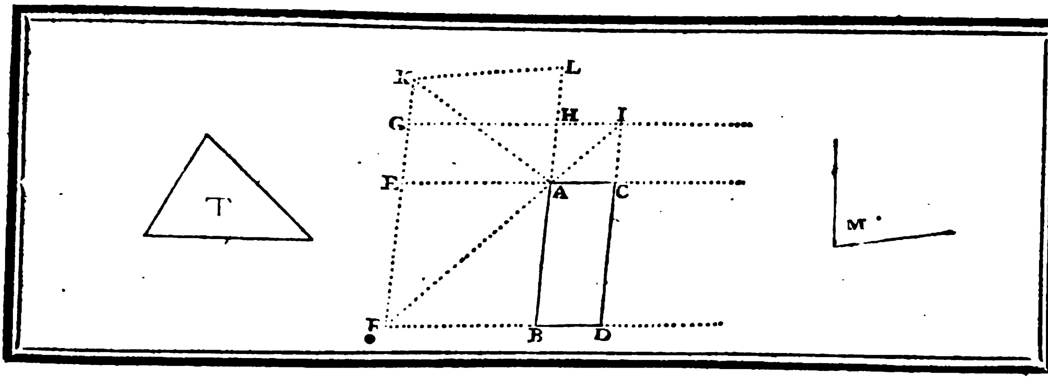
En tout parallélogramme (AD): les complémens (AF, FD) des parallélogrammes (HG, EI) alentour de la diagonale (BC) sont égaux entr'eux.

Hypothese	These.
I. AD est un Pgr, dont BC est la diagonale.	*Les Pgrs AF, FD qui sont les complémens*
II. HG, EI sont des Pgrs alentour de la diagonale.	*des Pgrs HG, EI sont = entr'eux.*

Demonstration.

Puisque AD est un Pgr, dont BC est la diagonale (*Hyp.* 1). Prop. 34. L. 1.
1. Cette diagonale partage le Pgr en deux également.
2. Partant, le △ CAB est = au △ BDC.
De même; EI étant un Pgr, dont BF est la diagonale (*Hyp.* 2). Prop. 34. L. 1.
3. Elle partage aussi le Pgr en deux également.
4. C'est pourquoi, le △ FBB est = au △ BIF.
Enfin, HG est un Pgr, dont FC est la diagonale (*Hyp.* 2), Prop. 34. L. 1.
5. Qui par conséquent, le partage aussi en deux également.
6. Partant, le △ CHF est = au △ FGC.
Puis donc que le △ FEB est = au △ BIF (*Arg.* 4) & le △ CHF = au △ FGC (*Arg.* 6).
7. Le △ FEB avec le △ CHF est = aux △ BIF & FGC pris ensemble. Ax. 2.
Mais les △ entiers CAB, BDC étant = entr'eux (*Arg.* 2); si on retranche de part & d'autre les △ FEB + CHF & les △ BIF + FGC qui leurs sont égaux (*Arg.* 7).
8. Les Pgrs restans AF, FD, qui sont les complémens des Pgrs HG, EI, seront aussi = entr'eux. Ax. 3.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLIV. PROBLEME XII.

SUr une ligne droite donnée (AB); construire un parallélogramme (BC) égal à un triangle donné (T); & qui ait un angle (BAC) égal à un angle rectiligne donné (M).

DONNEES	CHERCHEE.
I. La droite AB. *II. Le △ T,* *III. Et ∀ rectiligne M.*	*La construction d'un Pgr sur la droite AB = au △ T; & qui ait un ∀ BAC = à ∀ donné M.*

Résolution.

1. PRolongez la droite AB indéfiniment.	Dem. 1.
2. Faites AL = à un des côtés du △ donné T,	Prop. 3. L. 1.
3. Et construisez le △ AKL = au △ donné T.	Prop. 22. L. 1.
4. Décrivez ensuite le Pgr EH = au △ AKL; qui ait un ∀ HAE = à ∀ donné M.	Prop. 42. L. 1.
5. Par le point B tirez une droite BF Plle à EA ou GH.	Prop. 31. L. 1.
6. Prolongez GH indéfiniment; de même GE, jusqu'à ce qu'elle rencontre BF en F (*Rem. de la Prop.* XXVII).	Dem. 2.
7. Par les points F & A tirez la droite FA, qui prolongée coupera GH quelque part en I (*Rem. de la Prop. XXVII*).	Dem. 1.
8. Par le point de rencontre I tirez la droite ID Plle à HB ou GF,	Prop. 31. L. 1.
9. Et prolongez FB, EA, jusqu'à ce qu'elles rencontrent ID aux points D & C (*Rem. de la Prop. XXVII*).	Dem. 2.

DEMONSTRATION.

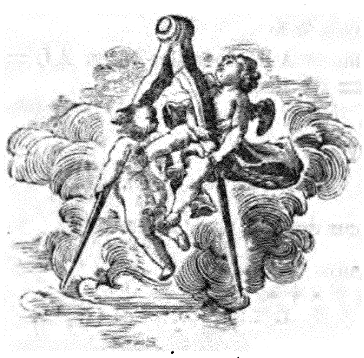
PUisque dans la figure DG les côtés opposés GI, FD & GF, ID sont Plles (*Ref.* 5. 6. 8. & 9).

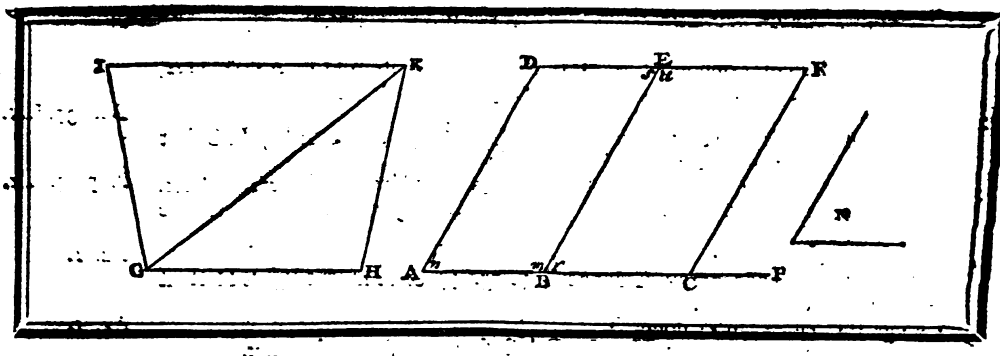
1. La figure DG est un Pgr. — Def. 35. L. 1.

Derechef,

Derechef, les côtés opposés EA, FB & EF, AB; item HI, AC & HA, IC, des figures EB, HC, étant Plles (*Ref.* 5, 6. 8. & 9).
2. Ces figures EB, HC sont des Pgrs. Def. 35. L. 1.
Mais la droite FI est la diagonale du Pgr DG (*Ref.* 7) & EB, HC sont des Pgrs alentour de cette diagonale (*Arg.* 2)
3. Par conséquent, les Pgrs BC, EH qui en sont les complemens, sont = entr'eux. Prop. 43. L. 1.
Or le Pgr EH est = au △ AKL (*Ref.* 4) & le △ donné T est = au même △ AKL (*Ref.* 3).
4. D'où il suit, que le Pgr EH est = au △ donné T. Ax. 1.
Le Pgr EH étant donc = au △ donné T (*Arg.* 4) & ce même Pgr EH étant = au Pgr BC (*Arg.* 3).
5. Le Pgr BC est = au △ donné T. Ax. 1.
De plus, à cause que les ∀ HAE, BAC sont opposés au sommet.
6. Ces angles sont = entr'eux. Prop. 15. L. 1.
C'est pourquoi, ∀ HAE étant = à ∀ donné M (*Ref.* 4).
7. L'angle BAC est aussi = à cet ∀ donné M. Ax. 1.
8. On a donc construit un Pgr BC sur la droite donnée AB, qui est = au △ donné T (*Arg.* 5); & qui a un ∀ BAC = à ∀ donné M (*Arg.* 7).

C. Q. F. F.





PROPOSITION LXV. *PROBLEME XIII.*

Construire un parallélogramme (AF); égal à une figure rectiligne donnée (IH); & qui ait un angle (n) égal à un angle rectiligne donné (N).

Donnees	Cherchee.
I. Une figure rectiligne IH;	*La construction d'un Pgr = à la figure rectiligne IH;*
II. Et un ∀ rectiligne N.	*& qui ait un ∀ n = à ∀ donné N.*

Résolution.

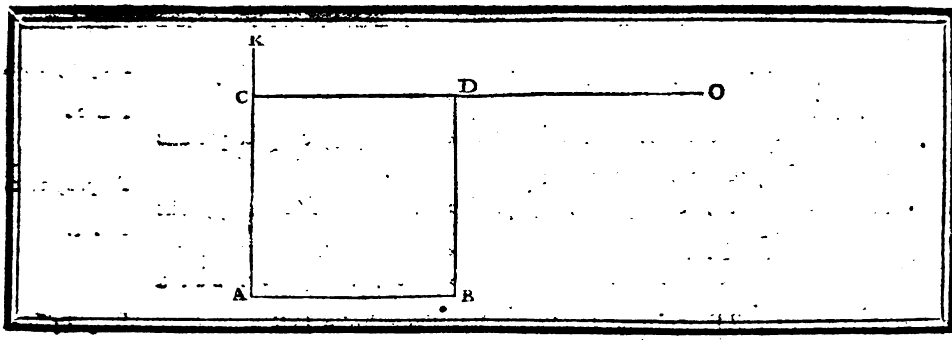
1. Tirez la diagonale GK. — Dem. 1.
2. Sur une droite infinie AP construisez le Pgr AE = au △ GHK; qui ait un ∀ n = à ∀ donné N. — Prop. 42. L. 1.
3. Sur le côté BE du Pgr AE construisez le Pgr BF = au △ GIK; qui ait un ∀ r = ∀ donné N. — Prop. 44. L. 1.

Demonstration.

Puisque ∀ N est = à chacun des ∀ n & r (*Ref.* 2. & 3).

1. L'angle n est = à ∀ r. — Ax. 1.
Si l'on ajoute de part & d'autre ∀ commun m;
2. Les ∀ $n + m$ seront = aux ∀ $r + m$. — Ax. 2.
Mais à cause que les côtés AD, BE sont des Plles (*Ref.* 2) coupées par une même droite AB.
3. Les deux ∀ intérieurs $n + m$ sont = à deux L. — Prop. 29. L. 1.
4. Par conséquent, les ∀ contigus $r + m$, qui leurs sont égaux (*Arg.* 2), sont aussi = à deux L. — Ax. 1.
Les droites AB, BC, qui rencontrent de part & d'autre la ligne BE au point B, faisant donc avec cette droite BE la somme des ∀ contigus $r + m$ = à deux L (*Arg.* 4).
5. Ces droites AB, BC ne forment qu'une même ligne droite AC. — Prop. 14. L. 1.
De plus, les droites DE, AC étant deux Plles (*Ref.* 2) coupées par une même droite BE.

6. Les



PROPOSITION XLVI. *PROBLEME XIV.*

SUr une ligne droite donnée (AB) conftruire un quarré (AD).

DONNEE.	CHERCHEE.
La droite AB.	*La conftruction d'un quarré fur la droite AB.*

Réfolution.

1. DU point A élevez fur la droite AB la perpendiculaire AK. — Prop. 11. L. 1.
2. Retranchez de la droite AK une partie AC = à AB. — Prop. 3. L. 1.
3. Par le point C tirez la droite CO Plle à AB,
4. Et par le point B tirez la droite BD Plle à AC, laquelle coupera CO quelque part en D (*Rem. de la Prop. XXVII*). — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUifque dans la figure AD les côtés oppofés AB, CD, de même que AC, BD font Plles (*Ref* 3 & 4).

1. La figure AD eft un Pgr — Def. 35. L. 1.
2. Partant, les côtés oppofés AB, CD & AC, BD font = entr'eux. — Prop. 34. L. 1.
   Mais AC eft = à AB (*Ref* 2).
3. Par conféquent, les quatre côtés AB, CD, AC, BD font = entr'eux. — Ax. 1.
   Derechef, puifque les droites AB, CD font Plles. (*Ref.* 3).
4. Les ∀ intérieurs oppofés A & ACD font = à deux ∟. — Prop. 29. L. 1.
   Or l'angle A étant un ∟ (*Ref.* 1).
5. Il eft évident, que ∀ ACD eft un ∟ auffi. — N. C.
   De plus, à caufe que AD eft un Pgr (*Arg.* 1).
6. Les angles oppofés font = entr'eux. — Prop 34. L. 1.
7. C'eft pourquoi, les ∀ BDC & B, oppofés aux ∀ droits A & ACD, font auffi des ∟.
   La figure AD étant donc un Pgr (*Arg.* 1) équilatéral (*Arg.* 3) & rectangulaire (*Arg.* 7).
8. Il s'enfuit, que cette figure AD conftruite fur la droite AB eft un quarré. — Def. 30. L. 1.

C. Q. F. F.

COROLLAIRE I.

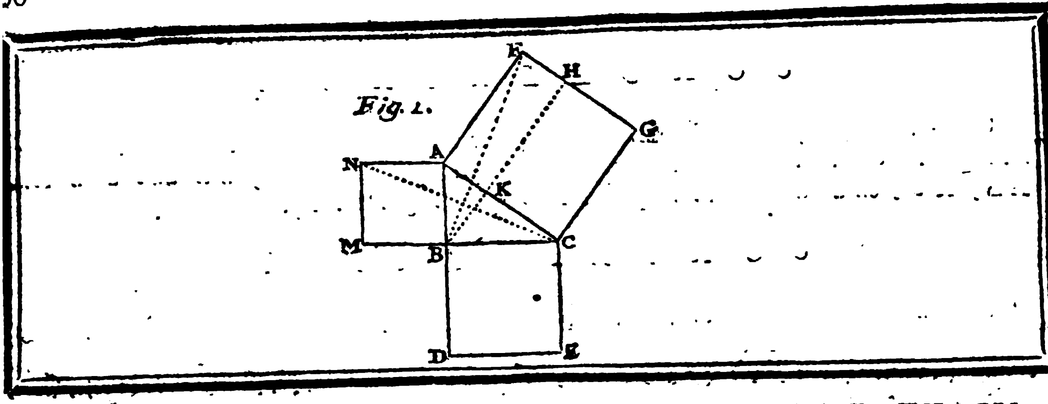
T*Out parallélogramme, qui a deux côtés égaux* AB, AC *alentour d'un angle droit, est un quarré. Car en tirant par les points* C & B *les paralleles* CD, BD *aux deux côtés* AB, AC, *on aura construit le quarré* AD (Def. 30. L. 1).

COROLLAIRE II.

S*I dans un parallélogramme un seul angle est droit, les trois autres le sont aussi; ou bien, un tel parallélogramme est rectangle. Car puisque les angles opposés* A & BDC *sont égaux* (Prop. 34. L. 1) & *que l'angle* A *est un angle droit, l'angle* BDC *sera aussi droit; de plus les lignes* AB, CD, *item* AC, BD *étant des paralleles, les angles intérieurs* A & ACD, *item* A & B *sont égaux à deux droits* (Prop. 29. L. 1). *Mais l'angle* A *étant un angle droit, il est manifeste que les angles* ACD & B *sont des droits aussi.*

COROLLAIRE III.

S*I deux lignes sont égales, les quarrés décrits sur ces lignes seront égaux; & réciproquement, si les quarrés sont égaux, leurs côtés le seront aussi.*



PROPOSITION XLVII. THEOREME XXXIII.

DAns tout triangle rectangle (ABC): le quarré de l'hypothenuse (AC) est égal aux quarrés des deux autres côtés (AB, BC), qui renferment l'angle droit (ABC).

HYPOTHESE.	THESE.
Le △ ABC est Rgle, ou ∀ ABC est ∟.	*Le □ de l'hypothenuse AC est = au □ de AB & au □ de BC pris ensemble.*

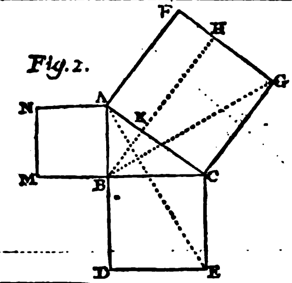
Préparation.

1. COnstruisez (*Fig.* 1.) sur les trois côtés AC, AB, BC des □ AG, AM, CD. — Prop. 46. L. 1.
2. Par le point B tirez la droite BH Plle à AF ou CG. — Prop. 31. L. 1.
3. Du point B au point F tirez la droite BF, }
4. Et du point C au point N la droite CN. } — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la figure AM est un □ (*Prep.* 1). — Def. 30. L. 1.
1. L'angle ABM est un ∟.
Mais ∀ ABC étant aussi un ∟ (*Hyp*). — Ax. 2.
2. Les deux ∀ contigus ABM, ABC sont = à deux ∟.
Les droites MB, BC, qui rencontrent de part & d'autre la ligne AB au point B, faisant donc avec cette droite AB la somme des ∀ contigus ABM, ABC = à deux ∟ (*Arg.* 2). — Prop. 14. L. 1. Prop. 29. L. 1.
3. Ces droites MB, BC ne font qu'une même ligne droite MC qui est Plle à NA.
Par la même raison on prouvera que
4. La droite AB ne forme avec BD qu'une même droite AD qui est Plle à CE.
De plus, à cause que AG, AM sont des □ (*Prep.* 1).
5. Les ∀ FAC, NAB sont = entr'eux (puisqu'ils sont des angles droits); & les côtés AF, AC, item AB, AN sont aussi = entr'eux. — Def. 30. L. 1
Si donc on ajoute à ces ∀ égaux, FAC, NAB (*Arg.* 5), ∀ commun CAB;

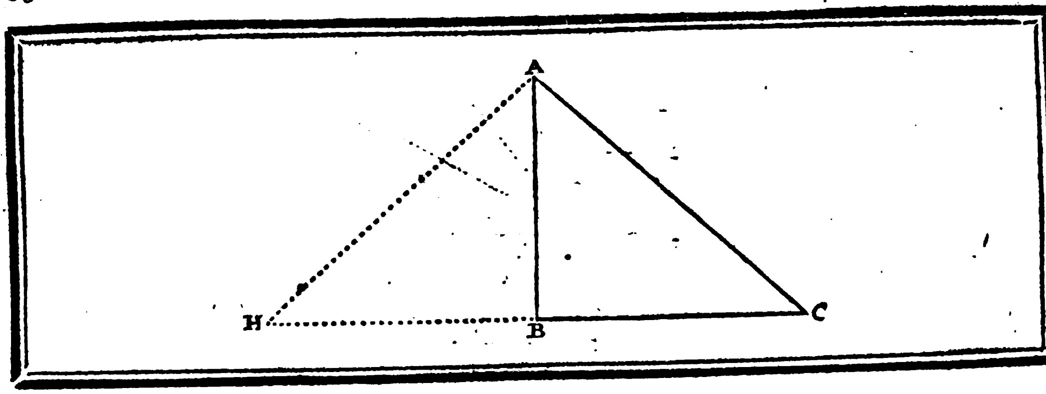
6. L'angle



6. L'angle entier F A B sera = à ∀ entier N A C. Ax. 2.
Puis donc que dans les △ A F B, A C N les côtés A F, AB & A C, A N sont = chacun à chacun *(Arg.* 5*)*, & que ∀ compris F A B est = à ∀ compris N A C *(Arg.* 6*)*.
7. Le △ A F B sera = au △ A C N. Prop. 4. L. 1.
Mais le △ A F B & le Pgr A H sont placés sur la même base A F & entre les mêmes Plles A F, B H *(Prep.* 2*)*.
8. D'où il suit, que le Pgr A H est double du △ A F B. Prop. 41. L 1.
De même; le △ A C N & le □ A M étant placés sur la même base A N & entre les mêmes Plles A N, M C *(Arg.* 3*)*.
9. Le □ A M est double du △ A C N. Prop. 41. L. 1.
Les △ A F B, A C N étant donc = entr'eux *(Arg.* 7*)* & le Pgr A H & le □ A M en étant doubles *(Arg.* 8 & 9*)*.
10. Il s'ensuit, que le Pgr A H est = au □ A M. Ax. 6.

De la même maniere; en tirant *(Fig.* 2*)* les lignes B G, A E on démontrera, que le Pgr C H est = au □ C D.
11. Mais le Pgr A H avec le Pgr C H forment le □ A G.
12. C'est pourquoi, ce □ A G est = à la somme des □ A M & C D. Ax. 14
Or comme le □ A G est le □ de l'hypothenuse A C, & les □ A M & C D les □ des deux autres côtés qui renferment l'angle droit A B C.
13. Le □ de l'hypothenuse A C est = au □ des deux autres côtés A B & B C pris ensemble.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLVIII. *THEOREME XXXIV.*

SI le quarré de l'un des côtés (CA) d'un triangle (CBA) est égal aux quarrés des deux autres côtés (AB, BC): l'angle (ABC) compris de ces deux côtés (AB, BC) est droit.

HYPOTHESE.	THESE.
Le □ de CA est = aux □ de AB & au □ de BC.	*L'angle ABC compris des côtés AB, BC est ∟.*

Préparation.

1. DU point B, sur la droite BA, élevez la perpendiculaire BH. — Prop. 11. L. 1.
2. Faites BH = BC. — Prop. 3. L. 1.
3. Du point H au point A tirez la droite HA. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque BH est = à BC (*Prep.* 2).

1. Le □ de BH sera = au □ de BC. — Prop 46. L. 1. Coroll. 3.

Si on ajoute de part & d'autre le □ de AB.

2. Les □ de AB & BH seront = aux □ de AB & BC pris ensemble. — Ax. 2.

Mais le △ HBA étant Rgle en B (*Prep.* 1).

3. Il s'ensuit, que le □ de HA est = aux □ de AB & BH. — Prop. 47. L. 1.

Puis donc que le □ de CA est = aux □ de AB & BC (*Hyp.* 1), le □ de HA = aux □ de AB & BH (*Arg.* 3) & que les □ de AB & BH sont = aux □ de AB & BC (*Arg.* 2).

4. Il faut nécessairement, que le □ de CA soit = au □ de HA. — Ax. 1.
5. Partant, CA est = à HA. — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.

Or dans les △ CBA, HBA le côté CA est = au côté HA (*Arg.* 5), AB est commun aux deux △ & la base BC est = à la base BH (*Prep.* 2).

6. Par conséquent, les ∀ ABC, ABH, compris par les côtés égaux AB, BC & AB, BH, sont = entr'eux. — Prop. 8. L. 1.

Mais l'angle ABH est un ∟ (*Prep.* 1).

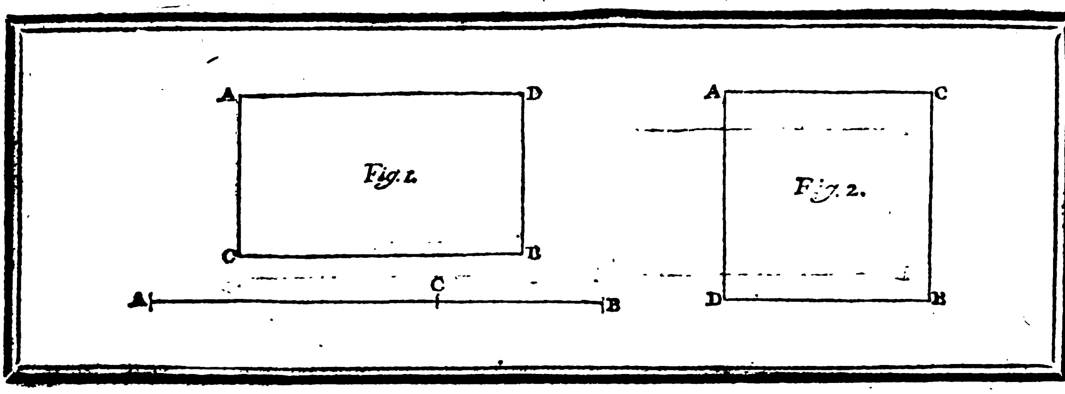
7. Partant l'angle ABC sera aussi droit.

C. Q. F. D.

LES

ELEMENS D'EUCLIDE,

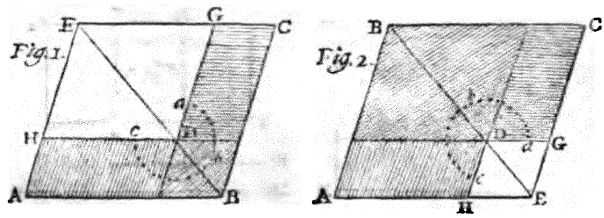
LIVRE SECOND.



DEFINITIONS.

3. *Quelquefois les parties d'une ligne droite servent à indiquer un tel parallélogramme rectangle; par ex.* (Fig. 1). *la droite* AB *étant partagée en* C, *on peut construire* (Prop. 31. L. 1.) *de ces deux lignes* AC, CB *un parallélogramme rectangle, en les joignant à angle droit. On désigne donc ce parallélogramme ainsi. Le Pgr Rgle* AC; CB; *ou bien simplement le Pgr Rgle* ACB; *où la lettre du milieu marque le point qui est commun aux deux lignes. De la même maniere, on entend par le Pgr Rgle ABC, celui qu'on construiroit selon les mêmes regles, en prenant* AB *pour un côté &* BC *pour l'autre.*

4. *Dans le cas où les lignes AD, & DB alentour de l'angle droit sont égales* (Fig. 2), *le parallélogramme* DC *est un quarré* (Def. 30. L. 1). *Comme dans ce cas, un des côtés* DB *avec l'angle droit déterminent le quarré, que l'on peut construire de ces données* (*par la* Prop. 31. L. 1). *On pourra aussi désigner ce quarré par ses déterminantes, de cette façon, le* □ *de* DB; *ou le* □ *de* AD.

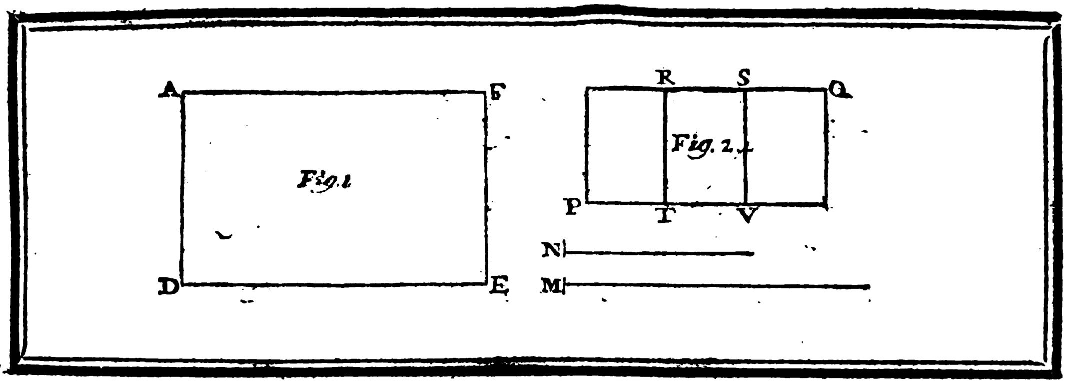


DEFINITIONS.

II.

ON appelle *Gnomon*, ou *Equerre*, la figure (ABCGDH) composée d'un parallélogramme (DB) alentour de la diagonale (BE) & de deux complemens (AD, DC).

On marque le Gnomon par un arc de cercle abc, qui passe par les deux complémens (AD, DC) *& le Pgr alentour de la diagonale, desquels il est composé. On peut former dans chaque Pgr deux Gnomons différens; d'abord, en retranchant* (Fig. 1) *du Pgr entier, le plus grand Pgr* (ED) *alentour de la diagonale; ou bien, en retranchant* (Fig. 2) *le plus petit Pgr* (ED) *alentour de la diagonale.*



AXIOMES.

I.

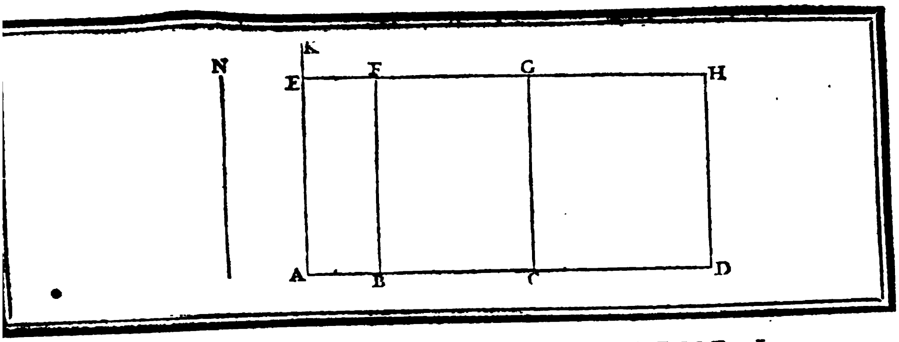
LE tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

Le Pgr entier PQ, (Fig. 2) *est égal à toutes ses parties, les Pgrs* PR, TS, VQ *pris ensemble.*

II.

LEs parallélogrammes rectangles compris de côtés égaux; sont égaux.

Le Pgr Rgle DF (Fig. 1) *est compris des droites* AD, DE; *par conséquent si la droite* N *est égale à* AD, *& la droite* M *égale à* DE, *le Rgle formé des droites* N *&* M *sera nécessairement égal au Rgle* DF. *Cela est évident par un des premiers principes de nos raisonnemens, qui demande, que toutes les déterminées de deux sujets soient les mêmes, aussitôt qu'il ne se trouve pas de différence dans leurs déterminantes.*



PROPOSITION I. THEOREME I.

Si de deux lignes droites (AD & N), l'une (comme AD) est coupée en tant de parties (AB, BC, CD) que l'on voudra: le rectangle compris de ces deux droites (AD & N) est égal aux rectangles compris de la droite entiere (N), & de chaque partie (AB, BC, CD) de la coupée (AD).

Hypothese.

AD & N sont deux droites, dont l'une AD est coupée en plusieurs parties AB, BC, CD.

These.

Le Rgle AD. N est = aux Rgles AB. N + BC. N + CD. N.

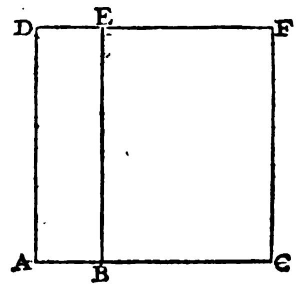
Préparation.

1. Sur AD au point A élevez la ⊥ AK. — Prop. 11. L. 1.
2. De la droite AK retranchez une partie EA = N. — Prop. 3. L. 1.
3. Par les points D & E tirez les droites DH, EH Plles à AE, AD.
4. Et par les points de section B, & C, les droites BF, CG Plles à AE ou DH. — Prop. 31. L. 1. (pour 3 et 4)

Demonstration.

1. Le Rgle AH est = aux Rgles AF, BG, CH pris ensemble. — Ax. 1. L. 2.
Mais à cause que le Rgle AH est compris des droites EA, AD (*Prep.* 3) & que AE = N (*Prep.* 2).
2. Ce Rgle AH est compris des droites AD & N. — Ax. 2. L. 2.
De même; à cause que le Rgle AF est compris des droites EA, AB (*Prep.* 4) & que EA = N (*Prep.* 2).
3. Ce Rgle AF est compris des droites AB & N. — Ax. 2. L. 2.
4. De la même maniere; le Rgle BG est compris des droites BC & N; parce qu'il est compris des droites FB & BC & que FB = N; — Prop. 34. L. 1.
Et ainsi de tous les autres.
5. Partant, le Rgle compris des droites AD & N est = aux Rgles compris des droites AB & N, BC & N, CD & N pris ensemble. c. à. d. le Rgle AD. N est = aux Rgles AB. N + BC. N + CD. N. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. THEOREME II.

SI une ligne droite (AC) est coupée en tant de parties (AB, BC), que l'on voudra: les rectangles compris de la droite entiere (CA) & de chacune de ses parties (AB, BC), sont égaux au quarré de la droite entiere (AC).

Hypothese.	These.
AC est une droite coupée en plusieurs parties AB, BC.	*Le Rgle CAB + le Rgle ACB sont = au □ de AC.*

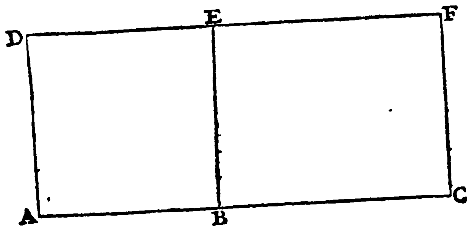
Préparation.

1. SUr la droite AC construisez le □ AF. — Prop 46. L. 1.
2. Par le point de section B tirez la droite BE Plle à AD, ou CF. — Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

1. LE Rgle entier AF est = aux Rgles AE, BF pris ensemble. — Ax. 1. L. 2.
   Mais ce Rgle AF est le □ de la ligne AC (*Prep.* 1).
2. Partant, les Rgles AE, BF pris ensemble égalent le quarré de la ligne AC. — Ax. 1. L. 1.
3. Or le Rgle AE, est compris des droites CA, AB; à cause qu'il est compris des droites DA, AB dont DA = CA (*Prep.* 1). — Ax. 2. L. 2.
4. De même, BF est un Rgle compris des droites AC, CB; parcequ'il est compris des droites EB, BC; dont EB = AC (*Prep.* 1 & 2). — Prop. 34. L. 1.
5. C'est pourquoi, le Rgle compris des droites CA, AB avec le Rgle compris des droites AC, CB est = au □ de la droite AC; ou bien le Rgle CAB + le Rgle ACB sont = au □ de AC. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION III. *THEOREME III.*

SI une ligne droite (AC) est coupée comme l'on voudra (en B): le rectangle compris de la droite entiere (CA) & de l'une de ses parties (AB) est égal au rectangle compris des deux parties (AB, BC), & au quarré de la partie (AB), prise auparavant.

HYPOTHESE.

AC est une droite coupée en deux parties quelconques AB, BC.

THESE.

Le Rgle CAB est = au Rgle ABC + le □ de AB.

Préparation.

1. SUr la droite AB construisez le □ AE. — Prop 46. L. 1.
2. Prolongez le côté DE indéfiniment vers F. — Dem. 2.
3. Par le point C tirez la droite CF Plle à AD ou BE, & prolongez la, jusqu'à ce qu'elle rencontre DF au point F. — Prop. 31. L. 1. Dem. 2.

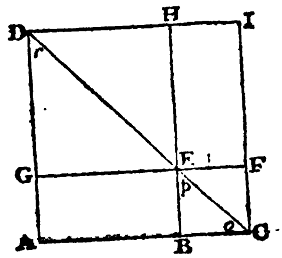
DEMONSTRATION.

1. LE Rgle AF est = aux Rgles AE & BF pris ensemble. — Ax. 1. L. 2.
2. Mais le Rgle AF est compris des droites CA, AB; parce qu'il est compris de CA & AD, dont AD = AB (*Prep.* 1).
3. Et le Rgle BF est compris de AB, BC; à cause qu'il est compris de EB, BC, dont EB = AB (*Prep.* 1). — Ax. 2. L. 2.

De plus, le Rgle AE étant le □ de la droite AB (*Prep.* 1).

4. Le Rgle de CA . AB est = au Rgle de AB . BC avec le □ de AB; ou bien le Rgle CAB est = au Rgle ABC + le □ de AB. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME IV.

Si l'on coupe une droite (AC) en deux parties quelconques (AB, BC): le quarré de la droite entiere (AC) est égal aux quarrés des deux parties (AB, BC), & au double rectangle compris de ces deux parties (AB, BC).

Hypothese.

AC est une droite coupée en deux parties quelconques AB, BC.

These.

Le □ de AC est = au □ de AB + au □ de BC + 2 Rgles ABC.

Préparation.

1. Sur AC construisez le □ AI. — Prop. 46. L. 1.
2. Par le point de section B tirez BH Plle à CI, ou AD. — Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la diagonale CD qui coupera BH quelque part en E. — Dem. 1.
4. Par le point E tirez GF Plle aux côtés opposés DI ou AC. — Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

Puisque les lignes AD, BH, CI; de même AC, GF, DI sont Plles (*Prep.* 1. 2. & 4). — Def. 35. L. 1.

1. Les quatre figures AE, EI, BF, GH sont des Pgrs.

Et parce que chacune de ces figures renferme un des angles droits du □ AI. — Prop. 46. L. 1. Coroll. 2.

2. Ces Pgrs sont aussi Rgles.

De plus, à cause que les côtés DA, AC du □ AI sont égaux (*Def.* 30. *L.* 1). — Prop. 5. L. 1.

3. L'angle *r* est = à ∀ *o*.

Et à cause du parallélisme des droites AD, BH (*Prep.* 2.) coupées par la droite DC (*Prep.* 3). — Prop. 29. L. 1.

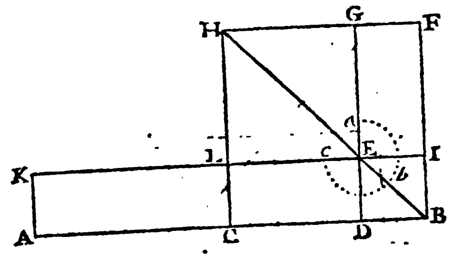
4. L'angle intérieur *r* est = à son ∀ extérieur opposé *p*. — Ax. 1. L. 1.
5. Partant, ∀ *o* = ∀ *p*. — Prop. 6. L. 1.
6. C'est pourquoi, le côté BE est = au côté BC, — Def. 30. L. 1.
7. Et le Rgle BF est un □; & nommément le □ de BC.
8. On prouvera de la même maniere, que le Pgr GH est un □; & nommément le □ de AB; à cause que GE = AB. — Prop. 34. L. 1.

De plus BE étant = à BC (*Arg.* 6). — Ax. 2. L. 2.

9. Le Rgle AE, ou le Rgle de AB . BE sera = au Rgle de AB . BC.

Mais le Rgle AE est = au Rgle EI (*Prop.* 43. *L.* 1). — Ax. 1. L. 1.

10. D'où il suit, que le Rgle EI est aussi = à un Rgle de AB . BC.



PROPOSITION V. THEOREME V.

UNe droite (AB) étant partagée en deux parties égales (AC, CB) & en deux inégales (AD, DB); le rectangle compris des deux parties inégales (AD, DB) & le quarré de la partie (CD), comprise entre les points de section (C & D), sont égaux au quarré de la moitié (AC ou CB) de la droite entiere (AB).

HYPOTHESE.

AB est une droite coupée en deux également en C, & en deux inégalement en D.

THESE.

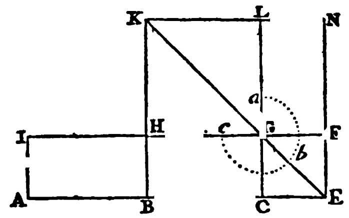
Le Rgle ADB + le □ de CD sont = au □ de CB.

Préparation.

1. SUr la droite CB construisez le □ CF. — Prop. 46. L. 1.
2. Par le point de section D, tirez DG Plle à BF ou CH. — Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la diagonale BH, qui coupera DG quelque part en E. — Dem. 1.
4. Par le point de section E, tirez IL Plle à BC ou FH, & par le point A, la droite AK Plle à CL, qui coupera le prolongement de IL en K. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la figure CF est un quarré (*Prep. 1*). — {Prop. 4. L. 2. Coroll 1.}
1. Les Rgles LG, DI, alentour de la diagonale sont des □. — Prop. 34. L. 1.
2. Et nommément DI le □ de DB, & LG le □ de CD; à cause que LE = CD. — Prop. 43. L. 1.
3. De plus, le complément CE est = au complément EF.
Qu'on ajoute de part & d'autre le □ DI. — Ax. 2. L. 1.
4. Le Rgle CI sera = au Rgle DF.
Mais parce que AC = CB (*Hyp.*). — Ax. 2. L. 2.
5. Le Rgle AL est = au Rgle CI. — Ax 1 L 1.
6. Partant, le Rgle AL est = au Rgle DF.
Si donc on ajoute de part & d'autre le Rgle CE;
7. Le Rgle entier AE sera = aux Rgles DF & CE pris ensemble; c. à. d. au Gnomon abc. — Ax. 2. L. 1.
8. Mais le Rgle AE est compris de AD, DB; parce qu'il est compris de AD, DE, dont DE = DB (*Arg. 1*). — Ax. 2. L. 2. / Ax. 1. L. 1.
9. Par conséquent, le Rgle de AD . DB est aussi = au gnomon abc
Ajoutant de nouveau de part & d'autre le □ LG, qui est le quarré de CD (*Arg. 2*). — Ax. 2. L. 1.
10. Le Rgle AD . DB avec le □ de CD sera = au Gnomon abc avec le □ LG.
Or ce Gnomon abc avec le □ LG est = au □ CF, qui est le quarré de la moitié CB, de la droite entiere AB (*Prep. 1*). — Ax. 1. L. 1.
11. Partant, le Rgle ADB + le □ de CD sont = au □ de CB. — C. Q. F. D.



PROPOSITION VI. THEOREME VI.

Si une droite (AC) est partagée en deux parties égales (AB, BC), & qu'on y ajoute directement une partie quelconque (CE) : le rectangle compris de la droite entiere (AE) & de l'ajoutée (EC) avec le quarré de la moitié (BC), est égal au quarré de la droite (BE) composée de la moitié (BC) de l'entiere (AC) & de l'ajoutée (CE).

Hypothese.

I. AC est une droite coupée en deux également en B.
II. A laquelle on ajoute directement une partie CE.

These.

Le Rgle AEC + le □ de BC est = au □ de BE.

Préparation.

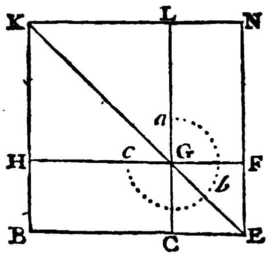
1. Sur la droite BE construisez le □ BN. — Prop. 46. L. 1.
2. Par le point C, tirez la droite CL Plle à EN ou BK. — Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la Diagonale EK, qui coupera CL quelque part en G. — Dem. 1.
4. Par le point G, tirez FH Plle à EB ou NK,
5. Et par le point A, la droite AI Plle à BK, qui coupera le prolongement de FH quelque part en I. — P. 31. L. 1.

Demonsration.

Puisque la figure BN est un quarré (*Prep.* 1).

1. Les Rgles CF, HL, alentour de la diagonale, font des quarrés. — Prop. 4. L. 2. Coroll. 1.
Et à cause que HG est = à BC (*Prop.* 34. *L.* 1).
2. Le □ HL est = au □ de BC. — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
De plus AB étant = à BC. (*Hyp.* 1).
3. Le Rgle AH est = au Rgle BG. — Ax. 2. L. 2.
Mais le Rgle BG est = au Rgle GN. (*Prop.* 43. *L.* 1).
4. Le Rgle AH est donc aussi = au Rgle GN. — Ax. 1. L. 1.
Et si on ajoute de part & d'autre le Rgle BF;
5. Le Rgle entier AF sera = aux Rgles GN & BF pris ensemble; c. à. d. au Gnomon *abc*. — Ax. 2. L. 1.
6. Mais ce Rgle AF est compris des droites AE, EC; parceque EC = EF (*Arg.* 1).
7. C'est pourquoi le Rgle AE.EC est aussi = au Gnomon *abc*. — Ax. 1. L. 1.
Si on ajoute donc de part & d'autre le □ HL; qui n'est autre chose que le □ de BC (*Arg.* 2);
8. Le Rgle AE.EC avec le □ de BC sera = au Gnomon *abc* avec le □ HL. — Ax. 2. L. 1.
Mais le Gnomon *abc* & le □ HL forment le □ BN, ou le □ de BE (*Prep.* 1).
9. Partant, le Rgle AEC + le □ de BC est = au □ de BE. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F D.



PROPOSITION VII. THEOREME VII.

SI une ligne droite (BE) est coupée en deux parties quelconques (BC, CE): le quarré de la droite entiere (BE) & le quarré de l'une des parties (comme CE), sont égaux au double rectangle compris de la droite entiere (BE) & de la même partie (EC) prise auparavant, avec le quarré de l'autre partie (BC).

HYPOTHESE.	THESE.
BE est une droite coupée inégalement en C.	*Le □ de BE + le □ de CE sont = à 2 Rgles BEC + au □ de BC.*

Préparation.

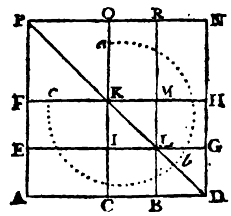
1. SUr BE construisez le □ BN. — Prop. 46. L. 1.
2. Par le point C, tirez la droite CL Plle à EN ou BK. — Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la diagonale EK, qui coupera CL quelque part en G. — Dem. 1.
4. Par le point G, tirez la droite FH Plle à EB ou NK. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la figure BN est un quarré (*Prep.* 1).

1. Les Rgles alentour de la diagonale CF, HL sont des □. — Prop. 4. L. 2. Coroll. 1.
2. Et nommément CF le □ de CE, & HL le □ de BC; à cause que HG = BC. — Prop. 34. L. 1.
Mais le Rgle BG étant = au Rgle NG (*Prop.* 43. *L.* 1); si on ajoute de part & d'autre le □ CF;
3. Le Rgle BF sera = au Rgle NC. — Ax. 2. L. 1.
4. Partant, le double Rgle BF est = aux Rgles BF & NC pris ensemble,
Et à cause que les Rgles BF & NC ne sont que le Gnomon *abc* avec le □ CF.
5. Ce Gnomon *abc* avec le □ CF sera aussi double du Rgle BF; ou bien = au double Rgle BF. — Ax. 1. L. 1.
Mais le Rgle BF est = au Rgle compris de BE, EC, à cause que EF = EC (*Arg.* 1).
6. C'est pourquoi, le Gnomon *abc* avec le □ CF est = au double Rgle compris de BE, EC. — Ax. 1. L. 1.
Si on ajoute donc de part & d'autre le □ HL, qui est = au □ de BC (*Arg.* 2).
7. Le Gnomon *abc* + le □ CF + le □ HL seront = au double Rgle BE. EC + au □ de BC. — Ax. 2. L. 1.
Puis donc que le Gnomon *abc* + le □ HL sont = au □ de BE, & que le □ CF n'est autre chose que le □ de CE (*Arg.* 2).
8. Il est manifeste, que le □ de BE + le □ de CE sont = à 2 Rgles BEC + au □ de BC. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII. THÉOREME VIII.

SI une droite (AB) est partagée en deux parties quelconques (AC, CB): le rectangle quadruple compris de la droite entiere (AB) & d'une des parties (BC), avec le quarré de l'autre partie (AC), font égaux au quarré de la droite (AD), composée de l'entiere (AB) & de l'ajoutée (BD) égale à la partie (BC).

HYPOTHÈSE.

AB est une droite partagée en C, à laquelle on ajoute directement la droite BD = BC.

THESE.

Le Rgle quadruple ABC + le □ de AC sont = au □ de AD.

Préparation.

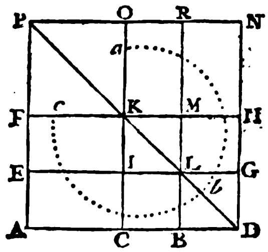
1. SUr AD construisez le quarré AN. — Prop. 46. L. 1.
2. Par les points B & C, tirez BR & CO Plles à DN ou AP. — Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la diagonale DP, qui coupera BR & CO quelque part en L & en K — Dem. 1.
4. Par les points L & K, tirez GE & HF Plles à DA ou NP. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la figure AN est un quarré (*Prep* 1).

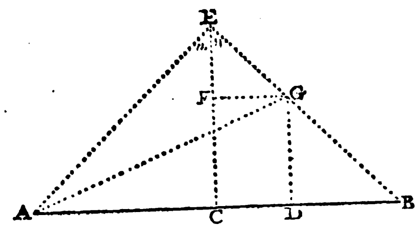
1. Les Rgles alentour de la diagonale CH, FR, FO sont des quarrés. — Prop 4. L. 2. Coroll. 1.
Et parce que dans le □ CH le côté CD est partagé en deux également en B (*Hyp.*).
2. Les Rgles BG, CL, LH, IM sont quatre quarrés égaux, — Prop. 4. L. 2. Coroll. 2.
3. Et le □ CH est = au quadruple □ CL.
De plus, à cause que ER est un quarré (*Arg.* 1).
4. Le Rgle EK est = au Rgle KR. — Prop. 43. L. 1.
Mais puisque IK = IC (*Arg.* 2), & CO Plle à AP (*Prep.* 2).
5. Le Rgle AI est = au Rgle EK. — Prop. 36. L. 1.
6. Partant, le Rgle AI est aussi = au Rgle KR. — Ax. 1. L. 1.
De même, à cause que KM = MH (*Arg.* 2), & HF Plle à NP (*Prep.* 4).
7. Le Rgle KR est = au Rgle MN. — Prop. 36. L. 1.
8. Partant, les quatre Rgles AI, EK, KR, MN, sont = entr'eux. — Ax. 1. L. 1.

9. Par



9. Par conféquent, leur fomme eft = au quadruple Rgle AI.
Si on ajoute de part & d'autre le □ CH, qui eft = au quadruple □ CL (*Arg.* 3).
10. Le Gnomon *a b c*, qui en refulte d'une part, eft = au Rgle quadruple AI & au quadruple □ CL pris enfemble; c. a. d. au Rgle quadruple AL, attendu que le Rgle AI + le □ CL eft = au Rgle AL. Ax. 2. L. 1.
En ajoutant de nouveau de part & d'autre le □ de AC, qui eft = au □ FO; à caufe que AC = FK (*Prop.* 34. *L.* 1);
11. Le Rgle quadruple AL & le □ de AC feront = au □ AN. Ax. 2. L. 1.
Mais le Rgle AL eft = au Rgle compris de AB, BC; à caufe que BC = BL (*Arg.* 2), & le □ AN eft = au □ de AD (*Prep.* 1).
12. Partant, le Rgle quadruple ABC + le □ de AC font = au □ de AD. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IX. *THEOREME IX.*

SI une droite (AB) est coupée en deux parties égales (AC, CB), & en deux inégales (AD, DB): les quarrés des deux parties inégales (AD, DB) sont doubles du quarré de la moitié (AC) de l'entiere (AB) & du quarre de la partie (CD) comprise entre les deux points de section (C & D).

HYPOTHESE.

AB est une droite partagée en deux également en C, & en deux inégalement en D.

THESE.

Le □ de AD + le □ de DB sont doubles du □ de AC + du □ de CD.

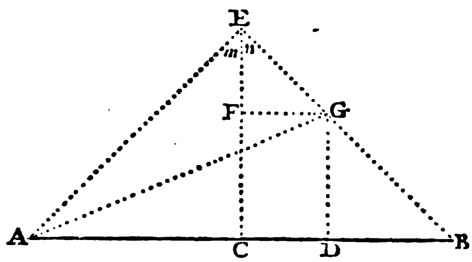
Préparation

1. DU point C élevez sur AB la ⊥ CE. Prop. 11. L. 1.
2. Faites CE = à AC ou BC. Prop. 3. L. 1.
3. Des points A & B au point E tirez les droites AE, BE. Dem. 1.
4. Par les points D & G tirez les droites DG & GF Plles à CE & AB. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque CE est = à AC (*Prep.* 2). Prop. 5. L. 1.
1. L'angle CAE est = à ∀ *m*.
Mais ∀ ECA est un ∟ (*Prep.* 1). Prop. 32. L. 1.
2. C'est pourquoi, les deux autres ∀ CAE & *m* pris ensemble font aussi = à un ∟.
3. Partant, chacun d'eux est un demi ∟; parcequ'ils sont = entr'eux (*Arg.* 1).
On prouvera de la même maniere, que
4. Chacun des ∀ CBE & *n* est un demi ∟, Ax. 2. L. 1.
5. Et ainsi, ∀ entier *m* + *n* est = à un ∟.
Derechef, ∀ *n* étant un demi ∟ (*Arg.* 4) & ∀ EFG un ∟; à cause qu'il est = à son interieur opposé ECB (*Prop.* 29. *L.* 1), lequel est ∟ (*Prep.* 1). Prop. 32. L. 1.
6. L'angle EGF est aussi un demi ∟. Prop. 6. L. 1.
7. Et par conséquent, EF est = à FG,
Par un raisonnement semblable on prouvera, que
8. L'angle BGD est = à un demi ∟, & DG = DB.
Maintenant, à cause que le □ de AE est = au □ de AC & au □ de CE pris ensemble (*Prop.* 47. *L.* 1), & que AC = CE (*Prep.* 2).
9. Le □ de AE est double du □ de AC.
On prouvera de même, que
10. Le □ de EG est double du □ de FG, c. à. d. du □ de CD, puisque FG = CD. Prop. 34. L. 1.

11. Par



12. Par conséquent, le □ de AE & le □ de EG pris ensemble, sont doubles du □ de AC & du □ de CD. Ax. 2. L. 1.

Et parceque le □ de AE & le □ de EG pris ensemble sont = au □ de AG (*Prop.* 47. *L.* 1. & *Arg.* 5).

13. Le □ de AG est aussi double du □ de AC & du □ de CD pris ensemble. Ax. 1. L. 1.

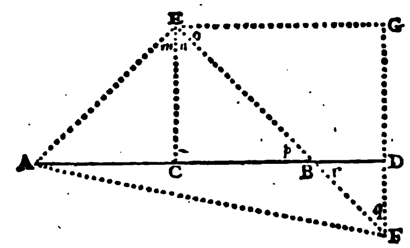
Mais ∀ ECA etant = à un ∟ (*Prep.* 1) & ∀ GDC = à ∀ ECA (*Prop.* 29. *L.* 1).

14. Le □ de AG est = au □ de AD & au □ de DG. Prop. 47. L. 1.

15. Ou le □ de AG est = au □ de AD & au □ de DB pris ensemble; à cause que DB est = à DG. (*Arg.* 8).

16. Partant, le □ de AD & le □ de DB pris ensemble sont doubles du □ de AC & du □ de CD; ou le □ de AD + le □ de DB sont doubles du □ de AC + du □ de CD. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



Ensuite A C étant = à C E (*Prep.* 2).

10. Le □ de A C est = au □ de C E. Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.

11. Partant, les □ de A C & de C E pris ensemble sont doubles du □ de A C,
Et ces □ de A C & C E étant = au □ de A E. (*Prop.* 47. *L.* 1).

12. Le □ de A E sera aussi double du □ de A C. Ax. 6. L. 1.
De la même maniere on prouvera, que

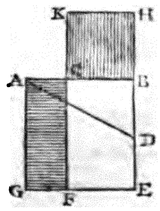
13. Le □ de E F est double du □ de E G, c. à. d. du □ de C D; puisque E G = C D. Prop. 34. L. 1.

14. Par conséquent, le □ de A E avec le □ de E F sont doubles du □ de A C & du □ de C D.
Mais le □ de A E & le □ de E F étant = au □ de A F (*Prop.* 47. *L.* 1).

15. Le □ de A F est double du □ de A C & du □ de C D.
Et ce même □ de A F étant outre cela = au □ de A D & au □ de D F (*Prop.* 47. *L.* 1), ou de B D, attendu que D F = B D (*Arg.* 7).

16. Il s'ensuit donc, que le □ de A D + le □ de B D sont doubles du □ de A C + du □ de C D.

C. Q. F D.



PROPOSITION XI. *PROBLEME I.*

COuper une ligne droite donnée (AB) de façon; que le rectangle de l'entiére (BA) & de l'une de ses parties (AC) soit égal au quarré de l'autre partie (CB).

DONNEE
La droite AB.

CHERCHE.
Le point d'intersection C tel que le Rgle BAC soit = au □ de CB.

Résolution.

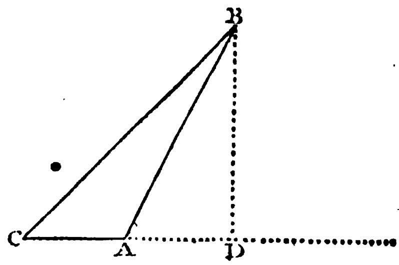
1. SUr la droite AB construisez le quarré AE. — Prop. 46. L. 1.
2. Partagez le côté BE en deux également au point D, & tirez du point D au point A la droite DA. — Prop. 10. L. 1. Dem. 1.
3. Sur le prolongement de EB, faites DH = à DA. — Prop. 3. L. 1.
4. Sur la droite BH construisez le quarré CH, — Prop 46. L. 1.
5. Et prolongez le côté KC en F. — Dem. 2.

DEMONSTRATION.

PUisque la droite BE est coupée en deux également en D, & que la droite BH y est ajoutée directement.

1. Le Rgle EH.HB + □ de BD est = au □ de DH. — Prop. 6. L. 2.
2. Et ce □ de DH est = au □ de DA; parceque DH = DA (*Ref.* 3). — {Prop 46 L. 1. Coroll 3.
3. Partant, le Rgle EH.HB + □ de BD est = au □ de DA. — Ax. 1. L. 1.
   Mais ce même □ de DA est = au □ de AB + au □ de BD (*Prop.* 47. *L.* 1).
4. C'est pourquoi, le Rgle EH.HB + □ de BD = au □ de AB + au □ de BD. — Ax. 1. L. 1.
   Si donc on retranche de part & d'autre le □ de BD;
5. Le Rgle EH.HB sera = au □ de AB. — Ax. 3. L. 1.
   Maintenant; si du Rgle EH.HB qui est = au Rgle FH, (*Ref.* 4. 5) & du □ de AB qui est = au □ AE (*Ref.* 1), on retranche le Rgle commun FB;
6. Il restera le □ CH = au Rgle GC. — Ax. 3. L. 1.
   Ce □ CH étant donc = au □ de BC (*Ref.* 4) & le Rgle GC = au Rgle BA . AC; à cause que AG = AB (*Ref.* 1).
7. Il s'ensuit. que la droite AB est coupée en C de façon que le Rgle BAC est = au □ de CB. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XII. *THEOREME XI.*

EN tout triangle amblygone (CBA) le quarré du côté (BC): qui eſt oppoſé à l'angle obtus (A) eſt plus grand que les quarrés des deux autres côtés (AB, CA), du double rectangle compris d'un des côtés (CA) alentour de l'angle obtus, ſur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire abaiſſée de l'angle oppoſé (B), & de la partie (AD) compriſe entre cette perpendiculaire & le ſommet de l'angle obtus (A).

HYPOTHESE.	THESE.
I. CBA eſt un △ amblygone, *II. Et BD la ⊥ abaiſſée du ſommet de l'angle B, ſur le prolongement du côté oppoſé, CA.*	*Le □ de BC eſt = au □ de AB + au □ de AC + au double Rgle CAD.*

DEMONSTRATION.

PUiſque la droite CD eſt coupée en deux parties quelconques CA, AD (*Hyp.* 2).

1. Le □ de CD eſt = au double Rgle CA . AD & aux □ de CA & de AD pris enſemble. — Prop. 4. L. 2.

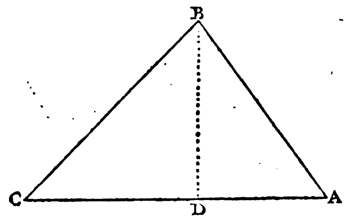
   Si on ajoute donc de part & d'autre le □ de BD.

2. Le □ de CD + le □ de BD ſera = au double Rgle CA.AD + au □ de CA + au □ de AD + au □ de BD. — Ax. 2. L. 1.

   Mais le □ de CD avec le □ de BD eſt = au □ de BC, & le □ de AD avec le □ de BD eſt = au □ de AB (*Prop.* 47. *L.* 1).

3. Par conſequent, le □ de BC eſt = au double Rgle de CAD + au □ de CA + au □ de AB.. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F.D.



PROPOSITION XIII. *THEOREME XII.*

EN tout triangle oxygone (CBA): le quarré d'un des côtés (BA) opposé à un des angles aigus (C) eſt plus petit que les quarrés des deux autres côtés (CB, CA), du double rectangle compris d'un des côtés (AC) alentour de l'angle aigû, ſur lequel tombe la perpendiculaire (BD), abaiſſée de l'angle opposé (B), & de la partie (CD) compriſe entre cette perpendiculaire & le ſommet de l'angle aigû (C).

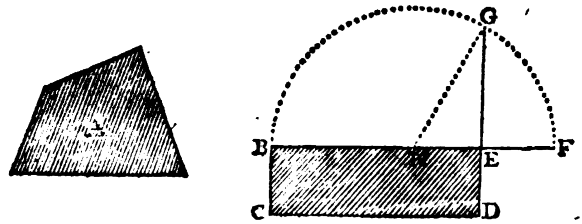
HYPOTHESE.	THESE.
I. CBA eſt un $\triangle$ oxygone, *II. Et BD la $\perp$ abaiſſée du ſommet de l'angle B ſur le côté oppoſé CA.*	*Le $\square$ de BA + le double Rgle ACD eſt = au $\square$ de CA + au $\square$ de CB.*

DEMONSTRATION.

PUiſque la droite CA eſt partagée en deux parties quelconques CD, DA (*Hyp.* 2).

1. Le $\square$ de CA avec le $\square$ de CD eſt = au double Rgle AC.CD avec le $\square$ de AD. — Prop 7. L. 2.
   Si donc on ajoute de part & d'autre le $\square$ de DB,
2. Le $\square$ de CA + le $\square$ de CD + le $\square$ de DB ſera = au double Rgle AC.CD + au $\square$ de AD + au $\square$ de DB. — Ax. 2. L. 1.
   Mais le $\square$ de CD + le $\square$ de DB eſt = au $\square$ de CB, & le $\square$ de AD + le $\square$ de DB eſt = au $\square$ de BA (*Prop.* 47. *L.* 1).
3. C'eſt pourquoi, le $\square$ de BA + le double Rgle ACD eſt = au $\square$ de CA + au $\square$ de CB. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. *PROBLEME II.*

CONstruire un quarré ; égal à une figure rectiligne donnée (A).

DONNEE	CHERCHEE.
La figure rectiligne A.	*La construction d'un quarré = à la figure rectiligne donnée A.*

Résolution.

1. FAites le Pgr. Rgle CE = à la figure A. Prop. 45. L. 1.
2. Prolongez le côté BE, & faites EF = à ED. Prop. 3. L. 1.
3. Partagez la droite BF en deux parties égales au point H. Prop. 10. L. 1.
4. Et du point H comme centre, & du rayon HB décrivez le ⊙ BGF. Dem. 3.
5. Prolongez le côté DE, jusqu'a ce qu'il coupe la ○ BGF en G. Dem. 1.

Préparation.

TIrez du point H au point G la droite HG. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la droite BF est coupée en deux également en H & en deux inégalement en E (*Ref.* 3 & 2).

1 Le Rgle BE.EF & le □ de HE pris ensemble font = au □ de HF. Prop. 5. L. 2.

2. Et parceque HF = HG (*Def.* 15. *L.* 1); le □ de HF est = au □ HG. Prop. 46. L. 1.
Le Rgle BE.EF + le □ HE est = au □ de HG. Coroll. 3.
Mais le □ de HG etant = au □ HE & au □ de EG pris ensemble (*Prop.* 47. *L.* 1).

3. Le Rgle BE.EF + le □ de HE est aussi = au □ de HE + au □ de EG. Ax. 1. L. 1.
Si on retranche donc de part & d'autre le □ de HE ;.

4. Le Rgle BE.EF sera = au □ de EG. Ax. 3. L. 1.
Et ce Rgle BE.EF étant de plus = au Rgle BE.ED; à cause que EF = ED. (*I*

5. Le Rgle BE.ED sera aussi = au □ de EG. Ax. 1. L. 1.
Mais le Rgle BE.ED est = à la figure donnée A (*Ref.* 1).

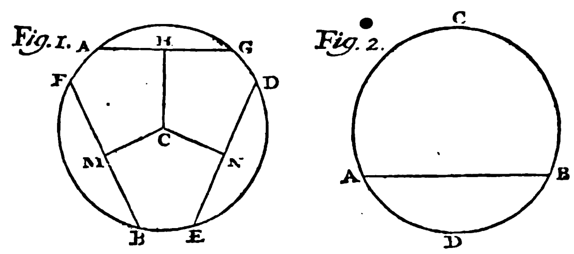
6. Par conséquent, le □ de EG sera aussi égal à cette figure rectiligne donnée A. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. F.

REMARQUE.

Si le point H tombe sur le point E, les droites BE, EF, ED, seront chacune égales à EG ; est le Pgr Rgle CE, lui même, sera le quarré cherché. (*Coroll.* 1 *&* 3. *de la Prop.* 46. *L.* 1).

LES
ELEMENS
D'EUCLIDE,
LIVRE TROISIÉME.



DEFINITIONS

IV.

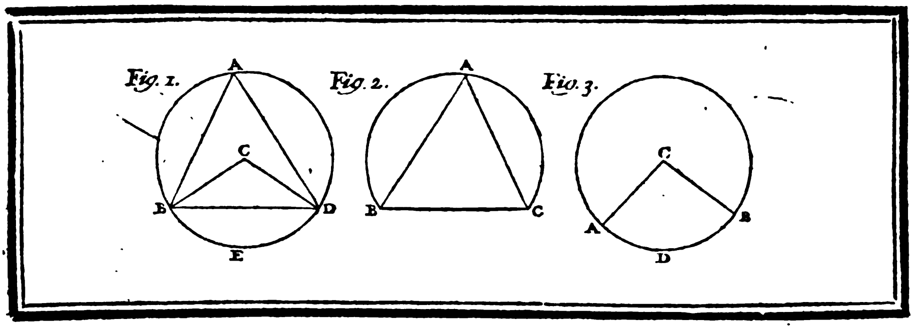
LA diſtance d'une ligne droite (FB) du centre du cercle, *eſt la perpendiculaire* (CM) *abaiſſée du centre du cercle* (C) *ſur cette ligne droite* (FB); C'eſt pour cela que l'on dit; que *deux lignes droites* (FB, DE) *ſont également diſtantes du centre du cercle*, quand les perpendiculaires (CM, CN), abaiſſées du centre (C) ſur ces lignes droites (FB, DE) ſont égales. *Fig.* 1.

V.

Mais on dit qu'*une ligne droite* (AG) *eſt plus éloignée du centre du cercle que* (BF ou ED), lorſque la perpendiculaire (CH) abaiſſée du centre (C) ſur cette ligne droite eſt plus grande que (CM ou CN) *Fig.* 1.

VI.

L'angle mixtiligne du ſegment, eſt cet angle (CAB ou DAB) formé de l'arc (CA ou DA) du ſegment (ACB ou ADB) & de ſa corde (AB); *Fig.* 2.



DEFINITIONS.

VII.

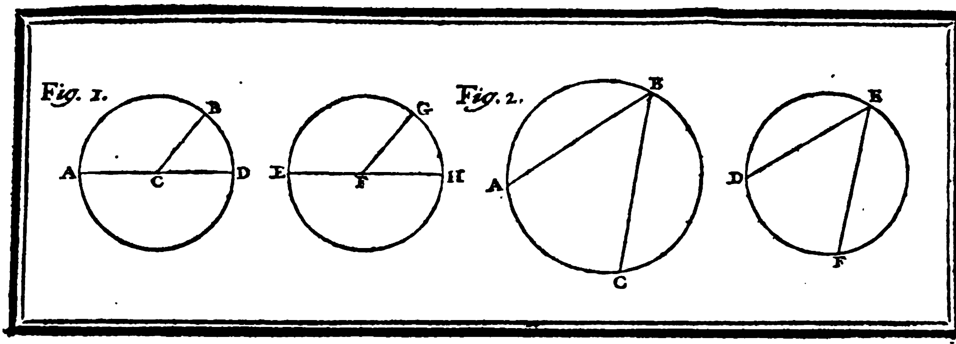
L'*angle dans le ſegment*, eſt un angle (BAC) compris de deux lignes droites (AB, AC) tirées d'un point (A) de l'arc du ſegment, & terminées aux extrêmités (B & C) de la corde (BC) *Fig.* 2. *Quand les lignes droites* (AB, AD) *partent d'un point* (A) *pris dans la circonférence du cercle*, *l'angle* (BAD) *eſt* un angle à la circonférence: *mais quand les lignes droites* (CB, CD) *partent du centre*, *l'angle* (BCD) *eſt* un angle au centre. *Fig.* 1.

VIII.

On dit, qu'*un angle s'appuye ſur un arc de cercle*, quand les lignes droites (AB AD ou CB, CD), qui forment cet angle (BAD ou BCD), ſont tirées ; ſoit d'un même point (A) de la circonférence; ſoit de ſon centre (C), aux extrêmités (B & D) de l'arc (BED). *Fig.* 1.

IX.

Un ſecteur de cercle, eſt une figure compriſe de deux rayons (CA, CB), & de l'arc, (ADB) compris entre ces deux rayons. *Fig.* 3.



AXIOMES.

I.

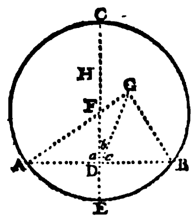
LEs cercles égaux (ABD, EGH), font ceux dont les diamétres (AD, EH), ou les rayons (CB, FG) font égaux. *Fig. 1.*

Le rayon eſt la déterminante du cercle ; parcequ'un cercle eſt décrit par le mouvement du rayon autour du centre: Or quand les déterminantes de deux figures ſont les mêmes, il eſt naturel que les déterminées le ſoient auſſi; & c'eſt la raiſon pourquoi l'égalité des rayons entraine néceſſairement l'égalité parfaite des cercles décrits de ces rayons.

II.

LEs ſegmens de cercle (ABC, DEF), qui peuvent contenir des angles égaux (ABC, DEF), font ſemblables. *Fig. 2.*

Les cercles ſont des figures ſemblables: par conſéquent tout ce qu'on détermine dans deux cercles de la même maniere, doit conſerver ce caractere de ſimilitude. Si on retranche donc deux ſegmens ABC, DEF, *au moien de deux angles égaux* ABC, DEF *qu'on y place, ces ſegmens doivent être ſemblables, comme ayant été retranchés ſemblablement de deux touts ſemblables. Cette propoſition eſt proprement un theorême, qui peut être démontré de la véritable notion de la ſimilitude, qu'Euclide n'a point développé.*



PROPOSITION I. *PROBLEME I.*

TRouver le centre (F) d'un cercle donné (ACBE).

DONNE	CHERCHE.
Le cercle ACBE.	*Le centre F de ce ⊙.*

Résolution.

1. Tirez la corde AB. — Dem. 1.
2. Coupez la en deux également au point D. — Prop. 10. L. 1.
3. Du point D élevez sur AB, la ⊥ DC, & prolongez la en E. — Prop. 11. L. 1.
4. Coupez la droite CE en deux également au point F; — Prop. 10. L. 1.

Ce point F sera le centre cherché du ⊙ donné ACBE.

DEMONSTRATION.

SI non. Quelqu'autre point, comme H ou G pris dans la ligne ou hors de la ligne EC, sera le centre cherché du ⊙ ACBE.

CAS. I.

Supposé, que le centre se trouve dans la ligne EC, en un point H différent du point F.

PUisque le centre du ⊙ est dans la ligne EC, en un point H différent du point F (*Sup.* 1).

1. Les rayons HE & HC sont = entr'eux. — Def. 15. L. 1.

Mais FE étant = à FC (*Ref.* 4) & HC $<$ FC (*Ax.* 8. *L.* 1).

2. HC sera aussi $<$ FE, & à plus forte raison $<$ HE.
3. Partant, HE n'est point = à HC.
4. Le point H pris dans la ligne EC, different du point F, ne peut donc être le centre du ⊙ ACBE.

CAS II.

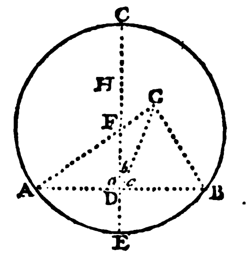
Supposé, que le centre se trouve hors de la ligne EC, en un point G.

Préparation.

Tirez donc du centre G les droites GA, GD, GB. — Dem. 1.

PUisque dans les △ AGD, DGB le côté GA est = au côté GB (*Prep.* & *Def.* 15. *L.* 1), le côté GD commun aux deux △, & la base AD = à la base DB (*Ref.* 2).

 1. Les

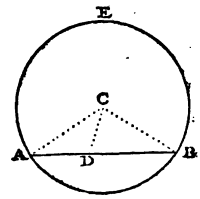


1. Les ∀ contigus $a + b$ & c, opposés aux côtés égaux G A, G B, sont = entr'eux. Prop. 8. L. 1.
2. Partant ∀ $a + b$ est un ∟. Def. 10. L. 1.
   Mais ∀ a étant aussi un ∟ (*Rés.* 3).
3. Il suit, que ∀ $a + b$ est = à ∀ a; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
4. Partant le point G pris hors de la ligne E C, ne peut être le centre du ⊙ A C B E.
   Ce centre n'étant donc ni dans la ligne E C, en un point H différent du point F (*Cas.* I); ni hors de la ligne E C, en un point G (*Cas.* II).
5. Le centre cherché du ⊙ A C B E sera nécessairement en F.

C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

SI dans un cercle A C B E, une corde E C coupe une autre corde A B en deux également & à angles droits; cette corde C E est un diametre, & par conséquent le centre du cercle s'y trouve (*Def.* 17. *L.* 1).



PROPOSITION II. THEOREME I.

SI on prend deux points quelconques (A & B) dans la circonférence d'un cercle (AEB): la droite (AB), qui joint ces deux points, tombera au dedans du cercle.

HYPOTHESE	THESE.
Les deux points A & B sont pris dans le ○ AEB.	*La droite AB tombe au dedans du ⊙ AEB.*

Préparation.

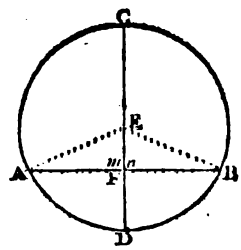
1. CHerchez le centre C du ⊙ AEB. — Prop. 1. L. 3.
2. Tirez les droites CA, CD, CB. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque dans le △ ACB, le côté CA est = au côté CB (*Prep.* 2 & *Def.* 15. *L.* 1).

1. Les ∀ CAD, CBD sont = entr'eux. — Prop. 5. L. 1.
Mais ∀ CDA étant un ∀ extérieur du △ CDB.
2. Il est > que son intérieur CBD. — Prop. 16. L. 1.
Et à cause que ∀ CBD est = à ∀ CAD (*Arg.* 1).
3. Cet ∀ CDA sera aussi > ∀ CAD.
4. Partant, le côté CA opposé au plus grand ∀ CDA est > le côté CD opposé au moindre ∀ CAD. — Prop. 19. L. 1.
5. D'où il suit, que l'extrêmité D de ce côté CD tombe au dedans du ⊙ AEB.
Et comme on peut démontrer la même chose, de tout autre point pris dans la droite AB.
6. Il est évident, que la droite entiere AB tombe au dedans du ⊙ AEB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION III. THEOREME II.

SI un diametre (CD) coupe une corde (AB) en deux également (en F): il la coupe à angles droits. Et *reciproquement*; si un diametre (CD) coupe une corde (AB) à angles droits: il la coupe aussi en deux également.

I.

HYPOTHESE.	THESE.
CD est un diametre du ⊙ ACBD, qui coupe AB en deux également au point F.	*Le diametre CD est ⊥ sur la corde AB.*

Préparation

TIrez les rayons EA, EB. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

DAns les △ AEF, BEF, le côté EA est = au côté EB (*Prep.* & *Def.* 15. *L.* 1), le côté EF est commun aux deux △, & la base AF = à la base BF (*Hyp.*).

1. Par conséquent, les ∀ contigus *m* & *n*, opposés aux côtés égaux EA, EB, sont = entr'eux. Prop. 8. L. 1.
2. Partant, la droite CD, qui forme sur AB des ∀ contigus *m* & *n* = entr'eux, est ⊥ sur AB. Def. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

I I.

HYPOTHESE.	THESE.
La droite CD est un diametre du ⊙ ACBD, qui est ⊥ sur la corde AB; ou qui fait ∀ m = ∀ n.	*AF est = à FB.*

DEMONSTRATION.

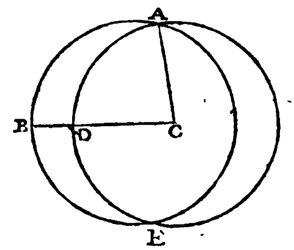
LEs côtés EA, EB du △ AEB étant = entr'eux (*Prep.* & *Def.* 15. *L.* 1).

1. Les ∀ EAF, EBF le seront aussi. Prop. 5. L. 1.

Puis donc que dans les △ AEF, BEF, les ∀ EAF, EBF sont = (*Arg.* 1), de même que les ∀ *m* & *n* (*Hyp.*), & le côté EF commun aux deux △.

2. La base AF sera = à la base FB. Prop. 26. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION V. THEOREME IV.

SI deux cercles (ABE, ADE) s'entre-coupent mutuellement: ils n'ont pas un même centre (C).

Hypothese.	These.
ABE, ADE sont deux ⊙ qui s'entre-coupent mutuellement aux points A & E.	*Ces deux cercles n'ont pas un même centre C.*

Demonstration.

SI non.
Les cercles ABE, ADE ont un même centre C.

Préparation.

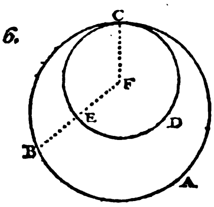
1. Tirez du point C à un point de section A le rayon CA.
2. Et du même point C la droite CB, qui coupe les deux ⊙ aux points D & B. } Dem. 1.

PUisque les droites CA, CD sont tirées du centre C à la ⊙ ADE (*Prep.* 1. & 2).

1. Ces droites CA, CD sont = entr'elles. Def. 15. L. 1.
Par un raisonnement semblable on prouvera, que
2. Les droites CA, CB sont = entr'elles.
3. Partant, CB seroit = à CD; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
4. Donc les deux cercles ABE, ADE n'ont pas un même centre C.

C. Q. F. D.

Fig. 6.



PROPOSITION VI. *THEOREME V.*

SI deux cercles (BCA, ECD) se touchent intérieurement en (C): ils n'ont pas un même centre (F).

HYPOTHESE.	THESE.
Le ⊙ ECD touche le ⊙ BCA intérieurement en C.	*Ces deux ⊙ n'ont point un même centre F.*

DEMONSTRATION.

SI non.
Les ⊙ BCA, ECD ont un même centre F.

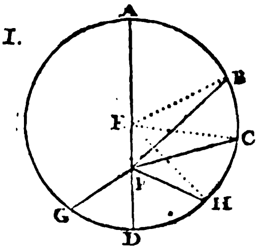
Préparation.

Tirez donc les rayons FB, FC. Dem. 1.

Puisque le point F est le centre du ⊙ BCA (*Sup*).
1. Les rayons FB, FC sont = entr'eux. Def. 15. L. 1.
Derechef; le point F étant aussi le centre du ⊙ ECD (*Sup*).
2. Les rayons FE, FC sont = entr'eux. Ax. 8. L. 1.
3. Partant FB = FE (*Ax.* 1. *L.* 1); ce qui est impossible.
4. C'est pourquoi les deux ⊙ BCA, ECD n'ont point un même centre F.

C. Q. F. D.

Fig. I.



PROPOSITION VII. THEOREME VI.

SI d'un point quelconque (F) dans un cercle (AHG), différent de son centre (E), on tire à sa circonférence tant de lignes droites (FA, FB, FC, FH) que l'on voudra, la plus grande de toutes est (FA) qui passe par le centre, & la plus petite est sa prolongée (FD). Quant aux autres; celle (FB ou FC), qui est plus proche de la ligne (FA) passant par le centre, est plus grande qu'une autre (FC ou FH), qui en est plus éloignée. Enfin; de part & d'autre de la plus petite (FD), on ne sauroit tirer de ce même point (F) plus de deux lignes droites (FH, FG) égales entr'elles.

Hypothese.

I. Le point F pris dans le ⊙ AHG, est different du centre E.
II. La droite FA, tirée du point F, passe par le centre E du ⊙ AHG,
III. Et les droites FB, FC, FH sont tirées du point F à la circonférence AHG.

These.

I. La droite FA est la plus grande de toutes les droites tirées du point F à la circonférence AHG,
II. Et sa prolongée FD est la plus petite de toutes ces droites.
III. De toutes les autres droites FB, ou la droite FC, plus proche de FA, est > FC ou FH, qui en est plus éloignée.
IV. Du point F, de part & d'autre de la plus petite FD, on ne peut tirer plus de deux droites FH, FG = entr'elles.

I. *Préparation.*

TIrez les rayons EB, EC, EH &c. *Fig.* I.

Demonstration.

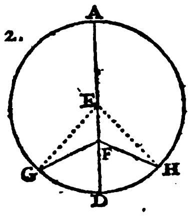
1. LEs deux côtés FE+EB du △ FEB sont > le troisieme FB. Prop. 20. L. I.
Or EB est = à EA (*Def.* 15. *L.* I).
2. Donc FE+EA, ou FA est > FB.
De la même maniere on prouvera, que
3. La droite FA, est la plus grande de toutes les droites tirées du point F à la circonférence AHG.

C. Q. F. D. I.

4. Derechef; les deux côtés FE+FH du △ FEH sont > le troisieme EH. Prop. 20. L. I.
Et ED étant = à EH (*Def.* 15. *L.* I)

5. Les

Fig. 2.



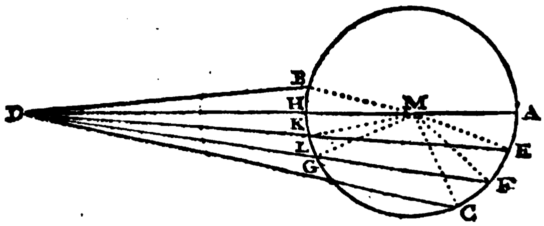
5. Les droites FB + FH sont aussi > ED.
En retranchant donc de part & d'autre la partie FE; Ax. 5. L. 1.
6. La droite FH sera > FD; ou FD < FH.
On démontrera de la même maniere que
7. La droite FD, qui est la prolongée de FA, est la plus petite de toutes les droites quelconques tirées du point F à la circonférence AHG. C. Q. F. D. II.

De plus, le côté FE étant commun aux deux △ FEB, FEC, le côté EB = au côté EC (*Def.* 15. *L.* 1), & ∀ compris FEB > ∀ compris FEC (*Ax.* 8. *L.* 1); Prop. 24. L. 1.
8. La base FB sera > la base FC.
Par un raisonnement semblable on prouvera que
9. La droite FC est > FH.
10. Partant, la droite FB ou FC plus proche de la ligne FA, passant par le centre, est > celle FC ou FH qui en est plus éloignée. C. Q. F. D. III.

II. *Préparation.* *Fig.* 2.

1. Faites ensuite ∀ FEG = à ∀ FEH, & prolongez EG jusqu'à la rencontre de la ○AHG. Prop. 23. L. 1.
2. Du point F au point G tirez la droite FG. Dem. 1.

Maintenant, EF étant commun aux deux △ FEH, FEG, le côté EH = au côté EG (*Def.* 15. *L.* 1), & ∀ compris FEH = à ∀ compris FEG (*II Prep.* 1). Prop. 4. L. 1.
11. La base FH sera = à la base FG.
Mais parceque tout autre droite, différente de FG, se trouve nécessairement, ou plus proche de la ligne FD ou plus éloignée d'elle, que FG.
12. Une telle droite sera aussi < ou > FG (*Arg.* 10).
13. C'est pourquoi on ne peut tirer du point F, de part & d'autre de la plus petite FD, plus de deux lignes droites FH, FG = entr'elles. C. Q. F. D. IV.



PROPOSITION VIII. THEOREME VII.

SI d'un point quelconque (D), pris hors d'un cercle (BGCA), on tire à sa circonférence concave, tant des lignes droites (DA, DE, DF, DC) qu'on voudra celle (DA) qui passe par le centre (M): est la plus grande de toutes. Quant aux autres; la plus proche (DE ou DF) de celle (DA) qui passe par le centre est plus grande grande qu'une autre (DF ou DC) qui en est plus éloignée: mais au contraire de celles (DH, DK, DL, DG), qui se terminent à la circonférence convexe; celle (DH) dont le prolongement passe par le centre, est la plus petite de toutes. Quant aux autres; la plus proche (DK ou DL), de celle (DH), dont le prolongement passe par le centre, est plus petite qu'une autre (DL ou DG), qui est plus éloignée. Enfin de part & d'autre la plus petite (DH), on ne peut tirer du point (D) que deux lignes droites (DK, DB) égales entr'elles.

HYPOTHESE.

I. Le point D est pris hors d'un ⊙ BGCA dans un même plan.

II. Les droites DA, DE, DF, DC, sont tirées de ce point, à la partie concave du ⊙ BGCA.

III. Et ces droites coupent la partie convexe aux points H, K, L, G.

THESE.

I. La droite DA, passant par le centre M, est la plus grande de toutes les droites, DA, DE, DF, DC.

II. Les droites DE ou DF, selon qu'elles sont plus proches de la ligne DA sont > DF ou DC, qui en sont plus éloignées.

III. La droite DH, dont le prolongement passe par le centre M, est la plus petite de toutes les droites DH, DK, DL, DG.

IV. Les droites DK ou DL, selon qu'elles sont plus proches de la ligne DH, sont < DL ou DG, qui en sont plus éloignées.

V. Du point D, de part & d'autre de la droite DH, on ne peut tirer plus de deux droites DK, DB = entr'elles.

I. *Préparation.*

TIrez les rayons ME, MF, MC, MK, ML.

DEMONSTRATION.

1. LEs deux côtes DM+ME du △ DME sont > le troisieme DE. Prop. 20. L. 1.
Et parceque ME = MA (*Def.* 15. *L.* 1).

2. DM+MA

2. DM+MA ou DA sera > DE.
De la même maniere on prouvera que
3. La droite DA passant par le centre M est > toute autre droite tirée du point D à la partie concave du ⊙ BGCA.

C. Q. F. D. I.

De plus le côté DM étant commun aux deux △ DME, DMF, le côté ME = au côté MF (*Def.* 15. *L.* 1) & ∀ compris DME > ∀ compris DMF (*Ax.* 8. *L.* 1).
4. La base DE sera aussi > la base DF. Prop. 24. L. 1.
Par un raisonnement semblable on démontrera que
5. La droite DF est > DC, & ainsi des autres.
6. Partant, les droites DE ou DF, selon qu'elles sont plus proches, de la ligne DA passant par le centre, sont > DF ou DC qui en sont plus éloignées.

C. Q. F. D. II.

7. Derechef, les côtés DK+KM du △ DKM sont > le troisieme DM. Prop. 20. L. 1.
Si on retranche de part & d'autre les parties égales MK, MH (*Def.* 15. *L.* 1).
8. La ligne restante DK sera > DH; ou DH < DK.
On prouvera de même que
9. La droite DH est < DL, & ainsi des autres.
10. Partant, la droite DH, dont le prolongement passe par le centre M, est la plus petite de toutes les droites tirées du point D à la partie convexe du ⊙ BGCA.

C. Q. F. D. III.

De même, les droites DK, MK étant tirées des extrêmités D & M du côté DM du △ DLM à un point K, pris au dedans de ce △ (*Hyp.* 3).
11. Il s'ensuit que DK+MK < DL+ML. Prop. 21. L. 1.
Et en retranchant ces parties égales MK, ML (*Def.* 15. *L.* 1).
12. La droite DK sera < DL.
On démontrera de la même maniere, que
13. La droite DL est < DG; & ainsi des autres.
14. Partant, les droites DK ou DL, selon qu'elles sont plus proches de la ligne DH, dont le prolongement passe par le centre, sont < DL ou DG, qui en sont plus éloignées.

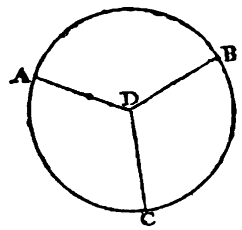
C. Q. F. D. IV.

II. *Préparation.*

1. Faites ensuite ∀ DMB = à ∀ DMK, & prolongez MB jusqu'à la rencontre de la ○. Prop. 23. L. 1.
2. Du point D au point B tirez la droite DB. Dem. 1.

Maintenant, le côté DM étant commun aux deux △ DKM, DBM, le côté MK = au côté MB (*Def.* 15. *L.* 1), & ∀ compris DMK = à ∀ compris DMB (*II Prep.* 1).
15. La base DK sera = à la base DB. Prop. 4. L. 1.
Mais parceque toute autre droite différente de DB, se trouve nécessairement ou plus proche de la ligne DH ou plus éloignée d'elle, que DB.
16. Une telle droite sera aussi < ou > BD (*Arg.* 14).
17. C'est pourquoi on ne peut tirer du point D, de part & d'autre de la droite DH, plus de deux lignes droites DK, DB = entr'elles.

 C. Q. F. D. V.



PROPOSITION IX. THEOREME VIII.

Si d'un point quelconque (D), pris au dedans d'un cercle (ABC), on peut tirer à sa circonférence plus de deux lignes droites (DA, DB, DC) égales entr'elles, ce point sera le centre du cercle.

HYPOTHESE.	THESE.
Du point D, pris au dedans du ⊙ ABC, on peut tirer à la ○ ABC plus de deux droites DA, DB, DC = entr'elles	*Le point D est le centre du cercle ABC.*

DEMONSTRATION.

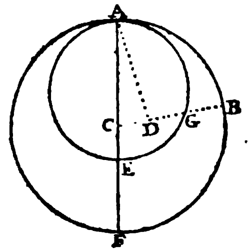
Si non.

Quelqu'autre point sera le centre.

Puisque donc le point D n'est pas le centre (*Sup.*), & que de ce point D, on peut tirer à la circonférence plus de deux droites DA, DB, DC = entr'elles (*Hyp*).

1. Il s'ensuivroit, que d'un point D, autre que le centre, on pourroit tirer plus de deux droites = entr'elles; ce qui est impossible. Prop. 7. l. 3.
2. Partant, le point D est le centre du ⊙ ABC.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. THEOREME X.

SI deux cercles se touchent intérieurement (en A): la droite qui joint leurs centres, étant prolongée, passera par le point de leur attouchement (A).

HYPOTHESE.	THESE.
La droite CA joint les centres des deux ⊙ AGE, ABF, qui se touchent intérieurement en A.	*Cette droite étant prolongée, passé par le point d'attouchement A de ces deux ⊙*

DEMONSTRATION.

SI non.
Cette droite qui joint les centres, passera quelqu'autre part, comme la droite CGB.

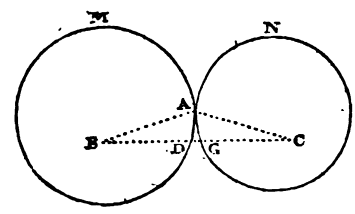
Préparation.

TIrez donc des centres C & D au point d'attouchement les droites CA, DA. Dem. 1.

PUisque dans le △ CDA, les deux côtés CD & DA pris ensemble, sont > le troisieme CA (*Prop.* 20. *L.* 1), & que CA est = à CB (*Def.* 15. *L.* 1).

1. Les droites CD + DA seront aussi > CB,
Si on retranche donc de part & d'autre la partie commune CD;
2. La droite DA sera > DB. Ax. 5. L. 1.
Mais la droite DA étant = à DG (*Prep.* & *Def.* 15. *L.* 1).
3. DG seroit aussi > DB; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
4. C'est pourquoi la droite CA, qui joint les centres des ⊙ AGE, ABF se touchant intérieurement, étant prolongee, passera par le point d'attouchement A.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XII. *THEOREME XI.*

SI deux cercles (DAM, GAN) se touchent extérieurement: la droite (BC), qui joint leurs centres, passera par le point d'attouchement (A).

HYPOTHESE.	THESE.
La droite BC joint les centres des deux ⊙ DAM, GAN, qui se touchent extérieurement en A.	*La droite BC passe par le point d'attouchement des deux ⊙.*

DEMONSTRATION.

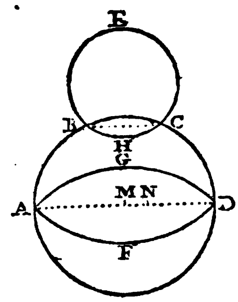
SI non.
Cette droite, qui joint les centres, passera autre part, comme BDGC.

Préparation.

TIrez donc des centres B & C au point d'attouchement A les rayons BA, CA. Dem. 1.

PUisque BA est = à BD & CA = à CG (*Def.* 15. *L.* 1).
1. Les droites BA+CA sont = aux droites BD+CG; Ax. 2. L. 1.
Et si on ajoute aux droites BD+CG la partie DG;
2. BD+DG+CG, ou la base BC du △ BAC est > les deux côtés BA +CA; ce qui est impossible. Prop. 20. L. 1.
3. La droite BC, qui joint les centres, passera donc par le point d'attouchement A.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIII. THEOREME XII.

DEux cercles (ABCD, AGDF ou ABCD, BECH), qui se touchent; soit intérieurement; soit extérieurement: ne se touchent pas en plus d'un point.

HYPOTHESE	THESE.
I. Les deux ⊙ ABCD, AGDF se touchent intérieurement, *II. Et les deux ⊙ ABCD, BECH se touchent extérieurement.*	*Les ⊙ ABCD, AGDF ou ABCD, BECH ne se touchent pas en plus d'un point.*

DEMONSTRATION.

SI non.

I. Les ⊙ ABCD, AGDF se touchent intérieurement en plus d'un point, comme en A & en D.

II. Ou bien les ⊙ ABCD, BECH se touchent extérieurement en plus d'un point, comme en B & en C.

I. *Préparation.*

1. TRouvez les centres M & N des ⊙ ABCD, AGDF. Prop. 1. L. 3.
2. Tirez par les centres la droite MN & prolongez la de part & d'autre, jusqu'a la rencontre de la O. Dem. 1. & 2.

PUisque la droite MN joint les centres M & N des deux ⊙ ABCD, AGDF, (*Prep.* 2), qui se touchent intérieurement (*Sup.* 1).

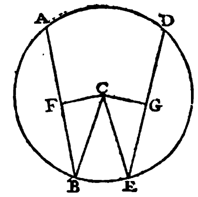
1. Cette droite passera par les points d'attouchement A & D. Prop. 11. L. 3.
Or AM est = à MD (I. *Prep.* 2. & *Def.* 15. *L.* 1). Ax. 8. L. 1.
2. La droite AM est donc > ND & à plus forte raison AN > ND.
Mais par la raison que AN est = a ND (I. *Prep.* 2. & *Def.* 15. *L.* 1).
3. La droite AN seroit à la fois > ND & = à ND; ce qui est impossible.
4. Partant, deux ⊙ ABCD, AGDF, qui se touchent intérieurement, ne sauroient se toucher en plus d'un point. C. Q. F. D.

II. *Préparation.*

TIrez par les points d'attouchement B & C des ⊙ ABCD, BECH, la droite BC. Dem. 1.

PUisque la droite BC joint deux points B & C, pris dans les O des cercles ABCD, BECH (II *Prep.*).

1. Cette droite tombera au dedans des deux ⊙ ABCD, BECH. Prop. 2. L. 3.
Mais le ⊙ BECH touchant extérieurement le ⊙ ABCD (*Sup.* 2). Def. 3. L. 3.
2. La droite BC, tirée dans le ⊙ BECH, tombera hors du ⊙ ABCD.
3. D'où il suit, que la droite BC tomberoit à la fois dans le ⊙ ABCD (*Arg.* 1) & hors du même ⊙ (*Arg.* 2); ce qui est impossible.
4. C'est pourquoi deux ⊙ ABCD, BCEH, qui se touchent extérieurement, ne se touchent pas en plus d'un point. C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. THEOREME XIII.

DAns un cercle (ABED) les cordes égales (AB, DE) font également éloignées du centre (C) : & les cordes (AB, DE) également éloignées du centre (C): font égales.

CAS I.

Hypothese.	Préparation.	These.
Les cordes AB, DE font égales.		*Ces cordes font également éloignées du centre C.*

1. TRouvez le centre C du ⊙ ABED. — Prop. 1. L. 3.
2. Abaiffez fur les cordes AB, DE les ⊥ CF, CG. — Prop. 12. L. 1.
3. Tirez du centre C aux points E & B les rayons CE, CB. — Dem. 1.

Demonstration.

LEs cordes AB, DE étant = entr'elles (*Hyp.*), & partagées en deux également en F & G (*Prep.* 2, & *Prop.* 3. *L.* 3).

1. Leurs moitiés FB, GE le font auffi, — Ax. 7. L. 1.
2. Partant, le □ de FB eft = au □ GE. — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
   Mais à caufe que le □ de CB eft = au □ de CE (*Prep.* 3. & *Prop.* 46. *Coroll.* 3).
3. Il s'enfuit, que le □ de FB + le □ de FC eft = au □ de GE + au □ de CG. — Prop 47. L. 1. Ax. 1. L. 1.
   Retranchant donc de part & d'autre les □ égaux de FB & de GE (*Arg.* 2).
4. Le □ reftant de FC fera = au □ de GC (*Ax.* 3. *L.* 1); ou FC = GC. — Prop. 46 L. 1. Coroll. 3.
5. Partant, les cordes AB, DE font également éloignées du centre C du ⊙ ABED. — Def. 4. L. 3.

C. Q. F. D.

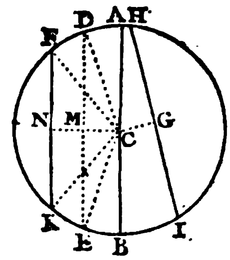
CAS II.

Hypothese.	These.
Les cordes AB, DE, font également éloignées du centre C du ⊙ ABED.	*Ces cordes font égales.*

PUifque FC eft = à GC (*Hyp.* & *Def.* 4. *L.* 3), & CB = CE (*Prep.* 3 & *Def.* 15. *L.* 1).

1. Le □ de FC fera = au □ de CG & le □ de CB = au □ de CE. — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
2. Partant, le □ de FC + le □ de FB eft auffi = au □ de CG + au □ de GE. — Prop. 47. L. 1. Ax. 1. L. 1.
   En retranchant donc de part & d'autre les □ égaux de FC & de CG (*Arg.* 1);
3. Le □ reftant de FB fera = au □ de GE (*Ax.* 3. *L.* 1); ou FB = GE. — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
4. Partant, FB, GE étant les demi cordes (*Prep.* 2. *Prop.* 3. *L.* 3), les cordes entieres AB, DE font auffi égales entr'elles. — Ax. 6. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. THEOREME XIV.

LE diametre (AB) d'un cercle (AIK) eſt plus grand que chacune de ſes cordes (HI, FK); & une corde (HI) plus proche du diametre eſt plus grande que toute autre (FK), qui en eſt plus éloignée.

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB eſt le diametre du ⊙ AIK.	*I. Le diametre AB eſt > chacune des cordes HI, FK.*
II. Et la corde HI, eſt plus proche du diametre que la corde FK.	*II. La corde HI eſt > la corde FK.*

Préparation.

1. DU centre C abaiſſez ſur HI & FK les ⊥ CG, CN. — Prop. 12. L. 1.
2. De CN, la plus grande de ces ⊥, retranchez une partie CM = à CG. — Prop. 3. L. 1.
3. Elevez au point M ſur CN une ⊥ DM, & prolongez la en E. — Prop. 11. L. 1.
4. Tirez les rayons CD, CF, CE, CK. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque les droites CD, CE, CA, CB ſont = entr'elles (*Prep.* 4 & *Def.* 15. *L.* 1).

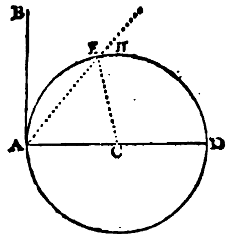
1. Il ſuit, que CD + CE eſt = à CA + CB ou AB. — Ax. 2. L. 1.
   Mais CD + CE eſt > DE (*Prop.* 20. *L.* 1).
2. C'eſt pourquoi AB eſt auſſi > DE, ou > HI; à cauſe que HI = DE (*Prep.* 2). — Def. 4. L. 3. Prop. 14. L. 3.
3. On prouvera par un raiſonnement ſemblable, que AB eſt auſſi > FK.

C. Q. F. D. I.

De plus, les △ CDE, CFK ayant deux côtés CD, CE = à deux côtés CF, CK chacun à chacun (*Prep.* 4. & *Def.* 15. *L.* 1), & ∀ compris DCE > ∀ compris FCK (*Ax.* 8. *L.* 1).

4. La baſe DE ſera > la baſe FK. — Prop. 24. L. 1.
5. Et parceque HI eſt = à DE (*Prep.* 2.), HI eſt auſſi > FK. — Def. 4. L. 3. Prop. 14. L. 3.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XVI. *THEOREME XV.*

Toute droite (AB) perpendiculaire au diametre d'un cercle (AHD), à son extrêmité (A), tombe hors de ce cercle; & on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette perpendiculaire (AB) & la circonférence; de plus l'angle mixtiligne (HAD), formé par une partie de la circonférence (HEA) & le diametre (AD): est plus grand que tout angle rectiligne aigû quelconque; & l'angle (HAB) formé par la perpendiculaire (AB), & la même partie de la circonférence (HEA); est plus petit que tout autre angle rectiligne aigû quelconque.

Hypothese.	These.
I. AB est tirée perpendiculairement à l'extrémité A du diametre,	*I. La ⊥ AB tombe hors du ⊙ AHD.*
II. Et forme avec l'arc HEA un ∀ mixtiligne HAB,	*II. On ne peut tirer aucune droite entre la ⊥ AB & l'arc HEA.*
III. Le diametre AD forme avec le même arc HEA un ∀ mixtiligne HAD.	*III. L'angle mixtiligne HAD est > tout ∀ rectiligne aigû.*
	IV. L'angle mixtiligne HAB est < tout ∀ rectiligne aigû.

Demonstration.

I. Si non.

La ⊥ AB tombera au dedans du ⊙ AHD & le coupera quelque part en E, comme AE.

Préparation.

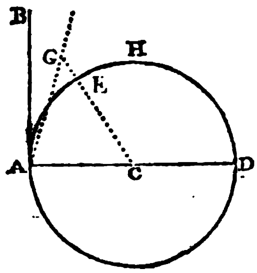
Du centre C au point de section E tirez le rayon CE. Dem. 1.

Puisque CA est = à CE (*Def.* 15. *L.* 1).

1. L'angle CAE sera = à ∀ CEA. Prop. 5. L. 1.
2. Et à cause que ∀ CAE est un ∟ (*Sup.*); ∀ CEA est aussi un ∟. Ax. 1. L. 1.
3. C'est pourquoi, les deux ∀ CAE + CEA, du △ AEC, ne seront pas < 2 ∟; ce qui est impossible. Prop. 17. L. 1.
4. La ⊥ AB tombe donc hors du cercle.

C. Q. F. D.

 II Si non.



II. Si non.

On pourra tirer une droite, comme A G, entre la ⊥ AB & la circonférence du ⊙. AHD.

Préparation.

Du centre C, abaissez sur AG la ⊥ CG. Prop. 12. L. 1.

Puisque ∀ CGA est un ∟; & ∀ CAG < un ∟ (*Ax.* 8. *L.* 1); comme n'étant que la partie d'un ∟ CAB (*Hyp.* 1).

1. Il suit que le côté CA est > le côté CG. Prop. 19. L. 1.
Mais CA étant = à CE (*Def.* 15. *L.* 1).
2. La droite CE seroit aussi > CG; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
3. On ne peut donc tirer aucune droite entre la ⊥ AB & la ○ du ⊙ AHD.

C. Q. F. D. II.

III. & IV. Si non.

On peut tirer une droite, comme AG, qui forme de part & d'autre avec le diametre AD & avec la ⊥ AB, un ∀ rectiligne aigû GAD > ∀ mixtiligne HAD, & un ∀ rectiligne GAB < ∀ mixtiligne EAB.

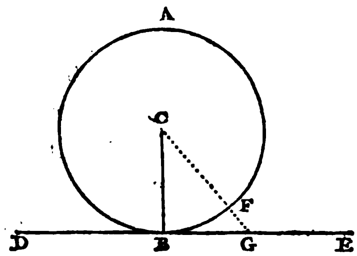
Puis donc que la droite AG, tirée à l'extrémité A du diamétre AD, forme avec le diametre & avec la ⊥ AB un ∀ rectiligne aigû GAD > ∀ mixtiligne HAD, & un ∀ rectiligne GAB < ∀ mixtiligne EAB (*Sup.*).

1. Cette droite AG tombera nécessairement sur l'extrémité A au diametre AD, entre la ⊥ AB & la circonférence du ⊙ AHD; ce qui est impossible. Dem. précéd.
2. L'angle mixtiligne HAD est donc >, & ∀ mixtiligne HAB < tout ∀ rectiligne aigû.

C. Q. F. D. III. & IV.

COROLLAIRE.

Toute droite, tirée perpendiculairement, à l'extrémité d'un diametre, touche le cercle en un seul point.



PROPOSITION XVIII. THEOREME XVI.

SI une droite (DE) touche un cercle (AFB) en un point (B): le rayon (CB) tiré du centre au point d'attouchement (B), est perpendiculaire sur la tangente (DE).

HYPOTHESE.	THESE.
I. La droite DE touche le ⊙ AFB au point B,	*Le rayon CB est ⊥ sur la tangente DE.*
II. Et le rayon CB passe par le point d'attouchement B.	

DEMONSTRATION.

SI non.

On pourra abaisser du centre C une autre droite CG ⊥ sur la tangente. DE.

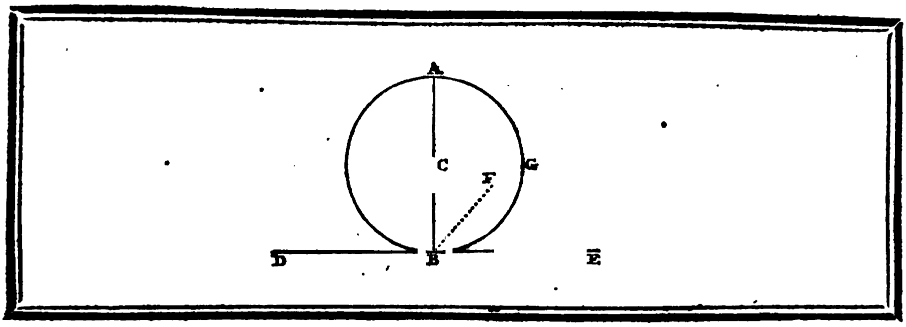
Préparation.

ABaissez donc du centre C sur la tangente DE la ⊥ CG. Prop. 12. L. 1.

PUisque l'angle BGC du △ BCG est un ∟ *(Prep.)*.

1. L'angle CBG sera < un ∟. Prop. 17. L. 1.
2. Partant, CB est > CG, Prop. 19. L. 1.
   Et CF étant = CB *(Def. 15. L. 1)*.
3. La droite CF est aussi > CG; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
4. C'est pourquoi le rayon CB est ⊥ sur la tangente DE.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX. *THEOREME XVII.*

Si une ligne droite (DE) touche un cercle (AGB en B): la perpendiculaire (BA) élevée du point d'attouchement (B) sur cette tangente, passera par le centre (C) du cercle.

Hypothese.

I. La droite DE est tangente du ⊙ AGB,
II. Et BA est la ⊥ élevée du point d'attouchement B sur cette tangente.

These.

La droite BA passe par le centre C du ⊙ AGB.

Demonstration.

Si non.
Le centre se trouvera dans un point F hors de la droite BA.

Préparation.

Tirez donc du point d'attouchement B au centre F la droite BF. — Dem. 1.

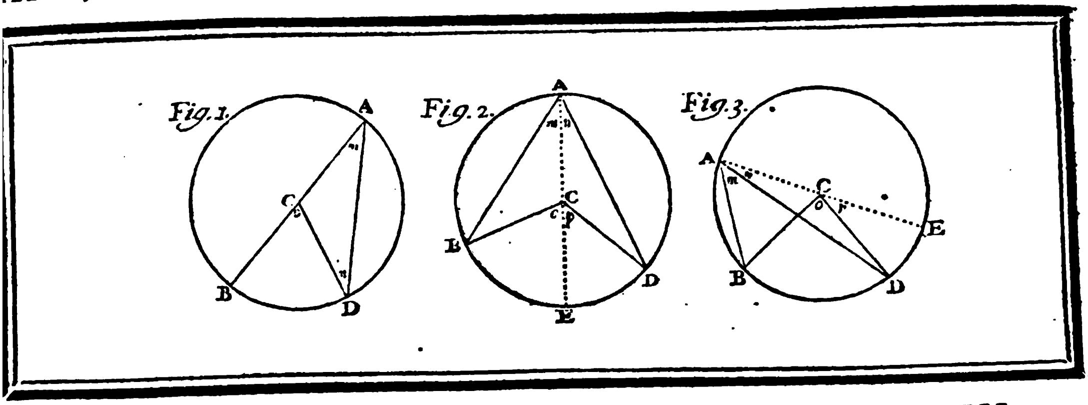
Puisque la droite BF est tirée du point d'attouchement B au centre F du ⊙ AGB (*Prep.*).

1. L'angle FBE est un L. — Prop. 18. L. 3.

Mais ∀ ABE étant aussi un L (*Hyp.* 2.).

2. L'angle ABE est = à ∀ FBE; ce qui est impossible. — Ax. 10. L. 1.
3. C'est pourquoi le centre C sera nécessairement dans la droite BA. — Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XX. THEOREME XVIII.

DAns le cercle: l'angle au centre (BCD) est double de l'angle à la circonférence (BAD), quand ces angles s'appuyent sur le même arc (BD).

HYPOTHESE.

I. L'angle BCD est au centre, & ∀ BAD à la ○.
II. Les jambes BC, CD & BA, AD de ces ∀ s'appuyent sur le même arc BD.

THESE.

L'angle au centre BCD est double de ∀ à la ○ *BAD.*

DEMONSTRATION.

CAS I.

SI le centre C, tombe sur une des jambes AB de ∀ à la ○. (*Fig.* 1).

PUisque dans le △ CAD le côté CA est = au côté CD (*Def.* 15. *L.* 1).
1. L'angle *m* est = à ∀ *n* & ∀ *m* + *n* double ∀ *m*. Prop. 5. L. 1. Ax. 2. L. 1.
Mais ∀ *o* est = à ∀ *m* + *n* (*Prop.* 32. *L.* 1). Ax. 6. L. 1.
2. Donc ∀ *o* est double de ∀ *m* ou ∀ BCD double de ∀ BAD.
C. Q. F. D.

CAS II.

SI le centre C tombe au dedans de ∀ à la ○ (*Fig.* 2).

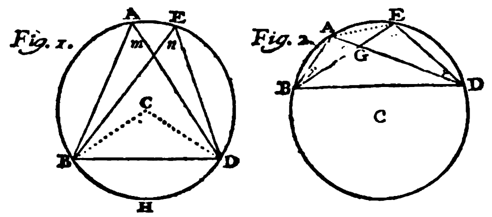
Préparation.

TIrez le diametre ACE. Dem. 1.
On prouvera, comme dans le premier Cas.
1. Que le ∀ *o* est double de ∀ *m* & ∀ *p* double ∀ *n*.
2. D'où il suit que ∀ *o* + *p* est double de ∀ *m* + *n*, ou ∀ BCD double de ∀ BAD. Ax. 8. L. 1.
C. Q. F. D.

CAS III.

SI le centre C tombe au dehors de ∀ à la ○ (*Fig.* 3).

En tirant le diametre ACE; on démontrera encore par un raisonnement semblable à celui du premier Cas, que
1. L'angle *p* est double de ∀ *n*, & ∀ *o* + *p* double de ∀ *m* + *n*;
En retranchant donc d'une part ∀ *p*, & de l'autre ∀ *n*,
2. L'angle restant *o* sera double de ∀ *m* ou ∀ BCD double de ∀ BAD. Ax. 3, L. 1.
C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. THEOREME XIX.

DAns le cercle, les angles (m & n), placés dans un même segment de cercle (B A E D), sont égaux entr'eux.

Hypothese.	These.
Les ∀ m & n sont dans le même segment de ⊙ B A E D.	*∀ m est = à ∀ n.*

Demonstration.

CAS I.

SI le segment BAED est > le demi ⊙ (*Fig.* 1).

Préparation.

1. CHerchez le centre C du ⊙ BAED. Prop. 1. L. 3.
2. Et tirez les rayons CB, CD. Dem. 1.

PUisque ∀ BCD est double de chacun des ∀ m & n (*Prop.* 20. *L.* 3).
1. Il s'ensuit que ∀ m est = à ∀ n. Ax. 7. L. 1.

CAS II.

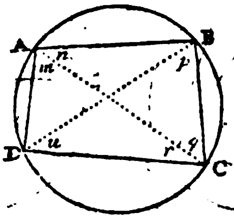
SI le segment BAED est < le demi ⊙ (*Fig.* 2).

Préparation.

TIrez la droite AE. Dem. 1.

1. LEs trois ∀ $m + o + q$ du △ BAG sont égaux aux trois ∀ $p + m + r$ du △ GED. Prop. 32. L. 1.
Mais ∀ q est = à ∀ r (*Cas* 1), & ∀ o = à ∀ p (*Prop.* 15. *L.* 1), en retranchant donc d'une part les ∀ $q + o$ & de l'autre leurs égaux les ∀ $p + r$, & Ax. 1. L. 1.
2. Les ∀ restans m & n seront = entr'eux. Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. THEOREME XX.

LEs figures quadrilatères (DABC) inscrites dans un cercle: ont les angles opposés (BAD, BCD ou ABC, ADC) égaux à deux droits.

HYPOTHESE.	THESE.
La figure DABC est un quadrilatère inscrit dans un ⊙.	*Les ∀ opposés BAD + BCD, ou ABC + ADC sont = à 2 L.*

Préparation.

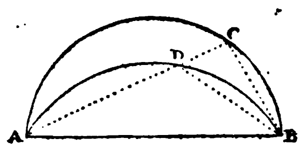
Tirez les diagonales AC, BD. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les ∀ u & n sont des ∀ à la ○, placés dans le même segment DABC.

1. Ces ∀ u & n sont = entr'eux. Prop. 21. L. 3.
   On prouvera de même, que
2. Les ∀ p & m sont = entr'eux.
3. C'est pourquoi, les ∀ $u + p$ sont = aux ∀ $n + m$ ou à ∀ BAD. Ax. 2. L. 1.
   Si on ajoute donc de part & d'autre ∀ $r + q$, ou BCD;
4. Les ∀ $u + p + (r + q)$ font = aux ∀ BAD+BCD. Ax. 2. L. 1.
   Mais les trois ∀ $u + p + (r + q)$ du △ DBC étant = à 2 L (*Prop.* 32. *L.* 1).
5. Les deux ∀ opposés BAD + BCD du quadrilatère DABC sont aussi = à 2 L. Ax. 1. L. 1.
   On démontrera par un raisonnement semblable, que
6. Les ∀ ABC + ADC sont = à 2 L.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. *THEOREME XXI.*

Sur une même ligne droite (AB) & du même côté: on ne sçauroit placer deux segmens de cercles (ADB, ACB) semblables & inégaux.

HYPOTHESE	THESE
Les segmens semblables ADB, ACB sont placés sur une même ligne droite & du même côté.	*Ces segmens ne sçauroient être semblables & inégaux.*

DEMONSTRATION.

Si non.

Les segmens ADB, ACB placés sur la même corde AB & du même côté seront semblables & inégaux.

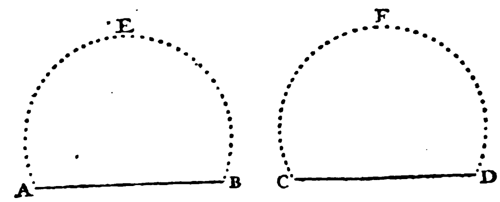
Préparation.

1. Tirez une droite quelconque AC, qui coupe les segmens ADB, ACB aux points D & C.
2. Tirez les droites BD, BC. } Dem. 1.

Puisque les ∀ BDA, BCA sont placés dans des segmens semblables ADB, ACB (*Hyp.* & *Prep.* 1 & 2).

1. Ces ∀ sont donc = entr'eux. Ax. 1. L. 3.
2. L'angle extérieur ADB du △ BDC seroit donc = à son intérieur opposé BCD; ce qui est impossible. Prop. 16. L. 1.
3. Partant, on ne sçauroit placer sur une même ligne droite AB & du même côté deux segmens de ⊙ ADB, ACB semblables & inégaux.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIV. THEOREME XXII.

LEs segmens de cercles semblables (AEB, CFD) soustendus par des cordes égales (AB, CD) sont égaux entr'eux.

Hypothese.

I. Les segmens de ⊙ AEB, CFD sont semblables,
II. Et ces segmens sont soustendus par des cordes égales AB, CD.

These.

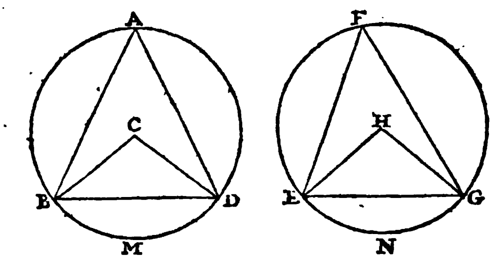
Les segmens AEB, CFD sont = entr'eux.

Demonstration.

SI non.
Le segment AEB ne sera point = au segment CFD.

PUis donc que le segment AEB n'est point = au segment CFD (*Sup*), & que la corde AB est = à la corde CD. (*Hyp.* 2),
1. On pourra placer sur une corde AB, ou sur son égale CD, deux segmens de ⊙ semblables & inégaux AEB, CFD; ce qui est impossible. Prop. 23. L. 1.
2. Ces segmens sont donc = entr'eux.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVI. THEOREME XXIII.

DAns les cercles égaux (BADM, EFGN): les angles égaux; tant ceux au centre C & H, que ceux a la circonférence (A & F), s'appuyent sur des arcs égaux (BMD, ENG).

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les ∀ A, F sont des ∀ à la ○, = entr'eux. *II. Les ∀ C & H sont des ∀ au centre = entr'eux.* *III. Ces ∀ sont placés dans des ⊙ égaux BADM, EFGN.*	*Les arcs BMD, ENG sur lesquels ces ∀ s'appuyent sont = entr'eux.*

Préparation.

TIrez les cordes BD, EG.

DEMONSTRATION.

LEs deux côtés CB, CD du △ BCD étant = aux deux côtés HE, HG du △ EHG (*Hyp.* 3 & *Ax.* 1. *L.* 3), & ∀ compris C = à ∀ compris H (*Hyp.* 2).

1. La base BD sera = à la base EG. — Prop. 4. L. 1.

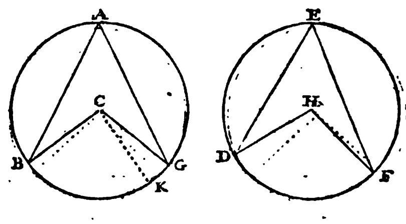
Et puisque ∀ A est = à ∀ F (*Hyp.* 1).

2. Le segment BAD est semblable au segment EFG. — Ax. 2. L. 3.
3. C'est pourquoi la base BD étant = à la base EG (*Arg.* 1) ces segmens seront = entr'eux. — Prop. 24. L. 3.

Si on retranche donc des ⊙ égaux BADM, EFGN (*Hyp.* 3) les segmens egaux BAD, EFG (*Arg.* 3).

4. Les arcs restans BMD, ENG seront aussi = entr'eux. — Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVII. *THEOREME XXIV.*

Dans les cercles égaux (BAG, DEF), les angles, tant ceux au centre (BCG, & H), que ceux à la circonférence (A & E), qui s'appuyent sur des arcs égaux (B G, DF): sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

I. Les ⊙ BAG, DEF sont =, de même que leurs arcs BG, D F.
II. Les ∀ au centre BCG & H, de même que ceux à la ○ A & E, s'appuyent sur des arcs égaux.

THESE.

I. Les ∀ au centre BCG & H sont = entr'eux.
II. Et les ∀ à la ○ A & E sont aussi = entr'eux.

DEMONSTRATION.

Si non.
Les ∀ au centre BCG & H; seront inégaux, & l'un comme BCG sera > l'autre H.

Préparation.

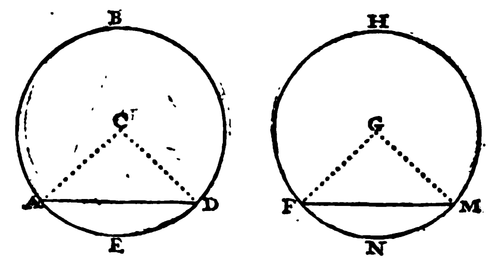
Faites sur BC au point C, l'angle BCK = à ∀ H. — Prop. 23. L. 1.

1. L'arc BK est donc = à l'arc DF. — Prop. 26. L. 3.
Mais l'arc DF étant = à l'arc BG. (*Hyp.* 2).
2. L'arc BK seroit aussi = à l'arc BG; ce qui est impossible; — Ax. 1. L. 1. Ax. 8. L. 1.
3. Partant, les ∀ au centre BCG & H sont = entr'eux.

C. Q. F. D. I.

Et ces ∀ étant doubles des ∀ à la ○ A & E (*Prop.* 20. *L.* 3).
4. Les ∀ à la ○ A & E sont aussi = entr'eux. — Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXVIII. THEOREME XXV.

DAns les cercles égaux (ABDE, FHMN): les cordes égales (AD, FM) soutendent des arcs égaux (ABD, FHM ou AED, FNM).

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les ⊙ ABDE, FHMN sont égaux.	*Les cordes AD, FM soustiendent des arcs égaux*
II. Et les cordes AD, FM sont égales.	*ABD, FHM ou AED, FNM.*

Préparation.

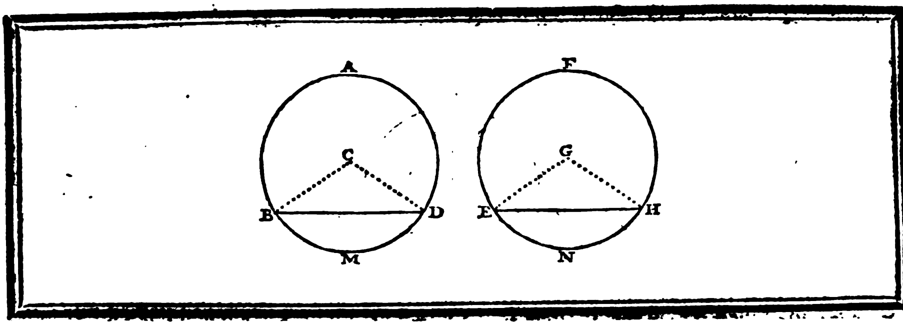
1. CHerchez les centres C & G des deux ⊙ ABDE, FHMN. Prop. 1. L. 3.
2. Tirez les rayons CA, CD: item GF, GM. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les ⊙ ABDE, FHMN sont égaux (*Hyp.* 1).

1. Les côtés CA, CD, & GF, GM des △ ACD, FGM sont = aussi. Ax. 1. L. 3.
   Et les cordes AD, FM étant outre cela égales (*Hyp.* 2).
2. Les ∀ ACD, FGM sont = entr'eux. Prop. 8. L. 1.
3. Partant, les arcs AED, FNM soustendus par les cordes AD, FM seront aussi = entr'eux. Prop. 26. L. 3.
4. Et les O entieres étant de plus égales (*Hyp.* 1), les arcs ABD, FHM sont aussi égaux. Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIX. THEOREME XXVI.

DAns les cercles égaux (BADM, EFHN): les arcs égaux (BMD, ENH) sont soustendus par des cordes égales (BD, EH).

Hypothese.	These.
I. *Les ⊙ BADM, EFHN sont égaux.*	*Les cordes BD, EH, qui soustendent ces arcs sont = entr'elles.*
II. *Les arcs BMD, ENH sont égaux aussi.*	

Préparation.

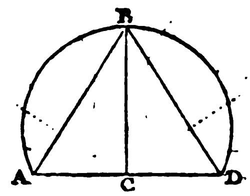
1. CHerchez les centres C & G des deux ⊙ BADM, EFHN. Prop. 1. L. 3.
2. Tirez les rayons CB, CD, GE, GH. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les ⊙ BADM, EFHN sont égaux (*Hyp.* 1).

1. Les côtés CB, CD, & GE, GH des △ BCD, EGH sont = entr'eux. Ax. 1. L. 3.
   Mais les arcs BMD, ENH etant aussi égaux (*Hyp.* 2).
2. Les ∀ C & G, compris par ces côtés égaux, seront = entr'eux. Prop. 27. L. 3.
3. Partant, la corde BD est = à la corde EH. Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXX. PROBLEME IV.

Couper un arc (ABD) en deux parties égales (AB, BD).

Donne.	Cherchee.
L'arc ABD.	*La division de l'arc ABD en deux parties égales AB, BD.*

Résolution.

1. Du point A au point D tirez la corde AD. — Dem. 1.
2. Coupez cette corde en deux également au point C. — Prop. 10. L. 1.
3. Du point C élevez sur AD la ⊥ CB; qui, prolongée suffisamment, coupera l'arc ABD en deux également au point B. — Prop. 11. L. 1.

Préparation.

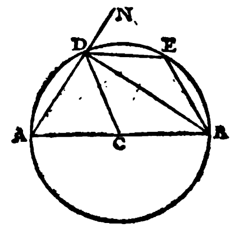
Tirez les cordes AB, DB. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque le côté AC est = au côté CD (*Res.* 2.), CB commun aux deux △ ABC, DBC, & ∀ compris ACB = à ∀ compris DCB (*Ax.* 10. *L.* 1. & *Res.* 3).

1. La base AB est = à la base DB. — Prop. 4. L. 1.
2. Partant, les arcs AB & DB soutendus par les cordes égales AB, DB sont aussi = entr'eux, & l'arc entier ABD est coupé en deux également en B. — Prop. 28. L. 3.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXI. THEOREME XXVII.

L'angle (ADB), placé dans le demi cercle (ADEB), est un droit; mais l'angle (DAB), qui est placé dans un segment (DAB) plus grand que le demi cercle, est plus petit qu'un droit; & celui (DEB), qui est placé dans un segment (DEB) plus petit que le demi cercle, est plus grand qu'un droit. Outre cela, l'angle mixtiligne (BDA) du plus grand segment, est plus grand qu'un angle droit; & celui (BDE) du plus petit segment, est moindre qu'un angle droit.

CAS I.

HYPOTHESE.	THESE.
L'angle ADB est placé dans un demi ⊙ ADEB.	*Cet ∀ ADB est un ∟.*

Préparation.

1. Tirez le rayon CD. — Dem. 1.
2. Et prolongez AD en N. — Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le △ ADC le côte CA est = au côté CD (*Def.* 15. *L.* 1).
1. L'angle CDA est = à ∀ CAD. — Prop. 5. L. 1.
Derechef, dans le △ CDB; le côté CD étant = au côté CB (*Def.* 15. *L.* 1).
2. L'angle CDB est = à ∀ CBD. — Prop. 5. L. 1.
3. Partant, ∀ ADB est = aux ∀ CAD + CBD. — Ax. 2. L. 1.
Mais ∀ NDB est aussi = aux ∀ CAD + CBD (*Prop.* 32. *L.* 1).
4. C'est pourquoi, cet ∀ NDB est = à ∀ ADB. — Ax. 1. L. 1.
5. D'où il suit que ∀ ADB est un ∟. — Def. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

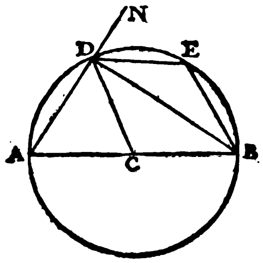
CAS II.

HYPOTHESE.	THESE.
L'angle DAB est placé dans un segment DAB > le demi ⊙.	*Cet ∀ DAB est < un ∟.*

DEMONSTRATION.

Puisque dans le △ ADB, l'angle ADB est un ∟ (*Cas.* 1).
1. L'angle DAB sera < un ∟. — Prop. 17. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS III.

HYPOTHESE.
L'angle DEB est placé dans un segment DEB ∠ la demi ⊙.

THESE.
Cet ∀ DEB est > un ∟.

DEMONSTRATION.

1. LEs ∀ opposés DAB+DEB, du quadrilatere ADEB sont = à 2 ∟. Prop. 22. L. 3.
2. C'est pourquoi, ∀ DAB étant ∠ un ∟ (*Cas II*), DEB sera necessairement > un ∟.

C. Q. F. D.

CAS IV.

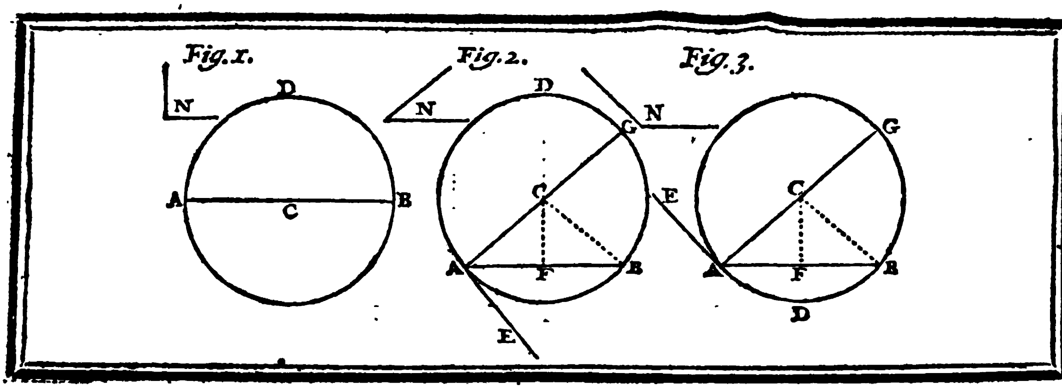
HYPOTHESE.
Les ∀ mixtilignes BDA, BDE, sont formés par la droite BD & les arcs DA, DE.

THESE.
L'angle BDA est > un ∟, & l'angle BDE est ∠ un ∟.

DEMONSTRATION.

PUisque les ∀ rectilignes ADB, NDB sont des ∟ (*Cas* 1).
1. L'angle mixtiligne BDA sera nécessairement > un ∟, & ∀ mixtiligne BDE ∠ un ∟. Ax. 8. L. 1.

C. Q. F.D.



PROPOSITION XXXIII. PROBLEME V.

SUr une droite donnée (AB); décrire un fegment de cercle (ADB), qui contienne un angle égal à un angle donné (N).

DONNEE	CHERCHEE.
La droite AB avec ∀ N.	*Le fegment ADB décrit fur AB, qui contienne un ∀ = à ∀ N.*

CAS I. Si ∀ donné eft ∟, (*Fig.* 1).

DEMONSTRATION.

ON n'a qu'à décrire fur AB un demi ⊙ ADB. — Dem. 3.
1. Ce demi ⊙ contiendra un ∀ = à ∀ droit donné N. — Prop. 31. L. 3.

CAS II. Si ∀ donné eft aigû, (*Fig.* 2.); ou obtus (*Fig.* 3).

Réfolution.

1. FAites fur AB, au point A, l'angle BAE = à ∀ donné N. — Prop. 23. L. 1.
2. Du point A élevez fur AE la ⊥ AG. — Prop. 11. L. 1.
3. Coupez la droite AB en deux également au point F. — Prop. 10. L. 1.
4. Elevez fur AB, au point F, la ⊥ FC, qui coupera AG quelque part en C. — Prop. 11. L. 1.
5. De ce point C comme centre, & du rayon CA, décrivez le ⊙ ADG; — Dem. 3.

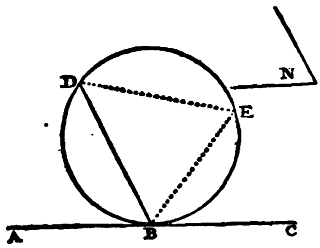
Préparation.

Tirez la droite CB. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUifque dans les △ ACF, BCF, le côté AF eft = au côté BF (*Ref.* 3), FC commun aux deux △, & ∀ compris AFC = à ∀ compris BFC (*Ax.* 10. *L.* 1 & *Ref.* 4).
1. La bafe CA eft = à la bafe CB. — Prop. 4. L. 1.
2. Partant, le ⊙ décrit du centre C & du rayon CA, paffera auffi par le point B, & ADB eft un fegment décrit fur AB. — Def. 15. L. 1. / Def. 19. L. 1.
Mais la droite AE touchant le ⊙ ADB au point A (*Ref.* 2. & *Prop.* 16. *L.* 3. *Coroll.*) & AB étant une corde tirée de ce point d'attouchement A (*Arg.* 2.).
3. L'angle compris dans le fegment alterne ADB eft = à ∀ BAE. — Prop. 32. L. 3.
4. C'eft pourquoi, ∀ BAE étant = à ∀ donné N (*Ref.* 1), ∀ compris dans le fegment ADB décrit fur AB, eft auffi = à ∀ donné N. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXIV. *PROBLEME VI.*

RETrancher d'un cercle donné (BDE) un segment (BED), qui contienne un angle (DEB) égal à un angle rectiligne donné (N).

Donne.	Cherche.
Le ⊙ BDE, & ∀ rectiligne N.	*Le segment BED retranché de ce ⊙, contenant un ∀ DEB = à ∀ donné N.*

Résolution.

1. D'Un point quelconque A tirez au ⊙ BDE la tangente ABC. Prop. 17. L. 3.
2. Du point d'attouchement B, menez la corde BD, ensorte qu'elle forme sur AB ∀ DBA = à ∀ donné N. Prop. 23. L. 1.

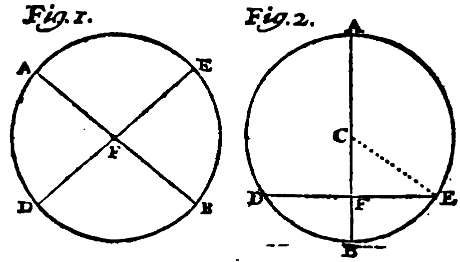
Demonstration.

PUisque ∀ donné N est = à ∀ DBA (*Ref.* 2), & ∀ DEB = à ∀ DBA (*Prop.* 32. *L.* 3). Ax. 1. L. 1.

1. Les ∀ DEB & N sont = entr'eux.
2. On a donc retranché du ⊙ BDE, un segment BED, qui contient un ∀ DEB = à ∀ donné N. Prop. 21. L. 3.

C. Q. F. F.

Fig. 1. Fig. 2.



PROPOSITION XXXV. THEOREME XXIX.

SI dans un cercle (DAEB) deux cordes (AB, DE) s'entrecoupent: le rectangle compris des deux parties (AF, FB) de l'une, est égal au rectangle compris sous les deux parties (DF, FE) de l'autre.

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB, DE sont deux cordes d'un même ⊙ DAEB, *II. Et ces cordes s'entrecoupent en un point F.*	*Le Rgle AF.FB est = au Rgle DF.FE.*

CAS I. Si les deux cordes passent par le centre F du ⊙ (*Fig.* 1).

DEMONSTRATION.

1. LEs droites AF, FB, DF, FE sont donc = entr'elles, Def. 15. L. 1.
2. Et par conséquent le Rgle AF.FB est = au Rgle DF.FE. Ax. 2. L. 2.

CAS II. Si l'une des cordes AB, passant par le centre coupe l'autre DE à L. (*Fig.* 2).

Préparation.

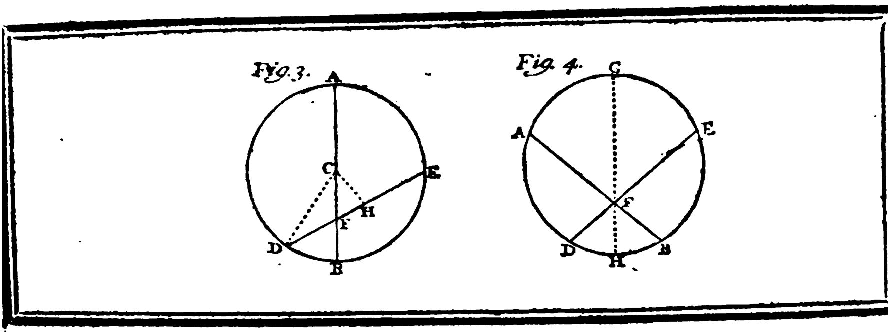
TIrez le rayon CE. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la droite AB est coupée en deux également en C, & en deux inégalement en F.

1. Le Rgle AF.FB + le □ de CF est = au □ de CB, ou = au □ de CE. {Prop. 5. L. 2. / Ax. 1. L. 1.}
   Mais le □ de FE + le □ de CF est aussi = au □ de CE (*Prop.* 47. *L.* 1).
2. D'où il suit que le Rgle AF.FB + le □ de CF est = au □ de FE + au □ de CF. Ax. 1. L. 1.
3. Partant, le Rgle AF.FB est = au □ de FE, Ax. 3. L. 1.
   Et par la raison que DF est = à FE (*Prop.* 3. *L.* 3), ou DF.FE = au □ de FE (*Ax.* 2. *L.* 2).
4. Le Rgle AF.FB est aussi = au Rgle DF.FE. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS III. Si l'une des cordes AB, passant par le centre, coupe l'autre DE obliquement. (*Fig.* 3).

Préparation.

1. DU centre C abbaissez sur DE la ⊥ CH, Prop. 12. L. 1.
2. Et tirez le rayon CD. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque DH est = à HE (*Prep.* 1. & *Prop.* 3. *L.* 3).
1. Le Rgle DF.FE + le □ de FH est = au □ de DH. Prop. 5. L. 2.
2. C'est pourquoi, le Rgle DF.FE + le □ de FH + le □ de CH est = au □ de DH + au □ de CH; Ax. 2. L. 1.
Mais le □ de FH + le □ de CH est = au □ de CF, & le □ de DH + le □ de CH = au □ de CD (*Prop.* 47. *L.* 1).
3. Le Rgle DF.FE + le □ de CF est donc = au □ de CD, ou au □ de CB. Ax. 1. L. 1.
De plus le Rgle AF.FB + le □ de CF étant = au meme □ de CB (*Prop.* 5. *L.* 2).
4. Le Rgle DF.FE + le □ de CF est aussi = au Rgle AF.FB + au □ de CF, Ax. 1. L. 1.
5. Ou, en retranchant le □ commun de CF, le Rgle DF.FE est = au Rgle AF.FB. Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS IV. Si aucune des cordes AB, DE ne passe par le centre. (*Fig.* 4).

Préparation.

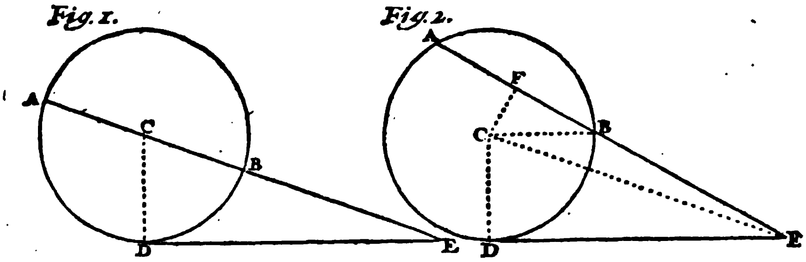
1. Tirez par le point F le diametre GH. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque chacun des Rgles AF.FB & DF.FE est = au Rgle GF.FH, par le troisieme Cas;
1. Ces Rgles AF.FB & DF.FE sont aussi = entr'eux. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.

Fig. 1. Fig. 2.



PROPOSITION XXXVI. THEOREME XXX.

SI d'un point quelconque (E) pris hors d'un cercle (ABD), on tire à ce cercle deux lignes droites, dont l'une (DE) le touche, & l'autre (EA) le coupe: le rectangle compris de la fecante entiere (AE) & de fa partie extérieure (EB) eft égal au quarré de la tangente (ED).

HYPOTHESE.

I. Le point E eft pris hors du ⊙ A B D.
II. Et de ce point on a tiré la tangente E D & la fecante E A.

THESE.

Le Rgle A E . E B eft = au □ de E D.

CAS I. Si la fecante AE paffe par le centre (*Fig.* 1).

Préparation.

TIrez au point d'attouchement D, le rayon CD. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

1. LE Rayon CD eft donc ⊥ fur la tangente ED, Prop. 18. L. 3.
Et à caufe que la droite AB eft coupée en deux également en C, & que la droite BE y eft ajoutée directement,
2. Le Rgle AE.EB + le □ de CB eft = au □ de CE. Prop. 6. L. 2.
De plus, le □ de CE étant auffi = au □ de DE + au □ de CD (*Prop.* 47. *L.* 1), ou au □ de DE + au □ CB (*Prop.* 46. *L.* 1. *Coroll.* 3);
3. Le Rgle AE.EB + le □ de CB eft = au □ de DE + au □ de CB. Ax. 1. L. 1.
4. Partant, le Rgle AE.EB fera = au □ de DE. Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.

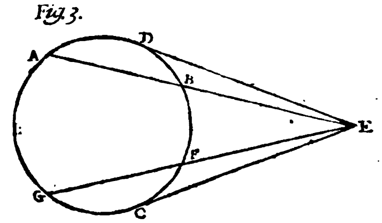
CAS. II. Si la fecante AE ne paffe pas par le centre (*Fig.* 2).

Préparation.

1. ABaiffez du centre C fur AE la ⊥ CF. Prop. 12. L. 1.
2. Tirez les rayons CB, CD, & la droite CE. Dem. 1.

DEMON-

Fig. 3.



DEMONSTRATION.

Puisque la droite AB est coupée en deux également en F (*Prep.* 1. & *Prop.* 3. *L.* 3), & que la droite BE y est ajoutée directement,

1. Le Rgle AE.EB + le □ de FB est = au □ FE. Prop. 6. L. 2.
2. Partant, le Rgle AE.EB + le □ FB + le □ de FC est = au □ de FE + au □ de FC, ou = au □ de CE. {Ax. 2. L. 1. Prop. 47. L. 1.}
   Mais par la raison que le □ de DE + le □ de CD est = au □ de CE & le □ de FB + le □ de FC = au □ de CB (*Prop.* 47. *L.* 1), ou = au □ de CD (*Def.* 15. & *Prop.* 46. *L.* 1, *Coroll.* 3).
3. Le Rgle AE.EB + le □ de CD est = au □ de DE + au □ de CD.
4. Par conséquent, le Rgle AE.EB est = au □ de DE. Ax. 3. L. 1.

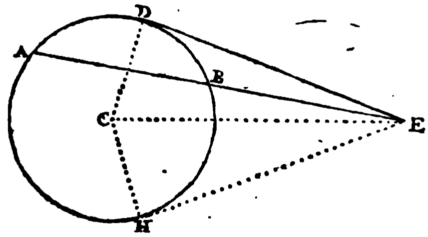
C. Q. F. D.

COROLLAIRE. I.

Il est évident que si (*Fig.* 3) d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADBF), on tire plusieurs droites (AE, EG &c) qui coupent le cercle (en B & F &c): les rectangles compris des secantes entieres (AE, GE), & des parties extérieures (EB, EF), sont égaux entr'eux; puisqu'en tirant du point E la tangente (ED), ces rectangles seront tous égaux au quarré de la même tangente (ED).

COROLLAIRE II.

Il est aussi évident que, si d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADBF), on tire à ce cercle deux tangentes (ED, EC), elles seront égales entr'elles; puisque le quarré de chacune est égal au même rectangle (AE.EB).



PROPOSITION XXXVII. *THEOREME XXXI.*

SI d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADH), on tire à ce cercle deux lignes droites dont l'une (AE) coupe le cercle, & l'autre (ED), se termine à sa circonférence convexe; & que le rectangle, compris de la secante entiere (AE) & de la partie extérieure (EB), soit égal au quarré de la droite (ED), qui se termine à la circonférence convexe: celle-ci touchera le cercle (en D).

HYPOTHESE.	THESE.
I. La droite AE coupe le ⊙ ADH en B, *II. Et la droite ED se termine à sa ○ convexe.* *III. Le Rgle AE.EB est = au □ de ED.*	*La droite ED touche le ⊙ ADH au point D.*

Préparation.

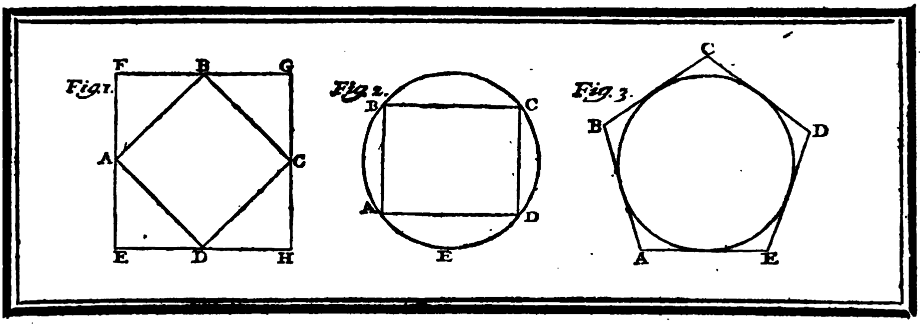
1. DU point E tirez au ⊙ ADH la tangente EH. — Prop. 17. L. 3.
2. Tirez les rayons CD, CH & la droite CE. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque le Rgle de AE . EB est = au □ de ED (*Hyp.* 3) & que le Rgle AE.EB est aussi = au □ de EH (*Prep.* 1 & *Prop.* 36. *L.* 3).

1. Le □ de ED est = au □ de EH (*Ax.* 1. *L.* 1), ou ED = EH, — Prop. 46. L. 1. Coroll. 3.
Et comme de plus, dans les △ CDE, CHE, le côte CD est = au côté CH (*Def.* 15. *L.* 1), & CE commun aux deux △.
2. L'angle CDE est = à ∀ CHE. — Prop. 8. L. 1.
3. C'est pourquoi, ∀ CHE étant un ∟ (*Prep.* 1 & *Prop.* 18. *L.* 3), ∀ CDE est un ∟ aussi, — Ax. 1. L. 1.
4. Et la droite ED touche le ⊙ ADH au point D. — Prop. 16. L. 3. Coroll. 3.

C. Q. F. D.



DEFINITIONS

I.

ON dit qu'*une figure rectiligne* (ABCD) *est inscrite dans une autre figure rectiligne* (EFGH), quand chacun des angles (A, B, C, D) de la figure inscrite, touche chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure dans laquelle elle est inscrite (*Fig.* 1).

II.

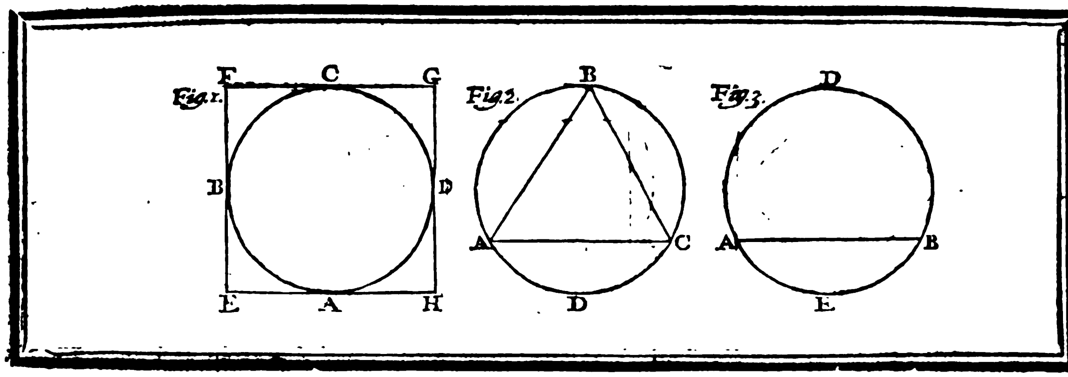
Pareillement on dit qu'*une figure rectiligne* (EFGH) est *circonscrite à une autre figure rectiligne* (ABCD); quand chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure circonscrite touche chacun des angles (A, B, C, D) de la figure à laquelle elle est circonscrite (*Fig.* 1).

III.

Une figure rectiligne (ABCD) est *inscrite dans un cercle*, quand chacun des angles (A, B, C, D) de la figure inscrite touche la circonférence du cercle (ABCDE) dans lequel elle est inscrite (*Fig.* 2).

IV.

Et *une figure rectiligne* (ABCDE) *est circonscrite à un cercle*, quand chacun de ses côtés (AB, BC, CD, DE, EA) touche le cercle, auquel elle est circonscrite (*Fig.* 3).



DEFINITIONS

V.

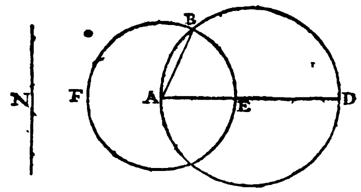
UN *cercle* (ABCD) *est inscrit dans une figure rectiligne* (EFGH), quand sa circonférence touche chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure à laquelle il est inscrit (*Fig.* 1).

VI.

Mais *un cercle* (ABCD) *est circonscrit à une figure rectiligne* (ABC), quand la circonférence du cercle touche chacun des angles (A, B, C) de la figure à laquelle il est circonscrit (*Fig.* 2).

VII.

Une ligne droite (AB) *est appliquée dans un cercle* (ADBE), quand ses extrêmités (A & B) sont dans la circonférence du cercle (*Fig.* 3).



PROPOSITION III. PROBLEME I.

Appliquer dans un cercle donné (ABD), une ligne droite (AB) égale à une ligne droite donnée (N), laquelle ne soit pas plus grande que le diamètre du cercle (ABD).

Donne.
Un ⊙ ABD, avec une droite N, qui n'est pas > le diamètre de ce ⊙.

Cherche.
La droite AB appliquée dans le ⊙ ABD, & qui soit = à la droite N.

Résolution.

1. Tirez le diamètre AD du ⊙ ABD. Dem. 1.

CAS I.

Si AD est = à N.

On aura appliqué dans le ⊙ donne ABD une droite AD = à la donnée N. Def. 7. L. 4.

C. Q. F. F.

CAS II.

Si AD est > N.

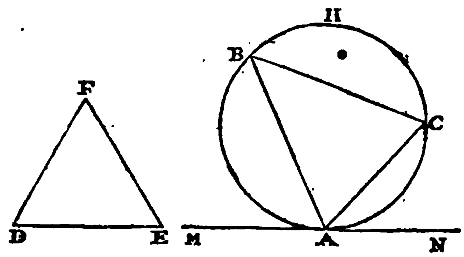
1. Faites AE = à N. Prop. 3. L. 1.
2. Du centre A & du rayon AB décrivez le ⊙ EBF, & tirez AB. Dem. 3.

DEMONSTRATION.

Puisque AB est = à AE (*Def.* 15. *L.* 1), & que la droite N est = à AE (*Ref.* 1),

1. La droite AB, appliquée dans le ⊙ ABD, sera aussi = à N. Ax. 1. L. 1. Def. 7. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION II. PROBLEME II.

INscrire dans un cercle donné (ABHC); un triangle (ABC) équiangle à un triangle donné (DFE).

Donne.	Cherche.
Un ⊙ ABHC avec le △ DFE.	*Le △ ABC inscrit dans le ⊙ ABHC, & qui soit équiangle au △ DFE.*

Résolution.

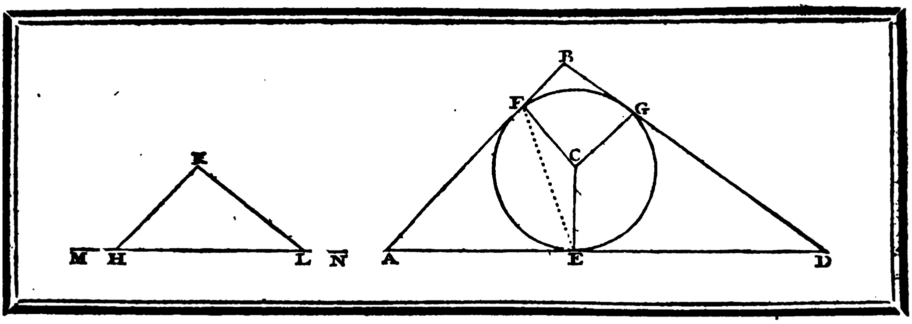
1. Tirez d'un point quelconque M, au ⊙ ABHC, la tangente MN.	Prop. 17. L. 3.
2. Faites sur MN, au point d'attouchement A, l'angle BAM = à ∀ FED, & ∀ CAN = à ∀ FDE.	Prop. 23. L. 1.
3. Tirez BC.	Dem. 1.

Demonstration.

PUisque ∀ BCA = à ∀ BAM (*Prop.* 32. *L.* 3), & ∀ FED = au même ∀ BAM (*Ref.* 2); Item ∀ CBA = à ∀ CAN (*Prop.* 32. *L.* 3), & ∀ FDE aussi = à ∀ CAN (*Ref.* 2).

1. Il s'ensuit que ∀ BCA est = à ∀ FED, & ∀ CBA = à ∀ FDE.	Ax. 1. L. 1.
3. Partant, le troisieme ∀ BAC, du △ ABC, est aussi = au troisieme ∀ DFE du △ DFE, & ce △ ABC est inscrit dans le ⊙ ABHC.	Prop. 32. L. 1. Def. 3 L. 4.

C. Q. F. E.



PROPOSITION III. PROBLEME III.

Circonscrire à un cercle donné (EFG) un triangle (ABD), qui soit équiangle à un triangle donné (HKL).

DONNE.	CHERCHE.
Le ⊙ EFG, avec le △ HKL.	*Le △ ABD circonscrit au ⊙ EFG, qui soit équiangle au △ HKL.*

Résolution.

1. Prolongez de part & d'autre le côté HL du △ HKL. Dem. 2.
2. Cherchez le centre C du ⊙ EFG, & tirez le rayon CE. Prop. 1. L. 3.
3. Faites sur CE, au point C, l'angle ECF = à ∀ KHM, & ∀ ECG = à ∀ KLN. Prop. 23. L. 1.
4. Sur CE, CF, CG élevez les ⊥ prolongées AD, AB, DB. Prop. 11. L. 1.

Préparation.

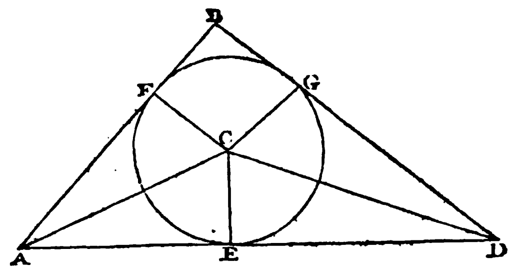
Tirez la droite FE.

DEMONSTRATION.

Puisque les ∀ CEA, CFA sont des ∟ (*Ref.* 4),

1. Les ∀ FEA + EFA sont < 2 ∟, & les droites AD, AB se rencontreront quelque part en A. [Ax. 8. L. 1. Ax. 11. L. 1.]
On démontrera de la même maniere, que
2. Les droites AD, DB item AB, DB se rencontreront quelque part en D & B,
Et par la raison que les droites AD, AB, DB sont ⊥ à l'extremité E, F, G des rayons EF, CF, CG (*Ref.* 4),
3. Ces droites touchent le ⊙ EFG; & le △ ABD formé par ces droites est circonscrit au ⊙ EFG. [Prop. 16. L. 3. Cor. D. 4. L. 4.]
De plus, les 4 ∀ CEA + CFA + ECF + FAE du quadrilatère AFCE étant = à 4 ∟ (*Prop.* 32. *L.* 1), & les ∀ CEA + CFA = à 2 ∟ (*Ref.* 4),
4. Les ∀ ECF + FAE sont aussi = à 2 ∟, Ax. 3. L. 1.
5. Ou égaux aux ∀ KHM + KHL, à cause que ceux-ci sont aussi = à 2 ∟. [Ax. 1. L. 1. Prop. 13. L. 1.]
Mais ∀ ECF étant = à ∀ KHM (*Ref.* 3),
6. L'angle FAE est = à ∀ KHL, & par la même raison ∀ GDE = à ∀ KLH. Ax. 3. L. 1.
7. C'est pourquoi le troisieme ∀ FBG, du △ ABD, est = au troisieme ∀ HKL, du △ HKL. Prop. 32. L. 1.
8. Le △ ABD circonscrit au ⊙ EFG est donc aussi équiangle au △ donné HKL.

 C. Q. F. E.



PROPOSITION IV. *PROBLEME IV.*

INscrire dans un triangle donné (ABD) un cercle (EFG).

DONNE.
Le △ ABD.

CHERCHE.
Le ⊙ EFG inscrit dans le △ ABD.

Résolution.

1. COupez les ∀ BAD, BDA en deux également par les droites AC, DC prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en C. Prop. 9. L. 1.
2. Du point C abaissez sur AD la ⊥ CE. Prop. 12. L. 1.
3. Et de ce même point C comme centre, & du rayon CE, décrivez le ⊙ EFG. Dem. 3.

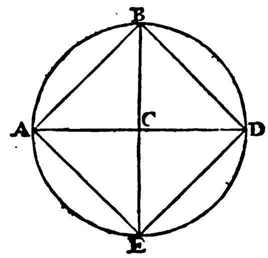
Préparation.

ABaissez du point C sur AB & DB les ⊥ CF, CG. Prop. 12. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque dans les △ AFC, ACE, l'angle FAC est = à ∀ CAE (*Ref.* 1), ∀ CFA = à ∀ CEA (*Prep. Ref.* 2 & *Ax.* 10. *L.* 1); & AC commun aux deux △,
1. La droite CF est = à CE. Prop. 26. L. 1.
On demontrera de même, que
2. La droite CG est = à CE.
3. Partant, les droites CF, CE, CG sont = entr'elles; & le ⊙ décrit du centre C & du rayon CE, passera aussi par les points F & G. Ax. 1. L. 1. Def. 15. L. 1.
Et par la raison que les côtés AD, AB, DB sont ⊥ à l'extrêmité E, F, G du rayons CE, CF, CG (*Ref.* 2 & *Prep.*),
4. Ces côtés toucheront le ⊙ aux points E, F, G. Prop. 16. L. 3. Coroll.
Le ⊙ EFG est donc inscrit dans le △ ABD. Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION VI. *PROBLEME VI.*

INscrire dans un cercle donné (ABDE); un quarré (ABDE).

Donne.	Cherche.
Le ⊙ *ABDE.*	*Le* □ *ABDE inscrit dans ce* ⊙.

Résolution.

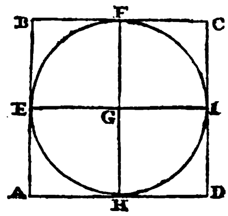
1. TIrez les diamêtres AD, BE, ensorte qu'ils se coupent à ∟. — Prop. 11. L. 1.
2. Joignez leurs extrêmités par les droites AB, BD, DE, EA. — Dem. 1.

Demonstration.

PUis donc que dans les △ ABC, DBC le côté AC est = à CD (*Ref.* 1. & *Def.* 15. *L.* 1), BC commun aux deux △, & ∀ compris BCA = à ∀ compris BCD (*Ref.* 1. & *Ax.* 10. *L.* 1),

1. La droite AB est = à BD. — Prop. 4. L. 1.
   Par un raisonnement semblable on demontrera, que
2. La droite BD est = à DE, DE = à EA & EA = à AB.
3. Partant, les droites AB, BD, DE, EA sont = entr'elles, ou le quadrilatère ABDE est equilatere. — Ax. 1. L 1.
   Et à cause que chacun des ∀ ABD, BDE, DEA, BAE est placé dans un demi ⊙.
4. Ces ∀ seront des ∟, & le quadrilatère équilatère ABDE est aussi rectangulaire. — Prop. 31. L. 3.
5. C'est pourquoi ce quadrilatère est un quarré inscrit dans le ⊙ ABDE. — {Def. 30. L. 1. / Def. 3. L. 4.}

C. Q. F. F.



PROPOSITION VII. PROBLEME VII.

Circonscrire un quarré (ABCD) à un cercle donné (HEFI).

Donne.	Cherche.
Le ⊙ HEFI.	*Le □ ABCD circonscrit au ⊙ HEFI.*

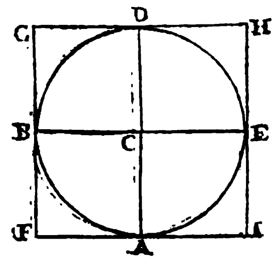
Résolution.

1. Tirez les diamètres EI, HF enforte qu'ils se coupent à ∀ ∟.	Prop. 11. L. 1.
2. Sur les extrémités H, E, F, I de ces diametres, élevez les ⊥ AD, AB, BC, CD.	Prop. 11. L. 1.

Démonstration.

1. Les droites DA, AB, BC, CD sont donc des tangentes du ⊙ HEFI,	Prop. 16. L. 3 Coroll.
2. Et la droite AD est Plle à EI, de même que la droite BC; à cause que ∀ HGE + GHA, item ∀ FGE + GFB sont = à 2 ∟ (*Ref.* 1 & 2).	Prop. 28. L. 1.
3. Partant AD est aussi Plle à BC; & par la même raison AB, HF, DC sont Plles.	Prop. 30. L. 1.
4. C'est pourquoi les quadrilatéres AI, EC, AF, HC, AC sont des Pgmes.	Def. 35. L. 1.
5. D'où il suit, que les droites AD, EI, BC, item AB, HF, DC, sont = entr'elles.	Prop. 34. L. 1.
6. Et par la raison que EI est = à HF (*Def.* 15. *L.* 1), les droites AD, BC, AB, DC sont aussi égales.	Ax. 1. L. 1.
Mais ∀ EID du Pgme AI étant un ∟ (*Ref.* 2),	
7. L'angle A, qui lui est diagonalement opposé, est ∟ aussi.	Prop. 34. L. 1.
Par un raisonnement semblable on prouvera, que	
8. Les ∀ B, C, D sont des ∟.	
9. Par conséquent, on a circonscrit au ⊙ HEFI un quadrilatére ABCD équilatére (*Arg.* 6.) & rectangulaire (*Arg.* 7 & 8); ou un quarré.	Def. 4. L. 1. Def. 30. L. 1.

C. Q. FF.



PROPOSITION VIII. PROBLEME VIII.

Inscrire un cercle (ABDE) dans un quarré donné (FGHI).

Donné.	Cherché.
Le □ FGHI.	Le ⊙ ABDE inscrit dans le □ FGHI.

Résolution.

1. Coupez les côtés FI, FG du quarré FGHI en deux également. — Prop. 10. L. 1.
2. Par les points de section A & B, tirez AD Plle à FG ou IH & BE Plle à FI ou GH. — Prop. 31. L. 1.
3. Du point C, ou AD, BE s'entrecoupent, comme centre & du rayon CA, décrivez le ⊙ ABDE. — Dem. 3.

Demonstration.

Puisque les figures FE, BH, FD, AH, FC, AB, BD, CH sont des Pgmes (*Ref.* 2. & *Def.* 35. *L.* 1).

1. La droite FA est = à BC & FB = à AC. — Prop. 34. L. 1.

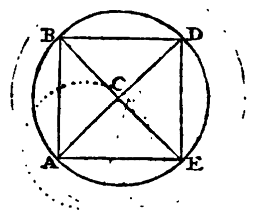
Mais les droites entières FI, FG étant égales (*Def.* 30. *L.* 1) & FA, FB étant les moitiés de ces droites (*Ref.* 1).

2. La droite FA est = a FB. — Ax. 7. L. 1.
3. Partant BC est aussi = à AC; & par la même raison AC est = à CE & BC = à CD. — Ax. 1. L. 1.
4. D'où il suit, que les droites AC, BC, CE, CD sont = entr'elles, & que le ⊙ décrit du centre C & du rayon CA, passe aussi par les points B, D, E. — Ax. 1. L. 1. Def. 15. L. 1.

Or les ∀ DAF, EBG, ADH, BEI étant des ∟ (*Prop.* 34. *L.* 1), comme intérieurs opposés aux ∟ GFA, HGB, IHD, FIE (*Def.* 30. *L.* 1).

5. Les droites FI, FG, GH, HI sont des tangentes du ⊙ ABDE. — Prop. 16. L. 3. Coroll.
6. C'est pourquoi ce ⊙ est inscrit dans le quarré FGHI. — Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION IX. PROBLEME IX.

Circonscrire un cercle (ABDE); à un quarré donné (ABDE).

DONNE.	CHERCHE.
Le □ *ABDE.*	*Le* ⊙ *ABDE circonscrit au* □ *ABDE.*

Résolution.

1. Tirez les diagonales AD, BE. — Dem. 1.
2. Du point C, où ces diagonales se coupent, comme centre & du rayon CA décrivez le ⊙ ABDE. — Dem. 3.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les △ ABE, EBD le côté AB est = au côté BD, AE = à ED (*Def.* 30. *L.* 1) & BE commun aux deux △.

1. L'angle ABE est = à ∀ EBD, & ∀ entier ABD est coupé en deux également par la droite BE. — Prop. 8. L. 1.

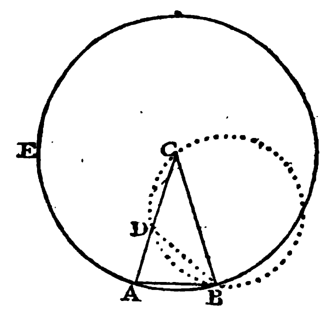
On prouvera de même que

2. Les autres ∀ BAE, BDE, AED sont coupés en deux également par les droites AD, BE.

Or les ∀ entiers ABD, BAE etant = entr'eux (*Def.* 30. *L.* 1).

3. Leurs moitiés les ∀ CBA, CAB seront = aussi. — Ax. 7. L. 1.
4. Partant CA est = à CB, & par la même raison CA est = à CE, & CB = à CD. — Prop. 6. L. 1.
5. D'où il suit, que les droites CA, CB, CE, CD sont = entr'elles, & que le ⊙ décrit du centre C & du rayon CA, passera aussi par les points B, D, E. — Ax. 1. L. 1. Def. 15. L. 1.
6. C'est pourquoi le ⊙ ABDE est circonscrit au quarré ABDE. — Def. 6. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION X. PROBLEME X.

Construire un triangle isoscéle (ACB); qui ait chacun des angles (CAB, CBA) sur la base (AB) double de l'angle au sommet (ACB).

DONNÉ.	CHERCHÉ.
Une ligne CA prise à volonté.	*Le △ isoscéle ACB, qui ait ∀ CAB ou CBA = à 2 ∀ ACB.*

Résolution.

1. Tirez donc une ligne quelconque CA.	Dem. 1.
2. Coupez cette ligne, ensorte que le Rgle de CA.AD soit = au □ de CD.	Prop. 11. L. 2.
3. Du centre C & du rayon CA décrivez le ⊙ ABE.	Dem. 3.
4. Appliquez dans ce ⊙ la droite AB = à CD, & tirez CB.	Prop. 1. L. 4.

Préparation.

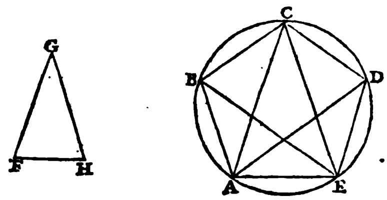
1. Tirez la droite DB,	Dem. 1.
2. Et circonscrivez un ⊙ au △ CDB.	Prop. 5. L. 4.

DEMONSTRATION.

Puis donc que le Rgle CA.AD est = au □ de CD (*Ref.* 2), & que le □ de AB est = au □ de CD (*Ref.* 4. & *Prop.* 46. *Coroll.* 3. *L.* 1).

1. Le Rgle CA.AD sera aussi = au □ de AB.	Ax. 1. L. 1.
2. Partant la droite AB est tangente du ⊙ CDB.	Prop. 37. L. 3.
3. D'où il suit que ∀ DBA est = à ∀ BCD.	Prop. 32. L. 3.
En ajoutant donc de part & d'autre ∀ DBC,	
4. L'angle ABC sera = aux ∀ BCD + DBC.	Ax. 2. L. 1.
Mais ∀ BDA étant aussi = aux ∀ BCD + DBC (*Prop.* 32. *L.* 1).	
5. L'angle BDA est donc = à ∀ ABC.	Ax. 1. L. 1.
De même, puisque CB est = à CA (*Ref.* 4 & *Def.* 15. *L.* 1).	
6. L'angle BAC est = à ∀ ABC.	Prop. 5. L. 1.
7. C'est pourquoi, ∀ BDA est = à ∀ BAC, & DB est = à AB.	A 1. / Prop 6. L. 1.
Et à cause que CD est aussi = à AB (*Ref.* 4).	
8. La droite DB sera = à CD, & ∀ CBD = à ∀ BCD.	Ax. 1. L. 1. / Prop. 5. L. 1.
En ajoutant de part & d'autre ∀ DBA ou son égal ∀ BCD (*Arg.* 3).	
9. Les ∀ CBD + DBA ou ∀ CAB est = 2 ∀ BCD; Et on a construit un △ isoscéle CAB, qui a chacun des ∀ sur la base double de ∀ au sommet.	Ax. 2. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XI. PROBLEME XI.

Dans un cercle donné (ACE); inſcrire un pentagone (ABCDE) équilatéral & équiangle.

Donne. Le ⊙ ACE.

Cherche. *Le pentagone équilatéral & équiangle ABCDE; qui ſoit inſcrit dans le ⊙ ACE.*

Réſolution.

1. Conſtruiſez le △ iſoſcéle FGH, qui ait chacun des ∀ à la baſe FH double de ∀ au ſommet G. — Prop. 10. L. 4.
2. Inſcrivez dans le ⊙ ACE un △ ACE équiangle au △ FGH. — Prop. 2. L. 4.
3. Coupez les ∀ à la baſe CAE & CEA en deux également par les droites AD, EB, — Prop. 9. L. 1.
4. Et tirez les droites AB, BC, CD, DE. — Dem. 1.

Demonstration.

Puiſque chacun des ∀ CAE, CEA eſt double de ∀ ACE (*Reſ.* 1. & 2), & que ces angles ſont coupés en deux également (*Reſ.* 3).

1. Les cinq ∀ ACE, CAD, DAE, BEA CEB, ſeront = entr'eux. — Ax. 7. L. 1.
2. D'où il ſuit, que les arcs AE, ED, DC, CB, BA ſont = entr'eux; de même que les cordes AE, ED, DC, CB, BA. — Prop. 26. L. 3. Prop. 29. L. 3.

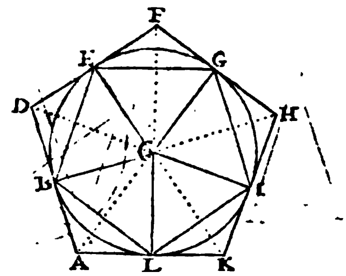
Mais, ſi on ajoûte de part & d'autre aux arcs égaux AE = CD (*Arg.* 2) l'arc ABC.

3. L'arc entier EABC eſt = à l'arc entier ABCD; & ∀ CDE eſt = à ∀ DEA. — Ax. 2. L. 1. Prop. 27. L. 3.

On demontrera de même que

4. Chacun des ∀ EAB, ABC, BCD eſt = à ∀ CDE ou DEA.
5. C'eſt pourquoi on a inſcrit dans le ⊙ ACE, un pentagone équilatéral (*Arg.* 2) & équiangle (*Arg.* 4). — Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XII. PROBLEME XII.

Circonscrire à un cercle donné (LEG) un pentagone (ADFHK) équilatéral & équiangle.

DONNE.

Le ⊙ LEG.

CHERCHE.

Le Pentagone équilatéral & équiangle ADFHK, qui soit circonscrit au ⊙ LEG.

Résolution.

1. INscrivez dans le ⊙ LEG, un pentagone équilatéral & équiangle. Prop. 11. L. 4.
2. Tirez aux points B, E, G, I, L les rayons CB, CE, CG, CI CL. Dem. 1.
3. Elevez sur les extrémités de ces rayons les ⊥ prolongées AD, DF, FH, HK, KA. Prop. 11. L. 1.

Préparation.

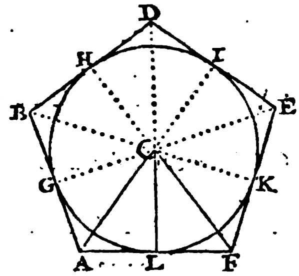
TIrez les droites CA, CD, CF, CH, CK. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les droites AD, DF, FH, HK, KA sont ⊥ à l'extrêmité des rayons CB, CE, CG, CI, CL (*Ref.* 3).

1. Ces droites toucheront le ⊙ au point B, E, G, I, L, Prop. 16. L. 3. Coroll
Et les ∀ DBE + DEB, FEG + FGE, HGI + HIG, KIL + KLI, ABL + ALB, pris deux à deux sont < 2 L. Ax. 8. L. 1.
2. Les droites AD, DF, FH, HK, KA se rencontreront donc aux points D, F, H, K, A. [illegible]. de Prop. 27. L. 1.
Mais, puisque dans les △ CEF, CGF le côté FE est = au côté FG (*Prop.* 37. *L.* 3. *Coroll.* & *Ref.* 3), CE = GC (*Def.* 15. *L.* 1) & CF commun aux deux △,

3. L'angle



PROPOSITION XIII. *PROBLEME XIII.*

INscrire dans un pentagone équilatéral & équiangle (ABDEF) ; un cercle (GHIKL).

DONNÉ.	CHERCHÉ.
Le Pentagone équilatéral & équiangle ABDEF.	*Le ⊙ GHIKL inscrit dans ce pentagone.*

Résolution.

1. COupez les deux ∀ BAF, AFE du pentagone ABDEF en deux également, par les droites prolongées CA, CF. — Prop. 9. L. 1.
2. Du point C, où ces droites se joignent, abaissez sur AF la ⊥ CL. — Prop. 12. L. 1.
3. Du point C, comme centre & du rayon CL, décrivez le ⊙ GHIKL. — Dem. 3.

Préparation.

1. TIrez les droites CB, CD, CE. — Dem. 1.
2. Du point C abaissez sur AB, BD, DE, EF les ⊥ CG, CH, CI, CK. — Prop. 12. L. 1.

DEMONSTRATION.

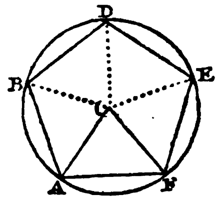
PUisque dans les Δ ACF, ACB le côté AF est = au côté AB, le côté CA commun aux deux Δ & ∀ CAF = à ∀ CAB (*Ref.* 1 & *donné*).

1. Il s'ensuit que ∀ CFA est = à ∀ CBA. — Prop. 4. L. 1.
Mais ∀ AFE étant = ∀ DBA & double de ∀ CFA (*Ref.* 1).
2. Il s'ensuit que ∀ DBA est aussi double de ∀ CBA ; ou ∀ CBD = à ∀ CBA. — Ax. 6. L. 1.
On démontrera de même, que
3. L'angle CDB est = à ∀ CDE, & ∀ CED = à ∀ CEF.
On a donc dans les Δ CBG, CBH, l'angle CBG = à ∀ CBH (*Arg.* 2), l'angle CGB = à ∀ CHB (*Prep.* 2 & *Ax.* 10. *L.* 1) & CB commun aux deux Δ. — Prop 26 L 1.
4. Partant, la droite CG est = à CH ; & par la même raison CI, CK, CL sont = à CH ou à CG.
5. Le ⊙ décrit du centre C & du rayon CL passera donc aussi par les points G, H, I, K. — Def. 15. L. 1.
Et parceque les droites AB, BD, DE, EF, FA sont ⊥ a l'extrémité des rayons CG, CH, CI, CK, CL (*Prep.* 2 & *Ref.* 2).
6. Ces droites toucheront le ⊙ GHIKL (*Prop.* 16. *L.* 3. *Coroll.*) ; & ce ⊙ est inscrit dans le pentagone ABDEF. — Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.

COROLLAIRE

SI les deux angles voisins (BAF, EFA) d'une figure équilatére & équiangulaire sont coupés en deux également, & que du point (C) où les droites (AC, FC), qui les coupent en deux également se rencontrent, on tire des droites (CB, CD, CE) aux angles restants de la figure, ces droites couperont aussi les angles restants en deux également.



PROPOSITION XIV. *PROBLEME XIV.*

CIrconfcrire un cercle (ADF); à un pentagone (ABDEF) équiangle & équilatéral.

DONNE.	CHERCHE.
Le pentagone ABDEF équiangle & équilatéral.	*Le ⊙ ADF circonfcrit à ce pentagone.*

Réfolution.

1. COupez les ∀ BAF, AFE en deux également par les droites prolongées CA, CF. — Prop. 9. L. 1.
2. Du point C, où ces droites fe coupent, comme centre, & du rayon CA décrivez le ⊙ ADF. — Dem. 3.

Préparation.

TIrez les droites CB, CD, CE. — Dem. 1.

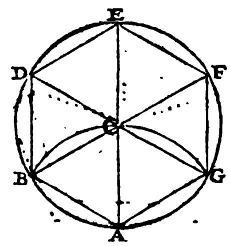
DEMONSTRATION.

1. LEs droites CB, CD, CE coupent donc en deux également les ∀ ABD, BDE, DEF, — Prop. 13. L. 4. Coroll.
2. Et à caufe que ∀ BAF eft = à ∀ AFE, l'angle CAF fera auffi = à ∀ CFA. — Ax. 7. L. 1.
3. C'eft pourquoi CA eft = à CF. — Prop. 6. L. 1.

On démontrera de même, que

4. Chacune des droites CB, CD, CE eft = à CA ou à CF.
5. D'où il fuit que le ⊙ décrit du centre C & du rayon CA paffera auffi par les points B, D, E, F, — Def. 15. L. 1.
6. Par conféquent le ⊙ ADF eft circonfcrit au pentagone donné ABDEF. — Def. 6. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XV. *PROBLEME XV.*

INscrire un Hexagone (ABDEFG) équilatéral & équiangle; dans un cercle donné (BEG).

Donné.	Cherché.
Le ⊙ *BEG.*	*L'Hexagone équilatéral & équiangle ABDEFG, inscrit dans le* ⊙ *BEG.*

Résolution.

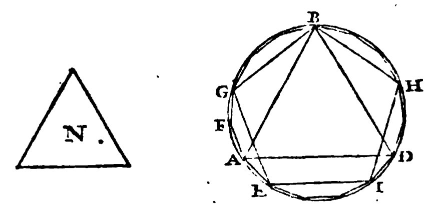
1. CHerchez le centre C du ⊙ BEG, & tirez un diametre quelconque AE. — Prop. 1. L. 3.
2. Du point A comme centre, & du rayon AC décrivez l'arc de ⊙ BCG. — Dem. 3.
3. Tirez les rayons CG, CB prolongés en D & F. — Dem. 1 & 2.
4. Tirez les droites AB, BD, DE, EF, FG, GA. — Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque dans le △ BCA, le côté BC est = au côté AC, & AB = aussi à AC (*Ref.* 3. & *Def.* 15. *L.* 1).

1. Ce △ est équilatéral & équiangle. — Def. 24. L. 1. Prop. 5. L. 1.
2. C'est pourquoi, ∀ BCA est = à la troisieme partie de 2 ∟, & par la même raison ∀ ACG est aussi = à la troisieme partie de 2 ∟. — Prop. 32. L. 1.
   Mais les ∀ BCA + ACG + GCF etant = à 2 ∟ (*Prop.* 13. *L.* 1).
3. L'angle GCF sera aussi = à la troisieme partie de 2 ∟; & les ∀ BCA, ACG, GCF sont = entr'eux. — Ax. 1. L. 1.
4. Par conséquent, les ∀ FCE, ECD, DCB, qui les égalent comme leurs opposés au sommet, sont aussi = entr'eux. — Prop. 15. L. 1.
5. Partant, les arcs BA, AG, GF, FE, ED, DB sont = entr'eux, de même que les cordes BA, AG, GF, FE, ED, DB. — Prop. 26. L. 3.
6. L'Hexagone ABDEFG, inscrit dans le ⊙ BEG, est donc équilatéral. — Prop. 29. L. 3.
   De plus l'arc BA étant = à l'arc ED (*Arg.* 5); si on ajoute l'arc commun AGFE.
7. L'arc BAGFE sera = à l'arc AGFED. — Ax. 2. L. 1.
8. D'où il suit, que ∀ BDB est = à ∀ DBA; & par la même raison, chacun des ∀ FED, GFE, AGF est = à ∀ EDB ou à ∀ DBA. — Prop. 27. L. 3.
9. L'Hexagone équilatéral ABDEFG, inscrit dans le ⊙ BEG, est donc aussi équiangle. — Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XVI. *PROBLEME XVI.*

INscrire un quindécagone (EAFG &c.) équilatéral & équiangle, dans un cercle donné (EBI).

DONNE.	CHERCHE.
Le ⊙ EBI.	*Le quindécagone équilatéral & équiangle EAFG &c.*

Résolution.

1. COnstruisez un △ équilatéral N. Prop. 1. L. 1.
2. Inscrivez dans le ⊙ EBI un △ ABD équiangle au △ équilatéral N. Prop. 2. L. 4.
3. Et un pentagone équilatéral & équiangle EGBHI. Prop. 11. L. 4.
4. Tirez la corde AE, & appliquez la 15 fois de suite, dans le ⊙ EBI. Prop. 1. L. 4.

DEMONSTRATION.

PUisque le △ ABD est équiangle à un △ équilatéral N (*Ref.* 2).

1. Ce △ est aussi équilatéral, ou AD est = à AB = à BD, Prop. 6. L. 1.
2. Et les arcs AD, AB, BD sont = entr'eux, ou chacun est la troisième partie de la ○ entiere. Prop. 28. L. 3.

Derechef, à cause que le pentagone EGBHI est équilatéral, (*Ref.* 3).

3. Chacun des arcs EG, GB, BH, HI, IE est la cinquieme partie de la ○ entiere. Prop. 28. L. 3.

Mais l'arc AB étant la troisième partie (*Arg.* 2), & l'arc EG ou GB chacun la cinquième partie de la ○ (*Arg.* 3).

4. On peut appliquer dans l'arc AB cinq côtés du quindécagone, & dans chacun des arcs EG, GB trois côtés du quindécagone, ou dans l'arc EGB six côtés du quindecagone.
5. Partant, on pourra appliquer un de ces côtés dans l'arc AE, & le quindécagone équilatéral EAFG &c. sera inscrit au ⊙ EBI. Def. 3 L 4.

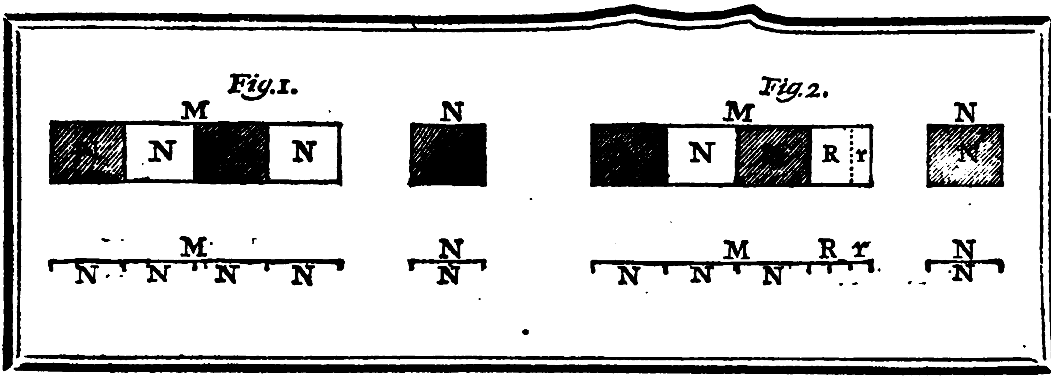
De plus, puisque chacun de ses ∀ FAE s'appuye sur un arc FHE qui est = à treize quinziemes parties de la circonférence,

6. Ces angles seront tous = entr'eux. Prop. 27. L. 3.
7. On a donc inscrit dans le ⊙ EBI, un quindécagone EAFG, équilatéral & equiangle.

C. Q. F. F.

X 2

LES
ELEMENS
D'EUCLIDE,
LIVRE CINQUIEME.



DEFINITIONS.

nombres 6, 9, 17, & les fractionnaires $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ sont des nombres commensurables; puisque les premiers peuvent résulter de l'addition successive & déterminée de l'unité; & les derniers de celle des fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{7}$, parties aliquotes de l'unité.

§ 4. *Conformément à cette définition, on apelle* quantité commensurable, *celle qui résulte de la répétition déterminée d'une quantité déterminée quelconque. Une quantité est donc commensurable, quand elle contient une de ses parties, autant de fois qu'un nombre déterminé contient l'unité.*

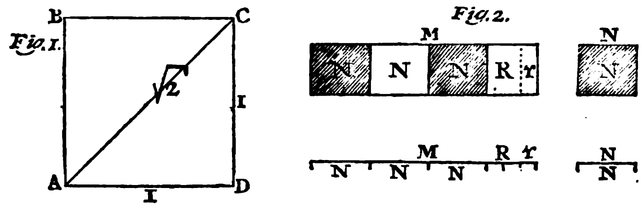
§. 5. *La commensurabilité est donc quelque chose de rélatif. Les grandeurs* M & N *sont commensurables entant qu'une mesure commune & déterminée* r, *qu'on est autorisé à prendre pour unité, peut les mesurer toutes les deux exactement; ou entant que ces deux grandeurs peuvent naître de la répétition déterminée de la même quantité* r, *quelle qu'elle puisse être.*

§. 6. *Il suit de cette notion des nombres commensurables, qu'ils sont tous ou des multiples les uns des autres, ou des parties aliquotes, ou bien des parties aliquantes. Car si les quantités* M & N *sont commensurables,* N *mesure* M, *ou* M *mesure* N, *ou un autre nombre déterminé* r *les mesure toutes deux. Dans le premier Cas, le nombre* M *est un multiple de* N; *dans le second Cas* M *est une partie aliquote de* N; & *dans le troisième, le plus petit des deux est une partie aliquante du plus grand. La même chose est vraye des grandeurs rationelles en général.*

§. 7. *Le nombre, qui ne peut résulter de la répétition déterminée de l'unité ou d'une de ses parties aliquotes, est appellé* irrationel *ou* incommensurable *rélativement à l'unité. Et en général, les grandeurs, qui ne peuvent naître de la répétition déterminée d'une même quantité déterminée considérée comme unité, sont* incommensurables entr'elles, *ou* irrationelles. *Ainsi la racine quarrée du nombre 2 fait un nombre incommensurable à l'unité; car*

$$\sqrt{2} \text{ est} = \text{à } 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{1}{100000} \text{ \&c. \& ainsi à l'infini.}$$

Tellement qu'il est impossible de trouver une partie aliquote, qui ajoutée à elle même un nombre de



DEFINITIONS.

de fois déterminé, reproduise l'unité, & qui ajoutée à elle même un autre nombre de fois déterminé, fasse en même tems naître la racine quarrée du nombre 2. Puis donc que la diagonale (AC) *du quarré* (ABCD) *représente la racine quarrée du nombre deux, le côte* (AD *ou* DC) *du quarré étant pris pour unité; on voit que la diagonale d'un quarré est incommensurable à son côté* (Fig. 1).

§. 8. *Il suit de-là, que* si deux grandeurs M & N sont incommensurables, M ne peut-être ni un multiple de N, ni une partie aliquote, ni enfin une partie aliquante de ce même N. *Car supposant le contraire, il arriveroit nécessairement, que les grandeurs* M & N *pourroient être mesurées, par une même grandeur déterminée, représentative de l'unité; ce qui repugne à l'hypothese de l'incommensurabilité* (Fig. 2).

Au reste quand Euclide parle de parties *dans ce Cinquieme Livre, il entend toujours des parties aliquotes, conformément à cette définition. Il n'explique les parties aliquantes que dans la IV Définition du VII^e Livre.*

II.

Une grandeur plus grande est nommée *un multiple* d'une moindre; lorsque la moindre peut mesurer la plus grande.

Ainsi le nombre 12 *est dit être un multiple du nombre* 4; *parceque* 4 *mesure* 12 *sans reste.*

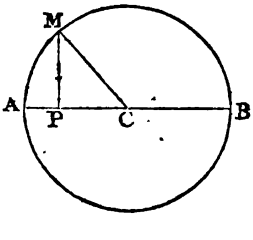
Au terme de multiple repond celui de sousmultiple, *qui désigne qu'une moindre grandeur est une partie aliquote d'une plus grande; ainsi* 4 *est un sousmultiple de* 12, *comme* 12 *est un multiple de* 4.

III.

La *Raison* est une certaine rélation mutuelle de deux grandeurs homogènes, comparées l'une à l'autre selon leur quantité.

Cette définition est incomplette, à moins qu'on ne soit disposé à la sauver au moyen d'une interpretation convenable du terme κατὰ πηλικότητα selon la quantité *ou* selon la quantuplicité, *terme qu'Euclide n'a point défini.*

Y §. 1.



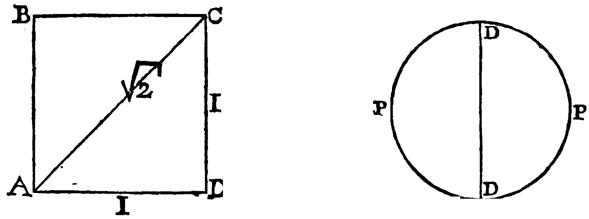
DEFINITIONS.

§. 1. L'idée de la raison enveloppe sans doute une certaine relation des quantités de deux grandeurs homogènes; mais ce caractère général ne suffit pas; vû que les quantités de deux grandeurs homogènes sont susceptibles de plusieurs sortes de relations, différentes de celle de la raison. Ainsi; lorsque dans un cercle AMB on se represente le quarré de la perpendiculaire PM comme constamment égal à la différence des quarrés du rayon MC, & de la portion du rayon PC, c. à. d. $\overline{PM}^2 = \overline{MC}^2$ moins $\overline{PC}^2$, on considére sans doute une certaine relation des grandeurs homogènes PM, PC. Cependant il est manifeste que cette relation n'est point une raison, attendû que la comparaison des quantités ne se fait, qu'au moyen du rayon MC, qui est une troisieme grandeur homogène, prise hors des quantités PM, PC qu'on compare. La même chose a lieu dans toutes les especes de relations, qu'on représente en Algèbre par des Equations.

§. 2. Les quantités homogènes pouvant donc être raportées les unes aux autres de plusieurs manieres différentes, il faut spécifier plus particulierement la relation qui constitue le caractère distinctif de la raison. Voici comment Mr. Leibnitz, à qui on est redevable de cette remarque, définit la raison; La relation qui a lieu entre deux grandeurs homogènes, lorsqu'on fait servir la quantité de l'une à déterminer la quantité de l'autre, indépendemment de toute autre troisieme grandeur homogène quelconque. Cette définition caractérise la raison parce qu'elle a de plus essentiel. Une raison a lieu, lorsque comparant deux grandeurs homogènes A & B, qu'on nomme termes, la quantité de l'un des termes B, prise pour mesure connue & fixée, sert à déterminer la quantité de l'autre terme homogène A. Il existe par conséquent une raison entre les grandeurs homogènes A & B, entant que la quantité du terme B, prise pour unité ou mesure, suffit à faire connoitre la quantité du terme A, sans qu'il soit besoin de faire entrer dans la détermination une autre grandeur quelconque, qui ne resulte point de la comparaison des deux termes A & B. D'où l'on voit, que la raison est la plus simple de toutes les relations.

§. 3. Une raison est rationelle ou commensurable, lorsque les termes de la raison M & N sont des grandeurs commensurables entr'elles; & la raison est nommée incommensurable, lorsque ces mêmes termes se trouvent dans le cas de l'incommensurabilité l'une à l'égard de l'autre. (§. 6. & 7. Def. 1).

Les



DEFINITIONS.

Les raisons qui ont lieu entre les nombres 3 *&* 7 *ou* 8 *&* 11 *&c. sont des raisons rationelles, & au contraire celles qui subsistent entre les nombres* 1 *&* $\sqrt{2}$, 3 *&* $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ *&* $\sqrt{5}$ *sont autant de raisons incommensurables.*

§. 4. L'antécédent *d'une raison* M *à* N *est le premier des deux termes qu'on compare; & l'autre est nommé son* conséquent.

De plus on represente la raison, qui se trouve entre deux grandeurs M *& son conséquent* N, *en cette maniere.*

M : N *Caractéristique qu'on énonce*, la raison de l'antécédant M au conséquent N; *ou simplement* la raison de M à N.

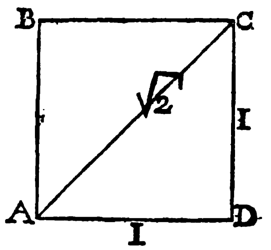
§. 5. *On appelle* exposant de la raison, *le quotient qui resulte de la division de l'antécédent* M *par son conséquent homogene* N. *Ainsi l'exposant de la raison* 6 : 2 *est* $\frac{6}{2} = 3$; *celui de la raison* 5 : 7 *est* $\frac{5}{7}$. *On donne à ce quotient le nom d'exposant, parcequ'il expose combien de fois le conséquent contient son antécédent, ou qu'il y est contenu.*

§. 6 *Les raisons incommensurables ont des exposans, entant qu'on généralise la notion de la division, & qu'on soumet les quantités incommensurables à ses opérations; ce qui peut se faire. Car quoiqu'on ne puisse diviser effectivement* 1 *par* $\sqrt{2}$; *on peut cependant représenter le resultat de cette division arithmétiquement, sous la forme de la fraction* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *ou* 1 : $\sqrt{2}$, (*qu'on énonce* un divisé par racine de deux), *que la Géométrie sait exprimer par des lignes.*

Ainsi elle represente l'expression 1: $\sqrt{2}$, *par le rapport du côté* (AB) *à la diagonale* (AC) *du quarré.*

§. 7. *Il y a donc des exposans rationels & d'irrationels, selon que les termes de la raison sont de l'un ou de l'autre genre. En général, de quelque nature que puissent être les grandeurs qui forment la raison, on représentera toujours son exposant sous la forme d'une fraction, où l'antécédent devient le numerateur & le conséquent le dénominateur.*

Conformément à ce principe, l'exposant de la raison qu'il y a entre le diametre D *& la circonférence* P, *sera représenté par la fraction* $\frac{D}{P}$ *c. à. d.* D *divisé par* P.



DEFINITIONS.

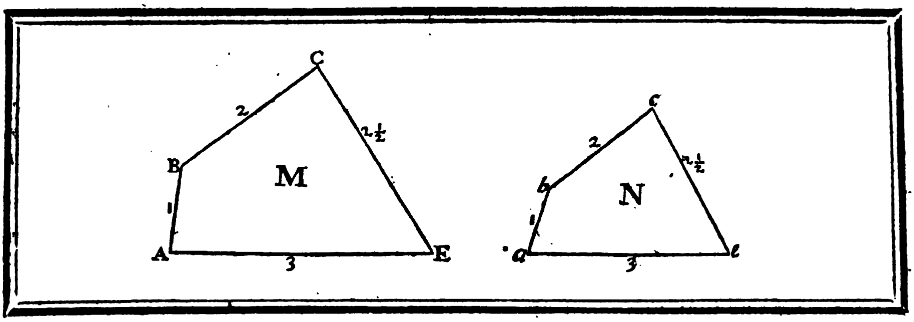
§. 8. *La définition de l'expoſant donne à connoitre qu'il règne une correſpondance intime, ou plutôt une identité, entre les raiſons & les fractions. Car les unes auſſi bien que les autres ſuppoſent la diviſion de la quantité en parties ſoit rationelles, ſoit irrationelles; pourvû qu'on ſe forme une notion plus générale de la diviſion, qui ſoit applicable aux quantités non-rationelles. Une fraction n'eſt autre choſe qu'une Partie qui ſe rapporte au Tout, comme le numerateur au dénominateur, & par-là elle repréſente en même tems une raiſon. La fraction* ($\frac{2}{3}$) *deux tiers par exemple, ſignifie deux parties d'un Tout partagé en trois parties. Or deux parties ſont viſiblement à trois parties (c. à. d au Tout répérſenté par l'unité) comme le nombre deux eſt au nombre trois. Par conſéquent la raiſon de* $\frac{2}{3}$: 1 *eſt la même que la raiſon* 2 : 3, *& il n'y a d'autre différence, ſinon que dans le premier cas la raiſon eſt exprimée par la comparaiſon d'une partie à l'unité, & dans le ſecond par celle d'un nombre entier à un autre nombre entier.*

De la même maniere, lorſqu'on affirme que le côté (AB) *du quarré eſt* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *de la diagonale* (AC); *on ne dit autre choſe, ſinon, que le côté du quarré conſidéré comme partie, ſe rapporte à la diagonale conſidérée comme unité & Tout, de la même maniere, que l'unité ſe raporte à la racine quarrée du nombre* 2.

§. 9. *Cette conformité de la fraction & de la raiſon, a engagé Mr. Leibnitz à les repréſenter l'une & l'autre par le même ſigne; tellement qu'en voyant* 2 : 3, *on peut dire*, la raiſon du nombre 2 au nombre 3, *ou bien* la fraction deux tiers, *ou ce qui revient au même*, deux diviſé par trois.

§. 10. *Ces principes faiſant voir que l'expoſant d'une raiſon* (2 : 3) *ſe rapporte à l'unité de la même maniere que l'antécédent* (2) *ſe rapporte à ſon conſéquent* (3), *ou bien le numerateur* (2) *à ſon dénominateur* (3); *il eſt clair qu'une raiſon eſt déterminée par ſon expoſant; & que les* raiſons ſont égales *ou* les mêmes, *lorſque leurs expoſans ſont les mêmes. Par ex. La raiſon de* 6 : 2 *eſt la même que la raiſon de* 24 : 8; *parceque l'expoſant* 6 : 2 (6 diviſé par 2), *eſt égal à l'expoſant* 24 : 8 (24 diviſé par 8).

§. 11. *Comme les raiſons qui ont les mêmes expoſans ſont égales; celles qui ont des expoſans différens doivent être nommées* inégales: *& en particulier, une* raiſon plus grande *eſt celle*



DEFINITIONS.

celle dont l'exposant est plus grand, & *une* raison plus petite *celle dont l'exposant est moindre*.

La raison de 7 : 3 *est* > *la raison de* 7 : 4 *parceque sept tiers est une plus grande quantité que sept quarts.*

§. 12. *Deux raisons égales s'appellent une* proportion. *Selon Mr. Leibntiz on l'exprime au moyen du signe d'égalité, de cette maniere*

$$6 : 2 = 24 : 8.$$

Caractéristique qu'on peut énoncer, la raison de 6 à 2 est égale à la raison de 24 à 8 ; *ou bien*, 6 est à 2 comme 24 est à 8. *Et puisque* 6 : 2 *représente aussi une fraction, la même expression peut-être expliquée ainsi.* L'exposant (6 divisé par 2) *de la premiere raison* est égal à l'exposant (24 divisé par 8) *de la seconde raison.*

§. 13. *On nomme* semblables *des sujets dont les déterminations intrinseques sont les mêmes, autant qu'il est possible d'en juger par ce qu'on trouve dans le sujet même, sans employer des moyens de comparaison externes.*

La similitude supposant donc une parfaite identité à l'égard de toutes les déterminations qui se trouvent dans le sujet, & une abstraction totale de toutes celles qu'on ne rencontre que hors du sujet ; on ne conçoit dans les sujets semblables qu'une grandeur relative, *cela veut dire, une grandeur qui se rapporte à une mesure ou unité prise dans le sujet même qu'on considére comme semblable à un autre.*

Ainsi deux figures M & N *sont semblables, quand elles n'offrent aucune différence, ni dans la forme des lignes qui en font les limites, ni dans leur nombre, ni dans leur inclinaison, ni enfin dans leur grandeur relative, c. à. d. dans cette grandeur qu'on assigneroit à leurs différentes parties, en les raportant à des grandeurs intrinséques correspondantes, comme à des unités.*

Par ex. Si prenant dans la figure M *le côté* AB *pour unité on trouve*

$$BC = 2, \quad CE = 2\tfrac{1}{2}, \quad AE = 3$$

On trouvera pareillement dans la figure N

$$bc = 2, \quad ce = 2\tfrac{1}{2}, \quad ae = 3$$

pourvû qu'on prenne pour unité le côté ab, *qui correspond au côté* AB.

DEFINITIONS.

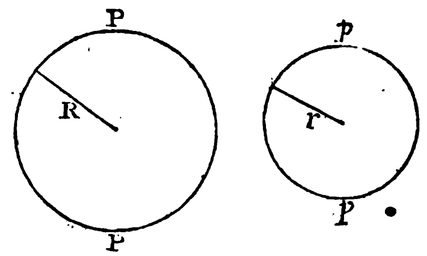
§. 14. *Une* raison *est donc* semblable à une autre raison; *lorsque leur grandeur rélative est la même, ou bien lorsque leurs exposants sont identiques. Car hors des exposans ces sujets ne présentant à l'Esprit aucune autre détermination intrinséque; ils ne peuvent manquer d'être parfaitement semblables, aussitôt que ces exposans sont les mêmes.*

§. 15. Les raisons égales sont *donc* en même tems des raisons semblables. *Par conséquent puisque la proportionalité consiste dans l'égalité des deux raisons, qui se trouvent entre le premier & le second terme, & entre le troisieme & le quatrieme; on est fondé à définir la Proportion par* une similitude de deux raisons.

§. 16. *C'est cette égalité des exposans, que les Géomètres modernes ont embrassée comme le caractère distinctif de la proportionalité, qu'ils ont mis à la place de celui que propose Euclide dans la Ve. Définition de ce Livre, & dont ils déduisent avec une grande facilité toute la doctrine des proportions, au moyen de l'Arithmétique* numérique & littérale; *entant que cette science si fort amplifiée aujourd'hui, manie avec la même facilité les quantités entieres, fractionaires & irrationelles. En effet, l'Arithmétique, celle surtout qui emploie des Lettres plutôt que des nombres; est très propre à expliquer les affections générales des quantités. C'est sa nature de représenter des quantités denuées de toutes ces déterminations particulieres, qui ne doivent pas être prises en considération, & de nous montrer leurs affections & leurs rapports dans la plus grande généralité. Les lignes ne remplissent pas si bien ce but, que les caractéres: neanmoins les Géomètres anciens n'ont pas laissé d'employer des lignes pour expliquer la doctrine des proportions. N'ayant aucune idée sur le calcul littéral que nous avons aujourd'hui, ne connoissant pas même les avantages d'une caractéristique numerique semblable à la nôtre, & regardant d'ailleurs l'unité comme le plus petit nombre, ils ne pouvoient guères faire autrement, que de se renfermer dans l'Arithmétique des entiers, sans pouvoir toucher à celle des fractions & des irrationels. C'est-là, ce qui les a obligé d'expliquer par des lignes, leurs raisonnemens abstraits sur la proportionalité en général. Mais s'il se trouve quelque inconvenient dans cette méthode, elle donne l'avantage réel, qu'on peut s'instruire de la doctrine des proportions, sans savoir les regles du Calcul littéral & même l'Arithmétique; avantage qui peut faire plaisir aux Commençans.*

C'est pour cette raison que nous n'avons pas voulu abandonner cette methode; contens d'avoir fait connoître la marche des Auteurs modernes, nous tâcherons de repandre du jour sur celle d'Euclide, afin qu'un lecteur médiocrement attentif puisse le suivre, sans le secours des principes d'une autre science.

IV.



DEFINITIONS.

de quatre grandeurs, s'arrête à celui qu'offrent les équimultiples des antécédens, comparés à des équimultiples des conséquens. Et il prévient des termes qu'il employera dans la suite, en disant qu'il nommera grandeurs proportionelles *ou* en même raison, *celles dont les équimultiples ont une telle correspondance constante entr'eux, que les équimultiples des antécédens, sont toujours à la fois ou plus grands, ou égaux, ou plus petits, que les équimultiples des conséquens, comparés chacun à chacun, selon quelque multiplication que ce puisse être.*

§. 2. *Il suppose tacitement, qu'on lui accorde, qu'il y a en effet des grandeurs douées de cette correspondance des multiples, apparemment, parcequ'il a cru qu'on pouvoit s'en assurer aisément par la seule inspection de toutes les figures semblables. En effet, un rayon (r) par ex. étant à sa circonférence (p), comme un autre rayon* (R) *à la sienne* (P), *il est assez manifeste, que si le triple du premier rayon (r) est moindre que sa circonférence (p), le triple du second rayon* (R) *sera aussi moindre que la sienne* (P). *Item, que si le quadruple du premier rayon (r) est plus grand que sa circonférence (p): le quadruple du second rayon* (R) *sera aussi plus grand que la sienne* (P). *Et l'on voit que la même chose est vraye de tous les autres équimultiples qu'on pourra prendre, soit des rayons, soit des circonférences. Les exemples numériques font voir pareillement, qu'il y a des grandeurs douées de la propriété énoncée dans la définition. Par ex. Les nombres* 2 *&* 6 *item* 8 *&* 24, *sont quatre grandeurs dans le cas de cette correspondance. Car si l'on multiplie les deux antécédens* 2 *&* 8 *par un même nombre quelconque* M, *& les deux conséquens* 6 *&* 24, *par un autre nombre quelconque* N; *le multiple* 2 M *du premier antécédent, ne sauroit être* =, *ou* >, *ou* < *que le multiple* 6 N *de son conséquent, sans que le multiple du second antécédent* 8 M, *ne soit en même tems* =, *ou* >, *ou* < *que le multiple* 24 N *de son conséquent. Car il est évident*

	Si 2 M *est*	= *à*	6 N,
2 M + 2 M + 2 M + 2 M *est aussi*		= *à*	6 N + 6 N + 6 N + 6 N. *c. à. d.* 8 M = 24 N.
Item	*Si* 2 M *est*	>	6 N, *alors*
2 M + 2 M + 2 M + 2 M *est aussi*		>	6 N + 6 N + 6 N + 6 N. *c. à. d.* 8 M > 24 N.
& enfin	*Si* 2 M *est*	<	6 N, *alors*
2 M + 2 M + 2 M + 2 M *est aussi*		<	6 N + 6 N + 6 N + 6 N. *c. à. d.* 8 M < 24 N.

Cela

DÉFINITIONS.

Cela étant ainsi, on doit dire, selon Euclide, que la raison du nombre 2 *au nombre* 6, *est* la même *que celle du nombre* 8 *au nombre* 24; *ou bien, que les quatre nombres* 2, 6, 8, 24 *sont proportionels* (voyez la Def. VI).

§. 3. *Au contraire les nombres* 2 & 3, *item* 7 & 8, *n'ayant pas cette propriété, ne doivent point recevoir la même dénomination. Car si l'on multiplie les antécédens par* 3, & *les conséquens par* 2, *il en résulte les quatre multiples* 6, 6, 21, 16; *où le multiple* 6 *du I antécédent est égal au multiple* 6 *de son conséquent; sans que* 21, *multiple du II antécédent, soit égal à* 16 *multiple de son conséquent. D'où il suit que* 2 & 3, *item* 7 & 8, *ne doivent point être appellés* des nombres en même raison; *ni tous les quatre, des* nombres proportionels. *C'est-là le sens de cette Définition, qui a si fort embarrassé les Commentateurs, que plusieurs ont cru devoir lui substituer la XX du VII Livre, relative à la proportionalité des seuls nombres rationels, qui paroît plus simple: sçavoir, que* quatre nombres sont proportionels, lorsque le premier est le même multiple du second, ou la même partie soit aliquote soit aliquante, que le troisième est du quatrième.

Nous allons faire quelques remarques, qui serviront à lever ces difficultés.

§. 4. *On suppose qu'Euclide n'a pas jugé convenable de se servir de cette Définition de la proportionalité du VII Livre, parcequ'il avoit en vûe d'établir dans le V la doctrine générale des proportions pour toutes sortes de grandeurs, tant rationelles, qu'irrationelles, & même celles dont le rapport est jusques ici inexprimable en nombres, tel que celui du diamètre à la circonférence. En effet, personne ne doutant que la proportionalité ne puisse subsister entre des grandeurs incommensurables, & même celles dont le rapport échappe aux nombres finis, puisqu'elle a lieu entre les côtés de tous les quarrés & leurs diagonales, les diamètres de tous les cercles & leurs circonférences,* l'Elémentateur *auroit eu tort de fonder cette Théorie sur une Définition particulière, rélative aux seules grandeurs rationelles, vû que ces sortes de grandeurs ne sont ni des multiples les unes des autres, ni des parties aliquotes, ni des parties aliquantes Son dessein exigeant donc une propriété plus générale de la proportionalité, il lui a plu de choisir celle de la* correspondance des équimultiples, *comme applicable, à toutes les grandeurs proportionelles de quelque nature qu'elles puissent être; réservant la Définition citée du VII Livre pour la seule doctrine des nombres rationels, qui sont dans le cas d'être toujours ou des multiples les uns des autres, ou des parties aliquotes, ou des parties aliquantes.*

§. 5. *Pour ce qui est du principe de cette V Définition, on ne peut douter qu'Euclide ne l'ait tiré de la considération de la* similitude & *de ses propriétés, au moins si la VIII Définition est de lui, laquelle dit en propres termes que la* proportion consiste dans la similitude des raisons. *On ne pouvoit rencontrer plus heureusement: la notion de la similitude est la véritable source où il faut puiser les principes généraux sur la proportionalité. Il seroit aisé de le faire voir, si c'étoit ici le lieu de développer cette notion dans toute son étendue. Nous nous dispensons d'entrer dans ce détail. On sent assez, par la seule idée confuse de la similitude, que les proportions résultent de la comparaison des grandeurs correspondantes qui résident dans les figures semblables, ou plus généralement, dans les* Sujets, *dans*

DEFINITIONS.

les Etres semblables. *Il y a proportion entre les côtés de tous les quarrés & leurs diagonales; entre tous les diamètres & leurs circonférences: pourquoi? Sans doute, parceque tous les quarrés & tous les cercles sont des figures semblables. De même il y a proportion entre les quatre termes de deux raisons, parceque ces raisons forment deux* sujets *semblables, où les antécédens & les conséquens se correspondent, comme dans le cas particulier de deux cercles, les rayons correspondent aux circonférences; ou dans celui de deux quarrés, les côtés aux diagonales.*

§. 6. *Si Euclide avoit eu une notion distincte de la similitude, & qu'il eût voulu remonter aux premières sources métaphysiques pour en déduire la doctrine de la proportionalité, il auroit pû se contenter de la Définition VIII, qui fait consister la proportion dans* la similitude des raisons. *En suivant cette route, les V & VI Définitions devenoient des axiomes, ou des théorèmes préliminaires, démontrables de quelques vérités générales plus simples, admises comme notions communes. C'eût été sans doute la véritable manirèe de traiter ce sujet; la doctrine des proportions étant plus étendue que la Géométrie, indépendante des principes de cette science, & intimement liée aux vérités universelles qui découlent de la nature de l'Etre considéré dans toute sa généralité.*

§. 7. *Mais ce Géomètre n'a point fait usage du principe qu'il avoit entre les mains, non plus que les Auteurs qui ont manié le même sujet après lui. Il a pris le parti de former du caractère de la correspondance des équimultiples, une Définition* de nom, *comme il étoit en droit de le faire, puisqu'en Logique il est permis de donner à une chose douée d'une certaine propriété, un certain nom: & ce parti a produit deux inconvéniens,* 1°. *Qu'on trouve à la tête de ce V Livre deux Définitions de la proportionalité, la V & la VI, qui peuvent passer pour une seule, & la VIII, ce qui est contraire à la précision de la méthode, qui n'en admet qu'une.* 2°. *Que la V Définition étant purement nominale, on n'en peut raisonner avec sureté, qu'autant qu'on suppose la possibilité de la chose définie, c. à. d. autant qu'on suppose qu'il y a effectivement des choses douées du caractère énoncé dans la Définition. A la rigueur, cette possibilité de la chose définie doit être démontrée en Géométrie. Euclide lui-même en donne l'exemple. Il ne raisonne point des Définitions nominales, du triangle équilatéral, par ex., ou du quarré, avant qu'il ait fait voir la possibilité de ces figures, en donnant leur construction. Conformément à cette maxime, avant de se servir de la Définition V, il auroit dû faire voir qu'il est possible qu'il y ait des grandeurs telles, que les équimultiples des antécédens, comparés aux équimultiples des conséquens, soient toujours ou égaux, ou plus grands, ou plus petits: & dès-lors ayant satisfait aux loix de sa propre méthode, il auroit prévenu toutes les difficultés, que cette petite omission fait naître dans l'esprit de ceux qui ne connoissent pas assez les règles relatives à cette matière.*

§. 8. *Au reste, si l'on adopte comme première notion de la proportionalité la VIII Définition de ce Livre, ou ce qui revient au même, si avec la plupart des Auteurs modernes on la fait consister dans l'*identité des exposans de deux raisons (R : P & r : p) que l'on compare, *on peut se convaincre aisément, même sans calcul, que l'inverse de la proposition contenue dans la V Définition*

DEFINITIONS.

finition, découle de cette notion de la proportionalité, à sçavoir, si quatre grandeurs R & P, r & p, sont proportionelles, les équimultiples de la I & de la III sont constamment ou égaux, ou plus grands, ou plus petits, que d'autres équimultiples de la II & de la IV, comparés chacun à chacun.

Car les deux raisons R : P *&* r : p *étant semblables, en vertu de cette Définition, il suit que* R *se rapporte à* P *considéré comme Tout ou comme partie, de la même manière que* r *se rapporte à* p *considéré pareillement ou comme Tout ou comme partie; tellement que les moindres termes,* R *&* r *par exemple, sont des parties semblables des plus grands* P *&* p. *Les deux raisons* R : P *&* r : p *forment donc deux* sujets semblables, *de la même manière que deux circonférences, & deux rayons tirés à ces circonférences, forment deux figures semblables.*

§. 9. *Mais puisque la diversité & la dissimilitude, ne peuvent s'introduire: où l'on ne suppose que des principes d'identité & de similitude, on ne peut refuser de recevoir au nombre des axiomes évidens par les notions communes, cette vérité, que* des opérations semblables, faites semblablement, sur des Sujets semblables, doivent produire des résultats semblables. *Par conséquent, si on multiplie les antécédens* (R *&* r) *des deux raisons semblables, par le même nombre* m, *& les conséquens* P *&* p *par le même nombre* n, *les résultats ne peuvent manquer de rester dans le même cas de similitude; & la comparaison des équimultiples des antécédens aux équimultiples des conséquens, doit toujours conduire aux mêmes rapports d'égalité, de majorité, ou de minorité, selon quelque multiplication que ce puisse être. Car d'abord les raisons* R : P, *&* r : p *sont semblables par l'hypothèse, & les opérations qui produisent les équimultiples de chaque couple de termes sont semblables, puisqu'on les multiplie par le même nombre. De plus, entant que ces équimultiples sont formés des termes correspondans c. à. d. des antécédens & des conséquens, les opérations se font semblablement dans des Sujets semblables. Par conséquent les résultats doivent rester dans cet état de similitude, tellement que ce que le premier antécédent est devenu comparativement à son conséquent, le second antécédent le soit devenu comparativement au sien. D'où il suit que, s'il y a une égalité entre le multiple du premier antécédent & celui de son conséquent, la même égalité aura lieu entre l'équimultiple du second antécédent & celui de son conséquent, comme on l'a fait voir pour le cas particulier du* §. 2.

§. 10. *Au reste, cette proposition n'est qu'un cas particulier, de cette autre plus générale, qui pourroit se démontrer des mêmes principes, sçavoir*, si quatre grandeurs A, B, C, D, sont en proportion, & que quatre autres a, b, c, d, le soient pareillement, les produits Aa, Bb, Cc, Dd, résultant de la multiplication des termes correspondans, seront aussi en proportion.

Car 1°. *la raison* A : B *est semblable à la raison* C : D. 2°. *Les termes* A *&* a, B *&* b, C *&* c, D *&* d, *se correspondent semblablement dans les deux proportions,* 3°. *Les produits* Aa, Bb, Cc, Dd *résultent semblablement de la même opération. Par conséquent la raison entre le premier produit* Aa *& le second* Bb, *doit nécessairement se trouver semblable à celle qui a lieu entre le troisième produit* Cc, *& le quatrième* Dd; *ou bien ces qua-*

DEFINITIONS.

tre produits doivent être en proportion. Si on suppose a = c *&* b = d, *on tombe dans le cas particulier qu'on a traité dans le §. précédent.* (Voyez App. Prop. 3).

§. 11. *On déduit des mêmes principes la liaison qui règne entre les vérités contenues dans les V & VIII Définitions; à sçavoir,*

Que deux raisons R : P & r : p sont semblables, si les équimultiples de leurs antécédens (m R & m r) correspondent tellement aux équimultiples (n P & n p) de leurs conséquens, chacun à chacun, qu'il y ait toujours de part & d'autre ou égalité, * ou majorité, ou minorité, selon quelque multiplication que ce puisse être.

Car puisque m R *est* =, >, *ou* < n P, *selon que* m r *est* =, >, *ou* < n p; *il est clair que* m R *est comparativement à* n P, *ce que* m r *est comparativement à* n p. *Et d'autant que cette correspondance est constante, la raison de* m R : n P *doit être semblable à la raison de* m r : n p. *Or qui ne sent la vérité de ce principe*, que, lorsque les mêmes opérations, faites semblablement, ne produisent aucune différence dans deux sujets sur lesquels elles se font, ces sujets doivent être semblables? *Par conséquent, puisque dans ce cas la multiplication des deux antécédens par un même nombre, aussi bien que celle des deux conséquens par un autre même nombre, constituent des opérations identiques faites semblablement, il faut bien que la raison* R : P *soit semblable à la raison de* r : p. *Autrement il naîtroit de la diversité dans les résultats des deux multiplications faites semblablement; ce qui est contraire à la supposition.*

Ce sont là à peu près les principes généraux, qui peuvent servir à réduire aux notions communes les vérités contenues dans ces Définitions. Il ne nous est pas permis d'approfondir davantage cette matière en ce lieu; il faudroit composer un Traité en forme sur la similitude, ce qui nous écarteroit trop de la route qu'Euclide a suivie.

§. 12. *Remarquez encore que ce qui est vrai de la correspondance des multiples, est vrai par rapport à celle des sousmultiples, des Puissances semblables, des Radicaux semblables &c. Mais il paroît assez qu'Euclide n'a pas voulu embrasser cette généralité, pour ne pas s'éloigner de la clarté des notions communes: & en particulier on peut croire qu'il a préféré l'usage des multiples à celui des sousmultiples, parcequ'il n'auroit pû prescrire de prendre des sousmultiples, sans montrer auparavant comment on doit partager une grandeur en parties égales; au-lieu que la formation des multiples n'avoit pas besoin d'un pareil principe. Ce Géomètre étoit en droit de demander qu'on pût doubler, tripler &c. ou prendre tel multiple qu'on voudroit d'une grandeur, au-lieu qu'il devoit apreindre par la resolution d'un problême, comment on peut retrancher une partie aliquote quelconque d'une ligne donnée: & la résolution de ce problême supposant la doctrine de la similitude, elle ne pouvoit être donnée que dans la IX Prop. du VI Livre.*

VI.

On nommera *proportionelles*, les grandeurs qui sont en même raison.

VII.

* A la rigueur, le seul cas de l'égalité pourroit suffire. Car si *m*R = *n*P & *m*r = *n*P on en peut démontrer que *n* : *m* = R : P = *r* : *p*. (*Voyez Append. Prop.* 4).

DEFINITIONS.

VII.

Mais si dans cette comparaison des équimultiples, le multiple de la première surpasse le multiple de la seconde, sans que le multiple de la troisième surpasse le multiple de la quatrième, on dira que *la raison de la première à la seconde, est plus grande que la raison de la troisième à la quatrième.*

§. 1. *Comme il y a des raisons égales, il doit y en avoir d'inégales; & par consequent de plus grandes & de plus petites.*

Lorsqu'on juge de la raison par son exposant, on dit qu'une plus grande raison *est celle qui a un plus grand exposant, ou bien qu'une raison* A : B *est* > *qu'une autre* a : b, *lorsque l'antécédent de la première* A *contient plus de fois son conséquent* B; *que l'antécédent* a *de la seconde ne contient le sien* b; *ou bien encore, lorsque l'antécédent de la première raison est une plus grande partie de son conséquent, que l'antécédent de la seconde ne l'est du sien.*

Ainsi la raison de 12 : 3 *est* > *la raison de* 8 : 4,
parceque l'antécedent 12 *contient son conséquent* 3, *quatre fois; au-lieu que l'antécédent* 8, *ne contient son conséquent* 4, *que deux fois. Tout au contraire*

la raison de 3 : 12 *est* < *la raison de* 4 : 8.

Parceque l'antécédent 4 *est la moitié de son consequent* 8, *au-lieu que l'antécédent* 3 *n'est que le quart de son conséquent* 12. *La même chose est manifeste par les exposans. Ainsi*

12 : 3 > 8 : 4, *c. à. d.* 12 *divisé par* 3 *est* > 8 *divisé par* 4, *ou bien* trois, *exposant de la premiere raison est* > deux, *exposant de la seconde raison. De même*

3 : 12 < 4 : 8 *parceque* $\frac{3}{12}$ *ou* $\frac{1}{4}$ < $\frac{4}{8}$ *ou* $\frac{1}{2}$.

§. 2. *Le principe des exposans est donc très commode pour distinguer immédiatement si une raison est égale à une autre raison, ou si elle est plus grande, ou moindre. Cependant l'Auteur de ces Elémens, qui n'a pas fait usage de la doctrine des exposans, nous propose un autre caractère de la majorité des raisons. Selon lui, une raison est plus grande, lorsqu'un* certain multiple du premier antécédent, peut surpasser le multiple du conséquent, sans qu'un pareil multiple du second antécédent surpasse le multiple de son conséquent.

Les raisons 3 : 2 & 11 : 9 *sont dans ce cas. Car si on multiplie les antécédens par* 9 & *les conséquens par* 13, *il en résulte* 27, 26; 99, 117;

3	:	2	;	11	:	9
9		13		9		13
27	:	26	;	99	:	117

DEFINITIONS.

où la correſpondance des multiples ne ſe ſoutient pas, le premier antécédent 27 ſe trouvant plus grand que ſon conſéquent 26, pendant que le ſecond antécédent 99 eſt moindre que ſon conſéquent 117.

§. 3. *Pour reconnoître auſſitôt l'inégalité de deux raiſons* A : B & C : D. *par ce caractère de la non-correſpondance des multiples, on choiſira pour multiplicateurs les deux termes de l'une des deux raiſons, par ex:* C : D, *&* *on multipliera les antécédens* A & C, *par le conſéquent* D *de la raiſon choiſie* C : D; & *les deux conſéquens* B & D, *par l'antécédent* C *de la même raiſon, en cette manière:*

$$\begin{array}{cccccccc} A & : & B & ; & C & : & D & \\ D & & C & & D & & C & \\ \hline A.D & : & B.C & ; & C.D & : & D.C & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 3 & : & 5 & ; & 7 & : & 9 \\ 9 & & 7 & & 9 & & 7 \\ \hline 27 & : & 35 & ; & 63 & : & 63 \end{array}$$

Cela fait, les deux produits C.D & D.C *ſe trouveront égaux, pendant que les deux autres* A.D & B.C *ſont inégaux. Et en particulier, le multiple d'un des antécédens eſt plus grand que celui de ſon conſéquent, pendant que le multiple de l'autre eſt égal au ſien, ſi l'on choiſit pour multiplicateurs les termes de la plus petite raiſon. Au contraire, le multiple de l'antécédent eſt moindre que celui de ſon conſéquent, pendant que les autres ſont égaux, ſi l'on prend pour multiplicateurs les termes de la plus grande raiſon.*

Par ex. La raiſon de 7 : 5 *eſt* > *la raiſon de* 11 : 9, *Si l'on multiplie donc les antécédens* 7 & 11, *par* 9, *conſéquent de la plus petite raiſon;* & *les conſéquens* 5 & 9, *par* 11 *antécédent de la même raiſon;*

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & : & 5 & ; & 11 & : & 9 \\ 9 & & 11 & & 9 & : & 11 \\ \hline 63 & : & 55 & ; & 99 & : & 99 \end{array}$$

il en réſulte ces quatre nombres, 63 : 55 ; 99 : 99 *où* 63 *eſt* > 55 *pendant que* 99 *eſt* = 99.

§. 4. *Au contraire, ſi l'on multiplie les deux antécédens par* 5 & *les deux conſéquens par* 7, *termes de la plus grande raiſon,*

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & : & 5 & ; & 11 & : & 9 \\ 5 & & 7 & & 5 & & 7 \\ \hline 35 & : & 35 & ; & 55 & : & 63 \end{array}$$

les produits ſont 35 : 35 ; 55 : 63 *où* 35 *eſt* = 35, *pendant que* 55 *eſt* < 63.

§. 5. *Si l'on veut avoir des multiplicateurs, qui produiſent quatre multiples tels que le premier ſoit plus grand que le ſecond, pendant que le troiſième eſt moindre que le quatrième, il faut prendre pour multiplicateurs les termes d'une raiſon moyenne entre les deux raiſons propoſées,* & *multiplier les antécédens par le conſéquent de cette raiſon moyenne,* & *les conſéquens par ſon antécédent.*

Par ex: L'expoſant de la raiſon 7 : 5. *eſt* $\frac{7}{5}$, & *celui de la raiſon* 11 : 9 *eſt* $\frac{11}{9}$, *ou bien* $1\frac{2}{9} = \frac{6\frac{1}{9}}{5}$ *(en multipliant* & *rédiviſant par* 5*). Par conſéquent il faut prendre une raiſon* < *celle de* 7 : 5 & > *celle de* $6\frac{1}{9}$: 5. *Or il eſt évident que tous les nombres aſſignables entre les limi-*

DEFINITIONS.

§. 4. *Cette Définition fait voir, qu'entre les termes équidistans, il se trouve toujours le même nombre de raisons égales, ou bien, que pour arriver de l'un des équidistans* 1, *à l'autre* 8, *il faut toujours passer par trois raisons égales* 1 : 2, 2 : 4, 4 : 8; *comme pour arriver du terme* 8 *à l'équidistant* 64, *il faut passer par les trois raisons* 8 : 16, 16 : 32, 32 : 64 *égales entr'elles & à chacune des trois précédentes. On démontrera en son lieu, que tous les termes équidistans d'une progression Géométrique sont en même raison. (Voyez l'Appendice de ce V Livre Prop. VI).*

§. 5. *On peut appeller* raison primordiale d'une progression, *celle qui se trouve entre les deux termes avec lesquels on a commencé à former la progression, ou qu'on regarde comme ayant servi à la commencer. Par exemple. Si on part de la raison de* 1 : 2, *pour faire comme* 1 *est à* 2 *ainsi* 2 *est à* 4; *& comme* 2 *est à* 4 *ainsi* 4 *est à* 8 *&c. on détermine la progression des nombres* 1, 2, 4, 8, 16 *&c. par les deux premiers termes* 1 *&* 2 *choisis arbitrairement; c'est donc cette raison qui se trouve entre ces deux premiers termes arbitraires* 1 *&* 2, *qu'on peut appeller la raison primordiale de cette progression.*

Si l'on vouloit commencer la progression par les termes 1 *&* 4, *par exemple, on formeroit d'abord la progression,*

1, 4, 16, 64, 256, &c.

puis prenant les moyennes proportionelles 2, 8, 32, 128 *&c, entre chaque deux termes, qui se suivent immédiatement, on trouveroit la même progression.*

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 &c.

où il n'y a d'autre différence, sinon que dans ce dernier cas, on regarde la progression comme née de la raison primordiale 1 : 4. *On pourroit prendre pour raison primordiale de cette même progression, telle autre raison qu'on voudroit; puisqu'au moyen de la Composition & Décomposition des raisons, dont il sera traité à la fin de ce Livre, on peut toujours, d'une raison primordiale quelconque, remonter ou descendre à toutes les autres raisons possibles.*

X.

Si trois grandeurs sont proportionelles, on dit que la première est à la troisième *en raison doublée de la première à la seconde.*

XI.

Si quatre grandeurs sont proportionelles, on dit que la première est à la quatrième en raison triplée de la première à la seconde. On dira de même *qu'une raison est quadruplée, quintuplée, sextuplée &c*, en augmentant d'une unité la dénomination de la raison, à mesure que la proportion sera poussée plus loin d'un terme.

§. 1. *Par des* grandeurs proportionelles, *il faut entendre des grandeurs en proportion continue* (Def. IX. § 1), *qui constituent une progression Géométrique, où les termes équidistans sont en même*

DEFINITIONS.

même raison. Toutes les raisons pouvant être considérées comme dérivées d'une raison primordiale quelconque, il a paru convenable aux Géomètres, de donner à ces raisons dérivées des dénominations qui indiquent leur dérivation de la raison primordiale. Ainsi, puisqu'on arrive au conséquent 4 *de la raison* 1 : 4, *en passant par les deux raisons* 1 : 2, *&* 2 : 4, *on nomme cette raison de* 1 : 4, *une raison* doublée *de la raison primordiale de* 1 : 2. *Pareillement, comme partant de la même raison primordiale* 1 : 2, *on ne parvient au conséquent* 64, *de la raison dérivée* 1 : 64, *qu'en passant par les six raisons intermédiaires égales*

$$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32 = 32 : 64.$$

la raison de 1 : 64, *est appellée une raison* sextuplée *de la raison primordiale* 1 : 2.

Une raison A : B *devient donc* doublée, triplée, quadruplée, *& en général* multipliée *d'une raison primordiale donnée* a : b, *selon le nombre des raisons intermédiaires toutes égales à la raison primordiale* a : b, *qui sont interposées entre les termes* A *&* B.

§. 2. *Pareillement, si entre les deux termes* (1 *&* 64) *d'une raison prise comme primordiale, on place un ou plusieurs termes* (2, 4, 8, 16, 32), *en sorte que ces termes moyens forment avec les extrêmes* (1 *&* 64) *appartenans à la primordiale, une progression continue, les raisons intermédiaires qui subsistent entre le premier terme* (1) *& chacun des moyens* (2, 4, 8 *&c.*), *sont appellées des raisons* sousmultipliées *de la raison primordiale des extrêmes. En particulier, quand il n'y a que deux raisons intermédiaires égales, on nomme l'une & l'autre* sousdoublée *de la raison des extrêmes; quand il y en a trois, chacune est appellée* soustriplée *de la même raison; & ainsi de suite à l'infini. Si par exemple on place entre les termes* 1 *&* 64, *le terme* 8, *on a deux raisons intermédiaires égales* 1 : 8, & 8 : 64 *entre celles des termes extrêmes; dont chacune est nommée* sousdoublée *de la raison de* 1 *à* 64. *Si entre les mêmes extrêmes* 1 *&* 64, *on place les deux moyens* 4, *&* 16, *il en résulte trois raisons intermédiaires égales* 1 : 4 = 4 : 16 = 16 : 64, *dont chacune est nommée* soustriplée *de la raison des extrêmes de* 1 *à* 64.

Ainsi on voit en général que pour avoir une raison, sousquadruplée *par ex., il faut établir entre les termes de la raison primordiale trois termes moyens en proportion continue; & que pour en avoir une* sousquintuplée *de la même raison, il est besoin d'en établir quatre, & de même à l'infini, toujours un terme de moins que n'est le nombre des raisons intermédiaires qui doivent être interposées.*

§. 3. *Au reste ces dénominations tirent leur origine de l'analogie qu'on remarque entre la maniere selon laquelle une grandeur étendue résulte d'une autre grandeur étendue de même genre, & celle selon laquelle une raison peut naître d'une autre raison primordiale. On considère les raisons comme des quantités d'une espéce particuliere, & toutes comme homogènes & comparables entr'elles; Car dans la contemplation des raisons, l'esprit ne s'arrête qu'à la relation, à la quantuplicité des termes, sans faire attention à ce qui peut leur convenir comme grandeurs d'une telle ou telle autre espéce. C'est pour cela qu'on se réprésente les raisons comme égales, & inégales, & comme étant susceptibles d'une multiplicité, & d'une sousmultiplicité les unes à l'égard des autres; Et on les conçoit ainsi, afin que d'une raison quelconque il puisse naître toutes les autres raisons, par la voye d'une composition & résolution propre à cette espéce*

DEFINITIONS.

de quantités, de la même maniere que d'une ligne, ou d'une surface multipliée ou divisée convenablement, on peut faire résulter toutes les lignes & toutes les surfaces à l'infini.

Ces idées seront mieux développées dans l'Appendice de ce Livre.

XII.

On dit que les antécédens sont *homologues* (ou *correspondans*) aux antécédens, & les conséquens aux conséquens.

On a vû que les raisons qui forment une proportion, sont des sujets semblables. Or les antécédens & les conséquens ayant la même rélation dans les deux raisons, ces termes doivent être considérés comme des parties semblables de deux Touts semblables. C'est pour cela qu'il faut toujours les comparer dans le même ordre, afin que cette similitude ou correspondance ne soit jamais troublée.

XIII.

On appelle *raison alterne* la comparaison de l'antécédent de la premiere raison à l'antécédent de la seconde, & du conséquent de la premiere raison au conséquent de la seconde.

Si $\left.\begin{array}{l} A : B = C : D \\ 4 : 5 = 16 : 20 \end{array}\right\}$ *on peut inférer* $\left\{\begin{array}{l} A : C = B : D \\ 4 : 16 = 5 : 20. \end{array}\right.$

Quand on dispose la proportion de cette maniere, on dit communément qu'on le fait en alternant, *ou* alternando.

XIV.

Mais lorsqu'on change les conséquens en antécédens & les antécédens en conséquens dans le même ordre, on dit que la comparaison des termes se fait par *inversion* de raison, ou *invertendo*.

$\left.\begin{array}{l} A : B = C : D \\ 3 : 9 = 4 : 12 \end{array}\right\}$ *Donc invertendo* $\left\{\begin{array}{l} B : A = D : C \\ 9 : 3 = 12 : 4. \end{array}\right.$

XV.

Mais la comparaison se fait par composition, ou *componendo*, quand on compare la somme des conséquens & antécédens à leurs conséquens respectifs.

$\left.\begin{array}{l} A : B = C : D. \\ 3 : 9 = 4 : 12. \end{array}\right\}$ *Donc componendo* $\left\{\begin{array}{l} A + B : B = C + D : D. \\ 3 + 9 : 9 = 4 + 12 : 12. \end{array}\right.$

XVI.

On procéde par *division* de raison, ou *dividendo*, lorsque l'excès, dont l'antécédent surpasse son conséquent, est comparé au conséquent.

Si

DEFINITIONS.

Si $\left.\begin{array}{l} A : B = C : D \\ 9 : 3 = 12 : 4. \end{array}\right\}$ *on peut faire dividendo* $\left\{\begin{array}{l} A - B : B = C - D : D. \\ 9 - 3 : 3 = 12 - 4 : 4. \end{array}\right.$

XVII.

Et l'on va par *converſion de raiſon*, ou *convertendo*, quand on compare l'antécédent à l'excès dont ce même antécédent ſurpaſſe ſon conſéquent.

Si $\left.\begin{array}{l} A : B = C : D \\ 9 : 3 = 12 : 4 \end{array}\right\}$ *il s'enſuit convertendo* $\left\{\begin{array}{l} A : A - B = C : C - D. \\ 9 : 9 - 3 = 12 : 12 - 4. \end{array}\right.$

XVIII.

On argumente *par égalité de raiſon*, ou *ex æquo*, lorſque comparant deux ſuites de grandeurs de même nombre, telles que les raiſons de la premiére ſoient égales aux raiſons de la ſeconde, chacune à chacune (ſoit que la comparaiſon ſe faſſe dans le même ordre, ſoit dans un ordre renverſé), on conclut que les extrêmes des deux ſuites ſont en proportion.

Le ſens de cette Définition eſt celui-ci; Si A, B, C, D *eſt une ſuite de quatre grandeurs, &* a, b, c, d *une ſuite de quatre autres grandeurs, tellement que*

$\left.\begin{array}{l} A : B = a : b \\ B : C = b : c \\ C : D = c : d \end{array}\right\}$ *ou dans un ordre renverſé* $\left\{\begin{array}{l} A : B = c : d \\ B : C = b : c \\ C : D = a : b \end{array}\right.$

Dans l'un & l'autre cas il eſt permis d'inférer ex æquo, *que la raiſon de la I ſuite des extrêmes* A : D *eſt égale à la raiſon des extrêmes* a : d *de la II ſuite; ou bien que* A : D = a : d.

I.	A,	B,	C,	D	15,	3,	45,	9
II.	a,	b,	c,	d	10,	2,	30,	6
	A :	D = a :		d	15.	9, =	10 :	6

XIX.

L'Egalité de raiſon eſt appellée *ordonnée* lorſque les raiſons de la premiere ſuite ſont égales aux raiſons de la ſeconde ſuite chacune à chacune, dans le même ordre direct.

Soit par ex. $\begin{array}{l} A : B = a : b \\ B : C = b : c \\ C : D = c : d \end{array}$

Ici les raiſons ſont égales chacune à chacune, dans le même ordre direct, puiſque dans l'une & dans l'autre ſuite on va de la premiere grandeur vers la derniere. Si l'on conclut donc que les extrêmes ſont proportionels, ou bien que A : D = a : d, *on dit qu'on argumente par égalité* ordonnée *ou* directe, *autrement ex* æquo ordinate.

XX. Au

DEFINITIONS.

XX.

Au contraire, l'*égalité de raison* est appellée *renversée* ou *troublée*, dans le second cas, c. à. d. lorsque les raisons de la premiere suite sont égales à celles de la seconde suite chacune à chacune; en prenant ces dernieres dans un ordre renversé.

§. 1. *Soient encore les deux suites de grandeurs*

$$\left.\begin{matrix} A, B, C, D \\ a, b, c, d. \end{matrix}\right\} \text{ où l'on suppose } \left\{\begin{matrix} A : B = c : d \\ B : C = b : c \\ C : D = a : b \end{matrix}\right.$$

Ici les raisons de la I suite sont égales aux raisons de la II suite, chacune à chacune, mais dans un ordre renversé, tellement que la raison entre la premiere & la seconde grandeur de la I suite, est égale à la raison entre la pénultiéme & la derniere grandeur de la II suite &c. & ainsi de même en avançant dans la premiere & en rétrogradant dans la seconde. Si l'on conclut donc que $A : D = a : d$,
on nomme cette analogie ex æquo inversè *ou* perturbatè.

§. 2. *Les commençans n'auront pas de peine à distinguer le cas de l'égalité ordonnée ou directe, de celui de l'égalité troublée ou renversée, s'ils se souviennent que lorsque deux termes se retrouvent dans deux proportions, & qu'ils y occupent indifféremment ou la premiere & la troisieme, ou la seconde & la quatrieme place, c'est toujours le cas de l'égalité ordonnée; par ex.*

$$\begin{array}{ccccc} A : B = a : b & & B : A = b : a & & A : B = a : b \\ B : C = b : c & \textit{ou} & B : C = b : c & \textit{ou} & C : B = c : b \\ \hline A : C = a : c. & & A : C = a : c. & & A : C = a : c. \end{array}$$

On a toujours deux proportions qui ont de commun les deux termes B & b, *occupants la premiere & la troisieme, ou la seconde & la quatrieme place; par conséquent, les deux autres termes* A & C *sont proportionels aux deux autres* a & c, *en les prenant dans le même ordre.*

§. 3. *Au contraire, lorsque les deux termes, qui sont communs aux deux proportions, ou sont les moyens ou les extrêmes, c'est le cas de l'égalité troublée; par ex: si*

$$\begin{array}{ccccc} A : B = b : c & & B : A = c : b & & A : B = b : c. \\ B : C = a : b & \textit{ou bien} & B : C = a : b & \textit{ou} & C : B = b : a. \\ \hline A : C = a : c & & A : C = a : c & & A : C = a : c. \end{array}$$

Dans ces trois cas les termes B & b, *qui se retrouvent dans les deux proportions, y sont ou les extrêmes ou les moyens; par conséquent les autres termes sont en proportion, tellement que les deux termes, qui viennent de la même proportion* A & C *ou* a & c, *demeurent extrêmes ou moyens. Ou, ce qui revient au même, les quatre autres termes différens* A, C & a, c *sont proportionels comparés dans un ordre renversé, en ce que la comparaison descend de la I proportion dans la II, & remonte aussitôt de la II à la I.*

Ce sont les dénominations qu'on donne aux différentes manieres de conclure par analogie, présentement l'Auteur va démontrer qu'elles sont légitimes.

DEMANDES.

I.

On demande qu'on puiſſe doubler, tripler, quadrupler une grandeur donnée quelconque, ou en général qu'on puiſſe en prendre tel multiple qu'on voudra.

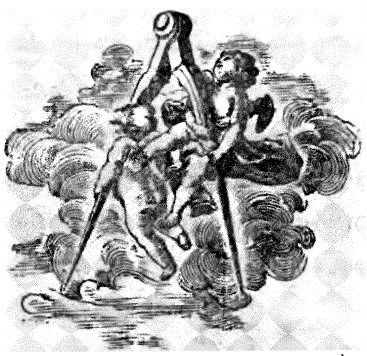
II.

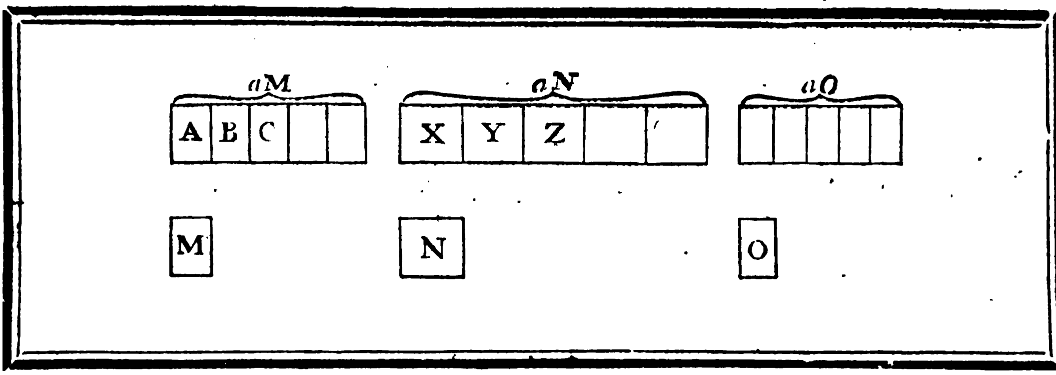
Que dans une grandeur plus grande, on puiſſe prendre une ou pluſieurs parties égales à une moindre grandeur de même genre.

ABBREVIATIONS.

Gdr. . . . . . Grandeur.

Equimult. . . . Equimultiple.





PROPOSITION I. *THEOREME I.*

SI plufieurs grandeurs (*a* M, *a* N, *a* O) font équimultiples d'un pareil nombre d'autres grandeurs (M, N, O &c), chacune de chacune, la fomme (*a* M + *a* N + *a* O &c) des premieres fera autant multiple de la fomme (M + N + O &c) des fecondes, qu'une des premieres (*a* M) eft multiple de fa correfpondante (M).

HYPOTHESE.

a M, *a* N, *a* O *font des équimultiples de* M, N, O *chacune de chacune.*

THESE.

a M + *a* N + *a* O *eft autant multiple de* M + N + O *que a* M *l'eft de* M, *ou a* N *de* N *&c.*

Préparation.

La Gdr. *a* M étant autant multiple de M, que *a* N l'eft de N (*Hyp*)., on peut prendre dans *a* N autant de grandeurs X, Y, Z &c. chacune égale à fa correfpondante N, qu'on en peut prendre dans *a* M, comme A, B, C, &c. chacune égale à fa correfpondante M.

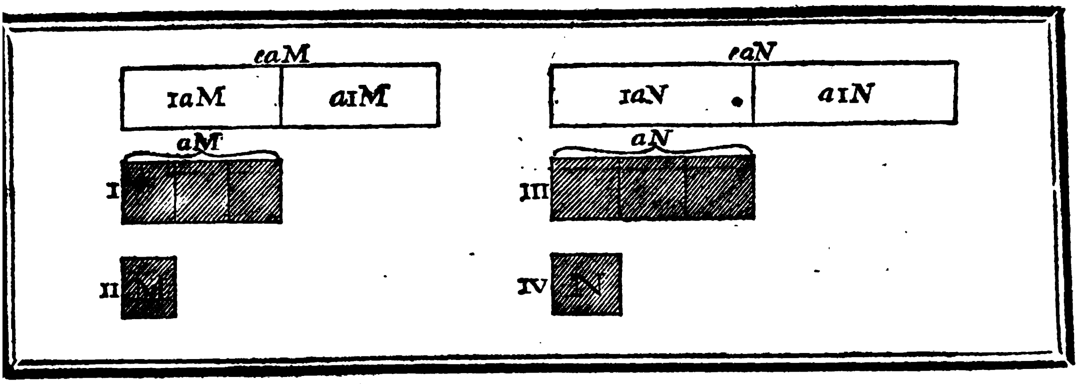
Faites donc A, B, C égale chacune à M & X, Y, Z égale chacune à N. Dem. 2.

DEMONSTRATION.

PUifque *a* M eft autant multiple de M, que *a* N l'eft de N. (*Hyp*),

1. La gdr. *a* M doit contenir autant de grandeurs A, B, C &c. égales chacune à M, que *a* N en contient d'égales à N, comme X, Y, Z &c.
   Mais A = M & X = N (*Prep.*),
2. Donc A + X = M + N. Ax. 2. L. 1.
   De même B étant = M & Y = N (*Prep.*),
3. Il fuit que B + Y = M + N. Ax. 2. L. 1.
   Derechef, puifque C = M & Z = N (*Prep.*),
4. On aura C + Z = M + N. Ax. 2. L. 1.
   Par conféquent il fe trouve dans *a* M autant de grandeurs = M,
   Qu'il s'en trouve dans *a* M + *a* N = M + N.
5. D'où il fuit que *a* M + *a* N eft autant multiple de M + N, que *a* M l'eft de M, ou que *a* N l'eft de N, & par la même raifon *a* M + *a* N + *a* O autant multiple de M + N + O, que *a* M l'eft de M ou *a* N de N &c.

C. Q. F. D.



PROPOSITION III. THEOREME III.

Si la premiere grandeur (a M) est multiple de la seconde M, autant que la troisieme (a N) l'est de la quatrieme (N), & qu'on prenne des équimultiples (ea M, ea N) de la premiere (a M) & de la troisieme (a N): ces deux dernieres grandeurs (ea M, ea N) seront également multiples de la seconde (M) & de la quatrieme (N).

Hypothese.

1. a M & a N *sont deux équimultiples de* M & N, *chacune de chacune.*
2. ea M & ea N *sont deux équimultiples de* a M & a N, *chacune de chacune.*

These.

ea M est autant multiple de M, *que ea N l'est de* N.

Préparation.

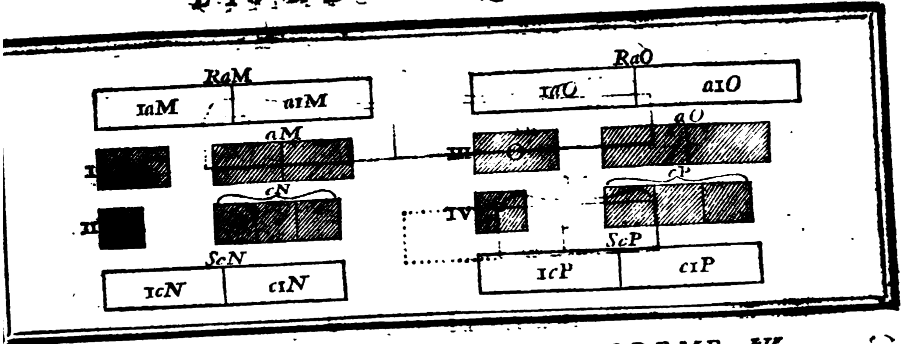
Partagez donc ea M en ses parties 1 a M, a 1 M &c. chacune $=$ a M.
& ea N en ses parties 1 a N, a 1 N &c. chacune $=$ a N.

Demonstration.

Puisque ea M est autant multiple de a M, que ea N l'est de a N (*Hyp.* 2),

1. Il se trouve dans ea M autant de grandeurs $=$ a M,
qu'il s'en trouve dans ea N $=$ a N.
2. Le nombre des parties 1 a M, a 1 M &c. dans ea M, est donc égal au nombre des parties 1 a N, a 1 N &c. dans ea N.
Mais par la raison que a M est autant multiple de M, que a N l'est de N, & que 1 a M $=$ a M, 1 a N $=$ a N,
3. La grandeur 1 a M est autant multiple de M que 1 a N l'est de N.
4. Et par la même raison a 1 M est autant multiple de M, que a 1 N l'est de N.
Puis donc que la I gdr 1 a M est autant multiple de la II[e] gdr M,
que la III gdr 1 a N l'est de la IV[e] gdr N,
& que la V gdr a 1 M est autant multiple de la II[e] gdr M,
que la VI gdr a 1 N l'est de la IV[e] gdr N,
5. Il s'ensuit que la grandeur ea M, composée de la I. & V gdr 1 a M + a 1 M, est autant multiple de la II gdr M, que la grandeur ea N, composée de la III & VI gdr 1 a N + a 1 N, l'est de la IV gdr N. Prop. 2. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME IV.

Si quatre grandeurs (M, N, O, P) sont proportionelles: les équimultiples (*a*M, *a*O) de la premiere (M) & de la troisieme (O), comparés, chacun à chacun, à des équimultiples (*c*N, *c*P) de la seconde (N) & de la quatrieme (P), seront en même raison, selon quelque multiplication que ce puisse être.

Hypothese.

I. M . N = O : P.

II. $\left\{ \begin{array}{c} aM \\ \& \\ aO \end{array} \right\}$ *sont des équimult. de* $\left\{ \begin{array}{c} M \\ \& \\ O \end{array} \right.$ *item* $\left. \begin{array}{c} cN \\ \& \\ cP \end{array} \right\}$ *des équimult. de* $\left\{ \begin{array}{c} N \\ \\ P. \end{array} \right.$

These.

*a*M : *c*N = *a*O : *c*P.

Préparation.

1. Prenez R*a*M, R*a*O équimultiples de *a*M & de *a*O. } Dem. 1. L. 5.
2. De même S*c*N, S*c*P équimultiples de *c*N & de *c*P.

DEMONSTRATION.

Puis donc que *a*M est autant multiple de M, que *a*O l'est de O (*Hyp.* 2), & que les grandeurs R*a*M, R*a*O sont des équimultiples des grandeurs *a*M, *a*O (*Prep.* 1),

1. La grandeur R*a*M est autant multiple de M, que la grandeur R*a*O l'est de O. Prop. 3. L. 5.
2. Par la même raison; la grandeur S*c*N est autant multiple de N, que S*c*P l'est de P.

Et d'autant que M : N = O : P (*Hyp.* 1), & que R*a*M, R*a*O sont des équimultiples quelconques du I terme M & du III O; & S*c*N, S*c*P des équimultiples quelconques du II terme N & du IV P (*Arg.* 1 & 2),

3. Si R*a*M est >, = ou < S*c*N, pareillement R*a*O sera >, = ou < S*c*P. Def. 5. L. 5.

Mais les grandeurs R*a*M & R*a*O sont des équimultiples quelconques des grandeurs *a*M & *a*O, & les grandeurs S*c*N, S*c*P des équimultiples quelconques des grandeurs *c*N, & *c*P (*Prep.* 1 & 2).

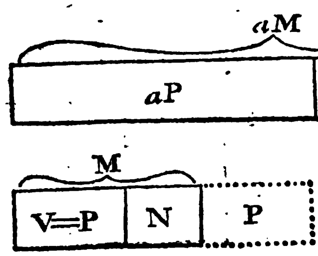
4. Partant, la raison, de *a*M à *c*N est égale à la raison de *a*O à *c*P; ou *a*M : *c*N = *a*O : *c*P. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de l'*Arg.* 3, que, selon que S*c*N est >, =, ou < R*a*M; pareillement S*c*P sera >, = ou < R*a*O; c'est pourquoi *c*N : *a*M = *c*P : *a*O (*Def.* 5. *L.* 5).

Donc, si quatre grandeurs sont proportionelles, elles le sont aussi par inversion de raison, ou *invertendo*.



PROPOSITION V. THEOREME V.

Si une grandeur (aM) est autant multiple d'une autre grandeur (M), que la retranchée (aN) l'est de la retranchée (N), le reste (aP) sera autant multiple du reste (V), que la grandeur entiére (aM), l'est de la grandeur entiére (M).

HYPOTHESE.

I. *Les gdrs.* aM *&* M *sont deux Touts,* *les gdrs.* aN *&* N *leurs parties retranchées* *& les gdrs.* aP *&* V *les restes.*

II. aM *est multiple de* M, *autant que* aN *l'est de* N.

THESE.

aP *est autant multiple de* V, *que* aM *l'est de* M.

Préparation.

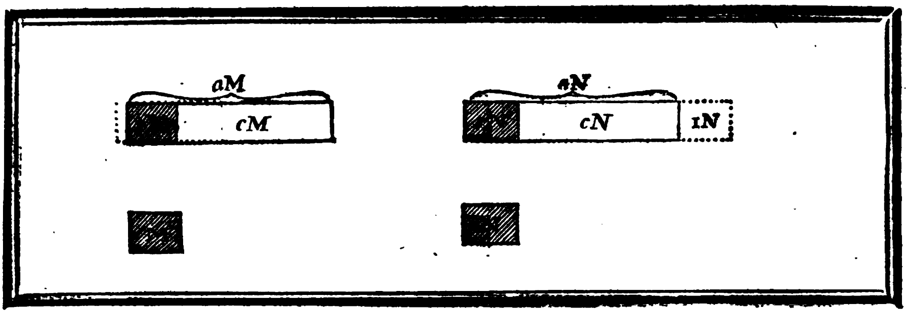
Prenez une grandeur P telle, que aP soit autant multiple de P, que aN l'est de N, ou aM de M. Dem. 2. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puis donc que aN est autant multiple de N, que aP l'est de P (*Prep.*),

1. La somme $aN + aP$, ou aM, des premieres, est autant multiple de la somme N+P des derniéres, que aN l'est de N. Prop. 1. L. 5.
 Mais aM est autant multiple de M, ou de N+V, que aN l'est de N (*Hyp.* 2);
2. Partant, la même gdr. aM est équimultiple des gdrs. N+P, & N+V. Ax. 7. L. 1.
3. Par conséquent, N + P = N + V.
 Et retranchant la gdr. commune N, Ax. 3. L. 1.
4. Il s'ensuit que la gdr. P est = à la gdr. V.
5. Partant, aP étant autant multiple de P, que aM l'est de M (*Prep.*), le même aP est autant multiple de V, que aM l'est de M.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VI. *THEOREME VI.*

Si deux grandeurs (*a* M, *a* N) sont équimultiples de deux autres grandeurs (M & N), chacune de chacune, & les retranchées (*c* M & *c* N) équimultiples des mêmes grandeurs, les restes (*e* M & *e* N) seront respectivement ou égaux à ces grandeurs (M & N), ou ils en seront des équimultiples.

HYPOTHESE.	THESE.
I. *a* M *&* *a* N *sont deux Touts,* *c* M *&* *c* N *leurs parties retranchées.* *e* M *&* *e* N *leurs restes.*	I. *Si* *e* M = M, *e* N *sera* = N.
II. *a* M *& item* *a* N, *c* M, *c* N *sont des ult. de* M *&* N	II. *Si* *e* M *est multiple de* M, *e* N *sera équimultiple de* N.

CAS I. Si *e* M est = M.

Préparation.

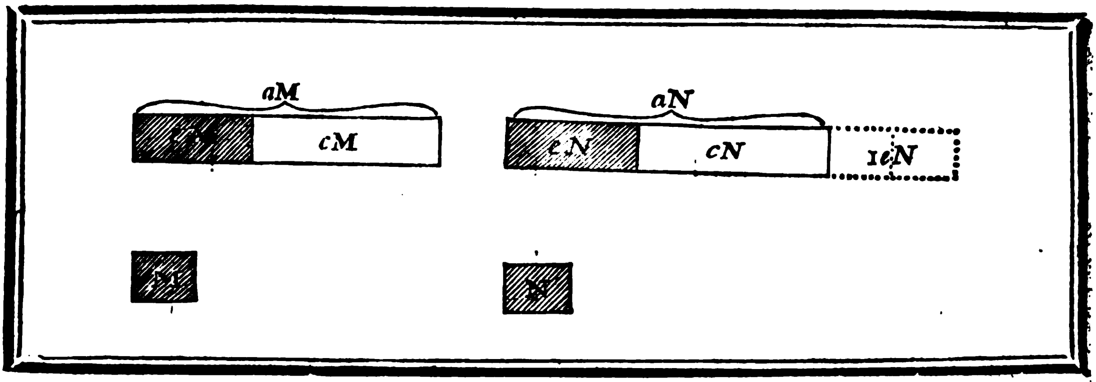
Faites 1 N = N. Dem. 2. L 5.

DEMONSTRATION.

Puisque *c* M est autant multiple de M, que *c* N l'est de N (*Hyp.* 2), & que *e* M = M (*Sup.* 1), & 1 N = N (*Prep.*),

1. La gdr. *c* M + *e* M, ou *a* M, sera autant multiple de M, que *c* N + 1 N l'est de N.
   Or *a* M étant autant multiple de M, que *a* N, ou *e* N + *c* N l'est de N (*Hyp.* 2).
2. Les deux gdrs. *c* N + 1 N & *e* N + *c* N sont équimultiples de la même gdr. N.
3. C'est pourquoi la gdr. *c* N + 1 N = *e* N + *c* N. Ax. 6. L. 1.
   Retranchant donc la gdr. commune *c* N,
4. Il suit que 1 N est = *e* N. Ax. 3. L. 1.
   Mais 1 N est = N (*Prep.*);
5. Partant, *e* N est = N. Ax 1. L. 1.
6. Donc si *e* M est = M, *e* N est = N.

C. Q. F. D. 1.



CAS II. Si eM est multiple de M.

Préparation.

Prenez $1eN$ autant multiple de N, que eM l'est de M. Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque eM est autant multiple de M, que $1eN$ l'est de N (*Prep.*), & que cM est autant multiple de M, que cN l'est de N (*Hyp.* 2),

1. La grandeur $eM+cM$, ou aM, sera autant multiple de M, que $1eN+cN$ l'est de N. Prop. 2. L. 5.

Mais aM étant autant multiple de M, que aN, ou $eN+cN$, l'est de N (*Hyp.* 2),

2. Les deux gdrs. $1eN+cN$ & $eN+cN$ sont donc équimultiples de la même gdr. N.
3. Par conséquent, $1eN+cN$ est $=eN+cN$. Ax. 6. L. 1.

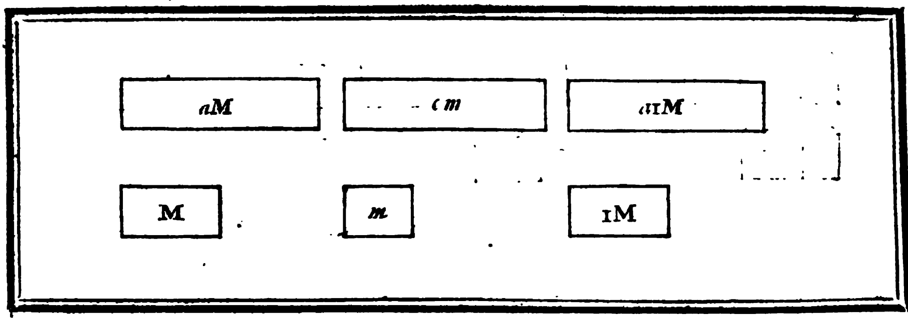
En retranchant donc la gdr. commune cN,

4. Il suit que la grandeur $1eN$ est $=eN$. Ax. 3. L. 1.

Or $1eN$ est autant multiple de N, que eM l'est de M (*Prep.*);

5. Donc, si eM est multiple de M, eN sera equimultiple de N.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION VII. THEOREME VII.

LEs grandeurs égales (M & 1 M), ont même raison à une même grandeur (*m*); & une même grandeur (*m*) a même raison à des grandeurs égales (M & 1 M).

HYPOTHESE.	THESE.
M & 1 M *sont deux. gdrs. égales, & m en est une troisieme.*	*I.* M : *m* = 1 M : *m*. *II.* *m* : M = *m* : 1 M.

Préparation.

1. Prenez *a* M & *a* 1 M équimultiples de M & de 1 M. } Dem. 1. L. 5.
2. Et *em* un multiple quelconque de *m*.

DEMONSTRATION.

PUisque *a*M & *a*1M font des équimult. de M & de 1M (*Prep.* 1), & que M = 1 M (*Hyp.*),

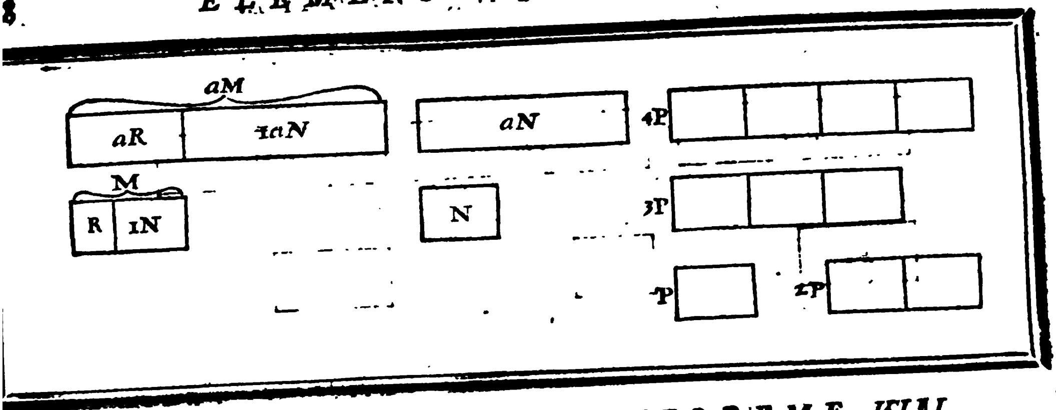
1. La gdr *a* M eft = *a* 1 M. Ax. 6. L. 1.
2. Donc, fi *a* M eft >, =, ou < *em*; *a* 1 M fera pareillement >, =, ou < *em*.
Mais *a*M & *a*1M font des équimult. du I terme M & du III terme 1M, comme *em* & *em* en font du II terme *m* & du IV terme *m*;
3. Partant M : *m* = 1 M : *m*. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Et puifque *a* M = *a* 1 M (*Arg.* 1),

4. Il fuit encore que, fi *em* eft >, = ou < *a* M, le même *em* doit en même tems être >, = ou < *a* 1 M.
5. Donc, *m* : M = *m* : 1 M. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION VIII. THEOREME VIII.

SI deux grandeurs (M & N) sont inégales, la plus grande (M) aura une plus grande raison à une même grandeur (P), que la plus petite (N); & au contraire la même grandeur (P) aura une plus grande raison à la plus petite (N), qu'à la plus grande (M).

HYPOTHESE.

I. M > N.
II. P *est une gdr. quelconque.*

THESE.

I. M : P > N : P.
II. P : N > P : M.

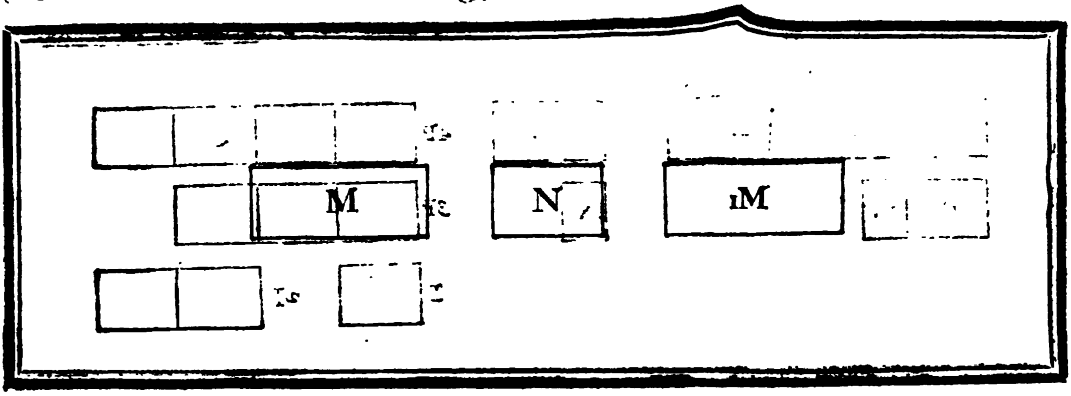
I. *Préparation.*

1. Rétranchez de la plus grande M la partie 1 N = à la plus petite N;
Et le reste R sera ou <, ou > ou enfin = N;
Supposez premierement que ce reste soit < N.
2. De ce reste R prenez un multiple *a* R > P,
3. Autant que *a* R est multiple de R, prenez 1 *a* N & *a* N multiples de 1 N & de N. | Dem. 1. L. 5.
4. Faites la gdr. 2 P double de P; la gdr. 3 P triple de P; & ainsi de suite jusques à ce que vous foyez parvenu au premier multiple de P, qui surpasse *a* N, que vous supposerez être 4 P.

DEMONSTRATION.

PUisque 4 P est le premier des multiples de P, qui est > *a* N (*Prep.* 4),
1. Le multiple precédent 3 P n'est pas > *a* N; Ou bien *a* N n'est pas < 3 P.
De plus *a* R & 1 *a* N étant équimult. de R & de 1 N (*Prep.* 3),
2. La ... $\overline{aR + 1aN}$, ou *a* M est autant multiple de $\overline{R + 1N}$, ou M que *a* R l'est de R, Prop. 1. L. 5.
Ou bien que *a* N de N. (*Prep.* 3).
3. Donc *a* M & *a* N sont des équimult. de M & de N.
D'ailleurs; *a* N & 1 *a* N étant des équimult. des gdrs. égales N & 1 N (*Prep.* 3 & 1), Ax. 6. L. 1.
4. La gdr. *a* N est = 1 *a* N.
Mais *a* N n'est pas < 3 P (*Arg.* 1);
5. Partant 1 *a* N n'est pas non plus < 3 P.
Or *a* R est > P. (*Prep.* 2).
6. Donc, en ajoutant, $\overline{aR + 1aN}$, ou *a* M > 4 P.
Puis donc que *a* M est > 4 P, & *a* N < 4 P (*Prep.* 4); & que *a* M & *a* N sont des equimult. des antécédens M & N, & 4 P & 4 P d'autres équimult. des conséquens P & P (*Arg.* 3 & *Prep.* 4). Def. 7. L. 5.
7. Il suit que M : P > N : P. C. Q. F. D. I.

De plus, comme on vient d'établir que *a* N est < 4 P (*Prep.* 4), & *a* M > 4 P (*Arg.* 6),
8. Il est évident que la gdr. 4 P est > *a* N, & que la même gdr. 4 P est < *a* M.
Or 4 P & 4 P étant des équimult. des antécédens P & P; & *a* N & *a* M d'autres équimult. des conséquens N & M, Def. 7. L. 5.
9. Il suit que P : N > P : M. C. Q. F. D. II.



PROPOSITION. IX. *THEOREME IX.*

Les grandeurs (M & 1 M) qui sont en même raison à une même grandeur (N): sont égales entr'elles. Et celles (M & 1 M) auxquelles une même grandeur (N) a même raison: sont aussi égales entr'elles.

HYPOTHESE.
M : N = 1 M : N.

THESE.
La gdr. M = 1 M.

DEMONSTRATION.

I.

Sinon, les deux gdrs. M & 1 M sont inégales.

1. Les deux gdrs. M & 1 M n'ont donc pas même raison à la même gdr. N. Prop. 8. L. 5.
Mais elles ont même raison à cette même gdr. N (*Hyp.*);
2. La gdr. M est donc = à la gdr. 1 M.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.
N : M = N : 1 M.

THESE.
La gdr. M = 1 M.

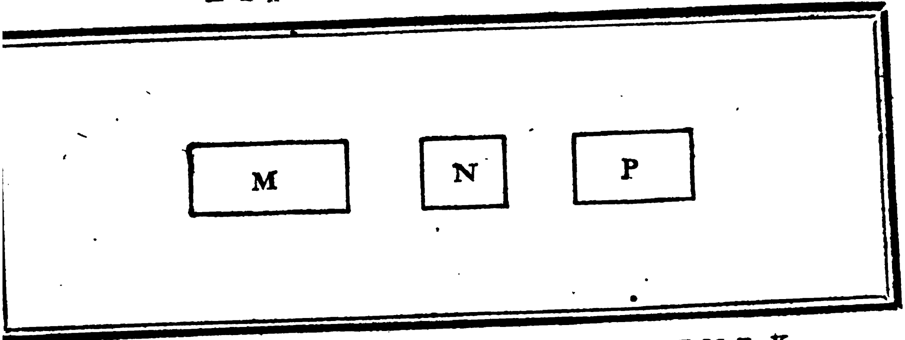
DEMONSTRATION.

II.

Sinon, les deux gdrs. M & 1 M sont inégales.

1. La même gdr. N n'a donc pas même raison aux deux gdrs. M & 1 M. Prop. 8. L. 5.
Or elle a même raison à ces deux gdrs. (*Hyp.*);
2. Donc la gdr. M est = à la gdr. 1 M.

C. Q. F. D.



PROPOSITION X. *THEOREME X.*

De deux grandeurs (M & P), celle (M) qui a plus grande raifon à une même (N), eft la plus grande. Au contraire, celle (P) à laquelle une même grandeur (N) a plus grande raifon, eft la plus petite.

HYPOTHESE.
M : N *eft* > P : N.

THESE.
La gdr. M *eft* > P.

DEMONSTRATION.
I.

Sinon; M eft = P, ou < P.

CAS I. Si M eft = P.

1. Les deux gdrs. M & P auroient donc même raifon à la même gdr. N. Prop. 7. L. 5.
Or elles n'ont point même raifon à la même gdr. N (*Hyp.*);
2. La gdr. M n'eft donc point = à la gdr. P.

CAS II. Si M eft < P.

3. La raifon de M : N feroit < la raifon P : N. Prop. 8. L. 5.
Or la raifon de M : N n'eft pas < la raifon P : N (*Hyp.*);
4. Donc la gdr. M n'eft pas < la gdr. P.
Mais M n'étant pas non plus = P (*Arg.* 2),
5. Il refte donc que M foit > P. C. Q. F. D. I.

HYPOTHESE.
N : P > N : M.

THESE
La gdr. P *eft* < M.

DEMONSTRATION.
II.

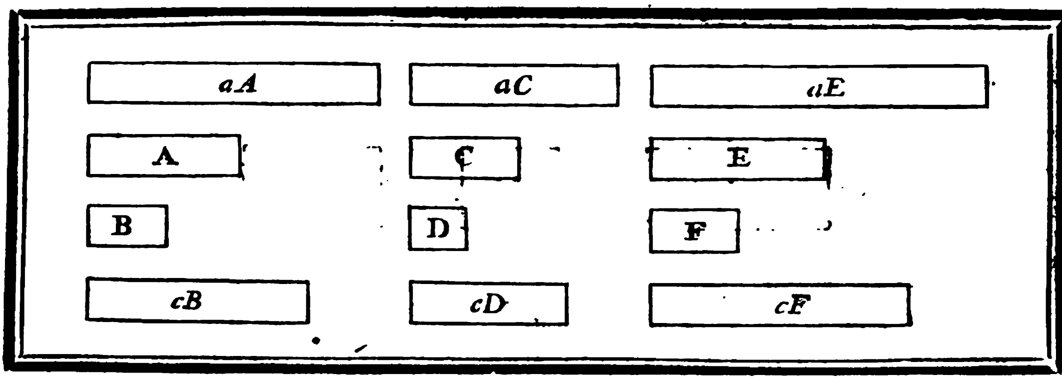
Sinon; P eft =, ou > M.

CAS I. Si P eft = M.

1. La raifon N : M devroit être = à la raifon de N : P. Prop. 7. L. 5.
2. Ce qui étant contraire à l'hypothèfe, P ne fera pas = M.

CAS II. Si P eft > M.

3. La raifon N : M devient > la raifon N : P. Prop. 8. L. 5.
4. Ce qui étant encore contraire à l'hypothèfe, P ne fera pas > M.
Mais P n'eft pas non plus = M (*Arg.* 2);
5. Il refte donc que P foit < M. C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XI. THEOREME XI.

LEs raisons (A : B & E : F) qui sont égales à une même troisieme raison (C : D), sont égales entr'elles.

HYPOTHESE.

Les raisons $\left\{\begin{array}{l}A : B \\ \text{\& } \\ E : F\end{array}\right.$ *sont* $=$ *à la même raison* C : D.

THESE.

A : B $=$ E : F.

Préparation.

1. Prenez des équimultiples quelconques aA, aC, aE des trois antécédens A, C, E.
2. Et d'autres équimultiples quelconques cB, cD, cF des trois conséquens B, D, F.

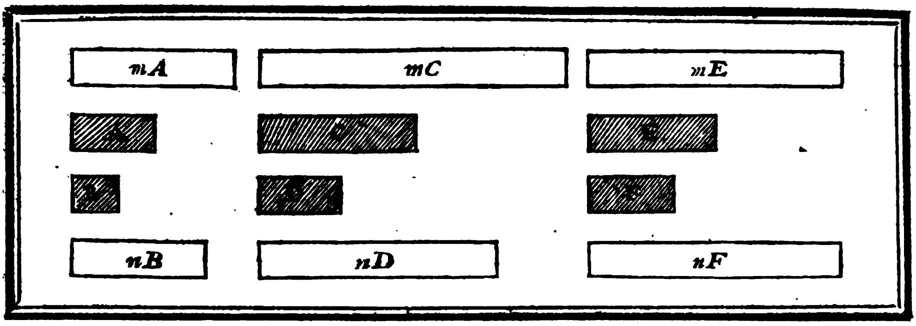
} Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

PUisque A : B $=$ C : D (*Hyp*);

1. Si le multiple aA est $>$, $=$, ou $<$ le multiple cB; l'équimultiple aC est pareillement $>$, $=$, ou $<$ l'équimultiple cD. — Def. 5. L. 5.
   De même puisque C : D $=$ E : F (*Hyp*).
2. Si le multiple aC est $>$, $=$ ou $<$ le multiple cD; l'équimultiple aE sera pareillement $>$, $=$, ou $<$ l'équimultiple cF. — Def. 5. L. 5.
3. Par conséquent si le multiple aA est $>$, $=$ ou $<$, le multiple cB; l'équimultiple aE est pareillement $>$, $=$, ou $<$ l'équimultiple cF.
4. Partant, A : B $=$ E : F. — Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XII. THEOREME XII.

SI plusieurs grandeurs (A, B, C, D, E, F, &c.) sont en proportion (ou bien si plusieurs raisons sont égales): la somme de tous les antécédens (A+C+E &c.) est à la somme de tous les conséquens (B+D+F &c.), comme un antécédent est à son conséquent.

Hypothese.	These.
Les gdrs. A, B, C, D, E, F *sont proportionelles ou* A : B = C : D = E : F *&c.*	A + C + E : B + D + F = A : B.

Préparation.

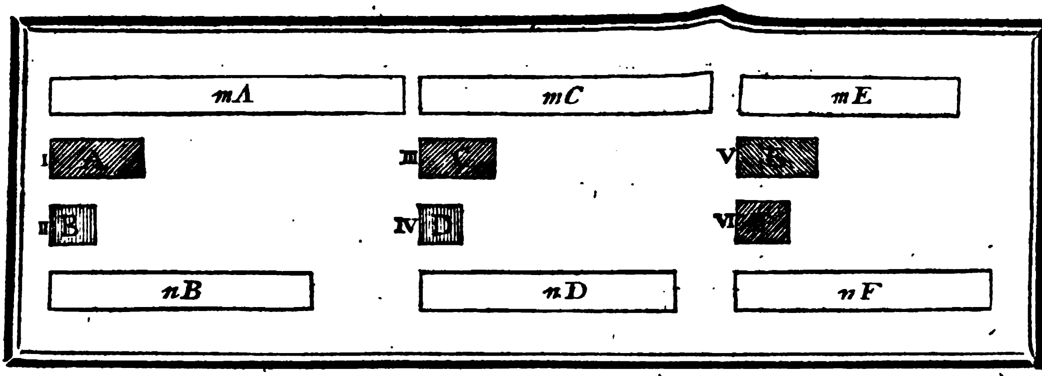
1. Prenez les équimultiples *m*A, *m*C, *m*E des antécédens A, C, E;
2. De même les équimultiples *n*B, *n*D, *n*F des conséquens B, D, F. — 1. L. 5.

Demonstration.

PUis donc que A : B = C : D = E : F (*Hyp.*);

1. Si *m*A est >, =, ou < *n*B, *m*C est pareillement >, =, ou < *n*D; & de même *m*E est >, = ou < *n*F. — Def. 5. L. 5.
   En ajoutant donc de part & d'autre les gdrs. >, = ou <.
2. Les gdrs. *m*A + *m*C + *m*E seront constamment >, =, ou < les gdrs. *n*B + *n*D + *n*F, selon que *m*A est >, =, ou < *n*B.
   Or les gdrs. *m*A + *m*C + *m*E & *m*A sont des équimultiples des gdrs. A + C + E & A (*Prep.* 1 & *Prop.* 1. *L.* 5); item les gdrs. *n*B + *n*D + *n*F & *n*B sont des équimultiples des gdrs. B+D+F & B (*Prep.* 2 & *Prop.* 1. *L.* 5);
3. Partant A + C + E : B+D+F = A : B. — Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIII. THEOREME XIII.

Si la premiere grandeur (A) a même raiſon à la ſeconde (B), que la troiſieme (C) à la quatrieme (D); mais que la troiſieme (C) ait plus grande raiſon à la quatrieme (D), que la cinquieme (E) à la ſixieme (F): la raiſon de la premiere (A) à la ſeconde (B) ſera auſſi plus grande, que la raiſon de la cinquieme (E) à la ſixieme (F).

Hypothese.	These.
I. $A : B = C : D.$	$A : B > E : F.$
II. $C : D > E : F.$	

Préparation.

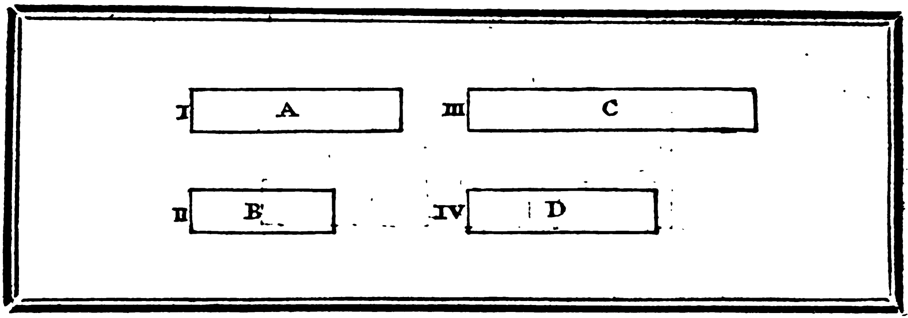
1. La raiſon de $C : D$ étant $>$ la raiſon de $E : F$ (*Hyp.* 2), prenez des équimult. mC & mE des antécédens C & E; & pareillement d'autres équimultiples nD & nF des conſéquens D & F, tellement que mC ſoit $> nD$ ſans que mE ſoit $> nF$; — Dem. 1. L. 5. Def. 7. L. 5.
2. Prenez mA autant multiple de A que mC l'eſt de C. — 5. 5.
3. De même nB autant multiple de B que nD l'eſt de D. — Dem. 1. L. 5.

Demonstration.

Puis donc que $A : B = C : D$ (*Hyp.* 1), & que mA, mC ſont des équimultiples des antécedens & nB, nD des équimultiples des conſéquens (*Prep.* 2 & 3),

1. La gdr. mA ſera $>$, $=$, ou $<$ nB; ſelon que mC ſera $>$, $=$, ou $<$ nD. — Def. 5. L. 5.
Or mC eſt $> nD$ (*Prep.* 1);
2. Donc mA eſt auſſi $> nB$.
Mais en même tems mE n'eſt pas $> nF$ (*Prep.* 1), & les gdrs. mA & mE ſont des équimultiples des antécédens A & E, & nB, nF des équimultiples des conſéquens B & F (*Prep.* 1 & 2),
3. Partant la raiſon $A : B$ eſt $>$ la raiſon $E : F$. — Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. THEOREME XIV.

Si quatre grandeurs (A, B, C, D) sont proportionelles: selon que la premiere (A) sera plus grande, égale, ou moindre, que la troisieme (C), la seconde (B) sera aussi plus grande, égale, ou moindre que la quatrieme (D).

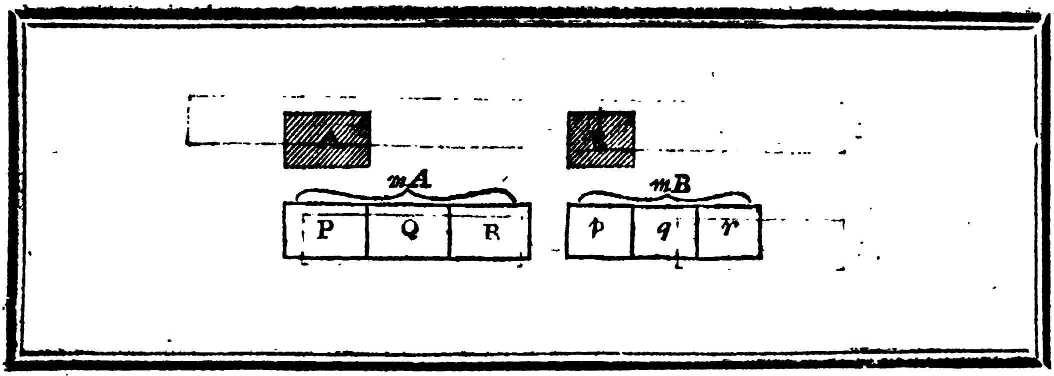
Hypothese.	These.
I. $A : B = C : D$.	*Se'on que* A *est* $>$, $=$ *ou* $<$ C.
II. A *est* $>$, $=$ *ou* $<$ C.	B *sera* $>$, $=$ *ou* $<$ D.

CAS I. Si A est $>$ C.

Demonstration.

1. La raison de $A : B$ est donc $>$ la raison $C : B$. Prop. 8. L. 5.
   Mais $A : B = C : D$ (*Hyp.* 1);
2. Donc la raison de $C : D$ est $>$ la raison $C : B$. Prop. 13. L. 5.
3. D'où il suit, que D est $<$ B ou B $>$ D. Prop. 10. L. 5.
   On démontrera de la même maniere pour les deux autres cas; si $A = C$, que B sera $= D$; & si A est $<$ C, que B sera $<$ D.
4. Par conséquent, selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C, pareillement B est $>$, $=$, ou $<$ D.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. *THEOREME XV.*

LES parties (A & B) sont en même raison que leurs équimultiples (m A & m B).

HYPOTHESE	THESE.
Les gdrs. m A *&* m B *sont des équimults. des gdrs.* A *&* B.	A : B = m A : m B.

Préparation.

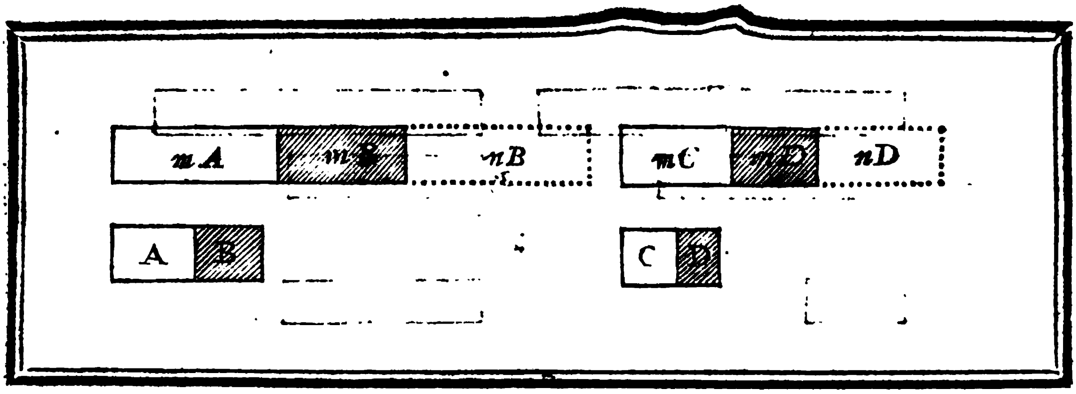
1. Divisez m A en ces parties P, Q, R chacune = A. } Dem. 2. L. 5.
2. Et m B en ces parties p, q, r chacune = B.

DEMONSTRATION.

PUisque les gdrs. m A, m B sont équimultiples des gdrs. A & B (*Hyp*).

1. Le nombre des parties P, Q, R &c. est = au nombre des parties p, q, r &c.
   Et d'autant que P = Q = R (*Prep.* 1), & $p = q = r$ (*Prep.* 2),
2. La gdr. P : p = Q : q = R : r &c. — Prop. 7. L. 5. / Prop. 11. L. 5.
3. C'est pourquoi P + Q + R, ou m A : $p + q + r$ ou m B = P : p. — Prop. 12. L. 5.
   Mais à cause que P = A & p = B (*Prep.* 1 & 2),
4. La gdr. P : p = A : B. — Prop. 7. L. 5.
5. Partant A : B = m A : m B. — Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII. THEOREME XVII.

Si les grandeurs composées ($A + B$ & $C + D$ comparées à leurs parties B & D) sont proportionelles: les grandeurs divisées le seront aussi.

Hypothese.	These.
$A + B : B = C + D : D$	$A : B = C : D.$

Préparation.

1. Prenez des équimult. quelconques mA, mB, mC, mD des grandeurs A, B, C, D.
2. Prenez encore des équimult. quelconques nB, nD des grandeurs B & D. Dem. 1. L. 5.

Demonstration.

1. La gdr. entiere $mA + mB$ est donc autant multiple de la gdr. $A + B$, que mA l'est de A, ou mC de C. Prop. 1. L. 5.
2. De même, la gdr. entiere $mC + mD$ est autant multiple de la gdr. $C + D$, que mC l'est de C. Prop. 1. L. 5.
3. Par conséquent $mA + mB$ est multiple de $A + B$, autant que $mC + mD$ l'est de $C + D$.
4. On voit aussi que les gdrs. entieres $mB + nB$, $mD + nD$ sont équimult. des gdrs B & D. Prop. 2. L. 5.

Or $A + B : B = C + D : D$; (*Hyp*)., & $mA + mB$, $mC + mD$ sont équimult. des antecedens $A + B$ & $C + D$ (*Arg.* 3.); item $mB + nB$, $mD + nD$ sont équimult. des conséquens B & D (*Arg.* 4.);

5. Par conséquent, si $mA + mB$ est $>$, $=$, ou $<$ $mB + nB$; $mC + mD$ est aussi $>$, $=$, ou $<$ $mD + nD$. Def. 5. L. 5.

Mais, si $mA + mB$ est $>$, $=$, ou $<$ $mB + nB$; en rétranchant la partie commune mB, 5. 1 & 9.

6. Le reste mA est encore $>$, $=$, ou $<$ le reste nB.

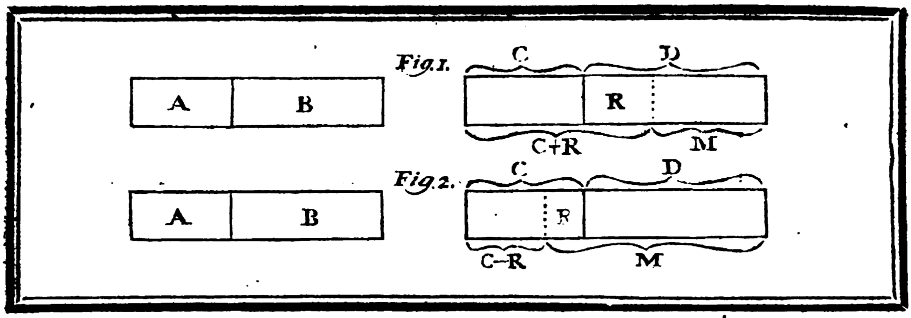
De même, si $mC + mD$ est $>$, $=$, ou $<$ $mD + nD$; en rétranchant la partie commune mD,

7. Le reste mC est encore $>$, $=$, ou $<$ le reste nD.
8. C'est pourquoi, si mA est $>$, $=$, ou $<$ nB; mC est pareillement $>$, $=$, ou $<$ nD.

Mais mA & mC sont des équimult. de A & de C pris comme antecedens (*Prep.* 1); & nB, nD des équimult. de B & D considérés comme conséquens (*Prep.* 2);

9. Partant $A : B = C : D$. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII. THEOREME XVIII.

Si des grandeurs divisées sont proportionelles ($A : B = C : D$), elles seront encore proportionelles en composant ($A+B : B = C+D : D$).

Hypothese. $A : B = : C : D$.

These. $A + B : B = C + D : D$.

Demonstration.

Sinon, $A+B : B = C+D$: autre gdr. $M < \text{ou} > D$.

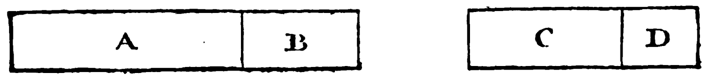
CAS I. Soit d'abord $M < D$, ou $M + R = D$ (*Fig.* 1).

Puis donc que $A + B : B = C + D : M$, ou $A+B:B=C+M+R:M$.
1. On aura dividendo $A : B = C + R : M$. Prop. 17. L. 5.
Mais $A : B = C : D$. (*Hyp.*);
2. Partant $C + R : M = C : D$. Prop. 11. L. 5.
Or $C + R$ est $> C$ (*Ax.* 8. *L.* 1);
3. Donc M est $> D$, & la supposition que M soit $< D$, est impossible. Prop. 14. L. 5.

CAS II. Soit ensuite $M > D$, ou $M = D + R$ (*Fig.* 2).

Puis donc que $A + B : B = C + D : M$, ou $A+B:B=C+D:D+R$.
4. On aura dividendo $A : B = C - R : D + R$. Prop. 17. L. 5.
Mais $A : B = C : D$. (*Hyp.*).
6. Partant $C - R : M = C : D$. Prop. 11. L. 5.
Or $C - R$ est $< C$ (*Ax.* 8. *L.* 1);
7. La gdr. M est donc $< D$, & la supposition que M soit $> D$, est impossible. Prop. 14. L. 5.
La gdr. M ne pouvant donc être ni $< D$ (*Arg.* 3), ni $> D$ (*Arg.* 7),
8. Il s'ensuit que M est $= D$; & que $A + B : B = C + D : D$.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX. *THEOREME XIX.*

SI le Tout (A+B) eſt au Tout (C+D), comme le retranché (A) eſt au retranché (C), le reſte (B) ſera auſſi au reſte (D), comme le Tout (A+B) eſt au Tout (C+D).

Hypothese.	These.
$+ B : C + D = A : C.$	$B : D = A + B : C + D.$

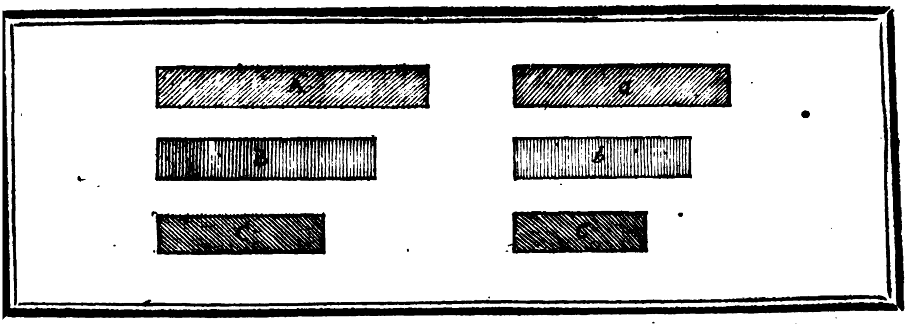
Demonstration.

Puiſque	$A + B : C + D = A : C.$	(*Hyp.*).	
1. Donc alternando	$A + B : A = C + D : C.$		Prop. 16. L. 5.
2. Puis dividendo	$B : A = D : C.$		Prop. 17. L. 5.
3. Et alternant de nouveau	$B : D = A : C.$		Prop. 16. L. 5.
Mais d'autant que	$A + B : C + D = A : C.$	(*Hyp.*).	
4. Il ſuit que	$B : D = A + B : C + D.$		Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

SI des grandeurs, compoſées ſont proportionelles, c. à. d. que $A + B : A = C + D : C$
On peut inférer par *converſion de raiſon* $A + B : B = C + D : D$ (*Def.* 17. *L.* 5.).
Car d'abord $A + B : C + D = A : C$ (*Hyp. & Prop.* 14).
C'eſt pourquoi $A + B : C + D = B : D$ (*Prop.* 19).
Donc $A + B : B = C + D : D$ (*Prop.* 14).



PROPOSITION XX. THEOREME XX.

S'il y a une fuite de trois grandeurs (A, B, C) d'un côté, & une fuite de trois autres grandeurs (a, b, c) de l'autre, telles que les raifons de la premiere fuite foient égales aux raifons de la feconde fuite, chacune à chacune, prifes dans le même ordre direct, il fera vrai, par égalite de raifon, que felon que la premiere grandeur (A) eft plus grande, égale, ou moindre que la troifieme (C) dans une des fuites, de même dans l'autre, la premiere grandeur (a) fera auffi plus grande, égale, ou moindre que la troifieme (c).

Hypothese.	These.
I. $A : B = a : b$.	*Selon que* A *eft* $>$, $=$, *ou* $<$ C,
II. $B : C = b : c$.	a *eft auffi* $>$, $=$, *ou* $<$ c.

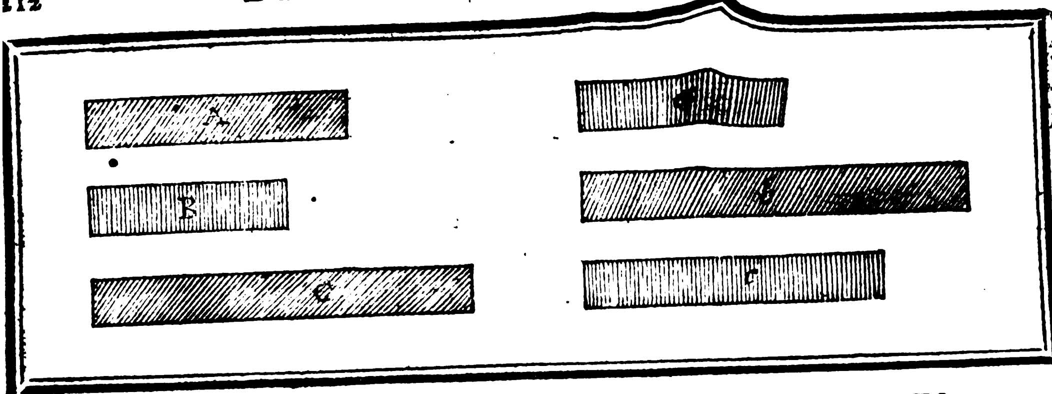
Demonstration.

CAS I. Soit $A > C$.

Puis donc que A eft $>$ C

1. La Raifon $A:B$ eft $>$ $C : B$. Prop. 8. L. 5.
   Mais $A:B = a : b$. (*Hyp.* 1).
   & $C:B = c : b$. (*Hyp.* 2 & *Prop.* 4. L. 5 *Coroll.*).
2. Donc la raifon $a : b$ eft $>$ $c : b$. Prop. 13. L. 5.
3. Partant a eft auffi $>$ c. Prop. 10. L. 5.
4. On prouvera de la même maniere, fi A eft $=$ C, qu'auffi a eft $= c$; & encore de même; fi A eft $<$ C, qu'auffi a eft $< c$.
5. Partant, felon que A eft $>$, $=$, ou $<$ C, a fera auffi $>$, $=$, ou $<$ c.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. THEOREME XXI.

S'il y a une suite de trois grandeurs (A, B, C) d'un côté, & une suite de trois autres grandeurs (*a*, *b*, *c*) de l'autre, telles que les raisons de la premiere suite soient égales à celles de la seconde suite, chacune à chacune, dans un ordre troublé, il sera vrai, par égalité de raison, que selon que la premiere grandeur (A) est plus grande, égale, ou moindre que la troisieme (C) dans une des suites, de même dans l'autre la premiere grandeur (*a*) sera aussi plus grande, égale, ou moindre que la troisieme (*c*).

Hypothese.

I. $A : B = b : c$.
II. $B : C = a : b$.

These.

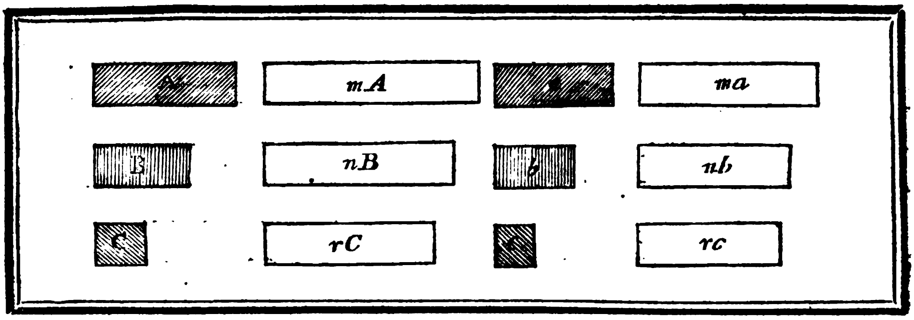
Selon que A *est* $>$, $=$, *ou* $<$ C.
a est aussi $>$, $=$, *ou* $<$ *c*.

Demonstration.

CAS I. Soit $A > C$.

Puis donc que A est $> C$ — Prop. 8. L. 5.
1. La raison de $A : B > C : B$.
Mais $A : B = b : c$ (*Hyp.* 1).
& invertendo $C : B = b : a$ (*Hyp.* 2. & *Prop.* 4. *L.* 5. *Coroll.*). — Prop. 13. L. 5.
2. Partant, la raison $b : c > b : a$. — Prop. 10. L. 5.
3. Et de-là c est $< a$, ou $a > c$.
4. On démontrera de-la même maniere, si A est $=$ C, qu'aussi *a* est $=$ *c*; & encore de même, si A est $<$ C, qu'aussi *a* est $<$ *c*.
5. Partant, selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C, *a* sera aussi $>$, $=$, ou $<$ *c*.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. THEOREME XXII.

S'il y a deux suites de grandeurs (A, B, C &c. *a*, *b*, *c* &c.) de même nombre de part & d'autre, telles que les raisons de l'une soient égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, prises dans un ordre direct, les extremes seront proportionelles par égalité de raison ordonnée, ou *ex æquo ordinatè*.

HYPOTHESE.	THESE.
I. A : B = *a* : *b*.	A : C = *a* : *c*.
II. B : C = *b* : *c*.	

Préparation.

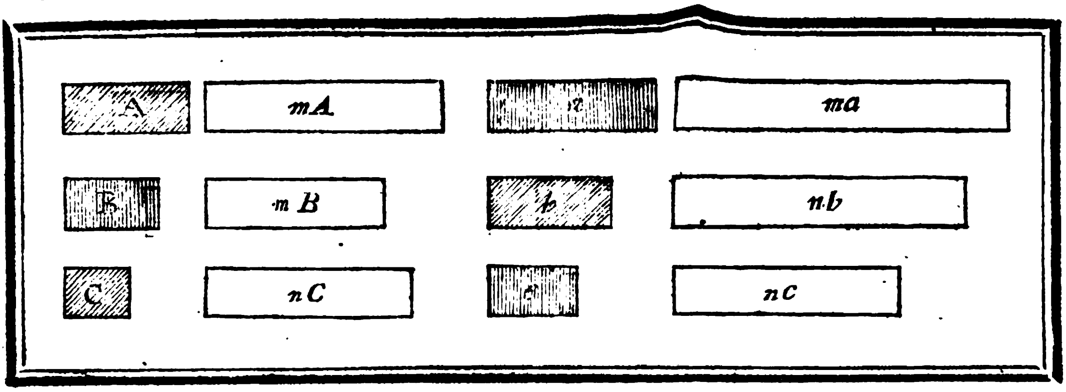
1. Prenez *m*A & *ma* équimult. de A & *a*.
2. De même *n*B & *nb* autres équimult. de B & *b*.
3. Enfin *r*C & *rc* équimult. de C & *c*.

} Dém. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque A : B = *a* : *b* (*Hyp.* 1).
1. On aura *m*A : *n*B = *ma* : *nb* — Prop. 4. L. 5.
De même B : C = *b* : *c* (*Hyp.* 2).
2. Par conséquent *n*B : *r*C = *nb* : *rc*. — Prop. 4. L. 5.
3. Donc *m*A, *n*B, *r*C & *ma*, *nb*, *rc* forment deux suites de grandeurs, telles que les raisons de l'une sont égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre direct.
4. Partant, par égalité de raison, selon que la premiere *m*A d'une des suites est >, =, ou < que la troisieme *r*C, de même la premiere *ma* de l'autre suite sera >, =, ou < que la troisieme *rc*. — Prop. 20. L. 5.
5. D'où il suit que A : C = *a* : *c*. — Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. THEOREME XXIII.

S'il y a deux suites de grandeurs (A, B, C &c a, b, c &c) de même nombre de part & d'autre, telles que les raisons de l'une soient égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre renversé ou troublé, les extrêmes seront proportionelles par égalité de raison troublée, ou *ex æquo perturbatè.*

Hypothese.	These.
I. A : B = b : c.	A : C = a : c.
II. B : C = a : b.	

Préparation.

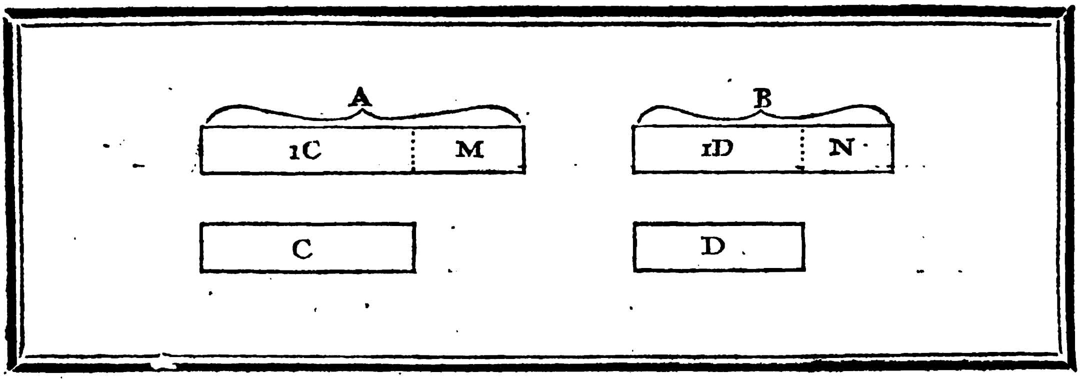
1. Prenez mA, mB, ma équimult. des gdrs. A, B, a.
2. De même nC, nb, nc autres équimult. des gdrs. C, b, c. } Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque mA & mB sont des équimult. de A & de B (*Prep.* 1).

1. On aura A : B = mA : mB. Prop. 15. L. 5.
2. Par la même raison b : c = nb : nc.
 Mais A : B = b : c. (*Hyp.* 1).
3. Donc mA : mB = nb : nc. Prop. 11. L. 5.
 Et à cause que B : C = a : b. (*Hyp.* 2).
4. On aura mB : nC = ma : nb. Prop. 4. L. 5.
5. D'où il suit que mA, mB. nC, & ma, mb, nc forment deux suites de gdrs. telles que les raisons de l'une sont égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre renversé.
6. Partant, par égalité de raison, selon que la premiere mA de l'une des suites est >, = ou < que la troisieme nC, de même la premiere ma de l'autre suite sera >, =, ou < que la troisieme nc. Prop. 21. L. 5.
7. C'est pourquoi A : C = a : c. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXV. THEOREME XXV.

SI quatre grandeurs (A, B, C, D) font proportionelles, la fomme de la plus grande (A) & de la plus petite (D) excède la fomme des deux autres (B & C).

HYPOTHESE.	THESE.
I. A : B = C : D. *II.* A *eft le plus grand terme & par conféquent* (*) D *le plus petit.*	A + D > B + C.

Préparation.

Faites 1C = C & 1 D = D.

DEMONSTRATION.

PUis donc que A : B = C : D (*Hyp.* 1), & que C = 1 C & D = 1 D (*Prep.*).

1. Il fuit que A : B = 1 C : 1D. — Prop. 7. L. 5.
2. C'eft pourquoi A : B = M : N. — Prop. 19. L. 5.
Mais la gdr. A étant > B (*Hyp.* 2).
3. La gdr. M eft auffi > N. — Prop. 16. L. 5. Rem.
De plus, à caufe que C = 1 C & D = 1 D (*Prep.* 1 & 2).
4. Il s'enfuit que 1 C + D = 1 D + C. — Ax. 2. L. 1.
Et comme M eft > N (*Arg.* 3).
5. Il s'enfuit de plus que 1 C + D + M > 1 D + C + N, c. à. d. que A + D eft > B + C. — Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.

(*) L'Auteur fuppofe la conféquence de cette Hypothèfe fuffifamment évidente par les vérités précédentes. Car, puifque A : B = C : D (*Hyp.* 1), & que A > C (*Hyp.* 2), B eft > D (*Prop.* 14. *L.* 5). De même A étant > B (*Hyp.* 2), C eft > D (*Rem. de Prop.* 16. *L.* 5); Partant D eft le plus petit des IV termes.

APPENDICE.

DE LA

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION

DES

RAISONS

ET DES

LOGARITHMES.

APPENDICE.

De la Compoſition & Décompoſition des Raiſons & des Logarithmes.

DEFINITION I.

MULTIPLIER, *dans un ſens général*, n'eſt autre choſe que trouver une grandeur P, qui ſoit à une grandeur homogène F, dans la raiſon donnée d'une autre grandeur quelconque f, à une unité homogène.

§. 1. *Pour peu qu'on ſe rende attentif à ce qui ſe paſſe dans la multiplication numérique, on trouvera qu'il y eſt queſtion de réſoudre ce Problème général.* Une raiſon $1 : f$ étant donnée, avec une grandeur quelconque F, trouver une autre grandeur de même genre P, telle que $1 : f = F : P$?

Par ex. en multipliant 5 par 3, on cherche un PRODUIT 15, *qui contienne le* FACTEUR 5 *trois fois, comme l'autre* FACTEUR 3 *contient l'unité ſous entendue trois fois. La multiplication des nombres rationels s'achève donc arithmétiquement, en répétant l'un des Facteurs autant de fois que l'unité ſe trouve répétée dans l'autre. Mais ce caractère de l'*addition répétée, *qui fixe ſuffiſamment la nature de la multiplication numérique rationelle, n'étant guères applicable à l'idée de cette opération priſe dans un ſens plus général*, c. à. d. *entant qu'elle manie les grandeurs non-rationelles, on eſt obligé, pour la définir, de ſe ſervir du caractère plus étendu de la proportionalité, en la regardant, comme la maniere* de trouver une IV proportionelle à l'unité & aux deux Facteurs.

§. 2. *On reconnoit ſans peine que multiplier, & trouver une IV proportionelle à trois termes donnés, ſont des opérations analogues, ou plutôt identiques. Il y a cette différence, que, dans la première, on regarde le premier terme comme une unité homogène à un des Facteurs* f; *ce qui diſpenſe de faire mention de la diviſion du produit par le premier terme; au-lieu que dans la dernière, on enviſage ſouvent le premier terme comme une grandeur quelconque; ce qui oblige de faire ſuccéder à la multiplication des termes moyens, la diviſion du Produit par le premier. Au reſte la raiſon ne ſubſiſtant qu'entre grandeurs de même genre, il eſt clair que l'unité* 1 *& l'un des deux Facteurs f doivent néceſſairement être homogènes; au-lieu qu'il n'eſt pas abſolument néceſſaire que les Facteurs f &* F *le ſoient. Ces deux Facteurs peuvent être hétérogènes, comme une ligne & un plan; un plan & un ſolide &c; tellement que leur produit ne ſoit néanmoins qu'un plan ou un ſolide*, c. à. d. *une quantité homogène au ſecond Facteur* F. *Car les deux premiers termes,* 1 *& f ne doivent être conſidérés que comme une ſimple raiſon, où l'on fait abſtraction de la quantité ſpécifique & abſolue des termes. A la vérité on dit communément, qu'une ligne multipliée par une ligne fait naître un plan; & qu'un plan multiplié par une ligne produit un ſolide; mais ces expreſſions n'étant pas tout à fait juſtes, elles ne doivent pas être priſes au pied de la lettre.* Euclide *démontre dans la* Propoſition *XII du VI* Livre, *qu'une ligne multipliée par une ligne produit une ligne; & il prouve*, Propoſition *XXIII, que les plans des parallelogrammes ſemblables, ſont comme les produits de leurs côtés homologues. De ſorte que la multiplication d'une ligne par une autre, ne produit pas un plan, mais un nombre, ou une quantité, qui ſuit la raiſon du plan.*

DEFINITION II.

DIVISER, *dans un sens général*, une grandeur D par une autre d, c'est trouver une grandeur Q, qui se rapporte à l'unité, de la même manière que D se rapporte à une grandeur homogène d.

On nomme la gdr. d, *le* DIVISEUR ; *la gdr.* D, *le* DIVIDENDE, *& la gdr.* Q, *le* QUOTIENT. *Par conséquent* Diviser le Dividende D par le Diviseur d, c'est trouver un Quotient Q, qui par son rapport à l'unité 1, indique la raison du Dividende au Diviseur.

Par ex. en divisant 6 par 2, on a pour Quotient 3, qui contenant l'unité trois fois, indique que le Dividende 6 contient le Diviseur 2, trois fois. D'où l'on voit qu'en général

Le Divis. 2 est au Divid. 6, comme l'unité 1 est au quotient 3.

La Définition avertit assez que le Dividende & le Diviseur doivent être des grandeurs de même genre; & que l'unité & le Quotient doivent être dans le même cas. Car dans cette opération la raison de d *à* D *est donnée, & on demande qu'on l'exprime par la raison de l'unité à* Q; *il faut donc que les termes apartenants à la même raison soient de même genre.*

La division se réduit donc à trouver une quatrieme proportionelle au Diviseur, au Dividende, & à l'unité.

DEMANDE I.

ON demande qu'on puisse multiplier & diviser des grandeurs conformément aux Définitions I & II.

On se contente ici de demander qu'on puisse trouver une quatriéme proportionelle à l'unité & à deux autres grandeurs données, ce qui s'appelle multiplier; qu'on puisse trouver une quatrième proportionelle à deux grandeurs données & à l'unité, ce qui s'appelle diviser? On se contente, dis-je, de demander ces vérités de pratique, parceque ce n'est pas ici le lieu d'enseigner les régles de l'effection, réservée aux sciences qui traitent des grandeurs particulières qu'on propose à multiplier ou à diviser. L'Arithmétique exécute ces opérations par des chiffres; la Géométrie par des constructions linéaires; & l'Algébre, comme la science des grandeurs en général, ne les exécute souvent point, se contentant de les indiquer par des caractères convenables: & comme ces caractères sont d'un grand usage, nous nous en servirons, après en avoir expliqué la signification.

HYPOTHESE I.

ON réprésente le produit de deux Facteurs f & F, par l'expression fF, *qui dénote par conséquent une grandeur telle que* $1 : f = F : fF$ (Def. 1). *De même le produit de la grandeur* m *par* fF, *est réprésenté par l'expression* mfF; *signifiant* $1 : m = fF : mfF$, *& ainsi des autres.*

COROL-

COROLLAIRE I.

La transposition des Lettres ne change point la valeur du produit, c. a. d. $fF = Ff$.

Car	$1 : f = F : fF$,	(*Hyp.* 1 & *Def.* 1).
Et	$1 : F = f : Ff$.	
Donc alternando	$1 : f = F : Ff$.	Prop. 16. L. 5.
Partant	$F : fF = F : Ff$.	Prop. 11. L. 5.
Mais	$F = F$	
Donc	$fF = Ff$.	Prop. 14. L. 5.

COROLLAIRE II.

Lorsqu'on multiplie deux Facteurs égaux r & r; le produit rr est appellé un QUARRÉ, *& le Facteur r sa* RACINE. *Par conséquent l'unité* 1 *est à la racine r, comme cette racine r est au quarré rr.* c. à. d. $1 : r = r : rr$. (Def. 1).

En multipliant de la même maniére le quarré rr par la racine r, on trouve le cube rrr. *Partant*

$$1 : r = rr : rrr. \text{ (Def. 1).}$$

De même, en multipliant le Cube rrr par la racine r, le produit $rrrr$ est appellé un QUARRÉ-QUARRÉ. *Donc*

$$1 : r = rrr : rrrr. \text{(Def. 1).}$$

Et *ainsi des autres produits à l'infini, auxquels on donne le nom de* PUISSANCES. *On les nomme premiere, seconde, troisieme, &c, puissance; selon que dans l'expression la lettre (r) désignant la racine, est répétée une, deux, trois &c fois. On les marque aussi de cette maniere r^1, r^2, r^3, caractéristique d'un usage fort étendu, qui a son fondement dans la composition & décomposition des raisons, comme nous l'expliquerons dans la suite.*

COROLLAIRE III.

Puisque toutes les raisons sont égales à la raison $1 : r$, *il s'ensuit que*

$$1 : r^1 = r^1 : r^2 = r^2 : r^3 = r^3 : r^4 \text{ \&c.} \qquad \text{Prop. 11. L. 5.}$$

c. à. d. *toutes les raisons entre les Puissances successives sont des raisons égales & continues. Ou ce qui est la même chose; La suite des Puissances*

$$1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ r^4 \text{ \&c.}$$

forme une Progression Géométrique. { Def. 9. L. 5. §. 2.

HYPOTHESE II.

Le quotient Q, qui résulte de la Division de la grandeur D par une autre d, sera réprésenté par le caractère $\frac{D}{d}$; ou D: d tellement que $d : D = 1 : \frac{D}{d}$ (*Déf.* 2).

Les autres caractères plus composés auront la même signification. Ainsi $\frac{D}{ad}$, réprésentera le Quotient qui vient en divisant la grandeur $\frac{D}{d}$ par a; de maniere que

$$a : \frac{D}{d} = 1 . \frac{D}{ad}.$$

DEFI-

DEFINITION III.

Les produits, comme mA, mB, qui résultent de la multiplication de deux grandeurs A & B, par un même Facteur m, seront nommés des Equiproduits.

Il ne faut pas confondre les Equimultiples avec les Equiproduits. Lorsque le Facteur m est un nombre entier & rationel quelconque (par exemp. 7); les quantités mA, mB *(c. à. d.* 7 A, 7 B) *sont des Equimultiples de* A *&* de B; *mais lorsque la grandeur m répresenté une grandeur non-rationelle quelconque comme une racine numérique sourde, où une circonférence de cercles, ou toute autre grandeur de l'espéce de celles qu'on nomme* transcendante, *les quantités* mA *&* mB *ne sont plus des Equimultiples, mais des Equiproduits des grandeurs* A *&* B.

PROPOSITION I.

Les Equiproduits mA & mB sont comme les Facteurs A & B.

DEMONSTRATION.

Puisque mA *est un produit de* A *par* m; *&* mB *un produit de* B *par* m; *on peut inférer*

$$\left.\begin{array}{l} 1 : m = A : mA \\ 1 : m = B : mB \end{array}\right\} \qquad \text{Def. 1.}$$

$$\textit{Partant}\ A : mA = B : mB \qquad \text{Prop. 11. L. 5.}$$

$$\text{Donc alternando}\ A : B = mA : mB \qquad \text{Prop. 16. L. 5.}$$

$$\textit{Ou ce qui est la même chose}\ mA : mB = A : B.$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

Si quatre grandeurs A, B, C, D, sont en proportion, les Equiproduits mA & mC des antécédens, comparés à d'autres Equiproduits nB, nD des conséquens, chacun à chacun, sont encore en proportion.

DEMONSTRATION.

Puisque mA & mC *sont des Equiproduits de* A & C (Hyp.).

$$\left.\begin{array}{l} \textit{On aura}\ A : C = mA : mC. \\ \textit{Derechef}\ nB\ \&\ nD\ \textit{étant des Equiproduits de}\ B\ \&\ D\ (\text{Hyp.}). \\ \textit{On aura}\ B : D = nB : nD. \end{array}\right\} \text{Prop. 1.}$$

$$\textit{Mais}\ A : C = B : D\ (\text{Hyp. \& Prop. 16. L. 5}).$$

$$\textit{Partant}\ mA : mC = nB\ nD. \qquad \text{Prop. 11. L. 5.}$$

$$\textit{Et}\ \text{alternando}\ mA : nB = mC : nD. \qquad \text{Prop. 16. L. 5.}$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

Si quatre grandeurs A, B, C, D sont en proportion, & que quatre autres a, b, c, d le soient aussi, les produits aA, bB, cC, dD, qui résultent en multipliant chacune par chacune, sont encore en proportion.

DEFINITION V.

QUand on renverse les termes d'une raison, tellement que l'antécédent devienne conséquent, & le conséquent antécédent, cette seconde raison est appellée la RECIPROQUE de la premiere qu'on nomme DIRECTE.

Par ex. La raison directe 3 : 1 *a pour réciproque la raison* 1 : 3. *De même prenant* B : A *pour directe, sa réciproque est* A : B. *En général la grandeur* $\frac{1}{A}$ *est la réciproque de la grandeur* A. *Car une grandeur* A *se rapportant naturellement à l'unité comme conséquent,* A *est autant que* $\frac{A}{1}$.

COROLLAIRE.

SI la directe, par ex. 3 : 2, *est une raison de plus grande inégalité, sa réciproque* 2 : 3 *sera nécessairement une raison de moindre inégalité.*

DEFINITION VI.

ON dit qu'une RAISON M : N est COMPOSÉE DE DEUX OU DE PLUSIEURS RAISONS COMPOSANTES A : B, C : D, E : F, &c. lorsqu'elle est égale à la raison qui se trouve entre le produit ACE de tous les antécédens, comparé au produit BDF de tous les conséquens.

Par ex. soient les raisons simples 5 : 2, 2 : 3, 3 : 7 *&c. on dira que la raison de* 5 : 7 *est une raison composée des trois proposées. Car le produit de leurs antécédens est* 30, *& celui de leurs conséquens* 42,

Or $5 : 7 = 30 : 42.$

HYPOTHESE III.

L'Analogie qui règne entre la composition des raisons, & celle des grandeurs, conduit à indiquer la composition des raisons directes, comme l'addition des grandeurs positives, par le signe +.

Ainsi l'expression $+ \overline{A : B} + \overline{C : D}$, *ou simplement* $\overline{A : B} + \overline{C : D}$ *désigne que la premiere raison* A : B *doit être composée avec la seconde* C : D, *selon la définition précédente.*

Mais lorsqu'une raison doit entrer dans la composition réciproquement (*Def.* 5), tellement que son antécédent multiplie le produit des conséquens, & son conséquent celui des antécédens, on fait précéder une telle raison par le signe —.

Ainsi $\overline{A : B} + \overline{C : D} - \overline{E : F}$ *dénote que les raisons* A : B, *&* C : D *doivent être composées avec la réciproque de la raison* E : F, *c. à. d. avec la raison* F : E; *d'où résulte la raison* ACF : BDE.

C'est pourquoi les Auteurs voulant exprimer une raison composée par les composantes ont coutume de se servir de l'expression suivante

$AC : BD = \overline{A : B} + \overline{C : D}$ *item* $ACF : BDE = \overline{A : B} + \overline{C : D} - \overline{E : F}$.

Et

Et il en est de même des autres exemples. On va expliquer le fondement de cette signification du signe — .

PROPOSITION V.

S'Il y a une suite d'autant de grandeurs A, B, C, D &c. qu'on voudra: la raison de la première A à la dernière D, est composée de toutes les raisons intermédiaires A : B, B : C, C : D.

DEMONSTRATION.

Car composant la raison A : B *avec la raison* B : C, *il en résulte la raison* A B : C B. Def. 6.
Mais les termes AB : BC *sont des Equiproduits des Facteurs* A & C (Def. 3);
Partant A : C = AB : BC. Prop. 1.
De même, composant les trois raisons A : B, B : C, C : D, *on parvient à la raison* ABC : BCD. Def. 6.
Mais ces termes sont des Equiproduits des Facteurs A & D (Def. 3);
Partant A : D = ABC : BCD. Prop. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

SI les raisons composantes ne sont pas continues, *c. à. d. telles que le conséquent de la précédente devienne l'antécédent de la suivante; on peut les rendre telles en cherchant successivement des IVmes. proportionelles à chacune des raisons données (hormis la Ire.) & au conséquent de celle qui la précéde.*

Par ex. soient les composantes $\overline{A : B}$, + $\overline{C:D}$ + $\overline{E:F}$, *on les rendra continues, en faisant,*

C : D = B:Q.
E : F = Q:S.

Car en mettant les raisons B : Q, *item* Q:S *à la place de leurs égales* C : D, & E : F; *on a les raisons composantes* A : B, B: Q, Q : S *qui sont continues.*

COROLLAIRE. II.

UNe raison d'égalité A : A *ne produit aucun changement dans la composition des raisons. Car si on compose la raison* A : A *avec la raison* B : C; *on trouve la raison* A B : A C, *égale à la raison de* B : C, (Prop. 1). *Vérité qui fournit le principe d'Analogie suivant*: de même que Zéro ne produit aucun changement dans la composition des grandeurs, la raison d'égalité n'en produit aucun dans la composition des raisons.

COROLLAIRE III.

U*Ne raiſon directe* A : B, *compoſée avec ſa réciproque* B : A, *produit une raiſon d'égalité, vû que les termes* AB *&* BA *de la compoſée ſont égaux* (Def. 4 & Cor. 1. Hyp. 1).

COROLLAIRE IV.

P*Uis donc que la compoſée* AB:BA, *comme raiſon d'égalité* (Cor. 3), *équivaut à Zéro en matière de compoſition des raiſons* (Cor. 2); *les compoſantes* A : B *&* B : A *doivent être conſidérées comme d'une nature contraire rélativement à cette même compoſition. Car la directe* A : B, *comme une raiſon d'inégalité, produiſant un changement dans la compoſition, ſa réciproque anéantit ce changement, en ramenant la compoſée à la première valeur.*

Par ex. Compoſant la directe A : B *avec la raiſon* M : N, *la compoſée* AM : BM *ceſſe d'être égale à la primitive* M : N. *Mais en continuant la compoſition avec la réciproque* B : A, *ce changement eſt redétruit; attendu que la compoſée* BAM : BAN *rédevient égale à la primitive* M : N (Prop. 1).

HYPOTHESE IV.

PUiſque dans la compoſition des raiſons, on eſt obligé de regarder la raiſon d'égalité (p. ex. A : A ou AB : BA) comme équivalente à Zéro (*Coroll.* 2); on répréſente ſa nature, (ou ſon effet dans cette compoſition), par l'expreſſion A : A $=$ o ou AB : BA $=$ o.

COROLLAIRE.

E*T d'autant qu'une raiſon directe* A : B, *compoſée avec ſa réciproque* B : A *produit une raiſon d'égalité* AB : BA *équivalente à Zero en cette eſpèce de compoſition* (Prop. 5. Coroll. 3. Dem. 2.) *il s'enſuit que* $\overline{A : B} + \overline{B : A} = o$ (Hyp. 3. & 4). *D'où l'on déduit, (en ajoutant de part & d'autre* $- \overline{B : A}$)

$$\overline{A : B} = - \overline{B : A}.$$

Ce qui fait voir qu'une raiſon négative $-\overline{B : A}$ eſt équivalente à la réciproque A : B de celle qui ſe trouve affectée du ſigne $-$. *Ou bien*, que ſi on fait précéder une raiſon quelconque B : A du ſigne $-$, que l'expreſſion négative qui en reſulte dénote la réciproque de cette raiſon. *C'eſt en cette manière que les ſignes* $+$ *&* $-$ *mis au devant d'une même raiſon, expriment leur nature contraire* (Prop. 5 Coroll. 4). *Et cela fait comprendre pourquoi les raiſons négatives doivent entrer réciproquement dans la compoſition* (Hyp. 3).

REMARQUE.

L*Es Commençans doivent ſe mettre au fait de la correſpondance qui règne entre la compoſition des raiſons & celle des grandeurs, & faire attention à la manière de la répréſenter par les Caractères* $+$, $-$, o, *pour qu'ils ne ſe trouvent point arrêtés dans les écrits de pluſieurs Auteurs célèbres qui en font uſage. Cette correſpondance eſt manifeſte; car comme dans la*

Com-

composition des grandeurs les positives augmentent la somme, que les négatives diminuent, & que celles qui sont égales à Zéro n'altèrent point; de même dans la composition des raisons, celles de plus grande inégalité augmentent la composée, celles de moindre inégalité la diminuent, & celles d'égalité n'y font aucun changement. Ce principe fait voir qu'on peut se servir utilement des signes +, —, o dans les deux espéces de composition, pourvû qu'on les explique conformément aux principes de chacune.

PROPOSITION VI.

Dans toute Progression Géométrique, les termes équidistans sont proportionels; ou bien leurs raisons sont égales.

DEMONSTRATION.

Que les grandeurs A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, *&c, réprésentent les termes d'une Progression Géométrique, où les termes* B & E, *item* F & I, *soient des termes équidistans. On a donc en vertu de l'égalité & continuité des raisons qui règne dans les Progressions Géométriques,*

$$\left.\begin{array}{l} B : C = F : G \\ C : D = G : H \\ D : E = H : I \end{array}\right\} \quad \text{Def. 9. L. 5. §. 2.}$$

Donc $B : E = F : I$ Prop. 21. L. 5.

C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

Dans une Progression Géométrique A, B, C, D, E, F, G, &c, deux termes quelconques sont entr'eux, comme les Puissances de deux autres termes, qui se suivent immédiatement, exprimées par le nombre des raisons égales, interposées entre les deux termes qu'on compare.

DEMONSTRATION.

Soient les deux termes qu'on compare C & G, *entre lesquels il se trouve quatre raisons égales, à sçavoir, les raisons* C : D, D : E, E : F, F : G. *je dis que*

$$C : G = C^4 : D^4$$

Car $\left\{\begin{array}{l} C : D = C : D \\ D : E = C : D \\ E : F = C : D \\ F : G = C : D \end{array}\right\}$ Def. 9. L. 5. §. 2.

Donc $CDEF : DEFG = C^4 : D^4.$ Prop. 3.

Mais $CDEF : DEFG = C : G.$ Prop. 1.

Et

Partant $C : G = C^4 : D^4$ Prop. 11. L. 5.

Et puisque $A : B = C : D$ (Def. 9. L. 5. & § 2.).

On aura $A^4 : B^4 = C^4 : D^4$ Prop. 3.

Partant $C : G = A^4 : B^4$ Prop. 11. L. 5.

Ou en général, comme la puissance IVme d'un terme quelconque est à la même puissance du terme suivant. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Puisque la suite des Puissances 1. R, RR, RRR, &c. commençant par l'unité, forme une Progression Géométrique (Hyp. 1. Cor. 3), il est manifeste qu'entre l'unité & la première puissance R il n'y a qu'une raison. Mais qu'il y en a deux égales entre l'unité & le quarré RR; qu'il y en a trois entre l'unité & le cube RRR & ainsi de suite. C'est pourquoi on marque ces puissances avec les chiffres 1, 2, 3, 4 &c. nommés, EXPOSANS, de cette manière R^1, R^2, R^3, R^4 &c. Où ces exposans dénotent la multiplicité de la raison primordiale $1 : R$; c. à. d. combien de fois cette raison doit être continuée, avant qu'on arrive au terme dont on considère l'exposant.

COROLLAIRE II.

Toutes les puissances de l'unité à l'infini sont égales à l'unité.

Car expliquant r par 1. $1 : 1 = 1 : 1^2$ (Hyp. 1. Coroll. 2).

Or $1 = 1$

Donc $1 = 1^2$ Prop. 14. L. 5.

De même $1 : 1 = 1^2 : 1^3$ (Hyp. 1. Coroll. 2).

Or $1 = 1^2$

Donc $1 = 1^3$. Prop. 14. L. 5.

Et ainsi de même des autres puissances à l'infini.

COROLLAIRE III.

Lorsque deux ou plusieurs raisons sont exprimées par une même primordiale ($R : 1$) ayant pour conséquent l'unité; leur composition s'exécutera par la simple addition des Exposans des antécédens, c. à. d. de leurs exposans de multiplicité. Car supposons qu'il faille composer la raison $R^3 : 1$ avec la raison $R^2 : 1$. la composée sera $= \overline{R^3 : 1} + \overline{R^2 : 1}$, (Def. 6. & Hyp. 3.).

Mais $\overline{R^3 : 1} = \overline{R : 1} + \overline{R : 1} + \overline{R : 1}$ (Def. 6.)

& $\overline{R^2 : 1} = \overline{R : 1} + \overline{R : 1}$ (Def. 6.)

Partant $\overline{R^3 : 1} + \overline{R^2 : 1} = \overline{R : 1} + \overline{R : 1} + \overline{R : 1} + \overline{R : 1} + \overline{R : 1}$

$= \overline{R^5 : 1}$. Def. 6.

Mais $\overline{R^5 : 1} = \overline{R^{3+2} : 1}$

Par conséquent l'Exposant de multiplicité de la composée est la somme des Exposans des composantes.

DEFI-

DEFINITION. IX.

Une grandeur R est considérée comme la RACINE d'une autre grandeur E, lorsqu'un de ses produits successifs R^2, R^3, ou R^4, &c, devient égal à la grandeur proposée E. En particulier on nomme R la RACINE QUARRÉE de E, lorsque R R ou R^2 $=$ E: & la RACINE CUBIQUE, quand R R R ou $R^3 = E$; & ainsi de suite.

On marque la racine par le signe $\sqrt{\ }$; *& l'ordre des racines par les chiffres* 2, 3, 4, *&c. nommés* EXPOSANS RADICAUX. *Ainsi* $\sqrt[2]{E}$, $\sqrt[3]{E}$, $\sqrt[4]{E}$, *dénotent successivement* la racine quarrée, cubique, quarré-quarrée *de* E; *& ainsi de suite à l'infini.*

DEMANDE II.

Qu'on puisse trouver les racines quarrées, cubiques, & toutes les autres racines des grandeurs déterminées.

L'Arithmétique détermine ces racines ou exactement, ou à peu près, par ses opérations. L'Algèbre abrège ces opérations au moyen de ses formules générales. Et la Géométrie assigne un certain nombre de ces racines, par des constructions linéaires. On suppose donc que l'extraction effective des racines est possible, afin de pouvoir établir les vérités Théorétiques qui en dépendent.

PROPOSITION VIII.

La racine d'une grandeur E, exprimée par un Exposant radical déterminé, est égale à la première moyenne proportionelle entre l'unité & la grandeur E; si l'on prend autant de ces moyennes proportionelles, que l'Exposant radical contient d'unités, moins une.

DEMONSTRATION.

Supposons pour fixer les idées, qu'il soit question de la racine quatrième de E, *que nous nommerons* R; *je dis, que prenant entre* 1 *&* E, *quatre moyennes proportionelles moins une, c. à. d. trois, que nous nommerons* R, S, T; *la première* R *est égale à la racine quatrième de* E.

Car, puisque les grandeurs 1, R, S, T, E, *sont en proportion continue,*

	$1 : E = 1^4 : R^4$	Prop. 7.
Mais	$1 = 1^4$	Prop. 7. Coroll. 2.
Partant	$E = R^4$	Prop. 14. L. 5.
Ou	$\sqrt[4]{E} = R$ (Def. 9.)	

Et comme le même raisonnement est applicable à tous les Cas, l'énoncé de la Proposition se soutient dans toute sa généralité.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

L'Interposition des moyennes proportionelles R, S, T, *résout la raison de* 1 : E, *en autant de raisons égales à celle de* 1 : R, *que l'Exposant radical contient d'unités. Par ex. dans ce cas, les* *trois moyennes proportionelles* R, S, T, *résolvent la raison de* $1 : E$, *en ces quatres raisons égales*, $1 : R = R : S = S : T = T : E$.

C'est pourquoi si l'on considère la raison de $1 : E$, *ou de* $1 : E^1$ *comme primordiale*, & *celle de* $1 : R$ *comme une de ses dérivées; cette raison de* $1 : R$ *est sousquadruplée de la raison entière* $1 : E$, *ou elle est* $\frac{1}{4}$ *des composantes. Celle de* $1 : S = \overline{1 : R} + \overline{R : S}$ (Def. 6) *en est* $\frac{2}{4}$, *celle de* $1 : T = \overline{1 : R} + \overline{R : S} + \overline{S : T}$ *en est* $\frac{3}{4}$, *enfin celle de* $1 : E = \overline{1 : R} + \overline{R : S} + \overline{S : T} + \overline{T : E}$ *en est* $\frac{4}{4}$ *ou* 1, *c. à. d. elle est egale à la raison entière.*

COROLLAIRE II.

Si *l'on veut donc exprimer les racines analogiquement à la Caractéristique des puissances; il faut regarder* R *comme* $= E^{\frac{1}{4}}$; *où la puissance fractionaire* $\frac{1}{4}$ *marque que la raison de* $1 : E^{\frac{1}{4}}$ *est une des quatre raisons égales interposées entre la raison* $1 : E$. *Ce qui s'accorde avec les principes antérieurs. Car supposant que* $E^{\frac{1}{4}}$ *dénote la première des trois moyennes proportionelles entre* 1 & E, *ou ce qui est la même chose, la racine quatrieme de.* E

On a $\quad 1 : E^1 = 1^4 : E^{(\frac{1}{4})\,4}$ $\quad$ Prop. 7.

Mais $\quad 1 = 1^4$ (Prop. 7. Coroll. 2) & $E^1 = E^{(\frac{1}{4})\,4}$. *Car* $(\frac{1}{4})^4 = 1$.

Par conséquent $1 : E^1 = 1 : E^1$. *Ce qui est vrai, les expressions étant identiques.*

De la même maniere qu'on exprime R *par* $E^{\frac{1}{4}}$, *on doit exprimer* S *par* $E^{\frac{2}{4}}$; T *par* $E^{\frac{3}{4}}$; E *par* $E^{\frac{4}{4}} = E^1$.

COROLLAIRE III.

Il *suit de ces principes, que les expressions* $\sqrt[2]{E}$ & $E^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{E}$ & $E^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{E^3}$ *ou* $E^{\frac{3}{5}}$; &c. *sont identiques. Cependant les dernières sont plus expressives que les premières, en ce qu'elles répresentent ces grandeurs comme appartenantes à l'ordre des puissances, ou comme des termes d'autant de raisons dérivées par la voye de l'interposition & de la continuation, c. à. d. de la résolution & de la composition d'une même raison primordiale, ce qui fait leur caractère essentiel.*

COROLLAIRE IV.

On *voit ce qu'il faut faire pour la résolution des raisons, (comme* $1 : R^3$, *ou* $R^3 : 1$, *ayant pour antécédent, ou pour conséquent l'unité) lorsqu'il est question d'en dériver une sousmultipliée quelconque selon un Exposant donné, par ex.* 5. *On divisera par cet Exposant* 5 *l'Exposant de multiplicité* 3 *de la raison proposée, le quotient* $\frac{3}{5}$ *sera l'Exposant de la sousmultipliée* $1 : R^{\frac{3}{5}}$ *qu'on cherche.*

COROL-

de sa multiplicité. *Ainsi lorsqu'on compose les raisons directes* $R^2 : 1$ & $R^3 : 1$ *&c, avec leurs réciproques* $R^{-2} : 1$ & $R^{-3} : 1$ *&c. On trouve toujours les raisons* $R^0 : 1$, $R^0 : 1$ *&c, désignant la raison d'égalité*, $1 : 1$. *D'où il suit que le caractère* R^0 *réprésente constamment l'unité, quelle que puisse être la valeur de* R.

COROLLAIRE IX.

PUisque la raison $1 : R^3$ *est composée des raisons* $\overline{1 : R} + \overline{1 : R} + \overline{1 : R}$. (Def. 6 & Hyp. 3.), *Et celle de* $1 : R^{-\frac{3}{4}}$, *des raisons* $1 : R^{-\frac{1}{4}}, + 1 : R^{-\frac{1}{4}} + 1 : R^{-\frac{1}{4}}$ *& ainsi des autres: On voit qu'en général les raisons exprimées par une même primordiale* $1 : R$, *se composent par la simple addition des Exposans, soit affirmatifs, soit négatifs; & dans l'un ou l'autre cas, soit entiers, ou fractionnaires, c. à. d. potentiels ou radicaux.*

COROLLAIRE X.

SI on suppose qu'une raison donnée $\overline{F : 1}$ *soit exprimée par une raison* $R^{\frac{m}{n}} : 1$ *dérivée de la primordiale* $R : 1$, *& une autre* $f : 1$, *de même par une autre dérivée* $R^{\frac{p}{q}} : 1$.

Il est clair que la composée $fF : 1 = R^{\frac{m}{n}} : 1 + R^{\frac{p}{q}} : 1$. *sera exprimée par la raison* $R^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} : 1$: *où l'Exposant de* R *est la somme des Exposans des composantes* $R^{\frac{m}{n}} : 1$. & $R^{\frac{p}{q}} : 1$.

PROPOSITION IX.

UNe raison primordiale $1 : R$ peut être décomposée à l'infini par la voye de l'interposition, & composée à l'infini par la voye de la continuation.

DEMONSTRATION.

ENtre les deux termes 1 & R *de la raison donnée, on peut prendre une moyenne proportionelle* $R^{\frac{1}{2}}$, *qui résout la raison donnée dans les deux raisons égales* $1 : R^{\frac{1}{2}}$, & $R^{\frac{1}{2}} : R^1$ (Prop. 8).

Chacune de ces deux raisons pouvant de même être résolue par l'interposition des moyennes proportionelles $Q = R^{\frac{1}{4}}$ & $S = R^{\frac{3}{4}}$ (Cor. 1. Prop. 8) *en deux raisons égales, la raison entière* $1 : R$ *se trouvera décomposée en quatre raisons continues & égales* $1 : Q : R^{\frac{1}{2}} : S : R$; *ou bien* $1 : R^{\frac{1}{4}} : R^{\frac{2}{4}} : R^{\frac{3}{4}} : R^1$.

Et comme par l'interposition de quatre autres moyennes proportionelles, chacune de ces raisons peut-être résolue en deux autres, d'où naîtra par rapport à la raison entière $1 : R$, *une résolution en huit raisons égales; & cette interposition pouvant être répétée à l'infini, il est manifeste que toute raison donnée peut être résolue en une infinité de raisons continues & égales, par l'interposition d'une infinité de moyennes proportionelles.*

De même, en formant des termes 1 & R *une Progression Géométrique* $1, R^1, R^2, R^3, R^4$,

R^4, *&c; on trouve les raisons composées* $1 : R^2$, $1 : R^3$, $1 : R^4$ *&c. doublées, triplées, quadruplées, &c. de la raison donnée* $1 : R$. *Et comme cette continuation peut être poussée à l'infini, & que chacune de ces raisons multipliées, peut-être composée avec chacune des raisons sousmultipliées* $1 : Q$, $1 : R^{\frac{1}{2}}$ *&c; il est clair que cette composition des raisons va à l'infini.*

C. Q. F. D.

REMARQUE.

LEs raisons $1 : R^1$, $R^1 : R^2$, $R^2 : R^3$, *&c. étant égales, la resolution* $1 : Q$, $Q : R^{\frac{1}{2}}$, $R^{\frac{1}{2}} : S$, $S : R^1$ *&c. de la premiere, est en même tems la résolution de toutes les autres. Si on compose donc une des multipliées, par ex. la doublée,* $1 : R^2$, *avec une des sousmultipliées; comme par ex. avec la sousdoublée* $1 : R^{\frac{1}{2}}$, *on trouvera la raison composée* $1 : R^{\frac{5}{2}}$; *moyenne entre la doublée & la triplée; où le conséquent* $R^{\frac{5}{2}}$ *est la moyenne proportionelle entre* R^2, & R^3. *Il en est de même de toutes les autres compositions.*

De plus, les raisons $R^2 : 1$, $R^3 : 1$ *&c. étant les réciproques des directes multipliées* $1 : R^2$, $1 : R^3$; *&c. de même que les raisons* $R^{\frac{1}{2}} : 1$ & $R^{\frac{3}{4}} : 1$ *&c. sont les réciproques des directes sousmultipliées* $1 : R^{\frac{1}{4}}$, $1 : R^{\frac{3}{4}}$ *&c; On voit que la résolution & composition de la raison* $1 : R$, *donne les derivées de sa réciproque* $R : 1$, *en renversant les termes.*

PROPOSITION X.

LA moyenne proportionelle R, entre deux termes M & N, est plus grande que le moindre terme M, & plus petite que le plus grand N.

DEMONSTRATION.

Puisque	$M : R = R : N.$ (Hyp.)	
Il s'ensuit que	$M^2 : R^2$ *ou* $RR : NN = M : N.$	Prop. 7.
Mais	M *est* $<$ N (Hyp.)	
Donc	M^2 *est* $< R^2$ & RR *est* $< NN$	Prop. 16. L. 5.
D'où il suit que	M *est* $<$ R & *que* R *est* $<$ N.	Rem.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Si l'on place entre M *&* R *une autre moyenne proportionelle* Q; M *est* $<$ Q, *&* Q *est* $<$ R. *Et si l'on en place une autre nouvelle* S, *entre* R *&* B, *il suit encore que* R $<$ S *& que*, S *est* $<$ B. *Partant* M $<$ Q, Q $<$ R, R $<$ S, S $<$ N. *c. a. d. les moyennes proportionelles croissent successivement depuis le moindre terme* M, *jusqu'au plus grand* N.

COROLLAIRE II.

Puisqu'on peut prendre une infinité de moyennes proportionelles a, b, c, d, *&c. entre* M *&* N, *il est clair que les termes* M a, b, c, d, *&* N *passeront successivement par tous les dégrés de grandeurs depuis* M *jusqu'à* N.

COROLLAIRE III.

Par conséquent toute grandeur quelconque K $>$ M *&* $<$ N, *sera égale à quelqu'une des moyennes proportionelles* a, b, c, d, *&c. prises entre* M *&* N.

PROPOSITION XI.

Toute raison 1 : K peut être considérée comme une dérivée de quelque primordiale 1 : B (supposant K & B $>$ 1.).

DEMONSTRATION.

D'Abord si K *est* = *à* B, *ou à une des Puissances de* B, *la vérité est manifeste. Puisqu'en ce cas,* K *devient* = *à* B^1 *ou* B^2, *ou* B^3 *&c. Si* K *est* $<$ B, *cette grandeur* K *sera* = *à l'une des moyennes proportionelles* $B^{\frac{n}{m}}$, *qu'on pourra prendre à l'infini entre* 1 *&* B. (Prop. 10. Coroll. 3.) * *Par conséquent la raison* 1 : K *sera* = *à la raison* 1 : $B^{\frac{n}{m}}$. *Mais cette dernière raison, est une raison dérivée de la Primordiale* 1 : B. *Donc aussi en ce cas une raison peut être considérée comme dérivée d'une même Primordiale. Si* K *est* $>$ B, *la gdr.* K *tombera entre deux termes quelconques comme* B^3 *&* B^4, *Par conséquent parmi les moyennes proportionelles de cette raison* B^3 : B^4, ** *il y en aura une* $B^{\frac{x}{y}}$ = *à* K. (Prop. 10. Cor. 3.) *Partant la raison* 1 : K *sera* = *à la raison* 1 : $B^{\frac{x}{y}}$. *Mais cette dernière raison est une dérivée de la Primordiale* 1 : B. (Prop. 8. Coroll. 1.). *Donc la vérité de la proposition est encore manifeste dans ce cas.* C. Q. F. D.

DEFI-

* En prenant 1 & B à la place de les gdrs. M & N du (Coroll. 3. Prop. 10.)

** En prenant B^3 & B^4 au lieu des gdrs M & N du même Coroll.

DEFINITION X.

LA fuite de toutes les raiſons poſſibles, tant directes, que réciproques, conſidérées comme ayant été dérivées d'une même raiſon Primordiale, peut être nommée un SYSTÊME DE RAISONS.

COROLLAIRE.

TOutes les raiſons A : B, C : D *&c. peuvent donc être exprimées, par une même Primordiale* $1 : R$, *tellement que* $A : B = 1 : R^{\frac{m}{n}}$ *&* $C : D = 1 : R^{\frac{x}{y}}$. *Par conſéquent, au lieu de faire les opérations de compoſition, ou de réſolution, ſur les raiſons* A : B, C : D, *&c. on peut les faire ſur leurs égales,* $1 : R^{\frac{m}{n}}$ *&* $1 : R^{\frac{x}{y}}$.

REMARQUE.

LA Primordiale eſt arbitraire, mais auſſitôt qu'on la détermine, tout le Syſtême de raiſons qui en dépend eſt déterminé. Comme chaque raiſon peut être priſe pour Primordiale, il eſt clair qu'on peut imaginer une infinité de ces Syſtêmes.

DEFINITION XI.

LOrſqu'après avoir établi un Syſtême de raiſons, on fait correſpondre à la Primordiale, (1 : R), *une quantité arbitraire quelconque* L; *& qu'enſuite on fait pareillement correſpondre aux autres dérivées (multipliées ou ſousmultipliées &c.) de la Primordiale, d'autres quantités multiples ou ſousmultiples de l'arbitraire* L; *tellement que de quelque manière que les dérivées augmentent ou diminuent, par la voye de la compoſition ou réſolution des raiſons, leurs quantités correſpondantes augmentent ou diminuent pareillement ſelon la compoſition ou réſolution des grandeurs; alors ces quantités, analogues en cette manière aux grandeurs des raiſons, ſont nommées leurs* MESURES, *ou leurs* LOGARITHMES; *Et toute la ſuite de ces Meſures ou Logarithmes appartenant à un même Syſtême de raiſons, s'appelle* UN SYSTÊME DE LOGARITHMES.

COROLLAIRE I.

LEs Logarithmes étant deſtinés à ramener la compoſition & réſolution des raiſons, laquelle s'exécute par la multiplication ou diviſion des termes, à la compoſition & réſolution des grandeurs, qui s'effectuë au moyen de l'addition & de la ſouſtraction: ou bien, le but de l'inſtitution des Logarithmes étant d'indiquer, par leur rapport au Logarithme Primordial, la multiplicité ou ſousmultiplicité de leurs raiſons correſpondantes, relativement à la raiſon Primordiale; il eſt clair, que les raiſons égales doivent avoir des Logarithmes égaux; & qu'en compoſant une raiſon $1 : R^2$ *de deux raiſons égales* $\overline{1 : R} + \overline{1 : R}$, *il faut compoſer ſon Logarithme de deux Logarithmes égaux* 1 L *&* 1 L, *pour avoir le Logarithme* 2 L *de la compo-*

posée $1 : R^2$. *Et que pareillement en resolvant la raison* $1 : R$ *en deux ou plusieurs autres égales p. ex.* $1 : R^{\frac{1}{2}}$ *&* $R^{\frac{1}{2}} : R$, *il faut aussi resoudre son Logarithme* L, *en deux autres égaux*, $\frac{1}{2}L$ *&* $\frac{1}{2}L$, *pour avoir le Logarithme de chacune.*

Et en général, comme l'exposant de multiplicité ou de sousmultiplicité, p. ex. 2 *ou* $\frac{3}{4}$ *d'une raison composée* $1 : R^2$ *ou* $1 : R^{\frac{3}{4}}$ *est multiple ou sous multiple de l'exposant de multiplicité* 1 *de la Primordiale* $1 : R^1$: *ainsi le Logarithme* 2L *ou* $\frac{3}{4}L$ *de la composée, est multiple ou sousmultiple du Logarithme* L *de cette même Primordiale. D'où l'on voit, qu'on trouve les Logarithmes dérivés, en multipliant le Logarithme Primordial* L *par les exposans de multiplicité des raisons dérivées auxquelles ils doivent apartenir.*

COROLLAIRE II.

LE Logarithme Primordial L *étant arbitraire, on peut supposer* $L = +1$. *Et en ce cas les exposans de multiplicité des raisons dérivées deviennent eux mêmes les Logarithmes de ces raisons. Mais si on fait* $L = -1$ *ces mêmes exposans, pris avec leurs signes contraires, se changent en Logarithmes.*

COROLLAIRE III.

LA raison d'égalité $1 : 1$ *ou* $1 : R^0$ *&c.* (Prop. 8. Cor. 8.) *ne produisant ni augmentation, ni diminution dans la composition des raisons, il est de l'ordre analogique de lui assigner Zéro pour Logarithme, attendu que Zéro ajouté ou retranché des grandeurs, n'y produit aucun changement.*

COROLLAIRE IV.

PUis donc que de la composition d'une raison directe $1 : R$ *avec sa réciproque* $R : 1$, *il résulte une raison d'égalité*, $R : R$, *dont le Logarithme est égal à Zéro* (Cor. 3.); *il s'ensuit que leurs Logarithmes doivent avoir des signes contraires, tellement que si celui de la directe* $1 : R$ *est positif, celui de sa réciproque* $R : 1$ *soit négatif, afin que s'entredétruisant il en resulte Zéro, qui est le Logarithme de la raison d'égalité provenue de leur composition.*

D'où l'on voit, que le Logarithme d'une raison réciproque est égal au Logarithme de sa directe pris négativement

C'est-à-dire $\quad Log.\ \overline{R : 1} = -\ Log.\ \overline{1 : R}$

Car puisque $\quad \overline{R : R} = \overline{1 : R} + \overline{R : 1}$ Def. 6.

Il s'ensuit $\quad Log.\ \overline{R : R} = Log.\ \overline{1 : R} + Log.\ \overline{R : 1}$ { Def. 11. Coroll. 1.

Or $\quad Log.\ \overline{R : R} = 0.$

Donc $Log.\ \overline{1 : R} + Log.\ \overline{R : 1} = 0.$ *& ajoutant départ & d'autre* $-\ Log.\ 1 : R$,

On a $\quad Log.\ R : 1 = -\ Log.\ \overline{1 : R}.$ Ax. 2. L. 1.

COROL-

COROLLAIRE V.

LE Logarithme d'une raison composée de directes & de réciproques, est donc l'aggrégat des Logarithmes, soit positifs soit négatifs des composantes.

Par exempl. la raison $\overline{AB : DE} = \overline{A : D} + \overline{B : E}$.

Partant *Log.* $\overline{AB : DE}$ = *Log.* $\overline{A : D}$ + *Log.* $\overline{B : E}$. {Def. 11. Coroll. 1.

Derechef en réduisant la décomposition à l'unité:

Puisque la raison $\overline{AB : DE} = \overline{A : 1} + \overline{B : 1} + \overline{1 : D} + \overline{1 : E}$

Il s'ensuit que Log. $\overline{AB : DE}$ = *Log.* $\overline{A : 1}$ + *Log.* $\overline{B : 1}$ + *Log.* $\overline{1 : D}$ + *Log.* $\overline{1 : E}$. {Def. 11. Cor. 1.

Mais d'autant que les Logarithmes des réciproques sont égaux à ceux de leurs directes pris négativement.

On aura Log. $\overline{1 : D}$ = — *Log.* $\overline{D : 1}$, & *Log.* $\overline{1 : E}$ = — *Log.* $\overline{E : 1}$ Def. 11. Cor. 4.

Par conséquent Log. $\overline{AB : DE}$ = *Log.* $\overline{A : 1}$ + *Log.* $\overline{B : 1}$ — *Log.* $\overline{D : 1}$ — *Log.* $\overline{E : 1}$.

COROLLAIRE. VI.

SI l'on se détermine une fois à donner à une Primordiale de plus grande inégalité R : 1, *& à toutes ses dérivées* $R^2 : 1$, $R^3 : 1$ *&c.* $R^{\frac{1}{2}} : 1$, $R^{\frac{1}{3}} : 1$ *&c. l'unité pour conséquent, les Logarithmes de ces raisons pourront être apellés les Logarithmes des quantités ou nombres* R, R^2; R^3, $R^{\frac{1}{2}}$, $R^{\frac{1}{3}}$ *&c. en supprimant l'unité, leur commun conséquent, comme devant être sous entendu, parce que tout nombre est essentiellement rélatif à l'unité. Par ex. si on suppose que la Primordiale soit la raison de* 10 : 1, *& son Logarithme correspondant* L; *celui de sa doublée* 100 : 1, *sera* 2 L, *& celui de sa triplée* 1000 : 1 *sera* 3 L *&c.* (Def. 11. Coroll. 1.). *On peut donc dire que* 1 L *est le Logarithme de* 10, *que* 2 L *est celui de* 100, *&* 3 L *celui de* 1000 *&c. vû que les nombres* 10, 100, 1000 *&c se rapportent tous à l'unité, & expriment tacitement les raisons de* 10 : 1, 100 : 1, 1000 : 1 *&c.*

Ainsi dans le Systême ordonné de cette manière, le Logarithme d'un nombre quelconque N, *n'est autre chose que le Logarithme de la raison de* N : 1.

REMARQUE.

ON peut choisir une grandeur quelconque L, *d'un genre quelconque, pour être la mesure de la Primordiale, (comme un nombre, une ligne, une surface, un solide &c.) & en dériver les mesures des autres raisons, en restant toujours dans le même Systême & dans le même genre de grandeurs. L'analogie subsiste, pourvû que les mésures soient entr'elles comme les nombres qui expriment la multiplicité des raisons.*

Quand on assigne à la Primordiale pour mesure de sa raison, un nombre toutes les autres mesures deviennent numériques, & prennent proprement le nom de Logarithmes terme: qui veut dire Nombres des Raisons, *en grec* ἀριθμοὶ λόγων.

PROPOSITION XII.

Le Logarithme du Produit f F est égal à la somme des Logarithmes des Facteurs f & F.

DEMONSTRATION.

Le Logarithme du Produit f F *est proprement celui de la raison* $fF : 1$.
Mais cette raison est composée de la raison $\overline{f : 1}$ & $F : 1$.

c. a. d. $\overline{fF : 1} = \overline{f : 1} + \overline{F : 1}$. Def. 6.

Partant les Logarithmes reduisant la composition des raisons à celle des grandeurs,

Il s'ensuit que $Log.\ \overline{fF : 1} = Log.\ \overline{f : 1} + Log.\ \overline{F : 1}$. Def. 11. Coroll. 1.

Or l'unité étant sousentendue comme conséquent, en prononcent les nombres, on peut la supprimer.

Partant $Log.\ fF = Log.\ f + Log.\ F$. Def. 11. Coroll. 6.

C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

Le Logarithme du quotient $\frac{M}{N}$ est égal au Logarithme du Dividende moins le Logarithme du Diviseur.

DEMONSTRATION.

Le Logarithme du nombre $\frac{M}{N}$ *est proprement le Logarithme de la raison*

$$\overline{\tfrac{M}{N} : 1} = \overline{M : N}.$$ Def. 2.

Or cette raison est composée de la raison $M : 1$ *& de la raison* $1 : N$

c. à. d. $\overline{\tfrac{M}{N} : 1} = \overline{M : 1} + \overline{1 : N}$, Def. 6.

Par conséquent les Logarithmes représentant la composition des raisons par celle des grandeurs; (Def. 11. Coroll. 1.)

Il suit que le $Log.\ \overline{\tfrac{M}{N} : 1}$ *ou* $Log.\ \overline{M : N} = Log.\ \overline{M : 1} + Log.\ \overline{1 : N}$

Mais le $Log.\ \overline{1 : N}$ *est* $= -\ Log.\ \overline{N : 1}$ (Def. 11. Coroll. 4.)

Partant le $Log.\ \overline{\tfrac{M}{N} : 1} = Log.\ \overline{M : 1} - Log.\ \overline{N : 1}$,

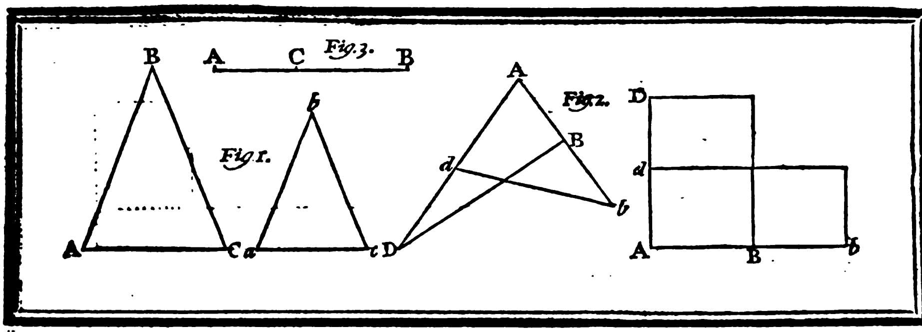
Et en supprimant les unités qui sont les conséquens,

On aura $Log.\ \frac{M}{N} = Log.\ M - Log.\ N$. Def. 11. Cor. 5.

C. Q. F. D.

Une explication plus détaillée des adreſſes de calcul rélatives à la Logarithmo-technie, *ou conſtruction de la Table des Logarithmes, n'entre pas dans le Plan que nous nous ſommes propoſés de ſuivre: les Commençans trouveront ce détail dans tous les Auteurs, & il n'auront pas de peine à l'entendre & à acquérir la pratique du calcul Logarithmique, pour peu qu'ils ſe ſoient rendu familiers avec les principes que nous venons d'établir.*

LES
ELEMENS D'EUCLIDE,
LIVRE SIXIÈME.



DEFINITIONS.

I.

ON nomme *figures semblables* (Fig. 1.) celles (ABC, abc), qui ont les angles (A, B, C, & a, b, c,) égaux chacun a chacun, & les côtés (AB, AC, BC & ab, ac, bc,) comprenant ces angles égaux proportionels (c. à. d. AB : AC = ab : ac, item AB : BC = ab : bc, & AC : BC = ac : bc).

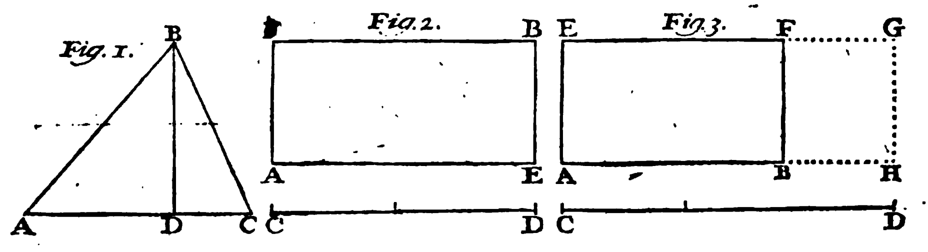
II.

LEs figures (DAB, dAb) sont réciproques (Fig. 2.) quand les antécédens (AD, Ab) & les conséquens (Ad, AB) des raisons se trouvent dans l'une & l'autre figure (c. à. d. AD : Ad = Ab : AB).

Ou les figures (DAB, dAb) *sont* réciproques; *quand les deux côtés* (AD, AB & Ad, Ab) *dans chacune de ces figures, environnant un même angle* (A) *ou des angles égaux, deviennent les extrêmes ou les moyens* (Voy. Def. 9. §. 1. L. 5.) *d'une même proportion* (*c. à. d. si* AD: Ad=Ab:AB).

III.

UNe ligne droite (AB) est dite être divisée *en moyenne & extrême raison*, (Fig. 3.) quand la droite entière (AB) est à la plus grande partie (BC), comme cette plus grande partie (BC) est à la plus petite (AC).



DEFINITIONS.

IV.

LA *hauteur d'une figure* (ABC) (Fig. 1.) est la perpendiculaire (BD) abaissée du sommet (B) sur la base (AC).

REMARQUE.

IL suit de cette Définition que si deux figures, placées sur une même droite, ont la même hauteur, elles seront aussi entre les mêmes Paralèles; puisque par la nature des Parallèles les perpendiculaires abaissées de l'une à l'autre sont toujours égales.

V.

U*Ne raison* (AB.BC.CD:DE.EF.FG) *est composée de plusieurs autres* ($\overline{AB:DE}$ + $\overline{BC:EF}$ + $\overline{CD:FG}$), lorsque ses termes résultent de la multiplication des termes de ces raisons composantes (*Voy. Def. 6. de l'Append.*).

VI.

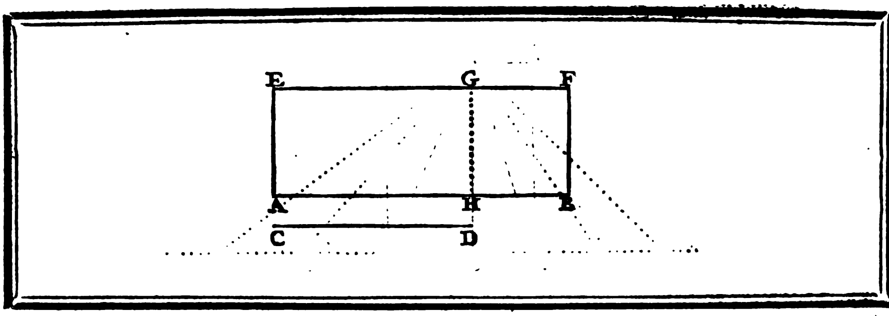
ON dit qu'*un Parallélogramme* (AB) (Fig. 2.) *est appliqué à quelque ligne droite* (CD), quand il a pour base ou pour coté cette ligne droite proposée (CD).

VII.

U*N Parallélogramme défaillant* (AF) (Fig. 3.) est celui dont la base (AB) est plus petite que la ligne proposée (CD) à laquelle il est dit être appliqué.

VIII.

MAis *le défaut d'un Parallélogramme défaillant* (AF) (Fig. 3.) est un Parallélogramme (BG) compris du reste de la droite proposée (CD) & de l'autre côté (BF) du Parallélogramme défaillant.



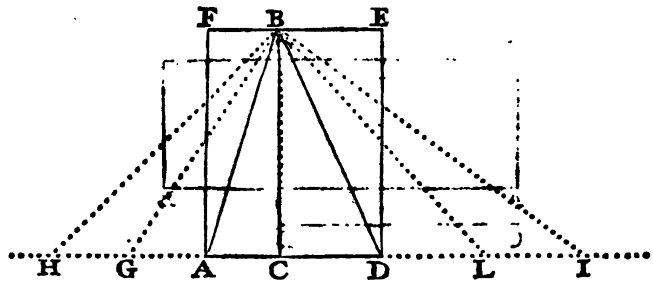
DEFINITIONS.

IX.

Un *Parallélogramme excédant* (AF) est celui dont la base (AB) est plus grande que la ligne proposée (CD), à laquelle il est dit être appliqué.

X.

Et *l'excès d'un Parallélogramme excédant* (AF) est un Parallélogramme (HF) compris du surplus, dont la base AB surpasse la droite proposée (CD), & de l'autre côté (BF) du Parallélogramme excédant.



PROPOSITION I. THEOREME I.

LES Triangles (ABC, CBD) & les Parallélogrammes (CF, CE), qui ont la même hauteur, sont entr'eux en raison de leurs bases (AC, CD).

Hypothese.	These.
Les △ ABC, CBD & les Pgmes CF, CE ont la même hauteur.	*I. Le △ ABC : △ CBD = AC : CD.* *II. Le Pgme CF : Pgme CE = AC : CD.*

Préparation.

1. Prolongez AD indéfiniment en H & en I. Dem. 1. L. 1.
2. Faites AG = AC = GH, item DL = CD = LI. Prop. 3. L. 1.
3. Tirez BG, BH, BL, BI. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les △ ABC, GBA, HBG sont sur des bases égales AC, AG, GH (*Prep.* 2) & entre les mêmes Plles HI, FE (Hyp. & Def. 35. L. 1. & Rem. Def. 4. L. 6.)

1. Ces △ sont = entr'eux. Prop. 38. L. 1.
2. D'où il suit que le △ HBC & la base HC sont des équimult. du △ ABC & de la base AC.

On démontrera par un raisonnement semblable, que

3. Le △ CBI & la base CI sont des équimult. du △ CBD & de la base CD.
4. Par conséquent les gdrs HBC & HC sont equimult. des gdrs ABC & AC (*Arg.* 2), & les gdrs CBI & CI sont d'autres équimult. des gdrs CBD & CD (*Arg* 3).

Or si le △ HBC est >, =, ou < le △ CBI, la base HC est aussi >, =, ou < la base CI. (Prop. 38. L. 1.)

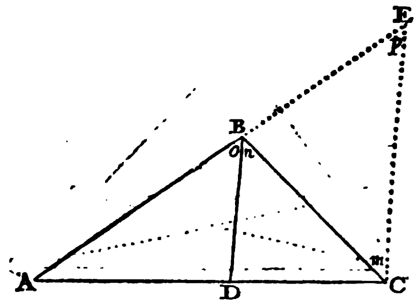
5. Partant le △ ABC : △ CBD = AC : CD. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Mais les △ ACB, CBD étant les moitiés des Pgmes CF, CE (*Prop.* 41. *L.* 1),

5. Il s'ensuit que △ ACB : △ CBD = Pgme CF : Pgme CE. Prop. 15. L. 5.
6. C'est pourquoi le Pgme CF : Pgme CE = AC : CD. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION III. THEOREME III.

SI l'angle (B) d'un triangle (ABC) eſt partagé en deux également par une ligne droite (BD) qui coupe la baſe du triangle en (D), les ſegmens de la baſe (AD, DC) ſeront proportionels aux deux côtés (AB, BC) du triangle. Et réciproquement, ſi les ſegmens de la baſe (AD, DC) ſont proportionels aux deux côtés (AB, BC) du triangle (ABC), la ligne droite (BD) tirée du ſommet (B) du triangle au point de ſection (D), coupera auſſi l'angle au ſommet (ABC) en deux également.

HYPOTHESE.	THESE.
La droite BD coupe ∀ ABC en deux également ou ∀ o = ∀ n.	*AD : DC = AB : BC.*

Préparation.

1. Par le point C tirez CE Plle à DB. — Prop. 31. L. 1.
2. Prolongez AB juſqu'à ce qu'elle rencontre CE en E. — Dem. 2. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

PUiſque les droites DB, CE ſont Plles (*Prep.* 1);

1. Il s'enſuit que AD : DC = AB : BE. — Prop. 2. L. 6.
2. Et que ∀ *n* = à ∀ *m*, & ∀ *o* = ∀ *p*. — Prop. 29. L. 1.
   Mais, ∀ *o* étant = à ∀ *n* (*Hyp*).
3. L'angle *m* eſt auſſi = à ∀ *p*, & BC = à BE. — {Ax. 1. L. 1. Prop. 6. L. 1.
4. C'eſt pourquoi AD : DC = ou AB : BC — Pr. 7. & 11. L. 5.

C. Q. F. D.

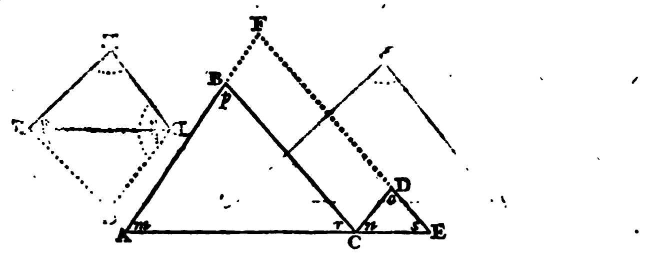
HYPOTHESE.	THESE.
AD : DC = AB : BC.	*La droite BD coupe ∀ ABC en deux également ou ∀ o = ∀ n.*

II. DEMONSTRATION.

PUiſque les droites DB, CE ſont Plles (*Prep.* 1),

1. Il s'enſuit que AD : DC = AB : BE. — Prop. 2. L. 6.
   Mais AD : DC = AB : BC (*Hyp.*);
2. C'eſt pourquoi AB : BE = AB : BC. — Prop. 11. L. 5.
3. Par conſequent, BE eſt = BC, & ∀ *m* = ∀ *p*. — {Prop. 9. L. 5. Prop. 5. L. 1.
   Mais ∀ *m* eſt auſſi = à ∀ *n*, & ∀ *p* = à ∀ *o* (*Prop.* 29. *L.* 1).
4. Partant ∀ *n* eſt = à ∀ *o*, ou la droite BD coupe ∀ ABC en deux également. — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME IV.

LEs triangles équiangles (ABC, CDE) ont les côtés (AC, AB & CE, CD &c), qui comprennent des angles égaux (*m* & *n* &c), proportionels; & les côtés (AB, CD &c) opposés aux angles égaux (*r* & *s* &c), sont homologues.

HYPOTHESE.	THESE.
Les △ ABC, CDE sont équiangles;	I. { AB : AC = CD :
ou ∀ m = à ∀ n, ∀ r = à ∀ s,	AC : BC = CE : DE.
& ∀ p = à ∀ o.	AB : BC = CD : DE.
	II. *Les côtés* { AB, CD / AC, CE / BC, DE } *opposés aux ∀ égaux, sont homologues.*

Préparation.

1. Placez les △ ABC, CDE, ensorte que les bases AC, CE se rencontrent directement.
2. Prolongez les côtés AB, DE indéfiniment en F. Dem. 2. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les ∀ *m* + *r* du △ ABC sont < 2 ∟ (*Prop.* 17. *L.* 1), & que ∀ *r* est =

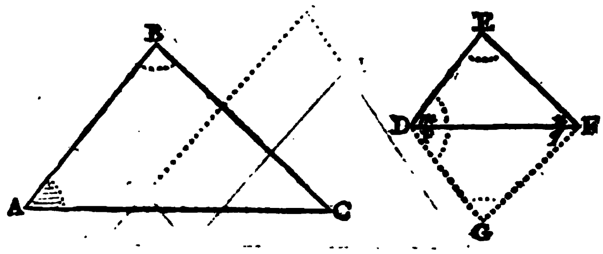
1. Les ∀ *m* + *s* sont aussi < 2 ∟, & AB, DE se rencontreront quelque part en F. { Prop. 27. L. 1. Rem.
   Mais ∀ *m* étant = à ∀ *n* & ∀ *r* = à ∀ *s* (*Hyp.*),
2. Les droites AF, CD item BC, FE sont Plles, Prop. 28. L. 1.
3. Et le quadrilatère CF est un Pgme. Def. 35. L. 1.
4. Partant les côtés opposés BC, FD; item CD, BF sont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
   Or BC étant Plle au côté FE du △ FAE (*Arg.* 2),
5. Donc AB : BF = AC : CE. Prop. 2. L. 6.
6. Ou alternando AB : AC = BF : CE. Prop. 16. L. 5.
7. Ou bien AB : AC = CD : CE; parceque CD est = à BF (*Arg.* 4). Prop. 7. L. 5.
   Pareillement CD étant Plle au côté AF du △ FEA, on prouvera de même
8. Que AC : BC = CE : DE.
9. Parconséquent AB : BC = CD : DE. Prop. 22. L. 5.

C. Q. F. D. I.

   Or les côtés AB, CD, item AC, CE & BC, DE, sont opposés aux ∀ égaux *r* & *s*, item *p* & *o*, & *m* & *n*.
10. Partant les côtés AB, CD; AC, CE; BC, DE opposés aux ∀ égaux, sont homologues. Def. 12. L. 5.

C. Q. F. D. II.

Coroll. *Les triangles équiangles sont donc aussi semblables.* (Def. 1. L. 6).



PROPOSITION V. THEOREME V.

Si deux triangles (ABC, DEF) ont les côtés proportionels, ces triangles seront équiangles; & les angles (A & m, C & n &c) opposés aux côtés homologues, (BC, EF & AB, DE &c) seront égaux entr'eux.

Hypothese.

Les △ ABC, DEF ont les côtés proportionels, c. à. d.

I. { *AB : AC = DE : DF.*
AB : BC = DE : EF.
AC : BC = DF : EF. }

II. *Les côtés BC, EF, AB, DE, AC, DF sont homologues.*

These.

I. *Les △ ABC, DEF sont équiangles.*

II. *Les ∀ opposés aux côtés homologues sont égaux; ou ∀ A = à ∀ m, ∀ C = à ∀ n, & ∀ B = à ∀ E.*

Préparation.

1. Faites sur la droite DF au point D, ∀ p = à ∀ A; Et au point F, ∀ q = à ∀ C. Prop. 23. L. 1.
2. Prolongez les côtés DG, FG jusques à ce qu'ils se rencontrent en G. { Prop. 27. L. 1. Rem.

Demonstration.

Puisque dans les △ équiangles ABC, DGF, (*Prep.* 1. & *Prop.* 32. *L.* 1), & specialement ∀ C = ∀ q & ∀ B = ∀ G.

1. AB : AC = DG : DF. Prop. 4. L. 6.

Mais AB : AC = DE : DF (*Hyp.* 1);

2. Donc DG : DF = DE : DF. Et DG est = à DE. { Prop. 11. L. 5. P. p. 9. L. 5.

Par un même raisonnement on prouvera que

3. La droite GF est = à EF.

Puis donc que dans les deux △ DEF, DGF les deux côtés DE, EF sont = aux deux côtés DG, GF (*Arg.* 2 & 3), & que la base DF est commune aux deux △,

4. Les ∀ n & m sont = aux ∀ a & p chacun à chacun,
5. Et les △ DEF, DGF sont équiangles. } Prop. 8. L. 1.

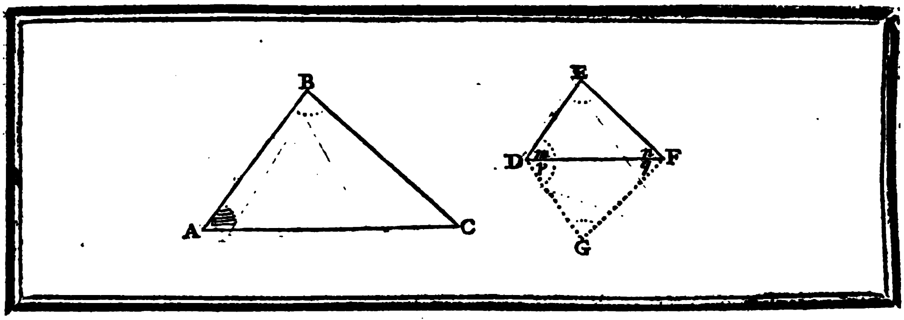
Mais le △ DGF est équiangle au △ ABC (*Prep.* 1 & *Prop.* 32. *L.* 1);

6. Il s'ensuit donc que les △ ABC, DEF seront aussi équiangles. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D. I.

7. De plus, les ∀ A, C, & B opposés aux côtés BC, AB, AC, étant égaux chacun à chacun aux ∀ m, n & E opposés aux côtés EF, DE, DF; homologues aux côtés BC, AB, AC chacun à chacun, parceque les uns & les autres de ces ∀, sont egaux chacun à chacun aux ∀ p, q, G (*Prep.* 1. *Prop.* 32. L. 1 & *Arg.* 4);
8. Il s'ensuit, que les ∀ A, m; item C, n; & B, E opposés aux côtés homologues sont égaux. C. Q. F. D. II.

Coroll. *Ces triangles sont donc aussi semblables* (Def. 1. L. 6.).



PROPOSITION VI. THEOREME VI.

Si deux triangles (ABC, DEF) ont un angle (A) égal à un angle (m), & les côtés (BA, AC & ED, DF), qui comprennent ces angles, proportionels: les triangles sont équiangles; & les angles (C & n item B & E) opposés aux côtés homologues, (BA, ED item AC, DF) sont égaux entr'eux.

Hypothese.	These.
I. ∀ A = à ∀ m.	*I. Les △ ABC, DEF sont équiangles.*
II. BA : AC = ED : DF.	*II. Les ∀ C & n, item les ∀ B & E*
III. BA, ED; AC, DF sont homologues.	*sont = entr'eux.*

Préparation.

1. Faites sur la droite DF au point D, ∀ p = à ∀ A, ou = à ∀ m, & au point F, ∀ q = à ∀ C. — Prop. 23. L. 1.
2. Prolongez les côtés DG, FG jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en G. — {Prop. 27. L. 1. Rem.}

Demonstration.

Puisque les △ ABC, DGF sont équiangles (*Prep.* 1. & *Prop.* 32. *L.* 1), & specialement ∀ C = ∀ q & ∀ B = ∀ G.

1. BA : AC = GD : DF. — Prop. 4. L. 6.

Or BA : AC = ED : DF (*Hyp.* 2),

2. C'est pourquoi GD : DF = ED : DF. — Prop. 11. L. 5.
3. D'où il suit que GD est = à ED. — Prop. 9. L. 5.

Les deux △ DEF, DGF ayant donc deux côtés ED, DF = à deux côtés GD, DF (*Arg.* 3) & ∀ compris m = à ∀ compris p (*Prep.* 1),

4. Les deux autres ∀ n & q item E & G sont = entr'eux, & ces deux △ DEF, DGF sont equiangles. — Prop. 4. L. 1.

Mais les △ ABC, DGF étant aussi équiangles (*Prep.* 1 & *Prop.* 32. *L.* 1),

5. Il suit que les △ ABC, DEF sont équiangles — Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D. 1.

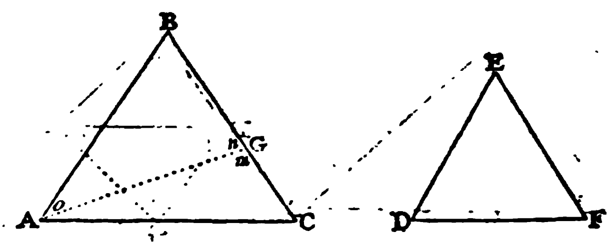
De plus, chacun des angles C & n étant = à ∀ q (*Prep.* 1 & *Arg.* 4),

6. L'angle C est = à ∀ n. — Ax. 1. L. 1.
7. Partant, ∀ A étant = à ∀ m (*Hyp.* 1), l'angle B est aussi = à ∀ E. — Prop. 32. L. 1.

Et les côtés BA, ED & AC, DF opposés à ces angles, étant homologues (*Hyp.* 3. & *Def.* 12. *L.* 5),

8. Il s'ensuit que les ∀ C & n, item B & E opposés à ces côtés homologues, sont = entr'eux. — C. Q. F. D. II.

Coroll. *Ces triangles sont donc aussi semblables entr'eux* (Prop. 4. L. 6. Coroll.).



PROPOSITION VII. THEOREME VII.

Si deux triangles (ABC, DEF) ont un angle (B) égal à un angle (E), & les côtés (BA, AC & ED, DF) qui comprennent deux autres angles (A & D), proportionels; les angles restans (C & F) étant l'un & l'autre, ou aigus, ou obtus, les triangles seront équiangles, & les angles (A & D) autour desquels les côtés sont proportionels seront égaux entr'eux.

Hypothese.

I. ∀ B est = à ∀ E.
II. BA : AC = ED : DF.
III. Les ∀ C & F sont l'un & l'autre, ou aigus, ou obtus.

These.

Les △ ABC, DEF sont équiangles, & les ∀ BAC & D sont = entr'eux.

Demonstration.

Sinon les ∀ BAC & D sont inégaux; & l'un comme BAC est > l'autre D.

Préparation.

Faites donc sur AB, au point A, ∀ *o* = à ∀ D. Prop. 23. L. 1.

C A S I. Si les ∀ C & F sont l'un & l'autre aigus.

Puis donc que ∀ *o* est = à ∀ D (*Prep.*) & ∀ B = à ∀ E (*Hyp.* 1),

1. Il s'ensuit que ∀ *n* est = à ∀ F; & que les △ ABG, DEF sont équiangles. Prop. 32. L. 1.
2. Partant BA : AG = ED : DF. Prop. 4. L. 6.
   Mais BA : AC = ED : DF (*Hyp.* 2),
3. Par conséquent BA : AG = BA : AC; Prop. 11. L. 5.
4. D'où il suit que AG est = à AC. Prop. 9. L. 5.
5. C'est pourquoi ∀ C est = à ∀ *m*. Prop. 5. L. 1.
   Et à cause que dans ce Cas ∀ C est < L,
6. L'angle *m* sera aussi < L; & ∀ *n* qui lui est contigu > L, Prop. 13. L. 1.
   Mais cet ∀ *n* étant = à ∀ F (*Arg.* 1), qui est dans ce Cas < L,
7. Ce même ∀ *n* seroit aussi < L; ce qui est impossible.
8. Les ∀ BAC & D sont donc = entr'eux, & le troisième ∀ C est = à ∀ F; ou les △ ABC, DEF sont équiangles. Prop. 32. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS II. Si les $\angle$ C & F sont l'un & l'autre obtus.

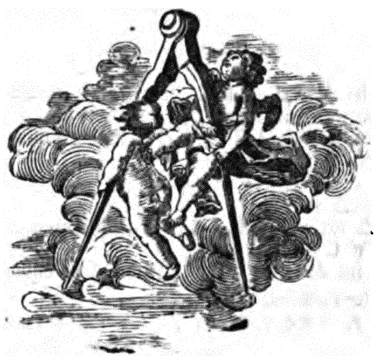
Par le même raisonnement (*Arg.* 1. *jusqu'à* 5) du premier Cas, on prouvera que
1. L'angle C est $=$ à $\angle$ *m*.
2. Donc $\angle$ *m* est aussi $>$ L, & les $\angle$ C $+$ *m* feront $>$ 2 L ; ce qui est impossible. Prop. 17. L. 1.
3. Partant, les $\angle$ BAC & D sont $=$ entr'eux, & le troisième $\angle$ C est $=$ à $\angle$ F, ou les $\triangle$ ABC, DEF sont équiangles. Prop. 32. L. 1.

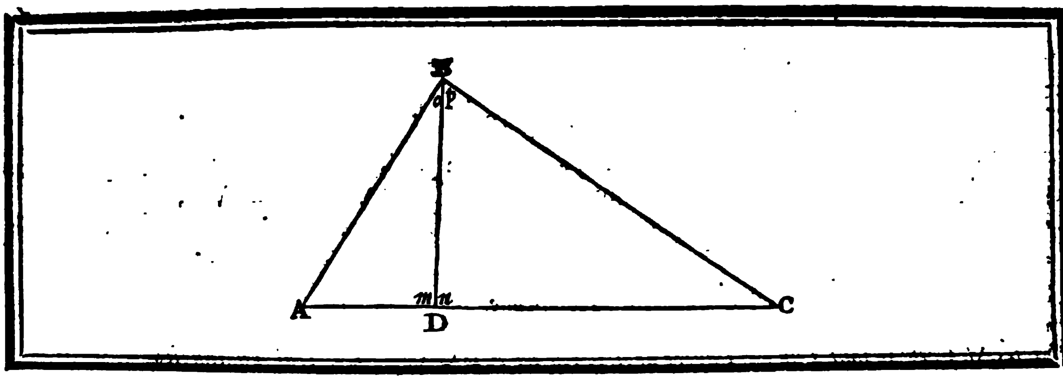
C. Q. F. D.

Remarque.

S*i les* $\angle$ C & F *sont l'un & l'autre droits*, les $\triangle$ ABC & DEF *sont équiangles* (*Hyp.* 1 & *Prop.* 32. *L.* 2).

Coroll. *Ces sortes de triangles sont donc aussi semblables entr'eux* (Prop. 4. L. 6. Coroll.).





PROPOSITION VIII. THEOREME VIII.

SI de l'angle droit (ABC) d'un triangle rectangle (ABC) on abaisse sur l'hypothenuse (AC) une perpendiculaire (BD): elle partagera ce triangle en deux autres (ADB, BDC) semblables entr'eux, & semblables au triangle total (ABC).

HYPOTHESE.	THESE.
I. Le △ ABC est Rgle en B.	*Les △ ADB, BDC sont semblables entr'eux,*
II. BD est ⊥ sur AC.	*& chacun est aussi semblable au △ total ABC.*

DEMONSTRATION.

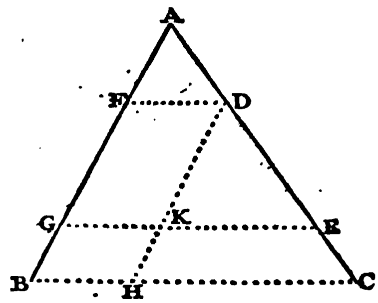
PUisque dans les deux △ Rgles ADB, ABC, l'angle *m* est = à ∀ ABC (*Ax.* 10. *L.* 1), & ∀ A commun aux deux △,

1. L'angle *o* est = à ∀ C, & les deux △ ABC, ADB sont équiangles. — Prop. 31. L. 1.
2. Partant ces deux △ sont aussi semblables. — Prop. 4. L. 6. Coroll.
   On démontrera par un même raisonnement, que
3. Le △ BDC est semblable au △ ABC.
   De même, dans les deux △ Rgles ADB, BDC l'angle *m* étant = à ∀ *n* (*Ax.* 10. *L.* 1), & ∀ *o* = à ∀ C (*Arg.* 1),
4. L'angle A est = à ∀ *p*, & les deux △ ADB, BDC sont équiangles. — Prop. 32. L. 1.
5. D'où il suit que ces △ sont semblables. — Prop. 4. L. 6. Coroll.
6. La ⊥ BD partage donc le △ ABC en deux △ ADB, BDC semblables entr'eux (*Arg.* 5), & semblables chacun au △ total ABC (*Arg.* 2 & 3).

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

IL est manifeste que cette perpendiculaire BD, abaissée du sommet de l'angle droit sur la base, est une moyenne proportionelle entre les deux segmens AD & DC de cette base; car les triangles ADB, BDC étant équiangles, on aura AD : DB = DB : DC (*Prop.* 4. *L.* 6). De même, chaque côté AB ou BC du triangle ABC est une moyenne proportionelle entre la base AC & le segment AD ou DC adjacent à ce côté. Car puisque chacun des triangles ADB, BDC est équiangle au △ total ABC, on aura AC : AB = AB : AD, & AC : BC = BC : DC (*Prop.* 4. *L.* 6).



PROPOSITION X. *PROBLEME II.*

Couper une droite donnée entière (AB), semblablement à une droite donnée (AC) coupée en tant de points (D, E &c) que l'on voudra.

Donnée.

I. La droite entière AB,
II. Et la droite AC coupée aux points D & E &c.

Cherchée.

Couper AB semblablement à AC aux points F & G, ensorte que AF : FG = AD : DE & que FG : GB = DE : EC.

Résolution.

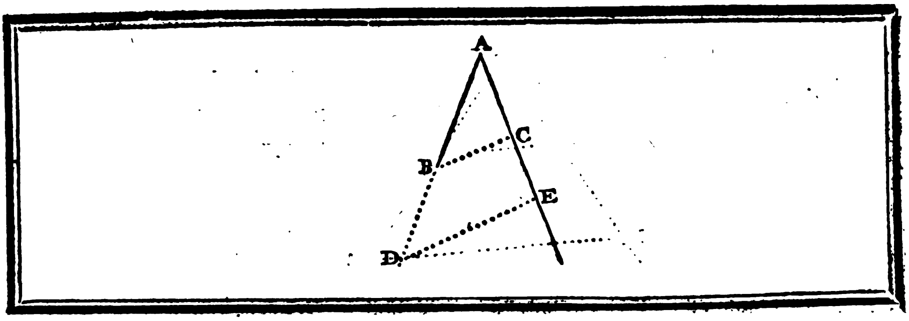
1. Joignez les droites données AB, AC sous un angle quelconque BAC. Dem. 1. L. 1.
2. Tirez CB, & des points D & E, les droites DF, EG Plles à CB, item DH Plle à AB. Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

Puisque DF est Plle au côté EG du △ AGE (*Ref.* 2. & *Prop.* 30. *L.* 1), & KE Plle au côté HC du △ DHC (*Ref.* 2),

1. AF : FG = AD : DE
Et DK : KH = DE : EC. Prop. 7. L. 6.
Mais les figures KF, HG étant des Pgmes (*Ref.* 2. & *Def.* 35. *L.* 1).
2. Il s'ensuit que FG est = à DK, & GB = KH. Prop. 34. L. 1.
3. Donc FG : GB = DE : EC. Pr. 7 & 11 L. 5.
4. Partant la droite donnée AB est coupée semblablement à AC aux points F & G; ensorte que AF : FG = AD : DE & FG : GB = DE : EC.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XI. *PROBLEME III.*

TRouver une troisième proportionelle (CE) à deux lignes droites données (AB, AC).

Donnee.

Les deux droites AB, AC.

Cherchee.

La droite CE, troisième proportionelle aux deux droites AB, AC, c. à d. telle que AB : AC = AC : CE.

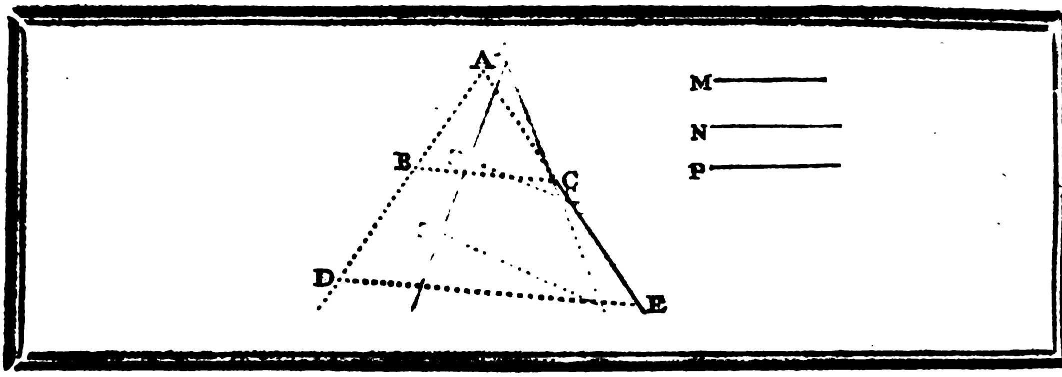
Résolution.

1. Joignez les deux droites AB, AC, en un V quelconque BAC.
2. Prolongez les, & faites BD = AC. — Prop. 3. L. 1.
3. Joignez BC, — Dem. 1. L. 1.
4. Et par l'extrémité D de la droite AD, tirez DE Plle à BC. — Prop. 31. L. 1.

Demonstration.

PUis donc que	BC est Plle à DE (*Ref.* 4),	
1.	AB : BD = AC : CE.	Prop. 2. L. 6.
Mais	BD est = à AC (*Ref.* 2);	
2. Partant	AB : AC = AC : CE.	Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XII. *PROBLEME IV.*

TRouver une quatriéme proportionelle (CE) à trois lignes droites données (M, N, P).

Donnée.	Cherchée.
Les trois droites M, N, P.	*La droite CE, quatrième proportionelle à M, N, P, c. à. d. telle que M : N = P : CE.*

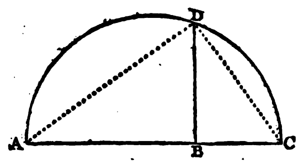
Résolution.

1. Menez les deux droites AD, AE, formant un ∠ quelconque DAE.	Prop. 3. L. 1.
2. Faites AB = M; BD = N; AC = P.	Dem. 1. L. 1.
3. Joignez BC.	
4. Par l'extrêmité D de la droite AD, tirez DE Plle à BC.	Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

	PUis donc que BC est Plle à DE (*Ref.* 4),	
1.	AB : BD = AC : CE,	Prop. 2. L. 6.
Or	AB = M, BD = N, & AC = P (*Ref.* 2);	
2. Partant	M : N = P : CE.	Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII. PROBLEME V.

TRouver une moyenne proportionelle (BD); entre deux lignes droites données (AB, BC).

DONNEE.
Les deux droites AB, BC.

CHERCHEE.
La droite BD, moyenne proportionelle entre AB & BC, i. à. d. telle que AB : BD = BD : BC.

Résolution.

1. Joignez les deux droites AB, BC en une même droite AC.
2. Décrivez sur AC le demi ⊙ ADC. Dem. 3. L. 1.
3. Sur AC, au point B, élevez la ⊥ BD, jusqu'à la ○ en D. Prop. 11. L. 1.

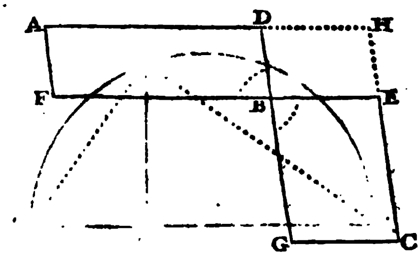
Préparation.

Joignez AD, & CD. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUis donc que ∀ ADC se trouve dans un demi cercle (*Ref.* 2, & *Prep.*).
1. C'est un angle droit. Prop. 31. L. 3.
3. C'est pourquoi le △ ADC est rectangle en D, & BD est une ⊥ abaissée du sommet D de l'angle droit, à la base AC (*Ref.* 3).
3. Par conséquent AB : BD = BD : BC. Prop. 8. L. 6. Coroll.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIV. THEOREME IX.

DAns les Parallélogrammes égaux (AB, BC), qui ont un angle (FBD) égal à un angle (GBE), les côtés (FB, BD & GB, BE), alentour de ces angles égaux, sont réciproquement proportionels (c. à. d. FB : BE = GB : BD). Et les Parallélogrammes, qui ont un angle (FBD) égal à un angle (GBE) & les côtés (FB, BD & GB, BE), alentour de ces angles égaux, réciproquement proportionels, sont égaux.

Hypothese.	These.
I. Le Pgr AB est = au Pgr BC.	*FB : BE = GB : BD.*
II. ∀ FBD est = à ∀ GBE.	

Préparation.

1. Disposez les deux Pgrs AB, BC, tellement que les côtés FB, BE ne forment qu'une même ligne droite FE.
2. Achevez le Pgr DE. — Dem. 2. L. 1.

I. Demonstration.

PUisque les ∀ FBD, GBE sont égaux (*Hyp.* 2); & que les droites FB, BE ne forment qu'une même droite FE (*Prep.* 1).

1. Les droites GB, BD ne forment aussi qu'une même droite GD. — Prop. 14. L. 1.
Mais le Pgr AB étant = au Pgr BC (*Hyp.* 1).
2. Le Pgr AB : Pgr DE = Pgr BC : Pgr DE. — Prop. 7. L. 5.
Or les Pgrs AB, DE item BC, DE ont la même hauteur (*Prep.* 2. *Arg.* 1 & *Def.* 4. *L. 6. Rem.*).
3. C'est pourquoi le Pgr AB : Pgr DE = FB : BE }
& le Pgr BC : Pgr DE = GB : BD } — Prop. 1. L. 6.
4. Partant FB : BE = GB : BD (*Arg.* 2). — Prop. 11. L. 5.

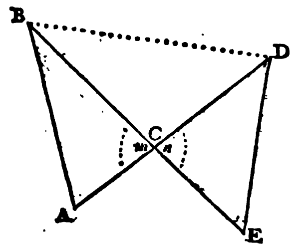
C. Q. F. D.

Hypothese.	These.
I. FB : BE = GB : BD.	*Le Pgr AB est = au Pgr BC.*
II. ∀ FBD est = à ∀ GBE.	

II. Demonstration.

1. **O**N démontrera comme auparavant que les droites GB, BD ne forment qu'une même droite GD.
Or les Pgrs AB, DE item BC, DE ont la même hauteur (*Prep.* 2. *Arg.* 1 & *Def.* 4. *L. 6. Rem.*).
2. Partant le Pgr AB : Pgr DE = FB : BE. }
& le Pgr BC : Pgr DE = GB : BD. } — Prop. 1. L. 6.
Or FB : BE = GB : BD (*Hyp.* 1).
3. C'est pourquoi le Pgr AB : Pgr DE = Pgr BC : Pgr DE. — Prop. 11. L. 5.
4. Partant le Pgr AB est = au Pgr BC. — Prop. 9. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. *THEOREME X.*

Si deux triangles égaux (ACB, ECD) ont un angle (*m*) égal à un angle (*n*): les côtés (AC, CB, & EC, CD), alentour de ces angles égaux, sont réciproquement proportionels. Et si deux triangles (ACB, ECD) ont un angle (*m*) égal à un angle (*n*), & les côtés (AC, CB, & EC, CD), alentour de ces angles égaux, réciproquement proportionels, ces triangles sont égaux.

CAS I.

Hypothese.

I. Le △ ACB est = au △ ECD.
II. ∀ m est = à ∀ n.

These.

Les côtés AC, CB, & EC, CD, sont réciproquement proportionels, ou AC : CD = EC : CB.

Préparation.

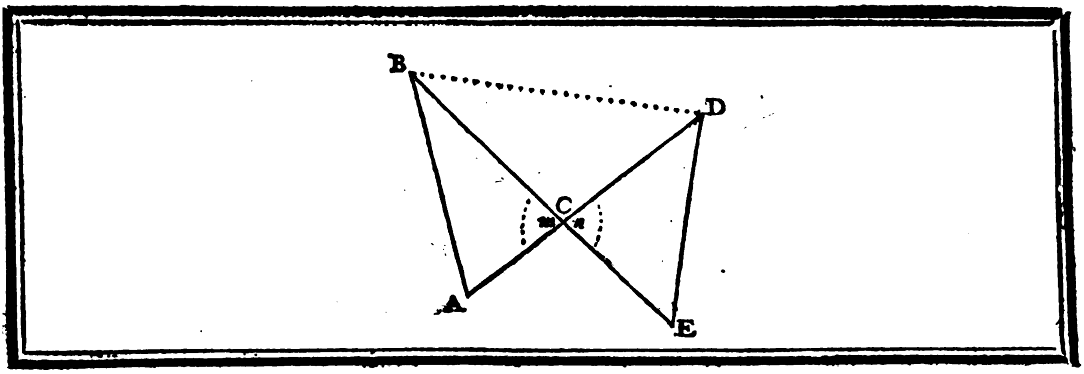
1. Disposez les deux △ ACB, ECD, ensorte que les côtés AC, CD, ne forment qu'une même droite AD.
2. Tirez la droite BD. Dem. 1. L. 1.

Demonstration.

Puisque ∀ *m* = ∀ *n* (*Hyp.* 2), & que les droites AC, CD, ne forment qu'une même droite AD (*Prep.* 1),

1. Les lignes EC, CB, ne formeront aussi qu'une même droite EB. Prop. 14. L. 1.
Mais le △ ACB étant = au △ ECD (*Hyp.* 1),
2. Le △ ACB : △ CBD = △ ECD : △ CBD. Prop. 7. L. 5.
Or les △ ACB, CBD, item ECD, CBD, ont la même hauteur (*Prep.* 2 *Arg.* 1 & *Def. L. 6. Rem.*);
3. C'est pourquoi le △ ACB : △ CBD = AC : CD.
& le △ ECD : △ CBD = EC : CB. } P. 1 L. 6.
4. Partant AC : CD = EC : CB. (*Arg.* 2 & *Prop.* 11. *L.* 5.)

C. Q. F. D.



CAS II.

HYPOTHESE

I. AC : CD = EC : CB.
II. Et ∀ m = à ∀ n.

THESE.

Le △ ACB, est = au △ ECD.

Préparation.

1. Disposez les deux △ ACB, ECD, ensorte que les côtés AC, CD ne forment qu'une même droite AD.
2. Tirez la droite BD.

DEMONSTRATION.

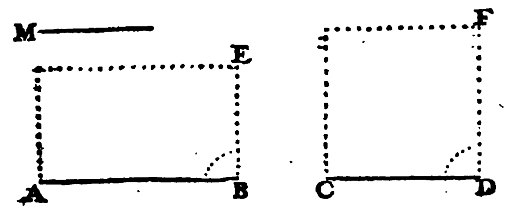
1. ON démontrera, comme dans le premier Cas, que EC, CB ne forment qu'une même droite EB.
Et puisque les △ ACB, CBD, item les △ ECD, CBD, ont la même hauteur (*Prep.* 2 *Arg.* 1. & *Def.* 4. *L.* 6 *Rem.*).

2. Le △ ACB : △ CBD = AC : CD,
De même le △ ECD : △ CBD = EC : CB. } Prop. 1. L. 6.
Or AC : CD = EC : CB (*Hyp.* 1).

3. C'est pourquoi △ ABC : △ CBD = △ ECD : △ CBD. Prop. 11. L. 5.

4. D'où il suit que le △ ABC est = au △ ECD. Prop. 9. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII. THEOREME XII.

SI trois lignes droites (AB, CD, M) font proportionelles, le rectangle (AB.M) des deux extrêmes est égal au quarré de la moyenne (CD). Et si le rectangle des deux extrêmes (AB.M) est égal au quarré de la moyenne (CD), les trois droites (AB, CD, M) font proportionelles.

Hypothese.	These.
AB : CD = CD : M.	*Le Rgle AB.M est = au □ de CD.*

Préparation.

1. Sur les extrêmités B & D des droites AB, CD, élevez les ⊥ BE, DF. Prop. 11. L. 1.
2. Faites BE = M, & DF = DC. Prop. 3. L. 1.
3. Achevez les Rgles EA, FC. Prop. 31. L. 1.

I. Demonstration.

PUisque AB : CD = CD : M (*Hyp*), que CD = DF & M = BE (*Prep*, 2).

1. AB : CD = DF : BE. Pr. 7 & 11. L. 5.

Les côtés des Rgles EA, FC, alentour des angles égaux B & D (*Prep.* 1 *& Ax.* 10. *L.* 1.) font donc réciproques. Def. 2. L. 6.

2. Partant le Rgle EA est = au Rgle FC, ou le Rgle fous AB . BE = au Rgle fous CD . DF. {Prop. 14. L. 6. Def. 1. L. 2.}
3. C'est pourquoi BE étant = M & DF = CD (*Prep.* 2), le Rgle AB . M est aussi = au □ de CD. Ax. 2. L. 2.

C. Q. F. D.

Hypothese.	These.
Le Rgle AB.M est = au □ de CD.	*AB : CD = CD : M.*

II. Demonstration.

PUisque le Rgle fous AB . M est = au □ de CD (*Hyp.*), & que BE est = M, & DF = CD (*Prep.* 2),

1. Le Rgle fous AB . BE est = au Rgle fous CD . DF. Ax. 2. L. 2.

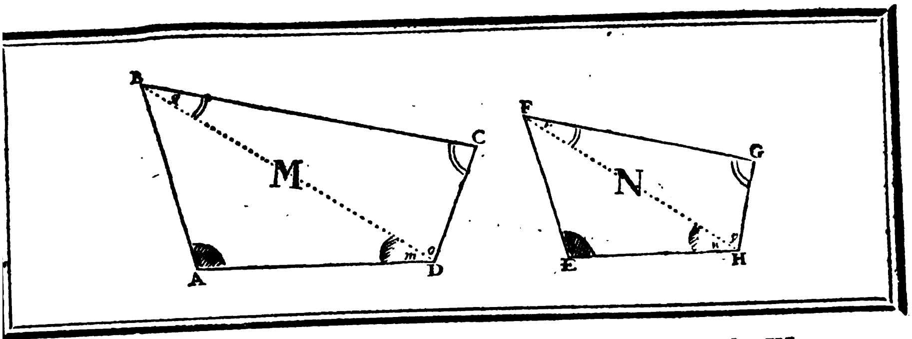
Or ces côtés environnent les ∀ égaux EBA, FDC; (*Ax.* 10. *L.* 1 & *Pr.* 1).

2. Donc AB : CD = DF : BE, Prop. 14. L. 6.

Et par la raison que DF = CD & BE = M (*Prep.* 2),

3. AB : CD = CD : M. Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII. *PROBLEME VI.*

D'Une ligne droite donnée (AD), décrire une figure rectiligne (M) semblable à une autre figure rectiligne donnée (N) & semblablement posée.

DONNEE.

I. La droite A D.
II. Le Rectiligne N.

CHERCHEE.

Le Rectiligne M, semblable au Rectiligne N & semblablement posé.

Résolution.

1. Joignez HF.
2. Sur AD, aux points A & D, faites ∀ A = ∀ E & ∀ *m* = ∀ *n*; c'est pourquoi le troisième ∀ ABD sera = au troisième ∀ EFH.
3. Sur DB, au point D, faites ∀ *o* = ∀ *p* & au point B, ∀ *q* = ∀ *r*. Par conséquent le troisième ∀ C sera = au troisième ∀ G.

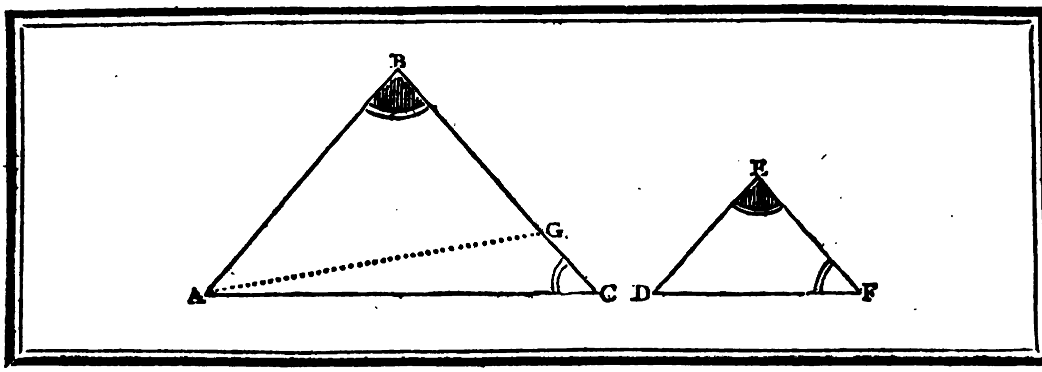
Dem. 1. L. 1. Prop. 23. & 32. L. 1. & Remarq. de Prop. 27. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUis donc que le △ ABD est équiangle au △ EFH, & le △ DBC équiangle au △ HFG (*Ref.* 2 & 3),

1. BD : FH = BA : FE = AD : EH. } BD : FH = DC : HG = CB : GF. } Prop. 4. L. 6.
& BD : FH = DC : EH = DC : HG = CB : GF. Prop. 11. L. 5.
2. Partant BA : FE = AD : EH = DC : HG = CB : GF.
Maintenant ∀ *m* étant = à ∀ *n* (*Ref.* 2), ainsi que ∀ *o* = ∀ *p* (*Ref.* 3), Ax. 2. L. 1.
3. L'angle entier *m* + *o* est = à l'angle entier *n* + *p*.
4. Par la même raison ∀ ABC = ∀ EFG.
De plus ∀ A = ∀ E (*Ref.* 2), & ∀ C = ∀ G (*Ref.* 3).
5. C'est pourquoi le Rectilig. M est équiangle au Rectilig. N, & leurs côtés alentour des angles égaux sont proportionels.
6. Le Rectilig. M, construit sur la donnée AD, est donc semblable au Rectilig. EG, & il est semblablement posé. Def. 1. L. 6.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIX. THEOREME XIII.

Les triangles semblables (ABC, DEF) sont entr'eux en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques (CB, FE ou AC, DF &c).

Hypothese.

Les triangles ABC, DEF sont semblables, de manière que ∀ C = ∀ F, & les côtés AC, DF item CB, FE sont homologues.

These.

*Le △ ABC est au △ DEF en raison doublée de CB à FE c. à. d. comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.*

Préparation.

Prenez à CB, FE la troisième proportionelle CG, & tirez AG. {Prop. 11. L. 6. Dem. L. 1.}

Demonstration.

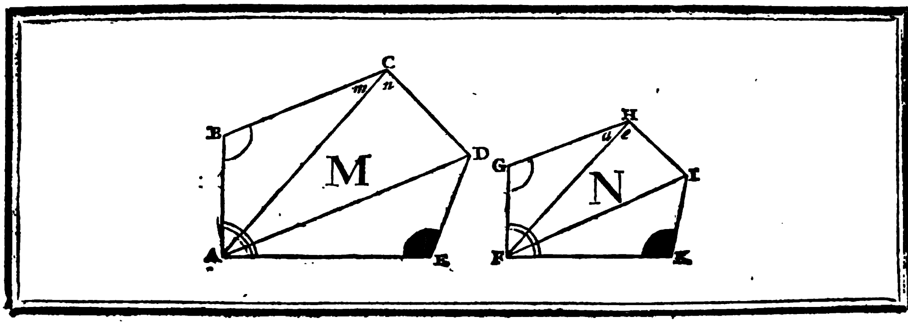
Puis doncque	AC : CB = DF : FE (*Hyp.* & *Def.* 1. *L.* 6),	
1. En alternant	AC : DF = CB : FE.	Prop. 16. L 5.
Mais	CB : FE = FE : CG (*Prep.*);	
2. Par conséquent	AC : DF = FE : CG.	Prop. 11. L. 5.
3. Les côtés des △ AGC, DEF alentour des ∀ égaux C & F (*Hyp.*), sont donc réciproques. (*Def.* 2. *L.* 6.).		
4. Partant le	△ AGC est = au △ DEF.	Prop. 15. L. 6.
Or les	△ ABC, AGC ayant la même hauteur,	
5. Le	△ ABC : △ AGC = CB : CG.	Prop. 1. L. 6.
6. Partant le	△ ABC : △ DEF = CB : CG.	Prop. 7. L. 5.
Mais, puisque	CB : FE = FE : CG (*Prep.*),	
7. CB : CG en raison doublée de CB à FE ou comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.		Def. 10. L. 5.
8. Par conséquent le △ ABC : △ DEF en raison doublée de CB à FE, ou comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.		Prop. 11. L. 5.

G. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Lorsque trois lignes (CB, FE, CG) sont proportionelles, la première est toujours à la troisième, comme le △ fait de la première est à un △ semblable fait de la seconde, en le supposant semblablement posé.

* *Voyez Append.* Prop. VII. & Hyp. 1. Cor. 2. *item* Cor. 2. de la Prop. suivante.



PROPOSITION XX. *THEOREME XIV.*

Les Polygones semblables (M & N) peuvent être divisés par des diagonales (AC, AD; FH, FI) tirées semblablement, en un même nombre de triangles (ABC, ACD, ADE, & FGH, FHI, FIK) semblables entr'eux & proportionels à leurs Touts; de plus les Polygones (M & N) sont en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques (AB, FG; ou BC, GH &c).

Hypothese.

Le Polygone M est semblable au Polygone N; tellement que les ∀ A, B, C &c, sont = aux ∀ F, G, H &c, chacun à chacun, & les côtés AB, FG; ou BC, GH &c, homologues.

These.

Par des Diagonales tirées semblablement

I. On peut diviser ces Polygones en un même nombre de triangles semblables.

II. Proportionels à leurs Touts.

III. Et le Polyg. M : Polyg. N en raison doublée des côtés homologues AB, FG; ou comme $\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$.

Préparation.

Tirez AC, FH, de même AD, FI semblablement, c. à. d. des ∀ égaux A & F, aux ∀ égaux C & H, item D & I. Dem. 1. L. 1.

Demonstration.

Puis donc que ∀ B = ∀ G & AB : BC = FG : GH (*Hyp. & Def.* 1. *L.* 6),

1. Le △ ABC est équiangle au △ FGH, Prop. 6. L. 6.
2. C'est pourquoi ces △ sont semblables, & ∀ m = ∀ a. Prop. 4. L. 6. Coroll.

Or ∀ entier $m + n$ est = à ∀ entier $a + e$ (*Hyp.*);

3. partant ∀ n est = ∀ Ax. 3. L. 1.

Puis donc que par la simil. des △ ABC & FGH (*Arg.* 2), AC : BC = FH : GH.
& par la simil. des Polyg. M & N BC : CD = GH : HI. Def. 1. L. 6.

4. Il suit par égalité de raison, que AC : CD = FH : HI. Prop. 22. L. 5.

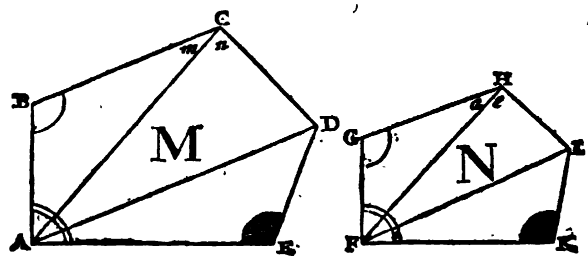
c. à. d. les côtés alentour des ∀ egaux n & e sont proportionels.

5. Le △ ACD est donc équiangle au △ FHI; Prop. 6. L. 6.

Et par conséquent il lui est semblable. Prop. 4. L. 6. Coroll.

6. Par la même raison, tous les autres △ ADE, FIK &c, sont semblables.
7. Les Polyg. semblables peuvent donc être divisés dans le même nombre de △ semblables, par des diagonales tirées semblablement.

C. Q. F. D. 1.



De même, parceque les $\triangle$ ABC, FGH font semblables (*Arg.* 2),

6. Le $\triangle ABC : \triangle FGH = \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; * Prop. 19. L. 6.
De même le $\triangle ACD : \triangle FHI = AC^2 : FH^2$. *
7. Donc le $\triangle ABC : \triangle FGH = \triangle ACD : \triangle FHI$. Prop. 11. L. 5.
On démontrera de même que
8. Le $\triangle ADE : \triangle FIK = \triangle ACD : \triangle FHI$.
9. C'est pourquoi $\triangle ABC : \triangle FGH = \triangle ACD : \triangle FHI = \triangle ADE : \triangle FIK$. Prop. 11. L. 5.
10. Comparant donc la fomme des Antécédens à celle des Confequens,
le $\triangle ABC + \triangle ACD$ &c. $\triangle FGH + \triangle FHI$ &c. $= \triangle ABC : \triangle FGH$, &c. Prop. 12. L. 5.
c. à. d. le Polyg. M : Polyg. N $= \triangle ABC : \triangle FGH = \triangle ACD : \triangle FHI$ &c. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. II.

Puis donc que le $\triangle ABC : \triangle FGH = \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$ * (*Prop.* 19. *L.* 6.),
11. Le Polyg. M : Polyg. N $= \overline{AB}^2 : FG^2$. * Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. III.

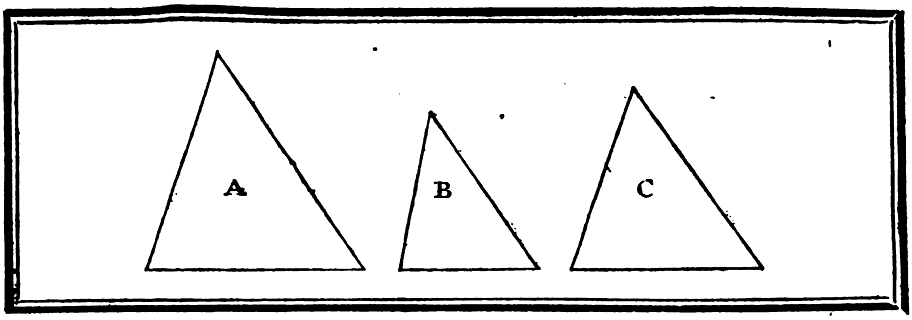
COROLLAIRE I.

Puifqu'on peut appliquer cette Démonftration aux Quadrilatères, & qu'on vient de prouver la même vérité des Triangles (*Prop.* 19), il eft clair qu'en général *toutes les Figures rectilignes femblables font entr'elles en raifon doublée de leurs côtés homologues quelconques.* C'eft pourquoi prenant aux côtés homologues AB, FG une III^{me} proportionelle X; puifqu' AB eft à X, en raifon doublée de AB : FG; & qu'un Rectiligne M eft à un autre Rectiligne femblable N, en raifon doublée des mêmes côtés AB : FG, on voit *que fi trois lignes font proportionelles, la première eft à la troifième, comme le Rectiligne décrit de la première eft au Rectiligne décrit de la feconde, femblablement & en une pofition femblable* (Prop. 11. L. 5).

COROLLAIRE II.

En particulier, tous les Quarrés étant femblables (*Def.* 30. *L.* 1 & *Def.* 1. *L.* 6), deux Rectilignes femblables quelconques M & N, font toujours en raifon des Quarres de leurs côtés homologues AB, CD. Car de part & d'autre ces Figures font en raifon doublée de ces mêmes côtes.

* *C'eft pourquoi l'expreffion* $AB : CD^2$, *défigne également la raifon des Quarrés Géométriques des lignes* AB *&* CD, *& la raifon de leurs Quarrés Arithmétiques ou Algébriques (entendus felon* Hyp. 1. Coroll. 2 *de l'*Append.), *ou enfin la raifon doublée de ces mêmes lignes; puifque ce n'eft qu'une feule & même raifon.*



PROPOSITION XXI. THEOREME XV.

LEs figures rectilignes A, C, semblables à une même (B), sont semblables entr'elles.

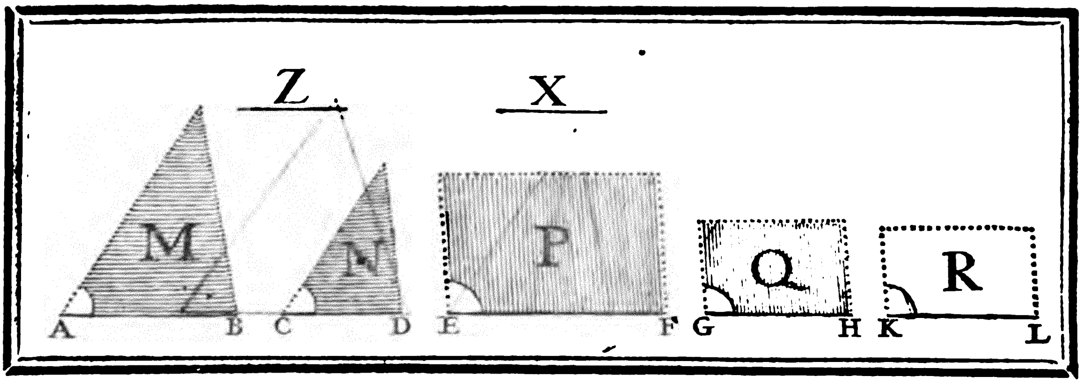
HYPOTHESE.	THESE.
Les Figures rectilignes A et C sont semblables à la Figure B.	*La Figure rectiligne A est semblable à la Figure rectiligne C.*

DEMONSTRATION.

PUis donc que chacune des figures A et C est semblable à la figure B (*Hyp.*),

1. Chacune de ces figures sera aussi équiangle à la figure B, & aura les côtés alentour des ∀ égaux, proportionels aux côtés de la figure B. Def. 1. L. 6.
2. Par conséquent ces figures A et C seront aussi équiangles entr'elles, & leurs côtés alentour des ∀ égaux, seront proportionels. {Ax. 1. L. 1. Prop. 11. L. 5.}
3. Partant les figures A et C, sont semblables. Def. 1. L. 6.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. THEOREME XVI.

SI quatre lignes droites (AB, CD, EF, GH) sont proportionelles, les figures rectilignes semblables & semblablement posées (M, N, item P, Q), décrites de ces lignes, seront proportionelles. Et si les figures rectilignes semblables & semblablement posées (M, N, P, Q), décrites de ces lignes, sont proportionelles, ces droites (AB, CD, EF, GH) seront elles mêmes proportionelles.

I.

Hypothese.	These.
I. AB : CD = EF : GH. *II. Les Figures M & N, décrites des lignes AB, CD, item les Fig. P & Q décrites des lignes EF, GH, sont semblables, & semblablement posées.*	*M : N = P : Q.*

Préparation.

Prenez aux lignes AB, CD la IIIme proportionelle Z.
Et aux lignes EF, GH la IIIme proportionelle X. } Prop. 11. L. 6.

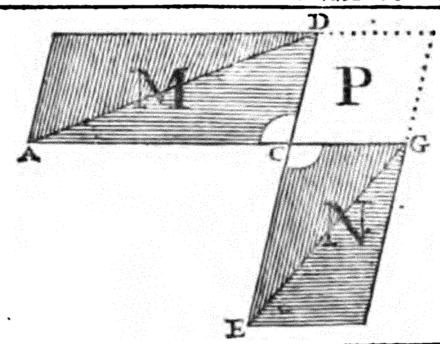
Demonstration.

Puisque AB : CD = EF : GH (*Hyp.* 1),
& CD : Z = GH : X (*Hyp.* 1. *Prep.* & *Prop.* 11. *L.* 5),
1. AB : Z = EF : X Prop. 22. L. 5.

Or à cause de la similitude des figures M & N, P & Q, & de leur description semblable des droites AB & CD, item EF & GH (*Hyp.* 2.);

2. AB : Z = M : N.
& EF : X = P : Q. } Prop. 20. L. 6. Coroll. 2.
3. C'est pourquoi M : N = P : Q. (*Arg.* 1). Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. *THEOREME XVII.*

LEs Parallélogrammes équiangles (M & N) sont entr'eux en raison composée des raisons de leurs côtés (AC, CD & EC, CG) alentour des angles égaux.

HYPOTHESE.

Les Pgrs M & N sont équiangles; si bien que $\forall$ *ACD* $=$ $\forall$ *ECG.*

THESE.

Pgr M : Pgr N $=$ *AC.CD : EC.CG.*

Préparation.

1. Disposez AC & CG en une même droite AG; cela fait, EC & CD formeront aussi une même droite ED. Prop. 14. L. 1.
2. Achevez le Pgr P. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les Pgrs M, P, N, forment une suite de trois grandeurs,

1. La raison de la première M à la dernière N, se trouve composée des deux raisons intermédiaires M : P & P : N. Prop. 5. & Hyp. 3. App.

c. à. d. la raison $\overline{M : N} = \overline{M : P} + \overline{P : N}$.

Or à cause que AC : CG = M : P. & DC : CE = P : N. Prop. 1. L. 6.

2. La raison des côtés AC : CG est la même que celle des Pgrs M : P; & la raison des côtés DC : CE, la même que celle des Pgrs P : N.

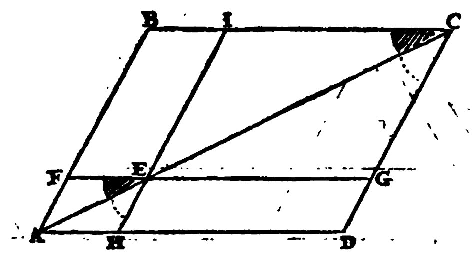
Puis donc que la raison de M : N se trouve composée des raisons M : P & P : N (*Arg.* 1),

3. Cette même raison se trouve composée de leurs égales; des raisons AC : CG, & CD : EC, des côtés alentour des angles égaux ACD, ECG. Prop. 3. App.
4. Par conséquent M : N = AC.CG : EC.CG. Def. 5. L. 6. Def. 6. App.

C. Q. F. D.

Coroll. I. *Les Pgrs équiangles sont donc comme les produits qui résultent de la multiplication de leurs côtés alentour des angles égaux.* (Déf. 1 & 6. App.).

Coroll. II. *Les mêmes vérités conviennent aux Triangles* (ACD, ECG) *qui ont un Angle* (ACD) *égal à un angle* (ECG). *Car les Diagonales* (AD, EG) *partagent les Pgrs en deux également* (Prop. 34. L. 1).



PROPOSITION XXIV. THEOREME XVIII.

En tout Parallélogramme (BD), les Parallélogrammes (FH, IG) alentour de la diagonale (AC) sont semblables & au Tout & entr'eux.

Hypothese.	These.
I. BD est un Pgr.	*I. Les Pgrs AFEH, EICG sont semblables au Pgr ABCD,*
II. FH, IG sont des Pgrs alentour de la diagonale AC.	*II. Et semblables entr eux.*

Demonstration.

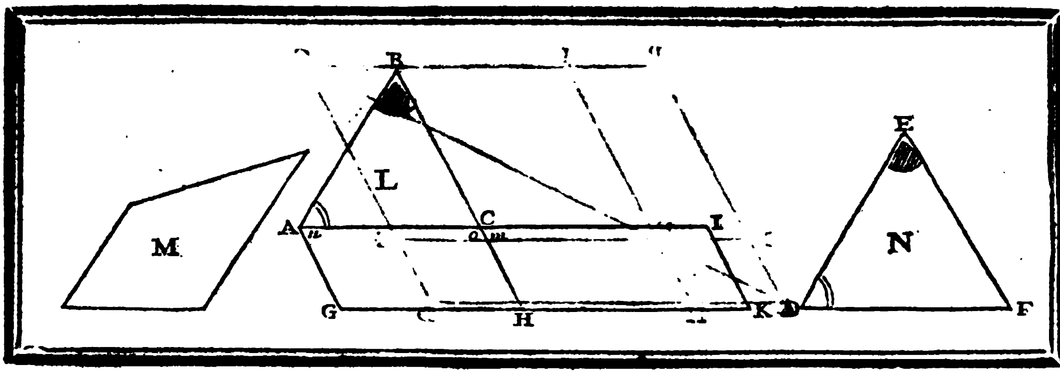
Puisque FE est Plle à BC (*Hyp.* 1. & 2. & *Prop.* 30. *L.* 1.),

1. Le Δ AFE est équiangle au Δ ABC, selon l'ordre des lettres.
   De même, parceque HE est Plle à DC, — Prop. 29. L. 1.
2. Le Δ AHE est équiangle au Δ ADC, selon l'ordre des lettres.
3. Le Pgr AFEH est donc aussi équiang. au Pgr ABCD, selon l'ordre des lettres.
   Et à cause que dans les Δ AHE, ADC, les ∀ AHE & D sont égaux (*Arg.* 2), comme dans les Δ AFE, ABC, les ∀ AFE & B (*Arg.* 1),
4. AH : HE = AD : DC
   & AF : FE = AB : BC — Prop. 4. L. 6.
   Deplus, à cause que les ∀ AEH, ACD ; item FEA, BCA sont égaux (*Arg.* 1 & 2)
5. HE : AE = DC : AC
   & AE : EF = AC : CB — Prop. 4. L. 6.
6. Donc par égalité HE : EF = DC : CB. — Prop. 22. L. 5.
   Et encore, à cause que les ∀ EAH, EFA sont communs, de part & d'autre, aux deux triangles AHE, ADC & AFE, ABC,
7. HA : EA = DA : CA
   & EA : AF = CA : AB — Prop. 4. L. 6.
8. Donc par égalité HA : AF = DA : AB — Prop. 22. L. 5.
9. C'est pourquoi les Pgrs AFEH, ABCD, ont leurs angles égaux, chacun à chacun, dans l'ordre des lettres (*Arg.* 3); & les côtés alentour des angles égaux, proportionels (*Arg.* 4. 6. 8.).
10. Par consequent ces Pgrs sont semblables. — Def. 1. L. 6.
11. On démontre de la même manière, que les Pgrs EICG, ABCD sont semblables.

C. Q. F. D. I.

12. Par conséquent les Pgrs AFEH, EICG sont aussi semblables entr'eux. — Prop. 21. L. 6.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXV. PROBLEME VII.

Construire un Rectiligne (N), semblable à un Rectiligne donné (L), & égal à un autre (M).

Donné.

I. Le Rectiligne L.
II. Et le Rectiligne M.

Cherché.

Le Rectiligne N, semblable au Rectiligne L, & = au Rectiligne M.

Résolution.

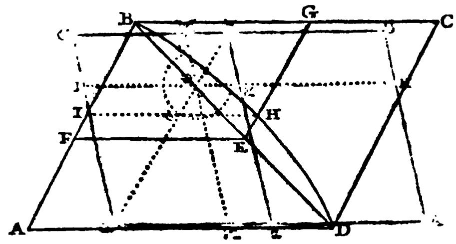
1. Appliquez à la droite AC, un Pgr AH = au Rectiligne donné L.	Prop. 44. L. 1.
2. Et à la droite CH un Pgr CK = au Rectiligne donné M, ayant un ∀ m = à ∀ n.	Prop. 45. L. 1.
3. Cela fait, les côtés AC, CI & GH, HK se rencontreront directement.	Prop. 14, 29, & 34. L. 1.
4. Prenez entre AC, & CI, une moyenne proportionelle DF.	Prop. 13. L. 6.
5. De cette droite DF, décrivez le Rectil. N, semblable & semblablement posé au Rectil. L.	Prop. 18. L. 6.

DEMONSTRATION.

PUisque les Pgrs AH, CK, ont la même hauteur (*Ref.* 2 & 3),

1. Pgr AH : Pgr CK = AC : CI,	Prop. 1. L. 6.
Or le Pgr AH = Rectil. L, & le Pgr CK = Rectil. M (*Ref.* 1 & 2);	
2. Partant L : M = AC : CI.	Prop. 11. L. 5.
Mais AC : DF = DF : CI (*Ref.* 4); & des droites AC, DF ont été décrits les Rectilignes semblables & semblablement posés L & N (*Ref.* 5);	
3. Partant L : N = AC : CI.	Prop. 20. L. 6. Coroll.
4. D'où il suit que L : N = L : M. (*Arg.* 2);	Prop. 11. L. 5.
5. C'est pourquoi N = M.	Prop. 14. L. 5.
6. On a donc construit un Rectiligne N, semblable au Rectiligne L (*Ref.* 5), & égal au Rectiligne M. (*Arg.* 5).	

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVI. THEOREME XIX.

Si d'un Parallélogramme (AC) on retranche un Parallélogramme (FG), semblable & semblablement posé au Parallélogramme entier (AC), ayant un angle (FBG) commun avec lui: le Parallélogramme (FG) est placé alentour de la diagonale (BD) du Parallélogramme entier (AC).

Hypothese	These.
I. AC est un Pgr, dont BD est la diagonale.	*Le Pgr FG est placé alentour de la diagonale BD du Pgr AC.*
II. FG est un Pgr semblable à AC, & ayant un ∀ FBG commun avec AC.	

Demonstration.

Si non. Soit une autre ligne BHD, différente de BED, la diagonale du Pgr AC, coupant le côté GE en un point H.

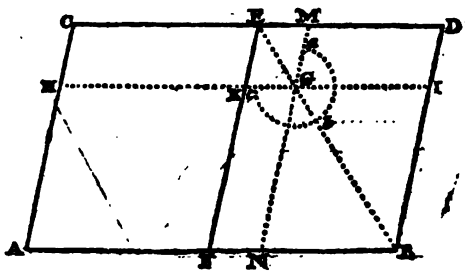
Préparation.

Par ce point H tirez HI Plle à CB ou DA. Prop. 31. L. 1.

Les Pgrs AC, IG étant donc placés alentour de la même diagonale BHD, & ∀ FBG étant commun aux deux Pgrs (*Sup. & Prep.*),

1. Le Pgr AC est semblable au Pgr IG. Prop. 24. L. 6.
2. Partant CB : BA = GB : BI. Def. 1. L. 6.
   Mais les Pgrs AC & FG étant aussi semblables, & ∀ B commun aux deux Pgrs (*Hyp.* 2),
3. On aura CB : BA = GB : BF. Def. 1. L. 6.
4. Par conséquent GB : BI = GB : BF. Prop. 11. L. 5.
5. Donc BI = BF. Prop. 14. L. 5.
6. Ce qui est impossible. Ax. 8 L. 1.
7. Ainsi toute ligne BHD, différente de la ligne BED, n'est point la diagonale du Pgr. AC.
8. Partant, la ligne BED est la véritable diagonale, & le Pgr FG est placé alentour d'elle.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVII. THEOREME XX.

De tous les Parallélogrammes (AG) appliqués selon une même ligne droite (AB), & défaillans de Parallélogrammes (NI) semblables & semblablement posés, à un autre Parallélogramme (FD), décrit de la moitié (FB) de la ligne entière (AB); Le plus grand est le Parallélogramme (AE) appliqué à l'autre moitié (AF), & semblable à son défaut (FD).

Hypothese.

I. AE est un Pgr appliqué à la moitié AF, de la droite AB.
II. Lequel est semblable & semblablement posé à son défaut, le Pgr FD, déjà décrit de l'autre moitié FB.

These.

AE est le plus grand de tous les Pgrs, tel que AG, applicables selon AB, ayant leurs défauts, tel que NI, semblables & semblablement posés au Pgr FD, défaut de AE, décrit de FB moitié de AB.

Préparation.

1. Tirez la Diagonale BE. — Dem. 1. L. 1.
2. Et par un point quelconque G, pris dans BE, tirez IH MN Plles à BA, AC. — Prop. 31. L. 1.

Afin d'avoir un Pgr quelconque AG, appliqué selon AB, défaillant d'un Pgr NI, semblable au Pgr FD & semblablement posé. — Prop. 26. L. 6.

Demonstration.

CAS I. Lorsque le point N tombe dans la moitié FB.

Puisque le Pgr GD est = au Pgr GF (*Prop.* 43. L. 1); en ajoutant le Pgr commun NI,

1. Le Pgr ND sera = au Pgr FI. — Ax. 2. L. 1.

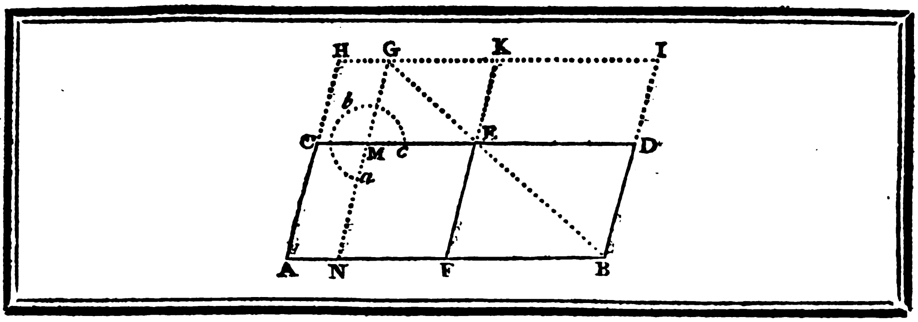
Mais à cause que le Pgr AK est aussi = au Pgr FI (*Prop.* 36. L. 1),

2. Le Pgr ND est = au Pgr AK. — Ax. 1. L. 1.

Si l'on ajoute donc de part & d'autre le Pgr FG.

3. Le Gnomon *abc*, est = au Pgr AG, — Ax. 2. L. 1.
4. Partant le Pgr entier FD, ou son égal le Pgr AE (*Hyp.* 2), est > Pgr AG. — Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.

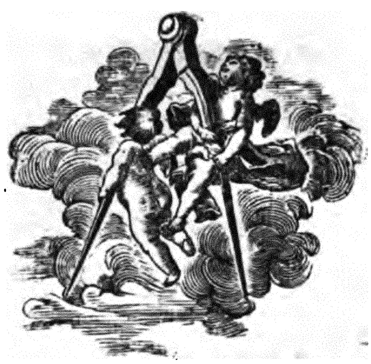


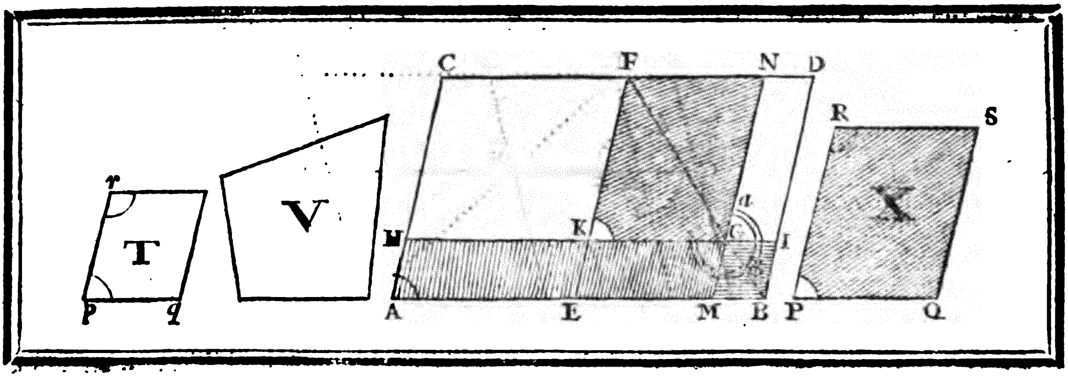
CAS II. Lorsque le point N tombe dans la moitié AF.

Le Pgr NE étant = au Pgr IE (*Prop.* 43. *L.* 1), si l'on ajoute de part & d'autre le Pgr commun FD,

1. Le Pgr ND sera = au Pgr FI; — Ax. 1, L. 1.
Mais à cause que le Pgr AK est aussi = au Pgr FI (*Prop.* 36. *L.* 1),
2. Le Pgr ND sera = au Pgr AK. — Ax. 1. L. 1.
Si l'on rétranche donc de part & d'autre le Pgr commun FM,
3. Reste le Pgr FD = au Gnomon *abc*. — Ax. 3. L. 1.
Or le Pgr FD est = au Pgr AE; — Prop. 36. L. 1.
4. C'est pourquoi le Pgr AE = au Gnomon *abc*. — Ax. 1. L. 1.
5. Par conséquent le Pgr AE > que le Pgr AG. — Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXVIII. *PROBLEME VIII.*

SElon une droite donnée (AB), appliquer un Parallélogramme (AG) égal à un Rectiligne donné (V), & defaillant d'un Parallélogramme (MI), semblable à un Parallélogramme donné (T); mais il faut que le Rectiligne donné (V), ne soit pas plus grand, qu'un Parallélogramme (AF) appliqué à la moitié de la droite donnee, ayant son défaut (ED) semblable au Parallélogramme donné (T).

DONNEE.	CHERCHEE.
I. Un droite AB, & le Pgr T. *II. Le Rectiligne V, qui n'est pas > qu'un Pgr ED, semblable à T, appliqué à AE, moitié de AB.*	*La construction d'un Pgr AG, appliqué selon AB, qui soit = à V, & defaillant d'un Pgr MI, semblable à T.*

Résolution.

1. Coupez AB en deux également en E. — Prop. 10. L. 1.
2. Construisez sur EB un Pgr ED, semblable au Pgr T & semblablement pose. — Prop. 18. L. 6.
3. Achevez le Pgr AD. — Prop. 31. L. 1.
   Le Pgr AF sera ou =, ou > V; puisqu'il ne peut être < V, par la détermination.

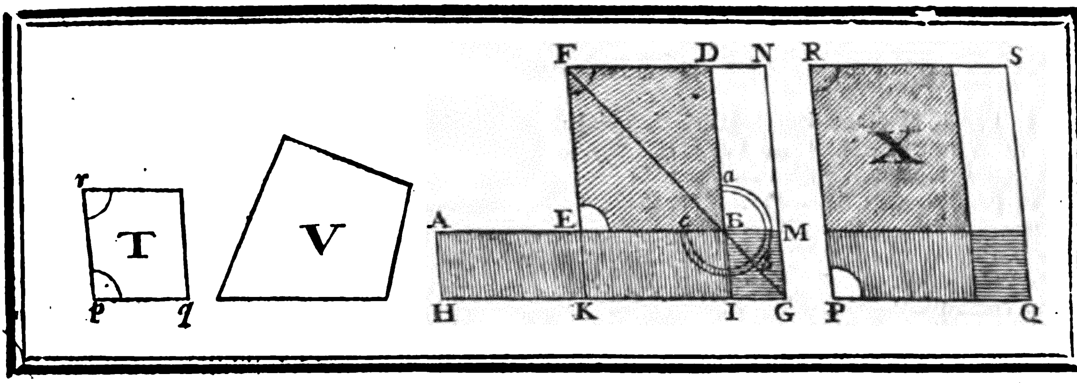
CAS I. Si AF est = à V.

On aura appliqué selon AB, un Pgr AF = au Rectil. V, & défaillant d'un Pgr ED semblable au Pgr T.

C. Q. F. F.

CAS II. Si AF est > V, & par-là ED > V, parceque AF = ED. — Prop. 36. L. 1.

4. Construisez un Pgr X, semblable au Pgr T, (ou au Pgr ED) (*Res.* 2), & semblablement posé, & égal à l'excès dont ED, ou son égal AF, surpasse V (c. à. d. faites X = ED − V), & que RS, FD item RP, FE en soyent les côtés homologues. — Prop. 45. L. 1.
   Et d'autant que X est semblable à ED & < ED; (parceque ED = V+X),
   Les côtés RS, RP sont < que leur côtés homologues FD, FE.
5. Faites donc FN = à RS, & FK = à RP. — Prop. 3. L. 1.
6. Et achevez le Pgr NK. — Prop. 31. L. 1.



PROPOSITION XXIX. *PROBLEME IX.*

SElon une droite donnée (AB), appliquer un Parallélogramme (AG), égal à un Rectiligne donné (V), excédant d'un Parallélogramme (MI), semblable à un Parallélogramme donné (T).

DONNEE.	CHERCHEE.
I. La droite AB, & le Pgr T. *II. Le Rectiligne V.*	*La construction d'un Pgr AG, appliant selon AB, égal au Rectil. V, & ayant pour excès un Pgr MI, semblable à T.*

Résolution.

1. Coupez AB en deux également, en E. — Prop. 10. L. 1.
2. De la moitié EB, décrivez un Pgr ED, semblable au Pgr T, & semblablement posé.
3. Décrivez un Pgr X (ou PS) = V+ED, semblable & semblablement posé au Pgr T; & par conséquent semblable au Pgr ED (*Ref.* 2. *Prop.* 21. *L.* 6): & soyent les côtés RS, FD; RP, FE homologues. — Prop. 18. L. 6.
4. Puis donc que X, (comme = V+ED), est > ED; le côté RS est > que FD, & le côté RP > que FE. C'est pourquoi après avoir prolongé FD & FE, faites FN = RS & FK = RP; & achevez le Pgr FKGN, qui sera égal & semblable au Pgr X. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

LE Pgr KN étant donc égal & semblable au Pgr X, qui est lui même semblable au Pgr ED (*Ref.* 3),

1. Le Pgr KN est semblable au Pgr ED. — Prop. 21. L. 6.
2. C'est pourquoi ces deux Pgrs KN, ED, sont alentour d'une même diagonale. — Prop. 26. L. 6.

Tirez cette diagonale FBG, & achevez de décrire la figure.
Puis donc que X est = V+ED, & que X = au Pgr KN (*Ref.* 3 & 4),

3. Le Pgr KN = V+ED. — Ax. 1. L. 1.

Otant donc de part & d'autre le Pgr commun ED,

4. Reste le Gnomon *abc* = au Rectil. V. — Ax. 3. L. 1.

Or, à cause que AE = EB (*Ref.* 1),

5. Le Pgr AK = au Pgr EI. — Prop. 36. L. 1.
6. Et par cette raison ce Pgr AK est = au Pgr NB. — Prop. 43. L. 1.

Ajoutant

Ajoutant donc de part & d'autre le Pgr commun MK,
7. Résulte le Pgr AG = au Gnomon *abc*. Ax. 2. L. 1.
Or le Gnomon *abc* est = au Rectil. V (*Arg.* 4);
8. Partant le Pgr AG est = au Rectil. V. Ax. 1. L. 1.
Puis donc que ce Pgr AG a pour excès le Pgr MI, semblable au Pgr ED (*Prop.* 24. *L.* 6); & par conséquent semblable au Pgr T (*Ref.* 2. *Prop.* 21. *L.* 6),
9. On a appliqué selon AB, un Pgr AG = au Rectil. V, ayant pour excès un Pgr MI, semblable au Pgr T.

C. Q. F. F.

Remarque.

SI, *comme dans le cas précédent, on fait* AB $=a$; *l'espace donné* V (*reduit à un Pgr équiang. au Pgr* T) $=nl$; *la raison des côtés* QP, PR *du Pgr* X (*qui est celle des côtés du Pgr* T) $m:n$; *de plus* AM $=x$ & *par conséquent* MB $=x-a$. *L'on arrive à une égalité de la même espéce.*

Car, à cause que le défaut MI *doit être semblable au Pgr* T *ou* X, *on a comme auparavant cette Analogie*

$$QP : PR = MB : MG \quad (Def. 1. L. 6).$$
$$m : n = x-a : \tfrac{n}{m}(x-a)$$

Et d'autant que le Pgr AG (= AM . MG), *doit être égal à l'espace donné* V ($=nl$), *on a l'égalité suivante*

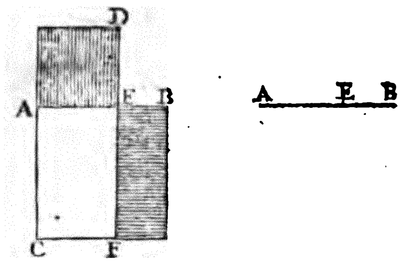
$$\tfrac{n}{m}(x-a)x = V. \quad (Prop. 23. L. 6).$$

Qui se reduit à celle-ci. $\frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax - V = 0$.

Ou bien, en mettant pour V *sa valeur* nl, *puis multipliant par* m & *divisant par* n

$$xx - ax - ml = 0.$$

D'où l'on voit, que la Prop. XXIX regarde le cas, où le dernier terme de l'égalité reduite à zéro, est négatif.



PROPOSITION XXX. *PROBLEME X.*

Couper une droite donnée (AB) en extrême & moyenne raison (en E).

Donnee.	Cherchee.
La droite A B.	*Le point E, tel que A B soit coupé en extrême & moyenne raison; de manière que BA : AE = AE : BE.*

Résolution.

1. De la droite AB décrivez un quarré BC. — Prop. 46. L. 1.
2. Appliquez au côté CA, un Pgr CD = au quarré BC, dont l'excès AD soit semblable à BC; qui sera par conséquent un quarré. — Prop. 29. L. 6.

Demonstration.

Puis donc que BC = CD (*Ref.* 2.); si l'on ôte le Rgle commun CE,

1. Reste BF = AD. — Ax. 3. L. 1.

Mais BF est aussi équiangle avec AD (*Prop.* 15. *L.* 1);

2. Leurs côtés FE, EB; ED, AE alentour des angles égaux, sont donc réciproquement proportionels, c. à. d. FE : ED = AE : EB. — Prop. 14. L. 6.

Or FE est = CA (*Prop.* 34. *L.* 1), ou = à BA, & ED = AE. (*Def.* 30. *L.* 1).

3. C'est pourquoi BA : AE = AE : EB. — Pr. 7. & 11. L. 5.

Mais parceque BA est > AE (*Ax.* 8. *L.* 1.),

4. La droite AE est > EB. — Prop. 14. L. 5.
5. Partant la droite AB est coupée en extrême & moyenne raison en E; tellement que AE en est le plus grand segment. — Def. 3. L. 6.

C. Q. F. F.

Autrement.

Partagez BA en E, ensorte que le Rgle AB . BE soit = au □ de AE. — Prop. 11. L. 2.

Demonstration.

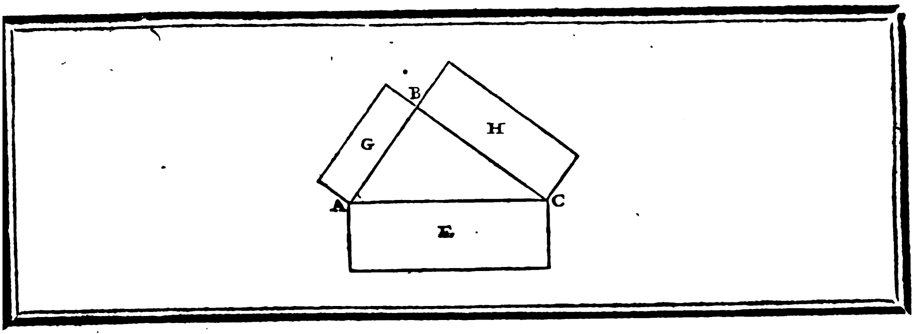
Puis donc que BA . BE est = au □ de AE (*Ref.*),

1. BA : AE = AE : BE. — Prop. 17. L. 6.

Et parceque BA est > AE (*Ax.* 8. *L.* 1.).

2. La droite AE est > BE — Prop. 14. L. 5.
3. Partant la droite AB est coupée en extrême & moyenne raison en E. — Def. 3. L. 6.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXI. *THEOREME XXI.*

Dans tout triangle rectangle (ABC), la figure (E) décrite de l'hypothenuse (AC) est égale à la somme des figures semblables & semblablement posées (G & H), décrites des deux côtés (AB, BC) alentour de l'angle droit.

Hypothese.

I. ABC est un △ Rgle en B.
II. La figure E est décrite de l'hypothenuse AC de ce △.
III. Et les figures G & H sont semblables à E & décrites semblablement des deux autres côtés AB, BC.

These.

La figure E est = aux figures G + H.

Demonstration.

Puis donc que les figures E, G, H sont semblables & décrites semblablement des côtes homologues AC, AB, BC (*Hyp*. 3),

1. G : E = □ de AB : □ de AC. } {Prop. 20. L. 6.
Et H : E = □ de BC : □ de AC. } {Coroll. 2.

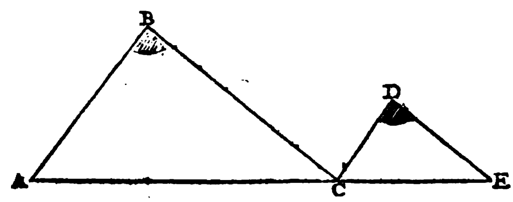
2. Partant G+H : E = □ de AB + □ de BC : □ de AC. Prop 24. L. 5.

Or à cause que le △ ABC est rectangle en B (*Hyp*. 1),

3. Le □ de AB + □ de BC est = au □ de AC. Prop. 47. L. 1.

4. Donc la figure E est = aux figures G + H. {Prop. 16. L. 5. {Rem.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXII. *THEOREME XXII.*

Si deux triangles (ABC, CDE), qui ont deux côtés (AB, BC) proportionels à deux côtés (CD, DE), s'entretouchent (en C), de manière que leurs côtés homologues (AB, CD, BC, DE) soient Parallèles, les deux autres côtés (AC, CE) se rencontreront directement.

HYPOTHESE.

I. AB : BC = CD : DE.
II. Les △ ABC, CDE s'entretouchent en C.
III. De manière que AB est Plle à CD, & BC Plle à DE.

THESE.

Les deux autres côtés AC, CE de ces △, se rencontrent directement, ou ils ne forment qu'une même droite AE.

DEMONSTRATION.

Puisque les Plles AB, CD sont coupées par la droite BC, & les Plles BC, DE par la droite DC (*Hyp. 2*),

1. L'angle B est = à ∀ BCD & ∀ D est aussi = à ∀ BCD. — Prop. 29. L. 1.
2. Partant ∀ B est = à ∀ D. — Ax. 1. L. 1.

Et comme de plus AB : BC = CD : DE (*Hyp. 1*),

3. Les △ ABC, CDE sont équiangles. — Prop. 6. L. 6.
4. Donc l'angle A est = à ∀ DCE, comme opposés aux côtés homologues BC, DE.

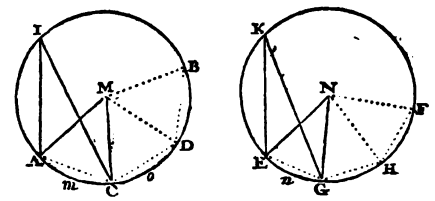
Ajoutant donc de part & d'autre ∀ B, ou son = ∀ BCD (*Arg. 1*), avec ∀ commun BCA,

5. Les ∀ A+B+BCA seront = aux ∀ DCE+BCD+BCA. — Ax. 2. L. 1.

Or les ∀ A+B+BCA sont = à 2 L (*Prop. 32. L. 1*),

6. Par conséquent les ∀ DCE+BCD+BCA sont aussi = à 2 L. — Ax. 1. L. 1.
7. D'où il suit que les droites AC, CE se rencontrent directement, ou qu'elles ne forment qu'une même ligne droite AE. — Prop. 14. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIII. *THEOREME XXIII.*

Dans les cercles égaux (AIBC, EKFG), les angles, soit aux centres soit aux circonférences (AMC, ENG ou AIC, EKG), de même que les secteurs (AMCm, ENGn), sont en raison des arcs (AmC, EnG) sur lesquels ils appuyent.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les ⊙ AIBC, EKFG sont = entr'eux.	*I. ∀ AMC : ∀ ENG = AmC : EnG.*
II. Les ∀ aux centres AMC, ENG, & les ∀ aux ○ AIC, EKG appuyent sur les arcs AmC, EnG.	*II. ∀ AIC : ∀ EKG = AmC : EnG.*
	III. Sect. AMCm : Sect. ENGn = AmC : EnG.

Préparation.

1. Joignez les cordes AC, EG. — Dem. 1. L. 1.
2. Appliquez dans la ○AIBC, les cordes CD, DB &c, chacune = à AC, & dans la ○EKFG un pareil nombre de cordes, GH, HF &c, chacune = à EG. — Prop. 1. L. 4.
3. Tirez MD, MB &c, item NH, NF &c. — Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

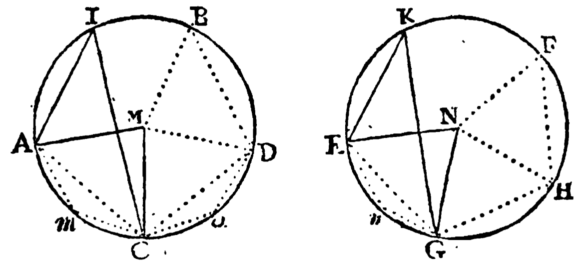
Puisque d'un côté les cordes AC, CD, DB, & de l'autre les cordes EG, GH, HF sont = entr'elles (*Prép.* 2),

1. Les arcs AmC, CoD, DB sont tous égaux d'un côté; comme les arcs EnG, GH, HF le sont de l'autre. — Prop. 28. L. 3.
2. Partant les ∀ AMC, CMD, DMB &c; item ENG, GNH, HNF &c, sont aussi = entr'eux, d'un côté & de l'autre. — Prop. 27. L. 3.
3. C'est pourquoi ∀ AMB & l'arc ACDB, sont des équimultiples de ∀ AMC & de l'arc AmC.
4. Et par la même raison ∀ ENF & l'arc EGHF sont des équimultiples de ∀ ENG & de l'arc EnG.

   Mais à cause de l'égalité des deux ⊙ AIBC, EKFG (*Hyp.* 1),

   Selon que l'arc ACDB est >, = ou < que l'arc EGHF; ∀ AMB est aussi >, = ou < que ∀ ENF. — Prop. 27. L. 3.
5. C'est pourquoi ∀ AMC : ∀ ENG = AmC : EnG. — Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. 1.



De plus, ∀ AMC étant double de ∀ AIC, & ∀ ENG double de ∀ EKG (*Prop.* 20. *L.* 3),

6. Il s'ensuit que ∀ AMC : ∀ ENG = ∀ AIC : ∀ EKG. Prop. 15. L. 5.
7. Partant ∀ AIC : ∀ EKG = A*m*C : E*n*G. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. II.

PREP. 4. Dans les arcs AC, CD, prenez les points *m* & *o*; & joignez A*m*, C*m*; C*o*, D*o* &c. Dem. 1. L. 1.

Puis donc que les deux côtés AM, MC sont = aux deux côtés CM, MD (*Def.* 15. *L.* 1.), & que les ∀ compris AMC, CMD sont égaux (*Arg.* 2),

8. La base AC est = à la base CD, & le Δ AMC = au Δ CMD. Prop. 4. L. 1.

De plus, par la raison que l'arc A*m*C est = C*o*D (*Arg.* 1),

9. Le complément AIBDC du premier est = au complément CAIBD du second. Ax. 3. L. 1.
10. C'est pourquoi ∀ A*m*C est = ∀ C*o*D. Prop. 27. L. 3.
11. Le Segment A*m*C est donc semblable au Segment C*o*D Ax. 2. L. 3.

Et ils sont outre cela soutendus par des cordes égales (*Arg.* 8).

12. Par cette raison le Segment A*m*C est = au Segment C*o*D. Prop. 24. L. 3.

Or comme le Δ AMC est aussi = au Δ CMD (*Arg.* 8),

13. Le Secteur AMC*m* est = au Secteur CMD*o*. Ax. 2. L. 1.

De la même manière, le Secteur DMB est égal à chacun des deux précédens AMC*m*, CMD*o*.

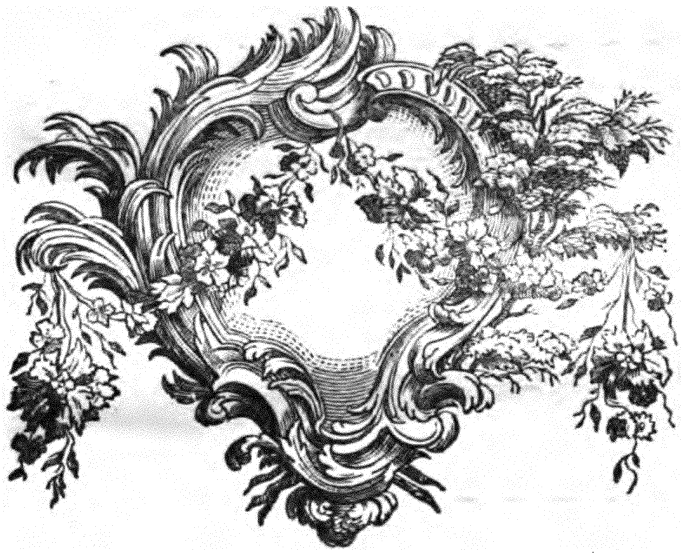
14. Les trois Secteurs AMC, CMD, DMB sont donc égaux entr'eux.
15. On démontre de même, que les trois Secteurs ENG, GNH, HNF sont = entr'eux.
16. C'est pourquoi le Sect. AMBDC & l'arc ACDB sont d'un côté des équimultiples du Sect. AMC*m* & de l'arc A*m*C; comme de l'autre côté, le Sect. ENFHG, & l'arc EGHF sont des équimultiples du Sect. ENG*n*, & de l'arc E*n*G.

Or à cause que les ⊙ AIBC, EKFG sont égaux (*Hyp.* 1),
Selon que l'arc ACDB est >, = ou < que l'arc EGHF: (*)
le Sect. AMBDC est aussi >, = ou < que le Sect. ENFHG.

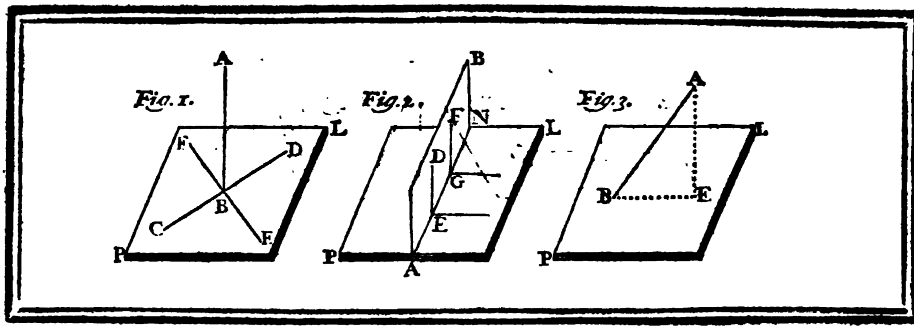
17. Partant Sect. AMC : Sect. ENG = A*m*C : E*n*G. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. III.

(*) *La preuve se trouve dans les raisonnemens de cette III partie de la Démonstration, jusqu'à Arg.* 12 *inclusivement. On n'a qu'à supposer l'arc* A*m*C = *à l'arc* E*n*G. *Car par là* ∀ AMC *est* = *à* ∀ ENG (Prop. 27. L. 3) *item* AC = EG (Prop. 4. L. 1). *D'où l'on tire comme précédemment, que le Sect.* AMC*m* *est* = *au Sect.* ENG*n*. *Partant, si l'arc* AMC *est* > *ou* < *l'arc* E*n*G, *le Sect.* AMC*m* *est aussi* > *ou* < *Sect.* ENG*n*.



LES
ELEMENS
D'EUCLIDE,
LIVRE ONZIEME.



DEFINITIONS.

I.

ON nomme *Corps* ou *Solide* ce qui est étendu en Longueur, Largeur & Profondeur.

II.

Les termes, ou *Extremitez* d'un Solide sont des Superficies.

III.

Une ligne droite (AB) *est perpendiculaire à un Plan* (*PL*) (*Fig.* 1.) si elle est perpendiculaire à toutes les lignes (CD & FE) qu'elle rencontre dans ce Plan. *c. à. d. Que la ligne AB sera perpendiculaire au Plan PL, si elle est perpendiculaire aux lignes CD & FE; lesquelles étant tirées dans le Plan PL, passent par le point B, de sorte que les Angles ABC, ABD, ABE & ABF soient droits.*

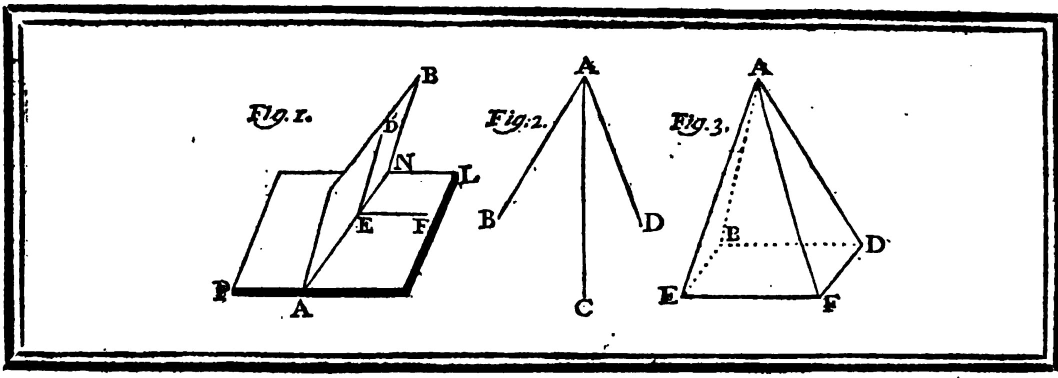
IV.

Un Plan (*AB Fig.* 2.) *est perpendiculaire à un autre* (PL), si les lignes (DE & FG) menées dans un des Plans (*comme dans AB*) perpendiculairement à la Section commune (AN) des Plans, sont aussi perpendiculaires à l'autre Plan (PL).

On nomme Section commune des Plans une ligne qui est dans les deux Plans: comme la ligne AN, qui est aussi bien dans le Plan AB que dans le Plan PL. Si donc les lignes DE & FG tirées perpendiculairement sur AN dans le Plan AB, sont aussi perpendiculaires au Plan PL: le Plan AB sera perpendiculaire au Plan PL.

V.

L'inclinaison d'une ligne (*AB*) *à un Plan*, (*Fig.* 3.) est l'angle aigu (ABE) compris de la droite (AB) & d'une autre (BE) tirée dans le Plan (PL) du point B, à l'extremité (E) de la perpendiculaire AE abaissée du point élevé (A) de la droite (AB) sur ce Plan PL.



DEFINITIONS.

V I.

UN Plan (AB) (*Fig.* 1.) *est incliné à un autre* (PL); lorsque les lignes droites ED & EF tirées dans chacun des Plans (c. a. d. DE dans le Plan AB, & EF dans le Plan PL) d'un même point E, perpendiculairement à leur Section commune AN, forment un angle aigu DEF.

V I I.

Les Plans sont semblablement inclinés, lorsque leurs angles d'Inclinaison sont égaux.

V I I I.

Les Plans sont Paralleles, lorsqu'étant prolongés à l'infini, de part & d'autre, ils ne se rencontrent jamais.

I X.

Les Solides ou Corps sont semblables; lorsqu'ils sont terminés par un pareil nombre de surfaces, semblables & homologues.

X.

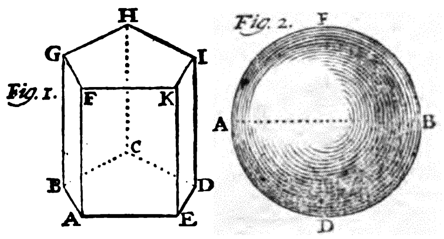
Les Solides sont semblables & égaux; lorsqu'ils sont terminéz par un même nombre de surfaces semblables & égales.

X I.

Un Angle Solide est l'inclinaison de plus de deux lignes droites qui se rencontrent en un point A (*Fig.* 2.) & ne sont point dans un même Plan : ou plutôt *un Angle Solide* (A) est un Angle formé par plus de deux Angles plans (BAC, CAD & BAD) qui ont tous le même point (A) pour sommet, & ne sont point dans le même Plan.

X I I.

La Pyramide (EBADF) (*Fig.* 3.) est un solide terminé par plus de deux Plans triangulaires (BAD, BAE &c.) qui ont tous un même sommet (A), & dont les bazes (savoir les lignes EB, BD, &c.) sont dans le même Plan (EBDF).



DEFINITIONS.

XIII.

LE Prisme est un solide (AHE) (*Fig.* 1.) dont deux Plans opposéz (savoir GHIKF & BCDA) sont égaux semblables & paralleles; & dont les autres côtés (comme GA, AK, KD &c.) sont des Parallelogrammes. *Si les Plans opposés & paralleles sont des Triangles, le Prisme est nommé triangulaire.* (& ce n'est que de ces Prismes qu'Euclide parle dans le XI. & XII. Livre.) *Si les Plans opposéz sont des Polygones on le nommera un Prisme-Polygone.*

XIV.

La Sphère est un solide (AFBD) (*Fig.* 2.) dont la superficie est décrite par la circonference d'un demi Cercle (AFB) faisant un tour entier sur son Diamètre immobile (AB).

XV.

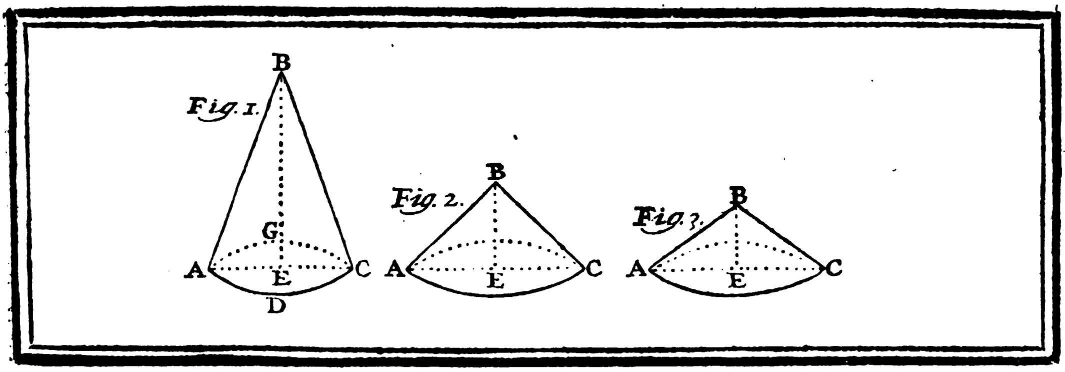
L'Axe de la Sphère est le Diamêtre immobile AB à l'entour duquel le demi Cercle à tourné, lorsqu'il a décrit la superficie de la Sphère.

XVI.

Le Centre de la Sphère est le même que celui du demi Cercle, qui a décrit sa superficie.

XVII.

On nomme *Diamêtre de la Sphère*, une ligne droite quelconque passant par le centre, & terminée de part & d'autre par la superficie de la Sphère.



DEFINITIONS.

XVIII.

LE *Cone* est un solide, (ABCD) (*Fig.* 1 2 & 3.) dont les deux superficies sont décrites par l'Hypothenuse (AB) & un coté (AE) d'un triangle rectangle (ABE), le côté (BE) demeurant immobile, & le triangle faisant un tour entier sur ce côté.

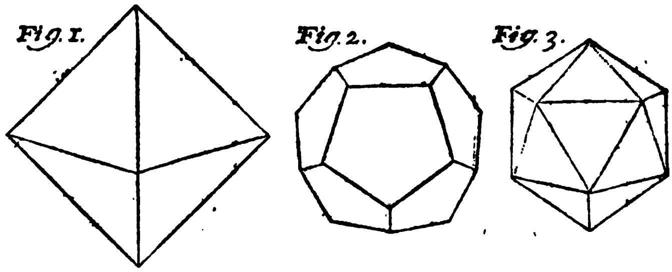
Si le coté immobile (BE) du triangle (ABE) (*Fig.* 2.) est égal à l'autre coté (AE) comprenant l'angle droit, le Cone sera nommé Rectangle; Si BE est plus petit que AE (*Fig.* 3.) il sera Amblygone; & Oxygone si BE est plus grand que AE (*Fig.* 1.)

XIX.

L'Axe du Cone est la ligne immobile (BE) sur laquelle le triangle ABE a tourné lorsqu'il a décrit la superficie du Cone.

XX.

La baze du Cone est le Cercle (AGCD) (*Fig.* 1.) décrit par le côté mobile AE.



DEFINITIONS.

XXVII.

L'*Octaëdre* (*Fig.* 1.) eſt un ſolide terminé par huit triangles équilateraux & égaux.

XXVIII.

Le Dodecaëdre (*Fig.* 2.) eſt un ſolide terminé par douze Pentagones équilateraux & égaux.

XXIX.

L'Icoſaëdre (*Fig.* 3.) eſt un ſolide terminé par vingt triangles équilateraux & égaux.

XXX.

Le Parallelipipède eſt un ſolide terminé par ſix Plans quadrilatères, deſquels les oppoſez ſont paralleles.

XXXI.

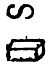
Un Solide eſt nommé Inſcript dans un Solide, lorſque tous les angles du ſolide inſcript touchent les angles, les cotés, ou les Plans du ſolide dans lequel il eſt inſcript.

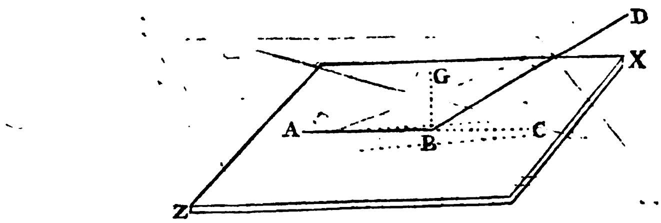
XXXII.

Un Solide eſt nommé Circonſcript autour d'un Solide, lorſque les angles, les côtés ou les Plans du ſolide circonſcript touchent tous les angles du ſolide inſcript.

EXPLICATION DES SIGNES.

$\backsim$ - - - - - - Semblable.

 - - - - - - Parallelipipède.



PROPOSITION. I. THEOREME I.

SI une partie (AB) d'une ligne droite eſt dans un Plan (ZX); l'autre partie ſera dans le même Plan.

HYPOTHESE.	THÈSE.
AB eſt une partie d'une droite ſituée dans le Plan ZX.	*l'Autre partie de la droite (comme BC) ſera dans le même Plan ZX.*

DEMONSTRATION.

SI non.
Elle ſera hors du Plan comme eſt BD.

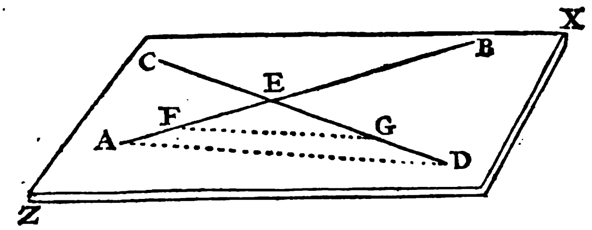
Préparation.

1. SUr AB au point B elevéz dans le Plan ZX la ⊥ GB. Prop. 11. L. 1.
2. Sur BG au même point B dans le Plan ZX elevéz la ⊥ BC.

PUiſque ∀ ABG eſt un L, de même que ∀ GBC & qu'ils concourent dans le même point B.

1. Les lignes AB & BC ſont une même droite AC. Prop. 14. L. 1.
   Cependant la ligne BD eſt une partie de la droite ſituée hors du Plan (*Sup.*).
2. Donc les lignes BD & BC ont une partie Commune AB.
3. Ce qui eſt impoſſible.
4. Donc BD ne peut-être une partie d'une droite avec AB (*Arg.* 1)
   Et comme la même demonſtration a lieu pour toutes les parties differentes de BC il s'enſuit.
5. Que toutes les parties d'une droite ſont dans le même Plan.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. *THEOREME II.*

SI deux lignes se coupent en E; elles sont dans le même Plan (Z X) & toutes les parties d'un triangle (E A D) sont dans le même Plan (Z X).

HYPOTHESE.	THESE.
I. A B, & C D, se coupent en E.	*I. A B, & C D, sont dans le même Plan.*
II. E A D est un △.	*II. tout le △ E A D est dans le Plan Z X.*

DEMONSTRATION.

SI non.

Les lignes A B & C D ne sont point dans le même Plan de même qu'une partie du △ E A D. comme A F G D.

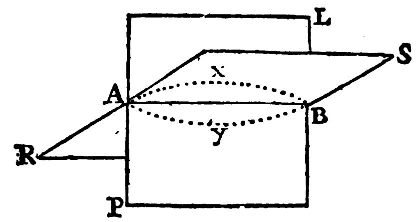
Preparation.

Tirez G F.

PUisque la partie A F G D du △ E A D n'est point dans le même Plan (Z X) avec E F G. (*Sup.*)

1. Il s'ensuit que la partie G D de la ligne C D est dans un Plan different que l'autre partie C G de la même droite; & que la partie A F de la droite A B, est dans un Plan different que son autre partie F B. de même pour A F G D & F E G.
2. Ce qui est impossible. Prop. I. L. II.
3. Les parties des deux lignes & du △ ne pouvant être situées dans des Plans differens.
4. Sont donc dans le même Plan.

C. Q. F. D. I. & II.



PROPOSITION III. *THEOREME III.*

SI deux Plans (RS & PL) s'entre-coupent; leur commune Section sera une ligne droite (AB).

Hypothese.	**These.**
RS & PL sont deux Plans qui s'entre coupent.	*Leur commune Section AB est une seule droite.*

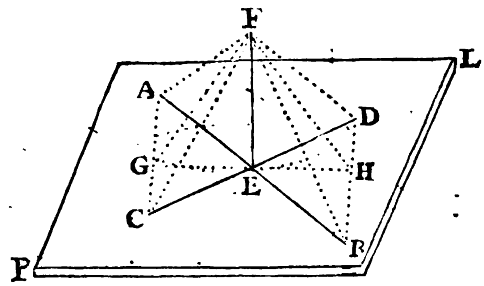
Demonstration.

SI non.
La Section formera deux droites differentes.
Comme AxB pour le Plan RS; & AyB pour le Plan PL.

PUisque les droites differentes AxB & AyB ont les mêmes extremités A & B.

1. Ces droites AxB & AyB renferment l'espace AxBy.
2. Ce qui est impossible. Ax. 12. L. 1.
3. Partant la Section des Plans PL & RS ne forme point deux droites differentes AxB & AyB.
4. Donc leur Section commune, sera une même droite AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. *THEOREME IV.*

SI deux lignes droites (AB & CD) s'entre-coupent, & qu'au point (E) de leur Section on eleve une perpendiculaire (EF) sur ces lignes (AB & CD): Elle sera aussi perpendiculaire sur le Plan (PL) passant par ces lignes (AB & CD).

HYPOTHESE.

I. AB & CD sont des droites situées dans le Plan P L.
II. Elles s'entre-coupent en E.
III. EF est ⊥ sur ces lignes au point E.

THESE.

EF est ⊥ sur le Plan P L.

Preparation.

1. PRenez EC à volonté, & faites EB, ED & AE chacune égale à EC.
2. Joignez les points A, & C, Item B & D.
3. Tirez par le point E dans le même Plan PL, la droite GH qui sera terminée par les droites AC & BD aux points G & H.
4. Tirez AF, GF, CF, DF, HF & BF.

DEMONSTRATION.

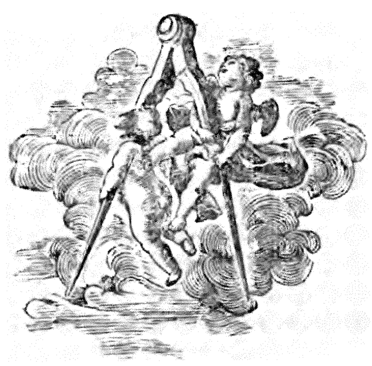
LEs △ AEF, CEF, BEF, & DEF, ont le coté EF commun.
Les cotés AE, CE, BE, & DE égaux. (*Prép.* 1.) & les ∀ contigus AEF, CEF, BEF & DEF égaux. (*Hyp.* 3.)
1. Partant les bazes AF, CF, BF & DF sont égales. Prop. 4. L. 1.
Dans les △ AEC & DEB, les cotés AE, CE, ED & EB sont = (*Prép.* 1.) & les ∀ AEC & DEB aussi égaux. Prop. 15. L. 1.
2. Donc AC = BD
3. Et ∀ EAC = ∀ EBD } Prop. 4. L. 1.
Les △ GAE & EBH ont ∀ AEG = ∀ HEB. Prop. 15. L. 1.
∀ EAG = ∀ EBH (*Arg.* 3.) & AE = EB. (*Prép.* 1.).

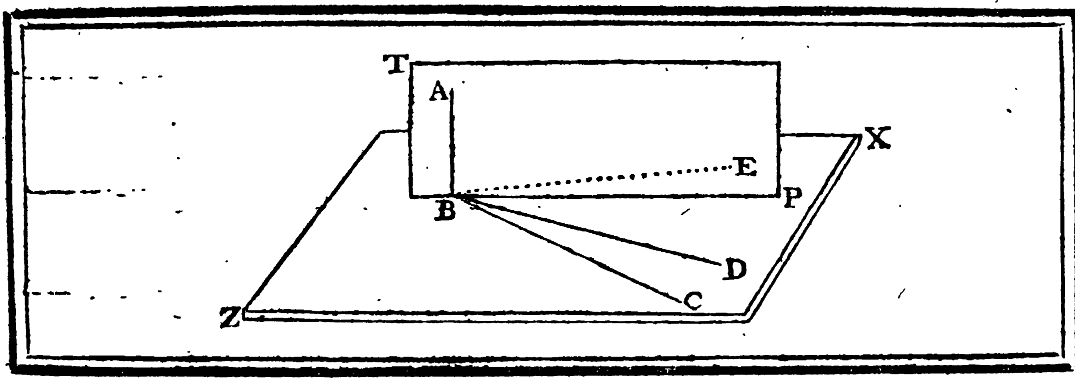
4. Par-

4. Partant les cotés G A & G E font égaux aux cotés H B & E H. Prop. 26. L. 1.
Dans les △ A F C & F D B, les trois cotés A F, F C & A C du premier font égaux aux trois cotés F B, F D & D B du fecond. (*Arg.* 1 & 2.)
5. Donc les trois ∀ du △ A F C font égaux aux trois ∀ du △ F D B chacun a chacun, *c. a. d.* ∀ F A G = ∀ F B H &c. Prop. 8 L. 1.
Les △ G A F & H B F ont les deux cotés A F & A G; = aux deux cotés F B & B H. (*Arg.* 1 & 4.)
De plus ∀ F A G = ∀ F B H. (*Arg.* 5.)
6. Donc G F = F H. Prop. 4. L. 1.
Enfin dans les △ G F E & F E H, les cotés G F, G E & F E font égaux aux cotés F H, E H, & E F. (*Arg.* 4 & 6.)
7. Partant les trois angles du △ G F E font = aux trois angles du △ F E H, chacun a chacun *c. a. d.* ∀ F E G = ∀ F E H, &c. Prop. 8. L. 1.
Or ces angles F E G & F E H font formés par la droite E F tombant fur G H (parce que G E & E H n'eft qu'une même droite *Prép.* 3.)
8. Donc ces angles F E G & F E H font ∟. & F E ⊥ fur G H. {Prop. 13. L. 1. Def. 10. L. 1.}

Mais H G eft dans le même Plan, que les lignes A B & C D. (*Prép.* 3.)
Et E F eft ⊥ fur ces lignes, par (*l'Hyp.* 3.)
9. Partant E F eft ⊥ fur le Plan P L. Def. 3. L. 11.

C. Q. F. D.





PROPOSITION V. THEOREME V.

SI une ligne droite (AB) eſt perpendiculaire ſur trois lignes (BC, BD & BE) qui ſe rencontrent en un point (B), ces trois lignes (BC, BD, & BE) ſeront dans le même Plan (ZX).

HYPOTHESE.	THESE.
I. BC, BD & BE ſe rencontrent en B.	*BC, BD & BE ſont dans le même Plan ZX.*
II. AB eſt ⊥ ſur ces lignes.	

DEMONSTRATION.

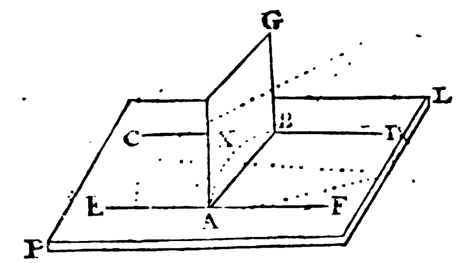
SI non.
Une de ces trois comme BE eſt dans un Plan different.

Préparation.

FAite paſſer le Plan TP par la perpendiculaire AB & par la ligne BE.

PUiſque TP & ZX ſont des Plans differens qui ſe touchent en B.
1. Ils ſe couperont étant prolongés, & leur commune Section ſera la droite BP commune aux deux Plans. Prop. 3. L. 11.
Or AB eſt ⊥ ſur BD & BC. (*Hyp.* II.).
2. Partant AB ſera auſſi ⊥ ſur le Plan ZX où ces lignes ſe trouvent. Prop. 4. L. 11.
3. Donc AB eſt ⊥ ſur BP & ∀ ABP un angle ∟ (*Arg.* 1.).
Mais ∀ ABE eſt ∟. (*Hyp.* II.).
Et BE eſt dans le même Plan avec AB & BP. (*Prép. & Arg.* 1.).
4. Partant ∀ ABE = ∀ ABP *c. a. d.* la partie = au tout.
5. Ce qui eſt impoſſible. Ax. 8. L. 1.
6. Donc BE n'eſt point dans un Plan different que BD & BC.
7. Partant ces trois lignes ſont dans le même Plan ZX.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. *THEOREME VII.*

SI l'on joint deux points (A & B) situés dans deux Paralleles (DC & FE) par une droite (AB); Elle sera dans le même Plan (PL) que les Paralleles.

HYPOTHESE.	THÈSE.
I. A & B *sont deux points pris à volonté dans les Paralleles EF & CD.*	*AB est dans le même Plan PL que les Plles CD & EF.*
II. AB est la droite qui joint ces points.	

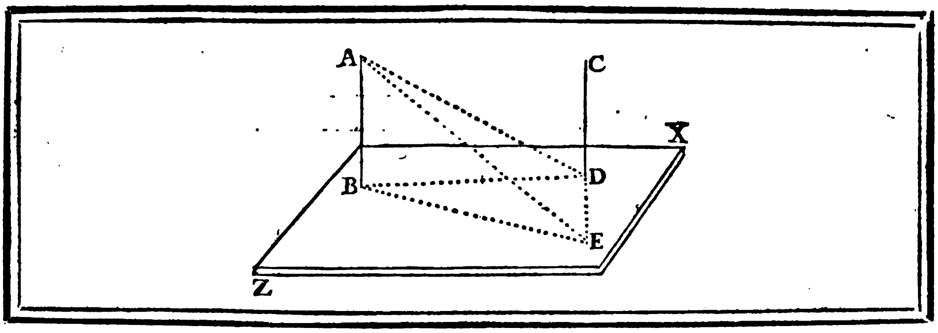
DEMONSTRATION.

SI non.
Elle sera dans un Plan different AG, comme est la ligne AxB.

PUisque AxB est dans le Plan AG, different du Plan PL, & que ses extremités A & B sont dans les lignes CD & EF, situées dans Plan PL.

1. La ligne AxB sera commune aux deux Plans, *c. a. d.* AxB est la commune Section des deux Plans AG & PL. Prop 3 L. 11.
Mais AB est aussi une droite ayant les mêmes extremités A & B par (*Hyp.* II.).
2. Partant AB & AxB sont deux droites differentes ayant les mêmes extrêmités.
3. Ce qui est impossible. Ax, 12. L. 1.
4. C'est pourquoi la ligne droite (AB) qui joint les points A & B n'est point dans un Plan AG different de celui ou les Paralleles CD & EF se trouvent.
5. Donc AB est dans le même Plan PL que les Plles CD & EF.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII. *THEOREME VIII.*

SI deux lignes (AB & CD) font paralleles, & que l'une (comme AB) eſt perpendiculaire ſur un Plan (ZX); l'autre CD ſera auſſi perpendiculaire ſur le même Plan.

HYPOTHESE.	THESE.
I. AB & CD ſont Plles.	*CD eſt ⊥ ſur le même Plan ZX.*
II. AB eſt ⊥ ſur le Plan ZX.	

Préparation.

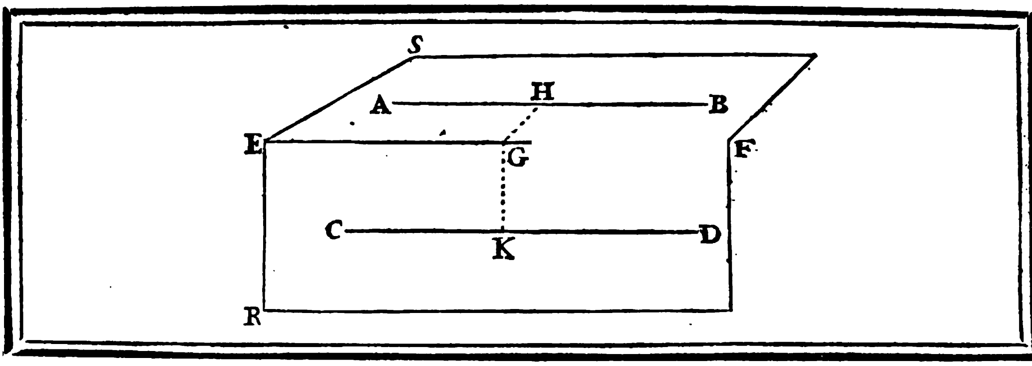
1. JOignez les points B & D dans le Plan ZX. — Dem. 1. L. 1.
2. Sur BD au point D, dans le Plan ZX, élevéz la ⊥ DE. — Prop. 12. L. 1.
3. Faites DE = AB. — Prop. 3. L. 4.
4. Tiréz AD, AE & BE. — Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque BD eſt dans le Plan XZ, & que AB eſt ⊥ ſur ce Plan (*Hyp.* 11.)

1. ∀ ABD eſt ∟. — Def. 3. L. 11.
2. Partant ∀ BDC eſt auſſi ∟. — Prop. 29. L. 1.
   Or ∀ BDE eſt ∟, DE eſt = AB (*Prép.* 2. & 3.) & BD étant commun aux deux △ ABD & BDE.
3. La baze AD eſt égal à la baze BE. — Prop. 4. L. 1.
   Dans les deux △ ADE & ABE, AB eſt = DE (*Prép.* 3.) AD = BE (*Arg.* 3.) & AE commun.
4. Partant ∀ ABE = ∀ ADE. — Prop. 8. L. 1.
   Or ∀ ABE eſt ∟. — Def. 3. L. 11.
5. Donc ∀ ADE eſt auſſi ∟. — Ax. 1. L. 1.
6. Partant DE eſt ⊥ ſur BD & AD. (*Prép.* 2. & *Arg.* 5.).
7. C'eſt pourquoi DE eſt auſſi ⊥ ſur le Plan paſſant par ces lignes BD & AD. — Prop. 4. L. 11.
   Mais AD joint deux points A & D pris dans AB & CD, qui ſont parallele (*par Hyp.* 1.).
8. Donc CD eſt dans le même Plan avec AB & AD. — Prop. 7. L. 11.
9. Partant DE eſt ⊥ ſur DC, ou DC ⊥ ſur DE. — Def. 3. L. 11.
   Puis donc que CD eſt ⊥ ſur DB & ED. (*Arg.* 2. & 9.)
10. CD ſera auſſi ⊥ ſur le Plan paſſant par ces lignes (*c. a. d.*) ſur le Plan ZX. — Prop. 4. L. 11.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IX. *THEOREME IX.*

LEs lignes (AB & CD) qui sont paralleles à une même ligne (EF) quoique situées dans les Plans differents (SF & RF); sont paralleles entr'elles.

Hypothese.	These.
I. AB est dans le Plan SF, & CD dans le Plan RF.	*AB est Plle CD.*
II. AB & CD sont chacun Plle EF.	

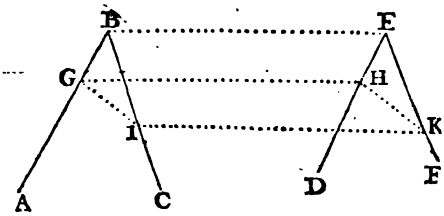
Préparation.

1. D'Un point H de la ligne AB dans le Plan FS abaissez une ⊥ HG sur EF. Prop. 11. L. 1.
2. Du Point G dans le Plan RF abaissez la ⊥ GK sur CD.

Demonstration.

PUisque EG ou EF est ⊥ sur GH & GK (*Prép.* 1. & 2.)
1. EG sera ⊥ sur le Plan qui passe par ces lignes. Prop. 4. L. 11.
Or AB est Plle EF (*Hyp.* 2.)
2. Donc AB est ⊥ sur le Plan qui passe par ces lignes HG & GK. Prop. 8. L. 11.
3. De la même manière CD est aussi ⊥ sur ce même Plan.
Les lignes AB & CD étant donc ⊥ sur un même Plan. (*Arg.* 2 & 3.).
4. Elles sont paralleles entr'elles. Prop. 6. L. 11.

C. Q. F. D.



PROPOSITION X. *THEOREME X.*

SI deux lignes droites (AB & BC) qui se touchent (en B), font paralleles à deux autres lignes (DE & EF) situées dans un autre Plan, & qui se touchent en E; Elles formeront des angles égaux. (ABC & DEF.).

Hypothese.	These.
AB & CD se touchent en B, dans un Plan different de celui ou DE & EF sont, qui se touchent aussi en E.	∀ *ABC est* = ∀ *DEF.*

Préparation.

1. COupéz à volonté des droites AB & BC, les parties BG & BI,
2. Faites HE = BG, & EK = BI. — Prop. 3. L. 1.
3. Joignez les points BE, GH, GI, HK & IK. — Dem. 1. L. 1.

Demonstration.

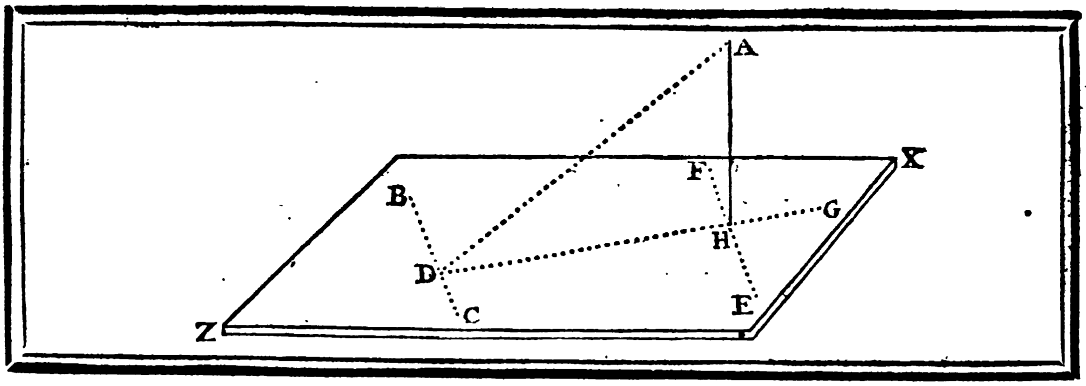
LA ligne BG étant égale & parallele à HE (*Prép.* 2. & *Hyp.*).

1. GH sera = & Plle à BE. — Prop. ·· L. 1.
2. De la même manière IK est = & Plle à BE.
3. Partant GH est = & Plle à IK. - - - - — Prop 9. L. 11. Ax. . L. 1.
4. Donc GI est = & Plle à KH. — P p 33. L. 1.

Et puisque dans les △ GBI & HEK les trois cotés BG, BI, & GI du premier, sont égaux aux trois cotés HE, EK & HK du dernier, chacun à chacun (*Prép.* 2. & *Arg.* 4.).

5. l'Angle GBI ou ABC est = ∀ HEK ou DEF. — Prop. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. *PROBLEME I.*

D'Un point donné (A) hors d'un Plan (ZX), abaisser une perpendiculaire (AH) à ce Plan.

DONNEES.	CHERCHEES.
I. Le Plan ZX.	*La droite AH abaissez du*
II. Un point A hors de ce Plan.	*point A, $\perp$ sur le Plan ZX.*

Resolution.

1. DAns le Plan ZX tirez à volonté la droite BC.
2. Du point A abaissez sur BC la $\perp$ AD. Prop 12 L 1.
3. Au point D dans le Plan ZX élevéz la $\perp$ DG sur BC. Prop. 11. L. 1
4. Du point A abaissez sur DG la $\perp$ AH. Prop. 12. L. 1.

Préparation.

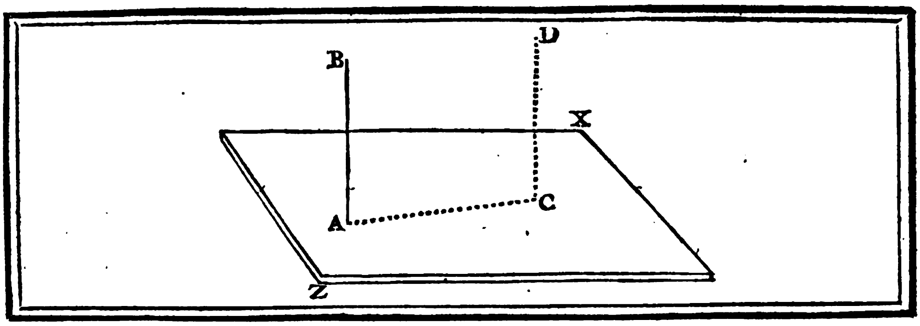
TIréz par le point H la droite FE parallele à BC. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la droite BC est $\perp$ sur DA & DG (*Ref.* 2. & 3.).

1. Elle sera $\perp$ sur le Plan qui passe par ces lignes. Prop. 4. L. 11.
 Mais FE est Plle à BC. (*Prép.*).
2. Donc FE est aussi $\perp$ sur ce même Plan qui passe par DG & DA. Prop. 8. L. 11.
 Or AH est dans le même Plan que DA & DG (*Prop.* 2. *L.* 11.) & touche FE en H. (*Ref.* 4. & *Prép.*).
3. Donc $\angle$ FHA est ∟. Def. 3. L. 11.
 Et d'autant que $\angle$ AHD est un ∟. (*Ref.* 4.).
4. AH est $\perp$ sur deux lignes FE & DG situées dans le Plan ZX & qui se coupent en H.
5. Donc AH est $\perp$ sur le Plan ZX. Prop. 4. L. 11.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XII. *PROBLEME II.*

D'Un point donné (A) dans un Plan (XZ), élever une perpendiculaire BA.

DONNEES.	CHERCHEE.
Un point A dans le Plan XZ.	*La droite BA élevée du point A ⊥ sur le Plan XZ.*

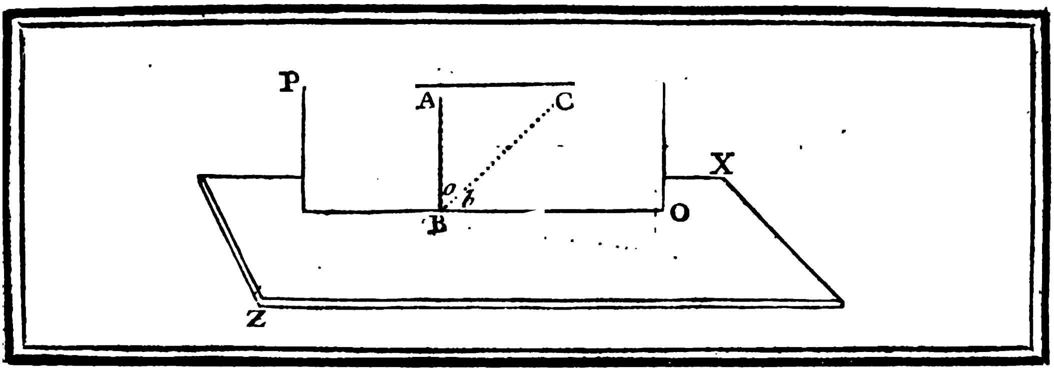
Resolution.

1. PRenez à volonté un point D hors du Plan XZ.
2. De ce point D, decendéz la ⊥ DC sur ce Plan. — Prop. 11. L. 11.
3. Joignez les points A & C. — Dem. 1. L. 1.
4. Du point A tiréz AB Plle à DC. — Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque la ligne AB est Plle à DC (*Ref.* 4.)
& que DC est ⊥ sur le Plan XZ. (*Ref.* 2.).
1. AB sera aussi ⊥ sur le même Plan XZ. — Prop. 8. L. 11.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII. *THEOREME XI.*

D'Un point (B) dans un Plan (ZX) on ne peut tirer du même coté qu'une seule perpendiculaire (AB).

HYPOTHESE.	THESE.
AB est ⊥ au point B, sur le Plan XZ.	*Il est impossible de tirer du point B une autre ⊥ sur le Plan XZ du même coté que AB.*

DEMONSTRATION.

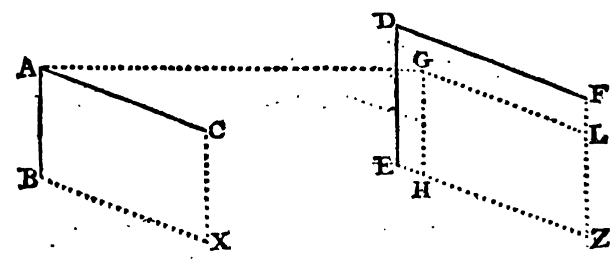
SI non.
On peut élever du point B encore une ⊥.

Preparation.

DU point B élevéz une ⊥ BC different de AB.

PUisque les lignes AB & BC se touchent au point B,
1. Ils sont dans le même Plan PO. — Prop. 2. L. II.
Or ils sont chacun ⊥ sur le Plan XZ. (*Sup.*).
2. Partant les ∀ $a + b$, & b sont chacun ∟. — Def. 10. L. I.
3. Donc ∀ $a + b =$ ∀ b, c. a. d. le tout égal à la partie.
4. Ce qui est impossible. — Ax. 8. L. I.
Mais AB est ⊥. sur le Plan XZ. (*Hyp.*)
5. Donc BC n'est point ⊥ sur XZ.
6. Partant il est impossible de mèner une autre ligne du côté de AB & du point B qui soit ⊥ sur le Plan XZ.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. *THEOREME XIII.*

Si deux lignes (AB & AC) situées dans un Plan (AX) & s'entre touchant (en A) sont paralleles, à deux autres lignes (DE & DF), s'entre touchant & situées dans un autre Plan (DZ); ces Plans (AX & DZ) seront paralleles.

HYPOTHESE.	THESE.
AB & AC situées dans le Plan AX & qui se touchent en A, sont paralleles à DE & EF qui se touchent en D, & qui sont situées dans le Plan DZ.	*Le Plan AX dans lequel les lignes AB & AC se trouvent est parallele au Plan DZ ou les lignes DE & DF se trouvent.*

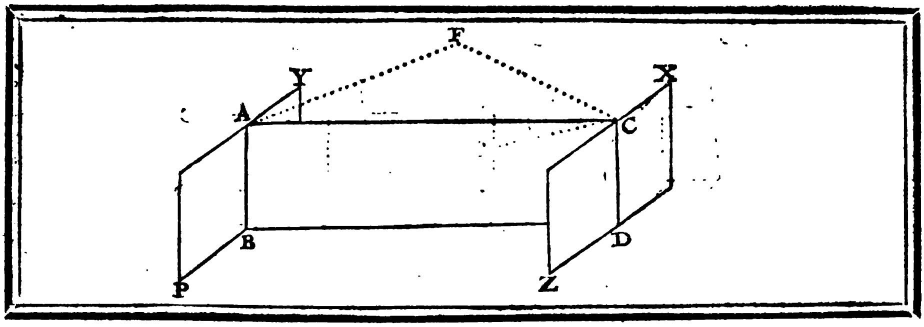
Préparation.

1. Du point A abaissez la ⊥ AG sur le Plan DZ. Prop. 11. L. 11.
2. Tirez GH Plle à DE, & GL Plle à DF. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les lignes GH & GL sont Plle à DE & DF. (*Prép.* 2.).
1. Ils seront aussi Plle à AB & AC. Prop. 9. L. 11.
Et GL étant Plle à AC.
2. Les ∀ CAG + AGL sont = 2 ∟. Prop. 29. L. 1.
Mais ∀ AGL est ∟. (*Prép.* 1.).
3. Partant ∀ CAG est aussi ∟.
4. De la même maniere on demontrera que ∀ BAG est ∟.
5. Donc GA est ⊥ sur le Plan AX. Prop. 4. L. 11.
Or le même GA est aussi ⊥ sur le Plan DZ. (*Prép.* 1.).
6. C'est pourquoi le Plan AX est Plle au Plan DZ. Prop. 14. L. 11.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI. THEOREME XIV.

Si deux Plans paralleles (ZX & YP) sont coupez par un autre Plan, (AB DC) les lignes de commune Section (CD & AB) seront paralleles.

Hypothese.	Thèse.
I. Les Plans ZX & PY sont Plle	*Les lignes de commune Section*
II. Ils sont coupez par le Plan ABCD.	*CD & AB sont Plle.*

Demonstration.

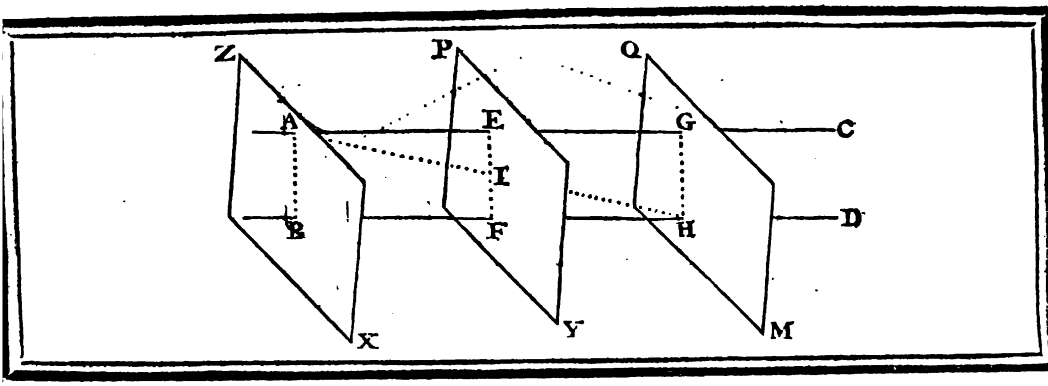
Si non.
Les lignes AB & CD étant prolongées doivent se couper quelque part.

Preparation.

Prolongez les donc jusqu'à ce qu'elles se coupent en F. Dem. 2. L. 1.

Puisque les droites BAF & DCF, se rencontrent en F.
1. Les Plans PY & ZX, dans lesquels ces lignes se trouvent, se rencontreront aussi: (Puisque BAF est entierement dans le Plan PY, & DCF entièrement dans le Plan ZX). Prop. 1. L. 11.
2. Ce qui est impossible. (*Hyp.* 1.)
3. Partant AB & CD ne se rencontrent point.
4. Donc AB & CD sont paralleles. Def. 35. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII. *THEOREME. XV.*

SI deux lignes droites (AC & BD) font coupées par des Plans paralleles (XZ, PY & QM): Elles feront coupées proportionellement. (c. a. d., que AE: EF = BF: FH &c.).

HYPOTHESE.
I. AC & BD font deux droites.
II. Coupées par les Plans Plle XZ; PY & QM.

THESE.
AE : EG = BF : FH.

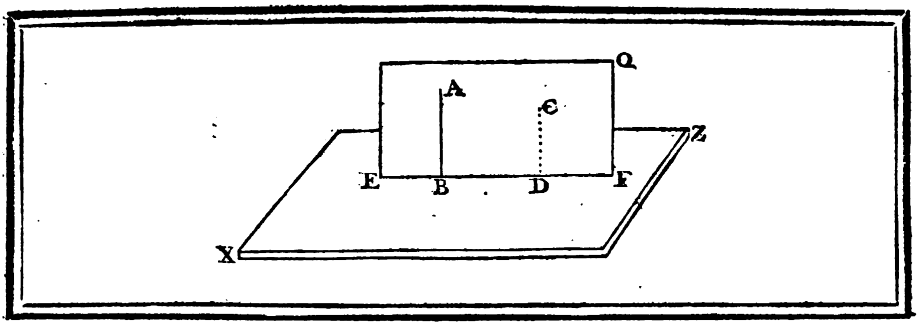
Préparation.

1. JOignez les points A & B, Item G & H
2. Tirez AH qui paffera par le point I, au travers du Plan PY. } Dem. 1: L: 1:
3. Tirez EI & IF.

DEMONSTRATION.

PUifque les Plans Plles ZX & PY font coupés par le Plan du △ ABH.
1. AB eft Plle à IF. Prop. 16. L. 11.
2. De la même manière EI eft Plle à GH.
3. Partant AI : IH = BF : FH } Prop. 2. L. 6.
4. Et AI : IH = AE : EG
5 Donc AE : EG = BF : FH. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION. XVIII. *THEOREME XVI.*

SI une droite (AB) eſt perpendiculaire à un Plan (ZX): Tous les Plans (comme QE) qui paſſent par cette ligne (AB) feront perpendiculaire ſur le même Plan (ZX).

Hypothese.	Thèse.
AB eſt ⊥ *ſur le Plan* ZX.	*Tous les Plans* (comme QE), *paſſant par la* ⊥ *AB. ſont* ⊥ *ſur le Plan* ZX.

Préparation.

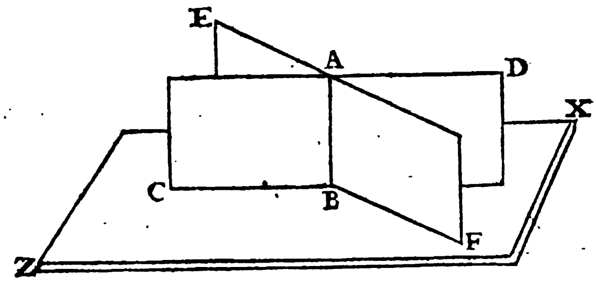
1. FAites paſſer le Plan QE, par la ligne AB, qui coupera le Plan ZX en EF. Prop. 3. L. 1.
2. Prenez dans cette droite EF, un point D, à volonté.
3. De ce point D, tiréz dans le Plan QE, la ligne DC Plle à AB. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUiſque la droite AB eſt ⊥ ſur le Plan ZX, & que DC eſt Plle à AB. (*Hyp. & Prép.* 3.).

1. Le ligne DC eſt ⊥ ſur le Plan ZX. Prop. 8. L. 11.
2. Partant CD eſt auſſi ⊥ ſur la ligne de ſection commune EF. Def. 3 L 11
3. Donc le Plan EQ dans lequel les lignes AB & CD ſe trouvent, eſt ⊥ ſur le Plan SX. Def. 4 L. 11.
& comme la même Demonſtration à lieu pour tout autre Plan paſſant par la ⊥ AB. On peut conclure.
4. Que tous les Plans paſſant par cette ligne ſont perpendiculaire ſur le Plan ZX.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX. *THEOREME XVII.*

Si deux Plans (CD & EF) qui insistent perpendiculairement sur un Plan (ZX) s'entre-coupent ; la ligne de commune Section (AB) sera aussi perpendiculaire sur le même Plan (ZX).

Hypothese.
I. Les Plans CD & EF sont ⊥ sur le Plan ZX.
II. Ils s'entre-coupent en AB.

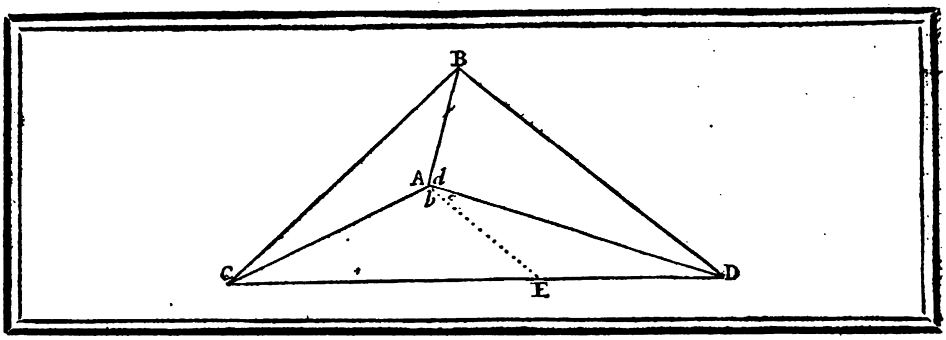
These.
La commune Section AB est ⊥ sur le Plan ZX.

Demonstration.

Puisque CB, section commune du Plan CD avec le Plan XZ, est aussi dans le Plan ZX. Prop. 3. L. 11.

1. On peut élever du point B une ⊥, sur CB (*Par le* 11e *Prop. de ce Livre*) qui sera dans le Plan CD. (*Hyp.* 1.) Prop. 18. L. 11.
Et comme la ligne FB section commune des Plans FE & XZ, est aussi dans le Plan XZ. Prop. 3. L. 11.
2. On peut aussi du même point B & du même coté que la précedente élever encore une ⊥ qui tombera dans le Plan FE. Prop. 18. L. 11.
Mais du point B on ne peut élever qu'une ⊥. Prop. 13. L. 11.
3. Partant ces perpendiculaires doivent coïncider ; c'est-à-dire, que ces deux lignes ne doivent faire qu'une seule qui soit commune aux deux Plans.
Or ces Plans n'ont de commun que la ligne AB. (*Hyp.* 2.).
4. Donc AB est perpendiculaire sur le Plan XZ.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XX. *THEOREME XVIII.*

Si trois angles-plans (CAB, BAD & DAC) forment un angle solide A: deux de ces angles (comme BAD & CAB) pris comme l'on voudra seront plus grand que le troisiéme (CAD).

HYPOTHESE.	THESE.
Les trois ∀ *plans* *CAB*, *d*, & $c+b$ *forment* ∀ *solide A.*	∀ *CAB* $+ d >$ ∀ $b+c$

DEMONSTRATION.

CAS I.

Lorsque les trois angles CAB, *d*, & $c+b$ sont égaux.

Puisque les ∀ CAB, *d* & $c+b$ sont égaux.
1. Il s'ensuit que ∀ CAB + *d* seront > ∀ $c+b$. Ax. 4. L. 1.

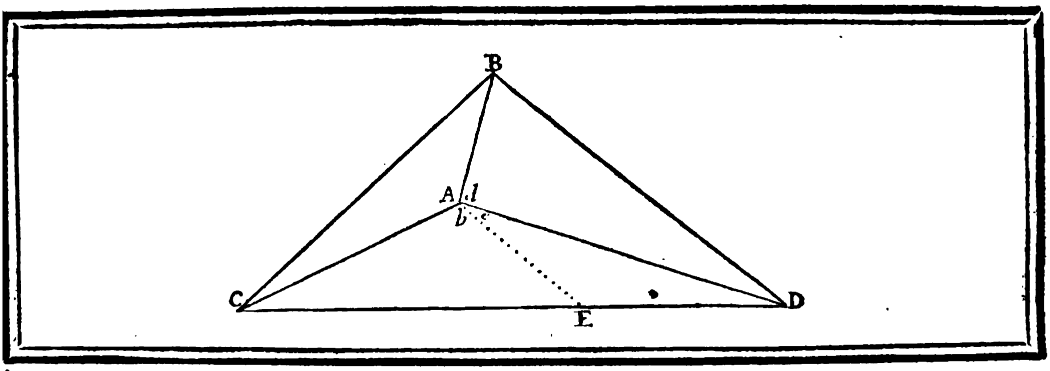
C. Q. F. D.

CAS II.

Lorsque des trois angles CAB, *d* & $c+b$, deux comme CAB & *d* sont égaux, & que le troisiéme $c+b$ est plus petit que chacun d'eux.

Puisque ∀ CAB est > que ∀ $c+b$.
1. ∀ CAB + ∀ *d* seront beaucoup > ∀ $c+b$. Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS III.

Lorsque les trois angles sont inégaux, & que $b + c$ est > que CAB ou d.

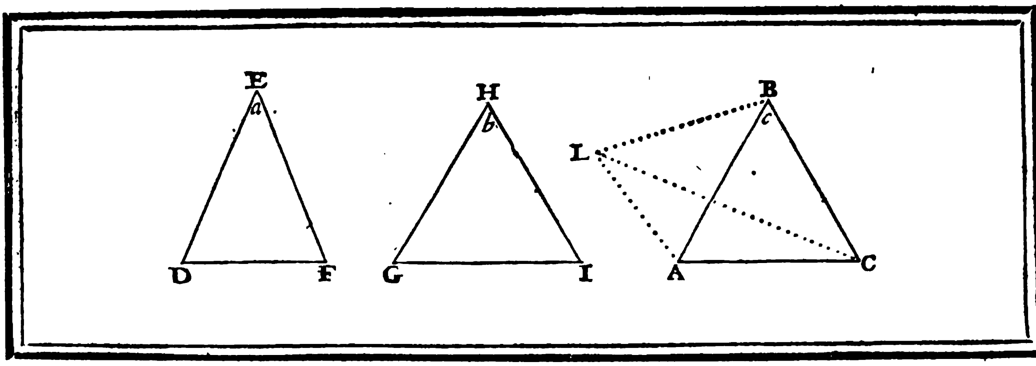
Préparation.

1. Avec AC au point A faites ∀ b = ∀ CAB dans le Plan CAD. Prop. 23. L. 1.
2. Faites AE = AB. Prop. 3. L. 1.
3. Du point C par E tirez la droite CED }
4. Des points C & D tirez CB & BD. } Dem. 1. L. 1.

Les △ BCA & CAE ont les cotés AB & AE égaux. (*Prép.* 2.)
Le coté CA commun, & ∀ b = ∀ CAB (*Prép.* 1.).
1. Partant le coté BC est = au coté CE. Prop. 4. L. 1.
Or dans le △ CBD * les cotés CB + BD sont > CD. Prop. 20. L. 1.
Si donc on retranche de CB + BD la partie CB, & de CD, la partie égale à CE.
2. Le reste savoir BD, sera > ED. Ax. 5. L. 1.
Dans les △ BAD & EAD, les cotés AB & AE sont égaux, (*Prép.* 2.) & AD commun.
Mais la baze BD > que la baze ED. (*Arg.* 2.).
3. Donc ∀ d est > ∀ c. Prop. 25. L. 1.
Si donc on ajoute d'un coté ∀ CAB, & de l'autre son égal b.
4. ∀ CAB + d feront > ∀ b + c ou CAD. Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.

* *Il est aisé à démontrer que les lignes CB, CD, & BD, sont dans le même Plan CBD par la Prop. 2. L. 11. & par consequent qu'elles forment un △ CBD.*



PROPOSITION XXII. *THEOREME XX.*

S'Il y a trois angles-plan, deux desquels pris comme l'on voudra soyent plus grand que le troisiéme, & que les cotés qui comprennent ces angles soyent des droites égales. Il sera possible de construire un triangle des trois lignes (DF, GI, & AC,) qui soutiennent ces angles.

HYPOTHESE.

I. Des trois ∀ *donnéz a, b, & c, deux quelconques sont* > *que le troisieme, comme* $b + a > c$, ou $a + c > b$, ou $b + c > a$.

II. Les cotés HG, HI, DE, EF, AB & BC qui comprennent ces ∀, *sont égaux.*

THESE.

Des droites GI, DF *& AC qui soutiennent les* ∀, *on peut construire un* △.

DEMONSTRATION.

LEs trois angles donnez, *a*, *b* & *c* sont ou égaux, ou inégaux.

CAS I. Si les ∀ *a*, *b* & *c* sont égaux.

PUisque les cotés qui comprennent les angles, sont égaux. (*Hyp.* 2.).

1. Les △ DEF, GHI & ABC sont égaux. Prop. 4 L. 1.
2. Donc DF = GI = AC.
3. Partant DF + AC > GI. Ax. 4. L. 1.
4. Donc on peut construire un △ de ces trois lignes DF, AC & GI. Prop. 22. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS II. Si les angles donnez *a*, *b*, & *c* sont inégaux.

Préparation.

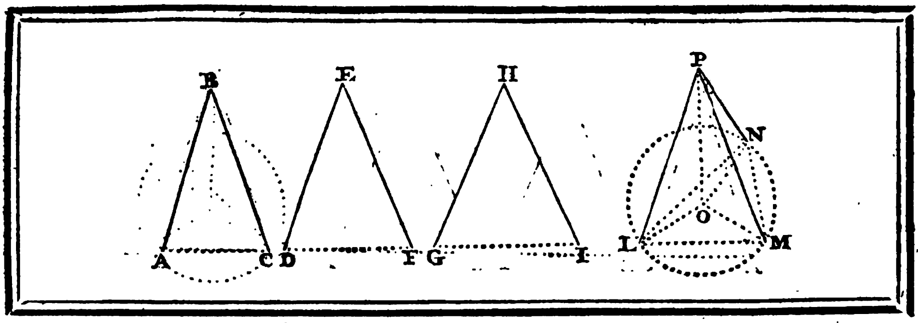
1. AU sommet d'un des ∀ comme en B, faites ∀ ABL = ∀ *a*. Prop. 23. L. 1.
2. Faites BL = DE. Prop. 3 L. 1.
3. Tirez LC & LA Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les deux angles $a + c$ sont > b (*Hyp.* 1.) & que LB = HG = BC = HI. (*Prép.* 2. *& Hyp.* 2.).

1. La baze LC sera > GI. Prop. 24. L. 1.
   Or LC < LA + AC. Prop. 20. L. 1.
2. Donc a plus forte raison GI < LA + AC.
   Mais LA = DF. (*Prép.* 1. *& Prop.* 4. *L.* 1.)
3. Donc GI < DF + AC. Ax. 1. L. 1.
4. Partant on peut construire un △ des trois lignes DF, AC & GI.

C. Q. F. D.



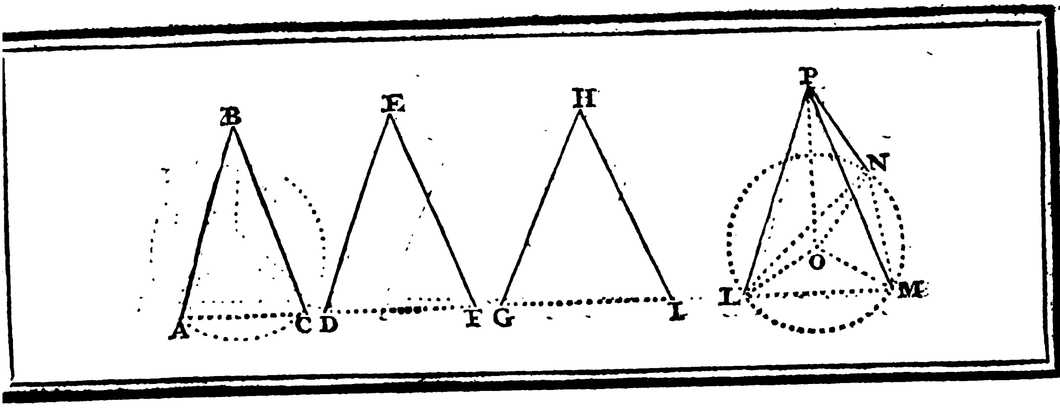
PROPOSITION XXIII. *PROBLEME III.*

ETant donnés trois angles-plan (ABC, DEF & GHI) deux desquels pris comme l'on voudra soyent toujours plus grand que le troisieme, & dont la somme (∀ ABC, + ∀ DEF + ∀ GHI) est moindre que quatre angles droits: en faire un angle solide (P).

Donnees.	Chercher.
I. Trois ∀ ABC, DEF & GHI, deux desquels pris comme l'on voudra sont toujours plus grand que le troisième, comme ∀ B + E > H, B + H > E, & E + H > B. *II. ∀ B + E + H < quatres ∟.*	*Des trois ∀ B, E & H faire un ∀ solide P.*

Resolution.

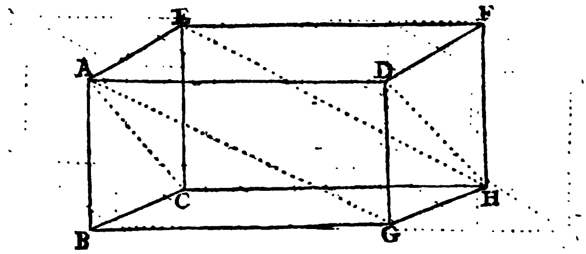
1. PRenez AB à volonté, & faites les cotés BC, DE, EF, GH & HI égaux entr'eux & à AB. Prop. 3. L. 1.
2. Tiréz les bazes AC, DF, & GI. Dem. 1. L. 1.
3. De ces trois bazes AC, DF, & GI faites un △ LMN de façon que NM soit = GI, NL = AC, & LM = DF. {Prop. 22. L. 1. Prop. 22. L. 11.
4. Inscrivez le △ LMN dans un Cercle LMN. Prop. 5. L. 4.
5. Du centre O, aux ∀ L, M & N, tiréz les droites LO, ON & OM.
6. Du point O, élevéz la ⊥ OP, sur le Plan du cercle LMN. Prop. 12. L. 11.
7. Coupéz OP de façon que le quarré sur le rayon LO, plus le quarré sur PO soyent égaux au quarré sur AB.
8. Tiréz les droites LP, PN & PM.



DEMONSTRATION.

PUisque P O est $\perp$ fur le Plan du $\odot$ L M N. (*Ref.* 6.).
1. Le $\triangle$ P O L fera Rectangle en O, (*Ref.* 5. & 8.).
2. Partant le $\square$ fur P O + le $\square$ fur O L est = au $\square$ fur L P. — Prop. 47. L. 1.
Mais ces quarrez fur P O & L O font = $\square$ A B. (*Ref.* 7.). — Ax. 1.
3. Donc $\square$ A B est = au $\square$ L P & A B = L P. — Prop. 46. L. 1. Corol. 3.
4. De la même manière P N & P M font chacun = à A B.
Or N M est à = G I, N L = A C, & L M = D F. (*Ref.* 3.)
5. Partant $\triangle$ N M P est = au $\triangle$ G H I, $\triangle$ N P L = $\triangle$ A B C, $\triangle$ L P M = $\triangle$ D E F. ∀ N P M = H, ∀ L P N = B, & ∀ L P M = ∀ E. — Prop. 8. L. 1.
Mais ces trois ∀ N P M, L P N & L P M forment ∀ folide P.
6. Donc on a construit un ∀ folide P, des trois donnés B, E & H.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXIV. *THEOREME XXI.*

DAns tout Paralelipipède (AH): Les Plans opposés (BD & CF, Item BE & FG, Item AF & BH) sont des paralelogrammes semblables & égaux, chacun à chacun; (c. a. d. le Pgr. AG est égal & semblable au Pgr. EH &c.).

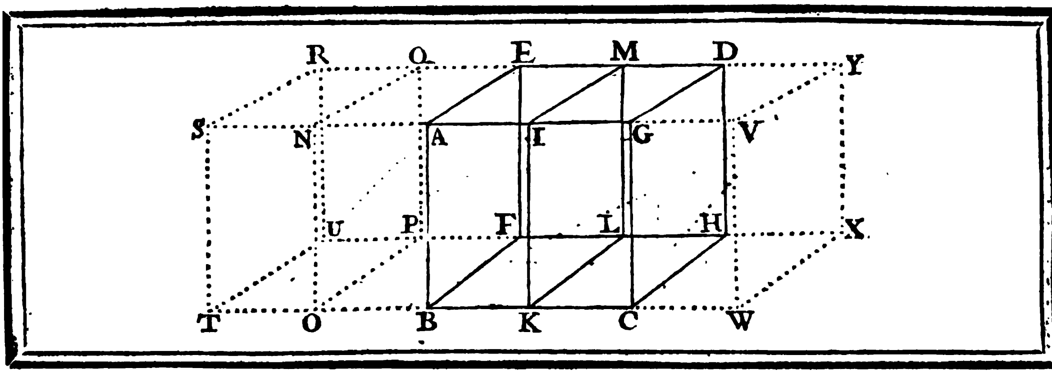
HYPOTHESE.	THESE.
Dans le ⏢ donné BF le Plan BD est opposé à CF. BE à FG & AF à BH.	*Les plans opposés BD, CF, Item BE & FG, Item AF & BH sont des Pgr. égaux & ∽ chacun à chacun.*

Préparation.

1. TIrez les diagonales opposés EH & AG. Item AC & DH.

DEMONSTRATION.

PUisque les Plans Plle BD & CF sont coupéz par le Plan ABCE. Prop. 16. L. 11.
1. La ligne BA est Plle à EC.
2. De la même manière CH est Plle à GB.
Et les même Plans Plle BD & CF étant aussi coupés par le Plan DGHF.
3. La ligne DG sera Plle à FH.
4. De même AE est Plle à BC & DF Plle à GH.
Et puisque ces lignes Plles (*Arg.* 1. 2. & 4.) sont les opposés des quadrilatères AECB & DFHG.
5. Ces quadrilatères AECB & DFHG sont des Paralelogrammes. Def. 35. L. 1.
6. De la même façon les autres Plans opposés BD & CF, Item AF & BH sont des Paralelogrammes.
Et comme AB & BG sont Plle à EC & CH, chacun à chacun. (*Arg.* 1. & 2.)
7. ∀ ABG est = ∀ ECH. Prop. 10. L. 11.
Or AB est = à EC & BG = CH. Prop. 34. L. 1.
8. Donc le △ ABG est = & ∽ au △ ECH. {Prop. 4. L. 1. / Prop. 4. L. 6.}
Mais le Pgr. BD est le double du △ ABG } (*Prop.* 41. *L.* 1.).
Et le Pgr. CF le double du △ ECH. }
Or ces Pgr. ont chacun un ∀ commun avec les △ équiangles.
9. Partant les Pgr. BD & CF sont égaux & ∽. Def. 1. L. 6.
10. De la même manière on demontrera que le Pgr. BD est = & ∽ Pgr. CF, & Pgr. AF = & ∽ Pgr. BH.
11. Donc les Plans opposés d'un ⏢ sont des Pgr. ∽ & égaux. C. Q. F. D.



PROPOSITION XXV. *THEOREME XXII.*

SI un paralelipipède (BEDC) eſt coupé par un Plan (KIML) parallele aux Plans oppoſés (AEFB & CGDH): Les deux paralelipipédes provenants (ſavoir les ⊟ˢ. BEMK & KMDC) ſeront entr'eux comme leurs bazes (BFLK & KLHC).

Hypothese.	These.
Le ⊟ *BEDC eſt coupé en deux* ⊟ˢ *BM & MC, par un Plan KM, Plle aux Plans oppoſés* BE & CD.	*Le* ⊟ *BM* : ⊟ *MC* = *baze* BL :: *baze* LC.

Préparation.

1. PRolongez BC de part & d'autre, de même que FH. — Dem. 2. L. 1.
2. Prenez, ſur le prolongement de BC pluſieurs lignes égales à BK Et CK: comme BO & TO chacune = à BK, & CW = KC. — Prop. 3. L. 1.
3. Par ces points T, O, & W. tirez des droites TU, OP & WX Plle à BF ou CH, juſqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre Plle prolongée dans les points U, P & X. — Prop. 31. L. 1.
4. Par les lignes TU, OP, & WX faites paſſer des Plans TR, OQ & WY, Plle aux Plans BE & CD, qui rencontreront le Plan de la baze ſuperieure AEDG, en SR, NQ & VY.

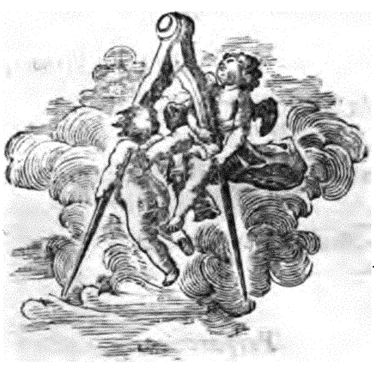
Demonstration.

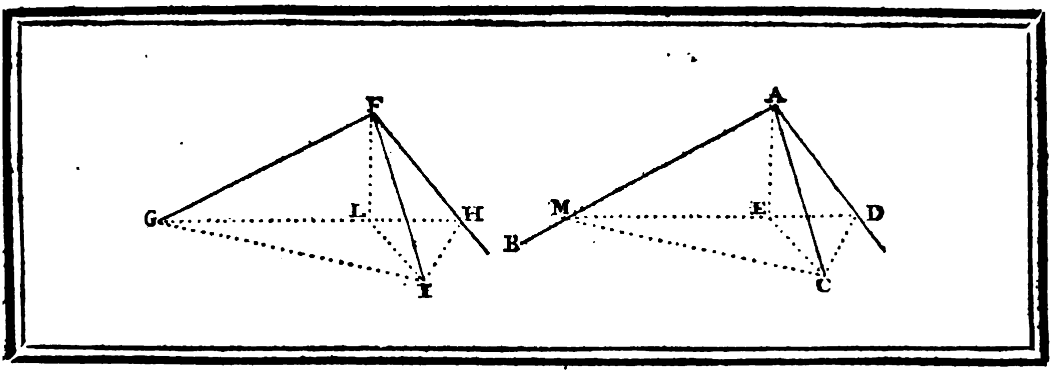
PUiſque les lignes BO & TO, ſont chacune = à BK & CW = KC (*Prép.* 2.) & que les lignes OP, TU & WX Plles à BF ou CH, rencontrent le prolongement de FH, dans les points, P, U & X (*Prép.* 3.).

1. Les

1. Les Pgr. TP & BP font = au Pgr. BL; & Pgr. CX = Pgr. KH. Prop. 35 L. 1.
Les Plans AR ou AQ & TF ou OF étant Plles; & le Plan NP Plle au Plan AF; de plus les lignes SA & RE étant Plle aux lignes BT ou FU, qui font les prolongements des Plles AI, BK, FL, & EM.
2. Le folide provenant OQEB fera un ▱ égal & ∽ au ▱ BEMK. Def. 10. L. 11.
3. De la même manière on prouvera que le folide TRQO eft égal & ∽ ▱ BEMK; Item que le folide CDYW eft ∽ & = ▱ KMDC.
Or il y a autant de ▱s. OQEB, &c. égaux, qu'il y a de Pgr. égaux OF, TP &c. & ces ▱s forment enfemble le ▱ TE : de plus il y a autant de Pgr. OF &c. égaux, qu'on a pris de parties égales, chacune à la ligne BK, qui font enfemble la toute TB.
4. Partant le ▱ TE eft autant multiple du ▱ BEMK que les parties (TO, OB) de la ligne TB pris enfemble font multiples de la ligne BK.
5. De même le ▱ CDYW eft autant multiple du ▱ KMDC que la ligne WC l'eft de la ligne KC.
6. Donc felon que le ▱ TREB fera > = ou < que le ▱ BEMK, la ligne TB fera > = ou < que la ligne BK & felon que le ▱ CDYW fera > = ou < ▱ KMDC, la ligne CW fera > = ou < que la ligne KC.
7. Partant le ▱ BEMK : ▱ KMDC = BK : KC. Def. 5. L. 5.
Or BK : KC = baze BL : baze KH. Prop. 1. L. 6.
8. Donc ▱ BEMK : ▱ KMDC = baze BL : baze KH. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXVI. *PROBLEME IV.*

D'Un point (A) fur une droite donnée (AB), faire un angle folide (AB): égal à un angle folide donné (F).

Donnees.	**Cherchees.**
I. Un point A, dans une droite AB	*Au point A un angle folide =*
II. Un angle folide F.	*à l'angle folide F.*

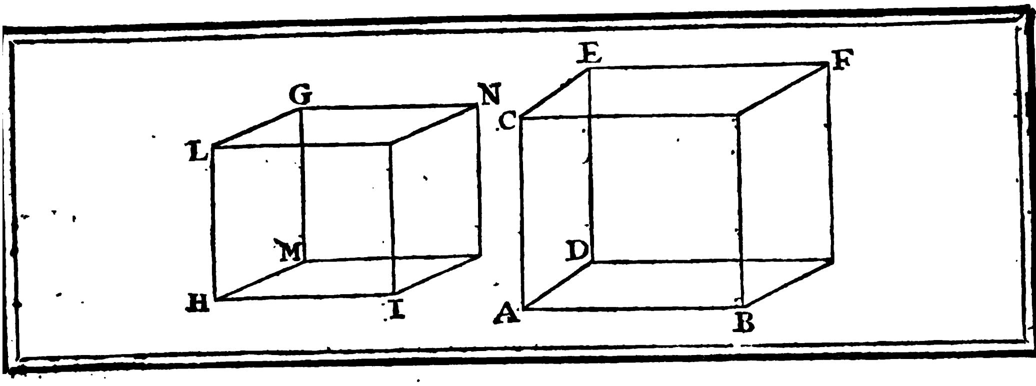
Refolution.

1. D'Un point I pris à volonté fur une des lignes de fection autour de ∀ folide F, decendez une ⊥ IL fur le Plan oppofé GFH. Prop. 11. L. 11.
2. Tiréz LF, LG, LH, HI & GI dans les Plans qui forment ∀ folide. Dem. 1. L. 1.
3. Sur la droite donnée AB, prenez AM = FG. Prop. 3. L. 1.
4. Faites au point A, un ∀ plan MAD = ∀ plan GFH. Prop. 23. L. 1.
5. Coupéz AD = FH. Prop. 3. L. 1.
6. Sur le même Plan MAD, faites un ∀ plan MAE égal à ∀ plan GFL. Prop. 23. L. 1.
7. Coupéz AE = FL. Prop. 3. L. 1.
8. Du point E, fur le Plan MAD élevez la ⊥ EC. Prop. 12. L. 11.
9. Faites EC = LI. Prop. 3. L. 1.
10. Tiréz AC. Dem. 1. L. 1.

Préparation.

Tiréz ME, ED, CD, & CM, dans Plans MAD, CAD & MAC.

Demon-



PROPOSITION XXVII. PROBLEME V.

SUr une ligne droite donnée (AB) : décrire un paralelipipéde (AF), semblable & semblablement posé, à un paralelipipéde donné. (HN).

DONNEES.
I. La droite AB.
II. Le ⊟ HN.

CHERCHEES.
Sur AB faire un ⊟ AF, ∽ & semblablement posé à un ⊟ HN.

Resolution.

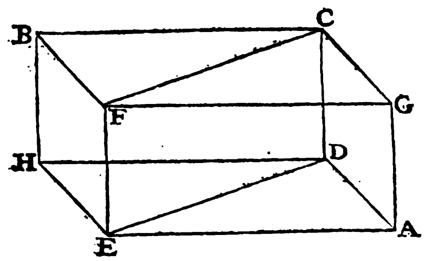
1. AU point A de la ligne AB faites un ∀ solide CADB, ≐ à ∀ solide H, ou LHMI. — Prop. 26. L. 11.
2. Coupéz AC de façon que HI : HL = AB : AC — Prop. 12. L. 6.
3. Item AD de façon que HL : HM = AC : AD
4. Achevez les Pgr. AE, BD & BC. — Prop. 31. L. 1.
5. Achevez le ⊟ AF.

DEMONSTRATION.

LEs trois Pgr. AE, BD, & BC sont ∽, & semblablement posés aux trois Pgr. HG, MI & LI du ⊟ HN, chacun à chacun (*Ref.* 1. 2. 3 & 4. & *Def.* 1. *L.* 6.) — Prop. 24. L. 11.
Et leurs opposés le sont de même.

1. Partant les six Plans ou Pgrs qui forment le ⊟ AF, sont ∽, & semblablement posés aux six Plans ou Pgr. qui forment le ⊟ donné HN.
2. Donc le ⊟ AF construit sur AB, est semblable & semblablement posé au ⊟ donné HN. — Def. 9. L. 11.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVIII. THEOREME XXIII.

UN paralelipipéde (AB) coupé par un Plan (FCDE) passant par les diagonales (FC & ED) des Plans opposés (BG & AH): est coupé en deux également.

HYPOTHESE.

Le ▱ AB est coupé par un Plan FD passant par les diagonales FC & ED, des Plans opposés BG & AH.

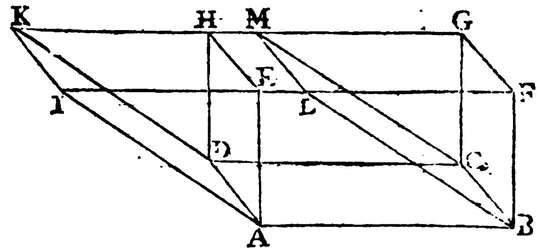
THÈSE.

Le Plan FD coupe le ▱ AB en deux également.

DEMONSTRATION.

PUisque le Plan FA est un Pgr. — Prop.24.L.11.
1. Les cotés EF & GA, sont égaux & Plles — Prop.33.L.1.
2. De même CD & GA font égaux & Plles — Prop.9.L.11.
3. Partant EF est = & Plle à CD. — Ax.1.L.1.
4. Donc ED = & Plle à FC. — Prop.33.L.1.
5. D'où il s'ensuit que FCDE est un Pgr. — Def.35.L.1.
Mais le Pgr. BCGF est = & Plle au Pgr. HDAE. — Prop.24.L.11.
6. Partant les △ BCF & FGC sont = & ∽ aux △ HDE & EDA. — Prop.34.L.1. Prop.4.L.6.
De plus les Pgr. FEAG & GADC, sont = & ∽ aux Pgr. BHDC & BHEF, chacun à chacun. — Prop.24.L.11.
7. Donc tous les Plans qui forment le prisme BFD sont égaux & ∽ à tous les Plans qui forment le prisme DFG.
8. Donc le prisme BFD ou BHEDCF est égal & ∽ au prisme DFG ou DEFCGA. — Déf.10.L.11.
9. Partant le Plan FCDE, coupe le ▱ AB en deux également.

C. Q. F. D.



PROPOSITION. XXIX. *THEOREME XXIV.*

LEs paralelipipédes (HB & KB) placés sur la même baze BD, ayant même hauteur (AE) & desquels les lignes insistantes (AE, AI, &c.) sont dans la même direction (IF, GK) : sont égaux.

Hypothese.	These.
I. Les ▱s KB & HB, ont la même baze BD.	*▱ HB est* $=$ *▱ KB.*
II. Ils ont la même hauteur AE.	
III. Les lignes insistantes AE, AI &c. sont dans la même direction IF & KG.	

Demonstration.

PUisque les Pgr. KC ou KMCD, & HC ou HGCD, ont la même baze DC, & qu'il sont dans la même direction de KG qui est Plle à DC. (*Hyp.* 3.).

1. Le Pgr. KC est $=$ au Pgr. HC. *Prop.* 35. L. 1.

Si donc on retranche de ces Pgr. égaux le trapéze commun HMCD.

2. Les restes, savoir les △ KHD & MGC seront égaux. Ax. 3. L. 1.

3. De la même maniére △ IEA est $=$ au △ LFB.

4. Le Pgr. KE ou KHEI, est aussi $=$ au Pgr. MF ou MGFL.

(Puisqu'il sont chacun $=$ au Pgr. DCBA, moins le Pgr. HMLE. *Def.* 30. & *Prop.* 24. *L.* 11.).

Or le Plan GB ou CF est $=$ au Plan HA ou DE, & le Plan MB, ou LC est $=$ au Plan KA ou ID. Prop. 24. L. 11.

5. Partant le prisme HAKD est $=$ au prisme GBMC. Def. 10. L. 11.

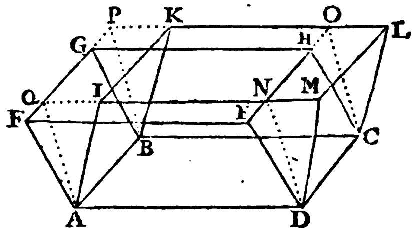
Si donc on ajoute à ces prismes égaux, la partie HMCBLEAD.

6. Le prisme HAKD $+$ partie HMCBLEAD est $=$ prisme GBMC $+$ partie HMCBLEAD. Ax. 2. L. 1.

Or prisme HAKD $+$ partie HMCBLEAD est $=$ au ▱ KB.
Et prisme GBMC $+$ partie HMCBLEAD est $=$ au ▱ HB. } Ax. 1. L. 2.

7. Donc le ▱ KB est égal au ▱ HB. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXX. THEOREME XXV.

LEs paralelipipédes (FGHEDCBA & IMLKBCA) placés sur la même baze (ABCD), ayant même hauteur, & desquels les lignes insistantes (FA, AI &c.) ne sont point dans la même direction : sont égaux.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les ▱ˢ. HA & LA sont placés sur la même baze AC.	*▱ FHCA est = ▱ ILCA.*
II. Ils ont la même hauteur.	
III. Les lignes insistantes AF & AI, ne sont point dans la même direction.	

Préparation.

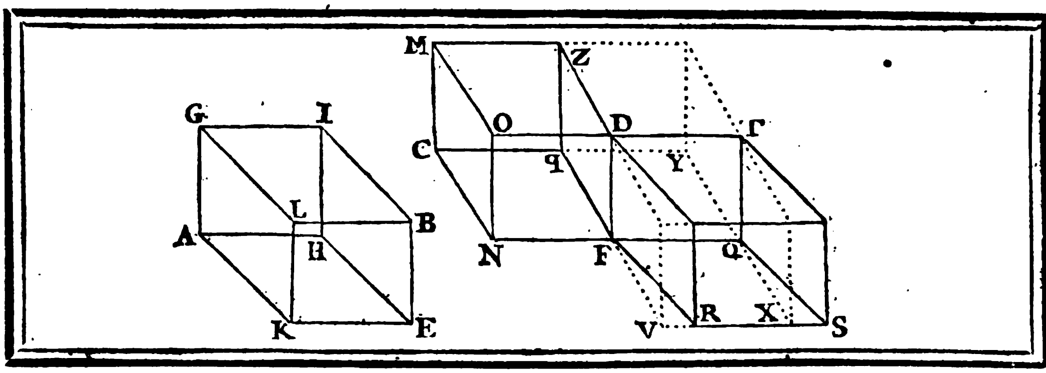
1. PRolongez LK & FG vers P, jusqu'à ce qu'elles s'y rencontrent.
2. Prolongez IM, jusqu'à ce qu'elle rencontre FG en Q.
} Dem. 2. L. 1:
3. Et EH jusqu'en O.
4. Tirez QA, PB, OC & ND. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les ▱ˢ FHCA & QOCA ont la même baze ABCD & que leurs lignes insistantes AF, AQ; ED, DN; BG, BP; & HC, CO; sont dans les directions FP & EO.

1. Le ▱ FHCA est égal au ▱ QOCA. Prop. 29. L. 11.
2. De la même manière le ▱ QOCA est = au ▱ ILCA.
3. Partant le ▱ FHCA est égal au ▱ ILCA. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXI. THEOREME XXVI.

LEs paralelipipédes (KI & NZ) dont les bazes (KH & Nq) font égales & qui ont la même hauteur: font égaux.

Hypothese.	Thése.
I. Les ⊟s. KI & NZ, ont leurs bazes KH & Nq, égales.	*Le ⊟ KI est = au ⊟ NZ.*
II. Ils ont la même hauteur.	

Demonstration.

CAS I.

SI les lignes infiftantes AG, &c. du ⊟ KI; & les infiftantes CM &c. du ⊟ NZ, font ⊥ fur leurs bazes, ou fi les inclinaifons des infiftantes AG, & MC font les mêmes.

Préparation.

1. PRolongez NF, & faites FQ = AH. — Dem. 1. L. 1. Prop. 3. L. 1.
2. Au point F fur FQ, faites ∀ plan QFR = ∀ plan HAK. — Prop. 23. L. 1.
3. Faites FR = AK.
4. Achevez le Pgr. FQSR. — Prop. 31. L. 1.
5. Achevez de même avec les lignes FQ & FD; Item FR & FD, les Pgr. QTDF & DFR. — Prop. 31. L. 1.
6. Achevez le ⊟ DS.
7. Prolongez les droites Fq & RS, jufqu'à ce qu'elles fe rencontrent en V. — Dem. 2. L. 1.
8. Par le point Q, tirez XQY, Plle à Vq. — Prop. 31. L. 1.
9. Prolongez Cq, jufqu'à ce qu'elle rencontre XY, au point Y.
10. Achevez les ⊟s. ZQ, & VDTX.

PUifque les lignes FQ & FR font = à AH & AK. (*Prép.* 1 & 3.)
Et que l'∀ QFR, eft = à ∀ HAK. (*Prép.* 2.).
1. Le Pgr. FS eft = & ∽ au Pgr. KH. — Prop. 36. L. 1. Def. 1. L. 6.
2. De la même maniére on demontrera que les Pgr. FT & DR font égaux & ∽ aux Pgr. AI, & AL.

Puis

Puis donc que les trois Pgr. FS, FT, & DR, du ▭ D S sont = & ∽ aux trois Pgr. AE, AI, & AL, du ▭ KI. (*Arg.* 1 & 2.)
Et que les Pgr. restans du ▭ DS, de même ceux du ▭ KI sont égaux, & ∽ aux précédents; chacun à chacun. Prop. 24. L. 11.
3. Le ▭ DS, sera égal & ∽ au ▭ KI. Def. 10. L. 11.
Les ▭s DX & DS, ont la même baze DQ, & leurs lignes insistantes FV & FR, &c. sont dans les mêmes directions Plle VS, &c.
4. Partant ▭ DS est = au ▭ DX. Prop. 29. L. 11.
Or le ▭ DS est = au ▭ KI. (*Arg.* 3.).
5. Donc le ▭ DX est aussi = au ▭ KI. Ax. 1. L. 1.
Le ▭ MQ * est coupé par le Plan FZ, Plle au Plan MN.
6. Partant baze Nq : baze qQ = ▭ MF : ▭ ZQ. Prop. 25. L. 11.
Le ▭ ZX est coupé par le Plan DQ, Plle au Plan ZY.
7. Partant baze FX : baze qQ = ▭ DX : ▭ ZQ. Prop. 25. L. 11.
Or le Pgr. FX est = au Pgr. FS. Prop. 35. L. 1.
Et Pgr. FS est = au Pgr. HK. (*Arg.* 1.).
8. Partant le Pgr. FX est = au Pgr. HK. Ax. 1. L. 1.
Or la baze HK est = à la baze qN. (*Hyp.* 1.).
9. Donc baze qN = à la baze FX.
Mais baze qN : baze qQ = ▭ MF : ▭ ZQ. (*Arg.* 6.)
Et baze qQ : baze FX = ▭ ZQ : ▭ DX. (*Conv. Arg.* 7.).
10. Part. baze qN : baze FX = ▭ MF : ▭ DX. Prop. 22. L. 5.
Or baze qN est = à la baze FX. (*Arg.* 9.).
11. Partant le ▭ MF est = au ▭ DX. Prop. 14. L. 5.
Mais les ▭s DX & KI sont égaux. (*Arg.* 5.).
12. Donc le ▭ MF est = au ▭ KI. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS II.

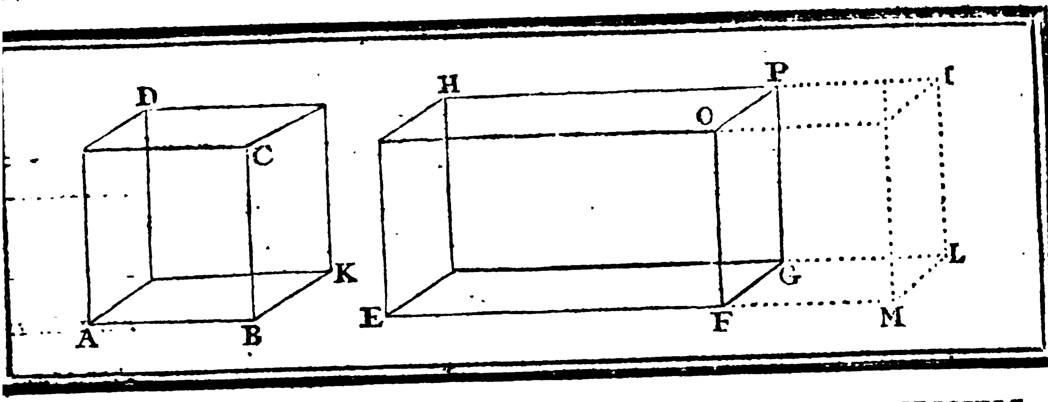
Si les angles d'inclinaison des lignes insistantes AG, &c. du ▭ KI ne sont pas égaux aux angles d'inclinaison des insistantes CM, &c. du ▭ MF.

Sur la baze KI, faites un ▭, ayant ses lignes insistantes, ou ⊥ : ou également inclinés que les insistantes du ▭ MF, & dans la même direction que celles de KI.
Et par consequent qui lui sera égal, (*par la Prop.* 30. *L.* 11.).
Le reste de la construction & de la demonstration sont les mêmes que dans le Cas precedent.

COROLLAIRE.

Les paralélipipédés égaux qui ont même hauteur; ont des bazes égales.

* *Il est aisé à demontrer que MQ, est un ▭, par la Prop.* 7. 8. 9. & 10.



PROPOSITION XXXII. *THEOREME XXVII.*

Les paralelipipédes (BD & EP) dont les hauteurs (BC & FO) sont égales: sont entr'eux comme leurs bazes (AK & EG).

HYPOTHESE.
Les hauteurs BC & FO, des ⏢ BD & EP, sont égales.

THESE.
⏢ *BD*: ⏢ *EP* = *baze AK* : *baze EG.*

Préparation.

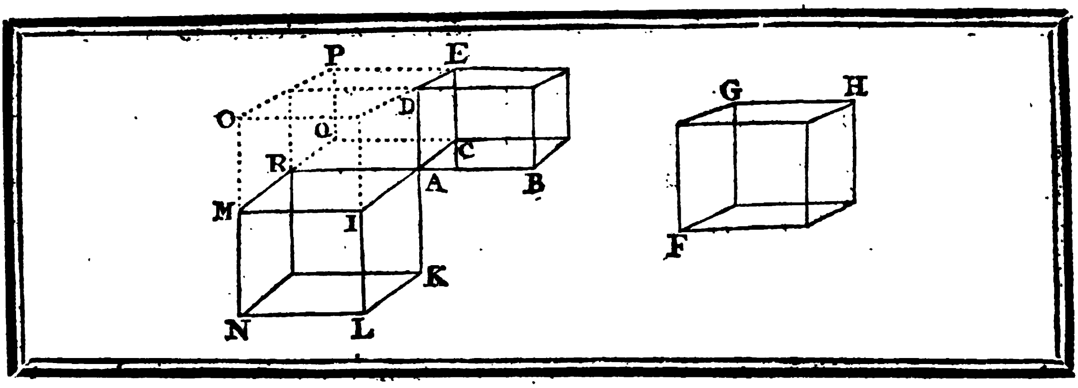
1. Prolongez EF en M. — Dem. 2. L. 1.
2. Faites sur FG avec FM, le Pgr. FL = Pgr. KA, qui sera dans la même direction avec le Pgr. EG de sorte que les Pgr. EG, & FL, fassent ensemble le Pgr. EL. — Prop. 44. L. 1.
3. Achevez le ⏢ FI.

DEMONSTRATION.

Puisque la baze FL du ⏢ FI, est = à la baze AK du ⏢ BD (*Prép.* 2.)

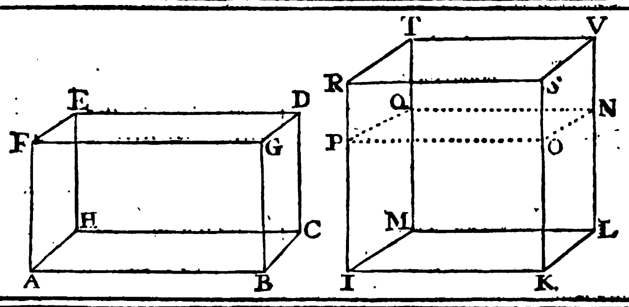
1. Le ⏢ FI est = au ⏢ BD. — Prop. 31. L. 11.
2. Partant ⏢ FI : ⏢ EP = ⏢ BD : ⏢ EP. — Prop. 7. L. 5.
   Mais ⏢ FI : ⏢ EP = baze FL : baze EG. — Prop. 25. L. 11.
   Et baze FL est = à la baze AK. (*Prép.* 2.)
3. Donc ⏢ BD : ⏢ EP = baze AK : baze EG. — Prop. 11 & 7. L. 5.

C. Q. F. D.



Le ▱ OC est coupé par le Plan Plle RD. (*Prép.* 4.).
9. Partant baze RC : baze AM = ▱ AP : ▱ OA. Prop. 25. L. 11.
Et baze RC : baze AM = AC : AI. Prop. 1. L. 6.
10. Donc AC : AI = ▱ AP : ▱ OA. Prop. 11. L. 5.
Enfin le ▱ OK étant coupé par le Plan Plle AM. (*Prép.* 4.)
11. On demontrera de même que AD : AK = ▱ AO : ▱ AN.
Or les trois raisons, de AB à AR, AC à AI, & AD à AK sont égales à la raison de AB à GH. (*Arg.* 6.).
12. Partant les quatres ▱s BE, AP, AO, & AN, forment une suite de grandeurs entre lesquels regne une même raison (*de AB* : *GH*). Prop. 11. L. 5.
13. Donc ils sont proportionels. Def. 6. L. 5.
14. Partant le ▱ BE est au ▱ AN, en raison triplée de AB à GH. Def. 11. L. 5.
Or le ▱ AN est = & ∽ au ▱ FH. (*Prép.* 2.).
15. Donc le ▱ BE est au ▱ FH, en raison triplée de AB à GH. (ou comme $AB^3 : GH^3$. *Ap. Prop.* 7.).

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIV. *THEOREME XXIX.*

LEs parallelipipédes égaux (AD & IV) ont leurs bazes (Pgr. AC & Pgr. IL) & leurs hauteurs (GB & IR) reciproquement proportionelles. Et les paralelipipédes (AD & IV) dont les bazes (Pgr. AC & Pgr. IL) & les hauteurs (GB & IR) sont reciproquement proportionelles: sont égaux.

HYPOTHESE.	THESE.
⌸ *AD est* = ⌸ *IV.*	*Baze AC : Baze IL = hauteur IR : hauteur GB.*

I. Demonstration.

LEs paralelipipédes donnés peuvent être.
I. De même hauteur } & également incliné sur leur bazes.
II. De differente hauteur }
III. Ayant des inclinaisons differentes; comme si l'un étoit ⊥ sur sa baze, & l'autre oblique.

CAS I.

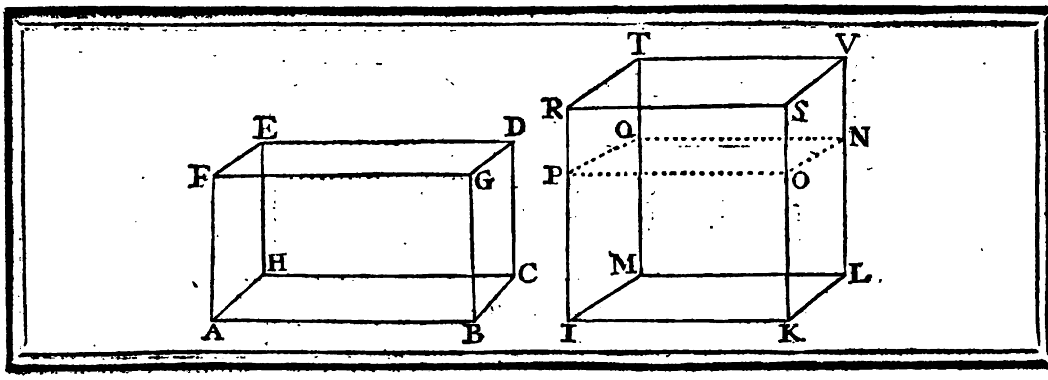
Lorsque les ⌸s ont la même hauteur, *c. a. d.* IR = GB.

PUisque les ⌸s donnés sont égaux & qu'ils ont la même hauteur.
1. Leurs bazes sont égales. (*Corollaire de la Prop.* 31. *L.* 11.).
2. Donc baze AC : baze IL = hauteur IR : hauteur GB. Def. 6. L. 5.

C. Q. F. D. 1.

CAS II.

Lorsque IR est > GB.



I. Préparation.

1. COupez de la hauteur RI la partie PI = à la hauteur BG.
2. Par le point P, faites passer le Plan PONQ, Plle à la baze IL.

PUisque les paralelipipédes AD & IN ont la même hauteur. (*1. Prép.* 1.).
1. Le ▱ AD : ▱ IN = baze AC : baze IL. Prop. 32. L. 11.
 Or ▱ AD est = au ▱ IV. (*Hyp.*).
2. Donc ▱ AD : ▱ IN = ▱ IV : ▱ IN. Prop. 7. L. 5.
3. Partant ▱ IV : ▱ IN = baze AC : baze IL. Prop. 11. L. 5.
 Le ▱ IV est coupé par le Plan PONQ. (*1. Prép.* 2.).
4. Donc ▱ PV : ▱ IN = baze PS : baze KP. Prop. 25. L. 11.
5. Donc en composant ▱ IV : ▱ IN = baze KR : baze KP. Prop. 18. L. 5.
 Mais baze KR : baze KP = RI : PI. Prop. 1. L. 6.
6. C'est pourquoi ▱ IV : ▱ IN = RI : PI. Prop. 11. L. 5.
 Or ▱ IV : ▱ IN = baze AC : baze IL. (*Arg.* 3.)
 Et PI = GB, (*1. Prép.* 1.).
7. Partant baze AC : baze IL = IR : BG. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. II.

CAS III.

Lorsque le ▱ IV à un inclinaison differente que le ▱ AD.

II. Préparation.

COnstruiséz un ▱ de même hauteur que le ▱ IV, ayant la même inclinaison que le ▱ AD.

PUisque le ▱ construit à la même baze & la même hauteur que l'oblique (*II Prép.*
1. Ce ▱ sera égal au ▱ donné IV. Prop. 31. L. 11.
 Or ce ▱ construit est en raison reciproque de sa baze & de sa hauteur avec le ▱ AD. (*Cas II.*).
2. Donc le ▱ IV sera aussi en raison reciproque avec le ▱ AD. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. III.

HYPO-

HYPOTHESE.	THESE.
Baze IL *: baze* AC = *hauteur* GB *: hauteur* IR.	▱ *AD est* = ▱ *IV.*

II. DEMONSTRATION.

La Préparation est la même que pour le Cas II, precedent.

PUisque les ▱. IN & AD ont la même hauteur (1. *Prép.* 1.).
1. Le ▱ IN : ▱ AD = baze IL : baze AC. — Prop. 32. L. 11.
Or baze IL : baze AC = hauteur GB : hauteur IR (*Hyp.*).
2. Donc ▱ IN : ▱ AD = hauteur GB : hauteur IR. — Prop. 11. L. 5.
Et comme PI est = BG (1. *Prép.* 1.).
3. Le ▱ IN : ▱ AD = hauteur PI : hauteur IR. — Prop. 7. L. 5.
Mais PI : IR = Pgr. PK : Pgr. KR. — Prop. 1. L. 6.
Et Pgr. KP : Pgr. KR = ▱ IN : ▱ IV. — Prop. 32. L. 11.
4. Donc le ▱ IN : ▱ AD = ▱ IN : ▱ IV. — Prop. 11. L. 5.
Or le ▱ IN est égal à lui même & il est le premier & troisieme terme de la proportion.
5. Partant le ▱ AD est = au ▱ IV. — Prop. 14. L. 5.

C. Q. F. D. 1.

Les Demonstrations pour le premier & le troisieme Cas dans cette Hypothese, sont les mêmes, c'est pourquoi nous les obmettons.

REMARQUE I.

CE qui vient d'être Demontré dans les Propositions 25, 29, 30, 31, 32, 33 & 34. *au sujet des paralelipipédes; est aussi vrai, par rapport aux prismes triangulaires; puisque un tel prisme est la moitié de son paralelipipéde:* par la Proposition 28. de ce Livre, *d'où l'on peut conclure.*

I. Si un prisme triangulaire est coupé par un Plan Plle aux plans opposés: les deux prismes provenants, seront entr'eux comme les parties du Pgr. qui sert pour baze à tout le prisme.

II. Les prismes triangulaires qui ont même baze, ou bazes égales & dont les hauteurs sont égales: sont égaux.

III. Les prismes triangulaires qui ont même hauteur: sont entr'eux comme leurs bazes.

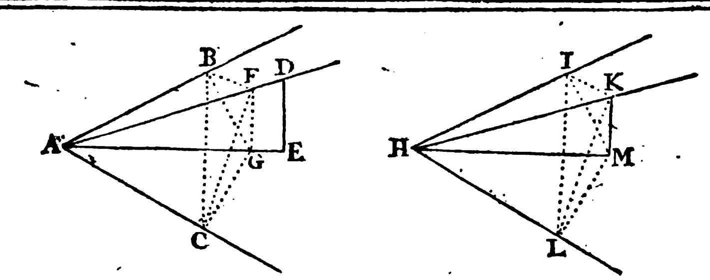
IV. Les prismes triangulaires semblables: sont entr'eux en raison triplée de leurs cotés homologues.

V. Les prismes triangulaires égaux: ont leurs bazes, & hauteurs reciproquement proportionelles. & les prismes triangulaires dont les bazes & les hauteurs, sont reciproquement proportionelles: sont égaux.

REMARQUE II.

LEs mêmes propriétés conviennent aux prismes dont les Plans opposés Plle. sont des polygones quelconques. Puisqu'il a été démontré (*Proposition* 20. *Livre* 6.) qu'on peut diviser ces polygones opposés semblables, dans un pareil nombre de triangles semblables; si donc on fait passer des Plans par les diagonales homologues qui forment ces triangles & qui sont Plle chacun à chacun: ces Plans diviseront les prismes polygones, en autant de prismes triangulaires, qu'il y a de triangles dans leurs Plans opposés Plle.

Or ces prismes triangulaires partielles étant dans le Cas des précedents de la premiere Remarque. On peut conclure par la (*Proposition* 12. *Livre* 5.) *que les mêmes propriétés conviennent aux prismes-polygones.*



PROPOSITION XXXV. *THEOREME XXX.*

Si deux angles plan (BAC & IHL) sont égaux, & que de leurs sommets (A & H) on ait élevé hors de leurs Plans des lignes (A D & H K) qui fassent avec leurs cotés respectifs (savoir AD avec AB & AC; HK avec IH & HL) des angles égaux (∀ BAD = ∀ IHK & ∀ DAC = ∀ KHL), que de deux points (D & K) pris à volonté dans ces lignes élevées (A D & H K) on abaisse des perpendiculaires (DE & KM) sur les Plans des angles donnés (BAC & IHL), & enfin que des points (E & M) ou les perpendiculaires touchent ces Plans, on tire des droites (AE & HM) aux sommets (A & H) de ces angles donnés: ces droites (AE & HM) feront avec les lignes élevées (AD & HK) des angles (DAE & KHM) qui feront égaux.

HYPOTHESE.

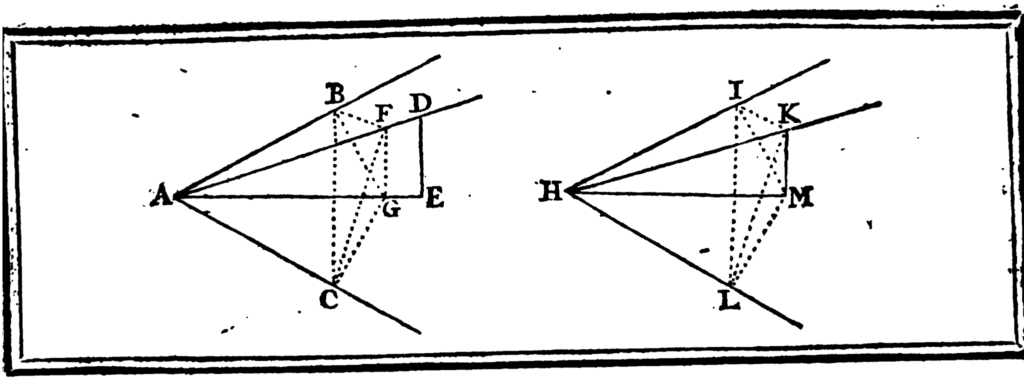
I. Au dessus les Plans des ∀ égaux BAC & IHL, & aux sommets A & H; on a élevés des droites AD & HK faisant les ∀ BAD & DAC égaux aux ∀ IHK & KHL, chacun à chacun.
II. De deux points D & K, pris dans ces droites AD & HM, on a abaissés des ⊥s DE & KM, sur les Plans BAC & IHL.
III. Des points E & M ou les ⊥s touchent ces Plans, on a tirés des droites AE & MH aux sommets A & H.

THESE.

∀ D*AE est* = ∀ *KHM*.

Preparation.

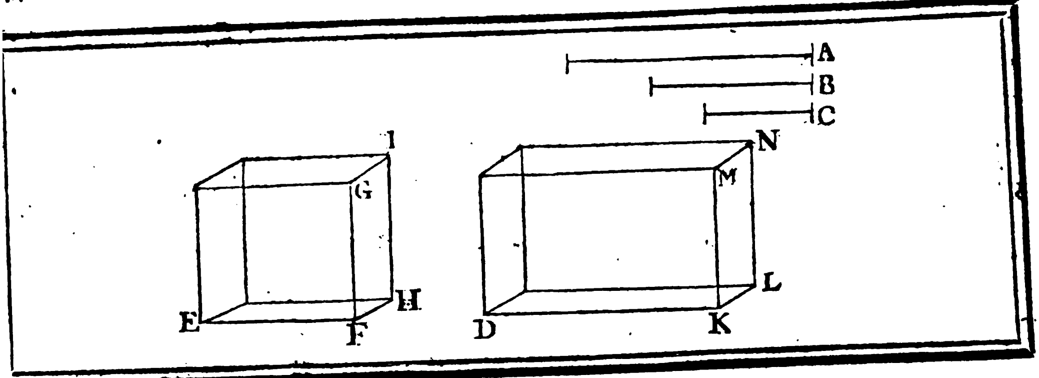
1. Faites AF = HK. Prop. 3. L. 1.
2. Tirez FG, Plle à DE, jusqu'à la rencontre du Plan BAC, & G. Prop. 31. L. 1.
3. Du point G, dans le Plan BAC, tirez CG, ⊥ sur AC; & GB, ⊥ sur AB. Prop. 12. L. 1.
4. Du point K dans le Plan IHL, tirez IM, ⊥ sur HI; & ML ⊥ sur HL. Prop. 12. L. 1.
5. Tirez BF, BC & FC; Item IK, IL & LK. Dem. 1. L. 1.



DEMONSTRATION.

Puisque F G est Plle à D E qui est ⊥ sur le Plan B A C. (*Hyp.* III.)
1. La ligne G F est ⊥ sur le même Plan B A C. Prop. 8. L. 11.
Et les ∀ F G B, F G A, & F G C sont ∟. Def. 3. L. 11.
2. Partant le □ sur A F est = aux □ sur F G + □ sur G A. Prop. 47. L. 1.
Mais le □ sur A G est = □ A B + □ B G. (*Prép.* 3.) & Prop. 47. L. 1.
3. Donc le □ sur A F est = □ F G + □ A B + □ B G. Ax. 1. L. 1.
Or le □ G B + □ F G sont = au □ B F. (*Prép.* 3.) Prop. 47. L. 1.
4. Partant le □ sur A F est aussi = □ B F + □ A B.
5. Donc ∀ A B F, est ∟. Prop. 48. L. 1.
6. De la même manière on demontrera que ∀ F C A, est ∟.
7. Item que les ∀ K I H & K L H, sont ∟.
Dans les △ F C A & K L H; la ligne H K est = A F, (*Prép.* 1.) les ∀ A C F & K L H, sont ∟, (*Arg.* 6. & 7.) & les ∀ F A C & K H L, égaux (*par Hyp.* 1.).
8. Donc les cotés A C & C F sont égaux aux cotés H L & L K, chacun à chacun. Prop. 26. L. 1.
9. De la même façon A B est = à H I, & B F = I K.
10. Partant dans les △ B A C & I H L; les bazes B C & I L sont égales, & les ∀ A C B & A B C = aux ∀ H L I & H I L, chacun à chacun. Prop. 4. L. 1.
Si donc on retranche ces ∀ égaux, des quatres angles droits A C G, A B G, H L M & H I M.
11. Les angles restants seront égaux, savoir ∀ B C G = ∀ I L M & ∀ C B G = ∀ L I M. Ax. 5. L. 1.
Puis donc que les △ G B C & I M L ont les bazes B C & I L égales, (*Arg.* 10.).
Et que les ∀ sur ces bazes sont égaux, chacun à chacun, (*Arg.* 11.).
12. Les cotés B G & C G seront égaux aux cotés I M & M L. Prop. 26. L. 1.
Dans les △ B A G & H I M, le coté A B est = à H I, (*Arg.* 9.) B G = I M, (*Arg.* 12.) & les ∀ compris A B G & H I M des ∟. (*Prép.* 3 & 4.)
13. Partant A G = H M. Prop. 4. L. 1.
Or le □ sur A F (= □ A G + □ G F *Arg.* 2.) est = au □ sur H K (= □ H M + □ K M *Hyp.* 1. & *Prop.* 47. *L.* 1.). parce que A F est = H K. (*Prép.* 1.).
Si donc on retranche du □ A F le □ G A, & du □ H K le □ H M qui sont égaux. (*Arg.* 13. & *Prop.* 46. *L.* 1. *Corol.* 3.).

14. Le



PROPOSITION XXXVI. *THEOREME XXXI.*

Si trois lignes droites (A, B & C) sont en proportion: le paralelipipéde (DN) construit de ces trois lignes, sera égal au paralelipipéde équiangle (EI) construit avec la moyenne (B).

Hypothese.

I. Les trois droites A, B & C sont en proportion c: a: d: A : B = B : C.

II. Le ▭ DN, est construit de ces trois lignes c: a: d: DK = A, MK = B, & KL = C.

III. Le ▭ équiangle EI, est construit de la moyenne B, c: a: d: EF = FG = FH = B.

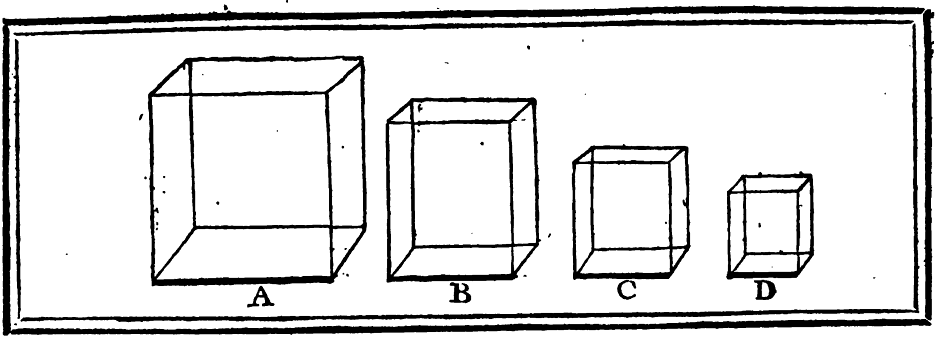
These.

Le ▭ EI est = au ▭ DN.

Demonstration.

Puisque DK : EF = EF ou FH : KL. (*Hyp.* 2.)
Et que ∀ plan EFH est = ∀ plan DKL. (*Hyp.* 3.).
1. Le Pgr. DL, baze du ▭ DN est = au Pgr. EH, baze du ▭ EI. Prop. 14. L. 6.
De plus les ∀ plan GFE & GFH, compris de l'élevée FG, & des cotés EF & FH, étant égaux aux ∀ plan MKD & MKL, compris de l'élevée KM & de DK & KL, chacun à chacun. (*Hyp.* 3.) & que FG est = KM. (*Hyp.* 2 & 3.).
2. La perpendiculaire abaissée du point G, sur la baze EH, sera égal à la perpendiculaire abaissée du point M, sur la baze DL. (*Cor. de la Prop.* 35. *L.* 11.) Def. 4. L. 6.
3. Partant le ▭ EI aura la même hauteur que le ▭ DN.
Or la baze EH du ▭ EI est = à la baze DL du ▭ DN (*Arg.* 1.). Prop. 31. L. 11.
4. Donc le ▭ EI est = au ▭ DN.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVII. *THEOREME XXXII.*

SI quatres lignes droites (A, B, C & D) font proportionelles (c. a. d. que $A : B = C : D$) : Les paralelipipédes femblables & femblablement conftruits fur les deux premieres (A & B), feront proportionels aux paralelipipédes femblables & femblablement conftruits fur les deux dernières (C & D). Et fi deux paralelipipédes femblables & femblablement pofés fur deux lignes (A & B); font proportionels à deux autres paralelipipédes, auffi femblables & femblablement pofés fur deux autres droites (C & D) : les cotés homologues (A & B) des premiers; feront proportionels aux cotés homologues (C & D) des derniers.

Hypothese.

I. $A : B = C : D$.
II. Sur A & B on a conftruits des ▭ ∽.
III. Item fur C & D.

These.

▭ A : ▭ B = ▭ C : ▭ D.

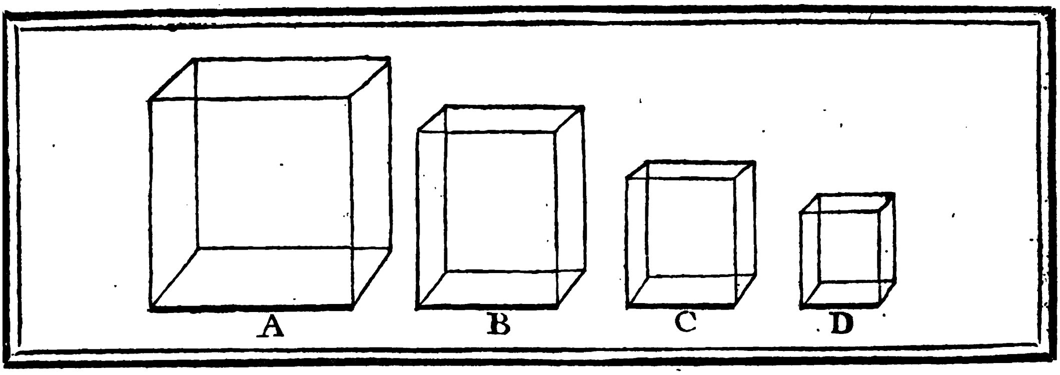
Demonstration.

PUifque le ▭ A eft ∽ ▭ B: (*Hyp.* 2.).

1. Le ▭ fur A : ▭ fur B $= A^3 : B^3$ *. Prop. 33. L. 11.
2. De même le ▭ fur C : ▭ fur D $= C^3 : D^3$.
   Mais la raifon de A à B étant égale à la raifon de C à D. (*Hyp.* 1.).
3. Il s'enfuit que trois fois la raifon de A à B eft égale à trois fois la raifon de C à D. *c. a. d.* que $A^3 : B^3 = C^3 : D^3$. Ax. 6. L. 1.
4. Partant le ▭ fur A : ▭ fur B = ▭ fur C : ▭ fur D. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

* *Voyez Append.* Prop. 7. & Hyp. 1. Cor. 2.



HYPOTHESE.

I. Le ▭ sur A est ∽ au ▭ sur B.
II. Item le ▭ sur C est ∽ au ▭ sur D.
III. Le ▭ sur A : ▭ sur B = ▭ sur C : ▭ sur D.

THESE.

A : B = C : D.

II. DEMONSTRATION.

Puisque le ▭ sur A est ∽ au ▭ sur B (*Hyp.* 1.)

1. Le ▭ sur A : ▭ sur B = $A^3 : B^3$. Prop. 33. L. 11.

De même le ▭ sur C est ∽ au ▭ sur D. (*Hyp.* 2.).

2. Le ▭ sur C : ▭ D = $C^3 : D^3$. Prop. 33. L. 11.

Or le ▭ sur A : ▭ sur B = ▭ C : ▭ D. (*Hyp.* 3.).

3. Donc $A^3 : B^3 = C^3 : D^3$. Prop. 11. L. 5.

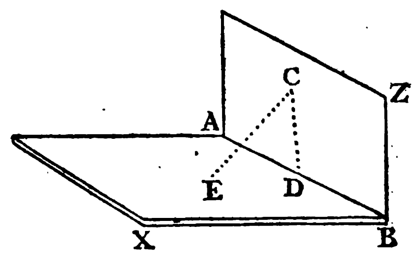
4. Partant A : B = C : D. Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.

REMARQUE.

I. *Puisque le prisme triangulaire est la moitié de son paralelipipède* (par la Proposition 28. de ce Livre.) *Il s'ensuit* (par Ax. 7. L. 1.) *que la même vérité à lieu pour les prismes triangulaires semblables.*

II. *On peut aussi l'appliquer aux prismes-polygones semblables ; puisqu'ils peuvent être divisés par des Plans en prismes triangulaire partielles,* (par la Remarque 2. de la Proposition 34. de ce Livre).



PROPOSITION XXXVIII. THEOREME XXXIII.

SI deux Plans (AZ & AX) sont perpendiculaires l'un à l'autre: toute ligne perpendicu'aire (CD) tirée d'un point (C) quelconque de l'un de ces Plans (AZ) à l'autre (AX) passera par leur commune section (AB).

HYPOTHESE.	THESE.
Le Plan AZ est ⊥ à l'autre Plan AX.	*La ligne CD abaissée d'un point C, situé dans le Plan AZ ⊥ sur le Plan AX, passe par la commune section AB.*

DEMONSTRATION.

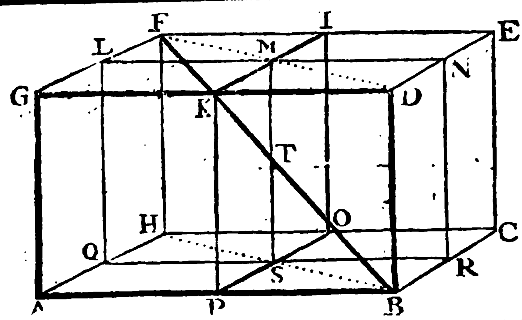
SI non.
On peut méner une ⊥ comme CE, qui ne passe point par la commune section AB.

Préparation.

DU point C, abaissez dans le Plan AZ sur la ligne AB, une ⊥ CD. Prop. 12. L. 1.

PUisque CD est ⊥ sur la commune section AB. (*Prép.*).
1. CD sera ⊥ sur le Plan AX. Def. 4. L. 11.
Mais EC est ⊥ sur le même Plan. (*par la Sup.*).
2. Donc on a mené d'un même point C deux perpendiculaires EC & CD au Plan AX.
3. Ce qui est impossible. Prop. 13. L. 11.
4. Partant EC n'est point ⊥ sur AX.
5. Par consequent la perpendiculaire CD abaissée d'un point C, quelconque du Plan AZ sur le Plan AX (qui y est perpendiculaire) passe par leur commune section AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIX. THEOREME XXXIV.

SI dans un paralelipipéde (AE) on divise en deux également les cotés (GD, AB; GF, AH; FE, HC; ED & BC) des Plans opposés, (FA & EB, Item FC & GB) & que par les points de section (K, P, O, I, & L, Q, R, N) l'on fait passer des Plans (IP & LR): la ligne de commune section (MS) de ces Plans, & le diametre (FB) du paralelipipéde (AE) se diviseront mutuellement en deux au point T.

Hypothese.

I. Dans le ▱ AE, dont le diametre est FB; les cotés DG, AB, &c. sont coupés en deux également aux points K, P, &c.

II. On a fait passer les Plans KO & LR par les points, K, P, O, I, & L, Q, R, N.

Thése.

La ligne de commune section de ces Plans qui est MS, & le diametre FB, se divisent mutuellement en deux au point T.

Préparation.

TIrez SB, SH, FM & MD. Dem. 1. L. 1.

Demonstration.

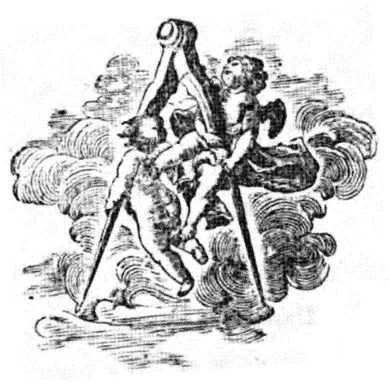
LEs cotés HQ & SQ étant égaux aux cotés BR & SR. (*Hyp.* 1.) & Prop. 34. L. 1.
Et ∀ HQS = ∀ SRB. Prop. 29. L. 1.

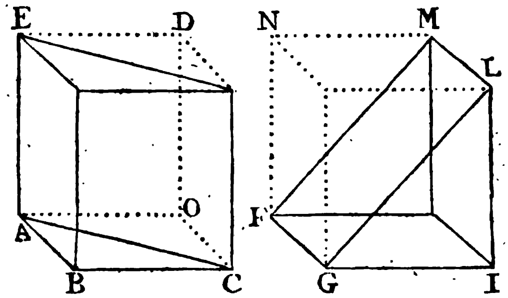
1. La baze HS du △ HSQ sera = à la baze SB du △ BSR, & ∀ HSQ = ∀ RSB. Prop. 4. L. 1.
Or les ∀ RSH & HSQ sont ensemble = 2 L. Prop. 13. L. 1.
2. Partant ∀ RSH + ∀ RSB = 2 L. Ax. 1. L. 1.
3. D'où il suit que HSB est une droite. Prop. 14. L. 1.
4. On prouvera de même que FD est une droite.
De plus BD étant = & Plle à AG, & AG = & Plle à FH. Prop. 34. L. 1.
5. La ligne BD sera = & Plle à FH. Prop. 9. L. 11. Ax. 1. L. 1.

6. Et

Et par consequent FD est = & Plle à HB. Prop. 33. L. 1. Prop. 7. L. 11.
D'où il suit que FB & MS, sont dans le même Plan FDBH.
Or dans les △ FMT, & TSB; les cotés FM & SB, sont égaux. (parce que le △ FMI est = & ∽ △ HSO, & que HS est = SB, par Arg. 1.) de plus ∀ STB = ∀ FTM & ∀ FMT = ∀ TSB. Prop. 15. L. 1. Prop. 29. L. 1.
Donc MT = TS & FT = TB (*Prop*, 26. *L*. 1.), c. a. d. que la ligne de commune section des Plans KO & LR qui est MS, & le diametre du paralelipipéde qui est FB, se coupent mutuellement en deux au point T.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XL. *THEOREME XXXV.*

SI deux prismes (FL & EC) ont la même hauteur (LI & AE), mais que la baze de l'un (comme de FL) eſt un paralelogramme (FI), qui eſt le double de la baze triangulaire (ABC) de l'autre (EC): le premier priſme (LF) ſera égal au ſecond (EC).

HYPOTHESE.	THÈSE.
I. Dans les priſmes FL *&* EC*; la hauteur* LI *eſt* = *à la hauteur AE.* *II. La baze du priſme* LF *eſt un Pgr. FI, & la baze du priſme* EC *un* △ *ABC.* *III. Le Pgr. FI eſt le double du* △ *ABC.*	*Le priſme* FL *eſt* = *au priſme* EC.

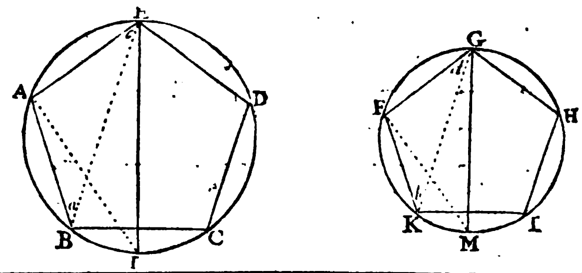
Préparation.

AChevez les ▱s NI & BD.

DEMONSTRATION.

PUiſque le Pgr. FI, baze du priſme FL, eſt le double du △ ABC; baze du priſme EC. (*Hyp.* 2 & 3.).
Et que le Pgr. BO eſt auſſi le double du △ ABC. — Prop. 41. L. 1.
1. Le Pgr. FI eſt = au Pgr. BO.
De plus la hauteur LI étant = à la hauteur AE (*Hyp.* 1.).
2. Le ▱ BD eſt = au ▱ NI. — Prop. 31 L. 11.
Le priſme donné LF eſt la moitié du ▱ ND. }
Et le priſme EC, eſt la moitié du ▱ BD. } — Prop. 28. L. 11.
3. Partant le priſme FL eſt = au priſme EC. — Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION. I. *THEOREME I.*

Les polygones femblables (ABCDE & FGHIK) infcrits dans des cercles: font entr'eux comme les quarrez décrits fur les diamètres (EL & GM) de ces mêmes cercles.

HYPOTHESE.

I. Les polygones ABCDE & FGHIK font ∽.

II. Ils font infcrits dans des cercles.

THESE.

polygone ACE : polygone FIH = le □ fur le diamêtre EL eft au □ fur le diamêtre GM ou comme diamêtre $\overline{EL}^2$: diamêtre $\overline{GM}^2$. *

Préparation.

1. DAns le ⊙ ACD, tirez AL & BE. Item le diam. EL
2. Dans le ⊙ FMH tirez les lignes homologues FM & GK. Item le diamètre GM. } Dem. 1. L. 1.

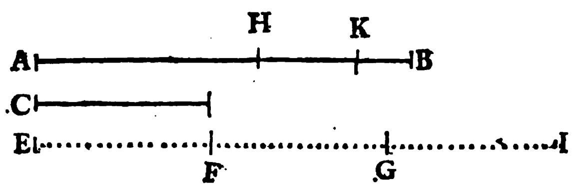
DEMONSTRATION.

PUifque les polygones ABCDE & GFKIH font ∽ (*Hyp.* 1.) que l'angle A ou EAB eft = à ∀ GFK & que AE : AB = FG : FK (*Déf.* 1. *L.* 6.).

1. Le △ ABE eft équiangle au △ FGK. — Prop. 6. L. 6.
2. C'eft pourquoi △ ABE eft ∽ △ GFK, & ∀ *a* = ∀ *b*, item ∀ *c* = ∀ *d*. Mais ∀ ELA eft = à ∀ EBA ou *a*, & ∀ GMF = ∀ GKF ou *b*. — Prop. 21. L. 3.
3. Partant ∀ ELA eft = à ∀ GMF. — Ax. 1. L. 1.
4. De même ∀ EAL = ∀ GFM. — Prop. 31. L. 3.
Et puifque dans les deux △ ALE & GFM, les deux ∀ ELA & EAL du premier font égaux aux deux ∀ GMF & GFM du fecond (*Arg.* 3. & 4.)
5. Le troifieme ∀ AEL du △ EAL fera = au troifieme ∀ FGM du △ FMG. — Prop. 32. L. 1.
6. Donc EL : AE = GM : GF. — Prop. 4. L. 6.
7. Et alternant EL : GM = AE : GF. — Prop. 16. L. 5.
Or AE & GF font des cotés homologues des polygônes ADB & FHK. De plus EL & GM font les diametres des cercles ou ces polygones font infcrits.
8. C'eft pourquoi polygone ABCDE : polygone FKIHG = $\overline{EL}^2 : \overline{GM}^2$ *. — Prop. 22. L. 6.

C. Q. F. D.

* Voyez Ap. Prop. 7.



LEMME.

SI deux grandeurs (AB & C) sont inégales, & qu'on retranche de la plus grande (AB) plus que la moitié (savoir AH), & du reste (HB) encore plus que la moitié (savoir HK), & qu'on continue ainsi de suite: on parviendra à avoir un reste (KB), qui sera plus petit que la moindre grandeur C.

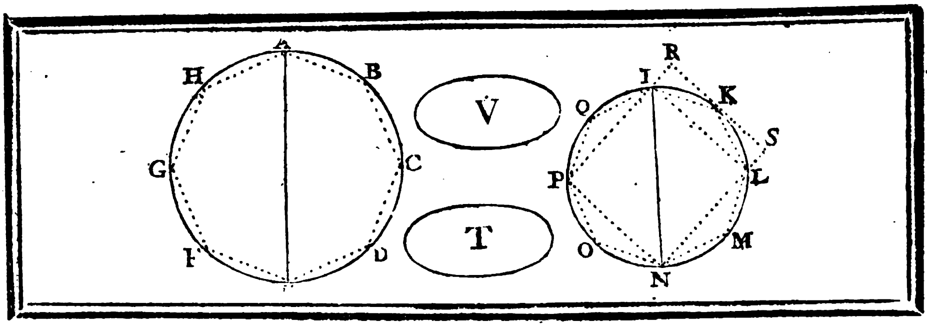
Préparation.

1. PRenez un multiple E I de la moindre C qui surpasse AB, & qui soit > 2 C. Dem. 1. L. 5.
2. Retranchez de AB, la partie HA > ½ AB. Dem. 2. L. 5.
3. Du reste HB, retranchez HK > ½ HB.
4. Continuez à retrancher plus de la moitié de ces restes consécutifs, jusqu'à ce que le nombre de fois soit égal au nombre de fois que C est contenu dans son multiple E I. Dem. 2. L. 5.

DEMONSTRATION.

LA grandeur E I est un multiple plus grand que deux fois la moindre grandeur C. (*Prép.* 1.).
Si donc on en retranche une grandeur GI = C.
1. Le reste savoir EG sera > que la moitié de EI.
Or E I est > AB. (*Prép.* 1.).
2. Partant la moitié de EI est > que la moitié de AB. Prop. 19. L. 5.
3. Donc GE sera beaucoup > que la moitié de AB.
Cependant HB est < que la moitié de AB. (*Prép.* 2.).
4. Donc GE est à plus forte raison encore > HB.
5. C'est pourquoi EF, moitié de EG, est > que la moitié de HB.
Et KB est < ½ HB. (*Prép.* 3.).
6. Partant EF est encore beaucoup > KB.
Et comme on peut continuer ce même raisonnement jusqu'à ce qu'on parvienne à une partie (EF) du multiple de la grandeur C, qui soit égale à C. (*Prép.* 4.).
7. Il s'ensuit que la grandeur C sera > que la partie restante (KB) de la plus grande AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. THEOREME II.

LEs cercles (AFD & ILP), font entr'eux comme les quarrez décrits sur leurs diamêtres (AE & IN).

Hypothese.	These.
Dans les cercles AFD & ILP on a tiré les diamêtres AE & IN.	$\odot AFD : \odot ILP = AE^2 : IN^2$.

Demonstration.

SI non.

AE^2 est à IN^2 comme le $\odot$ AFD est à une grandeur T (qui est $<$ ou $>$ que le $\odot$ ILP.)

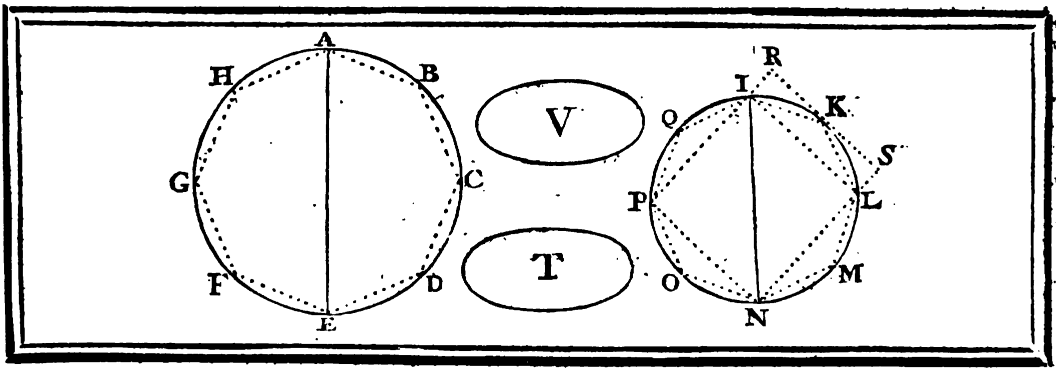
I. Supposition.

Soit T $<$ $\odot$ ILP de la grandeur V. *c. a. d.* $T + V = \odot ILP$.

I. Préparation.

1. DAns le $\odot$ LIP décrivez le $\square$ ILNP. Prop. 6. L. 4.
2. Divisez les arcs IL, LN, NP, & PI en deux, aux points K, M, Prop. 30. L. 3.
3. Tirez les lignes IK, KL, LM, MN, NO, OP, PQ & QI. Dem. 1. L. 1.
4. Par le point K, tirez SR Plle à LI. Prop. 31. L. 1.
5. Prolongez NL & PI, jusqu'en R & S, qui formeront le Rgle SRIL.
6. Inscrivez dans le $\odot$ ADF un polygone $\backsim$ au polygone du $\odot$ ILP.

 Puisque



Puisque le quarré circonscrit au cercle ILP est plus grand que ce cercle même. — Ax. 8. L. 1.

1. La moitié de ce quarré sera $>$ que la moitié du $\odot$ ILP. — Prop. 19. L. 5.
Mais le quarré inscrit ILNP est $=$ à la moitié du quarré circonscrit*.
2. Donc le $\square$ LIPN est $>$ que la moitié du $\odot$ ILP. — Ax. 1. L. 1.
Le Rgle SI est $>$ que le segment LKI. (*Prép.* 5. & *Ax.* 8. *L.* 1.).
3. Partant la moitié du Rgle SI est $>$ la moitié du segment LKI. — Prop. 19 L. 5.
Le $\triangle$ LKI est $=$ à la moitié du Rgle SI. — Prop. 41. L. 1.
4. Donc le $\triangle$ LKI est $>$ que la moitié du segment LKI. — Prop. 19. L. 5.
5. On prouvera de même que tous les $\triangle$ LMN, NOP, &c. sont chacun plus grand que la moitié du segment dans lesquels ils sont placés.
6. C'est pourquoi la somme de tous ces triangles sera plus grand que la somme de la moitié de tous les segments.
Si on continuoit à diviser les segments KI, IL &c. de même que les segments provenants de ces divisions.
On prouveroit de même.
7. Que les triangles provenants des droites qu'on tireroit dans ces segments, sont ensemble plus grands, que la moitié des segments dans lesquels ces triangles insistent.
Si donc on retranche du cercle ILP, plus que la moitié à savoir le $\square$ ILNP, & que des segmens restant (LKI, IQP, &c.), on retranche encore plus que la moitié, & ainsi de suite.
8. On parviendra à avoir pour reste des segmens dont la somme sera moindre que V. — Lemme de Prop. 2. L. 12.
Or le $\odot$ ILP est $=$ T $+$ V. (*par la* 1. *Sup.*).
Retranchant donc du $\odot$ ILP ces segments LKI, &c.
Et de T $+$ V la grandeur V, (qui est plus grand que ces segments).
9. Le reste savoir le polygone IKLMNOPQ sera $>$ T. — Ax. 5. L. 1.
Or le polygone ADFK : polygone ILOQ $=$ $\square$ sur AE : $\square$ sur IN. — Prop. 1. L. 12.

Et

* *Ce qui est évident puisque le coté de quarré circonscrit est égal au diamètre, & que le quarré du diamètre est* $=$ $\square$ *LI* $+$ $\square$ *LN* (*Prop.* 47. *L.* 1.) *mais IL est* $=$ *à LN.* (*Def.* 30. *L.* 1.) *partant le* $\square$ *circonscrit est* $=$ $\square$ *LI* $+$ $\square$ *LI* $=$ 2 $\square$ *LL.*

Et le □ fur AE : □ fur IN = ⊙ ACEG : T. (*Sup.*).
10. Donc le polygone ADFH : polygone ILOQ = ⊙ ACEG : T. Prop. 11. L. 5.
Mais le polygone ADFH eft < ⊙ ACEG. Ax. 8. L. 1.
11. Partant le polygone ILOQ eft < T. Prop. 14. L. 5.
Or le polygone ILOQ eft > que T. (*Arg.* 9.).
12. Donc T feroit > & < que le polygone ILOQ. (*Arg.* 9 & 11.)
13. Ce qui eft impoffible.
14. Donc T n'eft pas < que le cercle ILP.
15. D'où il fuit qu'il n'eft pas poffible que le quarré du diamêtre (AE) d'un cercle (ACEG), foit au quarré du diamêtre (IN) d'un autre cercle (ILP), comme le premier cercle (ACEG) à une grandeur moindre que le fecond cercle (ILP.) *

II. Suppofition.

Soit l'efpace ou grandeur T > que le cercle ILP.

II. Préparation.

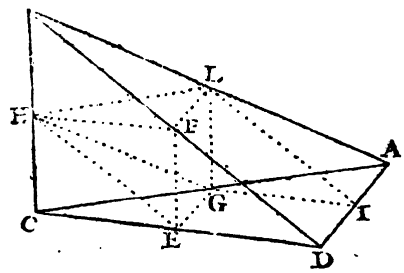
PRenez une grandeur ou efpace V, de manière que
T : ⊙ ACEG = ⊙ ILP : V.

PUifque le □ fur AE : □ fur IN = ⊙ ACEG : T.
16. On aura *invert.* T : ⊙ ACEG = □ fur IN : □ fur AE. Prop. 4. L. 5. Corol.
Or T : ⊙ ACEG = ⊙ ILP : V. (*II. Prép.*).
De plus T eft > ⊙ ILP. (*II. Sup.*).
17. Partant le ⊙ ACEG eft auffi > V. Prop. 14. L. 5.
De plus T : ⊙ ACEG = □ fur IN : □ fur AE (*Arg.* 16.).
Et T : ⊙ ACEG = ⊙ ILP : V. (*II. Prép.*).
18. Donc le □ fur IN : □ fur AE = ⊙ ILP : V. Prop. 11. L. 5.
Mais V < ⊙ ACEG. (*Arg.* 17.).
Et il eft demontré (*Arg.* 15.) qu'il n'eft pas poffible que le quarré du diamêtre (IN) d'un cercle (ILP,) foit au quarré du diamêtre d'un autre cercle (ACEG); comme ce premier cercle (ILP) à une grandeur moindre que le fecond (ACEG).
19. Partant V n'eft pas < que le cercle ILP.
20. Donc T n'eft pas > que le ⊙ ILP.
l'Efpace ou grandeur T n'étant donc ni < ni > que le cercle ILP.
(*Arg.* 14 & 19.).
21. T fera égal à ce cercle ILP.
22. Par confequent le ⊙ ACEG : ⊙ ILP = □ fur AE : □ fur IN Prop. 7. L. 5.
C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

LEs cercles font entr'eux comme les polygones femblables qui y font décrits.
(*Prop.* 1. *L.* 12. & *Prop.* 11. *L.* 5.)

* *Il eft aifé à remarquer que la même conclufion à lieu, lorfqu'on fuppoferoit que le ⊙ ILP, eft le premier, de même que fon diamêtre IN ; & le ⊙ ACEG avec fon diamêtre AE le fecond.*



PROPOSITION III. *THEOREME III.*

Toute pyramide (ABCD) ayant pour baze un triangle (ACD): peut être divisée * en deux prismes égaux & semblables, (IDEFLG & GLFHCE) & en deux pyramides (LGIA & LFHB) semblables & égales entr'elles, & semblables à la grande pyramide; de plus les deux prismes pris ensemble seront plus grands que la moitié de toute la pyramide (ABCD).

Hypothese.	These.
ABCD est une pyramide dont la baze ADC est un △.	*I. La partie du corps IDEFLG est un prisme $=$ & $\sim$ à la partie GLFECH.*
	II. La partie ALGI est une pyramide $=$ & $\sim$ à la partie BLFH.
	III. Ces pyramides ALGI & BLFH sont $\sim$ à la pyramide ABCD.
	IV. Les prismes IDEFLG & GLFCH sont ensemble $>$ que la moitié de la pyramide ABCD.

I. Préparation.

1. Coupez tous les cotés de la pyramide ABCD en deux également aux points L, F, H, E, G & I. — Prop. 10. L. 1.
2. Tirez les lignes LF, FH, FE, GE, GI, & IL, item LG & LH. — Dem. 1. L. 1.

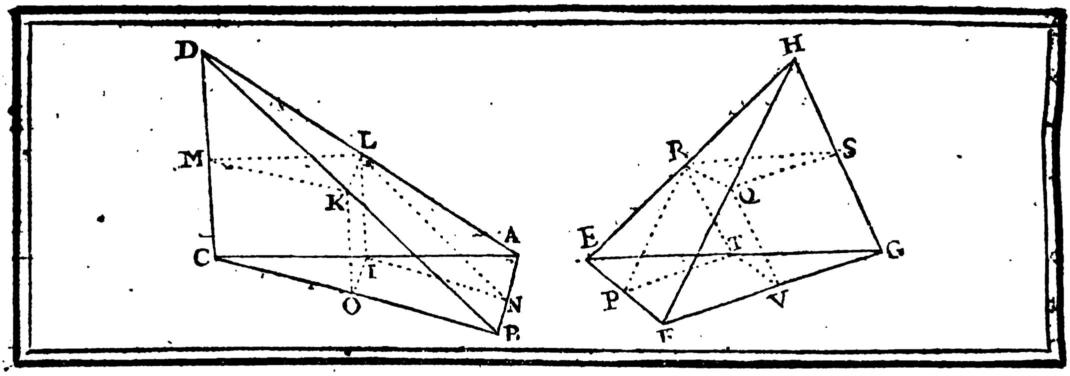
Demonstration.

Puisque dans le △ BCD les cotés BD & BC sont divisés en deux aux points F & H. (*Prép.* 1.)

1. BH : HC = BF : DF. — Prop. 19. L. 5.
2. Partant FH est Plle à DC. — Prop. 2. L. 6.
3. De même FE est Plle à BC.
4. Donc FECH est un Pgr. — Def. 35. L. 1.

5. On

* *En coupant le Corps par des Plans.*



PROPOSITION IV. THEOREME IV.

S'Il y a deux pyramides (ABCD & EFGH) de même hauteur ayant des bazes (ABC & EFG) triangulaires; & que chacune d'elles soit divisée en deux pyramides égales & semblables entr'elles, & semblables à leur tout, (savoir les pyramides DLKM & ANIL, pour la pyramide ABCD; & HRQP, & REPT pour la pyramide EFGH), & en deux prismes égaux (savoir LB & LC pour ABCD; & RF & RG pour EFGH) & que semblablement les quatres pyramides (LDKM, LINA, RQSH, & RTPE) provenues de cette premiere division soyent de rechef divisées; & qu'on continue cette division ainsi de suite: la baze (ABC) de l'une des pyramides données (ABCD) sera à la baze (EFG) de l'autre pyramide (EFGH) comme la somme de tous les prismes qui sont contenus dans la premiere pyramide (ABCD) est à la somme de tous les prismes qui sont contenus dans la seconde (EFGH) étant égaux en multitude.

HYPOTHESE.

I. Les pyramides triangulaires ABCD & EFGH, ont des hauteurs égales.

II. Elles sont coupées chacune en deux prismes égaux LB & LC; item RF & RG; & en deux pyramides égales & semblables entr'elles & semblable aux grandes pyramides dont elles sont partie.

III. Ces pyramides provenues LDMK, LNIA, RTPE & RQSH, sont supposées être divisées de même que les grandes; & ainsi de suite.

THESE.

La somme de tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD est à la somme de ceux qui sont dans la pyramide EFGH étant égaux en multitude; comme la baze ABC de la pyramide ABCD est à la baze EFG, de la pyramide EFGH.

DEMONSTRATION.

PUisque les pyramides ABCD & EFGH ont des hauteurs égales & que les prismes LB, LC, RF & RG ont chacun la moitié de cette hauteur. (*Hyp.* 1. & *Prop.* 3. *L.* 12.).

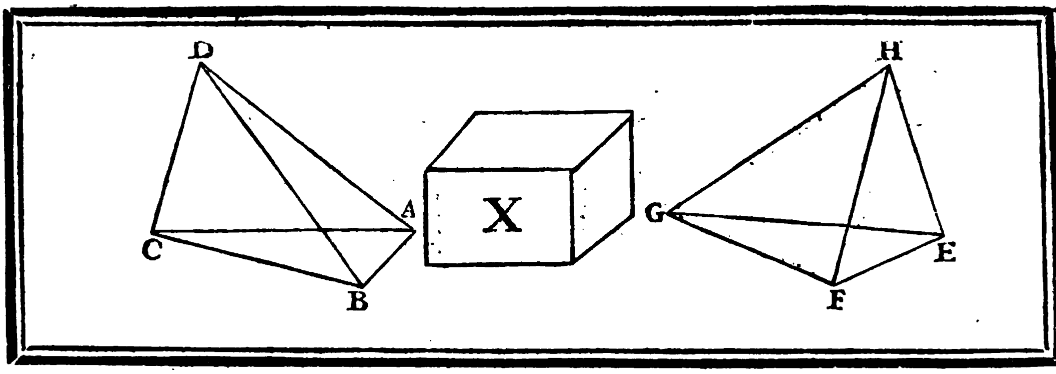
1. Ces prismes LB, LC, RF & RG ont la même hauteur. — Ax. 7. L. 1.

Les lignes BC & EG sont coupées en deux aux points O, & V. — Prop. 3. L. 12.

2. Donc

Donc CB : CO = GF : GV. Prop. 19 L. 5. Prop. 16. L. 5.
Partant △ ABC : △ IOC = △ EFG : △ TVG. Prop. 22. L 6.
Et Alt. △ ABC : △ EFG = △ IOC : △ TVG. Prop. 16. L. 5.
De plus baze IOC : baze TVG = prisme LKMCOI : pr. RQSGVT. Co. III Rem de Prop. 34. L. 11.
6. Et prisme LKOBNI : prisme LKMCOI = prisme RQVFPT : prisme RQSGVT, (car ils ont la même hauteur, (*Arg.* 1.) & ils sont égaux deux à deux (*Hyp.* II.). Prop. 7. L. 5.
7. Partant prisme LB + prisme LC : prisme LC = prisme RF + prisme RG : prisme RG. Prop. 18. L. 5.
8. Et Alt. prisme LB + prisme LC : prisme RF + prisme RG = prisme LC : prisme RG. Prop. 16. L. 5.
Mais prisme LC : prisme RG = baze IOC : baze TVG. (*Arg.* 5.)
Et baze IOC : baze TVG = baze ABC : baze EFG (*Arg.* 4.).
9. Donc le prisme LB + pr. LC : pr. RF + pr. RG = baze ABC : baze EFG. Prop. 11. L. 5.
Si les pyramides restans LKMD & LINA, item RQSH & EPTR sont divisées de la même manière que les pyramides ABCD & EFGH, on prouvera de même que
10. Les quatres prismes provenant des premieres pyramides LKMD & ANIL auront la même raison aux quatres prismes provenant des dernières RQSH & EPTR, que les bazes LKM & ANI ont aux bazes RQS & EPT. (*par Hyp.* III. & *Arg.* 9.).
Et dans la précedente il est demontré que les bazes LKM & ANI, sont chacun = IOC, item RQS & EPT chacun = TVG.
De plus △ ABC : △ EFG = △ IOC : △ TVG, (*Arg.* 4.).
11. C'est pourquoi la somme de tous les prismes contenus dans la pyramide de ABC est à la somme de tous les prismes contenus dans la pyramide EFGH comme la baze ABC est à la baze EFG. Prop. 12. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION V. *THEOREME V.*

LEs pyramides (ABCD & EFGH) dont les bazes (ABC & EFG) font des triangles, & qui ont la même hauteur: font entr'eux comme leurs bazes (ABC & EFG).

Hypothese.	These.
I. Les pyramides ABCD & EFGH ont pour bazes les △ ABC & EFG. *II. Ils ont même hauteur.*	*Pyramide ABCD : pyramide EFGH = baze ABC : baze EFG.*

Demonstration.

SI non:
Pyramide ABCD : pyramide EFGH > baze ABC : base EFG.

Préparation.

1. PRenez un folide X qui foit < que la pyramide ABCD, de façon que X : pyramide EFGH = baze ABC : baze EFG.
2. Divifez les pyramides ABCD & EFGH, felon la Prop. 3. L. 12.

PUifque les deux prifmes provenus de la premiere divifion font > que la moitié de la pyramide ABCD; & que les quatres fuivants provenus de la feconde divifion font encore > que les moitiés des pyramides de la première divifion, & qu'on peut le continuer ainfi de fuite (*par la Prop. 3. L. 11.*).

1. Il eft évident que la fomme de tous les prifmes contenus dans la pyramide ABCD fera plus grand que le folide X qui a été pris moindre que la pyramide ABCD. {Lemme. de Prop. 2. L. 12.

Or

Or tous les prifmes contenus dans la pyramide ABCD, font à tous les prifmes contenus dans la pyramide EFGH, comme la baze ABC eft à la baze EFG. Prop.4. L. 12.
Et le folide X : pyramide EFGH = baze ABC : baze EFG. (*Prép.* 1.)
2. Partant tous les prifmes contenus dans la pyramide ABCD font à tous les prifmes contenus dans la pyramide EFGH, comme le folide X eft à la pyramide EFGH. Prop.11. L.5.
Or tous les prifmes contenus dans la pyramide ABCD font plus grand que le folide X. (*Arg.* 1.).
3. Donc tous les prifmes contenus dans la pyramide EFGH font plus grand que la pyramide EFGH même. Prop.14. L 5.
4. Ce qui eft impoffible. Ax. 8. L. 1.
5. Partant aucun folide (comme X) qui eft moindre que la pyramide ABCD, ne peut avoir la même raifon à la pyramide EFGH, qu'a la baze ABC à la baze EFG.
Et comme la même Demonftration a lieu pour tout autre folide plus grand que la pyramide ABCD.
6. Il s'enfuit que la pyramide ABCD : pyramide EFGH = baze ABC: baze EFG.

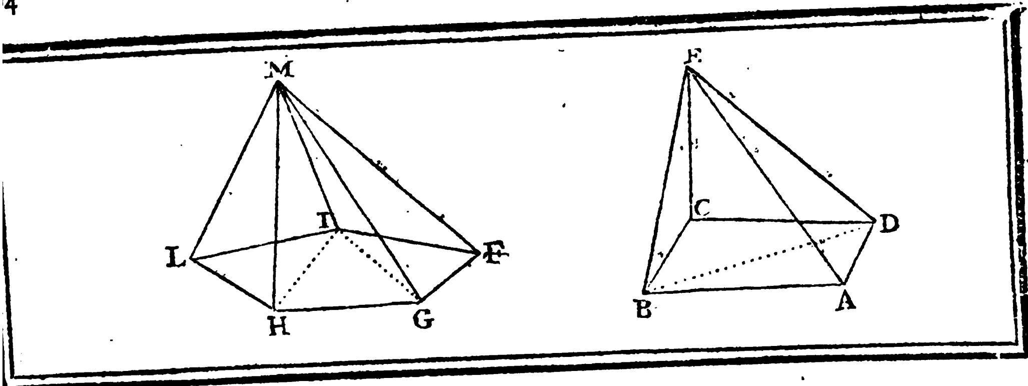
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Les pyramides qui ont même hauteur, & pour bazes des triangles égaux: font égales (*Prop.* 14 *&* 16. *L.* 5.).

COROLLAIRE II.

Les pyramides égales qui ont des bazes triangulaires égales: ont la même hauteur.



PROPOSITION VI. THEOREME VI.

Les pyramides (FGLIM & ABCDE) dont les bazes (FGHLI & ABCD) sont des polygones & qui ont même hauteur: sont entr'eux comme leurs bazes.

HYPOTHESE.

I. Les pyramides FGHLI & ABCD, ont pour bazes des polygones.

II. Ils ont même hauteur.

THESE.

Pyramide MFGHLI : pyramide ABCDE = baze FILHG : baze ABCD.

Préparation.

1. Divisez les bazes FILHG & ABCD en triangles par les lignes GI & IH, item DB:
2. Supposé qu'il passe des Plans par ces lignes, & par les sommets des pyramides ou ces lignes de division se trouvent, qui diviseront chacune de ces pyramides en autant de pyramides partielles que chaque baze contient de triangles.

DEMONSTRATION.

Puisque les pyramides triangulaires ILHM & ABDE ont même hauteur, (*Hyp.* II. & *Prép.* 2.).

1. La pyramide IHLM : pyramide ABDE = baze HIL : baze ABD. } Prop. 5. L. 12.
2. De même pyr. GIHM : pyramide ABDE = baze HIG : baze ABD. }
3. Partant pyramide IHLM + pyramide GIHM : pyramide ABDE = baze HIL + baze HIG : baze ABD. Prop. 24. L. 5.
4. De plus pyramide FIGM : pyramide ABDE = baze FIG : baze ABD. Prop. 5. L. 12.
5. Donc pyramide IHLM + pyram. GIHM + pyram. FIGM : pyram. ABDE = baze HIL + baze HIG + baze FIG : baze ABD. Prop. 24. L. 5.

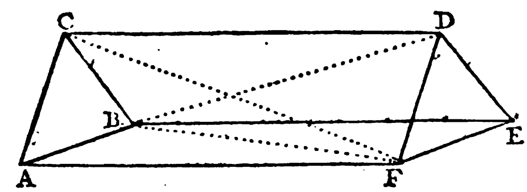
Mais pyramide IHLM + pyramide GIHM + pyramide FIGM sont = à la pyramide MFGHLI, & baze HIL + baze HIG + baze FIG = baze FILHG. } Ax. 1. L. 2.

6. Partant pyramide MFGHIL : pyramide ABDE = baze FILHG : baze ABD. Prop. 7. L. 5.

On prouvera de même que

7. Pyramide MFGHLI : pyramide BDCE = baze FILHG : baze BDC.
8. Donc pyramide MFGHLI : pyramide ABCDE = baze FILHG : baze ADCB. Prop. 24. L.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. *THEOREME VII.*

Tout prisme triangulaire (ADE): peut être divisé (par des Plans passant par les ∠ BCF & BDF) en trois pyramides égales (ACBF, BDEF & DCBF) ayant des bazes triangulaires.

HYPOTHESE.	THÈSE.
Le prisme donné AE est triangulaire.	*Le prisme ADE peut être divisé en trois pyramides triangulaires égales ACBF, BDEF & DCBF.*

Préparation.

1. Tirez dans le Pgr DA une diagonale CF à volonté.
2. Du point F & dans le Pgr. AE tirez la diagonale BF. } Dem. 1. L. 1.
3. Du point B & dans le Pgr. CE tirez la diagonale BD.
4. Par CF & BF faites passer un Plan, item par BF & BD.

DEMONSTRATION.

Puisque AD est un Pgr coupé par la diagonale CF. (*Prép.* 1.).

1. Le △ ACF baze de la pyramide ABCF est = au △ CFD baze de la pyramide BCFD. Prop. 34. L. 1.

Or ces pyramides ABCF & BCFD, ont leurs sommets au point B.

2. Donc la pyramide ABCF est = à la pyramide BCFD. {Prop. 5. L. 12. Corol 1.

De même le Pgr EC est coupé par sa diagonale BD. (*Prép.* 3.).

3. Donc le △ CBD baze de la pyramide BCFD est = au △ BDE, baze de la pyramide DEFB. Prop. 34. L. 1.

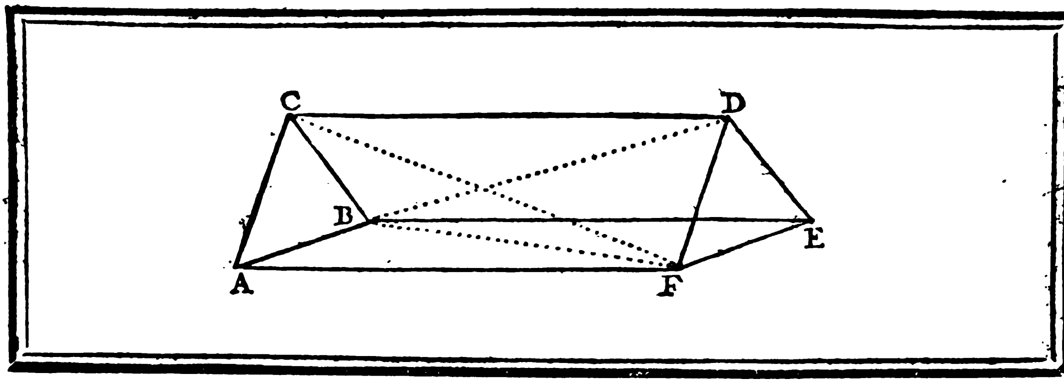
Et ces pyramide BCFB, ont leurs sommets au point F.

4. Partant la pyramide BCDF est = à la pyramide BDEF. {Prop. 5. L. 12. Corol. 1.

Or la pyramide ABCF est aussi = à la pyramide BCDF (*Arg.* 2).

5. Donc les pyramides ABCF, BCDF & BDEF sont égaux. Ax. 1. L. 1.

 6. Partant



6. Partant le prisme triangulaire (ADE) peut être divisé en trois pyramides triangulaires égaux.

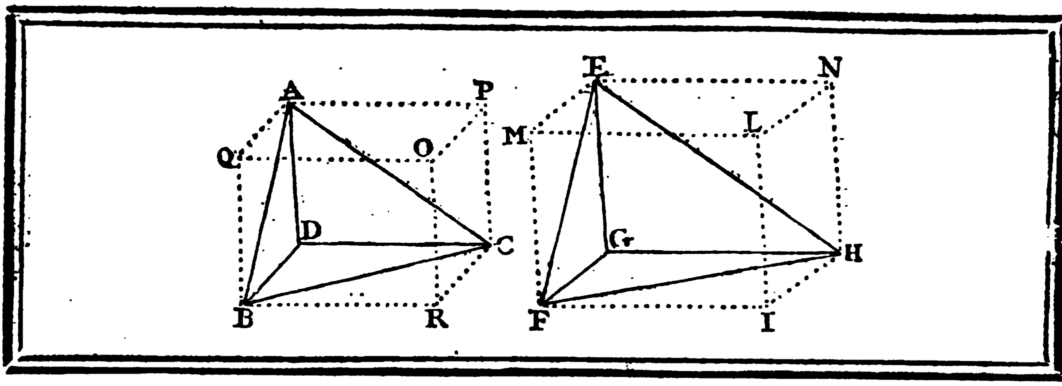
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

LE prisme triangulaire est le triple d'une pyramide qui a la même baze & la même hauteur.

COROLLAIRE II.

LA pyramide dont la baze est un polygone est le tiers d'un prisme qui a la même baze & la même hauteur. (Puisqu'elle peut être divisée en autant de pyramides partielles que le polygone contient de triangles.).



6. Partant AR & EI font des ▱ ∽. — Def. 9. L. 11.

7. Donc ▱ AR : ▱ EI = $\overline{DB}^3 : \overline{FG}^3$. — Prop 33 L. 11.

Et puisque les lignes QP & BC, item MN & FH font des diagonales semblablement tirés dans les Pgr. égaux & Plle OA & RD;, item EL & IG, (*Prép.* 5.).

8. Les parties BQAPCD & FMENHG feront des prismes ∽ : & chacun égal à la moitié de son ▱. — Def. 9. L. 11. Prop. 28. L. 11.

9. Partant le prisme BPQC : prisme FNMH = $\overline{BD}^3 : \overline{FG}^3$. — Prop. 15. L. 5. Prop. 34. L. 11. Rem. 1.

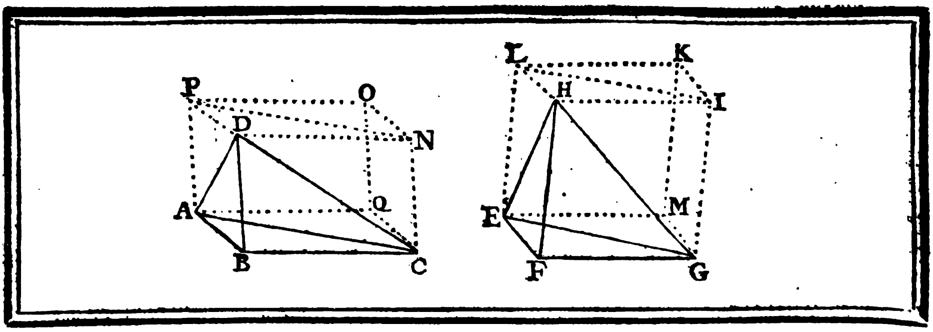
Or la pyramide ABDC est le tiers du prisme BQPC, & la pyramide EFGH, le tiers du prisme FMNH. — Prop. 7. L. 12. Cor. 1.

10. Donc la pyramide ABCD : pyramide EFGH = $\overline{BD}^3 : \overline{FG}^3$. — Prop. 15. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE

Les pyramides semblables dont les bazes sont des polygones sont entr'elles en raison triplée de leurs cotés homologues, (parce qu'elles peuvent être divisées en des pyramides partielles, triangulaires, & semblables deux à deux).



PROPOSITION IX. *THEOREME IX.*

DAns les pyramides triangulaires égales (ABCD & EFGH): les bazes (ABC & EFG) & les hauteurs (BD & FH) font reciproquement proportionelles, (*c. a. d.* baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD.). Et les pyramides triangulaires (ABCD & EFGH) dont les bazes (ABC & EFG) & les hauteurs (BD & FH) font reciproquement proportionelles: font égales.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les pyramides ABCD & EFGH font triangulaires.	*Baze ABC : baze EFG = hauteur*
II. La pyramide ABCD eft = à la pyramide EFGH.	*FH : hauteur BD.*

Préparation.

AChevez les ▱ BO & FK ayant même hauteur avec les pyramides ABCD & EFGH; de même que dans la préparation de la précedente, comme auffi les prifmes BAPNC & FELIG.

I. DEMONSTRATION.

PUifque les prifmes PNB & LIF, ont la même baze & la même hauteur que les pyramides données ABCD & EFGH. (*Prép.*).

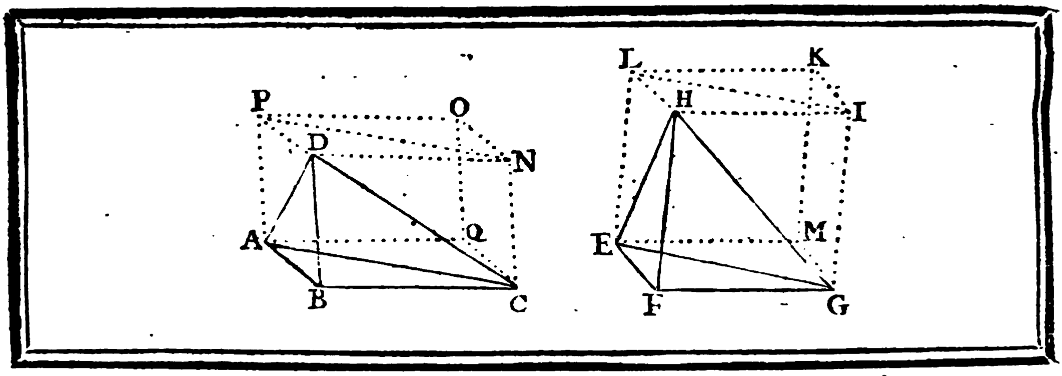
1. Chaque prifme fera le triple de fa pyramide (*c. a. d.* le prifme PNB le triple de la pyramide ABCD, & le prifme LIF le triple de la pyramide EFGH). Prop. 7. L. 12. Cor. 1.
2. Partant le prifme PNB eft = au prifme LIF. Ax. 6. L. 1.

Or le ▱ BO eft le double du prifme PNB, & le ▱ FK le double prifme LIF. Prop. 28. L 11.

3. Donc le ▱ BO eft = au ▱ FK. Ax. 6. L 1.

Mais les ▱ égaux (BO & FK) ont leurs bazes & leurs hauteurs reciproquement proportionnelles (*c. a. d.* baze BQ : baze FM = hauteur FH : hauteur BD.) Prop. 34. L. 11.

Et ces ▱ font chacun le fextuple de leurs pyramides (*c. a. d.* que le ▱ BO eft = fix pyramides ABCD, & le ▱ K = fix pyramides EFGH. *Arg.* 1 & 3.).



De plus la baze de la pyramide ABCD est la moitié de la baze du ▱ BO. } Prop. 41. L. 1.
Et la baze de la pyramide EFGH est la moitié de la baze du ▱ FK. }

4. Partant baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD. { Prop. 15. L. 5. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.	THESE.
I. Les pyramides ABCD & EFGH sont triangulaires.	*La pyramide triangulaire ABCD*
II. Baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD.	*est = à la pyramide triangulaire EFGH.*

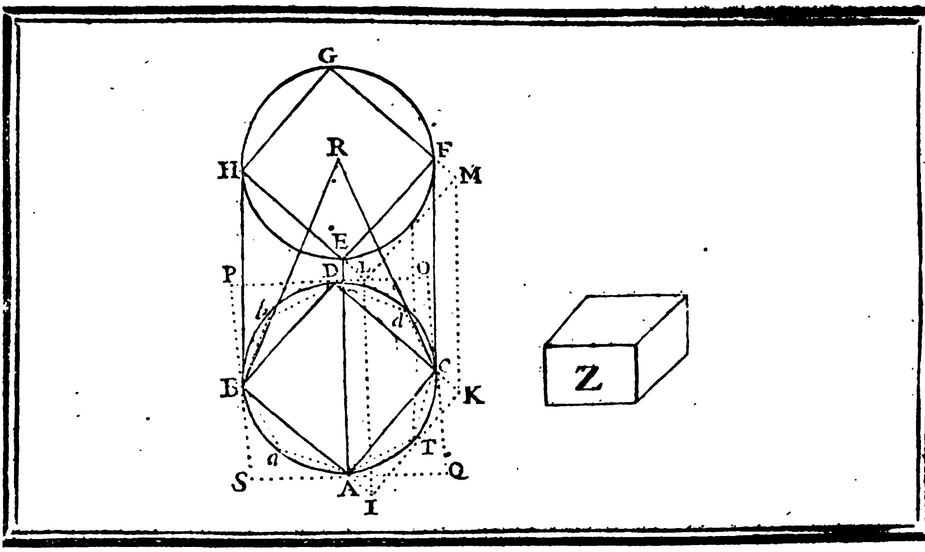
II. DEMONSTRATION.

Puisque le △ ABC : △ EFG = FH : BD. (*Hyp.* 2.).
Et que Pgr. BQ est le double du △ ABC, item le Pgr. FM le double du △ EFG. Prop. 41. L. 1.
1. Il s'ensuit que Pgr. BQ : Pgr. FM = FH : BD. Prop. 15. L. 5.
Or le ▱ BO a pour baze le Pgr. BQ, & pour hauteur BD } (*Prép.*)
Et le ▱ FK a pour baze le Pgr. FM, & pour hauteur FH }
2. Partant le ▱ BO est = au ▱ FK. Prop. 34. L. 11.
Mais les ▱ᵉ BO & FK sont chacun le double des prismes PNB, & LIF. Prop. 28. L. 11.
Et ces prismes PNB & LIF sont chacun le triple de leurs pyramides ABCD, & EFGH. { Prop. 7. L. 12. Corol. 1.
3. Donc la pyramide triangulaire ABCD est = à la pyramide triangulaire EFGH. Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.

COROLLAIRE.

LEs pyramides-polygones égales : ont leurs bazes & hauteurs reciproquement proportionelles. Et les pyramides-polygones, dont les bazes & les hauteurs sont reciproquement proportionelles : sont égales.



PROPOSITION X. THEOREME X.

LE Cone (BRC) eſt le tiers du Cylindre (HGFEABDC) qui a la même baze (BDCA) & la même hauteur (BH).

Hypothese.

Le cone BRC & le cylindre HFADC, ont la même baze BDCA, & la même hauteur BH.

These.

Le Cone BRC eſt égal au tiers du cylindre HFCABD.

Demonstration.

SI non.

. Le Cone ſera < ou > que le tiers du Cylindre d'une partie = Z.

I. Suppoſition.

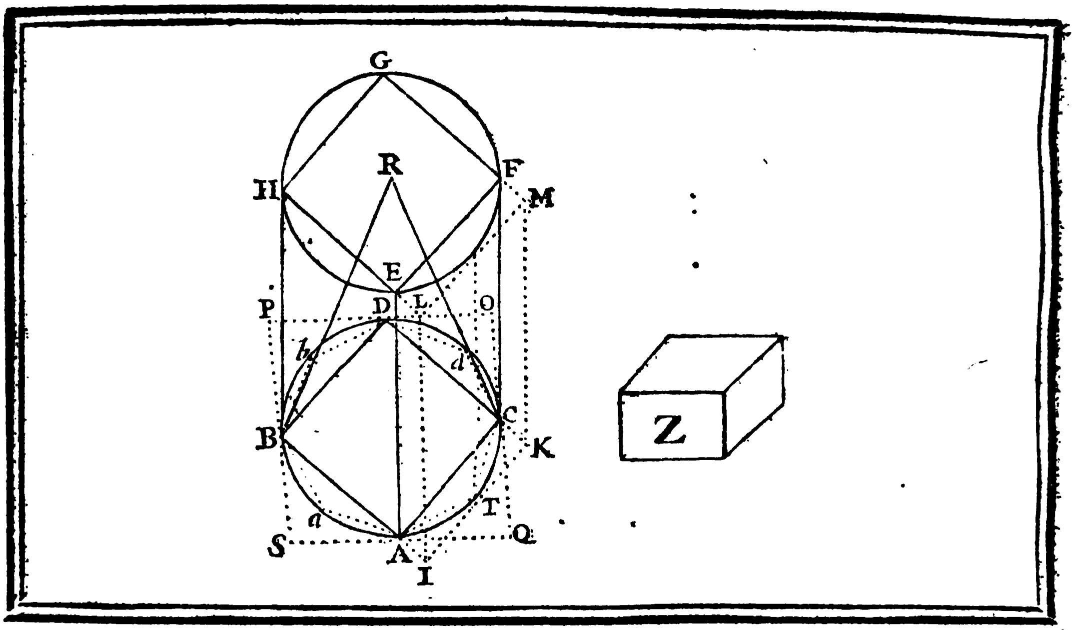
SOit un tiers du cylindre HC = cone BRC + Z.

I. Préparation.

1. DAns la baze ABDC du cone & du cylindre, inſcrivez le □ ABDC. Prop. 6. L. 4.
2. Autour de la même baze faites le □ POQS. Prop. 7. L. 4.
3. Elevez ſur ces quarrés deux ▭* (dont le premier eſt le ▭ FHBC qui eſt conſtruit ſur le □ inſcrit, & le ſecond, conſtruit ſur le □ circonſcrit, touchera la baze ſuperieure avec ces Plans Plles, dans les points H, G, F, & E,) * ayant la même hauteur que le cylindre & le cone,

 4. Divi-

* *Nous ſupprimons une partie de la Préparation dans la Figure pour éviter la confuſion.*



4. Diviſez les arcs A T C, C d D, D b B & B a A, en deux, dans les points T, d, b, & a. Prop. 30. L. 3.
5. Tirez A T, & T C &c. Dem. 1. L. 1.
6. Par le point T, tirez la tangente I T K. (*par la Prop. 17. L. 3.*) qui coupera B A & D C prolongées, dans les points I & K, & qui achevera le Pgr. A K.
7. Sur le Pgr. A K, faites le ▭ A L F K, & ſur les △ A I T, T A C & T C K les priſmes E T I, E T F & T F K, ayant tous la même hauteur que le cylindre & le cone.
8. Faites de même pour les autres ſegments A a B, B b D &c.

Puiſque le quarré P O Q S eſt circonſcrit au ⊙, & que le quarré B D C A y eſt inſcrit (*Prép.* 1 & 2.).
1. Le □ P O Q S eſt le double du □ B D C A.*
Mais les ▭ conſtruits ſur ces quarrés, ont la même hauteur (*Prép.* 3.).
2. Donc le ▭ ſur P O Q S eſt le double du ▭ ſur B D C A. Prop 32. L. 11.
Or le ▭ ſur P O Q S eſt > que le cylindre donné. Ax. 8 L. 1.
3. Donc le ▭ ſur B D C A eſt > que la moitié du même cylindre. Prop. 19. L. 5.
Et comme le △ T A C eſt la moitié du Pgr. A K. Prop. 41. L. 1.
4. Le priſme E T F, conſtruit ſur ce △ T A C, ſera la moitié du ▭ ſur le Pgr. A K. Pr p. 28. L. 11. Prop. 34. L. 11. Rem. 1. Cor. 3.
Le ▭ conſtruit ſur le Pgr. A K eſt > que l'élement du cylindre qui a pour baze le ſegment A T C. Ax. 8. L. 1.
5. Partant le priſme E T F conſtruit ſur le △ T A C eſt > que la moitié de l'élement du cylindre qui a pour baze le ſegment A T C. Prop. 19. L. 5.

6. De

* *Voyez la Note ſous la Demonſtration de la ſeconde Prop. L. 12.*

6. De même tous les autres prismes construits de la même manière, feront $>$ que la moitié des parties ou élemens de cylindre qui leurs correspondent.
On peut donc retrancher de tout le cylindre, plus que la moitié (savoir le ⊟ sur le □ BDCA,) & de ces élemens restans (savoir CFEAT. &c.) encore plus que la moitié; (qui sont les prismes ETF &c.) & ainsi de suite.
7. Jusqu'à ce qu'il reste enfin plusieurs élemens du cylindre qui seront ensemble plus petit que Z. {Lem. de Prop. 2. L. 12.
Mais le cylindre est égal à trois fois le cone BRC + Z. (*Sup.*).
Si donc on retranche du cylindre entier ces élemens trouvés (*Arg.* 7.); & de trois fois le cone BRC + Z, la grandeur Z.
8. Le prisme restant (savoir celui qui a pour baze le polygone A*a*B*b*D*d*CT) sera $>$ que le triple du cone. Ax. 4. L. 1.
Cependant ce prisme est le triple de la pyramide qui a la même baze & la même hauteur (& qui est la pyramide TA*a* B*b* D*d* CTR). {Prop. 7. L. 12. Corol. 2.
9. Partant la pyramide ABDCR est $>$ que le cone donné. Ax. 7. L. 1.
Or la baze du cone est le ⊙ dans lequel ce polygone ABDC est inscrit, (& qui par consequent est $>$ que ce polygone) & ce cone à la même hauteur que la pyramide.
10. Donc la partie est $>$ que son tout.
11. Ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
12. Partant le cone donné n'est pas $<$ que le tiers du cylindre.

II. Supposition.

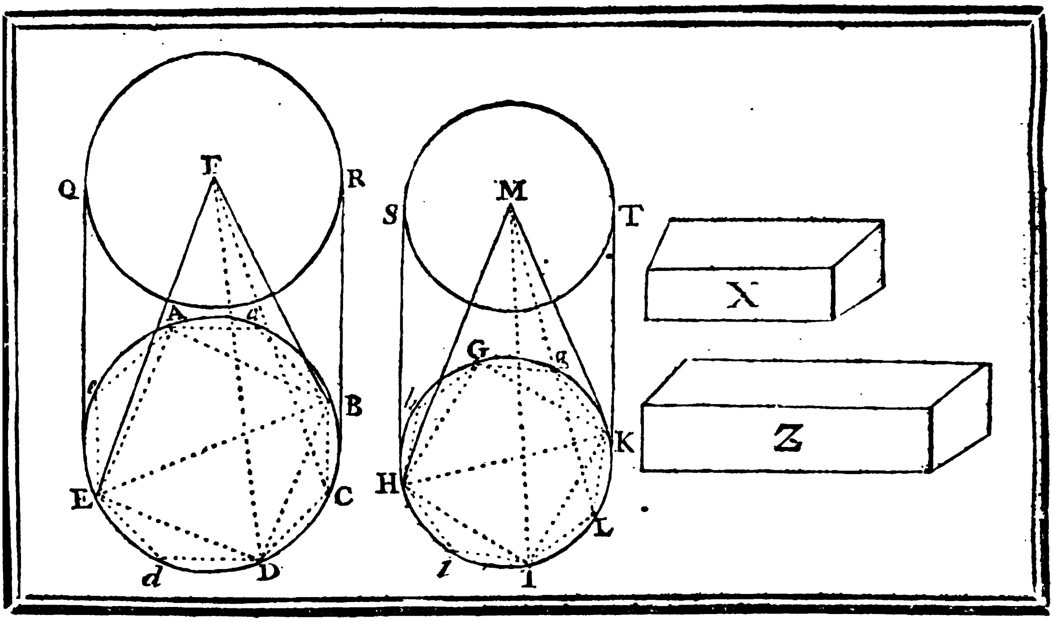
Soit le cone donné $>$ que le tiers du cylindre de la grandeur Z. *c. a. d.* que le cone est = au tiers du cylindre + Z.

II. Préparation.

Divisez le cone donné en pyramides partielles, *comme on a divisé le cylindre en prismes dans la première Supposition.*

Si l'on retranche du cone donné la pyramide qui a pour baze le □ ABDC, (qui est plus grand que la moitié de toute la baze du cone donné puisqu'il est la moitié du quarré circonscrit *par l'Arg.* 1. & que ce dernier □ est $>$ que la baze du cone *par l'Ax.* 8. *L.* 1.) & des segmens restans, les pyramides correspondans a ces segmens, (*ainsi qu'on l'a fait pour le cylindre dans l'Arg.* 7.).
13. Il restera plusieurs élemens de cone dont la somme sera $<$ Z. {Lemme de Prop. 2. L. 12.
Si donc on retranche du cone ces élemens qui sont $<$ Z, & du cylindre + Z, la grandeur Z.
14. Le reste savoir la pyramide A*a*B*b*D*d*CTR sera égal au tiers du cylindre. Ax. 5. L. 1.
Mais la pyramide A*a* B*b* D*d* CTR est égal au tiers du prisme qui a pour baze le même polygone A*a*B*b* D*d* CT, & la même hauteur. {Prop. 7. L. 12. Cor. 2.
15. Donc le cylindre donné, est égal & ce prisme. Ax. 6. L. 1.
Or la baze du cylindre donné est $>$ que la baze du prisme puisque cette seconde est inscrite dans la premiere (*I. Prép.* 4 & 5.).
16. Donc la partie égal au tout.
17. Ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
18. Donc le tiers du cylindre n'est pas $<$ que le cone.
Et on a demontré (*Arg.* 12.) que le tiers du cylindre n'est pas $>$ que le cone.
19. Partant le cone est le tiers du cylindre qui a la même baze & la même hauteur.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. *THEOREME XI.*

LEs cones (EABDF & HGKIM) & les cylindres (QRBE & STKH) qui ont la même hauteur font entr'eux comme leurs bazes.

HYPOTHESE.

Les cones EABDF & HGKIM, de même que les cylindres QRBE & STKH ont la même hauteur.

THESE.

I. Cone EFB : cone HMK = baze EABD : baze HGKI.

II. Cylindre QRBE : cylindre STKH = baze EABD : baze HGKI.

SI non. DEMONSTRATION.

Le cone EFB : Z (qui est < ou > que le cone HMK) = baze EABD : baze HGKI.

I. Suppoſition.

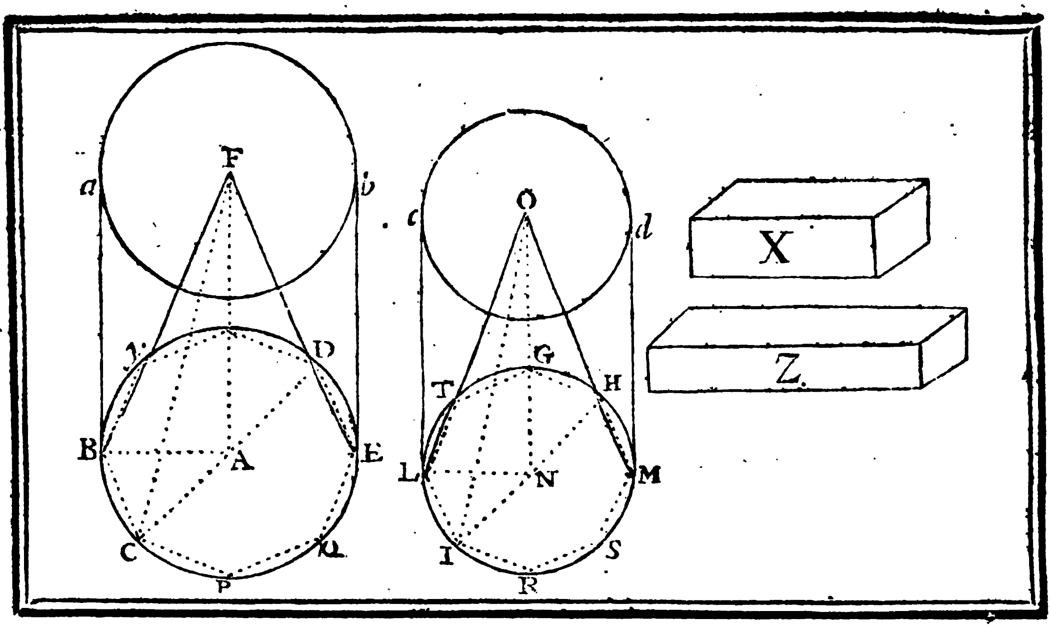
SOit Z < que le cone HMK d'une grandeur = X, *c. a. d.* que le cone HMK eſt = Z + X.

I. Préparation.

1. DAns le ⊙ GHIK qui eſt la baze du cone HMK; inſcrivez le □ GHIK. Prop. 6. L. 4.
2. Diviſez le cone en pyamides partielles, (*comme dans la Prép. de la II. Suppoſition de la précedente.*).
3. Tirez dans les bazes des deux cones EFB & HMK, les diamêtres EB & HK.
4. Dans le ⊙ EABD baze du cone EFB, inſcrivez un polygone ∽ au polygone H*h* G*g* KLI*i* H, & diviſez le comme le cone HMK.

PUis qu'on a diviſé le cone HMK en pyramide partielles (*Prép.* 2.).
Si on retranchoit de ce cone ces pyramides partielles (ainſi qu'on a fait dans *Arg.* 13. de la précedente).

1. On parviendroit à avoir des élemens dont la ſomme feroit < X. {Lem. de Prop. 2. L. 12.
Si donc on retranche ces élemens du cone HMK, & des grandeurs Z + X, la grandeur X. 2. La



PROPOSITION XII. *THEOREME XII.*

LEs cones (BFE & LOM) de même que les cylindres (B*ab*E & L*cd*M) ſemblables: ſont entr'eux en raiſon triplée des diamêtres (CD & IH) de leurs bazes (B*y*DEP & LTHMR).

Hypothese.

Les cones BFE & LOM, de même que les cylindres BabE & LcdM, ſont ∽.

Thêse.

I. Le cone BFE eſt au cone LOM en raiſon triplée de CD à IH; où comme $\overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$

II. Le cylindre BabE eſt au cylindre LcdM, en raiſon triplée de CD à IH; ou comme $\overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$. *

Demonstration.

SI non,

Le cone BFE eſt à une grandeur Z (qui eſt < ou > que le cone LOM) comme $\overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$.

I. Suppoſition.

SOit Z < que le cone LOM de la grandeur X, *c. a. d.* le cone LOM = Z + X.

I. Prép.

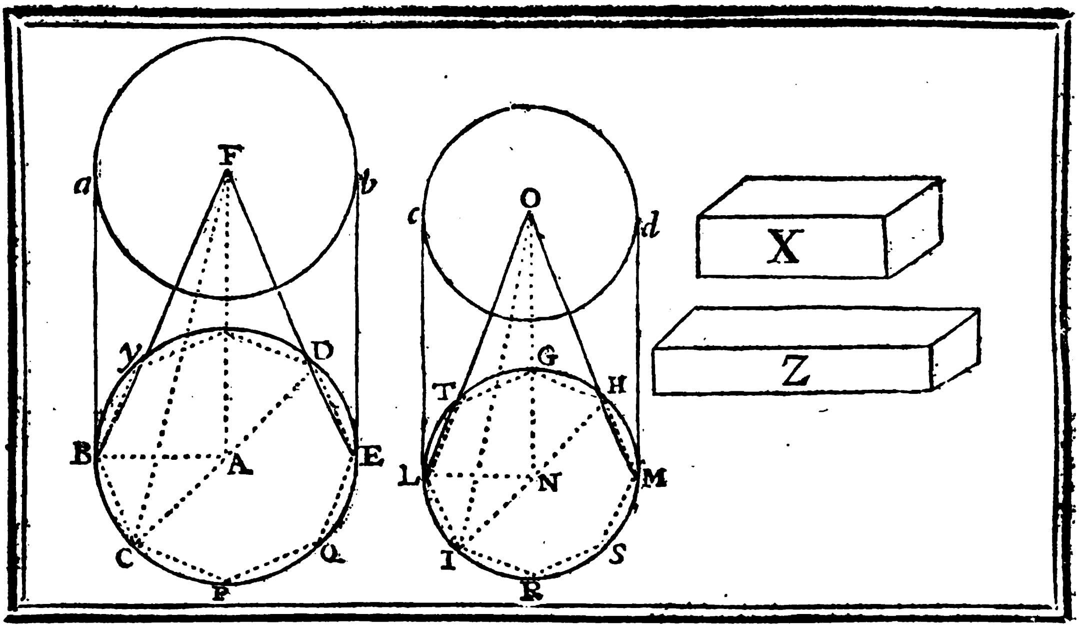
* *Voyez Appendice,* Prop. VII.

I. Préparation.

1. Divisez le cone LOM en pyramides partielles, ainsi que dans la Prop. precedente.
2. Inscrivez dans la baze du cone BFE un pol. ∽ au pol. de la baze du cone LOM.
3. Dans les deux cones tirez les diamètres homologues IH & CD, item les rayons LN & BA.

Puisqu'on a divisé le cone LOM en pyramides partielles.
Si on retranchoit de ce cone ces pyramides partielles (ainsi que dans l'*Arg.* 1. de la precedente).
1. On parviendroit a des élemens dont la somme feroit $<$ que X. { Lemme de Prop. 2. L. 12.
Si donc on retranche du cone LOM, ses élemens, & de la grandeur $Z + X$, la partie X.
2 Le reste savoir la pyramide LTGHMSRIO sera $>$ Z. Ax. 4. L. 1.
Mais les cones ∽ ont leurs axes & les diamètres de leurs bazes proportionels. Def. 24. L. 11.
Et les cones BFE & LOM sont ∽. (*Hyp.*).
3. Partant $CD : HI = FA : ON$.
Or $CD : HI = CA : IN$. Prop. 15. L. 5.
4. Donc $CA . IN = FA : ON$. Prop. 11. L. 5.
5. Et Alt: $CA : FA = IN : ON$. Prop. 16. L. 5.
Les △ FAC & ION, ont ∠ CAF = à ∠ INO. (*Prép*. 3.) & les cotés CA, AF, item IN & ON, à l'entour de ces angles égaux proportionels. (*Arg.* 5.).
6. Partant le △ FAC est ∽ △ ION. Def. 1. L. 6.
7. Et par consequent $CF : CA = IO : IN$. Prop. 4. L. 6.
8. De même le △ BCA est ∽ au △ LIN (car ∠ BAC est = ∠ LNI. (*Prép*. 3.)
9. Donc $CA : BC = IN : IL$. Prop. 4. L. 6.
Or $CF : CA = IO : IN$. (*Arg.* 7.)
10. Partant $CF : BC = IO : IL$. Prop 22. L. 5.
Dans les △ CAF & BAF, le coté CA est = à BA (*Def.* 15. *L.* 1.) AF est commun & ∠ CAF = ∠ BAF. (*Prép.* 3.).
11. Donc la baze BF est = à baze CF. Prop. 4. L. 1.
12. De la même manière LO est = à OI.
Or $CF : BC = OI : IL$. (*Arg.* 10.).
13. Donc $BF : BC = LO : IL$. Prop. 7. L. 5.
14. Et invert. $BC : BF = IL : OL$. { Prop. 4. L. 5. cor.
15. Partant les trois cotés du △ BFC sont proportionels aux trois cotés du △ LOI.
16. D'où il suit que ces △ BFC & IOL sont ∽. Prop. 5. L. 6.
17. De la même manière on demontrera que tous les triangles qui forment la pyramide BDQF sont ∽ à tous les triangles qui forment la pyramide LHSO, chacun à chacun.

Et



Et comme les bazes de ces pyramides font des polygones ∽. (*Prép.* 2.).

18. La pyramide BDQF eſt ∽ à la pyramide LHSO. — Def. 9. L. 11.

Mais ces pyramides étant ∽.

19. La pyramide BDQF : pyramide LHSO $= \overline{CB}^3 : \overline{IL}^3$ — Prop. 8. L. 12. Corol.

Or $CA : BC = IN : IL$. (*Arg.* 9.).

20. Donc invert. $BC : CA = IL : IN$. — Prop. 4. L. 5. Corol.

21. Et alternant $BC : LI = CA : IN$. — Prop. 16. L. 5.

22. Partant $BC : LI = CD : IH$. — Prop. 15. L. 5. Prop. 11. L. 5.

23. Donc trois fois la raiſon de BC à LI eſt égal à trois fois la raiſon de CD à IH. (*c. a. d.*) $BC^3 : \overline{LI}^3 = CD^3 : IH^3$ *

Mais $CB^3 : \overline{IL}^3$ = pyramide BDQF : pyramide LHSO. (*Arg.* 19.)

24. Partant pyramide BDQF : pyramide LHSO $= CD^3 : \overline{IH}^3$. — Prop. 11. L. 5.

Or le cone BFE : Z $= CD^3 : IH^3$. (*Sup.*).

25. Donc la pyr. BDQF : pyr. LHSO = cone BFE : Z. — Prop. 11. L. 5.

Mais la pyr. BDQF étant < cone BFE. — Ax. 8. L. 1.

26. La pyr. LHSO ſera auſſi < Z. — Prop. 14. L. 5.

Or la pyr. LHS eſt > Z. (*Arg.* 2.).

27. Partant la pyr. LHSO ſeroit < & > Z. (*Arg.* 2 & 26.).

28. Ce qui eſt impoſſible.

29. Donc la ſuppoſition que Z eſt < que le cone LOM ou LTGHMSRIO, eſt fauſſe.

30. D'où

* *Voyez Append.* Prop. VIII.

30. D'où il suit qu'il est impossible qu'un cone BFE est à une grandeur moindre que le cone LOM, en raison triplée du diamétre CD au diamétre IH.

II. *Supposition.*

Soit Z > que le cone LOM.

II. *Préparation.*

Prenez une grandeur X, de façon que Z : cone BFE = cone LOM : X.

Puisque Z est > que le cone LOM. (II. *Supp.*).

31. Le cone BFE sera > X. Prop. 14. L. 5.

Mais $\overline{CD}^3 \cdot \overline{IH}^3$ = cone BFE : Z (*par la Sup.*).

32. Donc invert. $\overline{IH}^3 : \overline{CD}^3$ = Z : cone BFE. Prop. 4. L. 5. Corol.

Or Z : cone BFE = cone LOM : X. (II. *Prép.*).

33. Partant $\overline{IH}^3 : \overline{CD}^3$ = cone LOM : X. Prop. 11. L 5.

Et il est demontré (*Arg.* 30.) qu'il est impossible qu'un cone est à une grandeur moindre qu'un autre cone en raison triplée des diamétres de leur bazes.

34. Donc X n'est pas < que le cone BFE.

Cependant X est < que le même cone (*Arg.* 31.).

35. D'où il suit que X seroit < que le cone & ne le seroit point en même tems.

36. Ce qui est impossible.

37. Donc la supposition que Z est > que le cone LOM, est fausse.

Lagrandeur Z n'étant donc ni < ni > que le cone LOM. (*Arg.* 29 & 37.).

38. Il lui sera égal.

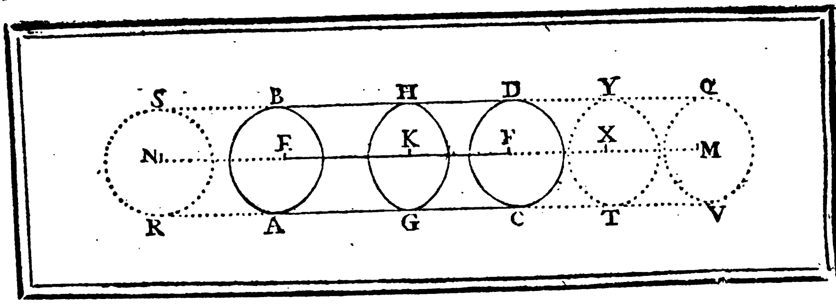
39. Partant le cone BFE : cone LOM = $\overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Le cylindre B*ab*E, étant le triple de cone BFE.
Et le cylindre L*cd*M le triple du cone LOM. } Prop 10. L 12.

40. Le cylindre B*ab*E : cylindre L*cd*M = $\overline{CD}^3 : \overline{IH}^3$. Prop. 15. L. 5.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XIII. THEOREME XIII.

Si un cylindre (ABDC) est coupé par un Plan (HG) parallele aux Plans opposés (BA & DC): les cylindres provenants (ABHG & GHDC) feront entr'eux comme leurs axes (EK & KF). (c. a. d. que le cylindre ABHG : cylindre GHDC = axe EK : axe KF.)

Hypothese.
Le cylindre AD est coupé par un Plan HG Plle aux Plans opposés AB & DC.

These.
Cylindre AH : cylindre HC = axe EK : axe FK.

Préparation.

1. Prolongez l'axe EF du cylindre ABDC de part & d'autre vers N & M. Dem. 2. L. 1.
2. Sur l'axe prolongé NM, prenez plusieurs parties égales à EK & FK; comme EN = EK, & FX &c. chacune = FK. Prop. 3. L. 1.
3. Par ces points N, X & M, faites passer des Plans SR, TY & VQ Plle aux Plans opposés BA & DC.
4. Sur ces Plans Plle décrivez des points N, X & M, des ⊙ˢ SR, TY & VQ chacun égal aux ⊙ˢ opposés BA & DC. Dem. 3. L. 1.
5. Achevez les cylindres SA, CY, & TQ.

Demonstration.

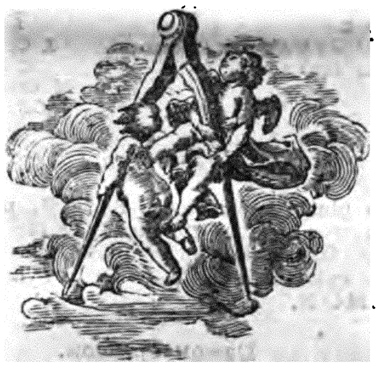
Puisque les axes FX, & XM des cylindres DT & TQ sont égaux à l'axe FK, du cylindre GD. (*Prép.* 2.).

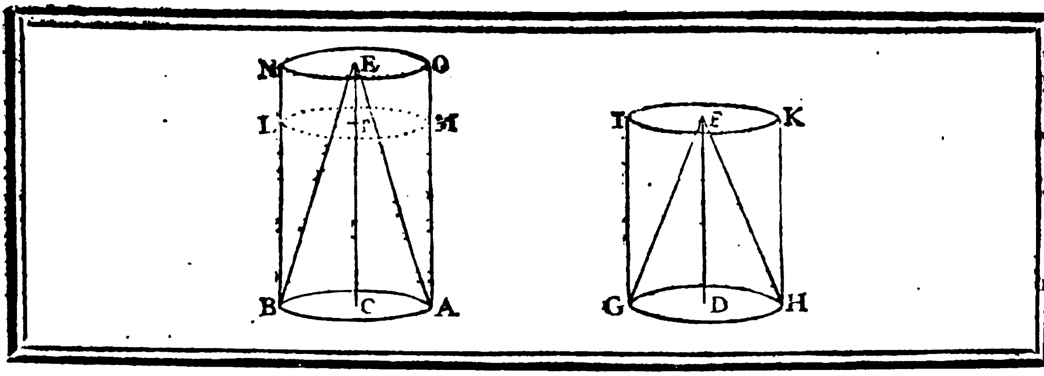
1. Ces cylindres DT, TQ & GD, feront entr'eux comme leurs bazes. Prop. 11. L. 12.
Mais ces bazes sont égaux. (*Prép.* 4.).
2. Donc ces cylindres TD, TQ & GD sont aussi égaux. Prop. 14. L. 5.
Or il y a autant de cylindres CY, TQ &c. qui sont égaux, (& qui forment ensemble la toute GQ) qu'il y a de parties FX, XM &c. égaux à l'axe KF (& ils forment ensemble la toute MK).

3. Par-

3. Partant le cylindre GQ ou GHQV est autant multiple du cylindre GHDC, que l'axe, KM l'est de l'axe KF.
4. De la même manière, on demontrera que le cylindre RSHG est autant multiple du cylindre ABHG, que l'axe NK, l'est de l'axe EK.
5. Donc selon que le cylindre GHQV est $>$ $=$ ou $<$ que le cylindre GHDC, l'axe KM sera $>$ $=$ ou $<$ que l'axe FK.
Et selon que le cylindre RSHG est $>$ $=$ ou $<$ que le cylindre ABHG l'axe NK sera $>$ $=$ ou $<$ que l'axe EK.
6. Partant le cylindre ABHG : cylindre GHDC $=$ axe EK : axe FK. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIV. *THEOREME XIV.*

LEs cylindres (NO AB & IKHG), & les cones (BEA & GFH) qui ont des bazes égales (BA & GH): font entr'eux comme leurs hauteurs (CE & DF).

Hypothese.
Les cylindres NOAB & GIKH, item les cones BEA & GFH, ont des bazes égales.

These.
I. Cylindre NOAB : cylindre IKHG = hauteur CE : hauteur. DF.
II. Cone BEA : cone GFH = hauteur CE : hauteur DF.

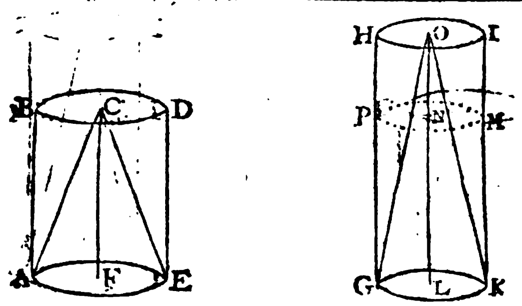
Préparation.

1. SUr l'axe du plus grand cylindre AONB, prenez la partie PC d'égale hauteur qu'eſt le cylindre GIKH.
2. Par le point P : faites paſſer un Plan LM, Plle à la baze BA, qui coupera le cylindre AONB en deux cylindres, qui ſont BAML & LMON.

Demonstration.

PUiſque le cylindre BNOA eſt coupé par un Plan Plle à ſa baze (*Prép.* 2.)
1. Le cylindre NOML : cylindre LMAB = PE : PC. Prop. 13. L. 12.
2. Partant le cylindre NOML + LMAB : cylindre LMAB = PE + PC : PC. Prop. 18. L. 5.
Mais le cylindre NOML + LMAB eſt = au cylindre BNOA, & PE + PC = EC. Ax. 1. L. 1.
De plus le cylindre LMAB eſt = au cylindre IGHK,* & PC = DF. (*Prép.* 1.).
3. Donc le cylindre BNOA : cylindre IGHK = hauteur EC : hauteur DF. Prop. 7. L. 5.
C. Q. F. D. I.
Le cone BEA eſt le tiers du cylindre BNOA.
Et le cone GFH le tiers du cylindre GIKH. } Prop. 10. L. 12.
4. Partant le cone BEA : cone GFH = hauteur EC : hauteur DF. Prop. 15. L. 5.
C. Q. F. D. II.

* *Les cylindres LMAB & IGHK ſont égaux, par l'*Hyp. & Prép. 1. & 2.



HYPOTHESE.	THESE.
Baze GK : baze AE = hauteur CF : hauteur LO.	*I. Le cylindre ABDE est = au cylindre GHIK.* *II. Le cone ACE est = au cone GOK.*

II. DEMONSTRATION.

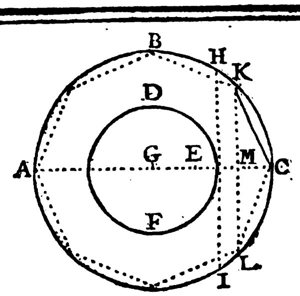
Puisque les cylindres GPMK & ABDE, ont la même hauteur (*Prép.* 2.)

1. Le cylindre GPMK : cylindre ABDE = baze GK : baze AE. Prop. 11. L. 12.
Or la baze GK : baze AE = hauteur CF : hauteur LO (*Hyp.*).
2. Partant le cylindre GPMK : cylindre ABDE = hauteur CF : haut. LO. Prop. 11. L. 5.
De plus les cylindres GPMK & HIKG, ont la même baze.
3. Donc le cylindre GPMK : cylindre HIKG = hauteur LN : haut. LO. Prop. 14. L. 12.
Mais la hauteur LN est = à la hauteur CF. (*Prép.* 1.).
4. D'où il suit que le cylindre GPMK : cylindre GHIK = hauteur CF : hauteur LO. Prop. 7. L. 5.
Cependant le cylindre GPMK : cylindre ABDE = hauteur CF : hauteur LO. (*Arg.* 2.).
5. Donc le cylindre GPMK : cylindre ABDE = cylindre GPMK : cylindre GHIK. Prop. 11. L. 5.
6. Et par consequent le cylindre ABDE est = au cylindre GHIK. Prop. 14. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Les cones ACE & GOK étant chacun le tiers des cylindres ABDE & GHIK. Prop. 10. L. 12.
Et ces cylindres étant égaux (*Arg.* 6.).
1. Le cone ACE est = au cone GOK. Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.



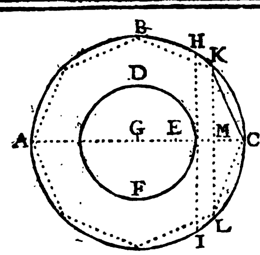
PROPOSITION XVI. *PROBLEME I.*

DEux cercles inégaux (ABCI & DEF) étant donnés ayant un même centre (G): inscrire au plus grand (ABCI) un polygone regulier dont les cotés soyent en nombre pair, & ne touchent point le plus petit cercle (DEF).

DONNEES.	CHERCHEE.
Deux ⊙ ABI & DEF inégaux, ayant le même centre G.	*Inscrire dans le plus grand ⊙ ABI, un polygone regulier, d'un nombre pair de cotés; lesquels ne touchent point le plus petit ⊙ DEF.*

Resolution.

1. Tirez le diamêtre AC dans le plus grand ⊙ ABI, qui coupera la ○ du ⊙ DF au point E.
2. Par le point E, tirez la tangente HEI au ⊙ DEF, & prolongez la jusqu'à ce qu'elle rencontre la ○ concave du ⊙ ABI aux points H & I. { Prop. 16. L. 3. Dem. 2. L. 1.
3. Coupez la demi ○ ABC en deux au point B. Prop. 30. L. 3.
4. Divisez encore le demi arc BC en deux également; & continuez cette division des moitiez jusqu'à ce que l'arc KC soit plus petit que l'arc HC (*par le Lem. de la seconde Proposition de ce Livre.*).
5. Tirez la corde KC, & appliquez-le autant de fois qu'il est possible dans la ○ du ⊙ ABCI. { Prop. 1. L. 4. Dem. 1. L. 1.



Préparation.

Du point K, abaissez la ⊥ KM sur le diamètre AC, & prolongez-là jusqu'à la rencontre de la ○ en L. { Prop. 11. L. 1. Dem. 1 L. 1.

DEMONSTRATION.

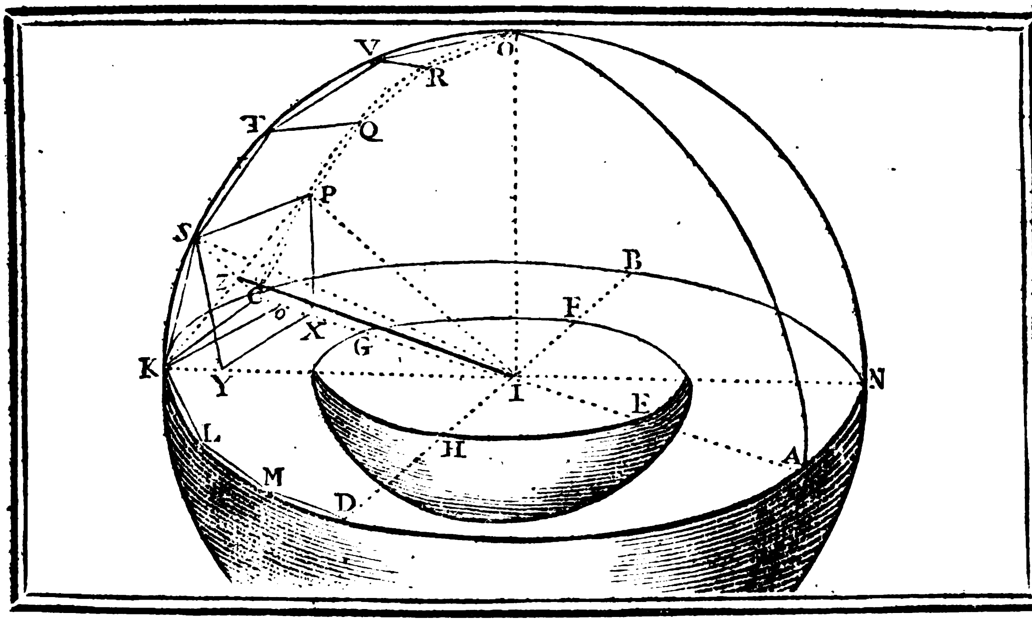
Puisque la demi ○ ABC, est divisé en deux au point B. (*Ref.* 3.).
Et qu'on a continué à prendre la moitiez des moitiez jusqu'à l'arc KC. (*Ref.* 4.).
1. Il s'ensuit que cet arc KC mesurera la ○, un nombre pair de fois sans reste (puisqu'il mesure la demi ○ *Ref.* 3 & 4.).
2. Partant la ligne KC (corde de l'arc KC) sera le coté d'un polygone regulier inscrit au ⊙, ayant le nombre de ses cotés pair.
De plus les deux ∀ HEM & KME, étant deux ∟. (*Ref.* 2. & *Prép.*).
3. La ligne KM ou KL est Plle à HE ou HI. Prop. 28. L. 1.
Or la ligne HI est tangente du ⊙ DEF en E (*Ref.* 2.).
4. Partant KL ne touche point le ⊙ DEF. Def. 35 L. 1.
Mais KC est < KL, (*Prop.* 15. *L.* 3.) puisque KC est plus éloigné du centre que KL (*Prép.*).
5. Donc a plus forte raison KC ne pourra toucher le ⊙ DEF. Prop. 15. L. 1.
Et comme les autres cotés du polygone inscrit dans le ⊙ ABCI sont chacun = à KC. (*Ref.* 5.).
6. On demontrera de même qu'ils ne touchent point le ⊙ DEF.
7. Partant on a inscrit au ⊙ ABCI, un polygone, ayant le nombre de cotés pair, lesquels ne touchent point le ⊙ DEF.

C. Q. F. F.

Corol-

COROLLAIRE.

LA ligne KL, qui est ⊥ sur le diamêtre AC & joint les deux cotés KC & LC, du polygone qui aboutissent à ce même diamêtre, ne touche point le plus petit cercle DEF (*Arg.* 4.).



PROPOSITION XVII. *PROBLEME II.*

ETant donnés deux ſphères (KON & GFEH), ayant un même centre (I): inſcrire dans le plus grand (KON) un polyèdre (KCSPTQVRO &c.) dont les Plans ne touchent point la petite ſphère (GFEH).

Donnees.

Deux ſphères concentriques KON & GFEH.

Cherchees.

I. Inſcrire dans la plus grande ſphère KON un polyèdre KPTRVO &c.

II. Les Plans de ce polyèdre inſcrit ne doivent point toucher la petite ſphère GFEH.

Reſolution.

1 COupez les deux ſphères par un Plan KBND paſſant par leur centre commun.

2. Tirez dans le ⊙ ABCD, les diamètres AC & BD, ſe coupant en angle droit. — Dem. 1. L. 1. Prop. 12. L. 1.

3. Dans ce plus grand ⊙ ABCD, inſcrivez le polygone CKLMD &c. de façon, qu'il ne touche point le petit ⊙ GFEH. — Prop. 16. L. 12.

4. Tirez le diamètre KIN.

5. Du centre I, ſur le Plan du ⊙ ABCD, élevez la ⊥ IO, & prolongez la juſqu'à la ſuperficie concave de la grande ſphère en O. — Prop. 12 L. 12. Dem. 2. L. 1.

6. Par IO & les diamètres AC, BD & KN, faites paſſer les Plans AOC, BOD & KON. *

7. Divi-

* *On a ſupprimé une partie de la Reſolution &c. dans la fig. pour éviter la confuſion.*

7. Divisez les arcs AOC & KON, en un nombre égal de parties dans les points P, Q, R, S, T, & V, &c. de façon que chacune de ces parties soit égale à CK.
8. Tirez les droites SP, TQ, VR.

I. Préparation. *

1. DEs points P & S, abaissez les ⊥ PX & SY, sur le Plan du ⊙ ABCD. Prop. 12. L. 11.
2. Tirez YX.

Demonstration.

PUisque les Plans KON & COA passent par la ligne IO, (*Ref.* 6.).
Et que IO est ⊥ sur le Plan du ⊙ ABCD. (*Ref.* 5.).
1. Ces Plans KON & COA, sont ⊥ sur le Plan de ce ⊙. Prop. 18. L. 11.
Or les points P & S sont dans ces Plans COA & KON.
Et on a abaissé de ces points les ⊥ PX & SY (1. *Prép.* 1.).
2. Partant les points Y & X sont dans les lignes KN & CA. Prop. 38. L. 11.
Dans les △ CXP & KYS; ∀ PXC est = ∀ SYK (1. *Prép.* 1.) de plus ∀ PCX = SKY, (*Prop.* 27. *L.* 3.) & CP = KS (*Ref.* 7.). Prop 26. L. 1.
3. Donc les cotés PX & XC, sont égaux aux cotés SY & YK. Def. 15. L. 1.
Or les rayons KI & CI sont égaux.
Si donc on en retranche les égales XC & YK. Ax. 3. L. 1.
4. Les restes, savoir IX & YI seront égaux. Prop. 7. L. 5.
5. Partant IX : XC = IY : YK. Prop. 2. L. 6.
6. D'où il suit que XY est Plle à KC.
Mais PX qui est = à SY (*Arg.* 3.) est aussi ⊥ sur le même Plan avec SY (1. *Prép.* 1.). Prop. 6. L. 11.
7. Donc PX est aussi Plle à YS. Prop. 33. L. 1.
8. De la même manière SP est = & Plle à XY.
Mais XY est Plle à KC (*Arg.* 6.). Prop. 9. L. 11.
9. Donc SP est aussi Plle à KC. Prop. 7. L. 11.
10. Partant les cotés du quadrilatère KSPC sont dans le même Plan.
11. De la même manière on demontrera que les cotés des quadritères TQPS, VRQF, & du △ ROV, sont chacun dans le même Plan.
12. Et comme on peut demontrer de cette façon que toute la sphère est entourrée de pareils quadrilatères & triangles.
13. On a par consequent inscrit dans le plus grande sphère un polyëdre RPCKTVO, &c. C. Q. F. F. 1.

II. Préparation.

1. DU centre I, abaissez sur le Plan KSPC, la ⊥ IZ. Prop. 11. L. 11.
2. Joignez les points ZP, ZC, ZS & ZK, item SI & PI. Dem. 1. L. 1.
3. Du point K & dans le Plan ABCD, abaissez la ⊥ Ko sur le diamètre CA. Prop. 12. L. 1.

Puis-

* *On a partagé la Préparation ainsi que la Demonstration, en deux parties.*