

Paul Malliavin

# Géométrie différentielle intrinsèque



Hermann

Enseignement des sciences

# **Géométrie différentielle intrinsèque**

**Collection Enseignement des sciences, 14**

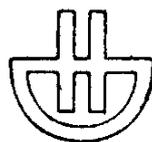
## **Collection Enseignement des sciences**

- |                         |  |
|-------------------------|--|
| 1. Henri Cartan         | Théorie élémentaire des fonctions analytiques      |
| 3. Laurent Schwartz     | Méthodes mathématiques pour les sciences physiques |
| 5. Roger Godement       | Cours d'algèbre                                    |
| 7. Gustave Choquet      | L'enseignement de la géométrie                     |
| 8. Jean Dieudonné       | Analyse linéaire et géométrie élémentaire          |
| 9. Noël Gastinel        | Analyse numérique linéaire                         |
| 10. Leite Lopes         | Fondements de la physique atomique                 |
| 11. Laurent Schwartz    | Analyse  |
| 12. Jean Kuntzmann      | Méthodes numériques                                |
| 13. Pierre-Jean Laurent | Approximation et optimisation                      |
| 14. Paul Malliavin      | Géométrie différentielle intrinsèque               |

**Paul Malliavin**

Professeur à l'Université Paris VI

**Géométrie  
différentielle  
intrinsèque**



**Hermann**

293, rue Lecourbe, 75015 Paris

PAUL MALLIAVIN, né en 1925, est professeur à l'Université Paris VI. Ses travaux de recherches en analyse mathématique, poursuivis simultanément à Paris et à Princeton, portent principalement sur l'analyse harmonique, l'analyse complexe en une et plusieurs variables, les équations elliptiques et les processus stochastiques.

ISBM 2 7056 5696 0

© HERMANN, PARIS 1972

Tous droits de reproduction, même fragmentaire, sous quelque forme que ce soit, y compris photographie, microfilm, bande magnétique, disque, ou autre, réservés pour tous pays.

*A la mémoire de mon père bien aimé*



# Table

|  |           |
|--|-----------|
| AVANT-PROPOS .....   | 15        |
| I. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES  |           |
| 1. <i>Variétés topologiques</i> .....  | 17        |
| 1.1 Atlas sur un ensemble abstrait .....                                     | 17        |
| 1.2 Topologie associée à un atlas $C^0$ .....                                | 18        |
| 1.3 Équivalence des topologies. Dimension .....                              | 19        |
| 1.4 Les variétés topologiques du point de vue de la topologie générale ..    | 20        |
| 1.5 Les variétés topologiques du point de vue des atlas .....                | 22        |
| 2. <i>Rappels de résultats de calcul différentiel</i> .....                  | 26        |
| 2.1 Application dérivée .....  | 26        |
| 2.2 Les classes $C^k$ .....  | 27        |
| 2.3 Difféomorphismes .....   | 28        |
| 3. <i>Variétés différentiables</i> .....                                     | 29        |
| 3.1 Atlas $C^k$ -équivalents .....   | 29        |
| 3.2 Définition d'une structure de variété de classe $C^k$ . Exemples .....   | 30        |
| 3.3 Applications de classe $C^k$ . Exemples .....                            | 32        |
| 3.4 L'anneau des fonctions de classe $C^k$ .....                             | 34        |
| 3.5 Image directe. Image réciproque .....                                    | 36        |
| 4. <i>Espace tangent</i> .....   | 37        |
| 4.1 Construction de l'espace tangent. Conséquences .....                     | 37        |
| 4.2 Application dérivée .....  | 39        |
| 4.3 Principe de localisation .....   | 41        |
| 4.4 Notations et calculs pratiques .....                                     | 43        |
| 5. <i>Equivalence locale d'applications. Théorème du rang constant</i> ..... | 46        |
| 5.1 Problème de l'équivalence .....  | 46        |
| 5.2 Rang d'une application .....   | <u>47</u> |

|   |     |
|---|-----|
| 5.3 Applications localement équivalentes à une application linéaire ... | 49  |
| 5.4 Immersions, plongements .....                                       | 52  |
| 6. <i>Sous-variétés</i> .....   | 53  |
| 6.1 Définition .....  | 53  |
| 6.2 Sous-variétés et plongements .....                                  | 55  |
| 6.3 Théorème du rang constant et sous-variétés .....                    | 58  |
| 6.4 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$ .....                               | 60  |
| 6.5 Application. Théorie des fonctions indépendantes .....              | 62  |
| 7. <i>Fibré tangent</i> .....   | 63  |
| 7.1 Le fibré tangent du point de vue algébrique .....                   | 63  |
| 7.2 Structure de variété sur le fibré tangent .....                     | 66  |
| 7.3 Dérivées d'ordre supérieur .....                                    | 68  |
| 7.4 Champs de vecteurs de classe $C^k$ .....                            | 69  |
| 7.5 Champs de tenseurs covariants. Formes différentielles .....         | 71  |
| 7.6 Image réciproque d'un champ covariant .....                         | 73  |
| II. CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LES VARIÉTÉS                                |     |
| 1. <i>Différentielles</i> .....   | 89  |
| 1.1 Variété parallélisée .....  | 89  |
| 1.2 Différentielle d'une application; Image réciproque .....            | 90  |
| 1.3 Différentielle d'une fonction à valeurs vectorielles .....          | 91  |
| 1.4 Calculs pratiques sur les formes différentielles .....              | 92  |
| 2. <i>Champs de vecteurs et groupes à un paramètre</i> .....            | 95  |
| 2.1 Problème de l'équivalence pour les champs de vecteurs .....         | 95  |
| 2.2 Lignes de courant d'un champ de vecteurs .....                      | 96  |
| 2.3 Ligne de courant maximale .....                                     | 97  |
| 2.4 Pseudo-groupe de transformation associé à un champ de vecteurs ..   | 99  |
| 3. <i>Dérivées de Lie</i> .....   | 102 |
| 3.1 Définition et existence .....                                       | 102 |
| 3.2 Propriétés de la dérivée de Lie .....                               | 104 |
| 3.3 Crochet de dérivations et crochets de champs de vecteurs .....      | 106 |
| 3.4 Calculs pratiques dans une carte numérique .....                    | 110 |
| 3.5 Invariance par un groupe à un paramètre .....                       | 111 |
| 4. <i>Cobord des formes différentielles</i> .....                       | 112 |
| 4.1 Position du problème .....  | 112 |
| 4.2 Le critère d' $\mathcal{A}$ (V)-linéarité .....                     | 113 |

|   |  |     |
|---|--|-----|
| 4.3   | Cobord de formes différentielles de degré I .....  | 115 |
| 4.4   | Définition générale du cobord .....  | 117 |
| 4.5   | Expression du cobord dans une carte numérique .....  | 118 |
| 4.6   | Propriétés du cobord .....   | 119 |
| 5.  | <i>Le théorème de Frobenius</i> .....  | 122 |
| 5.1   | Notion de $p$ -champ .....   | 122 |
| 5.2   | $p$ -Champ complément intégral. Le théorème de réduction .....   | 124 |
| 5.3   | Variété intégrale .....  | 129 |
| 5.4   | Quelques énoncés équivalents de la condition de Frobenius .....  | 130 |
| 5.5   | Détermination pratique des variétés intégrales d'un $p$ -champ .....   | 134 |
| III. THÉORIE LOCALE DES GROUPES DE LIE. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES |  |     |
| 1.  | <i>Parallélisme canonique sur un groupe de Lie</i> .....   | 156 |
| 1.1   | Notion de groupe de Lie .....  | 156 |
| 1.2   | Translation à gauche .....   | 156 |
| 1.3   | Parallélisme canonique sur un groupe de Lie .....  | 157 |
| 1.4   | Formes invariantes à gauche .....  | 157 |
| 1.5   | Champ de vecteurs invariants à gauche .....  | 159 |
| 2.  | <i>Algèbre de Lie et équation de structure de Maurer-Cartan</i> .....  | 161 |
| 2.1   | Algèbre de Lie abstraite .....   | 161 |
| 2.2   | Algèbre de Lie d'un groupe de Lie .....  | 162 |
| 2.3   | Forme canonique à valeurs dans l'algèbre de Lie .....  | 163 |
| 2.4   | Équation de structure de Maurer-Cartan .....   | 164 |
| 2.5   | Expression dans une base des équations de structure .....  | 165 |
| 3.  | <i>Théorie de l'équivalence de Darboux</i> .....   | 165 |
| 3.1   | Définition de l'équivalence .....  | 165 |
| 3.2   | Différentielle de Darboux .....  | 166 |
| 3.3   | Équation de structure des différentielles de Darboux .....   | 166 |
| 3.4   | Théorème d'existence fondamental. Construction d'une application<br>ayant une différentielle de Darboux donnée ..... | 167 |
| 3.5   | Détermination d'une application par son graphe .....   | 168 |
| 3.6   | Traduction géométrique et démonstration du théorème fonda-<br>mental .....   | 169 |
| 3.7   | Résolution du problème de l'équivalence .....  | 171 |
| 4.  | <i>Homomorphisme de groupes de Lie</i> .....   | 172 |
| 4.1   | Définition .....   | 172 |
| 4.2   | Différentielle de Darboux d'un homomorphisme .....   | 173 |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 4.3 | Homomorphismes d'algèbres de Lie et différentielles de Darboux ...                       | 174 |
| 4.4 | Homomorphisme de groupes et homomorphismes d'algèbres .....                              | 176 |
| 5.  | <i>Sous-groupes et sous-algèbres</i> .....   | 177 |
| 5.1 | Définition .....   | 177 |
| 5.2 | Sous-algèbre de Lie associée à un sous-groupe de Lie .....                               | 178 |
| 5.3 | Problème de Frobenius attaché à une sous-algèbre de Lie .....                            | 178 |
| 5.4 | Correspondance entre sous-groupes et sous-algèbres .....                                 | 179 |
| 6.  | <i>Application exponentielle</i> .....   | 181 |
| 6.1 | Groupe de transformations attaché à un champ invariant à gauche .                        | 181 |
| 6.2 | Application exponentielle .....  | 182 |
| 6.3 | Homomorphisme de $\mathbf{R}$ dans un groupe de Lie $G$ .....                            | 183 |
| 7.  | <i>Groupes de transformation de la géométrie élémentaire</i> .....                       | 184 |
| 7.1 | Rappel des définitions élémentaires des groupes classiques .....                         | 184 |
| 7.2 | Groupe de Lie et groupes classiques .....  | 185 |
| 7.3 | Algèbre de Lie du groupe linéaire .....  | 188 |
| 7.4 | Produits semi-directs. Algèbre de Lie du groupe des déplacements .                       | 191 |
| 7.5 | La méthode du repère mobile en géométrie euclidienne .....                               | 194 |
| 8.  | <i>Géométrie riemannienne. Dérivation covariante. Plongements euclidiens</i> .....       | 201 |
| 8.1 | Variété riemannienne .....   | 202 |
| 8.2 | Champs de repères .....  | 204 |
| 8.3 | Fondement intrinsèque de la géométrie euclidienne par sa structure<br>riemannienne ..... | 208 |
| 8.4 | Dérivation covariante .....  | 211 |
| 8.5 | Courbure d'une variété riemannienne .....  | 215 |
| 8.6 | Plongements riemanniens .....  | 218 |
| 8.7 | Théorie des hypersurfaces .....  | 221 |

#### IV. CALCUL DES VARIATIONS

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1.  | <i>Formulation du problème</i> .....          | 255 |
| 1.1 | Métrique sur une variété différentiable ..... | 255 |
| 1.2 | Relèvement sur le fibré tangent .....         | 257 |
| 1.3 | Forme différentielle de Hilbert .....         | 258 |
| 1.4 | Covecteurs basiques sur $T(V)$ .....          | 259 |
| 1.5 | Lemme fondamental .....                       | 260 |

|  |     |
|--|-----|
| 2. <i>Une condition nécessaire d'extrémum régulier : l'équation d'Euler-Cartan</i> ..... | 262 |
| 2.1 Courbes extrémales régulières .....  | 262 |
| 2.2 Théorème fondamental (Euler-Cartan) .....  | 262 |
| 2.3 Calcul de la variation de la longueur d'une courbe .....                             | 263 |
| 2.4 Démonstration du théorème d'Euler-Cartan .....                                       | 264 |
| 2.5 Exemple : géodésiques d'une variété riemannienne .....                               | 265 |
| 2.6 Exemple : les équations d'Euler-Lagrange .....                                       | 267 |
| 3. <i>Champs géodésiques. Invariants intégraux</i> .....                                 | 271 |
| 3.1 Descente de la forme de Hilbert .....  | 272 |
| 3.2 Champ géodésique .....   | 272 |
| 3.3 Invariants intégraux .....   | 273 |
| 4. <i>Condition suffisante d'extrémum : méthode de Hilbert</i> .....                     | 274 |
| 4.1 Transversalité .....   | 275 |
| 4.2 Champs de normales .....   | 277 |
| 4.3 Condition suffisante de minimum de Hilbert .....                                     | 278 |
| 5. <i>Théorie d'Hamilton-Jacobi</i> .....  | 280 |
| 5.1 Application d'Hamilton .....   | 280 |
| 5.2 Théorème (Équation d'Hamilton-Jacobi) .....  | 281 |
| 5.3 Forme canonique sur $T(V^*)$ .....   | 282 |
| 5.4 Forme canonique des équations d'Euler : Équations d'Hamilton ...                     | 283 |

## APPENDICE

|  |     |
|--|-----|
| Démonstration du théorème de réduction locale d'un champ de vecteurs . | 293 |
| BIBLIOGRAPHIE .....  | 303 |
| INDEX .....  | 305 |



# Avant-propos

L'exposé que l'on trouvera ici est élémentaire : il ne suppose point d'autre connaissance que le maniement des matrices jacobienues associées à une application de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^p$  et le théorème des fonctions implicites dans la même situation. Il est ainsi facilement accessible à un étudiant de première année de maîtrise ès Sciences Mathématique ou Physique.

Les méthodes générales qui y sont développées sont illustrées par des applications à des problèmes familiers dans un cadre élémentaire : par exemple théorie des variétés plongées dans  $\mathbf{R}^n$ , théorie des équations différentielles, groupe des déplacements de la géométrie élémentaire, théorie des surfaces de l'espace euclidien, équations de Lagrange et d'Hamilton de la mécanique.

Toutefois on a cherché à se placer le plus possible à un point de vue intrinsèque; la topologie générale n'est plus enseignée comme une étude des parties de  $\mathbf{R}$ ; il semble souhaitable que la géométrie différentielle puisse être formulée dans le cadre des variétés abstraites, ses constructions étant autant que possible développées sans faire appel à des coordonnées locales.

D'autre part on a essayé de rattacher les résultats classiques de la géométrie élémentaire à des contextes plus généraux : par exemple la théorie du repère mobile est d'abord formulée dans le cadre d'un groupe de Lie arbitraire avant d'être appliquée au groupe des déplacements et à la géométrie euclidienne.

Les première et deuxième parties sont consacrées à l'acquisition des concepts et des procédés opératoires nécessaires à la troisième et quatrième parties dont les résultats constituent l'objectif de cet exposé. Pour cette raison, le lecteur pourra en première lecture les parcourir rapidement surtout en ce qui concerne la première partie dont l'exposé a été allongé dans un souci pédagogique.

La troisième partie est consacrée à la théorie locale des groupes de Lie et à quelques-unes de ses applications géométriques.

On expose les théorèmes de Lie et Cartan de correspondance entre groupes de Lie locaux et algèbres de Lie. Ces propriétés sont établies en développant d'abord la théorie de l'équivalence de Darboux pour les applications d'une variété dans un groupe de Lie.

Les applications géométriques envisagées sont d'abord l'étude d'un espace muni d'un groupe de transformations (géométrie euclidienne) puis ensuite l'étude d'un espace muni en chaque point d'un groupe de transformation de l'espace tangent en ce point (géométrie riemannienne).

La notion de *fibré principal* aurait pu être introduite à ce dernier point; on a préféré, pour rester élémentaire, utiliser uniquement des *sections* de fibrés principaux en travaillant sur des champs de repères et d'introduire par ce procédé la dérivation covariante.

La quatrième partie est consacrée au calcul des variations. Un effort a été fait pour éviter tout usage d'un système de coordonnées locales dans les démonstrations des théorèmes de base (Équation d'Euler en particulier). On espère ainsi avoir facilité au lecteur la distinction entre les différents espaces où sont définis les concepts du calcul des variations : métrique sur une variété  $V$ , équation d'Euler-Lagrange sur le fibré tangent  $V$ , équation d'Hamilton sur le fibré cotangent à  $V$ , etc... Ces distinctions posées la théorie se prolonge dans les invariants intégraux et l'équation de Jacobi.

Ce programme est une initiation, aucun problème global n'étant par exemple abordé et rien n'étant dit sur les variétés analytiques complexes. On espère simplement qu'il aura pu peut-être donner quelque idée des méthodes intrinsèques de calcul en géométrie différentielle locale (méthodes très naturelles pour certaines autres branches des mathématiques comme par exemple les équations aux dérivées partielles à coefficients variables) et inciter certains lecteurs à une étude plus approfondie du sujet.

Pendant les cinq ans où ce cours a été enseigné à Orsay puis à Paris, le recueil d'exercices publié ici a été élaboré par les diverses personnes ayant participé à cet enseignement dont M. A. Kumpera, M<sup>lle</sup> Barbance, M. M. Dejean et Gattesoupe, M<sup>me</sup> Buttin, M. Gérardin.

# Variétés différentiables

## 1 Variétés topologiques

La théorie des variétés peut être développée dans des cadres très variés : citons pour nous limiter à ceux étudiés ici celui des *variétés topologiques* et celui des *variétés différentiables*. Le trait commun à ces diverses théories est le *transport* à un ensemble abstrait d'une structure élémentaire définie sur les ouverts de  $\mathbf{R}^n$  ou de  $\mathbf{C}^n$ . Ce transport sera réalisé par la notion d'*atlas* qui sera développée dans le paragraphe suivant.

### 1.1 ATLAS SUR UN ENSEMBLE ABSTRAIT

*Cartes. Application de changement de cartes*

Soit  $F$  un ensemble abstrait. On appellera *carte* de  $F$  une bijection  $\varphi_\alpha$  d'une partie  $U_\alpha$  de  $F$  sur un ouvert  $O_\alpha$  d'un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  de dimension finie  $E_\alpha$ . Lorsque  $E_\alpha = \mathbf{R}^n$ , on dira que  $\varphi_\alpha$  est une *carte numérique*.

Si  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  sont deux cartes de  $F$  définies sur  $U_\alpha$  et  $U_\beta$  on notera par  $f_{\alpha,\beta}$  l'application de *changement de cartes* définie formellement par

$$f_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}.$$

Le domaine de définition de  $f_{\alpha,\beta}$  est l'image par  $\varphi_\beta$  de  $U_\alpha \cap U_\beta$ . On posera

$$O_{\beta,\alpha} = \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Alors il résulte des définitions que l'application de changement de cartes  $f_{\alpha,\beta}$  est une *bijection* de  $O_{\beta,\alpha}$  sur  $O_{\alpha,\beta}$ .

*Atlas*

**DÉFINITION.** — On appellera *atlas*  $\mathcal{A}$  sur un ensemble abstrait  $F$  la donnée d'une collection  $\{\varphi_\alpha\}$  de cartes de  $F$  satisfaisant les deux axiomes suivants :

1.1.1 Les domaines de définition  $\{U_\alpha\}$  de ces cartes constituent un recouvrement de  $F$ .

1.1.2 *Quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$ , le domaine de définition  $O_{\beta, \alpha}$  de l'application de changement de cartes  $f_{\alpha, \beta}$  est une partie ouverte de  $E_{\beta}$ .*

On dit qu'un atlas est *numérique* si toutes ses cartes sont numériques.

### 1.1.3 Atlas de classe $C^0$

DÉFINITION. — Un atlas est de classe  $C^0$  si toutes les applications de changement de cartes sont des applications *continues*. (Comme l'application réciproque de  $f_{\alpha, \beta}$  est  $f_{\beta, \alpha}$ , il en résulte alors que, pour un atlas  $C^0$ , les  $f_{\alpha, \beta}$  sont des homéomorphismes.)

## 1.2 TOPOLOGIE ASSOCIÉE A UN ATLAS $C^0$

Nous allons dans ce paragraphe associer à tout atlas  $\alpha$  de classe  $C^0$  défini sur  $F$  une *topologie naturelle* sur  $F$ . Cette topologie sera la topologie la *moins fine*, rendant continue toutes les cartes  $\varphi_{\alpha}$  de  $\alpha$ . Plus précisément la famille  $\Delta_{\alpha}$  des ouverts de cette topologie sera constituée de toutes les parties  $\Omega$  de  $F$  s'écrivant

$$1.2.1 \quad \Omega = \bigcup_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{-1}(\Omega_{\alpha})$$

où  $\Omega_{\alpha}$  est une partie ouverte quelconque de  $O_{\alpha}$ .

On a alors

*La réunion d'une famille de parties de  $\Delta_{\alpha}$  est une partie de  $\Delta_{\alpha}$ ; l'intersection de 2 parties de  $\Delta_{\alpha}$  est une partie de  $\Delta_{\alpha}$ . On notera par  $F_{\alpha}$  l'espace topologique obtenu en munissant  $F$  de la topologie dont  $\Delta_{\alpha}$  est la famille d'ouverts.*

PREUVE. — La réunion est évidente, en effet on a :

$$\bigcup_i \bigcup_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{-1}(\Omega_{\alpha, i}) = \bigcup_{\alpha} \bigcup_i \varphi_{\alpha}^{-1}(\Omega_{\alpha, i}) = \bigcup_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{-1} \left( \bigcup_i \Omega_{\alpha, i} \right)$$

Pour démontrer l'intersection on se ramène, en utilisant la propriété qu'une réunion d'ouverts est ouverte, à démontrer que

$$G = \varphi_{\alpha}^{-1}(\Omega_{\alpha}) \cap \varphi_{\beta}^{-1}(\Omega_{\beta})$$

appartient à  $\Delta_{\alpha}$ . On a

$$\varphi_{\alpha}^{-1}(\Omega_{\alpha}) \cap \varphi_{\beta}^{-1}(\Omega_{\beta}) \subset U_{\alpha} \cap U_{\beta}$$

Par suite on peut calculer  $\varphi_{\alpha}(G)$ ; on a :

$$\varphi_{\alpha}(G) = \Omega_{\alpha} \cap f_{\alpha, \beta}(\Omega_{\beta} \cap O_{\beta, \alpha})$$

Comme  $f_{\alpha, \beta}$  est un homéomorphisme, le second membre est une partie ouverte de  $E_{\alpha}$ , soit  $G_{\alpha}$  et l'on a

$$G = \varphi_{\alpha}^{-1}(G_{\alpha})$$

ce qui montre que  $G \in \Delta_{\alpha}$ .

1.2.2 PROPOSITION. — Soit  $F$  un ensemble abstrait muni d'un atlas  $\alpha$  de classe  $C^0$  alors le domaine de définition  $U_\alpha$  d'une carte  $\varphi_\alpha$  est une partie ouverte de  $F_\alpha$  et  $\varphi_\alpha$  réalise un homéomorphisme de  $U_\alpha$  sur  $O_\alpha$ .

PREUVE. — Comme  $U_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(O_\alpha)$  on a le fait que  $U_\alpha$  est un ouvert de  $F_\alpha$ . Soit  $\Omega$  une partie ouverte de  $F_\alpha$  contenue dans  $U_\alpha$ , alors on a

$$\Omega = \bigcup_{\beta} \varphi_\beta^{-1}(\Omega_\beta)$$

calculons  $\varphi_\alpha(\Omega)$

$$\varphi_\alpha(\Omega) = \bigcup_{\beta} f_{\alpha, \beta}(\Omega_\beta)$$

Comme  $f_{\alpha, \beta}$  est un homéomorphisme il en résulte que  $f_{\alpha, \beta}(\Omega_\beta)$  et par suite  $\varphi_\alpha(\Omega)$  est une partie ouverte de  $E_\alpha$ , ce qui démontre que  $\varphi_\alpha$  est ouverte. Comme d'après la définition de la topologie  $F_\alpha$ ,  $\varphi_\alpha$  est continue,  $\varphi_\alpha$  est un homéomorphisme.

C.Q.F.D.

### 1.3 ÉQUIVALENCE DES TOPOLOGIES. DIMENSION

Soit  $F$  un ensemble abstrait muni de deux atlas  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$ . Nous noterons par  $\alpha \cup \tilde{\alpha}$  la collection de toutes les cartes appartenant à  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$ . On a alors

1.3.1 PROPOSITION. — Soit  $F$  un ensemble abstrait,  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$  deux atlas de classe  $C^0$  sur  $F$ . Alors  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$  définissent la même topologie sur  $F$  si et seulement si  $\alpha \cup \tilde{\alpha}$  est un atlas de classe  $C^0$ . On dit alors que  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$  sont  $C^0$  équivalents.

PREUVE. — Pour montrer que  $\alpha \cup \tilde{\alpha}$  est un atlas il faut vérifier que 1.1.2 est satisfait. Soit  $U_\alpha, \tilde{U}_{\tilde{\alpha}}$  le domaine de définition de  $\varphi_\alpha \in \alpha$  et de  $\tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} \in \tilde{\alpha}$ . Alors comme  $F_\alpha = F_{\tilde{\alpha}}$ ,  $\tilde{U}_{\tilde{\alpha}}$  est une partie ouverte de  $F_\alpha$ , par suite  $U_\alpha \cap \tilde{U}_{\tilde{\alpha}}$  est une partie ouverte de  $F_\alpha$ . Comme  $\varphi_\alpha$  est d'après 1.2.2 un homéomorphisme

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \tilde{U}_{\tilde{\alpha}}) = O_{\alpha, \tilde{\alpha}}$$

est ouvert. Ceci étant l'application de changement de carte  $f_{\tilde{\alpha}, \alpha}$

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

s'obtient en composant deux homéomorphismes :  $\varphi_\alpha^{-1}$  qui définit un homéomorphisme de  $O_{\alpha, \tilde{\alpha}}$  sur  $U_\alpha \cap \tilde{U}_{\tilde{\alpha}}$  et ensuite  $\tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}}$ . Par suite  $f_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  est un homéomorphisme.

Inversement, supposons que  $\alpha \cup \tilde{\alpha}$  soit de classe  $C^0$ . Tout ouvert dans  $F_\alpha$  étant réunion de  $\varphi_\alpha^{-1}(\Omega_\alpha)$  il suffit de montrer que

$$\varphi_\alpha^{-1}(\Omega_\alpha) \text{ est un ouvert dans } F_{\tilde{\alpha}}:$$

Posant  $G_{\tilde{\alpha}, \alpha} = \varphi_{\alpha}^{-1}(\Omega_{\alpha}) \cap U_{\tilde{\alpha}}$ , on a puisque les  $U_{\tilde{\alpha}}$  recouvrent  $F$

$$\varphi_{\alpha}^{-1}(\Omega_{\alpha}) = \bigcup_{\tilde{\alpha}} G_{\tilde{\alpha}, \alpha}$$

et par suite tout revient à montrer que  $G_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  est ouvert dans  $F_{\tilde{\alpha}}$ . On a formellement

$$\varphi_{\tilde{\alpha}}(G_{\tilde{\alpha}, \alpha}) = f_{\tilde{\alpha}, \alpha}(\Omega_{\alpha} \cap O_{\alpha, \tilde{\alpha}})$$

Utilisant le fait d'après 1.1.2 que  $O_{\alpha, \tilde{\alpha}}$  est un ouvert de  $O_{\alpha}$  et que  $f_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  est un homéomorphisme on obtient que le second membre, soit  $H_{\tilde{\alpha}, \alpha}$ , est un ouvert de  $O_{\tilde{\alpha}}$ .

Par suite

$$G_{\tilde{\alpha}, \alpha} = \varphi_{\tilde{\alpha}}^{-1}(H_{\tilde{\alpha}, \alpha})$$

est un ouvert dans  $F_{\tilde{\alpha}}$ .

C.Q.F.D.

### Dimension

Énonçons un théorème de topologie que nous admettrons.

1.3.2 THÉORÈME DE BROUWER. — Soit  $E_{\alpha}, E_{\beta}$  deux espaces vectoriels de dimension finie sur  $\mathbf{R}$ ,  $O_{\alpha}, O_{\beta}$  deux ouverts de  $E_{\alpha}$  et de  $E_{\beta}$  respectivement.

Supposons que  $O_{\alpha}$  soit homéomorphe à  $O_{\beta}$ , alors

$$\text{dimension de } E_{\alpha} = \text{dimension de } E_{\beta}$$

DÉFINITION. — On dira qu'un atlas  $\alpha$  défini sur un ensemble abstrait  $F$  est de dimension  $n$  si tous les espaces vectoriels  $E_{\alpha}$  où les cartes de  $\alpha$  prennent leurs valeurs sont de dimension  $n$ .

1.3.3 COROLLAIRE. — Si  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$  sont deux atlas  $C^0$  équivalents et si  $\alpha$  est un atlas de dimension  $n$ , alors  $\tilde{\alpha}$  est aussi un atlas de dimension  $n$ .

## 1.4 LES VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES DU POINT DE VUE DE LA TOPOLOGIE GÉNÉRALE

DÉFINITION. — On dira qu'un atlas  $\alpha$  de classe  $C^0$  défini sur un ensemble abstrait  $F$  est *séparé* si l'espace topologique  $F_{\alpha}$  satisfait l'axiome de séparation de Hausdorff (c'est-à-dire deux points distincts de  $F_{\alpha}$  possèdent toujours deux voisinages ayant une intersection vide).

DÉFINITION. — Étant donné un ensemble abstrait  $F$ , on appellera *structure de variété topologique de dimension  $n$*  défini sur  $F$  la donnée d'une *structure d'espace topologique* sur  $F$  pouvant être obtenu comme  $F_{\alpha}$ , où  $\alpha$  est un atlas de classe  $C^0$ , *séparé* et de dimension  $n$ . On dira que la structure de variété topologique est *définie via l'atlas  $\alpha$* .

Ces définitions font intervenir à la fois des notions de la topologie générale et la technique des atlas.

Nous allons dans ce paragraphe d'abord nous intéresser à une formulation purement intrinsèque, indépendante des atlas, au contraire dans le paragraphe suivant donner une définition n'utilisant aucune notion de topologie générale.

*Caractérisation topologique des variétés topologiques*

On a

1.4.1 PROPOSITION. — *Soit X un espace topologique séparé. Alors X est une variété topologique de dimension n si et seulement si tout point  $x_0 \in X$  possède un voisinage ouvert homéomorphe à une boule ouverte de  $\mathbf{R}^n$ .*

PREUVE. — Si X possède cette propriété, nous définissons un atlas  $\alpha$  dont les domaines de définition de cartes sont la collection  $U_\alpha$  des ouverts de X homéomorphes à une boule de  $\mathbf{R}^n$ ; la carte correspondante étant précisément cette homéomorphie  $\varphi_\alpha$ , et  $E_\alpha = \mathbf{R}^n$ . On vérifie que les conditions 1.1.1 et 1.1.2 sont satisfaites et que  $\alpha$  est un atlas de classe  $C^0$ . Montrons que la topologie définie sur X par  $\alpha$ , soit  $X_\alpha$  est celle d'origine. Soit  $\Delta$  un ouvert de  $X_\alpha$

$$\Delta = \bigcup_{\alpha} \varphi_\alpha^{-1}(\Omega_\alpha)$$

Comme  $\varphi_\alpha$  est un homéomorphisme  $\varphi_\alpha^{-1}(\Omega_\alpha)$  est un ouvert de  $U_\alpha$  donc de X, et par suite  $\Delta$  est un ouvert de X. Réciproquement soit D un ouvert de X. Alors

$$\varphi_\alpha(D \cap U_\alpha) = D_\alpha$$

est un ouvert de  $O_\alpha$ . Par suite

$$D = \bigcup_{\alpha} (D \cap U_\alpha) = \bigcup_{\alpha} \varphi_\alpha^{-1}(D_\alpha)$$

est un ouvert de  $X_\alpha$  : les deux topologies coïncident.

Inversement soit F un ensemble abstrait muni d'un atlas séparé  $\alpha$  de dimension n. Soit  $F_\alpha$  la structure de variété topologique définie via  $\alpha$  sur F. Soit  $x_0 \in F$ . Il existe une carte  $\varphi_\alpha$  de  $\alpha$  dont le domaine de définition  $U_\alpha$  contient  $x_0$ . D'après 1.2.2  $U_\alpha$  est ouvert dans  $F_\alpha$ . Soit  $\xi_0 = \varphi_\alpha(x_0)$ , choisissons une base de  $E_\alpha$ , c'est-à-dire une identification de  $E_\alpha$  à  $\mathbf{R}^n$  et soit B une boule ouverte de centre  $\xi_0$  et de rayon  $\varepsilon$  assez petit tel que  $B \subset O_\alpha$ . Alors  $\varphi_\alpha^{-1}(B)$  est un voisinage ouvert de  $x_0$  dans  $U_\alpha$ , donc dans  $F_\alpha$ . C.Q.F.D.

1.4.2 *Interprétation de la notion d'atlas dans le cadre de la topologie générale*

PROPOSITION. — *Soit X une variété topologique alors un atlas  $\alpha$  de classe  $C^0$  définie sur X sera tel que  $X_\alpha = X$  si et seulement si quelque soit  $\alpha \in \alpha$  le domaine de définition  $U_\alpha$  de la carte  $\varphi_\alpha$  est un ouvert de X et si de plus  $\varphi_\alpha$  est un homéomorphisme de  $U_\alpha$  sur  $O_\alpha$ .*

PREUVE. — La nécessité résulte de 1.2.2. Inversement, supposons cette condition satisfaite; comme la topologie  $X_\alpha$  est la moins fine rendant continue tous les  $\varphi_\alpha$  il en résulte que X est *a priori* muni d'une topologie plus fine que  $X_\alpha$ . Montrons

alors que tout ouvert  $G$  de  $X$  est un ouvert de  $X_\alpha$ . On a

$$G = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \quad \text{où} \quad G_{\alpha} = G \cap U_{\alpha}$$

et

$$G_{\alpha} = \varphi_{\alpha}^{-1}(\Gamma_{\alpha}) \quad \text{où} \quad \Gamma_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(G_{\alpha})$$

$G_{\alpha}$  est l'intersection de deux ouverts de  $X$ , donc est ouvert;  $\varphi_{\alpha}$  étant un homéomorphisme  $\Gamma_{\alpha}$  est un ouvert; d'où  $G_{\alpha}$  est un ouvert de  $X_{\alpha}$  et aussi  $G$ .

C.Q.F.D.

### 1.4.3 Donnée pratique d'une variété topologique

Étant donné une variété topologique, on dira que  $X$  est munie de l'atlas  $\alpha$  si  $\alpha$  est un atlas de classe  $C^0$  tel que  $X_{\alpha} = X$ . Alors la topologie sur  $X$  pourra être définie via l'atlas  $\alpha$ .

Pour construire un tel atlas  $\alpha$  il suffit de construire un recouvrement ouvert  $U_{\alpha}$  de  $X$  tel que chaque  $U_{\alpha}$  soit homéomorphe à un ouvert  $O_{\alpha}$  de  $\mathbf{R}^n$ .

*Exemple.* Considérons la partie  $K$  de  $\mathbf{R}^3$

$$K = \{x; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Munissons  $K$  de la topologie induite par  $\mathbf{R}^3$ . Soit  $a_1 = (0, 0, 1)$ ,  $a_2 = -a_1$ ,  $U_1$  et  $U_2$  le complémentaire dans  $K$  de  $a_1$  et  $a_2$ . Définissons une carte  $\varphi_1$  de  $U_1$  sur  $\mathbf{R}^2$  par la projection stéréographique

$$\varphi_1(x) = \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0 \right) \quad x \in U_1$$

De même  $\varphi_2$  est défini par

$$\varphi_2(x) = -\varphi_1(-x)$$

Alors la famille  $(U_i, \varphi_i)$  définit un atlas  $C_0$  sur  $K$ .

## 1.5 LES VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES DU POINT DE VUE DES ATLAS

Nous avons appelé en 1.4 une structure de variété topologique défini sur un ensemble abstrait  $F$  la donnée d'une *structure topologique* sur  $F$  définie via un atlas  $\alpha$ . Nous nous proposons dans ce paragraphe d'éliminer cet appel à des notions de topologie générale; il ne s'agit pas là seulement d'un exercice de logique mais de la constitution d'une *démarche fondamentale* qui nous permette ultérieurement de transporter à des ensembles abstraits des *structures plus riches d'ouverts de  $\mathbf{R}^n$*  que leur simple structure topologique, seule mise en cause dans la définition des atlas de classe  $C^0$ .

Étant donné deux atlas de classe  $C^0$ ,  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$ , définis sur un ensemble abstrait  $F$ , nous dirons que

1.5.1 DÉFINITION. —  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$  sont deux atlas  $C^0$ -équivalents si  $\alpha \cup \tilde{\alpha}$  est un atlas de classe  $C^0$ .

Si on considère seulement des atlas de dimension  $n$  on peut en choisissant une base dans chaque  $E_\alpha$  se limiter au cas où  $\alpha$  est un *atlas numérique*.

Ceci étant, l'ensemble  $\mathcal{C}_n^0(F)$  de tous les atlas numériques de  $F$  de classe  $C^0$ , séparés et de dimension  $n$  est bien défini.

On considère dans  $\mathcal{C}_n^0(F)$  la relation : «  $\alpha$  est équivalent à  $\tilde{\alpha}$  ». Ceci est une *relation d'équivalence*. Une démonstration directe est facile et est laissée au lecteur; plus rapidement remarquons que ceci est une conséquence de 1.3.1 (en effet  $\alpha$  équivalent à  $\alpha''$  et  $\alpha'$  équivalent à  $\alpha''$  entraîne d'après 1.3.1 que  $F\alpha = F\alpha'$  et  $F\alpha'' = F\alpha'$  par suite que  $F\alpha = F\alpha''$  c'est-à-dire  $\alpha$  équivalent à  $\alpha''$  etc...).

Ceci étant, nous considérerons les classes d'équivalence de  $\mathcal{C}_n^0(F)$  pour cette relation d'équivalence.

1.5.2 *La donnée d'une structure de variété topologique de dimension  $n$  sur  $F$  revient à se donner une classe d'équivalence sur  $\mathcal{C}_n^0(F)$ .*

En effet, notons par  $S_n^0(F)$  l'ensemble, de toutes les structures de variétés topologiques de dimension  $n$  sur  $F$ . Alors il existe une application

$$\pi : \mathcal{C}_n^0(F) \rightarrow S_n^0(F)$$

définie en associant à tout  $\alpha \in \mathcal{C}_n^0(F)$  la structure topologique  $F\alpha$ . Cette application  $\pi$  est surjective. Par suite  $S_n^0(F)$  est le quotient de  $\mathcal{C}_n^0(F)$  pour la relation d'équivalence  $\alpha \sim \alpha'$  si  $\pi(\alpha) = \pi(\alpha')$ . D'après 1.3.1 ceci n'est rien d'autre que la relation d'équivalence introduite en 1.5.1. C.Q.F.D.

*Traduction en termes d'atlas des notions de la topologie générale*

Nous avons dans le paragraphe précédent défini les variétés topologiques à partir de la seule notion d'atlas de classe  $C^0$ . Par suite il est possible d'introduire à l'aide de cette seule notion tous les concepts familiers de la topologie générale dans le cadre particulier des variétés topologiques. Nous allons développer en détail cette possibilité pour la notion d'*application continue*. Comme précédemment cet exposé n'a pas un simple intérêt logique mais nous aidera à constituer une démarche nouvelle.

Soient  $V$  et  $\tilde{V}$  deux variétés topologiques munies des atlas  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$ . Soit  $h$  une application de  $V$  dans  $\tilde{V}$ .

Étant donné deux cartes  $\varphi_\alpha \in \alpha$  et  $\varphi_{\tilde{\alpha}} \in \tilde{\alpha}$  nous définissons formellement une application  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  par

$$h_{\tilde{\alpha}, \alpha} = \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

$h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  est défini sur une partie de  $O_\alpha$  :

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap h^{-1}(\tilde{U}_{\tilde{\alpha}})) \quad (\text{partie qui peut d'ailleurs être vide});$$

et prend ses valeurs dans  $\tilde{O}_{\tilde{\alpha}}$ .

Nous appellerons  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  l'application  $h$  lue dans le couple de cartes  $\varphi_\alpha, \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}}$ . On a alors

1.5.3 PROPOSITION. — L'application  $h$  de  $V$  dans  $\tilde{V}$  est continue si et seulement si toutes les applications  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$ , obtenues en lisant  $h$  dans un couple de cartes d'un atlas  $\mathcal{A}$  sur  $V$  et d'un atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  sur  $\tilde{V}$ , sont définies sur des parties ouvertes de  $E_\alpha$  et sont continues.

PREUVE. — La nécessité est évidente : si  $h$  est continue

$$U_\alpha \cap h^{-1}(\tilde{U}_{\tilde{\alpha}})$$

est l'intersection de deux ouverts de  $V$ , donc est un ouvert dont l'image par  $\varphi_\alpha$  sera un ouvert de  $E_\alpha$ . D'autre part  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  s'obtient en composant des applications continues, donc est continue.

Réciproquement pour montrer que  $h$  est continue il faut montrer que si  $\tilde{\Delta}$  est un ouvert de  $\tilde{V}$  alors  $h^{-1}(\tilde{\Delta})$  est un ouvert de  $V$ . Comme  $\tilde{\Delta}$  est une réunion de  $\tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\tilde{\Omega}_{\tilde{\alpha}})$ , où  $\tilde{\Omega}_{\tilde{\alpha}}$  est un ouvert de  $\tilde{O}_{\tilde{\alpha}}$ , il suffit de montrer que  $G = h^{-1}(\tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\tilde{\Omega}_{\tilde{\alpha}}))$  est un ouvert de  $V$ .

$$G = \bigcup_{\alpha} K_\alpha$$

où

$$K_\alpha = h^{-1}(\tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}}^{-1}(\tilde{\Omega}_{\tilde{\alpha}})) \cap U_\alpha$$

tout revient à montrer que  $K_\alpha$  est ouvert dans  $V$ . D'autre part posant  $\varphi_\alpha(K_\alpha) = H_\alpha$  on a

$$H_\alpha = h_{\tilde{\alpha}, \alpha}^{-1}(\tilde{\Omega}_{\tilde{\alpha}})$$

Comme  $\tilde{\Omega}_{\tilde{\alpha}}$  est ouvert,  $H_\alpha$  est ouvert dans le domaine de définition de  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$ , ce dernier étant ouvert dans  $O_\alpha$  par hypothèse,  $H_\alpha$  est ouvert dans  $O_\alpha$ , par suite  $K_\alpha$  est une partie ouverte de  $V$ . C.Q.F.D.

*Exemple.* Empruntons un exemple à la mécanique : Considérons un corps solide  $S$  ayant un point fixe et soit  $V$  l'ensemble des positions possibles d'un tel corps solide.

La donnée d'une position de  $S$  revient à se donner la position d'un trièdre orthonormé attaché à  $S$ . Ainsi  $V$  peut être défini comme l'ensemble de tous les trièdres orthonormés de  $\mathbf{R}^3$  ayant une orientation donnée.

Fixons un trièdre  $v_0 \in V$ . Notons par  $O_{v_0}$  l'ensemble des trièdres  $v$  tels que  $Oz_v$  et  $Oz_{v_0}$  soient linéairement indépendants.

Si  $v \in O_{v_0}$  on définit les trois angles d'Euler  $\varphi_{v_0}(v)$ ,  $\theta_{v_0}(v)$ ,  $\psi_{v_0}(v)$  de  $v$  de la manière suivante :

$\theta_{v_0}(v)$  est l'angle orienté  $(Oz_{v_0}, Oz_v)$ , cet angle dépend du choix d'une orientation dans le plan  $Oz_{v_0}z_v$ . Nous choisissons cette orientation de telle sorte que

$$0 < \theta_{v_0}(v) < \pi$$

L'orientation du plan  $Oz_{v_0}z_v$  détermine une orientation de la perpendiculaire à ce plan à savoir de la droite  $\delta$  intersection de  $Ox_{v_0}y_{v_0}$  avec  $Ox_vy_v$ ; nous posons,

$$\varphi_{v_0}(v) = (Ox_{v_0}, \delta)$$

et enfin

$$\psi_{v_0}(v) = (\delta, Ox_v)$$

les orientations étant données respectivement par celle des plans orientés

$$Ox_{v_0}y_{v_0} \quad \text{et} \quad Ox_vy_v.$$

L'application

$$u_{v_0} : v \rightarrow (\varphi_{v_0}(v), \theta_{v_0}(v), \psi_{v_0}(v))$$

envoie

$$O_{v_0} \rightarrow \mathbf{T} \times ]0, \pi[ \times \mathbf{T}$$

où  $\mathbf{T}$  dénote l'ensemble des angles orientés, c'est-à-dire le cercle trigonométrique.

Le complémentaire dans  $\mathbf{T}$  du point d'argument  $\pi$  peut être mis en correspondance bijective avec l'intervalle  $] - \pi, + \pi[$  de  $\mathbf{R}$ . Notons

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \{ \{\pi\} \times ]0, \pi[ \times \mathbf{T} \} \cup \{ \mathbf{T} \times ]0, \pi[ \times \{\pi\} \} \\ \tilde{O}_{v_0} &= u_{v_0}^{-1}(\mathbf{K}^c) \end{aligned}$$

Soit  $\tilde{u}_{v_0}$  la restriction de  $u_{v_0}$  à  $\tilde{O}_{v_0}$ , suivie de l'identification des angles orientés à des nombres réels appartenant à  $] - \pi, + \pi[$

$$\tilde{u}_{v_0} : \tilde{O}_{v_0} \rightarrow ] - \pi, + \pi[ \times ]0, \pi[ \times ] - \pi, + \pi[$$

La collection des  $\tilde{O}_{v_0}, \tilde{u}_{v_0}$ , lorsque  $v_0$  parcourt  $V$  constitue un atlas  $\mathcal{A}$  de  $V$ .

Cet atlas est de classe  $C^0$ . En effet la matrice de passage  $M_{v_0}(v)$  du repère  $v_0$  au repère  $v$  s'exprime à l'aide de fonctions trigonométriques des angles d'Euler; inversement la connaissance de la matrice de passage permet de déterminer le produit scalaire de  $Oz_{v_0}$  et  $Oz_v$ , d'où l'angle  $\theta_{v_0}(v)$  utilisant Arcos, de même pour les deux autres angles d'Euler. Ainsi il existe une bijection continue entre  $\tilde{u}_{v_0}(v)$  et  $M_{v_0}(v)$ . La relation entre les matrices de passage

$$M_{v_0'}(v) = M_{v_0}(v)M_{v_0}^{-1}(v_0')$$

est évidemment continue d'où l'atlas  $\mathcal{A}$  est de classe  $C^0$  ce qui permet de munir l'ensemble  $V$  des positions du corps solide  $S$  d'une topologie.

Même d'un point de vue très concret du mécanicien il ne s'agit pas d'un résultat banal; il est en effet utile de pouvoir définir la notion de mouvement  $S_t$  d'un solide *dépendant continûment* du temps  $t$ . On peut penser à choisir un repère  $v_0$  fixé et à écrire que les trois angles d'Euler  $\varphi_{v_0}, \theta_{v_0}, \psi_{v_0}$  varient continûment avec  $t$ . Or s'il existe  $t_0$  tel que  $\theta_{v_0}(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow t_0$  cette définition est tout à fait insuffisante les angles d'Euler n'étant pas définis relativement à  $v_0$  au temps  $t = t_0$ . Il est alors indispensable de prendre un nouveau repère de référence c'est-à-dire d'utiliser, au moins implicitement, l'atlas  $\mathcal{A}$ .

## 2 Rappels de résultats de calcul différentiel

Nous rappellerons dans ce paragraphe un certain nombre de résultats classiques de Calcul différentiel (\*).

### 2.1 APPLICATION DÉRIVÉE

Dans la suite, on note  $E, F$  deux espaces vectoriels normés sur  $K$  ( $K = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ),  $O$  un ouvert de  $E$ ,  $f$  une application de  $O$  dans  $F$ .

Soit  $a \in O$ , on dira que  $f$  est *différentiable en  $a$* , s'il existe une application linéaire continue  $A$  de  $E$  dans  $F$  ( $A \in \mathcal{L}(E; F)$ ) telle que :

$$f(a + h) - f(a) = A.h + \varepsilon \|h\|$$

où  $\varepsilon \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

On appelle  $A$  l'*application dérivée de  $f$  en  $a$*  et on note  $A = f'(a)$ . Alors :

$$f'(a) \in \mathcal{L}(E; F).$$

2.1.1 *Exemple.* Soit  $B \in \mathcal{L}(E; F)$ ; posons  $f(x) = B(x)$  si  $x \in O$ ; alors  $f$  est différentiable en tout  $x \in O$  et l'on a  $f'(x) = B$ .

2.1.2 THÉORÈME DES FONCTIONS COMPOSÉES. — Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels normés, soient  $O$  un ouvert de  $E$ ,  $U$  un ouvert de  $F$ . Soient  $f : O \rightarrow F$ ,  $g : U \rightarrow G$ . Soit  $a \in O$ , posons  $b = f(a)$ , supposons que  $b \in U$ . Posons  $k = g \circ f$ .

Supposons que  $f'(a)$  et  $g'(b)$  existent. Alors  $k$  est différentiable en  $a$  et l'on a :

$$k'(a) = g'(b) \circ f'(a).$$

(Pour la démonstration, cf. C.D. Théorème 2.2.1.)

### 2.1.3 Dérivée suivant un vecteur

Si  $h \in E$ , on pose :

$$(D_h f)(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (f(a + \varepsilon h) - f(a)), \quad \varepsilon \in K.$$

On appelle  $(D_h f)(a)$  la *dérivée de  $f$  suivant le vecteur  $h$  au point  $a$* . Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors on a :

$$(D_h f)(a) = f'(a).h.$$

### 2.1.4 Cas des espaces de dimension finie

La définition de l'application dérivée reste inchangée si on remplace une norme par une norme équivalente. Comme, d'autre part, toutes les normes sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sont équivalentes, il en résulte que la notion

(\*) Le lecteur pourra se reporter au livre de H. Cartan *Calcul Différentiel* (Paris, Hermann, 1967). On renverra à ce livre par le sigle C.D., suivi d'un numéro de paragraphe.

d'application dérivée est définie sans ambiguïté pour les applications d'un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre espace de dimension finie.

### 2.1.5 Matrice jacobienne

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie,  $n$  et  $p$  respectivement. En faisant choix de bases, on se ramène au cas où  $E = \mathbb{K}^n$ ,  $F = \mathbb{K}^p$ . Alors  $f$  est donnée par un système de  $p$  fonctions  $f_1, \dots, f_p$  de  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ . Notant par  $e_1, \dots, e_n$  la base de  $E$ , on a :

$$2.1.6 \quad f'_k(a) \cdot e_i = (D_{e_i} f_k)(a) = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

On note par  $J_a(f)$  la matrice à  $p$  lignes et  $n$  colonnes constituée par les dérivées partielles des fonctions  $f_1, \dots, f_p$ . On appelle  $J_a(f)$  la *matrice jacobienne de  $f$  en  $a$* . On a, alors :

*Si  $f$  est différentiable en  $a$ , la matrice jacobienne de  $f$  existe et l'on a :*

$$2.1.7 \quad f'(a) = J_a(f).$$

Dans cette dernière égalité, on identifie l'ensemble des matrices à  $p$  lignes et  $n$  colonnes avec  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$ .

Le théorème des fonctions composées 2.1.2 s'écrit dans ce cas :

$$2.1.8 \quad J_a(g \circ f) = J_b(g) \cdot J_a(f)$$

d'où en explicitant le produit des deux matrices du second membre, on obtient les règles de transformation des dérivées partielles par changement de variables. (Cf. C.D. 2.7.)

### 2.1.9 Cas où $E = \mathbb{K}$

On convient de noter par  $1$  l'élément unité de  $\mathbb{K}$ , alors  $1$  est une base canonique pour  $E$ . On a alors, en notant par  $\frac{df}{dt}(a)$  la dérivée de  $f$  au sens élémentaire c'est-à-dire le vecteur vitesse à la trajectoire  $f(t)$  on a :

$$\frac{df}{dt}(a) = (D_1 f)(a) = f'(a) \cdot 1.$$

## 2.2 LES CLASSES $C^k$

2.2.1 DÉFINITION. — Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels normés,  $O$  un ouvert de  $E$ . On notera :

$$C^0(O; F)$$

l'ensemble des applications continues de  $O$  dans  $F$ .

Soit  $f \in C^0(O; F)$  telle que  $f$  soit différentiable en tout point  $x \in O$ . Alors la correspondance :

$$x \rightarrow f'(x)$$

définit une application :

$$O \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$$

que l'on conviendra de noter par  $f'$ .

Soit maintenant  $k$  un entier strictement positif; on posera par définition

$$C^k(O; F) = \{f \mid f' \in C^{k-1}(O; \mathcal{L}(E; F))\}$$

Ceci permet de définir les classes  $C^k$  de proche en proche à partir de la classe  $C^0$ .

Remarquons que pour  $k \geq k'$  on a :  $C^k(O; F) \subset C^{k'}(O; F)$ . On posera :

$$C^\infty(O; F) = \bigcap_k C^k(O; F).$$

La restriction d'une application de classe  $C^k$  à un ouvert est de classe  $C^k$ .

### 2.2.2 Principe de localisation

La propriété pour une application d'être de classe  $C^k$  est une propriété locale. Plus précisément on a l'énoncé évident suivant :

Soit  $f$  une application de l'ouvert  $O$  de  $E$  dans  $F$ . Soit  $\{U_\alpha\}$  un recouvrement ouvert de  $O$ . Notons par  $f_\alpha$  la restriction de  $f$  à  $U_\alpha$ . Alors  $f_\alpha \in C^k(U_\alpha; F)$  entraîne  $f \in C^k(O; F)$ .

### 2.2.3 Composition d'applications de classe $C^k$

THÉORÈME. — Si  $f$  et  $g$  sont deux applications de classes  $C^k$ , alors  $f \circ g$  est de classe  $C^k$ .

(La démonstration, pour  $k = 1$ , est une conséquence immédiate de 2.1.2. Pour  $k > 1$ , cf. C.D. 5.4.2.)

### 2.2.4 Cas des espaces de dimension finie

THÉORÈME. — Supposons que  $E = K^n$ ,  $F = K^p$ ; alors une application  $f = (f_1, \dots, f_p)$  est de classe  $C^k$  si et seulement si les dérivées partielles des  $f_j$  existent jusqu'à l'ordre  $k$  et sont continues.

En particulier,  $f$  est de classe  $C^1$  si et seulement si la matrice jacobienne de  $f$  existe et a tous ses coefficients continus.

(Pour la démonstration, cf. C.D. Théorème 3.7.1.)

## 2.3 DIFFÉOMORPHISMES

2.3.1 DÉFINITION. — Une application  $f \in C^k(O; F)$  ( $k \geq 1$ ) est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $O$  sur  $f(O)$  si :

- i)  $f(O)$  est une partie ouverte de  $F$
- ii)  $f$  est injectif
- iii) l'application réciproque  $f^{-1}$  est de classe  $C^k$ .

Le composé de  $C^k$ -difféomorphismes est un  $C^k$ -difféomorphisme.

La restriction d'un  $C^k$ -difféomorphisme à un ouvert est un  $C^k$ -difféomorphisme.

### 2.3.2 Difféomorphismes locaux

DÉFINITION. — Une application  $f \in C^k(O; F)$  définit un  $C^k$ -difféomorphisme local au voisinage de  $x_0 \in O$ , s'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  tel que la restriction de  $f$  à  $U$  soit un  $C^k$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ .

THÉORÈME D'INVERSION. — Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach; notons par  $O$  un ouvert de  $E$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $f \in C^k(O; F)$  ( $k \geq 1$ ) définisse un  $C^k$ -difféomorphisme local au voisinage de  $x_0 \in O$  est que  $f'(x_0)$  soit un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

(Pour la démonstration, cf. C.D. 4.2.1 et 5.4.4.)

## 3 Variétés différentiables

Nous allons développer la théorie parallèlement à celle développée en 1.5 : les notions  $C^0$  seront remplacées par les notions  $C^k$ .

### 3.1 ATLAS $C^k$ -ÉQUIVALENTS

DÉFINITION. — On dira qu'un atlas  $\alpha$  défini sur un ensemble abstrait  $F$  est de classe  $C^k$  ( $k$  entier  $\geq 0$  ou éventuellement  $k = \infty$ ) si les applications de changement de carte de  $\alpha$  sont des applications de classe  $C^k$ .

Remarque. L'application  $\varphi_{\beta, \alpha}$  de changement de carte étant une application définie sur un ouvert  $O_{\alpha, \beta}$  de l'espace vectoriel  $E_\alpha$  et à valeurs dans l'espace vectoriel  $E_\beta$ , la propriété :

$$\varphi_{\beta, \alpha} \in C^k(O_{\alpha, \beta}; E_\beta)$$

a été définie dans 2.2. D'autre part, comme

$$\varphi_{\beta, \alpha} \circ \varphi_{\alpha, \beta} = \text{identité sur } O_{\beta, \alpha}$$

il en résulte que les  $\varphi_{\alpha, \beta}$  sont des  $C^k$ -difféomorphismes.

DÉFINITION. — Étant donnés deux atlas  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$  de classe  $C^k$  sur l'ensemble abstrait  $F$ , nous dirons que  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$  sont  $C^k$ -équivalents, si  $\alpha \cup \tilde{\alpha}$  est un atlas de classe  $C^k$  de  $F$ .

3.1.1 Remarque. Si  $k \geq k'$  tout atlas de classe  $C^k$  est *a fortiori* de classe  $C^{k'}$ .

En particulier tout atlas de classe  $C^k$  ( $k \geq 0$ ) est *a fortiori* de classe  $C^0$ . Par conséquent deux atlas  $C^k$  équivalents sont *a fortiori*  $C^0$  équivalents.

3.1.2 PROPOSITION. — La relation  $\alpha$  est  $C^k$ -équivalent à  $\hat{\alpha}$  est une relation réflexive symétrique, transitive.

Le seul point qui n'est pas évident est la transitivité supposons  $\alpha$   $C^k$ -équivalent à  $\alpha'$  et  $\alpha'$   $C^k$ -équivalent à  $\alpha''$ . Alors on sait d'après 3.1.1 et 1.3.1 que  $F\alpha = F\alpha' = F\alpha''$ .

Soit  $f_{\alpha_0'', \alpha_0}$  l'application de changement de cartes d'une carte  $\varphi_{\alpha_0''}$  de  $\alpha''$  à une carte  $\varphi_{\alpha_0}$  de  $\alpha$ . Alors  $f_{\alpha_0'', \alpha_0}$  est définie sur  $O_{\alpha_0, \alpha_0''} = \varphi_{\alpha_0}(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_0''})$ .

Posons

$$\Delta_{\alpha'} = \varphi_{\alpha_0}(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_0''} \cap U_{\alpha'}).$$

Comme  $U_{\alpha_0}$ ,  $U_{\alpha_0''}$  et  $U_{\alpha'}$  sont des ouverts de  $F\alpha$  d'après 1.2.2, leur intersection est ouverte et  $\Delta_{\alpha'}$  est un ouvert de  $O_{\alpha_0, \alpha_0''}$ . Ainsi  $\{\Delta_{\alpha'}\}_{\alpha' \in \alpha}$  forment un recouvrement ouvert de  $O_{\alpha_0, \alpha_0''}$ .

D'autre part on a

$$f_{\alpha_0'', \alpha_0}(\xi) = f_{\alpha_0'', \alpha'}(f_{\alpha', \alpha_0}(\xi)) \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \Delta_{\alpha'}$$

Ainsi la restriction de  $f_{\alpha_0'', \alpha_0}$  à  $\Delta_{\alpha'}$  est de classe  $C^k$  comme étant la composition de deux applications de classe  $C^k$ .

Comme les  $\Delta_{\alpha'}$  constituent un recouvrement ouvert du domaine de définition de  $f_{\alpha_0'', \alpha_0}$ , il résulte du principe de localisation de la classe  $C^k$  (cf. 2.2.2) que  $f_{\alpha_0'', \alpha_0}$  est de classe  $C^k$ . Ainsi  $\alpha \cup \alpha''$  est un atlas de classe  $C^k$ . C.Q.F.D.

## 3.2 DÉFINITION D'UNE STRUCTURE DE VARIÉTÉ DE CLASSE $C^k$ . EXEMPLES

On dira qu'un atlas de classe  $C^k$  est *séparé*, si, considéré comme atlas de classe  $C^0$  (cf. 3.1.1), il est séparé (cf. 1.4).

Par analogie avec 1.5.2 nous noterons par  $\mathcal{G}_n^k(F)$  l'ensemble de tous les atlas numériques de dimension  $n$ , de classe  $C^k$ , et séparés, définis sur l'ensemble abstrait  $F$ .

La relation de  $C^k$  équivalence définit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{G}_n^k(F)$  en vertu de 3.1.2.

3.2.1 DÉFINITION. — La donnée d'une structure de variété de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  sur  $F$  sera la donnée d'une classe d'équivalence de  $\mathcal{G}_n^k(F)$ .

D'après 3.1.1 une donnée d'une structure de variété de classe  $C^k$  sur  $F$  définit en particulier sur  $F$  une structure de variété topologique.

3.2.2 Remarque. La donnée de la classe d'équivalence  $\mathfrak{E}$  pourra être faite en choisissant un atlas  $\alpha_0$  de classe  $C^k$  et en définissant  $\mathfrak{E}$  comme l'ensemble de tous les atlas équivalents à  $\alpha_0$ . Toutefois il ne faudrait pas dire que la donnée d'une structure de variété différentiable sur  $F$  est constituée par le choix d'un atlas de

classe  $C^k$  : un tel choix n'a rien de *canonique*, et la structure de variété différentiable sur  $F$  est constituée par l'ensemble des propriétés sur  $F$  qui ne dépendent que de la classe d'équivalence  $\mathcal{E}$  et non du choix d'un représentant dans cette classe. Par suite pour toute définition qui sera formulée ultérieurement en utilisant le *choix* d'un atlas  $\alpha_0$  de  $F$ , il nous faudra montrer qu'une telle définition est *intrinsèque* c'est-à-dire ne dépend que de la *classe d'équivalence* de  $\alpha_0$  et non de  $\alpha_0$ .

3.2.3 *Remarque.* Une définition équivalente d'une structure de variété de classe  $C^k$  est la donnée d'une variété topologique  $V$ , et d'un atlas  $\alpha_0$  de  $V$  qui soit de plus un atlas de classe  $C^k$ . En effet la topologie définie par  $\alpha_0$  sur l'ensemble abstrait  $V$  coïncide avec la topologie sur  $V$ , par suite  $V\alpha_0$  est *séparé*. De plus  $\alpha_0$  d'après 3.1.2 définit une classe d'équivalence d'atlas de classe  $C^k$  sur  $V$ .

### Exemples de variétés

3.2.4 Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ ,  $H$  une partie ouverte de  $V$ , alors  $V$  induit une structure de variété de classe  $C^k$  sur  $H$ .

PREUVE. — Soit  $\alpha$  un atlas définissant sur  $V$  la structure de classe  $C^k$ . Notons par  $\hat{\alpha}$  l'atlas de  $H$  obtenu en restreignant à  $H$  toutes les cartes de  $V$ . Alors  $\hat{\alpha}$  est un atlas de classe  $C^k$  : en effet les cartes  $\hat{\Phi}_\alpha$  ont pour domaine de définition un ouvert de  $H$ , à savoir  $\hat{U}_\alpha = U_\alpha \cap H$  et pour domaine de valeurs un ouvert de  $E_\alpha$ , à savoir  $\varphi_\alpha(\hat{U}_\alpha)$ . De même, l'application de changement de cartes  $\hat{f}_{\alpha, \beta}$  est définie sur l'ouvert  $\hat{\Phi}_\beta(\hat{U}_\alpha \cap \hat{U}_\beta)$ .

D'autre part  $\hat{f}_{\alpha, \beta}$  est la *restriction* à cet ouvert de  $f_{\alpha, \beta}$ ; comme  $f_{\alpha, \beta}$  est de classe  $C^k$ , il en résulte que  $\hat{f}_{\alpha, \beta}$  est de classe  $C^k$ .

Soit maintenant  $\alpha'$  un atlas équivalent à  $\alpha$ , alors  $\alpha \cup \alpha'$  est un atlas de classe  $C^k$  sur  $V$ . D'après la première partie de la démonstration  $\widehat{\alpha \cup \alpha'}$  est un atlas de classe  $C^k$  sur  $H$ . Comme on a

$$\widehat{\alpha \cup \alpha'} = \hat{\alpha} \cup \hat{\alpha}'$$

on en déduit que  $\hat{\alpha} \cup \hat{\alpha}'$  est un atlas de classe  $C^k$  sur  $H$  c'est-à-dire que  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont équivalentes.

3.2.5 Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbf{R}$  alors  $E$  est muni d'une structure canonique de variété de classe  $C^\infty$ .

PREUVE. — Considérons l'application identique qui envoie  $E$  dans  $E$ . Nous appellerons cette application la *carte triviale* de  $E$ . La carte triviale constitue un atlas  $\alpha_0$  composé d'une seule carte.  $\alpha_0$  est un atlas de classe  $C^\infty$ . (En effet comme  $\alpha_0$  ne possède pas d'application de changement de cartes, les applications de changement de cartes de  $\alpha_0$ , satisfont ainsi toutes les propriétés que l'on peut souhaiter.)

$\alpha_0$  définit ainsi sur  $E$  une structure de variété de classe  $C^\infty$ .

Un examen superficiel pourrait laisser penser que cette structure de variété est complètement triviale et n'apporte aucun concept nouveau. Ceci n'est pas le cas, en effet la structure de variété sur  $E$  n'est pas attachée à l'atlas trivial  $\alpha_0$ , un atlas  $\alpha$  équivalent sera la donnée d'un *système de coordonnées curvilignes* défini sur  $E$ . L'étude de  $E$  en tant que variété signifie que nous ne nous intéressons qu'aux propriétés de  $E$  qui sont *invariantes* par un changement de système de coordonnées curvilignes, exactement comme la géométrie élémentaire est l'étude des propriétés invariantes par changement de base orthonormée.

### 3.2.6 Un ouvert d'un espace vectoriel

Un ouvert  $O$  d'un espace vectoriel est muni d'une structure de variété de classe  $C^\infty$  obtenue en combinant 3.2.5 avec 3.2.4.

### 3.2.7 Variété produit

Soit  $V_1, V_2$  deux variétés,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux atlas sur  $V_1$  et  $V_2$ ,  $V_3$  le produit cartésien  $V_1 \times V_2$ . En prenant pour atlas  $\alpha_3$  sur  $V_3$  l'atlas obtenu en faisant le produit d'une carte de  $\alpha_1$  et d'une carte de  $\alpha_2$ , on munit  $V_3$  d'une structure de variété différentiable.

## 3.3 APPLICATIONS DE CLASSE $C^k$ . EXEMPLES

Nous allons suivre l'analogie de la méthode utilisée en 1.5.3 pour définir les applications continues. Soient  $V$  et  $\tilde{V}$  deux variétés de classe  $C^k$ , soit  $h$  une application continue de  $V$  dans  $\tilde{V}$ . Choisissons un atlas  $\alpha$  définissant la structure de variété de classe  $C^k$  sur  $V$  et choisissons  $\tilde{\alpha}$  définissant celle de  $\tilde{V}$ ; soient deux cartes  $\varphi_\alpha \in \alpha, \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} \in \tilde{\alpha}$ ; considérons l'application lue

$$h_{\tilde{\alpha}, \alpha} = \tilde{\varphi} \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

Alors  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  est défini sur

$$G_{\alpha, \tilde{\alpha}} = \varphi_\alpha(h^{-1}(\tilde{U}_{\tilde{\alpha}}) \cap U_\alpha)$$

$G_{\alpha, \tilde{\alpha}}$  est un ouvert de  $E_\alpha$ . Nous dirons que  $h$  est de classe  $C^k$  si quels que soient  $\alpha, \tilde{\alpha}$  alors l'application lue  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  est une application de classe  $C^k$  de l'ouvert  $G_{\alpha, \tilde{\alpha}}$  de  $E_\alpha$  dans  $\tilde{E}_{\tilde{\alpha}}$ .

Remarquons que cette définition ne constitue pas un cercle vicieux : la notion d'application de classe  $C^k$  d'un ouvert d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel a été définie dans 2.2.

Pour montrer que cette définition est satisfaisante il faut encore montrer qu'elle ne dépend pas des choix de  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}$ . Soit  $\alpha'$  un atlas équivalent à  $\alpha$ ,  $\tilde{\alpha}'$  un atlas équivalent à  $\tilde{\alpha}$ . On a formellement

$$h_{\tilde{\alpha}', \alpha'} = \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}'} \circ h \circ \varphi_{\alpha'}^{-1} = \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}'} \circ \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}}^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} \circ h \circ \varphi_{\alpha'}^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

ou, en introduisant les applications de changement de cartes  $f_{\alpha, \alpha'} = \varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\alpha'}^{-1}$  et  $\tilde{f}_{\alpha', \tilde{\alpha}} = \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}'} \circ \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}}^{-1}$  ceci s'écrit formellement

$$3.3.1 \quad h_{\tilde{\alpha}', \alpha'} = \tilde{f}_{\tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}} \circ h_{\tilde{\alpha}, \alpha} \circ f_{\alpha, \alpha'}.$$

Cette identité formelle est une identité sur  $K_{\alpha', \alpha, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'}$  où toutes compositions d'applications sont définies. On a :

$$K_{\alpha', \alpha, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'} = \varphi_{\alpha'}(U_{\alpha} \cap U_{\alpha'} \cap h^{-1}(\tilde{U}_{\tilde{\alpha}} \cap \tilde{U}_{\tilde{\alpha}'}))$$

Il en résulte que les  $K_{\alpha', \alpha, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'}$  sont des *parties ouvertes* de  $E_{\alpha'}$ . Il résulte de 3.3.1, que la *restriction* de  $h_{\tilde{\alpha}', \alpha'}$  à chaque  $K_{\alpha', \alpha, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'}$  est une application de classe  $C^k$ . On conclut comme dans 3.1.2 en remarquant que si l'on fixe  $\alpha', \tilde{\alpha}'$  et si l'on fait varier  $\alpha, \tilde{\alpha}$ , alors les  $K_{\alpha', \alpha, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'}$  constituent un *recouvrement ouvert* de  $G_{\alpha', \tilde{\alpha}'}$  et en appliquant le principe de localisation, on obtient alors que  $h_{\tilde{\alpha}', \alpha'}$  est une application de classe  $C^k$  de  $G_{\alpha', \tilde{\alpha}'}$  dans  $\tilde{E}_{\tilde{\alpha}'}$ . C.Q.F.D.

*Notations.* Étant donné  $V$  et  $\tilde{V}$  deux variétés de classe  $C^k$  on convient de noter par  $C^k(V; \tilde{V})$  l'ensemble des applications de classe  $C^k$  de  $V$  dans  $\tilde{V}$ .

### Exemples

3.3.2 Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ ,  $H$  une partie ouverte de  $V$ , alors la structure de variété de  $V$  induit sur  $H$  une structure de variété de classe  $C^k$  (cf. 3.2.4). Soit  $i$  l'*injection canonique* de  $H$  dans  $V$ , alors  $i$  est une application de classe  $C^k$ .

En effet les applications lues dans le couple d'atlas  $\mathcal{A}$  et  $\hat{\mathcal{A}}$  sont des injections canoniques d'ouvert d'un espace vectoriel dans un autre ouvert le contenant composées avec des applications de changement de carte de l'atlas  $\mathcal{A}$ , donc des applications de classe  $C^k$ .

3.3.3 Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ ,  $\mathcal{A}$  un atlas de  $V$ ,  $\varphi_{\alpha}$  une carte de  $\mathcal{A}$  définie sur l'ouvert  $U_{\alpha}$  de  $V$ , alors

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha} &\in C^k(U_{\alpha}; E_{\alpha}) \\ \varphi_{\alpha}^{-1} &\in C^k(O_{\alpha}; V). \end{aligned}$$

PREUVE. — Munissons  $O_{\alpha}$  de l'atlas trivial. Si nous lisons  $\varphi_{\alpha}$  dans le couple de cartes constitué par une carte  $\varphi_{\beta}$  de  $\mathcal{A}$  et la carte triviale de  $O_{\alpha}$ , nous obtenons l'application de changement de carte  $f_{\alpha, \beta}$  qui est de classe  $C^k$ . Même raisonnement pour  $\varphi_{\alpha}^{-1}$ .

### 3.3.4 Fonctions et chemins

Étant donné une variété  $V$  de classe  $C^k$ , nous considérerons  $C^k(V; \mathbf{R})$ ; nous appellerons cet ensemble l'ensemble des *fonctions de classe  $C^k$  sur  $V$* , et nous le noterons par  $\mathfrak{A}_k(V)$ . Nous appellerons *chemin* de classe  $C^k$  tracé sur  $V$  un élément de  $C^k(I; V)$  où  $I$  note un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ .

### Propriétés des classes $C^k$

3.3.5 *Stabilité par composition.* La composition de deux applications chacune de classe  $C^k$  est une application de classe  $C^k$ .

3.3.6 *Principe de localisation.* Soient  $V$  et  $W$  deux variétés de classe  $C^k$ , soit  $f$  une application de  $V$  dans  $W$ . Supposons qu'il existe un recouvrement ouvert  $\Omega_\alpha$  de  $V$  tel que, notant par  $f_\alpha$  la restriction de  $f$  à  $\Omega_\alpha$ , on ait  $f_\alpha \in C^k(\Omega_\alpha; W)$ . Alors  $f \in C^k(V; W)$ .

Les deux propriétés 3.3.5 et 3.3.6 se déduisent immédiatement de 2.2.2 et 2.2.3 en passant aux applications lues dans des atlas.

### 3.3.7 Difféomorphisme

DÉFINITION. — Soient  $V$  et  $W$  deux variétés de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Nous appellerons *difféomorphisme de classe  $C^k$*  une application  $f \in C^k(V; W)$  telle que  $f$  soit *bijective* et que la *bijection réciproque*  $f^{-1} \in C^k(W; V)$ .

Nous appellerons simplement *difféomorphisme* un difféomorphisme de classe  $C^1$ .

3.3.8 *Exemple.* Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ ,  $\varphi_\alpha$  une carte de  $V$  définie sur un ouvert  $U_\alpha$  de  $V$ , soit  $O_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$  notons par  $\tilde{\varphi}_\alpha$  l'application  $\varphi_\alpha$  considérée comme définie sur  $U_\alpha$  et prenant ses valeurs dans  $O_\alpha$ , alors en vertu de 3.3.3,  $\tilde{\varphi}_\alpha$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$ .

### 3.3.9 Cartes d'une variété de classe $C^k$

DÉFINITION. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ , on appellera *carte de  $V$*  un difféomorphisme de classe  $C^k$  d'un ouvert de  $V$  sur un ouvert d'un espace vectoriel.

Par exemple si  $\mathcal{A}$  est un atlas définissant la structure de variété de  $V$ , alors toutes les cartes de  $\mathcal{A}$  sont des cartes de  $V$ .

### 3.3.10 Un critère d'appartenance d'une application à la classe $C^k$

Soient  $V$  et  $W$  deux variétés de classe  $C^k$ ,  $f$  une application de  $V$  dans  $W$ . Supposons que pour tout  $x_0 \in V$  il existe une carte  $\varphi$  de  $V$  définie sur un voisinage de  $x_0$  et une carte  $\psi$  de  $W$  définie sur un voisinage de  $f(x_0)$  telles que l'application  $f$  lue dans le couple de cartes  $\varphi, \psi$  soit de classe  $C^k$ , alors  $f$  est de classe  $C^k$ .

Cet énoncé est une conséquence immédiate du principe de localisation 3.3.6 combiné avec 3.3.8 et 3.3.5.

## 3.4 L'ANNEAU DES FONCTIONS DE CLASSE $C^k$

Les applications de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  définies par la somme et le produit sont évidemment de classe  $C^\infty$ . Par suite, en utilisant 3.3.5 on voit que la somme et le produit de deux fonctions de classe  $C^k$  est encore une fonction de classe  $C^k$ . Ainsi

$\mathcal{A}_k(\mathbf{V})$  (cf. 3.3.4) est un anneau; il contient le corps de base  $\mathbf{R}$  de façon naturelle : à tout élément  $\alpha \in \mathbf{R}$ , on peut associer la fonction constante égale à  $\alpha$ . Pour certains problèmes,  $\mathcal{A}_k(\mathbf{V})$  jouera le rôle d'une extension naturelle du corps de base.

Rappelons que l'on appelle *support* d'une fonction  $f$  l'adhérence de l'ensemble où cette fonction est différente de zéro.

Le résultat suivant montre qu'il existe des fonctions non nulles de support arbitrairement petit.

3.4.1 LEMME. — Soit  $\mathbf{V}$  une variété de classe  $C^k$ ,  $k \leq \infty$ ,  $x_0$  un point de  $\mathbf{V}$ ,  $U$  un voisinage de  $x_0$ , alors on peut trouver une fonction positive  $l \in C^k(\mathbf{V}; \mathbf{R})$  telle que notant par  $\sigma(l)$  le support de  $l$  on ait  $\sigma(l) \subset U$

$$l(x) = 1 \quad \text{sur un voisinage de } x_0.$$

PREUVE. — Considérons la fonction d'une variable numérique

$$\chi(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

posons

$$\theta(t) = \alpha \int_t^{+\infty} \chi(u) du$$

où  $\alpha$  est une constante choisie pour que  $\theta(0) = 1$ . Alors  $\theta$  est une fonction indéfiniment dérivable de  $t$ . En effet les seuls points où il convient de le vérifier sont les

points  $\frac{1}{2}$  et 1. Par exemple au point 1, on a, quel que soit l'entier  $N > 0$ ,

$$(t-1)^{-N} \chi(t) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \rightarrow 1.$$

Ceci entraîne

$$\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} \theta^{(N)}(t) = 0 \quad \text{lorsque } t \rightarrow 1, t < 1.$$

Comme  $\theta^{(N)}(t) = 0$  si  $t > 1$ , on obtient la dérivabilité d'ordre  $N$  de  $\theta$  au point 1.

Démontrons maintenant 3.4.1 choisissons une carte  $\psi_\alpha$  de  $\mathbf{V}$  dont le domaine  $U_\alpha$  contient  $x_0$ , telle que  $\psi_\alpha(x_0) = 0$ . Choisissons dans l'espace vectoriel d'arrivée

$E_\alpha$  de  $\psi_\alpha$  une base; introduisons alors sur  $E_\alpha$  la norme euclidienne  $\|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ .

Soit  $\varepsilon$  assez petit de telle sorte que la boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $\varepsilon$  soit contenue dans l'intérieur de  $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ . Posons

$$r(x) = \varepsilon^{-2} \|\varphi_\alpha(x)\|^2$$

et définissons  $l$  par

$$l(x) = \begin{cases} \theta(r(x)) & \text{si } x \in U_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le seul point qui reste à vérifier est que  $l \in C^k(V; \mathbf{R})$ . Utilisant 3.3.6, il suffit de montrer que  $l$  est de classe  $C^k$  au voisinage de tout point  $x_1$  de  $V$ . Si  $x_1 \in U$ , on a sur un voisinage de  $x_1$ ,  $l(x) = \theta(r(x))$ . Si  $x_1 \notin U$ , alors  $x_1 \notin \sigma(l)$ . Comme  $\sigma(l)$  est fermé on peut trouver un voisinage de  $x_1$  ne rencontrant pas  $\sigma(l)$ , dans ce voisinage  $l$  sera identiquement nulle et donc de classe  $C^k$ , ce qui démontre le lemme.

### 3.4.2 Un résultat d'extension

PROPOSITION. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $V$ ,  $x_0$  un point de  $\Omega$ , soit  $f \in \mathcal{A}_1(\Omega)$  on peut alors trouver une fonction  $\hat{f} \in \mathcal{A}_1(V)$  telle que

$$f(x) = \hat{f}(x) \quad \text{sur un voisinage de } x_0.$$

PREUVE. — Soit  $l$  la fonction déterminée par 3.4.1 telle que  $\sigma(l) \subset \Omega$ . Définissons  $\hat{f}$  en posant

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= l(x)f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \hat{f}(x) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Appliquant comme dans le lemme précédent 3.3.6, on obtient que  $\hat{f}$  est de classe  $C^1$ . C.Q.F.D.

### 3.5 IMAGE DIRECTE. IMAGE RÉCIPROQUE

DÉFINITION. — Soient  $V, W$  deux variétés de classe  $C^k$ ,  $h \in C^k(V; W)$ . Alors,  $h$  induit une application, notée  $h_*$  et appelée *image directe*, qui envoie un chemin  $\psi$  sur  $V$ , en le chemin  $\tilde{\psi}$  sur  $W$  défini par :

$$3.5.1 \quad \tilde{\psi} = h \circ \psi$$

D'autre part,  $h$  induit aussi un *homomorphisme d'anneaux* naturel, de  $\mathcal{A}_k(W)$  dans  $\mathcal{A}_k(V)$ , notée  $h^*$  et appelée *image réciproque*, définie par la relation :

$$3.5.2 \quad h^*f = f \circ h \quad \text{où } f \in \mathcal{A}_k(W)$$

3.5.3 PROPOSITION. — Soient  $V, W, S$  trois variétés de classe  $C^k$ ,  $h \in C^k(V; W)$ ,  $p \in C^k(W; S)$  et  $q = p \circ h$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} q_* &= p_* \circ h_* \\ q^* &= h^* \circ p^* \end{aligned}$$

PREUVE. — Ceci résulte des égalités :

$$q_*\psi = (p \circ h) \circ \psi = p \circ (h \circ \psi) = p \circ (h_*\psi) = p_*(h_*\psi)$$

et

$$q^*f = f \circ q = f \circ (p \circ h) = (f \circ p) \circ h = h^*(f \circ p) = h^*(p^*f)$$

valables, respectivement, pour tout chemin  $\psi$  sur  $V$  et tout  $f \in \mathcal{A}_k(S)$ .

C.Q.F.D.

Nous retrouverons souvent, dans la suite, les notions d'image directe et d'image réciproque, étendues à d'autres êtres mathématiques. Dans tous les cas les images directes se composent dans l'ordre de composition des applications tandis que les images réciproques se composent en renversant l'ordre de composition des applications :

$$\begin{aligned}(p \circ h)_* &= p_* \circ h_* \\ (p \circ h)^* &= h^* \circ p^*\end{aligned}$$

#### 4 Espace tangent

Une variété de classe  $C^k$  ( $k > 0$ ) nous est apparue jusqu'à présent être presque aussi abstrait qu'un espace topologique général. Il n'en est que plus remarquable qu'il soit possible d'associer à cette structure abstraite des espaces vectoriels « tangents » généralisant, dans un ordre abstrait, la notion élémentaire de plan tangent à une surface de  $\mathbf{R}^3$ .

Étant donné un espace vectoriel  $E$ ,  $x_0 \in E$ ,  $a$  un vecteur de  $E$ , nous avons défini en 2.1.3, la notion de dérivée d'une fonction  $f$  suivant le vecteur  $a$  au point  $x_0$

$$(D_a f)(x_0)$$

Ainsi à tout vecteur et à tout point  $x_0 \in E$  on peut associer un *opérateur de dérivation* sur les fonctions de classe  $C^1$ .

Pour construire la notion de « vecteur tangent » à une variété abstraite nous renverserons cette démarche : ce qui sera défini ce sera l'opérateur de dérivation, et c'est la donnée même de l'opérateur de dérivation qui constituera le vecteur tangent.

Tout ce paragraphe s'applique aux variétés de classe  $C^k$ , avec  $k \geq 1$ . Comme à une structure de variété de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) est associée une structure naturelle de variété de classe  $C^1$  (cf. 3.1.1), nous rédigerons ce paragraphe dans le cadre des variétés de classe  $C^1$ .

##### 4.1 CONSTRUCTION DE L'ESPACE TANGENT. CONSÉQUENCES

Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ; si  $x_0$  est un point de  $V$ , nous noterons par  $\mathcal{C}_{x_0}^1(V)$  l'ensemble des chemins de classe  $C^1$  tracés sur  $V$  et passant par  $x_0$  au temps zéro, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}_{x_0}^1(V) = \bigcup_I \{ \psi \in C^1(I; V) \mid \psi(0) = x_0 \}$$

où  $I$  parcourt tous les intervalles ouverts de  $\mathbf{R}$  contenant zéro.

L'accouplement canonique de  $\mathcal{C}_{x_0}^1(V)$  avec  $\mathcal{A}_1(V)$

Donnons nous  $\psi \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V)$ ,  $f \in \mathcal{A}_1(V)$ , posons

$$k = f \circ \psi$$

alors  $g \in C^1(I; \mathbf{R})$ ; ainsi  $g$  est une fonction numérique, d'une variable numérique, dérivable, par suite nous pouvons calculer  $\frac{dg}{dt}(0)$ . On pose *par définition*

$$4.1.1 \quad A_{x_0}(\psi, f) = \frac{dg}{dt}(0)$$

L'application  $A_{x_0} : \mathcal{C}_{x_0}^1(V) \times \mathcal{A}_1(V) \rightarrow \mathbf{R}$  ainsi définie sera appelée *l'accouplement canonique* de  $\mathcal{C}_{x_0}^1(V)$  avec  $\mathcal{A}_1(V)$ . Remarquons

$$4.1.2 \quad A_{x_0}(\psi, f_1 + f_2) = A_{x_0}(\psi, f_1) + A_{x_0}(\psi, f_2)$$

Ainsi  $A_{x_0}$  est *linéaire* par rapport à  $f$ .

*L'application*  $\tau_{x_0}$

Nous noterons par  $(\mathcal{A}_1(V))^*$  l'ensemble de toutes les formes linéaires sur  $\mathcal{A}_1(V)$ . Comme  $\mathcal{A}_1(V)$  n'a pas été muni jusqu'à présent d'une topologie  $(\mathcal{A}_1(V))^*$  est l'espace vectoriel dual au sens algébrique de  $\mathcal{A}_1(V)$ .

Nous définissons une application

$$\tau_{x_0} : \mathcal{C}_{x_0}^1(V) \rightarrow (\mathcal{A}_1(V))^*$$

en posant

$$4.1.3 \quad \langle f, \tau_{x_0}(\psi) \rangle = A_{x_0}(\psi, f)$$

Cette formule définit bien  $\tau_{x_0}(\psi)$ , en effet pour  $\psi$  fixé le second membre de 4.1.3 est d'après 4.1.2 une *forme linéaire* sur  $\mathcal{A}_1(V)$  par suite définit un élément de  $(\mathcal{A}_1(V))^*$  que nous notons  $\tau_{x_0}(\psi)$ .

4.1.4 *Définition de l'espace tangent*

Soient  $V$  une variété de classe  $C^1$  et  $x_0$  un point de  $V$ ; nous appellerons *espace tangent* à  $V$  en  $x_0$ , et nous noterons  $T_{x_0}(V)$ , l'image de l'application  $\tau_{x_0}$  définie en 4.1.3.

Il résulte de cette définition, que  $T_{x_0}(V)$  est une partie de  $(\mathcal{A}_1(V))^*$ . (Nous démontrerons en 4.3.4, que  $T_{x_0}(V)$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{A}_1(V))^*$ .)

On appellera *vecteur tangent* à  $V$  en  $x_0$  un élément de  $T_{x_0}(V)$ .

4.1.5 *Exemple.* Soit  $\Omega$  un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Alors, quel que soit  $x_0 \in \Omega$ ,  $T_{x_0}(\Omega)$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{A}_1(\Omega))^*$ , canoniquement isomorphe à  $E$ .

**PREUVE.** — A tout chemin  $\psi \in \mathcal{C}_{x_0}^1(\Omega)$  nous associons son vecteur vitesse (cf. 2.1.9) que nous notons  $\lambda(\psi)$  soit

$$\psi'(0) \cdot 1 = \lambda(\psi)$$

Nous nous proposons de montrer que  $\lambda(\psi)$  détermine  $\tau_{x_0}(\psi)$  et réciproquement

Alors si  $f \in \mathcal{A}_1(V)$  on a (cf. 2.1.2)

$$4.1.6 \quad \langle \tau_{x_0}(\psi), f \rangle = f'(x_0) \left( \frac{d\psi}{dt}(0) \right) = f'(x_0)(\lambda(\psi))$$

A tout  $z \in E^*$ , dual de  $E$ , on peut associer  $f(x) = \langle x, z \rangle$  et l'on aura  $f'(x_0) = z$ .  
Par suite

$$f'(x_0)(\lambda(\psi)) = f'(x_0)(\lambda(\tilde{\psi})) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}_1(\Omega),$$

implique que  $\lambda(\psi) = \lambda(\tilde{\psi})$ . En se reportant à 4.1.6 on a

$$\tau_{x_0}(\psi) = \tau_{x_0}(\tilde{\psi}) \quad \text{si et seulement si} \quad \lambda(\psi) = \lambda(\tilde{\psi})$$

par suite la correspondance  $\tau_{x_0}(\psi) \rightarrow \lambda(\psi)$  est bijective et permet d'identifier  $T_{x_0}(\Omega)$  avec  $E$ . On vérifie que la structure vectorielle induite sur  $T_{x_0}(\Omega)$  se transporte sur  $E$ ; par exemple, soient  $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathcal{C}_{x_0}^1(\Omega)$  tels que :

$$\lambda(\psi_3) = \lambda(\psi_1) + \lambda(\psi_2),$$

alors, d'après 4.1.6,

$$\langle f, \tau_{x_0}(\psi_3) \rangle = f'(x_0)(\lambda(\psi_1) + \lambda(\psi_2)) = \langle f, \tau_{x_0}(\psi_1) \rangle + \langle f, \tau_{x_0}(\psi_2) \rangle$$

C.Q.F.D.

## 4.2 APPLICATION DÉRIVÉE

Soient  $V$  et  $\hat{V}$  deux variétés de classe  $C^1$  et soit  $h \in C^1(V; \hat{V})$ . Nous avons associé à  $h$  en 3.5.2, l'image réciproque  $h^*$

$$h^* : \mathcal{A}_1(\hat{V}) \rightarrow \mathcal{A}_1(V)$$

D'autre part, remarquons que l'image directe  $h_*$ , définie en 3.5.1, envoie  $\mathcal{C}_{x_0}^1(V)$  dans  $\mathcal{C}_{y_0}^1(\hat{V})$  où  $y_0 = h(x_0)$ .

Ceci étant, on a la relation suivante entre image directe et image réciproque.

4.2.1 LEMME. — En conservant les notations de ci-dessus, on a :  ${}^t h^* \circ \tau_{x_0} = \tau_{y_0} \circ h_*$  avec  $y_0 = h(x_0)$ .

PREUVE. — Soient  $\psi \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V)$ ,  $\hat{f} \in \mathcal{A}_1(\hat{V})$ . Alors

$$\langle \hat{f}, {}^t h^*(\tau_{x_0}\psi) \rangle = \langle h^*\hat{f}, \tau_{x_0}\psi \rangle = \langle \hat{f} \circ h, \tau_{x_0}\psi \rangle$$

$$\text{et d'après 4.1.1} \quad = \frac{d}{dt} [(\hat{f} \circ h) \circ \psi] \quad \text{pris en } t = 0.$$

De même :

$$\langle \hat{f}, \tau_{y_0}(h_*\psi) \rangle = \frac{d}{dt} (\hat{f}(h_*\psi)) = \frac{d}{dt} [\hat{f} \circ (h \circ \psi)]$$

Comme  $\hat{f} \circ (h \circ \psi) = (\hat{f} \circ h) \circ \psi$ , le lemme est établi.

4.2.2 COROLLAIRE. — L'image par  ${}^t h^*$  de  $T_{x_0}(V)$  est contenue dans  $T_{y_0}(\hat{V})$ .

PREUVE. — En effet  ${}^t h^*$  (Image  $\tau_{x_0}$ )  $\subset \tau_{x_0}(\mathcal{C}_{y_0}^1(\hat{V})) = \text{image } \tau_{y_0}$ .

*Définition de l'application dérivée*

Soient  $V, \hat{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $h \in C^1(V, \hat{V})$  soit  $x_0 \in V, y_0 = h(x_0)$ . Nous appellerons *application dérivée de  $h$  en  $x_0$*  et nous noterons  $h'(x_0)$  la restriction à  $T_{x_0}(V)$  de  ${}^t h^*$ . On a :

4.2.3  $h'(x_0)$  est une application de  $T_{x_0}(V)$  dans  $T_{y_0}(\hat{V})$ .

PREUVE. — 4.2.2.

4.2.4 *Quasi-linéarité*

DÉFINITION. — Soient  $F, G$  deux espaces vectoriels; une application  $u$ , définie sur une partie  $S$  de  $F$ , à valeurs dans  $G$ , sera dite *quasi-linéaire* si :

$$z_1, z_2 \in S, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \quad \text{vérifiant} \quad \lambda z_1 + \mu z_2 \in S,$$

alors on a :

$$u(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda u(z_1) + \mu u(z_2).$$

La restriction d'une application linéaire de  $F$  dans  $G$  à une partie  $S$  de  $F$  est évidemment quasi-linéaire. D'autre part, si  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , la notion d'application quasi-linéaire coïncide avec celle d'application linéaire.

*L'application dérivée est quasi-linéaire*

En effet,  $h'(x_0)$  est la restriction à  $T_{x_0}(V) \subset (\mathcal{A}_1(V))^*$  de l'application linéaire  ${}^t h^*$ .

*Remarque.* La quasi-linéarité de  $h'(x_0)$  est un résultat provisoire nous permettant de poursuivre nos démonstrations; le résultat définitif sera obtenu en 4.3.5.

4.2.5 THÉORÈME DES FONCTIONS COMPOSÉES. — Soient  $V, \hat{V}, \tilde{V}$  trois variétés de classe  $C^1$ ,  $h \in C^1(V, \hat{V}), k \in C^1(\hat{V}, \tilde{V}), l = k \circ h$ , soit  $x_0 \in V, y_0 = h(x_0)$ , alors on a

$$l'(x_0) = k'(y_0) \circ h'(x_0)$$

PREUVE. — Elle s'exprime très facilement dans ce cadre. En effet, le théorème sera une conséquence de la relation

$${}^t l^* = {}^t k^* \circ {}^t h^*$$

ou en transposant

$$l^* = h^* \circ k^*$$

On reconnaît alors la relation 3.5.3.

4.2.6 COROLLAIRE. — Soient  $V$  et  $\hat{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $f$  un difféomorphisme de  $V$  sur  $\hat{V}$  alors pour tout  $x_0 \in V$ ,  $f'(x_0)$  est une application bijective.

PREUVE. — Notons par  $g$  la bijection réciproque de  $f$ , alors  $g \in C_1(\hat{V}; V)$  et on a sur  $V$ ,  $g \circ f =$  identité sur  $V$  d'où en dérivant

$$g'(y_0) \circ f'(x_0) = \text{identité sur } T_{x_0}(V).$$

### 4.3 PRINCIPE DE LOCALISATION

Les propriétés de  $T_{x_0}(V)$  et celles de l'application dérivée  $h'(x_0)$  ne dépendent que de celles de  $V$  et de l'application  $h$  au voisinage de  $x_0$ . Ceci sera une conséquence du

4.3.1 THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $\Omega$  une partie ouverte de  $V$ ,  $i$  l'application canonique de  $\Omega$  dans  $V$ , alors pour tout  $x_0 \in \Omega$ ,  $i'(x_0)$  est une bijection identifiant  $T_{x_0}(\Omega)$  avec  $T_{x_0}(V)$ .

La preuve du théorème dépendra du lemme de localisation suivant :

4.3.2 LEMME. — Soient  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V)$ . Supposons que :

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) \quad \text{sur un voisinage de zéro.}$$

Soient  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_1(V)$  tels que :

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{sur un voisinage de } x_0.$$

Alors on a :

$$\langle f_1, \tau_{x_0}(\psi_1) \rangle = \langle f_2, \tau_{x_0}(\psi_2) \rangle$$

PREUVE. — On a, d'après 4.1.3 et 4.1.1;

$$\langle f_i, \tau_{x_0}(\psi_i) \rangle = \left[ \frac{d}{dt} g_i(t) \right]_{t=0}, \quad \text{où} \quad g_i(t) = f_i(\psi_i(t))$$

Les hypothèses faites impliquant que  $g_1(t) = g_2(t)$  sur un voisinage de zéro; par suite,  $g_1$  et  $g_2$  ont même dérivée à l'origine, ce qui démontre le lemme.

PREUVE DU THÉORÈME 4.3.1. —  $i'(x_0)$  est injectif : soient  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_{x_0}^1(\Omega)$  tels que  $\tau_{x_0}(\psi_1) \neq \tau_{x_0}(\psi_2)$ . Alors il existe  $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$  tel que  $\langle f, \tau_{x_0}(\psi_1) \rangle \neq \langle f, \tau_{x_0}(\psi_2) \rangle$ . Appliquons 3.4.2; il existe  $\hat{f} \in \mathcal{L}_1(V)$  tel que  $f(x) = \hat{f}(x)$  sur un voisinage de  $x_0$ . Posons  $f_1 = i^* \hat{f}$ . Alors on a  $f(x) = f_1(x)$  sur un voisinage de  $x_0$ ; d'où, d'après 4.3.2 :

$$\begin{aligned} \langle f, \tau_{x_0}(\psi_i) \rangle &= \langle f_1, \tau_{x_0}(\psi_i) \rangle \\ &= \langle i^* \hat{f}, \tau_{x_0}(\psi_i) \rangle = \langle \hat{f}, {}_{t_i} \tau_{x_0}(\psi_i) \rangle \end{aligned}$$

D'où

$$\langle \hat{f}, i^* \tau_{x_0}(\psi_1) \rangle \neq \langle \hat{f}, i^* \tau_{x_0}(\psi_2) \rangle$$

d'où

$$i'(x_0) \cdot \tau_{x_0}(\psi_1) \neq i'(x_0) \cdot \tau_{x_0}(\psi_2). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

$i'(x_0)$  est *surjectif*. Donnons nous  $\psi_1 \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V)$ ; alors on peut restreindre  $\psi_1$  à un voisinage de zéro assez petit, soit  $I_2$ , de sorte que le chemin  $\psi_2$  ainsi obtenu vérifie :

$$\psi_2(t) \in \Omega \quad \text{pour} \quad t \in I_2.$$

Soit  $\psi_3 \in \mathcal{C}_{x_0}^1(\Omega)$  défini en posant

$$\psi_3(t) = \psi_2(t) \quad \text{pour} \quad t \in I_2.$$

Alors  $\psi_2 = i \circ \psi_3$  et, d'après 4.3.2,  $\tau_{x_0}(\psi_2) = \tau_{x_0}(\psi_3)$ . Mais :

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(\psi_2) &= \tau_{x_0}(i \circ \psi_3) \\ &= i^*(\tau_{x_0}(\psi_3)) \end{aligned}$$

et en utilisant 4.2.1

$$d'où \quad \tau_{x_0}(\psi_1) = i^*(\tau_{x_0}(\psi_3)) = i'(x_0) \cdot \tau_{x_0}(\psi_3) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Comme conséquence de 4.3.1, on a :

**4.3.3 THÉORÈME.** — Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$  et de dimension  $n$ ; soit  $x_0 \in V$ ; alors  $T_{x_0}(V)$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{A}_1(V))^*$  de dimension  $n$ .

**PREUVE.** — Remarquons d'abord que l'image d'un espace vectoriel par une application quasi-linéaire (cf. 4.2.4) est un espace vectoriel. Soient  $\varphi$  une carte de  $V$  définie sur l'ouvert  $U$  de  $V$  tel que  $x_0 \in U$ ,  $\varphi(U) = O$ ,  $E$  l'espace vectoriel contenant  $O$  comme ouvert. Posons  $\varphi^{-1} = u$ ,  $\xi_0 = \varphi(x_0)$ . Alors, d'après 4.2.6,  $u'(\xi_0)$  définit une bijection de  $T_{\xi_0}(O)$  sur  $T_{x_0}(U)$ . D'autre part, d'après 4.1.5,  $T_{\xi_0}(O)$  est isomorphe à  $E$  et, par suite, est un espace vectoriel. Comme  $T_{x_0}(U) = u'(\xi_0)(T_{\xi_0}(O))$ , on obtient en utilisant la remarque faite au début de la démonstration, que  $T_{x_0}(U)$  est un espace vectoriel. En appliquant une seconde fois cette même remarque, on obtient, puisque l'on a, d'après 4.3.1,  $T_{x_0}(V) = i'(x_0)(T_{x_0}(U))$ , que  $T_{x_0}(V)$  est un espace vectoriel. Alors  $u'(\xi_0)$ ,  $i'(x_0)$  sont des applications quasi-linéaires définies sur des espaces vectoriels, donc des applications linéaires (cf. 4.2.4); comme ce sont déjà des bijections, ce sont des isomorphismes; d'où  $\dim T_{x_0}(V) = \dim E = n$ . C.Q.F.D.

**4.3.4 COROLLAIRE.** — Soient  $V, \hat{V}$  deux variétés de classe  $C_1$ ,  $h \in C_1(V, \hat{V})$ ,  $x_0 \in V$ ,  $y_0 = h(x_0)$ ; alors  $h'(x_0) \in \mathcal{L}(T_{x_0}(V); T_{y_0}(\hat{V}))$ .

**PREUVE.** —  $h'(x_0)$  est une application quasi-linéaire définie sur un espace vectoriel, donc est linéaire. C.Q.F.D.

## 4.4 NOTATIONS ET CALCULS PRATIQUES

L'existence et les propriétés de l'espace tangent ayant été établies dans le paragraphe précédent, nous nous proposons maintenant d'en faciliter le maniement.

*Conventions d'identification*

Si  $\Omega$  est un ouvert d'une variété  $V$  de classe  $C^1$  et  $x_0 \in \Omega$ , nous identifierons le plus souvent

$$4.4.1 \quad T_{x_0}(\Omega) \quad \text{avec} \quad T_{x_0}(V)$$

(cf. 4.3.1).

Si  $O$  est un ouvert d'un espace vectoriel  $E$  et si  $x_0 \in O$ , nous identifierons le plus souvent

$$4.4.2 \quad T_{x_0}(O) \quad \text{avec} \quad E,$$

(cf. 4.1.5).

Ces conventions faites, on a le principe de localisation suivant pour le calcul de l'application dérivée.

4.4.3 PROPOSITION. — Soient  $V$  et  $\hat{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ , soit  $\Omega$  un ouvert de  $V$ ,  $h \in C^1(V, \hat{V})$ , notant par  $h_1$  la restriction de  $h$  à  $\Omega$ , alors pour tout  $x_0 \in \Omega$  on a, en identifiant,  $T_{x_0}(\Omega)$  à  $T_{x_0}(V)$  :

$$h'_1(x_0) = h'(x_0).$$

PREUVE. — Comme  $h_1 = h \circ i$

$$h'_1(x_0) = h'(x_0) \circ i'(x_0)$$

d'où le résultat.

*Expression de l'opérateur  $\tau_{x_0}$* 

Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ ,  $\psi \in C^k(I; V)$ . Alors  $\psi'(t_0)$  est une application linéaire de  $T_{t_0}(I)$  (c'est-à-dire  $\mathbf{R}$  d'après 4.4.2) dans  $T_{\psi(t_0)}(V)$ .

Nous appellerons *vecteur vitesse* de  $\psi$  au point  $t_0$  le vecteur  $\psi'(t_0) \cdot 1$  (où  $1$  est le vecteur de base canonique de  $\mathbf{R}$ ).

Alors le vecteur vitesse est un vecteur tangent à  $V$  au point  $\psi(t_0)$ , c'est-à-dire  $\psi'(t_0) \cdot 1 \in T_{\psi(t_0)}(V)$ .

4.4.4 PROPOSITION. — Soient  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $x_0 \in V$ ; alors on a :

$$\tau_{x_0}(\psi) = \psi'(0) \cdot 1 \quad \text{pour tout} \quad \psi \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V).$$

PREUVE. — En effet on a d'après la définition de  $\psi'(0)$

$$\psi'(0) \cdot 1 = {}^t\psi^*(D_1)$$

où d'après 4.1.5  $D_1$  est de la forme linéaire définie sur  $\mathcal{A}_1(I)$  par la formule

$$D_1\theta = \frac{d\theta}{dt}(0)$$

Soit  $f \in \mathcal{A}_1(V)$ , alors on a

$$\begin{aligned} \langle f, \psi'(0) \cdot 1 \rangle &= \langle f, {}^t\psi^*(D_1) \rangle = \langle \psi^* f, D_1 \rangle \\ &= \langle f \circ \psi, D_1 \rangle. \end{aligned}$$

Or cette dernière expression n'est rien d'autre que la définition de l'application dérivée.

#### 4.4.5 Donnée pratique d'un vecteur tangent

Par définition  $T_{x_0}(V)$  est constitué par les  $\tau_{x_0}(\psi)$  lorsque  $\psi \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V)$ ; il sera dans la suite plus commode utilisant 4.4.4 de considérer  $T_{x_0}(V)$  comme étant constitué par les vecteurs

$$\psi'(0) \cdot 1 \quad \text{où} \quad \psi \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V).$$

Par exemple un vecteur tangent  $z_0 \in T_{x_0}(V)$  pourra être donné en pratique par le choix d'un chemin  $\psi_0 \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V)$  tel que

$$\psi_0'(0) \cdot 1 = z_0$$

#### 4.4.6 Exemple de calcul pratique de l'application dérivée

Soient  $V, \hat{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $h \in C^1(V, \hat{V})$ ,  $x_0 \in V$ ,  $y_0 = h(x_0)$ . Soit  $z \in T_{x_0}(V)$ , nous voulons calculer

$$h'(x_0) \cdot z = \hat{z}$$

Utilisant 4.4.5 choisissons  $\psi \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V)$  tel que

$$\psi'(0) \cdot 1 = z$$

Posons

$$\hat{\psi} = h \circ \psi$$

Alors on aura

$$\hat{z} = \hat{\psi}'(0) \cdot 1$$

En effet le théorème des fonctions composées donne

$$\hat{\psi}'(0) = h'(x_0) \circ \psi'(0)$$

d'où en appliquant le vecteur 1 de  $\mathbf{R}$  aux deux membres

$$\begin{aligned} \hat{\psi}'(0) \cdot 1 &= h'(x_0) \cdot (\psi'(0) \cdot 1) \\ &= h'(x_0) \cdot z \end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché.

## 4.4.7 Coïncidence avec la théorie élémentaire

Prenons pour  $V$  et  $\hat{V}$  deux ouverts de deux espaces vectoriels  $E$  et  $\hat{E}$ . Étant donnée une application  $h$  de  $V$  dans  $\hat{V}$ , nous avons deux notions possibles pour l'application dérivée en  $x_0$  : celle développée dans ce paragraphe, soit  $h'(x_0)$ , et celle utilisée dans 2.1, soit  $\tilde{h}'(x_0)$ . Alors, à l'aide des identifications 4.4.2, on a  $h'(x_0) = \tilde{h}'(x_0)$ .

Remarquons d'abord que si  $\psi \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V)$ , alors les vecteurs vitesses calculés au sens des paragraphes 4.2 et 2.1, soient  $\psi'(0) \cdot 1$  et  $\tilde{\psi}'(0) \cdot 1$  coïncident.

En effet, soit  $z \in E$ ,  $\psi \in \mathcal{C}_{x_0}^1(V)$  tels que

$$\psi'(0) \cdot 1 = z.$$

Alors on a, d'après 4.4.6 :

$$h'(x_0) \cdot z = \psi'_1(0) \cdot 1 \quad \text{où} \quad \psi_1 = h \circ \psi.$$

D'autre part, utilisons le théorème des fonctions composées 2.1.2. On a :

$$\tilde{\psi}'_1(0) = \tilde{h}'(x_0) \circ \tilde{\psi}'(0),$$

d'où

$$\tilde{\psi}'_1(0) \cdot 1 = \tilde{h}'(x_0) \cdot z,$$

c'est-à-dire

$$h'(x_0) \cdot z = \tilde{h}'(x_0)z.$$

*Lecture dans une carte de l'espace tangent*

4.4.8 PROPOSITION. — Soient  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $\varphi$  une carte de  $V$ ,  $x_0$  un point du domaine de définition  $U$  de la carte  $\varphi$ ,  $i$  l'injection de  $U$  dans  $V$ ,  $E$  l'espace vectoriel d'arrivée de la carte  $\varphi$ . Alors  $\varphi'(x_0)$  réalise une bijection entre  $T_{x_0}(V)$  et  $E$ .

PREUVE. — 4.4.1 et 4.2.6.

## 4.4.9 Lecture de l'application dérivée dans deux cartes

Soient  $V$  et  $\tilde{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $h \in C^1(V; \tilde{V})$ ,  $x_0 \in V$ ,  $y_0 = h(x_0)$ ,  $\varphi_\alpha$  et  $\tilde{\varphi}_\alpha$  deux cartes de  $V$  et  $\tilde{V}$  définies au voisinage de  $x_0$  et  $y_0$ . Considérons l'application lue

$$h_{\tilde{\alpha}, \alpha} = \tilde{\varphi}_\alpha \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

soit  $\xi_0 = \varphi_\alpha(x_0)$ . On appellera

$$h'_{\tilde{\alpha}, \alpha}(\xi_0)$$

l'application dérivée  $h'(x_0)$  lue dans le couple de cartes  $\varphi_\alpha$ ,  $\tilde{\varphi}_\alpha$ . Utilisant le théorème des fonctions composées, on a :

$$h'_{\tilde{\alpha}, \alpha}(\xi_0) = \tilde{\varphi}'_\alpha(y_0) \circ h'(x_0) \circ (\varphi'_\alpha(x_0))^{-1}$$

## 5 Équivalence locale d'applications. Théorème du rang constant

### 5.1 PROBLÈME DE L'ÉQUIVALENCE

La notion de difféomorphisme a le rôle que joue, en géométrie élémentaire, celle de déplacement. En géométrie élémentaire, deux figures superposables par un déplacement sont considérées comme équivalentes ou égales; un problème naturel est alors de reconnaître, pour un type de figure donné, les invariants qui permettent de déterminer si deux figures de ce type sont égales.

#### 5.1.1 Équivalence de deux applications

DÉFINITION. — Soient  $V, \hat{V}, V_1, \hat{V}_1$ , quatre variétés de classe  $C^k$ ,  $h \in C^k(V, \hat{V})$ ,  $h_1 \in C^k(V_1, \hat{V}_1)$ . Alors,  $h$  et  $h_1$  seront dites  $C^k$ -équivalentes, s'il existe un  $C^k$ -difféomorphisme  $\varphi$  de  $V$  sur  $V_1$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\hat{\varphi}$  de  $\hat{V}$  sur  $\hat{V}_1$  tels que :

$$h_1 = \hat{\varphi} \circ h \circ \varphi^{-1},$$

ou encore

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & \hat{V} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \hat{\varphi} \\ V_1 & \xrightarrow{h_1} & \hat{V}_1 \end{array}$$

#### Équivalence locale

DÉFINITION. — Les notations de la définition précédente subsistent. Soient deux points  $x_0 \in V, x_1 \in V_1$ . On dira alors que  $h$  et  $h_1$  sont *localement équivalentes au voisinage des points  $x_0$  et  $x_1$* , si, notant  $y_0 = h(x_0), y_1 = h_1(x_1)$  on peut trouver des voisinages ouverts de  $x_0, x_1, y_0, y_1$ , soient  $V', V'_1, \hat{V}', \hat{V}'_1$ , tels que  $h(V') \subset \hat{V}'$ ,  $h_1(V'_1) \subset \hat{V}'_1$ , et que les restrictions  $\hat{h} \in C^k(V'; \hat{V}')$  et  $\hat{h}_1 \in C^k(V'_1; \hat{V}'_1)$  soient  $C^k$ -équivalentes.

Le composé de difféomorphismes étant encore un difféomorphisme, l'équivalence (resp. l'équivalence locale) est transitive, symétrique, réflexive et constitue ainsi une relation d'équivalence.

5.1.2 *Exemple.* Soient  $h \in C^k(V, \hat{V}), x_0 \in V, y_0 = h(x_0)$ ; alors si  $\varphi_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha$  sont deux cartes de  $V$  et  $\hat{V}$  définies sur des voisinages de  $x_0$  et  $y_0$ , l'application lue  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  est localement équivalente à  $h$  en  $x_0, y_0$ .

5.1.3 COROLLAIRE. — *Conservons les notations de ci-dessus. On peut trouver une application  $h_1$  d'un ouvert d'un espace vectoriel dans un ouvert d'espace vectoriel tel que  $h$  et  $h_1$  soient localement équivalentes.* En effet, il suffit de prendre pour  $h_1$  l'application  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$ .

5.1.4 COROLLAIRE. — *Pour déterminer les classes d'équivalence locale d'applications d'une variété  $V$  de dimension  $n$  dans une variété  $\hat{V}$  de dimension  $p$ , il suffira de déterminer les classes d'équivalence locale d'applications de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  dans la boule unité de  $\mathbb{R}^p$ . En effet, on utilise 5.1.3 et la transitivité de la relation d'équivalence locale.*

### 5.1.5 Difféomorphismes locaux

Reprenons la terminologie utilisée en 2.3.

DÉFINITION. — Soient  $V$  et  $\hat{V}$  deux variétés de classe  $C^k$ ,  $h \in C^k(V, \hat{V})$ ,  $x_0 \in V$  nous dirons que  $h$  est un  $C^k$ -difféomorphisme local au voisinage de  $x_0$  s'il existe  $V'$  et  $\hat{V}'$ , voisinages ouverts de  $x_0$  et de  $y_0 = h(x_0)$  tels que la restriction de  $h$  à  $V'$  définisse un difféomorphisme de  $V'$  sur  $\hat{V}'$ .

On peut caractériser les difféomorphismes locaux comme étant les applications localement équivalentes à l'application identique.

Ceci étant, 5.1.4 permet immédiatement d'étendre le théorème d'inversion énoncé en 2.3 :

5.1.6 THÉORÈME D'INVERSION. — *Soient  $V$ ,  $\hat{V}$  deux variétés de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ),  $h \in C^k(V; \hat{V})$  et  $x_0 \in V$ ; alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $h$  soit un  $C^k$ -difféomorphisme local au voisinage de  $x_0$  est que  $h'(x_0)$  soit un isomorphisme.*

## 5.2 RANG D'UNE APPLICATION

5.2.1 DÉFINITION. — Soient  $V$  et  $\hat{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $h \in C^1(V, \hat{V})$ ,  $x_0 \in V$ . On appellera *rang de  $h$  en  $x_0$* , et l'on notera  $\rho_h(x_0)$ , le rang de l'application linéaire  $h'(x_0)$ .

On a évidemment, d'après 4.3.3 :

$$\rho_h(x_0) \leq \min(\dim V, \dim \hat{V}).$$

5.2.2 PROPOSITION. — *Soient  $h$  et  $h_1$  deux applications localement équivalentes aux points  $x_0, x_1$ . Notons  $\varphi$  un difféomorphisme local amenant un voisinage ouvert  $V'$  de  $x_0$  sur un voisinage ouvert  $V'_1$  de  $x_1$  et permettant de réaliser l'équivalence de  $h$  et  $h_1$ . Alors on a :*

$$\rho_h(x) = \rho_{h_1}(\varphi(x)) \quad \text{pour tout } x \in V'.$$

PREUVE. — Avec les notations de 5.1.1, on a sur  $V'_1$  :

$$h_1 = \hat{\varphi} \circ h \circ \varphi^{-1};$$

d'où en utilisant le théorème des fonctions composées  $h'_1 = \hat{\varphi}' \circ h' \circ (\varphi^{-1})'$ . Comme  $\varphi^{-1}$  et  $\hat{\varphi}$  sont des difféomorphismes,  $\hat{\varphi}'$  et  $(\varphi^{-1})'$  sont des isomorphismes d'espaces vectoriels (cf. 4.2.6); en composant à droite et à gauche  $h'$  par des isomorphismes on ne change pas son rang. C.Q.F.D.

5.2.3 *Semi-continuité du rang*

PROPOSITION. — Soient  $V$  et  $\tilde{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $h \in C^1(V, \tilde{V})$ . alors

$$O_q = \{x \in V \mid \rho_h(x) \geq q\} \text{ est une partie ouverte de } V.$$

PREUVE. — En effet soit  $x_0 \in O_q$ ,  $\varphi_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha$  deux cartes définies au voisinage de  $x_0$  et  $y_0 = h(x_0)$ . Alors sur un voisinage de  $x_0$ , en notant par  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$  l'application  $h$  lue dans ces cartes, on a d'après 5.2.2

$$\rho_{h_{\tilde{\alpha}, \alpha}} \circ \varphi_\alpha = \rho_h.$$

Montrons que

$$\Omega = \{\rho_{h_{\tilde{\alpha}, \alpha}}(\xi) \geq q\}$$

est une partie ouverte de  $E_\alpha$ . Ceci entraînera que  $\varphi_\alpha^{-1}(\Omega)$  est un voisinage de  $x_0$  contenu dans  $O_q$ , donc que  $O_q$  est ouvert.

En effet, soit  $\xi_1 \in \Omega$ . Choisissons une base dans les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de  $h_{\tilde{\alpha}, \alpha}$ . Notons par  $J(\xi)$  la matrice jacobienne définissant  $h'_{\tilde{\alpha}, \alpha}(x)$  dans ces bases. Puisque le rang de  $h'_{\tilde{\alpha}, \alpha}(\xi_1)$  est supérieur à  $q$  on peut trouver une matrice carrée extraite de  $J(\xi_1)$ , soit  $\mathcal{M}$ , d'ordre supérieur à  $q$  tel que

$$\det \mathcal{M} \neq 0.$$

Notons par  $\mathcal{M}(\xi)$  la matrice carrée extraite de  $J(\xi)$  et correspondant au même choix des lignes et des colonnes que  $\mathcal{M}$  dans  $J(\xi_1)$ . Posons :

$$d(\xi) = \det \mathcal{M}(\xi)$$

Alors  $d(\xi_1) \neq 0$ ; d'autre part  $d$  est une fonction continue de  $\xi$ ; donc on peut trouver un voisinage de  $\xi_1$  sur lequel  $d(\xi) \neq 0$ , ce qui démontre que  $\Omega$  est ouvert.

5.2.4 *Application de rang maximum en un point*

Soient  $V$  et  $\hat{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $f \in C^1(V; \hat{V})$ . Soient  $n = \dim V$ ,  $p = \dim \hat{V}$ . On dit que le rang de  $f$  est *maximum en*  $x_0$  si :

$$\rho_f(x_0) = \max_{x \in V} \rho_f(x) \leq \inf(n, p)$$

PROPOSITION. — Si le rang de  $f$  est maximum en  $x_0$  il est constant dans un voisinage de  $x_0$ .

PREUVE. — Posons  $r_0 = \max_{x \in V} \rho_f(x)$ ,

$$\{x \mid \rho_f(x) \geq r_0\} = O_{r_0}.$$

Alors  $O_{r_0}$  est ouvert d'après 5.2.3. De plus,  $x_0 \in O_{r_0}$ . Donc il existe un voisinage  $U(x_0) \subset O_{r_0}$ . D'autre part comme le rang en  $x$  ne peut être supérieur à  $r_0$  on a

$$O_{r_0} = \{x \mid \rho_f(x) = r_0\}$$

ce qui démontre 5.2.4.

5.2.5 COROLLAIRE. — *Les notations étant celles de 5.2.4, soit  $r_0 = \max_{x \in V} \rho_f(x)$ ; alors il existe  $r_0 + 1$  parties ouvertes de  $V$ , soient  $\Omega_{r_0}, \Omega_{r_0-1}, \dots, \Omega_1, \Omega_0$  telles que*

$$\rho_f(x) = q \quad \text{si} \quad x \in \Omega_q$$

$$\bigcup_q \Omega_q \text{ est dense dans } V.$$

PREUVE. — POSONS :

$$\Omega_q = \text{intérieur de } \{x \mid \rho_f(x) = q\}$$

Soit  $x_0 \in V$ . Posons  $r_1 = \limsup_{x \rightarrow x_0} \rho_f(x)$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $U(x_0)$  tel que  $\rho_f(x) \leq r_1$  pour tout  $x \in U(x_0)$ . Appliquons 5.2.4.

$\Delta = \{x \in U(x_0) \mid \rho_f(x) = r_1\}$  est un ouvert. Par suite  $\Delta \subset \Omega_{r_1}$ . Comme évidemment  $x_0 \in \bar{\Delta}$ , on a démontré que la réunion des  $\Omega_q$  est dense dans  $V$ .

C.Q.F.D.

### 5.3 APPLICATIONS LOCALEMENT ÉQUIVALENTES A UNE APPLICATION LINÉAIRE

Ces applications sont caractérisées par le théorème :

THÉORÈME DU RANG CONSTANT. — *Soient  $V, \hat{V}$  deux variétés de classe  $C^k$ ,  $x_0 \in V$ ,  $f \in C^k(V, \hat{V})$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit localement  $C^k$ -équivalente au voisinage de  $x_0$  à une application linéaire est que :*

5.3.1  $\rho_f(x)$  soit constant sur un voisinage de  $x_0$ .

PREUVE. — La nécessité est immédiate: si on a une application linéaire  $C \in \mathcal{L}(E; F)$ , alors l'application  $f_1(\xi) = C\xi$  a pour application dérivée  $C$ . Par suite  $f'_1(\xi) = \text{constante}$  et en particulier  $\rho_{f_1}(\xi) = \text{constante}$ . Comme le rang est conservé par l'équivalence locale (cf. 5.2.2) on obtient 5.3.1. Pour démontrer la suffisance, on peut se ramener, en utilisant 5.1.3 et 5.2.2, au cas où  $V$  est un ouvert  $O$  d'un espace vectoriel  $E$  et  $\hat{V}$  un ouvert d'un espace vectoriel  $F$ . Posons  $y_0 = f(x_0)$ .

Effectuant les translations  $x \mapsto x + x_0$ ,  $y \mapsto y + y_0$ , nous pouvons nous ramener au cas où  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ . Notons par  $A$  l'application linéaire  $f'(x_0)$ .

Notons

$$n = \dim E, \quad m = \dim F,$$

$$r = \text{rang de } f \text{ en } x_0 = \text{rang de } A.$$

Soient  $E_2$  le noyau de  $A$ ,  $F_1$  l'image de  $A$ ,  $E_1$  un sous-espace supplémentaire de  $E_2$  dans  $E$ ,  $F_2$  un sous-espace supplémentaire de  $F_1$  dans  $F$ .

Alors

$$E = E_1 \oplus E_2$$

$$F = F_1 \oplus F_2$$

D'autre part, l'hypothèse 5.3.1 s'écrit

$$\text{dimension Image } (f'(x)) = \text{constante sur un voisinage de zéro,}$$

ce qui, avec le fait que :

$$F_2 \cap \text{Image } (f'(0)) = 0$$

et les hypothèses  $C^1$ , entraîne que :

$$5.3.2 \quad F_2 \cap \text{Image } (f'(x)) = 0 \quad \text{pour } x \text{ voisin de zéro.}$$

*Construction des difféomorphismes réalisant l'équivalence*

Elle sera effectuée en deux temps. Nous allons d'abord construire un difféomorphisme local  $g$  de  $O$  dans  $E$ , au voisinage de  $x_0$ .

Soit  $B$  la restriction de  $A$  à  $E_1$ . Alors  $B$  définit un isomorphisme de  $E_1$  sur  $F_1$ . Notons par  $p_{F_1}$  la projection de  $F$  sur son facteur direct  $F_1$ . Soit  $g$  l'application de  $O$  dans  $E$  définie par

$$5.3.3 \quad g(x) = (B^{-1} \circ p_{F_1} \circ f)(x) + p_{E_2}(x)$$

La formule 5.3.3 met en évidence les composantes de  $g(x)$  sur les deux facteurs de la somme directe.

On a d'après le théorème des fonctions composées

$$g' = B^{-1} \circ p_{F_1} \circ f' + p_{E_2}$$

Mais comme l'image de  $f'(x_0)$  est  $F_1$  on en déduit que  $p_{F_1} \circ f'(x_0) = f'(x_0)$  et d'après la définition de  $B$  on obtient

$$g'(x_0) = p_{E_1} + p_{E_2} = \text{identité,}$$

ainsi d'après 2.3.2,  $g$  définit un difféomorphisme local de  $O$  au voisinage de  $x_0$ . Notons par  $g^{-1}$  le difféomorphisme réciproque de la restriction de  $g$  à un voisinage de  $x_0$  assez petit. Posons :

$$\hat{f} = f \circ g^{-1}$$

Posons

$$x' = g^{-1}(x).$$

Alors on aura

$$x = g(x')$$

et en particulier en portant dans 5.3.3

$$p_{E_1}(x) = B^{-1} \circ p_{F_1} \circ f(x')$$

Ceci entraîne que

$$p_{F_1} \circ \hat{f}(x) = p_{F_1} \circ f(x') = A(x)$$

en tenant compte du fait que  $AB^{-1} = \text{identité sur } F_1$  et du fait que  $A \circ p_{E_1} = A$ .

D'où

$$p_{F_1} \circ \hat{f} = A$$

ce qui s'exprime également en écrivant

$$5.3.4 \quad \hat{f}(x) = k(x) + A(x), \quad \text{où} \quad k(x) \in F_2.$$

D'autre part  $\hat{f}$  satisfait 5.3.2. Soit  $h_2 \in E_2$ . Calculons

$$\hat{f}'(x) \cdot h_2 = A(h_2) + k'(x) \cdot h_2;$$

comme  $A(E_2) = 0$ ,  $k'(x) \cdot E_2 \subset F_2$ ; d'après 5.3.4, on déduit de 5.3.2 que

$$5.3.5 \quad k'(x)(E_2) = 0,$$

c'est-à-dire que, écrivant  $x \in E$  sous la forme  $x = (x_1, x_2)$  et  $k(x)$  comme fonction des deux variables  $(x_1, x_2)$ , 5.3.5 entraîne que :

$$5.3.6 \quad k(x_1, x_2) \text{ ne dépend pas de la variable } x_2.$$

Posant  $k(x_1, 0) = l(x_1)$ , on écrira ainsi

$$k = l \circ p_{E_1}$$

D'autre part, la relation

$$\hat{f}'(x_0) = f'(x_0) = A$$

entraîne que

$$k'(x_0) = 0$$

ou encore

$$5.3.7 \quad l'(x_0) = 0.$$

*Construction du second difféomorphisme*

Posons

$$5.3.8 \quad h(y) = y + l \circ B^{-1} \circ p_{F_1}(y)$$

On a d'après 5.3.7

$$h'(y_0) = \text{identité.}$$

Ainsi  $h$  définit un difféomorphisme local au voisinage de  $y_0$ . Soit

$$\hat{f} = h^{-1} \circ \hat{f}$$

Posons

$$y = h^{-1}(y')$$

Alors utilisant 5.3.4 on a le système

$$5.3.9 \quad y' = Ax + l \circ p_{E_1}(x)$$

$$5.3.10 \quad y' = y + l \circ B^{-1} \circ p_{F_1}(y)$$

Appliquons à 5.3.10  $p_{F_1}$  on obtient compte tenu du fait que  $l(x) \in F_2$

$$p_{F_1}(y') = p_{F_1}(y)$$

Or d'après 5.3.9

$$p_{F_1}(y') = A(x)$$

d'où en faisant la différence de 5.3.10 et 5.3.9 on a

$$y = A(x) + l \circ p_{E_1}(x) - l \circ B^{-1} \circ A(x).$$

Or comme

$$B^{-1} \circ A(x) = p_{E_1}(x)$$

on obtient

$$y = A(x)$$

L'application  $\hat{f}$  n'est rien autre que l'application linéaire  $x \rightarrow Ax$  ce qui démontre le théorème.

## 5.4 IMMERSIONS. PLONGEMENTS

### 5.4.1 Applications régulières

DÉFINITION. — Soient  $V, W$  deux variétés de classe  $C^1$  telle que  $\dim V \leq \dim W$  on dit que  $f \in C^1(V; W)$  est *régulière* en  $x_0$  si le rang de  $f$  en  $x_0$  est égal à la dimension de  $V$ .

Comme le rang de  $f$  est au plus égal à  $\dim V$  on obtient utilisant la semi-continuité du rang (cf. 5.2.4) que :

*l'ensemble des points où  $f$  est régulière est un ouvert de  $V$ .*

On dit que  $f$  est *régulière* si  $f$  est régulière en tout point de  $V$ .

On a :

5.4.2 PROPOSITION. — *Soit  $f$  une application régulière en  $x_0$ , alors on peut trouver un voisinage  $U$  de  $x_0$  tel que la restriction de  $f$  à  $U$  soit injective.*

PREUVE. — Le rang de  $f$  est constant dans un voisinage de  $x_0$ . D'après le théorème du rang constant on peut lire  $f$  au voisinage de  $x_0$  suivant une application linéaire dont le rang est égal à la dimension de l'espace vectoriel de départ. Une telle application linéaire étant injective 5.4.2 est démontré.

### 5.4.3 Immersions

DÉFINITION. — Soient  $V$  et  $W$  deux variétés de classe  $C^1$  telles que  $\dim V \leq \dim W$ . Soit  $f \in C^1(V; W)$  nous dirons que  $f$  est une *immersion* de  $V$  dans  $W$  si  $f$  est *injective* et *régulière*.

La notion d'immersion n'est pas assez précise, l'image  $f(V)$  peut être assez pathologique.

Nous allons introduire une classe plus restrictive d'application.

5.4.4 *Plongements*

**DÉFINITION.** — Soient  $V, W$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $\dim V \leq \dim W$ . On appelle *plongement* de  $V$  dans  $W$  une application  $f \in C^1(V; W)$  qui soit une immersion et qui de plus réalise un homéomorphisme entre  $V$  et  $f(V)$ ,  $f(V)$  étant muni de la topologie induite par celle de  $W$ .

5.4.5 *Applications propres*

On rappelle qu'en topologie générale, on a appelé *propre* une application telle que l'image réciproque de toute partie compacte est compacte.

On a alors :

**PROPOSITION.** — *Soit  $f$  une immersion qui soit de plus une application propre. Alors  $f$  est un plongement.*

**PREUVE.** — Montrons que l'image  $f(O)$  d'un ouvert  $O$  est ouverte. Soit  $y_0 \in f(O)$ . Soit  $K$  un voisinage compact de  $y_0$ . Posons  $S = f^{-1}(K)$ . Alors,  $f$  étant propre,  $S$  est une partie compacte de  $V$ . Notons  $f_1$  la restriction de  $f$  à  $S$ . Alors  $f_1$  est une application *injective continue* d'un compact  $S$  dans l'espace séparé  $K$ . D'après un résultat classique de Topologie générale,  $f_1$  est un homéomorphisme. Par suite  $f_1(O \cap S)$  est ouvert dans  $K$ ; ainsi il existe un ouvert  $\Omega$  de  $W$  tel que  $\Omega \cap K = f_1(O \cap S)$ . Par suite  $\Omega \cap K \subset f(O)$ . Comme  $\Omega \cap K$  est un voisinage de  $y_0$  dans  $f(V)$ , on obtient que  $y_0$  appartient à l'intérieur de  $f(O)$ .

5.4.6 *Soit  $f$  une application régulière en  $x_0$  alors on peut trouver un voisinage  $U$  de  $x_0$  tel que la restriction de  $f$  à  $U$  soit un plongement.*

**PREUVE.** — Appliquons 5.4.2 et déterminons un voisinage  $U_1$  de  $x_0$  tel que la restriction de  $f$  à  $U_1$  soit injective. Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $x_0$  dont l'adhérence  $\bar{U}$  est contenue dans  $U_1$  et compacte. Alors la restriction de  $f$  à  $\bar{U}$  est injective, continue, donc est bicontinue comme en 5.4.5.

## 6 Sous-variétés

La notion d'équivalence locale étudiée en 5.1 pour les applications peut être développée de façon évidente pour les parties d'une variété. Alors, la notion de sous-variété correspond à celle de partie localement équivalente au voisinage de chacun de ses points à un sous-espace vectoriel. Plus précisément on a :

### 6.1 DÉFINITION

Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ . Une partie  $H$  de  $V$  est une sous-variété de classe  $C^k$  et de dimension  $p$  de  $V$ , si pour tout  $x_0 \in H$  on peut trouver une carte  $\varphi$  de

classe  $C^k$  d'un voisinage  $U$  de  $x_0$ , telle que

$$6.1.1 \quad \varphi(U \cap H) = F \cap \varphi(U)$$

où  $F$  est un *sous-espace vectoriel de dimension  $p$*  de l'espace vectoriel d'arrivée  $E$  de la carte  $\varphi$ . On appellera une carte telle que 6.1.1 soit satisfaite une carte *adaptée* à la sous-variété  $H$  au voisinage du point  $x_0$ .

Naïvement on peut dire qu'une carte  $\varphi$  est adaptée à  $H$  lorsque  $H$  lue dans cette carte apparaît essentiellement comme un *sous-espace vectoriel*. Une sous-variété  $H$  de  $V$  est une partie de  $V$  telle qu'au voisinage de chacun de ses points on puisse trouver une carte adaptée.

6.1.2 *Exemple.* Si  $H$  est une partie ouverte de  $V$ , alors  $H$  est une sous-variété de  $V$ , de même dimension que  $V$ .

En effet on pourra réaliser alors 6.1.2 avec  $F = E_{x_0}$ .

### 6.1.3 Structure de variété induite

PROPOSITION. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ )  $H$  une sous-variété de  $V$  de classe  $C^k$ , alors  $H$  peut être muni d'une structure de variété canonique.

PREUVE. — Soit  $n$  la dimension de  $E$ ,  $p$  celle de  $H$ . Nous appellerons carte numérique sur  $V$  adaptée à  $H$  un difféomorphisme de classe  $C^k$  d'un ouvert  $U$  de  $V$  dans  $\mathbf{R}^n$  tel que

$$\varphi(U \cap H) = \Phi(U) \cap \mathbf{R}^p$$

où  $\mathbf{R}^p$  est identifié à la partie de  $\mathbf{R}^n$  dont toutes les coordonnées de rang supérieur à  $p$  sont nulles.

Ceci étant nous construisons un atlas  $\tilde{\alpha}_H$  canonique sur  $H$  en considérant l'ensemble  $\alpha_{V,H}$  de toutes les cartes numériques sur  $V$  adaptées à  $H$  et en associant à chaque carte  $\varphi \in \alpha_{V,H}$  sa restriction  $\tilde{\varphi}$  à  $U \cap H$ .

Alors l'image de  $\tilde{\varphi}$  est la partie ouverte de  $\mathbf{R}^p$  constituée par  $\varphi(U) \cap \mathbf{R}^p$ . Comme au voisinage de chaque point de  $H$  on peut trouver une carte adaptée, il en résulte que les domaines de définition des cartes de l'atlas  $\tilde{\alpha}_H$  constituent un recouvrement de  $H$ .

Soit maintenant  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in \tilde{\alpha}_H$ . Alors l'application de changement de carte

$$\tilde{f}_{1,2} = \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}$$

est la restriction à  $\mathbf{R}^p \cap \Phi_2(U_2)$  de l'application

$$f_{1,2} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$$

cette dernière application est la composition de deux applications de classe  $C^k$ , donc est de classe  $C^k$ . Par suite il en sera de même de la restriction  $\tilde{f}_{1,2}$ .

On a ainsi montré que  $\tilde{\alpha}_H$  est un atlas de classe  $C^k$  de  $H$ . La topologie qu'il définit sur  $H$  est séparée comme coïncidant avec la topologie induite par  $V$  sur  $H$ . L'atlas  $\tilde{\alpha}_H$  définit ainsi sur  $H$  une structure de variété de classe  $C^k$ .

PROPOSITION. — Soient  $V, \tilde{V}$  deux variétés de classe  $C^k$ ,  $H, \tilde{H}$  deux sous-variétés de  $V$  et  $\tilde{V}$ ,  $f \in C^k(V; \tilde{V})$  tel que  $f(H) \subset \tilde{H}$ . Soit  $f_1$  l'application de  $H$  dans  $\tilde{H}$  déduite de  $f$ . Alors  $f_1 \in C^k(H; \tilde{H})$ .

PREUVE. — La vérification est immédiate en utilisant les atlas  $\alpha_H$  et  $\tilde{\alpha}_{\tilde{H}}$ .

## 6.2 SOUS-VARIÉTÉS ET PLONGEMENTS

THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété de dimension  $n$ , de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ),  $H$  une sous-variété de dimension  $p$ , de classe  $C^k$ . Munissons  $H$  de sa structure de variété induite; l'injection canonique

$$6.2.1 \quad i : H \rightarrow V$$

est un plongement de classe  $C^k$  de  $H$  dans  $V$ .

6.2.2 Inversement soit  $W$  une variété de classe  $C^k$ ,  $h$  un plongement de  $W$  dans  $V$ , alors l'image de  $W$ ,  $H_1 = h(W)$ , est une sous-variété de classe  $C^k$  de  $V$ .

6.2.3 Munissons  $H_1$  de sa structure de variété induite, alors il existe un difféomorphisme canonique  $g$  de  $W$  sur  $H_1$  tel que, notant par  $i_1$  l'injection canonique de  $H_1$  dans  $V$ , on ait :

$$h = i_1 \circ g$$

PREUVE. — La démonstration de 6.2.1 est assez triviale; il suffit de constater que  $i$  est une application régulière de classe  $C^k$ . Pour cela lisons  $i$  dans une carte  $\tilde{\varphi}_1 \in \tilde{\alpha}_H$  et la carte  $\varphi_1 \in \alpha$  correspondante. D'après 5.2.2, le rang de l'application lue est égal au rang de l'application  $i$ . Or l'application lue n'est autre que l'injection canonique de  $\mathbf{R}^p$  dans  $\mathbf{R}^n$ ; donc  $i$  est de rang  $p$  et, d'après 3.3.10,  $i$  est de classe  $C^k$ . Ainsi 6.2.1 est établi.

La démonstration de 6.2.2 est plus intéressante. Soit  $y_0 \in H_1$ . Considérons  $x_0 = h^{-1}(y_0)$ .

L'application  $h$  étant de rang maximum en tout point  $x \in W$ , d'après le théorème de rang constant 6.5.3 on peut trouver des cartes  $\varphi$  sur  $V$  et  $\psi$  sur  $W$  définies sur deux voisinages  $U(y_0)$  et  $U(x_0)$ , telles que l'application  $h$  lue dans ce couple de cartes soit la restriction d'une application linéaire  $A$ . Comme  $h$  est un homéomorphisme, on peut trouver un voisinage ouvert de  $y_0$  dans  $V$ , soit  $\hat{U}(y_0)$ , contenu dans  $U(y_0)$ , tel que  $\hat{U}(x_0) = h^{-1}(\hat{U}(y_0))$  soit contenu dans  $U(x_0)$ .

Montrons que la restriction  $\hat{\varphi}$  de  $\varphi$  à  $\hat{U}(x_0)$  est une carte adaptée pour  $H_1$ .

En effet, on a

$$h(W) \cap \hat{U}(y_0) = h(\hat{U}(x_0)) \subset h(U(x_0))$$

d'où

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(H_1 \cap \hat{U}(y_0)) &= \hat{\varphi}(h(\hat{U}(x_0))) \\ &= (\varphi \circ h \circ \psi^{-1})(\Omega) \end{aligned}$$

où  $\Omega = \psi(\hat{U}(x_0))$  est un ouvert de l'espace vectoriel d'arrivée de  $\psi$ , soit  $E$ .

On sait que l'application lue  $\hat{\varphi} \circ h \circ \psi^{-1}$  n'est rien d'autre que la restriction d'une application linéaire. D'où

$$\hat{\varphi}(H_1 \cap \hat{U}(y_0)) = A(\Omega)$$

L'hypothèse sur le rang de  $h$  se traduit sur  $A$  par le fait que le rang de  $A$  est égal à  $p$ . Par suite

l'image de  $A$  est un sous-espace  $F$  de dimension  $p$  de  $E$

et

$$A(\Omega) = F \cap \varphi(\hat{U}(y_0))$$

ce qui montre que  $\varphi$  est une carte adaptée pour  $H_1$  au voisinage de  $y$ .

Reste à démontrer la dernière partie 6.2.3 du théorème. Remarquons d'abord que l'application  $g$  est du point de vue ensembliste définie de façon unique par la formule 6.2.3.

Reste à montrer que  $g$  est un difféomorphisme. Soit  $\tilde{\alpha}_{H_1}$  l'atlas canonique introduit sur  $H_1$  en 6.1.3,  $\alpha_W$  un atlas de  $W$ , soit  $\tilde{\varphi} \in \alpha_{H_1}$ ,  $\tilde{\varphi}$  est la restriction à  $H_1$  d'une carte adaptée  $\varphi \in \alpha_{V.H}$ . Soit  $\hat{g}$  l'application  $g$  lue dans le couple de cartes  $\varphi, \psi$  :

$$\hat{g} = \tilde{\varphi} \circ g \circ \psi^{-1}.$$

De même soit  $\hat{h} =$  l'application  $h$  lue dans le couple  $\varphi, \psi$ ,

$$\hat{h} = \varphi \circ g \circ \psi^{-1}.$$

Par hypothèse,  $\hat{h}$  est de classe  $C^k$ .

Notons par  $u$  l'injection canonique de  $\mathbf{R}^p$  dans  $\mathbf{R}^n$  on a

$$\varphi|_{H_1 \cap U} = u \circ \tilde{\varphi}$$

d'où

$$\hat{h} = u \circ \hat{g}.$$

On passe ainsi de  $\hat{h}$  à  $\hat{g}$  en restreignant l'espace vectoriel d'arrivée à un de ses sous-espaces vectoriels : ainsi  $\hat{g}$  est de classe  $C^k$  puisque  $h$  est de classe  $C^k$  et le théorème est démontré.

*Applications*6.2.4 *Espace tangent à une sous-variété*

Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $H$  une sous-variété de  $V$ , soit  $x_0 \in H$ , alors il existe une identification canonique de

$$T_{x_0}(H) \quad \text{à un sous-espace de} \quad T_{x_0}(V)$$

En effet considérons l'injection  $i$  de  $H$  dans  $V$ . D'après 6.2.1 l'injection  $i$  est une application régulière, c'est-à-dire que  $i'(x_0)$  est une application linéaire injective. Comme  $i'(x_0)$  envoie  $T_{x_0}(H)$  dans  $T_{x_0}(V)$ , elle réalise l'identification canonique cherchée.

6.2.5 *Exemple.* Soit  $O$  un ouvert d'un espace vectoriel  $E$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Posons  $H = F \cap O$ . Alors  $H$  est une sous-variété de  $O$ . En effet l'application canonique de  $O$  dans  $E$  réalise trivialement une carte adaptée de  $H$ . De plus on a

$$T_{x_0}(O) = E$$

et

$$T_{x_0}(H) = F.$$

*Transformation par difféomorphisme de l'espace tangent à une sous-variété*

6.2.6 PROPOSITION. — Soient  $V$  et  $\tilde{V}$  deux variétés,  $H$  une sous-variété de  $V$ ,  $f$  un difféomorphisme de  $V$  sur  $\tilde{V}$ . Notons par  $\tilde{H}$  l'image de  $f$ . Alors  $\tilde{H}$  est une sous-variété de  $\tilde{V}$ .

Identifiant  $T_{x_0}(H)$  et  $T_{\tilde{x}_0}(\tilde{H})$  à des sous-espaces de  $T_{x_0}(V)$  et  $T_{\tilde{x}_0}(\tilde{V})$ , on a

$$f'(x_0)(T_{x_0}(H)) = T_{\tilde{x}_0}(\tilde{H}) \quad \text{où} \quad \tilde{x}_0 = f(x_0).$$

PREUVE. — En effet notons par  $i$  et  $\tilde{i}$  les injections canoniques de  $H$  dans  $V$  et de  $\tilde{H}$  dans  $\tilde{V}$ , par  $f_1$  la restriction de  $f$  à  $H$  et à  $\tilde{H}$ . D'après 6.1.4,  $f_1 \in C^k(H, \tilde{H})$ . En restreignant de même le difféomorphisme réciproque de  $f$  on obtient que  $f_1$  est un difféomorphisme de  $H$  sur  $\tilde{H}$ .

Alors  $f_1$  réalise un difféomorphisme de  $H$  sur  $\tilde{H}$ . De plus on a

$$\tilde{i} \circ f_1 = f \circ i$$

d'où en appliquant le théorème des fonctions composées

$$\tilde{i}'(\tilde{x}_0) \circ f_1'(x_0) = f'(x_0) \circ i'(x_0)$$

Comme l'application  $f_1'(x_0)$  est un isomorphisme (d'après 4.2.6) on déduit de cette relation que

$$\text{Image de } \tilde{i}'(\tilde{x}_0) = f'(x_0) \quad (\text{Image de } i'(x_0))$$

C.Q.F.D.

### 6.2.7 Représentation paramétrique d'une sous-variété

Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ),  $H$  une sous-variété de  $V$ . On appellera *représentation paramétrique* de  $H$  la donnée d'un couple  $(W, h)$  constitué par une variété  $W$  et par un plongement  $h$  de  $W$  dans  $V$  tel que  $h(W) = H$ .

Un exposé élémentaire de la théorie des surfaces se heurte à la difficulté qu'une surface possède une infinité de représentations paramétriques et qu'il n'y a pas de raison d'en choisir une de préférence aux autres. Cette difficulté s'évanouit dans le cadre de la théorie des variétés. En effet, dans celles-ci deux variétés difféomorphes sont considérées comme équivalentes, et l'on a alors l'équivalence de deux représentations paramétriques quelconques.

Si  $(W, h)$  et  $(\tilde{W}, \tilde{h})$  sont deux représentations paramétriques de  $H$ , alors il existe un difféomorphisme unique  $k$  de  $W$  sur  $\tilde{W}$  tel que

$$h = \tilde{h} \circ k$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ & \tilde{h} & \\ \tilde{W} & \searrow & V \\ k \uparrow & & \nearrow h \\ W & & \end{array}$$

En effet d'après 6.2.3 il existe deux difféomorphismes  $g$  et  $\tilde{g}$  de  $W$  sur  $H$  et  $\tilde{W}$  sur  $H$  tels que

$$h = i \circ g$$

$$\tilde{h} = i \circ \tilde{g}$$

En posant

$$k = \tilde{g}^{-1} \circ g$$

on obtient le difféomorphisme réalisant l'équivalence des deux représentations paramétriques.

## 6.3 THÉORÈME DU RANG CONSTANT ET SOUS-VARIÉTÉS

Une combinaison facile du théorème du rang constant avec le concept de sous-variété conduira au théorème suivant.

**THÉORÈME.** — Soient  $V, W$  deux variétés de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), de dimensions  $n$  et  $p$ ,  $f$  une application de classe  $C^k$  de  $V$  dans  $W$ .

Supposons que sur  $V$  le rang de  $f$  est constant et égal à  $r$ .

6.3.1 Alors pour tout  $y_0 \in f(V)$ ,

$f^{-1}(y_0)$  est une sous-variété  $H$  de  $V$  de dimension  $n - r$  et en tout point  $x_0 \in H$ ,  $T_{x_0}(H) = \ker f'(x_0)$ .

6.3.2 D'autre part pour tout  $x_0 \in V$  on peut trouver un voisinage  $U$  de  $x_0$  tel que

$$K = f(U) \quad \text{soit une sous-variété de } W \text{ de dimension } r$$

En tout point  $y_1 \in K$  on a  $T_{y_1}(K) = \text{Im } f'(x_1)$  avec  $x_1 \in U$  et  $f(x_1) = y_1$ .

Remarques. a) Si le rang de  $f$  n'est pas constant sur  $V$  on considèrera la restriction  $f_1$  de  $f$  à l'ouvert  $O$  de  $V$  où le rang de  $f$  est maximum et on appliquera à  $f_k$  le théorème.

b) La conclusion 6.3.1 est remarquable en ce qu'elle est une condition globale alors que 6.3.2 n'est valable que si l'on prend  $U$  assez petit.

PREUVE DU THÉORÈME. — Posons  $H = f^{-1}(y_0)$  et donnons nous  $x_0 \in H$ . Alors, d'après le théorème du rang constant on peut trouver deux voisinages  $U(x_0)$ ,  $U_1(y_0)$  et deux cartes  $\varphi, \varphi_1$  de  $U$  et  $U_1$  telles que  $f$  lue dans ces deux cartes apparaisse comme une application *linéaire*  $A$ .

DÉMONSTRATION DE 6.3.1. — On a

$$\varphi(H \cap U) = \ker(A) \cap \varphi(U).$$

Comme  $A$  est linéaire son noyau  $\ker(A)$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n - r$ , on voit ainsi que la carte  $\varphi_1$  sera une *carte adaptée* à  $H$  au voisinage de  $x_0$ ; ainsi au voisinage de tout point de  $H$  on peut trouver une carte adaptée;  $H$  est une sous-variété de  $V$ .

Reste à étudier l'espace tangent à  $H$ . On a d'après 6.2.6

$$\varphi'(x_0)(T_{x_0}(H)) = T_{\xi_0}(S) \quad \text{ou} \quad \xi_0 = \varphi(x_0)$$

où  $S = \ker(A) \cap \varphi(U)$ . Mais d'après 6.2.5, ce dernier espace tangent n'est rien d'autre que  $\ker(A)$ . D'où

$$\varphi'(x_0)(T_{x_0}(H)) = \ker(A).$$

Mais on a sur un voisinage de  $\xi_0$

$$A = \varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$$

D'où en appliquant le théorème des fonctions composées et utilisant le fait que  $\varphi_1'(y_0)$  est injective ( $\varphi_1$  étant un difféomorphisme)

$$\ker(A) = \ker(f'(x_0) \circ (\varphi'(x_0))^{-1})$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0)(T_{x_0}(H)) &= \ker(f'(x_0) \circ (\varphi'(x_0))^{-1}) \\ T_{x_0}(H) &= (\varphi'(x_0))^{-1} \ker(f'(x_0) \circ (\varphi'(x_0))^{-1}). \end{aligned}$$

Un raisonnement élémentaire d'algèbre linéaire montre que si  $u$  est une applica-

tion linéaire et  $\lambda$  un isomorphisme de l'espace vectoriel de définition de  $u$  on a

$$\lambda(\ker(u \circ \lambda)) = \ker u$$

d'où

$$T_{x_0}(\mathbf{H}) = \ker(f'(x_0))$$

C.Q.F.D.

PREUVE DE 6.3.2. — Gardons les cartes  $\varphi$  et  $\varphi_1$  définies plus haut. Alors

$$\varphi_1(f(\mathbf{U})) = \text{Im}(\mathbf{A}) \cap \varphi_1(\mathbf{U}_1) = \mathbf{S}_1.$$

Ainsi  $\varphi_1$  sera une carte dans  $\mathbf{U}_1$  adaptée pour  $\mathbf{K}$ ;  $\mathbf{K}$  est ainsi une sous-variété de  $\mathbf{U}_1$  c'est-à-dire de  $\mathbf{W}$ . Soit  $y_1 \in \mathbf{K}$ . Posons  $\eta_1 = \varphi_1(y_1)$ . Alors d'après 6.2.6 on aura

$$T_{y_1}(\mathbf{K}) = (\varphi_1'(y_1))^{-1}(T_{\eta_1}(\mathbf{S}_1))$$

et d'après 6.2.5 on a :

$$T_{\eta_1}(\mathbf{S}_1) = \text{Im}(\mathbf{A})$$

D'où

$$T_{y_1}(\mathbf{K}) = [\varphi_1'(y_1)]^{-1}(\text{Im}(\mathbf{A})).$$

On a toujours sur un voisinage de  $\xi_0$

$$\mathbf{A} = \varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$$

Choisissons  $x_1 \in \mathbf{U}$  tel que  $f(x_1) = y_1$  (un tel choix en général sera possible de bien des façons) et dérivons cette relation en  $\xi_1 = \varphi^{-1}(x_1)$  en appliquant le théorème des fonctions composées. On aura

$$\mathbf{A} = \varphi_1'(y_1) \circ f'(x_1) \circ (\varphi^{-1})'(\xi_1)$$

Comme  $(\varphi^{-1})$  est *surjective* on en déduit que

$$\text{Im}(\mathbf{A}) = \varphi_1'(y_1)(\text{Im} f'(x_1))$$

d'où

$$T_{y_1}(\mathbf{K}) = [\varphi_1'(y_1)]^{-1} \circ \varphi_1'(y_1)(\text{Im}(f'(x_1)))$$

c'est-à-dire

$$T_{y_1}(\mathbf{K}) = \text{Im}(f'(x_1))$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

#### 6.4 SOUS-VARIÉTÉS DE $\mathbf{R}^n$

Une sous-variété  $\mathbf{H}$  de dimension 2 de  $\mathbf{R}^3$  correspond à la notion élémentaire de surface. L'espace tangent à  $\mathbf{H}$  en un de ses points  $x_0$  s'identifie, en vertu de 6.3.1 à un sous-espace vectoriel de dimension 2 de  $\mathbf{R}^3$ , on retrouve ainsi la notion familière de plan tangent à une surface. Par exemple considérons la fonction

$$f(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

définie dans l'ouvert  $\mathbf{O}$  de  $\mathbf{R}^3$  constituée par le complémentaire de l'origine.

Alors on a pour tout  $h \in \mathbf{R}^3$

$$f'(x_0) \cdot h = x_0^1 h^1 + x_0^2 h^2 + x_0^3 h^3$$

c'est-à-dire que  $f'(x_0) \neq 0$  pour tout  $x_0 \in O$ , et par suite  $f'(x_0)$  est de rang 1. Ainsi le rang de  $f$  est constant sur  $O$ . Appliquons le théorème 6.3, on obtient que pour tout  $r > 0$

$$\Sigma_r = \{x \in O \mid f(x) = r\}$$

$\Sigma_r$  est une sous-variété de dimension 2 de  $O$ . De plus d'après 6.3.1, le plan tangent à  $\Sigma_r$  au point  $x_0$  est le *noyau* de  $f'(x_0)$ , c'est-à-dire en langage élémentaire « le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au rayon vecteur ». Ce préambule a simplement pour objet de replacer dans un cadre familier les résultats antérieurs. Le premier résultat que nous aborderons sera de rechercher des équations locales d'une sous-variété de  $\mathbf{R}^n$ .

#### *Équations locales d'une sous-variété de $\mathbf{R}^n$*

Notons par  $e_1, \dots, e_n$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ . A toute partie  $J$  de l'ensemble des  $n$  premiers entiers associons le sous-espace  $E_J$  de  $\mathbf{R}^n$  engendré par les  $\{e_k\}_{k \in J}$ .

Notons par  $J^*$  le complémentaire de  $J$  dans  $[1, n]$ ; alors  $\mathbf{R}^n = E_J \oplus E_{J^*}$ .

6.4.1 PROPOSITION. — Soit  $H$  une variété de dimension  $p$  de  $\mathbf{R}^n$ ,  $x_0 \in H$ . Alors on peut trouver un voisinage  $U(x_0)$  de  $x_0$  dans  $\mathbf{R}^n$ , une partie  $J$  de  $p$  éléments et une application  $g$  de  $\Omega = U \cap E_J$  dans  $E_{J^*}$ , telle que

$$H \cap U(x_0) = \{x = z + z^* \mid z \in \Omega, z^* = g(z)\}$$

PREUVE. — On sait que  $T_{x_0}(H)$  s'identifie à un sous-espace de dimension  $p$  de  $\mathbf{R}^n$ . Choisissons une base  $a_1, \dots, a_p$  de  $T_{x_0}(H)$ . La matrice de leurs composantes est une matrice à  $p$  colonnes et  $n$  lignes  $a_r^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq r \leq p$ ; cette matrice est de rang  $p$ . Par suite, on peut extraire de cette matrice un déterminant caractéristique d'ordre  $p$  non nul. Notons par  $J$  l'ensemble des lignes utilisé pour construire le déterminant caractéristique. Considérons la projection  $p_E$  de  $\mathbf{R}^n$  sur  $E_J$ . Alors

6.4.2 La restriction de  $p_E$  à  $T_{x_0}(H)$  est un isomorphisme de  $T_{x_0}(H)$  sur  $E_J$ .

Munissons  $H$  de sa structure de variété induite et considérons l'injection canonique

$$i : H \rightarrow \mathbf{R}^n$$

et posons

$$f = p_E \circ i$$

Alors  $f$  réalise un difféomorphisme local d'un voisinage  $U_1(x_0)$  de  $x_0$  dans  $H$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $E_J$ . En effet utilisant 5.1.6, il suffit de montrer que  $f'(x_0)$  est *inversible*. Or ceci résulte de 6.4.2.

Notons par  $\tilde{f}$  la restriction de  $f$  à  $U_1(x_0)$  et par  $k$  le difféomorphisme inverse de  $\tilde{f}$  de  $\Omega$  sur  $U_1(x_0)$ .

Alors on posera

$$g = p_{E, * } \circ i \circ k$$

et on obtient la proposition.

### 6.4.3 Forme explicite de l'équation d'une sous-variété

Nous gardons les notations de 6.4.1. En renumérotant les vecteurs de base nous pouvons nous ramener au cas où  $J$  est l'ensemble des  $p$ -premiers entiers. Alors  $g$  sera donnée par  $(n - p)$  fonctions  $g_1 \dots g_{n-p}$  des  $p$  variables  $x^1 \dots x^p$ . On a ainsi

$$H \cap U(x_0) = \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^{p+s} = g_s(x^1, \dots, x^p) \text{ où } s \text{ varie de } 1 \text{ à } n - p\}.$$

On appellera

$$x^{p+s} = g_s(x^1, \dots, x^p) \quad 1 \leq s \leq n - p$$

les *équations numériques* de la variété  $H$  au voisinage de  $x_0$ .

## 6.5 APPLICATION. THÉORIE DES FONCTIONS INDÉPENDANTES

Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $f_1, \dots, f_m$  un système de  $m$  fonctions de classe  $C^1$  définies sur  $V$ .

Nous nous posons le problème de chercher *toutes les relations* existant entre ces fonctions (par exemple  $f_3 = f_1^2 + f_2^2 + f_4 = e^{f_5}$  etc...)

Nous associons aux fonctions  $f_i$  une application  $F$  de  $V$  dans  $\mathbf{R}^m$  définie en associant à tout  $x \in V$  le point  $F(x) = (f_1(x) \dots f_m(x))$ . Alors  $F$  est de classe  $C^1$ .

Nous appellerons *rang du système* de fonctions  $f_1, \dots, f_m$  en un point de  $V$  le rang de l'application  $F$  en ce point.

On a alors

**THÉORÈME.** — *Les notations étant celles ci-dessus, supposons que le rang de  $f_1, \dots, f_m$  soit constant et égal à  $q$  sur un voisinage  $U(x_0)$ , alors on peut trouver un voisinage  $U_1(x_0)$ , un nouveau numérotage des  $f_i$ , et  $m - q$  applications d'ouverts de  $\mathbf{R}^q$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $\Phi_1 \dots \Phi_{m-q}$ , telles que l'on ait*

$$6.5.1 \quad f_{q+s}(x) = \Phi_s(f_1(x), \dots, f_q(x)), \quad 1 \leq s \leq m - q \quad x \in U_1(x_0)$$

(Ceci signifie l'existence de  $m - q$  relations entre les  $f_{q+s}$  et les  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq q$ .)

6.5.2 *L'application  $\tilde{F} : V \rightarrow \mathbf{R}^q$  définie par  $\tilde{F}(x) = (f_1(x) \dots f_q(x))$ , a pour image une partie ouverte de  $\mathbf{R}^q$ . (Ceci signifie qu'il n'existe pas de relations entre les  $f_1, \dots, f_q$ ).*

**PREUVE.** — Comme le rang de  $\tilde{F}$  est constant on peut d'après 6.3.2 trouver un voisinage  $U_1(x_0)$  tel que  $\tilde{F}(U_1(x_0)) = H$  soit une sous-variété de dimension  $q$

de  $\mathbf{R}^m$ . Appliquons 6.4.3, on peut trouver  $\Phi_1 \dots \Phi_{n-q}$  tel que H soit défini par le système de  $n - q$  équations numériques

$$\xi^{q+s} = \Phi_s(\xi^1, \dots, \xi^q) \quad 1 \leq s \leq m - q$$

(où  $\xi = (\xi^1 \dots \xi^m)$  est le point générique de  $\mathbf{R}^m$ ).

Comme  $\xi \in H$  signifie que  $\xi = (f_1(x) \dots f_m(x))$ ,  $x \in U_1(x_0)$  on a ainsi démontré 6.5.1.

En dérivant la relation 6.5.1 on exprime les  $f'_{q+s}(x)$  à l'aide de combinaison linéaire des  $f'_k(x)$  où  $1 \leq k \leq q$ . Par suite l'hypothèse que le rang de  $\tilde{F}$  est égal à  $q$  entraîne que

$$\{f'_k(x)\}_{k=1}^q \text{ sont linéairement indépendantes.}$$

Ceci se traduit dans le fait que l'application  $\tilde{F}$  est de rang  $q$ .

Utilisant 6.3.2 on obtient que pour  $U_1(x_0)$  assez petit  $\tilde{F}(U_1(x_0))$  est une sous-variété de dimension  $q$  de  $\mathbf{R}^q$ , c'est-à-dire un ouvert de  $\mathbf{R}^q$ , et ainsi 6.5.2 est démontré.

6.5.3 *Remarque.* Supposons qu'il existe une relation

$$\Phi(f_1, \dots, f_m) = 0$$

alors en dérivant cette identité on aura

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \cdot f'_i(x) = 0$$

(C'est-à-dire que si les  $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i}$  ne sont pas tous nuls les  $f'_i(x)$  sont linéairement dépendants. Ainsi l'abaissement du rang de  $(f_1, \dots, f_m)$  est une condition nécessaire et suffisante de l'existence de relations entre les  $f_1, \dots, f_m$ .)

## 7 Fibré tangent

### 7.1 LE FIBRÉ TANGENT DU POINT DE VUE ALGÈBRE

*Notations.* Soit  $V$  une variété de dimension  $n$  et de classe  $C^1$  (\*), considérons l'ensemble de *tous les vecteurs tangents* à  $V$ . Nous noterons par  $T(V)$  cet ensemble. On peut écrire  $T(V)$  comme l'ensemble somme des ensembles  $T_x(V)$

$$T(V) = \sum_{x \in V} T_x(V)$$

(\*) Toutes les conclusions de ce paragraphe seront bien entendues valables pour des variétés de classe  $C^k$ , avec  $k \geq 1$ .

Par un abus de langage commode nous identifierons chaque  $T_x(V)$  à une partie de  $T(V)$ . Alors on a

$$T_x(V) \cap T_{x'}(V) = \emptyset \quad \text{si} \quad x \neq x' .$$

les  $T_x(V)$  forment ainsi une partition de  $T(V)$ . On associe à cette partition une application

$$p : T(V) \rightarrow V,$$

qui à chaque  $z_0 \in T(V)$  associe l'élément  $x_0$  unique tel que  $z_0 \in T_{x_0}(V)$ .

Le point  $p(z)$  n'est rien d'autre que « le point de  $V$  où  $z$  est tangent ».

On appellera  $T(V)$  le *fibré tangent* à  $V$ , on appellera  $V$  la *base du fibré*;  $p$  sera appelé la *projection* du fibré sur sa base.

La projection est une application surjective. On appelle  $p^{-1}(x_0)$  la fibre au-dessus de  $x_0$ . *Toutes les fibres sont des espaces vectoriels de même dimension.*

7.1.2 *Exemple* : Soit  $O$  un ouvert d'un espace vectoriel  $E$ ; alors  $T(O) = O \times E$ . En effet, d'après 4.1.5,  $T_x(O) = E$ ; d'où  $\sum_{x \in O} T_x(O) = \sum_{x \in O} E = O \times E$ . La projection  $p$  de  $T(O)$  sur  $O$  est simplement la projection sur le premier facteur du produit cartésien.

### 7.1.3 *Fonction dérivée*

Soient  $V, \hat{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $f \in C^1(V, \hat{V})$ . Alors  $f$  induit une application naturelle du fibré tangent de  $V$  sur le fibré tangent de  $\hat{V}$ , de la manière suivante : on pose

$$f' \cdot z = f'(p(z)) \cdot z$$

DÉFINITION. — L'application  $z \longmapsto f' \cdot z$  de  $T(V)$  dans  $T(\hat{V})$  sera appelée *fonction dérivée* de  $f$  et sera notée par  $f'$ .

### 7.1.4 *Morphismes d'espaces fibrés*

Les notations étant celles du paragraphe précédent, désignons par  $p$  et  $\tilde{p}$  les projections de  $T(V)$  et  $T(\hat{V})$  sur leur base. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{f'} & T(\hat{V}) \\ p \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ V & \xrightarrow{f} & \hat{V} \end{array}$$

(c'est-à-dire que  $\tilde{p} \circ f' = f \circ p$ ).

La restriction de  $f'$  à une fibre de  $T(V)$  est une application linéaire de cette fibre dans la fibre correspondante de  $T(\hat{V})$ .

PREUVE. — On a  $f'(p(z)) \in \mathcal{L}(T_{p(z)}(\mathbf{V}); T_{f(p(z))}(\hat{\mathbf{V}}))$ . Par suite

$$f'(p(z)) \cdot z \in T_{f(p(z))}(\hat{\mathbf{V}});$$

c'est-à-dire  $\tilde{p}(f'(p(z)) \cdot z) = f(p(z))$ .

C.Q.F.D.

### 7.1.5 Functorialité

Soient  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$  trois variétés de classe  $C^1$ ,  $f \in C^1(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ ,  $g \in C^1(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ . Soit  $h = g \circ f$ . Alors :

$$h' = g' \circ f'.$$

PREUVE. — Elle résulte immédiatement du théorème des fonctions composées. En effet si  $z_1 \in T(\mathbf{V}_1)$ , on a  $h' \cdot z_1 = h'(p(z_1)) \cdot z_1$ , (par abus de langage, nous notons par la même lettre  $p$  les projections des fibrés  $T(\mathbf{V}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ). D'après le théorème des fonctions composées (cf. 4.2.5) on a :

$$h'(p(z_1)) = g'(x_2) \circ f'(p(z_1)) \quad \text{où} \quad x_2 = f(p(z_1));$$

d'où

$$h' \cdot z_1 = g'(x_2) \cdot f'(p(z_1)) \cdot z_1$$

Or

$$f'(p(z_1)) \cdot z_1 = f' \cdot z_1$$

D'autre part, d'après 7.1.4,  $p(f'(p(z_1)) \cdot z_1) = f(p(z_1)) = x_2$ ; d'où

$$g'(x_2) \cdot [f' \cdot z_1] = g' \cdot (f' \cdot z_1)$$

c'est-à-dire que

$$h' \cdot z_1 = g' \cdot (f' \cdot z_1)$$

C.Q.F.D.

*Remarque.* Si 7.1.5 n'est autre que le théorème des fonctions composées, il est toutefois beaucoup plus commode à écrire. En effet les points où il était nécessaire de calculer les *applications dérivées* dans 4.2.5 disparaissent dans la formulation en terme de *fonctions dérivées* donnée en 7.1.5.

7.1.6 COROLLAIRE. — Si  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{V}$  sur  $\hat{\mathbf{V}}$ , alors  $f'$  est une bijection de  $T(\mathbf{V})$  sur  $T(\hat{\mathbf{V}})$ .

PREUVE. — Soit  $h$  le difféomorphisme réciproque de  $f$ . Alors, d'après 7.1.5 :

$$\begin{aligned} h' \circ f' &= \text{identité sur } T(\mathbf{V}) \\ f' \circ h' &= \text{identité sur } T(\hat{\mathbf{V}}) \end{aligned}$$

### 7.1.7 Principe de localisation

Soient  $\mathbf{V}$  une variété de classe  $C^1$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{V}$ ,  $i$  l'injection canonique de  $\Omega$  dans  $\mathbf{V}$ . Notons par  $p$  la projection de  $T(\mathbf{V})$  sur  $\mathbf{V}$ . Alors  $i'$  définit une bijection de  $T(\Omega)$  sur  $p^{-1}(\Omega)$ .

## 7.2 STRUCTURE DE VARIÉTÉ SUR LE FIBRÉ TANGENT

Jusqu'à présent  $T(V)$  n'est qu'un ensemble abstrait; le théorème suivant permet de le munir d'une structure topologique.

**7.2.1 THÉORÈME.** — Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ , de dimension  $n$ . ( $k \geq 1$ ) notons par  $T(V)$  son fibré tangent, alors il existe une structure naturelle de variété de classe  $C^{k-1}$  de dimension  $2n$  sur  $T(V)$ .

PREUVE

7.2.2 Construction d'un atlas sur  $T(V)$ 

Soit  $\alpha$  un atlas de classe  $C^k$  sur  $V$ . Nous allons construire à partir de  $\alpha$  un atlas  $\hat{\alpha}$  sur  $T(V)$ .

Soit  $\varphi_\alpha \in \alpha$ ,  $U_\alpha$  le domaine de définition de  $\varphi_\alpha$ , et  $O_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ . Posons

$$\hat{U}_\alpha = p^{-1}(U_\alpha)$$

Alors les  $\hat{U}_\alpha$  constituent un recouvrement de  $T(V)$  et, d'après 7.1.7, nous identifierons  $\hat{U}_\alpha$  avec  $T(U_\alpha)$ .

Nous allons définir une application

$$\hat{\varphi}_\alpha : \hat{U}_\alpha \rightarrow T(O_\alpha)$$

par la formule

$$\hat{\varphi}_\alpha(z) = \varphi'_\alpha \cdot z$$

D'autre part, d'après 7.1.2, l'image  $\hat{O}_\alpha$  de  $\hat{\varphi}_\alpha$  est  $\hat{O}_\alpha = T(O_\alpha) = O_\alpha \times E_\alpha$ , qui est bien un ouvert de l'espace vectoriel  $E_\alpha \times E_\alpha$ . L'application de changement de carte est définie sur :

$$\hat{O}_{\alpha, \beta} = \hat{\varphi}_\alpha(\hat{U}_\alpha \cap \hat{U}_\beta) = \varphi'_\alpha \cdot T(U_\alpha \cap U_\beta) = O_{\beta\varphi_\alpha} \cap E_\alpha.$$

ainsi  $\hat{\alpha}$  satisfait bien les axiomes d'un atlas 1.1.1 et 1.1.2.

7.2.3  $\hat{\alpha}$  est un atlas de classe  $C^k$ 

L'application de changement de carte s'écrit :

$$\hat{f}_{\beta, \alpha} = \hat{\varphi}_\beta \circ \hat{\varphi}_\alpha^{-1}.$$

Utilisons 7.1.5

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi'_\beta \circ (\varphi_\alpha^{-1})' = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})' = f'_{\beta, \alpha}$$

où  $f_{\beta, \alpha}$  est l'application de changement de carte correspondante de  $\alpha$ . Le fait que  $f'_{\beta, \alpha}$  est de classe  $C^{k-1}$  résultera du lemme :

**7.2.4 LEMME.** — Soient  $O$  et  $\hat{O}$  des ouverts de deux espaces vectoriels  $E$  et  $\hat{E}$ . Soit  $f \in C^k(O, \hat{O})$  ( $k \geq 1$ ). Alors  $f' \in C^{k-1}(O \times E, O \times \hat{E})$ .

PREUVE. — Soit  $(\xi, \eta) \in O \times E$  et soit  $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$  le point correspondant par  $f'$ , c'est-à-dire :  $\hat{\xi} = f(\xi)$ ,  $\hat{\eta} = f'(\xi) \cdot \eta$ . La première de ces relations dépend de classe  $C^k$  de la variable  $\xi$ , par hypothèse. Explicitons la seconde relation en prenant les composantes de  $\eta$  et  $\hat{\eta}$  dans des bases choisies dans  $E$  et  $\hat{E}$  respectivement. Elle s'écrit alors :

$$\hat{\eta}^i = \sum_s \frac{\partial f^i(\xi)}{\partial \xi^s} \eta^s;$$

les coefficients des  $\eta^s$  dépendent ainsi de classe  $C^{k-1}$  de la variable  $\xi$ , d'où  $\hat{\eta}^i$  dépend de classe  $C^{k-1}$  de l'ensemble des variables  $(\xi, \eta)$ . C.Q.F.D.

### 7.2.5 $\hat{\alpha}$ est un atlas séparé

Nous devons montrer que  $T(V)$ , muni de la topologie définie par  $\hat{\alpha}$  est un espace topologique séparé. Remarquons d'abord que pour cette topologie, la projection  $p$  est continue (il suffit, pour le vérifier, de lire  $p$  au voisinage de  $z_0 \in T(V)$  dans le couple de cartes  $\hat{\phi}_\alpha, \phi_\alpha$ , où  $\phi_\alpha$  est choisie de sorte que son domaine de définition contienne  $z_0$ ). Soient alors  $z_1, z_2 \in T(V)$ ,  $z_1 \neq z_2$ ; ou bien  $p(z_1) \neq p(z_2)$ ; la topologie sur  $V$  étant séparée, soient  $\Omega_1, \Omega_2$  deux ouverts disjoints de  $V$  contenant  $z_1$  et  $z_2$ . Alors  $p^{-1}(\Omega_1)$  et  $p^{-1}(\Omega_2)$  constitueront deux ouverts disjoints de  $T(V)$  contenant  $z_1$  et  $z_2$ . Dans le cas où  $p(z_1) = p(z_2)$  soit  $\phi_\alpha$  une carte de  $V$  dont le domaine de définition contient  $p(z_1)$ . Alors  $\hat{\phi}_\alpha z_i = \zeta_i$ . Soient  $\Delta_1, \Delta_2$  deux voisinages ouverts disjoints de  $\zeta_1, \zeta_2$ . Alors  $\hat{\phi}_\alpha^{-1}(\Delta_i) = \hat{\Delta}_i$  sont deux ouverts (cf. 1.2.2) disjoints.

### 7.2.6 Structure de variété sur $T(V)$

Nous avons, dans ce qui précède, associé à un atlas  $\alpha$  de classe  $C^k$  sur  $V$  un atlas  $\hat{\alpha}$  de classe  $C^{k-1}$ , séparé, sur  $T(V)$ .

Montrons pour terminer que deux atlas  $C^k$ -équivalents  $\alpha$  et  $\alpha_1$  sur  $V$  induisent deux atlas  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\alpha}_1$   $C^{k-1}$  équivalents sur  $T(V)$ . En effet  $\alpha$  et  $\alpha_1$   $C^k$ -équivalents signifie que

$$\alpha \cup \alpha_1 \text{ est de classe } C^k.$$

Mais comme

$$\widehat{\alpha \cup \alpha_1} = \hat{\alpha} \cup \hat{\alpha}_1$$

il en résulte que  $\hat{\alpha}$  est  $C^{k-1}$  équivalent à  $\hat{\alpha}_1$ .

Ainsi à la structure de variété de classe  $C^k$  sur  $V$  est associée une structure de variété de classe  $C^{k-1}$  sur  $T(V)$ .

7.2.7 PROPOSITION. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ); alors la projection canonique de  $T(V)$  sur  $V$  est de classe  $C^{k-1}$ .

PREUVE. — Il suffit de lire  $p$  dans le couple de cartes  $\hat{\phi}_\alpha, \varphi_\alpha$ , où  $\varphi_\alpha$  parcourt un atlas de  $V$  et d'appliquer 3.3.10.

7.2.8 PROPOSITION. — Soient  $V, V_1$  deux variétés de classe  $C^k (k \geq 1)$ ; si  $f \in C^k(V, V_1)$ , alors  $f' \in C^{k-1}(T(V), T(V_1))$ .

PREUVE. — Soient  $\Phi_\alpha, \Psi_\beta$  deux cartes de  $V$  et  $V_1$ ; lisons  $f'$  dans le couple  $\hat{\Phi}_\alpha, \hat{\Psi}_\beta$  :

$$\hat{\Psi}_\beta \circ f' \circ \hat{\Phi}_\alpha^{-1} = \Psi'_\beta \circ f' \circ (\Phi_\alpha^{-1})'$$

et d'après 7.1.5,

$$= (\Psi'_\beta \circ f \circ \Phi_\alpha^{-1})' = f'_{\beta, \alpha}$$

Appliquons le lemme 7.2.4; alors  $f'_{\beta, \alpha}$  est de classe  $C^{k-1}$ , ce qui démontre la proposition.

### 7.3 DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

7.3.1 DÉFINITION. — Soient  $V, W$  deux variétés de classe  $C^k (k \geq 2)$ . Posons :

$$V^1 = T(V), \quad W^1 = T(W)$$

Alors la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ , où  $f \in C^k(V, W)$ , appartient à  $C^{k-1}(V^1, W^1)$ . Notons par  $\Phi$  cette application. Par suite puisque  $k \geq 2$ , on peut définir la fonction dérivée  $\Phi'$  et  $\Phi'$  définit une application de

$$T(V^1) \rightarrow T(W^1)$$

On appellera  $T(V^1) = T(T(V))$  le *fibré bitangent* à  $V$ . On définit la dérivée seconde  $f''$  de  $f$  comme l'application du fibré bitangent à  $V$  dans le fibré bitangent à  $W$  défini par  $\Phi'$ .

Ensuite on remarque que

$$f'' : T(V^1) \rightarrow T(W^1)$$

Par suite on dérive et on définit, si  $k \geq 3$ ,

$$f''' : T(V^2) \rightarrow T(W^2)$$

où  $V^2$  est le fibré bitangent à  $V$ .

D'une manière générale on définit le fibré  $p$ -tangent à  $V$  par la formule de récurrence;

$$V^p = T(V^{p-1})$$

## 7.3.2 Conditions de compatibilité

La suite des fonctions dérivées satisfait aux relations suivantes.

Remarquons qu'il existe une projection  $p_q : V^q \rightarrow V^{q-1}$ , puisque  $V^q = T(V^{q-1})$ . Soit  $f \in C^k(V, W)$ ; on a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} V^k & \xrightarrow{P_k} & V^{k-1} & \dots & V^1 & \xrightarrow{P_1} & V \\ \downarrow f^{(k)} & & \downarrow f^{(k-1)} & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ W^k & \xrightarrow{P_k} & W^{k-1} & \dots & W^1 & \xrightarrow{P_1} & W \end{array}$$

Chaque carré de ce diagramme n'est autre que le diagramme tracé en 7.1.4.

7.4 CHAMPS DE VECTEURS DE CLASSE  $C^k$ 

7.4.1 DÉFINITION. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ . Nous appellerons *champ de vecteurs* sur  $V$  une correspondance qui à tout  $x$  de  $V$  associe un élément de  $T_x(V)$ . Si  $A$  est un champ de vecteur on note par  $A_x$  la valeur du champ en  $x$ , c'est-à-dire l'élément de  $T_x(V)$  correspondant à  $x$ .

On convient de noter par  $\Gamma T(V)$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $V$ . Il est évident que  $\Gamma T(V)$  est muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ . En effet si  $A$  et  $B$  sont deux champs de vecteur sur  $V$  on leur associe le champ  $C$  défini par

$$C_x = A_x + B_x \quad \text{pour tout } x \in V.$$

7.4.2 Soit  $\mathcal{A}_b(V)$  l'anneau des fonctions définies sur  $V$ , alors  $\Gamma T(V)$  a une structure naturelle de

$$\mathcal{A}_b(V)\text{-module.}$$

En effet soit  $g \in \mathcal{A}_b(V)$ ,  $A \in \Gamma T(V)$ , nous définissons  $gA \in \Gamma T(V)$  par la formule

$$(gA)_x = g(x)A_x.$$

## 7.4.3 Champs de vecteurs et fibrés tangents

Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ , soit  $A \in \Gamma T(V)$ . Alors  $A$  définit une application

$$s : V \rightarrow T(V)$$

en effet pour tout  $x \in V$  posons

$$s(x) = A_x$$

Évidemment  $s$  vérifie

$$7.4.4 \quad p \circ s = \text{identité sur } V.$$

On appellera *section* de  $T(V)$  toute application satisfaisant 7.4.4. Inversement toute section de  $T(V)$  définit un champ de vecteurs sur  $V$ .

7.4.5 DÉFINITION. — Soient  $V$  une variété de classe  $C^k$  et  $A \in \Gamma T(V)$ ; on dira que  $A$  est de classe  $C^l$  ( $0 \leq l \leq k - 1$ ) si, notant par  $s$  la section de  $T(V)$  associée à  $A$ , on a :  $s \in C^l(V, T(V))$ .

*Image directe d'un champ de vecteur par un difféomorphisme*

7.4.6 DÉFINITION. — Soient  $V, \hat{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $h$  un  $C^1$ -difféomorphisme de  $V$  sur  $\hat{V}$  et  $s$  une section de  $T(V)$ . Posons :

$$h_*s = \hat{s} \in \Gamma T(\hat{V})$$

où

$$7.4.6 \quad \hat{s} = h' \circ s \circ h^{-1}$$

Évidemment  $h_*$  est une application linéaire de  $\Gamma T(V)$  dans  $\Gamma T(\hat{V})$ . Si nous notons  $s$  comme un champ de vecteurs  $A$ , alors 7.4.6 s'écrit :

$$7.4.7 \quad \hat{A}_{\hat{x}} = h'(x) \cdot A_{h^{-1}(\hat{x})}$$

Cette formule est moins ramassée que 7.4.6, ce qui est un exemple qui montre l'avantage de la notion de section.

7.4.8 *Transitivité de l'image directe*

Soient  $V, V_1, V_2$  trois variétés de classe  $C^1$ ,  $h : V \rightarrow V_1$  et  $g : V_1 \rightarrow V_2$  deux difféomorphismes. Posons  $q = g \circ h$ . Alors on a :

$$q_* = g_* \circ h_*$$

PREUVE. — Soit  $s \in \Gamma T(V)$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} h_*s &= h' \circ s \circ h^{-1} = u \\ g_*u &= g' \circ u \circ g^{-1} = g' \circ h' \circ s \circ h^{-1} \circ g^{-1} \\ \text{et en utilisant 7.1.5} \quad &= (g \circ h)' \circ s \circ (g \circ h)^{-1} \\ &= q' \circ s \circ q^{-1} = q_*s \end{aligned} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

7.4.9 COROLLAIRE. —  $h_*$  définit un isomorphisme de  $\Gamma T(V)$  sur  $\Gamma T(V_1)$ .

7.4.10 *Champs de vecteurs tangents*

Soit  $H$  une sous-variété d'une variété  $V$ . Soit  $A$  un champ de vecteur sur  $V$ ,  $A \in \Gamma T(V)$ , on dira que  $A$  est tangent à  $H$  si :

$$A_x \in T_x(H) \quad \text{pour tout} \quad x \in H$$

Alors, la correspondance qui à tout  $x \in H$  associe  $A_x \in T_x(H)$  définit un champ de vecteurs  $B$  sur  $H$ ,  $B \in \Gamma(T(H))$ , appelé la restriction du champ  $A$  à la sous variété  $H$ .

Par exemple, si  $H$  est un ouvert de  $V$ , alors  $T_x(H) = T_x(V)$  et on pourra toujours considérer la restriction d'un champ de vecteurs à  $H$ .

7.4.11 *Notation.* Pour abréger l'écriture on convient de noter  $\Gamma T(V)$  par  $\bigotimes^1 V$ .

## 7.5 CHAMPS DE TENSEURS COVARIANTS. FORMES DIFFÉRENTIELLES

Nous pouvons définir, à partir du fibré  $T(V)$  des espaces fibrés qui s'en déduisent par les opérations de l'algèbre élémentaire et définir les champs de tenseurs, comme les champs de vecteurs c'est-à-dire comme *sections* de ces nouveaux espaces fibrés.

Pour abréger l'exposé, nous choisirons un point de vue moins systématique qui nous suffira dans la suite.

Étant donnés deux espaces vectoriels sur  $\mathbf{R}$ , soient  $F$  et  $E$ , nous noterons par :

- $\mathcal{L}(F; E)$  l'espace des applications linéaires de  $F$  dans  $E$ ,
- $\mathcal{L}_p(F; E)$  l'espace des applications  $p$ -linéaires de  $\underbrace{F \times F \times \dots \times F}_{p\text{-facteurs}}$  dans  $E$ ,
- $\mathcal{L}_{n,s}(F; E)$  l'espace des applications  $p$ -linéaires *symétriques*,
- $\mathcal{L}_{p,a}(F; E)$  l'espace des applications  $p$ -linéaires *antisymétriques*.

On appellera  $\mathcal{L}_{p,a}(F; \mathbf{R})$ , l'espace des  $p$ -formes extérieures sur  $F$ ; ces espaces sont munis d'une structure d'algèbre par le produit extérieur des formes.

### 7.5.1 Définition des champs de tenseurs covariants

Soient  $V$  une variété de classe  $C^k (k \geq 1)$ ,  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, on appelle *champ de tenseurs covariant de degré  $p$  à valeurs dans  $E$* , la donnée pour toute  $x \in V$  d'une application :

$$g_x \in \mathcal{L}_p(T_x(V); E)$$

On note par

$$g_x(z_1, \dots, z_p)$$

la valeur de  $g_x$  sur  $z_1, z_2, \dots, z_p \in T_x(V)$ . On appelle  $g_x$  la valeur du champ de tenseurs  $g$  au point  $x$ .

On note par :

$$\Gamma \mathcal{L}_p(T(V); E)$$

l'ensemble des champs de tenseurs covariants de degré  $p$  à valeurs dans  $E$ .

### 7.5.2 Accouplement d'un champ de tenseurs covariant avec des champs de vecteurs

Soient  $V$  une variété de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $g \in \Gamma \mathcal{L}_p(T(V); E)$ ,  $A^1, \dots, A^p \in \bigotimes^1 V$ . Nous définissons une application  $f$  de  $V$  dans  $E$  en posant :

$$f(x) = g_x(A_x^1, A_x^2, \dots, A_x^p)$$

### 7.5.3 Champs de tenseurs de classe $C^{k-1}$

On dit que  $g$  est de classe  $C^{k-1}$  si, quels que soient  $A^1, \dots, A^p \in \bigotimes^1 V$ , de classe  $C^{k-1}$ , alors l'accouplement défini en 7.5.2 est une application de classe  $C^{k-1}$  de  $V$  dans  $E$ .

Notant par  $\mathfrak{A}(V)$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^{k-1}$ , alors

7.5.4  $\Gamma\mathcal{L}_p(T(V); E)$  est un  $\mathfrak{A}(V)$ -module.

### 7.5.5 Formes différentielles

On appelle *forme différentielle de degré  $p$  à valeurs dans  $E$* , un champ de tenseurs covariant de degré  $p$ , antisymétrique.

On note par  $\Lambda^p(V; E)$  l'ensemble de ces formes différentielles.

Remarquons que si  $p > \text{dimension } V$ , alors  $\Lambda^p(V; E) = 0$ .

Les formes différentielles de degré  $p$  à valeurs dans  $E$  forment encore un  $\mathfrak{A}(V)$ -module.

Soit

$$\omega \in \Lambda^p(V; E), \quad A^1, \dots, A^p \in \bigotimes^1 V$$

on convient de noter l'accouplement

$$\omega_x(A_x^1, \dots, A_x^p)$$

également par :

$$\langle A_x^1 \wedge A_x^2 \wedge \dots \wedge A_x^p, \omega_x \rangle$$

ou encore :

$$\langle A^1 \wedge A^2 \wedge \dots \wedge A^p, \omega \rangle_x$$

On note l'application de  $V$  dans  $E$  définie par cet accouplement par :

$$\langle A^1 \wedge \dots \wedge A^p, \omega \rangle$$

Si  $E = \mathbf{R}$  et si  $\omega \in \Lambda^p(V; \mathbf{R})$  alors pour tout  $x \in V$ ,  $\omega_x$  est une  $p$ -forme extérieure sur  $T_x(V)$ . On convient de noter  $\Lambda^p(V; \mathbf{R})$  par  $\Lambda^p(V^*)$  ( $p \geq 1$ ) et de poser  $\Lambda^0(V^*) = \mathfrak{A}(V)$ .

On note

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(V^*)$$

où  $n$  est la dimension de  $V$ .

On a alors :

### 7.5.6 $\Lambda(V^*)$ est une algèbre graduée.

Soient  $p$  et  $q > 0$ . On définit le produit entre  $\Lambda^p(V^*)$  et  $\Lambda^q(V^*)$  par le produit en tout point  $x$  de  $V$  des  $p$ -formes et des  $q$ -formes extérieures sur  $T_x(V)$ . Si  $p = 0$  ou  $q = 0$ , le produit est défini par la structure de  $\mathfrak{A}(V)$ -module 7.5.4.

## 7.5.7 Champs de covecteurs

On note également  $\Lambda^1(\mathbf{V}^*)$  par  $\bigotimes_1 \mathbf{V}$ . On appelle un élément  $\omega$  de  $\bigotimes_1 \mathbf{V}$  un *champ de covecteurs* sur  $\mathbf{V}$ .

La donnée d'un champ de covecteurs est la donnée en tout  $x \in \mathbf{V}$  d'une forme linéaire sur  $T_x(\mathbf{V})$ , c'est-à-dire d'un élément de  $[T_x(\mathbf{V})]^*$ .

L'accouplement d'un champ de covecteur et d'un champ de vecteurs définit une fonction sur  $\mathbf{V}$ .

7.5.8 *Remarque.* En choisissant une base  $e_1, e_2, \dots, e_q$  de  $\mathbf{E}$ , tout  $\omega \in \Lambda^p(\mathbf{V}; \mathbf{E})$  s'écrit

$$\omega = \sum e_k \omega^k \quad \text{où} \quad \omega^k \in \Lambda^p(\mathbf{V}^*)$$

ce qui permet de ramener l'étude de  $\Lambda^p(\mathbf{V}; \mathbf{E})$  à celle de  $\Lambda^p(\mathbf{V}^*)$ , cette méthode n'étant pas intrinsèque puisqu'elle suppose le choix d'une base.

## 7.6 IMAGE RÉCIPROQUE D'UN CHAMP COVARIANT

Soient  $\mathbf{V}, \mathbf{W}$  deux variétés de classe  $C^k (k \geq 1)$   $\mathbf{E}$  un espace vectoriel,

$$f \in C^k(\mathbf{V}, \mathbf{W})$$

Alors on associe à  $f$  une application linéaire appelée *image réciproque*

$$f^* : \Gamma \mathcal{L}_p(\mathbf{T}(\mathbf{W}); \mathbf{E}) \rightarrow \Gamma \mathcal{L}_p(\mathbf{T}(\mathbf{V}); \mathbf{E})$$

définie, si  $g \in \Gamma \mathcal{L}_p(\mathbf{T}(\mathbf{V}); \mathbf{E})$ , en posant

7.6.1

|   |
|---|
| $\tilde{g} = f^* g$   |
| <p>où</p>   |
| $\tilde{g}_x(z_1, \dots, z_p) = g_y[f'(x) \cdot z_1, \dots, f'(x) \cdot z_p]$ |
| <p>avec</p>   |
| $y = f(x)$  |

*Remarques importantes.*  $f^*$  va en sens inverse de  $f$ :  $f$  envoie  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{W}$ , alors que  $f^*$  envoie un champ de tenseurs covariants sur  $\mathbf{W}$  en un champ de tenseurs covariants sur  $\mathbf{V}$ .

De plus, l'image réciproque est définie pour une application  $f$  générale: on n'assujettit pas  $f$  à être un difféomorphisme comme pour l'image directe en 7.4.6. Cette facilité de maniement de l'image réciproque sera fondamentale dans la suite.

7.6.2  $f^*$  est une application linéaire compatible avec les structures de  $\mathfrak{A}$ -modules

c'est-à-dire que si  $h \in \mathfrak{A}(W)$  on a :

$$f^*(hg) = (f^*h) \cdot (f^*g)$$

où  $f^*h$  a été définie en 3.5.2.

7.6.3 L'image réciproque par une application de classe  $C^k$  d'un champ de tenseurs covariants de classe  $C^{k-1}$  est de classe  $C^{k-1}$

7.6.4 Composition des applications

Soient  $V, W, Z$  trois variétés de classe  $C^k$ ,

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{k} Z$$

des applications de classe  $C^k$ , alors

$$(k \circ f)^* = f^* \circ k^*$$

PREUVE. — Posons  $l = k \circ f$  et soit  $g \in \Gamma \mathcal{Q}_p(T(Z); E)$ . Posons :

$$g^1 = k^*g, \quad g^2 = f^*g^1, \quad g^3 = l^*g$$

Donnons-nous  $x \in V$  et posons

$$x^1 = f(x), \quad x^2 = k(x^1)$$

Donnons-nous  $z_j \in T_{x^2}(W), j = 1, \dots, p$  et posons

$$M = g_{x^2}^3(z_1, \dots, z_p).$$

D'après 7.6.1, on a :

$$M = g_x(l'(x) \cdot z_1^1, \dots, l'(x) \cdot z_p^1)$$

D'après le théorème des fonctions composées 4.2.5 on a :

$$l'(x) \cdot z_j = k'(x^1) \cdot z_j^1 \quad \text{où} \quad z_j^1 = f'(x) \cdot z_j$$

d'où

$$M = g_x(k'(x^1) \cdot z_1^1, \dots, k'(x^1) \cdot z_p^1)$$

Utilisons 7.6.1 on obtient :

$$= g_{x^1}^1(z_1^1, \dots, z_p^1)$$

Remplaçons les  $z_j^1$  par  $f'(x) \cdot z_j$ , on obtient en utilisant 7.6.1

$$M = g_{x^2}^2(z_1, \dots, z_p)$$

D'où  $g^2 = g^3$  et 7.6.4 est établi.

7.6.5 *Restriction d'un champ covariant à une sous-variété*

Soient  $W$  une sous-variété de  $V$ ,  $i$  l'injection canonique de  $W$  dans  $V$  (cf. 6.2) alors l'image par  $i^*$  d'un champ covariant  $g$  sur  $V$  est un champ covariant  $\tilde{g}$  sur  $W$  appelé *restriction à  $W$  de  $g$* . On voit immédiatement que, pour  $x \in W$ ,  $\tilde{g}_x$  est la restriction à  $T_x(W)$  de  $g_x$ .

7.6.6 *Transport par difféomorphisme*

Soient  $V, \tilde{V}$  deux variétés de classe  $C^k (k \geq 1)$ ,  $f$  un *difféomorphisme* de  $V$  sur  $\tilde{V}$ .

Nous allons définir un opérateur  $t_f$  de *transport* par le difféomorphisme  $f$  des champs de vecteurs et des champs de tenseurs covariants.

Si  $A^i \in \bigotimes^1 V$  nous posons

$$t_f(A^i) = f_*(A^i)$$

(où  $f_*$  a été défini en 7.4.6).

Si  $g \in \Gamma \mathcal{L}_p(T(V); E)$  nous posons

$$t_f(g) = k^*g \quad \text{où} \quad k = f^{-1}$$

Si enfin  $u \in \mathcal{A}(V; E)$  nous posons

$$t_f(u) = u \circ k$$

7.6.7 *Accouplement* : le transport par difféomorphisme conserve l'accouplement, c'est-à-dire :

$$t_f(g(A^1, \dots, A^p)) = (t_f g)(t_f A^1, t_f A^2, \dots, t_f A^p)$$

ou en explicitant et en posant

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= t_f g, & \tilde{A}^i &= t_f A^i, & \tilde{x} &= f(x) \\ \tilde{g}_x(\tilde{A}_{\tilde{x}}^1, \dots, \tilde{A}_{\tilde{x}}^p) &= g_x(A_x^1, \dots, A_x^p) \end{aligned}$$

Cette formule se démontre immédiatement en revenant aux définitions, et en utilisant le fait que

$$k'(\tilde{x}) \circ f'(x) = \text{identité.}$$

*Remarque.* Si  $\varphi$  est une carte d'un ouvert  $U$  de la variété  $V$ , alors  $t_\varphi$  permet de lire les champs de tenseurs covariants dans la carte  $\varphi$ .

7.6.8 *Image réciproque d'une forme différentielle*

L'image par  $f^*$  d'un champ de tenseurs antisymétrique est antisymétrique. Ainsi, si  $f \in C^k(V; W)$  alors :

$$f^* : \Lambda^p(W; E) \rightarrow \Lambda^p(V; E)$$

en particulier :

$$f^* : \Lambda(W^*) \rightarrow \Lambda(V^*)$$

Ce dernier homomorphisme est un homomorphisme pour la structure d'algèbre extérieure.

*Cas des champs de covecteurs*

Soit  $\omega \in \Lambda^1(W^*)$ ; posons  $\rho = f^*\omega$ , alors on a :

$$\langle z, \rho_x \rangle = \langle f'(x) \cdot z, \omega_y \rangle \quad \text{où} \quad z \in T_x(V), \quad y = f(x)$$

Introduisons la *transposée*  ${}^t f'(x)$  de l'application linéaire  $f'(x)$ ; ceci s'écrit :

$$\langle z, \rho_x \rangle = \langle z, {}^t f'(x) \cdot \omega_y \rangle$$

d'où la formule :

$$7.6.9 \quad \boxed{(f^*\omega)_x = {}^t f'(x) \cdot \omega_{f(x)} \quad \text{si} \quad \omega \in \Lambda^1(W^*)}$$

Si on écrit 7.6.7, avec ces notations on obtient si  $f$  est un difféomorphisme de  $V$  sur  $\tilde{V}$ ,  $A \in \bigotimes^1 V$ ,  $\omega \in \Lambda^1(V^*)$ ,  $\tilde{\omega} \in \Lambda^1(\tilde{V})$  :

$$7.6.10 \quad \begin{aligned} \langle A, \omega \rangle_x &= \langle f_* A, (f^{-1})^* \omega \rangle_{f(x)} \\ \langle f_* A, \tilde{\omega} \rangle_{f(x)} &= \langle A, f^* \tilde{\omega} \rangle_x \end{aligned}$$

## Exercices 1<sup>re</sup> partie

1<sup>o</sup> a) Montrer qu'un intervalle réel n'est pas homéomorphe à une boule de  $\mathbf{R}^n$  ( $n > 1$ ).

b) En déduire qu'un ouvert non vide de la droite n'est homéomorphe à aucun ouvert de  $\mathbf{R}^n$  ( $n > 1$ ).

2<sup>o</sup> On dit une famille de parties plus fine qu'une autre si toute partie de la première est incluse dans une partie de la seconde.

a) Soient  $V$  une variété,  $\mathcal{A}$  un atlas de classe  $C^k$  sur  $V$ ; montrer que si  $\mathcal{R}$  est un recouvrement ouvert de  $V$  plus fin que le recouvrement associé à  $\mathcal{A}$ , alors

$$\{(U, \Phi/U, \Phi(U)); (U, \Phi) \in \mathcal{R} \times \mathcal{A} \quad \text{et} \quad U \subset \text{dom } \Phi\}$$

est un atlas équivalent à  $\mathcal{A}$ .

b) En déduire que toute variété admet un atlas dont les cartes ont pour images des boules.

3<sup>o</sup> Un espace topologique  $E$  est dit connexe par arcs, si quels que soient  $x$  et  $y \in E$ , il existe  $f \in \mathcal{C}([0, 1], E)$  tel que  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ .

a) Soit  $V$  une variété connexe, montrer que : quels que soient  $x$  et  $y \in V$ , il existe une suite finie de cartes, dont les images sont connexes et dont les domaines  $U_0, U_1, \dots, U_n$  vérifient :

$$x, y \in U_0 \times U_n \quad \text{et} \quad \forall p \leq n, \quad U_p \cap U_{p-1} \neq \varnothing.$$

b) En déduire qu'une variété connexe est connexe par arcs.

### SPHÈRES ET ESPACES PROJECTIFS.

4<sup>o</sup> Soit  $\mathcal{G}_n$  le sous-espace topologique de  $\mathbf{R}^{n+1}$

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

a) Montrer qu'il est compact.

b) Expliciter les projections stéréographiques de pôles  $(0, \dots, 0, 1)$  et  $(0, \dots, 0, -1)$  sur l'hyperplan  $\{x_{n+1} = 0\}$ .

e) Vérifier qu'elles définissent un atlas.

d) Préciser l'application de changement de cartes et en déduire que l'atlas est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

5° Soit  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de  $\mathbf{R}^{n+1}$  (on appelle  $\mathcal{F}_n$  l'espace projectif de dimension  $n$ ).

Notons  $e_1, \dots, e_{n+1}$  la base canonique de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , et  $\forall i \leq n+1, E_i$  l'hyperplan engendré par  $\{e_j; j \neq i\}$ ,  $U_i = \{d \in \mathcal{F}_n; \mathbf{R}^{n+1} = d \oplus E_i\}$  et  $\Phi_i$  l'application qui à  $d \in \mathcal{F}_n$  associe la projection de  $e_i$  dans  $E_i$  parallèlement à  $d$ .

a) Montrer que  $\{(U_i, \Phi_i, E_i); 1 \leq i \leq n+1\}$  est un atlas de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{F}_n$ .

b) Vérifier qu'il fait de  $\mathcal{F}_n$  une variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$  séparée.

c) Prouver la compacité de  $\mathcal{F}_n$  en l'obtenant comme image continue de  $\mathcal{G}_n$ .

6° Soient  $\mathbf{T}$  le quotient  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  et  $\Phi$  l'application canonique de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{T}$ .

a) Vérifier que  $\{\Phi|_{] \alpha, \alpha+1[}; \alpha \in \mathbf{R}\}$  définit un atlas qui fait de  $\mathbf{T}$  une variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

b) Exhiber un  $\mathcal{C}^\infty$ -isomorphisme de  $\mathbf{T}$  sur le cercle unité  $\mathcal{G}_1$  (défini au problème 4).

c) Montrer que le fibré tangent à  $\mathbf{T}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  difféomorphe à la variété  $\text{Im}f$ , où  $f$  est l'application de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}^3$  défini par

$$f: \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \cdot \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

7° GRASSMANNIENNE

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbf{N}$ ,  $p \leq n$  et  $\mathcal{G}_p(E)$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $p$  de  $E$ .

(On appelle  $\mathcal{G}_p$  la grassmannienne d'ordre  $p$  de  $E$ .) Quel que soit  $A \in \mathcal{G}_p$  on note  $U_A = \{B \in \mathcal{G}_{n-p}; E = A \oplus B\}$ .

a) Montrer que quel que soit  $B \in U_A$ , tout élément de  $U_B$  est le graphe dans  $E \simeq A \times B$  d'un élément de  $\mathcal{L}(A, B)$  et que l'application  $\Phi_{A, B}: U_B \rightarrow \mathcal{L}(A, B)$  ainsi définie est surjective.

b) Prouver que  $\{(U_B, \Phi_{A, B}, \mathcal{L}(A, B)); A \in \mathcal{G}_p, B \in U_A\}$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -atlas.

c) Normons  $E$ . Montrer que la topologie de  $\mathcal{G}_p$  est métrisable par la distance

$$d: (A, B) \in \mathcal{G}_p \times \mathcal{G}_p \rightarrow \max \{\theta(A, B), \theta(B, A)\}$$

où

$$\theta(A, B) = \sup_{x \in A, \|x\| \leq 1} \inf \{\|y - x\|; y \in B \text{ et } \|y\| \leq 1\}$$

d) Établir un difféomorphisme entre  $\mathcal{G}_p(E)$  et la grassmannienne d'ordre  $n - p$  de son dual  $E^*$ .

e) Pour  $E = \mathbf{R}^n$ , montrer que,  $\mathfrak{J}$  désignant l'ensemble ouvert dans  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$  des automorphismes de  $\mathbf{R}^n$ , quel que soit  $V \in \mathcal{G}_p$  fixé, la fonction :  $f \in \mathfrak{J} \rightarrow f(V) \in \mathcal{G}_p$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ; en déduire que  $\mathcal{G}_p$  est compacte comme image continue du groupe des isométries.

### 8° DÉFINITION DE L'ESPACE TANGENT

On se propose de donner une construction de l'espace tangent restant valable pour les variétés de dimension infinie pour lesquelles les espaces d'arrivée des cartes sont des espaces de Banach.

Soit une variété  $V$  de classe  $C^1$ , de dimension  $n$ .

On appelle chemin de classe  $C^1$  tracé sur  $V$  toute application  $f$  d'un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbf{R}$  dans  $V$  où  $f$  est de classe  $C^1$ .

On note  $\mathfrak{J}_V$  l'ensemble des chemins de classe  $C^1$  tracés sur  $V$ , définis sur un intervalle ouvert variable  $I$  de  $\mathbf{R}$  contenant le point  $0$ .

a) Soient  $f$  et  $g \in \mathfrak{J}_V$ , telles que  $f(0) = g(0) = a$ .

Soit  $\varphi$  une carte définie sur un voisinage ouvert  $\Omega_\varphi$  de  $a$ , à valeurs dans un espace vectoriel  $E_\varphi$  de dimension  $n$ ,  $f_1$  et  $g_1$  les expressions locales de  $f$  et  $g$  au moyen de la carte  $\varphi$ .

Montrer que la relation :

$$f_1'(0) = g_1'(0)$$

est indépendante du choix du voisinage  $\Omega_\varphi$  et de la carte  $\varphi$ .

b) On définit sur  $\mathfrak{J}_V$  une relation  $R$  par les conditions suivantes : Si  $f$  et  $g \in \mathfrak{J}_V$ ,  $f R g$  si et seulement si :

1)  $f(0) = g(0)$ ;

2) il existe une carte  $\varphi$  définie sur un voisinage du point  $a = f(0)$ , telle que les expressions locales de  $f$  et  $g$  au moyen de cette carte aient même dérivée au point  $0$ .

Montrer, rapidement, que  $R$  est une relation d'équivalence sur  $\mathfrak{J}_V$ .

c) On note par  $W$  l'ensemble quotient de  $\mathfrak{J}_V$  par  $R$ , par  $M_a$  l'ensemble des classes d'équivalence des  $f \in \mathfrak{J}_V$  vérifiant  $f(0) = a$ , et par  $\pi_V$  l'application de  $W$  sur  $V$  définie par  $\pi_V(\xi) = a$  pour  $\xi \in M_a$ . Dans le cas particulier où la variété  $V$  est un ouvert d'un espace vectoriel  $E$ , déterminer deux identifications canoniques respectives de  $W$  et  $M_a$  à deux espaces obtenus à partir de  $V$ ,  $E$  et  $a$ .

d) On revient dans la suite du problème au cas général d'une variété  $V$ .

Pour toute carte  $\varphi$  définie sur un ouvert  $\Omega_\varphi$  de  $V$  à valeurs dans un espace de Banach  $E_\varphi$ , à tout  $\xi \in M_a$ , où  $\xi$  est la classe d'équivalence de  $f \in \mathfrak{J}_V$  et où  $a \in \Omega_\varphi$ , on associe  $\theta_{\varphi_a}(\xi)$ , où  $\theta_{\varphi_a}(\xi)$  est la classe d'équivalence de  $(\varphi \circ f) \in \mathfrak{J}_{E_\varphi}$ .

Montrer que l'on définit ainsi une application  $\theta_{\varphi_a}$  de  $M_a$  dans  $E_\varphi$ . En utilisant les applications  $\theta_{\varphi_a}$ , montrer que  $M_a$  possède une structure d'espace vectoriel

normé, définie par une famille de normes équivalentes. Montrer que  $M_a$  est un espace de Banach.

e) Soit  $\theta_\varphi$  l'application de  $W$  dans  $\Omega_\varphi \times E_\varphi$  telle que sa restriction à chaque  $M_a$  soit  $\theta_{\varphi_a}$ .

Montrer que  $\theta_\varphi$  vérifie la relation :

$$\pi_{E_\varphi} \circ \theta_\varphi = \varphi \circ \pi_V.$$

f) En utilisant les applications  $\theta_\varphi$ , déterminer à partir d'un atlas de  $V$  un atlas  $W$ ; on donnera explicitement la forme d'une carte sur  $W$  en fonction de la carte correspondante  $(\varphi, \Omega_\varphi, E_\varphi)$  de  $V$ , en utilisant, au besoin, l'identification trouvée au 3°.

Conclure que  $W$  admet une structure de variété.

g) Soit  $T_a(V)$  l'espace tangent à la variété  $V$  au point  $a$ ,  $\varphi'(a)$  l'application dérivée de  $\varphi$  au point  $a$ . Montrer qu'il existe une identification canonique des espaces vectoriels normés  $M_a$  et  $T_a(V)$ , et qu'il en est de même pour les applications  $\theta_{\varphi_a}$  et  $\varphi'(a)$ .

### 9° THÉORÈME DE MORSE-SARD

On veut démontrer le théorème suivant.

Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  d'une variété  $V$  de dimension  $n$  dans  $\mathbf{R}^n$ , soit  $E = \{x \in V; f'(x) \text{ ne soit pas injective}\}$ , alors  $f(E)$  est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

On rappelle qu'un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^n$  est dit de mesure nulle si tous ses points appartiennent à une suite dénombrable de cubes à  $n$  dimensions, tels que la somme de leurs volumes soit arbitrairement petite.

On rappelle que toute réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.

a) Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  de l'espace  $\mathbf{R}^n$  dans lui-même.

On considère le cube  $C$  à  $n$  dimensions, défini par :

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad \text{pour } i \in (1, 2, \dots, n).$$

On notera par  $J_x$  le jacobien de  $f$  au point  $x$ . Soit  $E$  le sous-ensemble des points de  $C$  où ce jacobien s'annule. Démontrer l'inégalité :

$$\|f(y) - J_x \cdot y\| \leq \|y - x\| r(\|y - x\|),$$

où  $x$  et  $y$  sont deux points de  $C$ , et où  $r(a)$  est une fonction numérique tendant vers 0 avec  $a$ .

En déduire que pour  $x$  appartenant à  $E$ , et pour  $|y - x| < \varepsilon$ , l'ensemble des points  $f(y)$  a une mesure au plus égale à  $A r(\varepsilon) \varepsilon^n$ , où  $A$  est une constante.

b) Montrer alors que l'image  $f(E)$  de  $E$  par  $f$  est de mesure nulle dans  $\mathbf{R}^n$ .

c) On considère deux variétés  $V$  et  $W$ , de classe  $C^\infty$ , de même dimension  $n$ , admettant une base dénombrable d'ensembles ouverts.

Soit  $\tilde{f}$  une application de classe  $C^1$  de  $V$  dans  $W$ .

Soit  $\tilde{E}$  l'ensemble des points  $x$  de  $V$  où  $\tilde{f}(x')$  n'est pas injective.

Montrer que l'image  $\tilde{f}(\tilde{E})$  de  $\tilde{E}$  par  $\tilde{f}$  est de mesure nulle dans  $W$ .

#### APPLICATIONS DU THÉORÈME DU RANG CONSTANT

10° On note par  $\mathcal{M}_n$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbf{R}$ , par  $I$  la matrice identité, par  ${}^t a$  la transposée de la matrice  $a$ .

Soit  $G_n$  le groupe des matrices inversibles, soit :

$$O_n = \{a \in G_n \mid {}^t a a = I\}$$

Montrer que  $O_n$  est une sous-variété de  $G_n$  de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ . On pourra

considérer l'application  $\varphi : G_n \rightarrow \mathcal{M}_n$  définie par  $\varphi(a) = {}^t a a$  et montrer que  $h \in \ker(\varphi'(a))$  est équivalent à  ${}^t a h \in \ker(\varphi'(I))$ .

11° Soient  $V, W$  deux variétés de classe  $C^1$ , soit  $Z = V \times W$ , on munit  $Z$  de la structure de variété définie par l'atlas  $\tilde{\varphi}_{\alpha, \tilde{\alpha}}(x, y) = \varphi_\alpha(x) \times \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}}(y)$  où  $\varphi_\alpha$  ( $\tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}}$ ) parcourt un atlas de  $V$  (de  $W$ ). A tout  $f \in C^1(V; W)$  associons l'application  $\psi$  de  $V$  dans  $Z$  définie par

$$\psi(x) = (x, f(x))$$

a) Montrer que  $\psi$  est un *plongement* de  $V$  dans  $Z$ . On appellera la sous-variété de  $Z$  image de  $\psi$  le *graphe* de  $f$ .

b) On dit qu'un sous-espace vectoriel  $E$  de  $T_{z_0}(Z)$  est *transverse* si la restriction de  $p'(z_0)$  à  $E$  définit un isomorphisme de  $E$  sur  $T_{x_0}(V)$ , où  $p$  dénote la projection de  $Z$  sur  $V$ .

Remarquer que :

(1) Quel que soit  $z_0 \in G$ ,  $T_{z_0}(G)$  est transverse.

Inversement soit  $\tilde{G}$  une sous-variété de  $Z$  satisfaisant (1). Montrer que pour tout  $x_0 \in V$  on peut trouver un voisinage ouvert  $U(x_0)$  tel que  $\tilde{G} = p^{-1}(U) \cap \tilde{G}$  soit le graphe d'une application  $\tilde{f} \in C^1(\tilde{U}; W)$ .

12° Soit  $X$  une variété différentiable de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Rappelons qu'on peut identifier l'espace tangent en chaque point d'une sous-variété d'un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à la variété en ce point. Deux sous-variétés  $V$  et  $W$  de  $X$  sont alors dites *transverses* si pour tout point  $x \in V \cap W$  on a

$$T_x X = T_x V + T_x W.$$

Montrer que l'intersection de deux sous-variétés transverses  $V$  et  $W$  de  $X$  est une sous-variété de  $X$ , de dimension égale à  $\dim V + \dim W - \dim X$ .

13° Soient  $X, V, W$  trois variétés différentiables et soit

$$\Phi : X \times V \rightarrow W$$

une application différentiable telle que :

Pour tout  $x \in X$ , l'ensemble  $V_x = \{\Phi(x, v), v \in V\}$  est une sous-variété de  $W$  qui est localement difféomorphe à  $V$  au moyen de l'application partielle  $\Phi_x : v \longmapsto \Phi(x, v), v \in V$ .

Soit maintenant la partie  $G$  de  $X \times W$  définie par

$$G = \{(x, \Phi(x, v)); (x, v) \in X \times V\};$$

nous désignerons par  $p$  et  $q$  les restrictions à  $G$  des projections de  $X \times W$  sur  $X$  et  $W$  respectivement.

a) Montrer que l'application  $\tilde{\Phi} : X \times V \rightarrow X \times W$  définie par

$$\tilde{\Phi}(x, v) = (x, \Phi(x, v))$$

est différentiable et de rang maximum. Pour cela, on explicitera l'application dérivée de  $\tilde{\Phi}$  en chaque point et on utilisera le fait que  $\Phi_x$  est de rang maximum.

b) Montrer que  $G$  est une sous-variété de  $X \times W$ , de dimension égale à  $\dim X + \dim V$ .

Pour munir  $G$  d'une structure de variété, on utilisera  $\tilde{\Phi}$  et des cartes locales de  $X \times V$  afin de construire des cartes de  $G$ ; pour vérifier que les changements de cartes sont différentiables utiliser le fait que  $V_x$  est une sous-variété de  $W$  et que  $\Phi_x$  est un difféomorphisme local.

c) Montrer que  $\tilde{\Phi}$  est un difféomorphisme local de  $X \times V$  sur  $G$ .

d) Montrer que l'application  $p$  est différentiable surjective et partout de rang maximum. En déduire que, pour tout  $x \in X$ ,  $p^{-1}(x)$  est une sous-variété de dimension égale à  $\dim V$  et plongée dans  $G$ .

e) Montrer que  $q$  est différentiable. Pour  $x \in X$ , on désigne par  $q_x$  la restriction de  $q$  à  $p^{-1}(x)$ .

Montrer que  $q_x$  est injective, de rang maximum et d'image  $V_x$ . En déduire que  $q_x$  est un difféomorphisme de  $p^{-1}(x)$  sur  $V_x$ .

#### 14° ÉTUDE D'UNE FONCTION AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER. THÉORÈME DE MORSE

On se propose de démontrer le résultat suivant.

Soit  $E$  un espace euclidien affine de dimension  $n < \infty$ , soit  $f$  une fonction, à valeurs réelles, de classe  $C^3$ , définie sur  $E$ . Soit  $O$  un point de  $E$ ,  $\vec{E}$  l'espace vectoriel associé à  $E$ . On notera  $\overrightarrow{x - O}$  par  $\vec{x}$ ,  $\vec{x} \in \vec{E}$ .

Supposons que

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0)(\vec{h}, \vec{h}) &= B(\vec{h}, \vec{h}) \end{aligned}$$

où la forme bilinéaire  $B$  définie sur  $\vec{E} \times \vec{E}$  est *non dégénérée*, c'est-à-dire que,  $\vec{x}_0$  étant fixé,

$$(1) \quad B(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0 \quad \text{quel que soit } \vec{x}, \text{ entraîne } \vec{x}_0 = 0.$$

Alors il existe un  $C^1$ -difféomorphisme  $\varphi$  d'un voisinage  $\Omega$  de  $0$

$$\varphi : \Omega \rightarrow \varphi(\Omega) \subset E$$

tel que

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ f(x) &= B(\overrightarrow{\varphi(x)}, \overrightarrow{\varphi(x)}) \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

En particulier, si on considère l'hypersurface  $\Sigma$  de  $E$  d'équation  $f(x) = 0$ , on remarquera que le difféomorphisme  $\varphi$  transforme un voisinage de  $0$  dans  $\Sigma$  sur un voisinage du sommet du cône du second degré d'équation  $B(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ .

a) Choisissons une fois pour toutes une base  $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$  de  $\vec{E}$ , orthonormée pour la structure euclidienne.

Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $x$ . Par abus de langage nous identifierons  $\mathcal{L}(\vec{E}; \vec{E})$  avec l'ensemble  $\mathcal{M}$  des matrices carrées d'ordre  $n$ . Nous noterons par  $I$  la matrice identité, par  ${}^tA$  la matrice transposée de la matrice  $A$ .

Montrer que  $B$  est non dégénéré si et seulement si la matrice

$$2A = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

est inversible. On remarquera que

$$B(\vec{x}, \vec{x}) = 2(A\vec{x}|\vec{x})$$

b) Soit  $\mathcal{M}_s$  la partie de  $\mathcal{M}$  constituée par les matrices symétriques. Soit  $A \in \mathcal{M}_s$ ,  $A$  inversible, alors on considère l'application

$$\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_s$$

définie par

$$X \rightarrow {}^tXAX$$

Notons par  $W$  le sous-espace vectoriel  $A^{-1}\mathcal{M}_s$  de  $\mathcal{M}$  c'est-à-dire

$$W = \{D \in \mathcal{M} \mid D = A^{-1}S \text{ où } S \in \mathcal{M}_s\}$$

Calculer  $\psi'(X)$ . En déduire que

$$\psi'(I) : k \rightarrow {}^t kA + Ak, \quad k \in \mathcal{N}$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe un voisinage  $U(A)$  de  $A$  dans  $\mathcal{N}_s$  et une application  $\theta$  de classe  $C^\infty$ .

$$\theta : U(A) \rightarrow W$$

telle que

$$\psi \circ \theta = \text{identité}$$

c)  $p$  étant une fonction de classe  $C^2$ ,  $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  on rappelle la formule élémentaire

$$p(1) = p(0) + p'(0) + \int_0^1 (1 - \xi)p''(\xi) d\xi$$

Utilisant cette formule montrer que l'on peut écrire

$$f(x) = (G(x) \cdot \vec{x} | \vec{x}) \quad \text{où} \quad G(x) \in \mathcal{N}_s$$

et où l'application  $x \rightarrow G(x)$  de  $E \rightarrow \mathcal{N}_s$  est de classe  $C^0$ .

Démontrer que les hypothèses faites entraînent de plus que cette application est de classe  $C^1$ .

Montrer alors en utilisant b) que l'on peut écrire, pour  $x$  assez voisin de 0,

$$f(x) = B(H(x) \cdot \vec{x}, H(x) \cdot \vec{x})$$

où

$$H(x) \in W,$$

l'application  $x \rightarrow H(x)$  étant de classe  $C^1$ ,  $H(0) = I$ .

d) Montrer que l'application

$$x \rightarrow H(x) \cdot \vec{x},$$

restreinte à un voisinage de 0 convenable, définit un difféomorphisme de ce voisinage. Conclure en démontrant (2).

## 15° ORIENTATION DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

DÉFINITION. — On dit qu'une variété différentiable  $M$  est orientable s'il est possible d'associer à tout point  $p \in M$  une forme extérieure  $\omega_p$  non nulle et de degré

$m = \dim M$ ,  $\omega_p \in \bigwedge^m (M_p^*)$ , qui varie « continuellement » avec  $p$ . Ceci veut dire que quelle que soit la carte locale  $x : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ , en écrivant  $\omega_p = a(p) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$  la fonction  $a : U \rightarrow \mathbf{R}$  est, sur chaque composante connexe de  $U$ , partout positive ou bien partout négative.

Le choix d'une telle forme  $\omega$  revient à choisir une orientation dans chaque espace tangent, orientation qui varie de façon continue. Une variété orientée

c'est une variété orientable où l'on a choisi une telle forme  $\omega$ . Montrer

*Une variété différentiable  $M$  de classe  $C^\infty$  est orientable si et seulement si il existe sur  $M$  une forme différentielle extérieure  $\omega$  de degré  $m$  partout  $\neq 0$  et de classe  $C^\infty$ .*

(Utiliser une partition différentiable de l'unité subordonnée à un recouvrement et construire une forme différentielle extérieure  $\omega$  à partir des différentes  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$  qui sont localement définies.)

### 16° DEGRÉ D'UNE APPLICATION DIFFÉRENTIABLE

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques localement compacts. Une application continue  $f: X \rightarrow Y$  est dite *propre* si pour tout compact  $K \subset Y$ ,  $f^{-1}(K)$  est aussi compacte.

Toutes les applications différentiables qui interviendront dans ce paragraphe seront supposées propres.

Soient  $M$  et  $N$  des variétés différentiables *orientées* (cf. 15°) de même dimension  $n$ .

Soit  $f: M \rightarrow N$  une application différentiable propre.

On note par  $E = \{x \in M; f'(x) \text{ est non injective}\}$  (cf. 9°).

Définissons  $\deg_p f = \deg_p f$  où  $p \in N(f)$  est une valeur régulière (c'est-à-dire  $p \notin f(E)$ ) par la « somme algébrique » des points de  $f^{-1}(p)$  où dans cette somme un point est considéré positif si  $f_*$  préserve l'orientation et négatif si  $f_*$  ne la préserve pas.

a) THÉORÈME. — Soient  $M, N$  variétés différentiables de même dimension, orientées,  $N$  connexe,  $f: M \rightarrow N$  propre. Alors  $\deg_q f = \deg_p f$  quelles que soient  $p, q \in N$ ,  $q, p$  valeurs régulières.

Pour démontrer ce théorème on se sert des lemmes suivants :

i) Si  $p \in N$  est valeur régulière, il existe un voisinage connexe  $U(p)$  de  $p$  tel que  $f^{-1}(U(p)) = U_1 \cup \dots \cup U_r$  où chaque  $U_i$  est ouvert,  $U_i \cap U_j = \emptyset$  et  $f: U_i \rightarrow U(p)$  est un difféomorphisme. (Utiliser le théorème du rang constant.

ii) Toute valeur régulière  $p \in N$  possède un voisinage  $\mathcal{V}(p)$  dont les points sont tous des valeurs régulières et  $\deg_p f = \deg_q f$  quel que soit  $q \in \mathcal{V}(p)$ . En déduire de 9°) que l'ensemble de valeurs régulières forment un ouvert *dense* dans  $N$ .

iii) Si  $\pi \in \bigwedge^n (N^*)$ ,  $\pi$  à support compact contenu dans un voisinage assez petit de  $p$

$$\int_M f^* \pi = (\deg f)_p \int_N \pi.$$

(iiii) Si  $U_i$  est un groupe à un paramètre si  $N$ , et si  $\omega \in \bigwedge^n (N^*)$  à support compact alors

$$\int_M f^*(U_i^* \omega) = C \int_N U_i^* \omega$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $t$ , (on pourra utiliser le théorème de Stokes).

b) Soit  $h$  une application propre de classe  $C^1$  de  $]0, 1[ \times M$  dans  $N$ . Notons par  $h_t$  l'application de  $M$  dans  $N$  obtenue en fixant  $t$ . Montrer que  $\deg h_t = \text{constante}$ .

### 17° CHAMP DE VECTEURS SUR L'ESPACE PROJECTIF DE DIMENSION 2

Soit  $P$  l'espace projectif de dimension 2 sur  $\mathbf{R}$ , défini comme espace quotient de  $\mathbf{R}^3 - \{0\}$  par la relation d'équivalence  $\rho$ , où  $x \rho y$  si et seulement si  $x_0 = \lambda y_0$ ,  $x_1 = \lambda y_1$ ,  $x_2 = \lambda y_2$ , où  $x$  et  $y$  sont éléments de  $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ ,  $(x_i)$  et  $(y_i)$ ,  $i = 1, 2, 0$ .

Soit  $\pi$  l'application canonique de  $\mathbf{R}^3 - \{0\}$  dans  $P$ , soient

$$H_0 = \pi(0, x_1, x_2), \quad H_1 = \pi(x_0, 0, x_2), \quad H_2 = \pi(x_0, x_1, 0),$$

et soient  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  les bijections de  $\mathbf{R}^2$  sur  $P - H_0, P - H_1, P - H_2$  respectivement, définies par les relations :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_1, x_2) &= \pi(1, x_1, x_2), & \varphi_0^{-1} \circ \pi(t_0, t_1, t_2) &= (t_1/t_0, t_2/t_0), \\ \varphi_1(y_0, y_2) &= \pi(y_0, 1, y_2) & \text{etc...} \\ \varphi_2(z_0, z_1) &= \pi(z_0, z_1, 1) \end{aligned}$$

On sait que (cf. 5°)  $P$  muni de l'atlas  $((P - H_i), \varphi_i^{-1}, \mathbf{R}^2)$ ,  $i = 1, 2, 0$ , admet une structure de variété de classe  $C^\infty$ , de dimension 2 sur  $\mathbf{R}$ . On considère les champs de vecteurs  $X_{p,q}$  définis sur  $\mathbf{R}^2$  par l'application :

$$(x_1, x_2) \rightarrow (p(x_1, x_2), q(x_1, x_2))$$

où  $p$  et  $q$  sont des polynômes à deux variables.

a) Quels sont les couples de polynômes  $(p, q)$  pour lesquels les champs de vecteurs  $\varphi_{0*} X_{p,q}$  se prolongent en un champ de vecteurs sur  $P$ ?

b) Montrer que pour un tel champ, les champs  $\varphi_i^{-1*} \varphi_{0*} X_{p,q}$ ,  $i = 1, 2$ , sont aussi définis par des polynômes.

c) Donner une base de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbf{R}$  des champs de vecteurs sur  $P$  ainsi obtenus.

d) A toute application linéaire  $A$  de  $\mathbf{R}^3$  dans  $\mathbf{R}^3$ , on associe le champ de vecteurs  $T_A$  défini sur  $\mathbf{R}^3 - \{0\}$  par l'application  $a \rightarrow A.a$ . Montrer que pour toute application linéaire  $A$ , il existe un champ  $A$  sur  $P$ , tel que  $T_A$  et  $X$  soient  $\pi$ -reliés.

Montrer que ce champ est unique, et qu'il est de la forme  $X_{p,q}$ .

e) Soit  $M(3, \mathbf{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients dans  $\mathbf{R}$ . Montrer que l'application de  $M(3, \mathbf{R})$  dans  $E$  définie en d) est linéaire, surjective; donner la forme des matrices appartenant à son noyau.

f) Questions analogues à a) et b) pour l'espace projectif de dimension 3 sur  $\mathbf{R}$ .

18° CHAMPS DE VECTEURS SUR LA SPHÈRE  $S_2$ 

a) Soit  $S$  la sphère de  $\mathbb{R}^3$  :  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Soient  $P'$  et  $P''$  les points  $(0, 0, +1)$  et  $(0, 0, -1)$ .

Étant donné  $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , calculer les coordonnées de  $\psi'(M)$  et  $\psi''(M)$  où les droites  $P'M$  et  $P''M$  respectivement rencontrent  $S$ . ( $\psi'^{-1}$  et  $\psi''^{-1}$  sont les projections stéréographiques de pôle  $P'$  et  $P''$  respectivement).

Quel est le domaine de définition de l'application  $\gamma = \psi''^{-1} \circ \psi'$ .

Calculer cette application.

Décrire à l'aide de  $\psi'$  et  $\psi''$  un atlas sur  $S$ .

b) Soit  $E$  le champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  défini par :  $E(x, y) = (1, 0)$ .

Soit  $V'$  le champ de vecteurs défini sur  $S - \{P'\}$  en transportant  $E$  par  $\psi'$ , et  $V''$  le champ de vecteurs défini sur  $S - \{P''\}$  en transportant  $E$  par  $\psi''$ .

Calculer les composantes du champ  $F$  de  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ , obtenu en transportant  $V''$  par  $\psi'$ .

Montrer que  $F$  se prolonge par continuité au point  $O$ . En déduire que  $V'$  et  $V''$  se prolongent à  $S$  toute entière.

On se propose, dans la suite du problème, de démontrer que *tout champ de vecteur tangent défini et continu sur  $S$  s'annule au moins en un point de  $S$* .

On rappelle que pour tout couple de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(u, v)$ ,  $u \neq 0$  et  $v \neq 0$ , l'angle  $(u, v)$  admet une infinité de déterminations différant entre elles par un multiple entier de  $2\pi$ .

Si  $u(t)$  et  $v(t)$  sont deux vecteurs dépendant d'un paramètre  $t$ ,  $t \in [a, b]$ , on appellera *détermination continue* de l'angle  $(u(t), v(t))$  toute fonction continue  $\varphi$  définie sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $t$ ,  $\varphi(t)$  soit une détermination de l'angle  $(u(t), v(t))$ .

c) Notons  $M_\theta$  le point de  $\mathbb{R}^2$  :  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . Montrer qu'il existe une détermination continue unique  $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , de l'angle  $(E(M_\theta), F(M_\theta))$  telle que  $\varphi(0) = \pi$ , et la calculer.

d) On admettra que si  $u(t)$  et  $v(t)$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  dépendant continûment de  $t \in [a, b]$  et ne s'annulant pas, il existe une détermination continue de l'angle  $(u(t), v(t))$ .

Soit  $X(s)$  un champ de vecteurs continu sur  $S$ , ne s'annulant pas sur  $S^- = \{(x, y, z) \in S / z \leq 0\}$

Soit  $Y$  le champ de vecteurs de  $\mathbb{R}$  transporté de  $X$  par  $\psi'^{-1}$ . Choisissons une détermination  $\alpha$  de  $(E(0), Y(0))$ .

Montrer qu'il existe une détermination unique  $\omega_\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de l'angle  $(E(r \cos \theta, r \sin \theta), Y(r \cos \theta, r \sin \theta))$ , sur  $0 \leq r \leq 1$  telle que  $\omega_\theta(0) = \alpha$ .

e) Dans les mêmes hypothèses qu'au d), montrer que  $\omega_\theta$  est continue par rapport au couple  $(r, \theta)$ .

Pour cela, on pourra utiliser la méthode suivante :  $\theta_0$  étant fixé, prendre une détermination continue par rapport à  $\theta$ ,  $\omega'(\theta, r)$  pour chaque  $r$  entre 0 et 1,

telle que  $\omega'(\theta_0, r) = \omega_{\theta_0}(r)$ . En utilisant le fait que pour tout  $(r_0, \theta_0)$  il existe un voisinage  $|r - r_0| < \varepsilon$ ,  $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$ , et une détermination continue de  $(E(r \cos \theta, r \sin \theta), Y(r \cos \theta, r \sin \theta))$  sur ce voisinage, montrer qu'il existe  $\varepsilon$  tel que pour  $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$  on ait :

$$|\omega'(\theta, r) - \omega'(\theta_0, r)| < \pi/2.$$

En déduire que  $\omega'(\theta, r) = \omega_{\theta}(r)$ .

f) Déduire de e) l'existence d'une détermination continue de  $(E(M_{\theta}), Y(M_{\theta}))$ , soit  $\eta'$ , telle que  $\eta'(0) = \eta'(2\pi)$ .

Supposons maintenant que  $X(s) \neq 0$  pour  $s \in S^+$ , où

$$S^+ = \{(x, y, z) \in S / z \geq 0\}.$$

Montrer l'existence d'une détermination continue  $\eta'' : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  de l'angle  $(F(M_{\theta}), Y(M_{\theta}))$  telle que :  $\eta''(0) = \eta''(2\pi)$ .

Montrer que s'il existait  $X(s)$  champ de vecteurs tangents défini et continu sur  $S$ , avec  $X(s) \neq 0$  pour tout  $s \in S$ , on aurait  $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ .

En conclure que  $X(s)$  s'annule au moins en un point de  $S$ .

# Calcul différentiel sur les variétés

## Introduction

Les notions naïves de dérivées correspondent d'une part à la notion de *dérivées partielles* ou de *dérivées dans une direction*, d'autre part à la notion d'*applications linéaires tangentes*. Dans tous les cas, il s'agit d'étudier des expressions de la forme  $f(x + h) - f(x)$  où  $h$  tend vers zéro.

Une des difficultés que nous rencontrerons sur une variété, c'est qu'il n'existe plus de structure vectorielle sous-jacente. Par exemple, on ne peut pas *soustraire*  $f(x)$  de  $f(x + h)$ .

L'absence de structure vectorielle sous-jacente sera suppléée, soit par la donnée d'un parallélisme sur l'espace d'arrivée de  $f$ , et nous obtiendrons la notion de différentielle, soit par la construction d'un groupe à un paramètre associé à un champ de vecteurs généralisant le groupe des translations « parallèles » à la direction  $h$ , et nous obtiendrons la notion de dérivée de Lie.

Enfin, dans le cas particulier des formes différentielles, on introduira une dérivation spéciale : le cobord.

## 1 Différentielles

### 1.1 VARIÉTÉ PARALLÉLISÉE

Nous dirons qu'une variété  $W$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) est *parallélisée* si nous nous sommes donnés, pour tout  $x_0 \in W$  un isomorphisme allant de  $T_{x_0}(W)$  sur un espace vectoriel fixé, soit  $E$ . La donnée d'une telle identification est équivalente à la donnée d'une forme différentielle :

$$1.1.1 \quad \omega \in \Lambda^1(W^*; E)$$

telle que, pour tout  $x_0 \in W$ ,  $\omega_{x_0}$  soit un *isomorphisme* de  $T_{x_0}(W)$  sur  $E$ . Nous imposons de plus à la forme différentielle  $\omega$  d'être de classe  $C^{k-1}$ .

*Exemple.* Supposons que  $W$  soit un ouvert d'un espace vectoriel  $E$ . On a vu (I.4.5) qu'il existait un isomorphisme canonique entre  $T_{x_0}(W)$  et  $E$ . Cet isomorphisme est donné par une forme  $\omega \in \Lambda^1(W^*; E)$  qui est de classe  $C^\infty$ .

### 1.1.2 Un ouvert d'un espace vectoriel $E$ est une variété parallélisée

En transportant par difféomorphisme le parallélisme, on obtient qu'une variété difféomorphe à une variété parallélisée peut elle-même être munie d'un parallélisme.

1.1.3 Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ),  $x_0 \in V$ , alors on peut trouver un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  tel que  $U$  puisse être muni d'un parallélisme.

Il suffit, en effet, de prendre pour  $U$  l'ouvert de définition d'une carte et de transporter sur  $U$  le parallélisme naturel sur l'ouvert des valeurs de la carte.

Il convient de remarquer que le parallélisme introduit sur  $U$  est tout à fait arbitraire. On peut ainsi distinguer deux notions : celle de variété parallélisable, c'est-à-dire de variété sur laquelle on peut définir un parallélisme, et celle de variété parallélisée, c'est-à-dire de variété munie d'un parallélisme.

Le résultat local 1.1.3 ne peut pas être étendu à un résultat global. Par exemple, la sphère à deux dimensions est une variété non parallélisable (cf. p. 87).

Le problème de décider si une variété est parallélisable dépend de méthodes de la topologie algébrique.

## 1.2 DIFFÉRENTIELLE D'UNE APPLICATION

Soient  $V$  et  $W$  deux variétés de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $W$  étant une variété parallélisée par une forme :

$$\omega \in \Lambda^1(W^*; E).$$

Soit  $f \in C^k(V; W)$ .

Alors, nous appellerons *différentielle de  $f$* , la forme différentielle  $\pi$  :

$$\pi \in \Lambda^1(V^*; E)$$

définie comme l'image réciproque par  $f$  (I-7.6.1) de la forme  $\omega$  définissant le parallélisme :

$$1.2.1 \quad \pi = f^* \omega$$

On a alors, utilisant la définition I-7.6.1

$$\langle z, \pi_x \rangle = \omega_y(f'(x) \cdot z)$$

pour tout  $z \in T_x(V)$ , où  $y = f(x)$ ; ou encore :

$$1.2.2 \quad \pi_x = \omega_y \circ f'(x)$$

On convient de noter la différentielle de  $f$  par :  $df$ .

1.2.3 THÉORÈME. — Soit  $V, \tilde{V}$  et  $W$  des variétés de classe  $C^k$ ,  $V \xrightarrow{h} \tilde{V}$  et  $\tilde{V} \xrightarrow{f} W$  des applications de classe  $C^k$ . Supposons que  $W$  soit parallélisée. Posons :

$$h^*f = f \circ h.$$

Alors on a :

$$d(h^*f) = h^*(df)$$

Remarque. On peut résumer l'énoncé précédent en disant que LES OPÉRATIONS DIFFÉRENTIELLE ET IMAGE RÉCIPROQUE COMMUTENT.

PREUVE. — Soit  $\omega$  la forme définissant le parallélisme sur  $W$ . Posons  $k = f \circ h$ ; alors :

$$dk = k^* \omega$$

Appliquons I, 7.6.4 :

$$\begin{aligned} k^* \omega &= h^* \circ f^* \omega = h^*(f^* \omega) \\ &= h^*(df) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

### 1.3 DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION A VALEURS VECTORIELLES

Nous allons développer la théorie des différentielles dans le cas particulier où la variété  $W$  est un espace vectoriel  $E$ .

1.3.1 Soit  $V$  une variété connexe de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) et  $g \in C^k(V, E)$  où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie muni de son parallélisme canonique 1.1.2; supposons que :

$$dg = 0$$

Alors :

$$g(x) = \text{constante.}$$

PREUVE. — D'après 1.2.2

$$g'(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in V$$

Posons

$$K = \{x \in V \mid g(x) = g(x_0)\}.$$

$K$  est une partie fermée non vide de  $V$ . Montrons que si  $x_1 \in K$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_1$  tel que  $U \subset K$ , ce qui, d'après l'hypothèse de connexité, entraînera que  $K = V$ .

Le problème étant local, nous le lisons dans une carte  $\varphi$  dont le domaine de définition contient  $x_1$ . Posons  $\tilde{g} = g \circ \varphi^{-1}$ ; alors on aura

$$\tilde{g}'(\xi) = 0.$$

Par suite, d'après le théorème des accroissements finis  $\tilde{g}(\xi) = \text{constante}$  dans un ouvert contenant  $\xi_1 = \varphi(x_1)$ .

C.Q.F.D.

## 1.3.2 Règles de calcul sur les différentielles de fonctions

Si  $E$  est un espace vectoriel alors  $C^k(V; E)$  a une structure d'espace vectoriel et même de  $\mathcal{A}(V)$ -module. On a alors, si  $f, f_1, f_2 \in C^k(V; E)$ ,  $h \in \mathcal{A}(V)$  :

$$\begin{aligned}d(f_1 + f_2) &= df_1 + df_2 \\d(hf) &= f dh + h df.\end{aligned}$$

## 1.3.3 Détermination d'une fonction par sa différentielle

PROPOSITION. — Soient  $f_1$  et  $f_2 \in C^k(V; E)$  où ( $k \geq 1$ ),  $E$  est un espace vectoriel, où  $V$  est connexe et où :

$$\begin{aligned}f_1(x_0) &= f_2(x_0) \\df_1 &= df_2\end{aligned}$$

Alors on a :

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{pour tout } x \in V.$$

PREUVE. — La preuve résulte de 1.3.1 appliquée à  $f_1 - f_2$ .

## 1.4 CALCULS PRATIQUES SUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES

## 1.4.1 Bases locales des champs de covecteurs

On appellera une base de  $\bigotimes_1 V$  sur  $\mathcal{A}(V)$ , la donnée de  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q \in \bigotimes_1 V$  tels que quel que soit  $\pi \in \bigotimes_1 V$ , on ait :

$$\pi = \sum_{i=1}^q f_i \omega_i \quad \text{où les } f_i \in \mathcal{A}(V),$$

une telle décomposition devant de plus être unique.

On appelle *carte numérique* un difféomorphisme  $\Phi$  d'un ouvert de  $V$  sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . On peut alors écrire :  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  où  $\varphi^i \in \mathcal{A}(V)$ .

1.4.2 THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ ,  $x_0 \in V$ ,  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  une carte numérique définie sur un ouvert  $U$  contenant  $x_0$ . Alors

$$d\varphi^1, \dots, d\varphi^n$$

constituent une base de  $\bigotimes_1 U$  sur  $\mathcal{A}(U)$ .

PREUVE. — Soit  $E = \mathbf{R}^n$ . Alors  $E^*$  s'identifie à  $\mathbf{R}^n$ ; notons par  $e_1^*, \dots, e_n^*$  la base canonique de  $E^*$ . Soit  $\omega \in \bigotimes_1 U$ ; posons :

$$\pi = \psi^* \omega$$

où  $\psi$  est le difféomorphisme inverse de  $\varphi$ ,  $\psi : O = \varphi(U) \rightarrow U$ ; alors  $\pi \in \bigotimes_1 O$ ; donc

$$\xi \longmapsto \pi_\xi$$

est une application de  $O$  dans  $T_\xi(O^*) \simeq E^*$ , c'est-à-dire que l'on peut trouver  $a_1(\xi), \dots, a_n(\xi)$  tels que

$$\pi_\xi = \sum_{i=1}^n a_i(\xi) e_i^*.$$

Notons par  $f_i$  la fonction définie sur  $O$  par  $f_i(\xi) = \xi \cdot e_i^*$ . Alors on a, pour tout  $\xi \in O$ ,  $(df_i)_\xi = e_i^*$  et on peut ainsi écrire :

$$\pi = \sum_{i=1}^n a_i df_i.$$

Appliquons  $\varphi^*$  aux deux membres; on obtient en utilisant I-7.6.2 :

$$\varphi^* \pi = \sum b_i \varphi^* df_i \quad \text{où} \quad b_i = \varphi^* a_i = a_i \circ \Phi.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi &= \text{identité sur } U \\ \text{entraîne} \quad \varphi^* \circ \psi^* &= \text{identité sur } \bigotimes_1 U; \\ \text{d'où} \quad \varphi^* \pi &= \omega \end{aligned}$$

D'autre part, d'après 1.2.3,

$$\varphi^* df_i = d(\varphi^* f_i)$$

et comme on a :

$$\varphi^* f_i = \varphi^i$$

on obtient

$$\omega = \sum b_i d\varphi^i \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

*Exemple.* Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,  $f$  une fonction définie sur  $O$ ,  $\xi \longmapsto (\xi_1, \dots, \xi_n)$  la carte canonique sur  $\mathbf{R}^n$ ; alors on a :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i} d\xi_i$$

1.4.3 COROLLAIRE. — *Expression d'un champ de covecteurs dans un atlas*

Soit  $\mathcal{A}$  un atlas de  $V$  dont toutes les cartes sont des cartes numériques. Soit  $\omega \in \bigotimes_1 V$ . A tout  $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}$ , on associera la restriction  $\omega^\alpha$  de  $\omega$  à l'ouvert  $U_\alpha$  où  $\varphi_\alpha$  est défini. On aura alors, utilisant 1.4.2 :

$$1.4.4 \quad \omega^\alpha = \sum_{i=1}^n b_{i,\alpha} d\varphi_\alpha^i \quad \text{où} \quad b_{i,\alpha} \in \mathcal{J}_0(U^\alpha)$$

On appellera quelquefois le second membre de cette égalité, une expression de  $\omega$  *au-dessus de*  $U_\alpha$ . Cette formule est plus maniable que la notion de *lecture dans la carte*  $\varphi_\alpha$  que nous avons utilisée pour les champs de tenseurs (I-7.6.7). En effet, dans l'opération de lecture *il faut quitter la variété*  $V$  et se placer sur un ouvert d'un espace vectoriel, tandis que 1.4.4 est une égalité valable sur des ouverts de  $V$ .

#### 1.4.5 Application : Calcul pratique de l'image réciproque

Nous nous proposons d'utiliser 1.4.4 pour avoir un calcul pratique de l'image réciproque d'un champ de covecteurs.

Soient  $V, \tilde{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $h \in C^1(V; \tilde{V})$ ,  $\tilde{\omega} \in \bigotimes_1 \tilde{V}$ . Posons  $\omega = h^* \tilde{\omega}$ . Soit  $\tilde{\mathcal{A}}$  un atlas numérique de  $\tilde{V}$ ,  $\varphi_{\tilde{\alpha}} \in \tilde{\mathcal{A}}$ ; alors on a :

$$\tilde{\omega}^{\tilde{\alpha}} = \sum_{i=1}^n b_{i, \tilde{\alpha}} d\varphi_{\tilde{\alpha}}^i$$

Notons par  $\Omega_{\tilde{\alpha}} = h^{-1}(U_{\tilde{\alpha}})$ , par  $\omega^{\tilde{\alpha}}$  la restriction de  $\omega$  à  $\Omega_{\tilde{\alpha}}$ , alors on a :

$$\omega_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\alpha}} = \sum_{i=1}^n b_{i, \tilde{\alpha}}(h(x)) d(\varphi_{\tilde{\alpha}}^i \circ h)_{h(x)}$$

1.4.6 *Règle pour calculer l'image réciproque.* On remplace dans l'expression de  $U_{\tilde{\alpha}}$  par  $h(x)$  la variable  $\tilde{x}$  figurant dans les fonctions  $b_{j, \tilde{\alpha}}$  et dans les différentielles  $d\varphi_{\tilde{\alpha}}^i$ . Ceci constitue une règle d'application pratique très commode.

La preuve de 1.4.6 est immédiate. Soit  $i$  l'injection canonique de  $\Omega_{\tilde{\alpha}}$  dans  $V$ . Alors on a :

$$\omega^{\tilde{\alpha}} = i^* \omega$$

D'où

$$\omega^{\tilde{\alpha}} = i^* h^* \tilde{\omega} = (h \circ i)^* \tilde{\omega}$$

Soit  $h_{\tilde{\alpha}} = h \circ i$  c'est-à-dire que  $h_{\tilde{\alpha}}$  est la restriction de  $h$  à  $\Omega_{\tilde{\alpha}}$ .

Alors

$$\begin{aligned} \omega^{\tilde{\alpha}} &= h_{\tilde{\alpha}}^* \tilde{\omega} \\ &= h_{\tilde{\alpha}}^* \left( \sum_i b_{i, \tilde{\alpha}} d\varphi_{\tilde{\alpha}}^i \right) \end{aligned}$$

Utilisons I-7.6.8 et 1.2.3, on obtient 1.4.6.

#### 1.4.7 Extension aux formes différentielles de degré $p$

Si  $F$  est un espace vectoriel, on sait qu'une  $p$ -forme extérieure sur  $F$  s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments  $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$  où  $e_1^*, \dots, e_n^*$  est une base du dual  $F^*$  de  $F$ .

Soit alors  $\pi \in \Lambda^p(V^*)$ ,  $(\varphi_\alpha^1, \dots, \varphi_\alpha^n)$  une carte numérique d'un ouvert  $U_\alpha$  de  $V$ ,  $\pi_\alpha$  la restriction de  $\pi$  à  $U_\alpha$ , alors on obtient à partir de 1.4.2

$$\pi_\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} a_{i_1, i_2, \dots, i_p}^\alpha d\varphi_\alpha^{i_1} \wedge d\varphi_\alpha^{i_2} \wedge \dots \wedge d\varphi_\alpha^{i_p}$$

Notant par  $\Delta_{p,n}$  l'ensemble des parties à  $p$  éléments de l'ensemble des  $n$  premiers entiers, on peut écrire encore :

$$\pi_\alpha = \sum_{H \in \Delta_{p,n}} a_H^\alpha d\varphi_\alpha^H$$

où  $H = (i_1, \dots, i_p)$  et où l'on note :

$$d\varphi_\alpha^H = d\varphi_\alpha^{i_1} \wedge d\varphi_\alpha^{i_2} \wedge \dots \wedge d\varphi_\alpha^{i_p}.$$

Le calcul de l'image réciproque par  $f^*$  s'effectue en utilisant le fait que  $f^*$  est un homomorphisme d'algèbre (cf. I-7.6.8). Par suite,

$$f^*\pi_\alpha = \sum_H (f^*a_H^\alpha) \cdot f^*(d\varphi_\alpha^H)$$

où

$$\begin{aligned} f^*d\varphi_\alpha^H &= f^*d\varphi_\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge f^*d\varphi_\alpha^{i_p} \\ &= d(f^*\varphi_\alpha^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(f^*\varphi_\alpha^{i_p}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que 1.4.6 est encore valable.

## 2 Champs de vecteurs et groupes à un paramètre

### 2.1 PROBLÈME DE L'ÉQUIVALENCE POUR LES CHAMPS DE VECTEURS

Nous nous posons le problème de l'équivalence au sens de I-5.1, mais à présent pour les champs de vecteurs.

Étant donnés deux variétés  $V$  et  $\tilde{V}$ ,  $A$  et  $\tilde{A}$  deux champs de vecteurs sur  $V$  et  $\tilde{V}$  respectivement,  $x_0 \in V$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{V}$ , on dira que  $A$  et  $\tilde{A}$  sont *localement équivalentes* au voisinage de  $x_0$  et  $\tilde{x}_0$ , s'il existe un difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $\tilde{x}_0$  et transportant  $A$  sur  $\tilde{A}$ .

Le modèle le plus élémentaire d'un champ de vecteurs est le champ de vecteur constant non nul défini sur un ouvert  $O$  d'un espace vectoriel  $E$  : étant donné  $e \in E$  on associe à tout  $x \in O$  le vecteur  $e \in E \simeq T_{x_0}(O)$ . On a alors l'analogie de I-5.3.

**2.1.1 THÉORÈME DE RÉDUCTION.** — Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $A \in \bigotimes^1 V$ ,  $A$  de classe  $C^1$ ,  $x_0 \in V$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit équivalent dans un voisinage de  $x_0$  à un champ constant non nul défini sur un ouvert d'un espace vectoriel est que :

$$A_{x_0} \neq 0.$$

*Remarque.* L'équivalence locale signifie qu'il existe un difféomorphisme  $\varphi$  d'un voisinage  $U$  de  $x_0$  sur un ouvert d'un espace vectoriel tel que :

$$\varphi'(x) \cdot A_x = \text{constante} \quad x \in U$$

PREUVE. — La démonstration est donnée en appendice p. 293.

## 2.2 LIGNES DE COURANT D'UN CHAMP DE VECTEURS

Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $A \in \overset{1}{\otimes} V$  de classe  $C^1$ . Nous appellerons *ligne de courant de A*, un chemin  $\psi$  tracé sur  $V$ , c'est-à-dire

$$\psi \in \mathcal{C}^1(I; V).$$

où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  tel que

$$\psi'(t) \cdot 1 = A_{\psi(t)} \quad t \in I.$$

Nous appellerons *problème de Cauchy* relatif au point  $x_0 \in V$  à l'instant  $t_0$  et au champ de vecteur  $A$  la recherche d'une ligne de courant de  $A$  passant par le point  $x_0$  pour  $t = t_0$ . Ceci s'écrit :

$$2.2.1 \quad \begin{cases} \psi \in \mathcal{C}^1(I; V) & \text{tel que} & t_0 \in I \\ \psi(t_0) = x_0 \\ \psi'(t) \cdot 1 = A_{\psi(t)} & t \in I \end{cases}$$

Si on considère le champ  $A$  comme le champ de l'écoulement d'un fluide sur la variété  $V$ , alors le problème de Cauchy correspond à la recherche de la trajectoire d'un point matériel abandonné dans le fluide en mouvement à l'instant  $t_0$  au point  $x_0$ .

Cette interprétation naïve du problème de Cauchy se prolonge en mécanique : la résolution du problème de Cauchy est alors équivalente à déterminer, à partir des conditions initiales, le mouvement d'un système matériel.

On a alors :

2.2.2 THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $A \in \overset{1}{\otimes} V$  de classe  $C^1$ ; alors, pour tout  $x_0 \in V$ ,  $t_0 \in \mathbf{R}$ , le problème de Cauchy possède une solution. De plus, si  $\psi_j \in \mathcal{C}^1(I_j; V)$ ,  $j = 1, 2$ , sont deux solutions du même problème de Cauchy, on a :

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) \quad \text{si} \quad t \in I_1 \cap I_2.$$

PREUVE. — Supposant d'abord  $A_{x_0} \neq 0$ , on utilise le théorème de réduction pour transporter le problème de Cauchy par une carte  $\varphi$  définie sur un ouvert  $U$ . Le champ  $A_{x_0}$  se lit suivant un champ constant. En restreignant au besoin le domaine de définition de  $\varphi$ , on peut se ramener au cas où  $\varphi(U)$  est un ouvert convexe de l'espace vectoriel d'arrivée.

Les lignes de courant du champ constant  $e$  sont évidemment des droites parallèles à  $e$  et parcourues avec une vitesse uniforme, c'est-à-dire s'écrivent sous la forme :

$$\tilde{\psi}(t) = \xi_0 + (t - t_0)e$$

On obtient ainsi une solution :

$$\varphi^{-1} \circ \tilde{\psi} = \psi$$

au problème de Cauchy.

*Unicité.* Si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont deux solutions différentes, on considère :

$$\tilde{\psi}_1(t) = \varphi(\psi_1(t))$$

$$\tilde{\psi}_2(t) = \varphi(\psi_2(t))$$

où  $|t - t_0| < \eta_0$ ,  $\eta_0$  étant pas assez petit pour que  $|t - t_0| < \eta_0$  entraîne que  $\psi_1(t)$  et  $\psi_2(t) \in U$ . Comme

$$\tilde{\psi}_1(t) = \xi_0 + (t - t_0)e = \tilde{\psi}_2(t),$$

on en déduit que :

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) \quad \text{si} \quad |t - t_0| < \eta$$

Notons par :

$$\Delta = \{t \in I_1 \cap I_2 \mid \psi_1(t) = \psi_2(t)\}$$

$\Delta$  est fermé, non vide. Montrons que  $\Delta$  est ouvert. Soit  $t \in \Delta$ ; alors :

$$\psi_1(t) \quad \text{et} \quad \psi_2(t)$$

sont deux solutions du problème de Cauchy relatif au point  $x_1$  à l'instant  $t_1$ , où  $x_1 = \psi_1(t_1) = \psi_2(t_1)$ . On déduit de ce qui précède que

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) \quad \text{si} \quad |t - t_1| < \eta_1;$$

d'où  $\Delta$  est ouvert et le théorème est démontré.

**2.2.3 Remarque.** Dans le cas  $Ax_0 = 0$ , l'existence est triviale : l'application  $\psi(t) = x_0$  quel que soit  $t$  répond à la question; pour l'unicité, on ajoute une dimension à  $V$  en formant  $\tilde{V} = V \times \mathbf{R}$ ; on pose  $\tilde{A}_{(x,1)} = A_x \oplus e_1$ , où  $e_1$  est le vecteur de la base canonique de  $\mathbf{R}$  et on applique le théorème de réduction à  $\tilde{A}$ .

### 2.3 LIGNE DE COURANT MAXIMALE

Considérons le problème de Cauchy 2.2.1 et soit  $S$  l'ensemble de toutes ses solutions; notons  $I_\psi$  l'intervalle de définition du champ  $\psi \in S$ . Posons

$$I^0 = \bigcup_{\psi \in S} I_\psi;$$

$I^0$ , réunion d'ouverts, est ouvert;  $I^0$ , réunion de connexes ayant un point commun est connexe. Par suite  $I^0$  est un intervalle.

Définissons une application  $f$  de  $I^0$  dans  $V$  en posant :

$$2.3.1 \quad f(t_1) = \psi_1(t_1) \quad \text{où} \quad \psi_1 \in S$$

est choisi de sorte que  $t_1 \in I_\psi$ . Si  $\psi_2$  est un autre choix possible, on a, d'après 2.2.2

$$\psi_1(t_1) = \psi_2(t_1)$$

c'est-à-dire que 2.3.1 définit  $f$  sans ambiguïté. De plus  $f$  coïncide sur un voisinage de  $t_1$  avec  $\psi_1$ ; il en résulte que  $f$  est de classe  $C^1$  et est solution du problème de Cauchy 2.2.1. Ainsi a-t-on construit une solution  $f$  de 2.2.1 telle que tout autre solution s'obtienne par restriction de  $f$ . On appellera  $f$  la solution maximale du problème de Cauchy 2.2.1.

### 2.3.2 Comportement aux bornes d'une solution maximale

DÉFINITION. — On dit qu'une application  $f$  à valeurs dans un espace localement compact  $V$  tend vers l'infini si, quel que soit le compact  $K$  de  $V$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $t > b - \varepsilon$  entraîne  $f(t) \notin K$ .

On a alors

Soit  $f$  la solution maximale de 2.2.1 définie sur  $I_0 = ]a, b[$ ; alors lorsque  $t \rightarrow b$  (resp. lorsque  $t \rightarrow a$ )  $f(t)$  tend vers l'infini.

PREUVE. — Si  $f(t)$  ne tendait pas vers l'infini, il existerait un compact  $K_0$  et une suite  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  tendant vers  $b$  telle que :

$$f(t_n) \in K_0.$$

Extrayons de la suite  $f(t_n)$  une suite convergente vers un point  $x_1 \in V$ . Appliquons le théorème de réduction si  $A_{x_1} \neq 0$  (Si  $A_{x_1} = 0$ , on appliquerait le même artifice qu'en 2.2.3). Soit  $\varphi$  une carte définie sur un voisinage  $U$  de  $x_1$  et envoyant le champ  $A$  sur un champ constant; alors

$$\varphi(f(t)) = \eta + (t - b)e$$

Comme  $f(t_n) \rightarrow x_1$  on en déduit que  $\eta = \varphi(x_1)$ . Posons

$$f_1(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x_1) + (t - b)e) \quad b \leq t \leq b + \delta$$

où  $\delta > 0$  est assez petit, et

$$f_1(t) = f(t) \quad t \in I_0$$

On définit ainsi une extension de  $f$  contredisant le caractère maximal de  $f$ .

2.3.3 COROLLAIRE. — Soit  $V$  une variété compacte de classe  $C^2$ ,  $A \in \overset{1}{\otimes} V$  de classe  $C^1$ ; alors le problème de Cauchy 2.2.1 admet une solution définie pour toutes les valeurs de  $t \in \mathbf{R}$ .

## 2.4 PSEUDO-GROUPE DE TRANSFORMATION ASSOCIÉ A UN CHAMP DE VECTEURS

Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $A$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $V$ . Nous associons à  $A$  une famille de transformations  $U_t$  dépendant du paramètre  $t$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

Si  $x_0 \in V$ , nous noterons  $k_{x_0}$  la ligne de courant maximale de  $A$  qui, pour  $t = 0$ , passe par le point  $x_0$ . Cette ligne de courant est la solution *maximale* du problème de Cauchy suivant :

$$2.4.0 \quad \begin{cases} k'(t) \cdot 1 = A_{k(t)} \\ k(0) = x_0 \end{cases}$$

Pour tout  $t_0 \in \mathbf{R}$ , nous posons :

$$\Omega_{t_0} = \{x_0 \in V \mid k_{x_0}(t_0) \text{ est défini}\}$$

Nous définissons une application  $U_{t_0}$  de  $\Omega_{t_0}$  dans  $V$  en posant :

$$2.4.1 \quad U_{t_0}(x) = k_x(t_0) \quad \text{pour tout } x \in \Omega_{t_0}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_t(x) &= A_{U_t(x)} \\ U_0 &= \text{l'identité} \end{aligned}$$

Dans une première lecture de ce chapitre, on peut sans inconvénient, pour suivre le fil général des idées, supposer que l'hypothèse suivante (H) est satisfaite :

$$(H) \quad \text{quel que soit } t, \text{ on a : } \Omega_t = V.$$

D'après 2.3.3 tel est le cas si  $V$  est *compacte*. Le résultat fondamental du paragraphe, le théorème 2.4.3, s'énonce sous cette hypothèse simplificatrice de la manière suivante :

**THÉORÈME.** — *Supposons l'hypothèse (H) vérifiée. Alors la famille  $\{U_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  forme un groupe à un paramètre de transformation de  $V$ , c'est-à-dire que l'on a :*

$$U_t \circ U_{t'} = U_{t+t'}$$

Ceci étant, énonçons quelques propriétés de  $\Omega_t$

$$2.4.2 \quad \begin{cases} \bigcup_{t > 0} \Omega_t = V & \text{(en vertu de 2.2.2)} \\ \Omega_a \subset \Omega_b & \text{si } a > b \geq 0 \end{cases}$$

**2.4.3 THÉORÈME.** — *Supposons que  $x_0 \in \Omega_{t'_0}$ ; alors  $x_0 \in \Omega_{t_0+t'_0}$  si et seulement si :*

$$U_{t_0}(x_0) \in \Omega_{t_0}$$

et l'on a alors :

$$U_{t_0}(U_{t'_0}(x_0)) = U_{t_0+t'_0}(x_0)$$

*Notation.* On exprimera cet énoncé en disant que la famille  $\{U_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  forme un *pseudo-groupe* de transformations sur  $V$ .

Le corollaire suivant est une conséquence formelle :

2.4.4 COROLLAIRE. — On a :

$$\Omega_{t'_0} \cap \Omega_{t_0+t'_0} = (U_{t'_0})^{-1}(\Omega_{t_0})$$

PREUVE DU THÉORÈME. — La démonstration est fondée sur la remarque suivante  
2.4.5 Si  $k(t)$  est une ligne de courant du champ de vecteur  $A$  et si  $\alpha \in \mathbf{R}$  est une constante, alors  $k(t) = k(t + \alpha)$  est une ligne de courant de  $A$ .

En effet, on a d'après le théorème des fonctions composées

$$k'(t) \cdot 1 = k'(t + \alpha) \cdot 1.$$

Comme  $k$  est ligne de courant de  $A$ , on a :

$$k'(t + \alpha) \cdot 1 = A_{k(t+\alpha)}$$

d'où  $k$  est ligne de courant de  $A$ .

*Démonstration du théorème 2.4.3.* — Soit  $k_{x_0}$  la ligne de courant de  $A$  passant, pour  $t = 0$ , par  $x_0$  et soit  $y_0 = k_{x_0}(t'_0)$ ,

$$\tilde{k}(t) = k_{x_0}(t + t'_0)$$

Alors, d'après 2.4.5,  $\tilde{k}$  est une ligne de courant de  $A$ . D'autre part,  $k_{x_0}$  étant maximale,  $\tilde{k}$  est maximale. De plus on a :

$$\tilde{k}(0) = k_{x_0}(t'_0) = y_0.$$

Ainsi, d'après l'unicité de la solution maximale du problème de Cauchy posé pour  $y_0$ , a-t-on :

$$2.4.6 \quad k_{y_0} = \tilde{k};$$

d'où, en particulier,  $\tilde{k}$  et  $k_{y_0}$  ont même domaine de définition. Écrivons 2.4.6 pour  $t_0$ , on obtient :

$$k_{y_0}(t_0) = \tilde{k}(t_0)$$

ou, en explicitant  $\tilde{k}$ ,

$$k_{y_0}(t_0) = k_{x_0}(t_0 + t'_0),$$

ce qui démontre le théorème.

2.4.7 THÉORÈME. — Quel que soit  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\Omega_t$  est une partie ouverte de  $V$  et  $U_t$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\Omega_t$  sur  $\Omega_{-t}$ .

PREUVE. — Supposons démontré que  $\Omega_t$  est ouvert et que  $U_t \in C^1(\Omega_t; V)$ . Alors, en écrivant 2.4.4 avec  $t_{-t} = -t$ ,  $t'_0 = t$ , on obtient

$$\Omega_t = (U_t)^{-1}(\Omega_{-t})$$

ou encore

$$U_t(\Omega_t) = \Omega_{-t}.$$

Par suite  $U_t \in C^1(\Omega_t, \Omega_{-t})$  et comme on a d'après 2.4.3 :

$$U_{-t} \circ U_t = \text{identité sur } \Omega_t$$

on obtient que  $U_t$  est un difféomorphisme de  $\Omega_t$  sur  $\Omega_{-t}$  dont  $U_{-t}$  est le difféomorphisme inverse.

Reste à démontrer que  $\Omega_{t_0}$  est ouvert et que  $U_t$  est de classe  $C^1$ . Soit  $x_0 \in \Omega_{t_0}$ ; alors on peut trouver  $a > t_0$  tel que la solution  $k_{x_0}$  de 2.4.0 soit définie sur  $[0, a] = I$ .

Nous appellerons *carte adaptée* à  $A$  au voisinage de  $x_0$  une carte  $\varphi$  définie sur un voisinage ouvert  $W$  de  $x_0$  telle que  $\varphi(W)$  soit convexe et  $\varphi^*A$  soit un champ constant. On peut supposer  $A_{k(t)} \neq 0$  pour tout  $t \in I$  (sinon on utilise le même artifice qu'en 2.2.3).

A tout  $t \in I$  associ ons un intervalle  $J(t)$  contenant  $t$  tel que  $k_{x_0}(J(t))$  soit entièrement contenu dans le domaine de définition  $W(t)$  d'une carte adaptée.

Les  $J(t)$  constituent un recouvrement ouvert du compact  $I$ . Extrayons de ce recouvrement un recouvrement fini et soit  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 \cdots < t_N = a$  une subdivision de  $I$  tel que  $t_j, t_{j+1}$  appartienne au même ouvert du recouvrement fini choisi; alors, on a :

$$k_{x_0}([t_j, t_{j+1}]) \subset W_j$$

où  $W_j$  est l'ouvert de définition d'une carte adaptée  $\varphi_j$ .

Nous allons montrer, par récurrence sur  $j$ , que  $U_{t_j}$  est définie sur un voisinage de  $x_0$  et est un difféomorphisme local au voisinage de  $x_0$ .

L'énoncé est trivial pour  $j = 0$ ,  $U_{t_j}$  étant alors l'identité.

Supposons le vrai pour  $j_0$  et montrons le pour  $j_0 + 1$ . Posons  $\varepsilon = t_{j_0+1} - t_{j_0}$ . On a alors formellement

$$U_{t_{j_0+1}} = U_\varepsilon \circ U_{t_{j_0}}$$

et plus précisément utilisant 2.4.4

$$\Omega_{t_{j_0+1}} = U_{t_{j_0}}^{-1}(\Omega_\varepsilon)$$

En utilisant la carte adaptée  $\varphi_{j_0}$ , on obtient que  $\Omega_\varepsilon$  est un voisinage de  $k_{x_0}(t_{j_0})$ .

D'après l'hypothèse de récurrence,  $U_{t_{j_0}}$  est un difféomorphisme local au voisinage de :

$$U_{t_{j_0}}^{-1}(k_{x_0}(t_{j_0})) = x_0,$$

d'où  $U_{t_{j_0}}^{-1}(\Omega_\varepsilon)$ , c'est-à-dire  $\Omega_{t_{j_0+1}}$ , est un voisinage de  $x_0$ . On a d'autre part, d'après 2.4.3,  $U_{t_{j_0+1}}(x) = U_\varepsilon \cdot (U_{t_{j_0}}(x))$  pour tout  $x \in \Omega_{t_{j_0+1}}$ . Pour montrer que le premier membre est un difféomorphisme local en  $x_0$ , il suffit, utilisant l'hypothèse de récurrence, de montrer que :

$$U_\varepsilon \text{ est un difféomorphisme local en } U_{t_{j_0}}(x_0),$$

ce que l'on voit encore immédiatement dans la carte adaptée  $\varphi_{j_0}$ .

#### 2.4.8 Remarque sur le transport par difféomorphisme

Soient  $V, \tilde{V}$  deux variétés,  $f$  un difféomorphisme de  $V$  sur  $\tilde{V}$ ,  $A \in \overset{1}{\otimes} V$ ,  $U_t$  le pseudo-groupe associé à  $A$ . Posons :

$$f \circ U_t = \tilde{U}_t$$

alors  $\tilde{U}_t$  est le pseudo-groupe associé à  $f_*A$ .

### 3 Dérivées de Lie

#### 3.1 DÉFINITION ET EXISTENCE

Dans tout ce paragraphe,  $V$  notera une variété de classe  $C^2$ ,  $A \in \overset{1}{\otimes} V$  de classe  $C^1$ ; nous associons à  $A$  le pseudo-groupe à un paramètre  $U_t$  et introduisons un opérateur  $\theta(A)$  sur les fonctions, les formes différentielles et les champs de vecteurs, défini formellement par :

$$\begin{aligned} \theta(A)f &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(U_t^* f - f), \quad f \in \mathcal{A}_0(V) \\ \theta(A)\omega &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(U_t^* \omega - \omega), \quad \omega \in \Lambda^p(V^*; E) \end{aligned}$$

définition que l'on étendra à tout champ de tenseurs *covariants*.

Pour un champ de *vecteur* on définira au contraire :

$$\theta(A)B = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}((U_{-t})_* B - B), \quad B \in \overset{1}{\otimes} V.$$

Précisons d'abord que les différentes limites seront prises au sens de la *convergence\* simple en chaque point*  $x_0$  de  $V$ ; c'est-à-dire que plus précisément on aura par définition :

$$3.1.1 \quad \left\{ \begin{aligned} (\theta(A)f)(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}[(U_t^* f)(x_0) - f(x_0)] \\ (\theta(A)\omega)_{x_0} &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}[(U_t^* \omega)_{x_0} - \omega_{x_0}] \\ (\theta(A)B)_{x_0} &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}[(U_{-t})_* B]_{x_0} - B_{x_0} \end{aligned} \right.$$

Il résulte de 2.4.2 que les expressions dont on prend la limite sont définies pour  $t$  assez petit; ces limites ne dépendent que des valeurs de  $A$ , de  $f$ ,  $\omega$ ,  $B$  sur un voisinage arbitrairement petit de  $x_0$ . L'expression  $(\theta(A)f)(x_0)$  [resp.  $(\theta(A)\omega)_{x_0}$ , resp.  $(\theta(A)B)_{x_0}$ ] est la *dérivée de Lie de  $f$*  [resp.  $\omega$ ; resp.  $B$ ] calculée en  $x_0$ .

Utilisant 2.4.8, la dérivée de Lie se transporte dans un difféomorphisme; en particulier pour la calculer en  $x_0$ , on peut se ramener à un calcul sur l'ouvert d'arrivée d'une carte en  $x_0$ .

3.1.2 *La dérivée de Lie d'une fonction de classe  $C^1$  existe et est une fonction de classe  $C^0$ . De plus on a :*

$$\theta(A)f = \langle A, df \rangle$$

où  $df$  dénote la différentielle de  $f$ .

PREUVE. — On a :

$$(\theta(A)f)(x_0) = \left[ \frac{d}{dt} f(U_t x_0) \right]_{t=0}$$

D'après le théorème des fonctions composées :

$$= f'(x_0) \cdot \left( \frac{d}{dt} U_t(x_0) \right)$$

et d'après la définition 2.4.1

$$(\theta(A)f)(x_0) = f'(x_0) \cdot A_{x_0}$$

C.Q.F.D.

3.1.3 *Dérivée de Lie suivant un champ de vecteurs constant*

Supposons que  $V$  soit un ouvert d'un espace vectoriel  $F$ . Soit  $e \in F$ ,  $e \neq 0$ , et considérons le champ constant  $A_x = e$ . Alors

$$U_t(x) = x + te,$$

d'où 
$$(\theta(A)f)(x_0) = \left[ \frac{d}{dt} (f(x_0 + te)) \right]_{t=0}$$

On retrouve la notion élémentaire de *dérivée de  $f$  suivant la direction  $e$* .

Soit maintenant  $B \in \overset{1}{\otimes} V$ ,  $B$  de classe  $C^1$  Alors

$$B \in C^1(V; F).$$

D'autre part

$$((U_{-t})_* B)_{x_0} = B(x_0 + te)$$

D'où

$$(\theta(A)B)_{x_0} = \left[ \frac{d}{dt} B(x_0 + te) \right]_{t=0}$$

dérivée qui existe en vertu de l'hypothèse  $C^1$  et qui est continue.

De même, si  $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ ,  $\omega$  de classe  $C^1$ , alors  $\theta(A)\omega$  existe et est de classe  $C^0$ .

### 3.1.4 Existence des dérivées de Lie

La dérivée de Lie d'un champ de vecteurs (resp. d'une forme différentielle) de classe  $C^1$ , est un champ de vecteurs (resp. une forme différentielle) de classe  $C^0$ .

PREUVE. — Supposons  $A_{x_0} \neq 0$ , alors utilisant le théorème de réduction et transportant 3.1.1 dans une carte adaptée à  $A$ , on se ramène au cas où  $V$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et où  $A$  est un champ constant et le résultat est une conséquence de 3.1.3.

(Si  $A_{x_0} = 0$ , on utilise le même artifice qu'en 2.2.3.)

## 3.2 PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVÉE DE LIE

Nous supposons implicitement que toutes les dérivées de Lie que nous écrivons existent.

### 3.2.1 $\theta(A)$ est un opérateur linéaire

PREUVE. — Les opérateurs  $U_t^*$  et  $(U_t)_*$  sont en effet des opérateurs linéaires.

3.2.2  $\theta(A)$  est une dérivation pour les structures de  $\mathfrak{A}(V)$ -module, c'est-à-dire que si  $f \in \mathfrak{A}(V)$  on a :

$$\begin{aligned} \theta(A)(fg) &= (\theta(A)f)g + f(\theta(A)g) & \text{où } g \in \mathfrak{A}(V) \\ \theta(A)(f\omega) &= (\theta(A)f)\omega + f(\theta(A)\omega) & \text{où } \omega \in \Lambda^p(V^*; F) \\ \theta(A)(fB) &= (\theta(A)f)B + f(\theta(A)B) & \text{où } B \in \bigotimes^1 V. \end{aligned}$$

$\theta(A)$  est une dérivation pour l'algèbre extérieure  $\Lambda(V^*)$  c'est-à-dire que :

$$\theta(A)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\theta(A)\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (\theta(A)\omega_2)$$

PREUVE. — On a :

$$\begin{aligned} (U_t^*)(fg) &= (U_t^*f)(U_t^*g) \\ (U_t^*)(f\omega) &= (U_t^*f)(U_t^*\omega) \\ (U_{-t})_*(fB) &= (U_t^*f)(U_{-t})_*B \\ (U_t)_*(\omega_1 \wedge \omega_2) &= (U_t)_*\omega_1 \wedge (U_t)_*\omega_2 \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de remarquer que les seconds membres sont *bilinéaires* dans chacun des deux termes entre parenthèses et d'appliquer la formule élémentaire donnant la dérivée d'une expression bilinéaire pour avoir le résultat.

### 3.2.3 Dérivée de Lie d'un accouplement

Soit  $B \in \bigotimes^1 V$ ,  $\omega \in \Lambda^1(V^*)$ , alors on a :

$$\theta(A)(\langle B, \omega \rangle) = \langle \theta(A)B, \omega \rangle + \langle B, \theta(A)\omega \rangle$$

PREUVE. — On a, d'après I-7.6.7

$$U_t^*(\langle B, \omega \rangle) = \langle (U_{-t})_* B, U_t^* \omega \rangle$$

Le second membre est bilinéaire dans chacun des deux facteurs de l'accouplement; d'où en dérivant on obtient le résultat.

*Remarque.* Ce résultat se généralise immédiatement à l'accouplement de  $g \in \Gamma_p^q(T(V), E)$  avec  $A^1, \dots, A^p \in \bigotimes^1 V$ .

### 3.2.4 Dérivée de Lie et différentielle

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $V$ , alors on a :

$$\theta(A)(df) = d(\theta(A)f)$$

(c'est-à-dire que la dérivée de Lie *commute* avec l'opération différentielle).

PREUVE. — On sait que différentielle et image réciproque commutent (1.2.3)

$$U_t^*(df) = d(U_t^*f)$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(U_t^*(df)) = \frac{d}{dt}(d(U_t^*f))$$

Le premier membre n'est rien d'autre que  $\theta(A)(df)$ ; si nous *commutons formellement* dans le second membre  $\frac{d}{dt}$  avec  $d$  nous obtenons :

$$= d\left(\frac{d}{dt}(U_t^*f)\right) = d(\theta(A)f)$$

Reste à justifier que :

$$d\left(\frac{d}{dt}(U_t^*f)\right) = \frac{d}{dt}(d(U_t^*f))$$

Nous nous ramenons par lecture dans une carte adaptée à  $A$ , au cas où  $A$  est le champ constant égal au premier vecteur  $e_1$  de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ . Alors on a :

$$(U_t^*f)(x_0) = f(x_0 + te_1)$$

et

$$[d(U_t^*f)]_{x_0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0 + te_1) e_k^*$$

où  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$  est la base duale de  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . D'où en dérivant en  $t$

$$\frac{d}{dt}[d(U_t^*f)]_{x_0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^k}(x_0) e_k^*$$

Le premier membre se calcule de même, et on obtient qu'il est égal à :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^1} (x_0) e_k^*$$

Alors  $f$  étant de classe  $C^2$ , on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^k}$$

ce qui donne l'identité cherchée.

### 3.3 CROCHET DE DÉRIVATIONS ET CROCHETS DE CHAMPS DE VECTEURS

Étant donné une variété  $V$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ),  $A \in \bigotimes^1 V$  de classe  $C^{k-r}$  ( $1 \leq r \leq k$ ), nous définissons un opérateur  $A_\bullet$  envoyant les fonctions de classe  $C^{k-r+1}$  dans les fonctions de classe  $C^{k-r}$  via la formule :

$$A_\bullet f = \langle A, df \rangle$$

Remarquons que si  $A$  est de classe  $C^1$  alors d'après 3.1.2 on retrouve la dérivée de Lie

$$A_\bullet f = \theta(A)f$$

Si  $r = k$ , on obtient une notion plus générale que celle de dérivée de Lie.

3.3.1 LEMME. — *L'application  $A \rightarrow A_\bullet$  est injective.*

PREUVE. — Cette application étant linéaire, il nous suffit de montrer que :

$$A_\bullet = 0 \quad \text{entraîne} \quad A = 0.$$

Supposons  $A \neq 0$ , alors il existe  $x_0 \in V$  tel que  $A_{x_0} \neq 0$ . Soit  $\varphi$  une carte définie sur un voisinage  $U$  de  $x_0$  et prenant ses valeurs dans l'espace vectoriel  $E$ . Posons :

$$\varphi'(x_0)(A_{x_0}) = z$$

Soit  $l \in E^*$  tel que  $l(z) = 1$ . Posons :

$$\tilde{f} = l \circ \varphi$$

Alors  $\tilde{f}$  est une fonction de classe  $C^k$  définie sur  $U$ , soit  $f$  une extension de  $\tilde{f}$  à  $V$  coïncidant avec  $\tilde{f}$  au voisinage de  $x_0$  (cf. I-3.4.2) On a :

$$(df)_{x_0} = (d\tilde{f})_{x_0}$$

d'où

$$\begin{aligned} (A_\bullet f)_{x_0} &= \langle A_{x_0}, (df)_{x_0} \rangle \\ &= \tilde{f}'(x_0)(A_{x_0}) \end{aligned}$$

D'après le théorème des fonctions composées

$$= l(\varphi'(x_0) \cdot A_{x_0}) = l(z) = 1$$

On a ainsi construit  $f$  tel que :

$$A_{\bullet} f \neq 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

3.3.2 THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $A, X \in \bigotimes^1 V$  de classe  $C^1$ . Posons

$$\theta(A)X = C$$

Alors, quelle que soit  $f$  de classe  $C^2$ , on a :

$$C_{\bullet} f = A_{\bullet} X_{\bullet} f - X_{\bullet} A_{\bullet} f$$

PREUVE. — On a par définition :

$$X_{\bullet} f = \langle X, df \rangle$$

Calculons la dérivée de Lie de cet accouplement. En utilisant 3.2.3, on obtient

$$\theta(A)(\langle X, df \rangle) = \langle \theta(A)X, df \rangle + \langle X, \theta(A) df \rangle$$

Utilisant la définition de  $C$  :

$$\langle \theta(A)X, df \rangle = C_{\bullet} f$$

D'autre part, d'après 3.2.4

$$\theta(A) df = d(\theta(A)f)$$

d'où

$$\begin{aligned} A_{\bullet} X_{\bullet} f &= C_{\bullet} f + \langle X, d(\theta(A)f) \rangle \\ &= C_{\bullet} f + X_{\bullet} A_{\bullet} f \end{aligned}$$

ce qui démontre 3.3.2.

3.3.3 COROLLAIRE. — Soient  $A, X$  deux champs de vecteurs de classe  $C^1$  sur une variété  $V$ .  
Alors

$$\theta(A)X = -\theta(X)A.$$

PREUVE. — Posons

$$C = \theta(A)X, \quad \tilde{C} = \theta(X)A.$$

Alors il résulte de 3.3.2 que

$$C_{\bullet} = -\tilde{C}_{\bullet}$$

d'où, d'après 3.3.1

$$C = -\tilde{C}$$

C.Q.F.D.

*Notation.* — Pour rappeler l'antisymétrie 3.3.3, on convient de noter

$$\theta(A)X \quad \text{par} \quad [A, X]$$

L'opérateur *crochet de deux champs de vecteurs* ainsi défini est *bilinéaire* sur  $\mathbf{R}$  et *antisymétrique*.

### 3.3.4 Identité de Jacobi

Soit  $V$  une variété de classe  $C^3$ ,  $A, B, C \in \overset{1}{\otimes} V$  de classe  $C^2$ , alors on a :

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

PREUVE. — D'après 3.3.1, il suffit de démontrer cette relation pour les opérateurs associés aux champs de vecteurs et opérant sur des fonctions de classe  $C^3$ . On a :

$$\begin{aligned} [A, B]_{\bullet} &= A_{\bullet}B_{\bullet} - B_{\bullet}A_{\bullet} \\ [[A, B], C]_{\bullet} &= (A_{\bullet}B_{\bullet} - B_{\bullet}A_{\bullet})C_{\bullet} - C_{\bullet}(A_{\bullet}B_{\bullet} - B_{\bullet}A_{\bullet}) \\ &= A_{\bullet}B_{\bullet}C_{\bullet} - B_{\bullet}A_{\bullet}C_{\bullet} - C_{\bullet}A_{\bullet}B_{\bullet} + C_{\bullet}B_{\bullet}A_{\bullet} \end{aligned}$$

On trouve, en développant ainsi les deux autres termes de l'identité de Jacobi, douze termes, chacun est obtenu deux fois avec des signes opposés.

### Linéarité du crochet

Le crochet *n'est pas* une opération linéaire sur l'anneau  $\mathfrak{A}(V)$ . En effet, d'après 3.2.2

$$[A, fX] = \theta(A)(fX) = f(\theta(A)X) + X\theta(A)f$$

D'où

$$[A, fX] = f[A, X] + (A_{\bullet}f)X$$

On obtient, utilisant l'antisymétrie :

$$3.3.5 \quad [fX, A] = f[X, A] - (A_{\bullet}f)X$$

La dérivée de Lie est, par contre,  $\mathfrak{A}(V)$ -linéaire sur les fonctions; on a :

3.3.6 Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $A \in \overset{1}{\otimes} V$ ,  $h \in \mathfrak{A}(V)$ ,  $f$  de classe  $C^1$ ,  $A$  et  $h$  de classe  $C^0$ . Alors on a :

$$(hA)_{\bullet}f = h(A_{\bullet}f)$$

PREUVE.

$$\begin{aligned} hA_{\bullet}f &= \langle hA, df \rangle = h\langle A, df \rangle \\ &= h(A_{\bullet}f) \end{aligned}$$

Les résultats 3.3.5 et 3.3.6 montrent que la dérivée de Lie des fonctions se comporte très différemment de la dérivée des champs de vecteurs (ou des formes différentielles).

## 3.3.7 Extension de la formule du crochet

Soit  $V$  une variété de classe  $C^3$ ,  $A, B \in \overset{1}{\otimes} V$  de classe  $C^2$ . Soit  $\omega \in \Lambda(V^*)$  (resp.  $X \in \overset{1}{\otimes} V$ ) de classe  $C^2$ . Alors on a :

$$\begin{aligned}\theta([A, B])\omega &= \theta(A)\theta(B)\omega - \theta(B)\theta(A)\omega \\ \theta([A, B])X &= \theta(A)\theta(B)X - \theta(B)\theta(A)X\end{aligned}$$

PREUVE. — Remarquons d'abord que dans le cas d'un champ de vecteur  $X$  ceci n'est rien d'autre que l'identité de Jacobi. Pour les formes différentielles posons :

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \theta([A, B]) \\ \Delta_2 &= \theta(A)\theta(B) - \theta(B)\theta(A)\end{aligned}$$

utilisant 3.2.2, on vérifie que :

$$\Delta_2(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\Delta_2\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (\Delta_2\omega_2)$$

D'autre part

$$\Delta_1 f = \Delta_2 f \quad \text{si} \quad f \in \mathcal{A}(V)$$

en vertu de 3.3.5.

D'autre part, d'après 3.2.4

$$\begin{aligned}d\Delta_1 &= \Delta_1 d \\ d\Delta_2 &= \Delta_2 d\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta_1 df = \Delta_2 df$$

Les opérateurs  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont locaux dans le sens que si  $U$  est un ouvert de  $V$ , alors

$$\Delta_i(\omega|U) = (\Delta_i\omega)|U \quad i = 1, 2$$

où  $\omega|U$  dénote la restriction de  $\omega$  à  $U$ .

Par suite en prenant pour  $U^\alpha$  le domaine de définition d'une carte numérique  $(\varphi^i)$  on aura (1.4.7)

$$\omega^\alpha = \sum_{\mathbf{H}} a_{\mathbf{H}} d\varphi^{\mathbf{H}}$$

D'où

$$\Delta_j \omega^\alpha = \sum_{\mathbf{H}} (\Delta_j a_{\mathbf{H}}) d\varphi^{\mathbf{H}} + \sum_{\mathbf{H}} a_{\mathbf{H}} \Delta_j (d\varphi^{\mathbf{H}}) \quad j = 1, 2$$

Comme

$$\begin{aligned}\Delta_1(a_{\mathbf{H}}) &= \Delta_2(a_{\mathbf{H}}) \\ \Delta_1(d\varphi^{i_1} \wedge d\varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}) &= (\Delta_1 d\varphi^{i_1}) \wedge d\varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p} \\ &\quad + \dots + d\varphi^{i_1} \wedge d\varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge (\Delta_1 d\varphi^{i_p})\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta_1 (d\varphi^i) &= \Delta_2 (d\varphi^i) \\ \text{entraîne} \quad \Delta_1 (d\varphi^H) &= \Delta_2 (d\varphi^H) \\ \text{et} \quad \Delta_1 (\omega^\alpha) &= \Delta_2 (\omega^\alpha) \end{aligned}$$

Ce qui avec le fait que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont locaux entraîne le résultat.

### 3.4 CALCULS PRATIQUES DANS UNE CARTE NUMÉRIQUE

En se restreignant à l'ouvert de définition  $U$  d'une carte numérique  $\varphi$  et en transportant par  $\varphi$ , on ramène les calculs pratiques au cas d'un ouvert  $O$  de

$\mathbf{R}^n$ . Alors  $A \in \bigotimes^1 O$  est donné par ses  $n$  composantes :  $A = (A^1, \dots, A^n)$ .  
On a, si  $f \in \mathcal{A}(O)$ ,  $f(\xi) = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$  :

$$\theta(A)f = \sum_i A^i \frac{\partial f}{\partial \xi^i}.$$

D'autre part :

$$\theta(A) df = d(\theta(A)f) = d\left(\sum_i A^i \frac{\partial f}{\partial \xi^i}\right) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi^i} dA^i + \sum_i A^i d\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^i}\right)$$

En particulier si  $f(\xi) = \xi^k$  on a :

$$\theta(A) (d\xi^k) = dA^k.$$

Soit maintenant  $\omega \in \Lambda^1(V^*)$

$$\omega = \sum a_i d\xi^i$$

Alors

$$\theta(A)\omega = \sum (\theta(A)a_i) d\xi^i + \sum a_i \theta(A) d\xi^i$$

D'où en remplaçant :

$$\theta(A)\omega = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial \xi^k} A^k d\xi^i + \sum_i a_i dA^i$$

De même on calcule la dérivée de Lie de

$$\pi \in \Lambda^p(V^*) \quad \text{où} \quad \pi = \sum_H a_H d\xi^H$$

On a :

$$\theta(A)\pi = \sum_H (\theta(A)a_H) d\xi^H + \sum_H a_H (\theta(A) d\xi^H)$$

où

$$\theta(A) (d\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_p}) = dA^{i_1} \wedge d\xi^{i_2} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_p} \\ + \dots + d\xi^{i_1} \wedge d\xi^{i_2} \wedge \dots \wedge dA^{i_p}.$$

Enfin pour calculer le crochet  $C = [A, B]$  des champs de vecteurs

$$A = (A^1, \dots, A^n) \quad B = (B^1, \dots, B^n)$$

on utilise la relation :

$$C_\bullet f = (A_\bullet B_\bullet - B_\bullet A_\bullet) f$$

Prenons  $f(\xi) = \xi^i$ , on a en particulier :

$$C^i = A \cdot B^i - B \cdot A^i$$

D'où en explicitant :

$$C^i = \sum_k \left( A^k \frac{\partial B^i}{\partial \xi^k} - B^k \frac{\partial A^i}{\partial \xi^k} \right) \quad i = 1, \dots, n.$$

### 3.5 INVARIANCE PAR UN GROUPE A UN PARAMÈTRE

Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $A \in \bigotimes^1 V$  de classe  $C^1$ ,  $U_t$  le pseudo-groupe associé à  $A$ . On dit qu'une fonction (resp. une forme différentielle) définie sur  $V$  est *invariante* si  $U_t^* f = f$  quel que soit  $t$ . De même on dit que  $X \in \bigotimes^1 V$  est *invariant* si  $(U_t)_* X = X$ . La notion de fonction invariante coïncide avec la notion élémentaire d'*intégrale première* du système différentiel déterminant les lignes de courant de  $A$ , c'est-à-dire de fonction constante sur chaque courbe intégrale.

La notion d'intégrale première en mécanique correspond aux quantités invariantes dans le mouvement, et par suite à des lois de conservation. Par exemple la loi de conservation de l'énergie s'écrit sous la forme que la fonction énergie est une intégrale première des équations de la dynamique.

**THÉORÈME.** — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction (resp. une forme différentielle  $\omega$ , un champ de vecteurs  $X$ ) soit invariante par  $U_t$  est que*

$$\theta(A)f = 0$$

(resp.  $\theta(A)\omega = 0$ ,  $\theta(A)X = 0$ ).

**PREUVE.** — Fixons  $x_0$  et posons

$$k_{x_0}(t) = (U_t^* f)_{x_0} \\ \text{(resp. } k_{x_0}(t) = (U_t^* \omega)_{x_0}, \quad k_{x_0}(t) = [(U_t)_* X]_{x_0})$$

Alors  $(\theta(A)f)(x_0) = 0$  s'écrit

$$k'_{x_0}(0) = 0$$

Le théorème signifie que si  $k_{x_0}(t)$  est constante alors  $k'_{x_0}(0) = 0$ , ce qui est évident, et réciproquement, ce qui est plus surprenant, que  $k'_{x_0}(0) = 0$  entraîne  $k_{x_0}(t) =$  constante. La démonstration de ce résultat dépendra du lemme suivant intéressant en soi.

**3.5.1 LEMME.** — *On a :*

$$k'_{x_0}(t) \cdot 1 = (U_t^*(\theta(A)f))_{x_0} = (\theta(A)(U_t^* f))_{x_0}$$

(formules analogues pour les formes différentielles et les champs de vecteurs).

PREUVE. — On a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{U_{t+\varepsilon}^* f - U_t^* f}{\varepsilon} \right)_{x_0} = k'_{x_0}(t) \cdot 1$$

D'après la propriété de pseudo-groupe :

$$U_{t+\varepsilon} = U_t \circ U_\varepsilon = U_\varepsilon \circ U_t$$

d'où

$$U_{t+\varepsilon}^* = U_\varepsilon^* \circ U_t^* = U_t^* \circ U_\varepsilon^*$$

d'où

$$\left( \frac{U_{t+\varepsilon}^* - U_t^*}{\varepsilon} \right) f = U_t^* \circ \left( \frac{U_\varepsilon^* f - f}{\varepsilon} \right) = \frac{U_\varepsilon^* g - g}{\varepsilon}$$

où  $g = U_t^* f$ .

En faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on démontre le lemme.

Pour démontrer le théorème, on écrit :

$$k'_{x_0}(t) \cdot 1 = U_t^*(\theta(A)f)$$

Comme  $\theta(A)f = 0$  par hypothèse, on obtient :

$$k'_{x_0}(t) \cdot 1 = 0$$

d'où

$$k_{x_0}(t) = c^{te}.$$

C.Q.F.D.

## 4 Cobord des formes différentielles

### 4.1 POSITION DU PROBLÈME

Soit  $A \in \overset{1}{\otimes} V$ , alors  $A$  est une *section*  $s$  du fibré tangent  $T(V)$  (I-7.4.3), c'est-à-dire une application :

$$s : V \rightarrow T(V)$$

En calculant l'application dérivée de  $s$ , on obtient :

$$s' : T(V) \rightarrow T(T(V))$$

par suite, on ne peut pas définir  $s'$  comme un *champ de tenseurs* sur  $V$ , puisque  $s'$  fait intervenir  $T(T(V))$  qui ne s'exprime pas à l'aide d'opérations de l'algèbre linéaire à partir de  $T(V)$ . On a par exemple :

4.1.1 PROPOSITION. — Donnons nous  $A \in \overset{1}{\otimes} V$ ,  $\pi \in \Lambda^1(V^*)$ . Soit

$$\Phi(X) = \langle \theta(X)A, \pi \rangle, \quad X \in \overset{1}{\otimes} V$$

Alors, il n'existe pas en général  $\rho \in \Lambda^1(V^*)$  tel que

$$\langle X, \rho \rangle = \Phi(X).$$

PREUVE. — Lisons l'expression de  $\Phi(X)$  dans une carte numérique (cf. 3.4). Alors apparaîtra une expression de la forme :

$$\sum a_i X^i + \sum b_{j,k} \frac{\partial X^j}{\partial \xi^k}$$

où  $X^i$  dénotent les composantes de  $X$  lues dans cette carte numérique. Alors que :

$$\langle X, \rho \rangle = \sum c_i X^i.$$

D'où, les  $b_{j,k}$  étant en général non tous nuls, les deux expressions ne peuvent être identifiées, les dérivées partielles des composantes de  $X$  figurant seulement dans la première.

#### 4.2 LE CRITÈRE D' $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ -LINÉARITÉ

THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $E$  un espace vectoriel. Donnons-nous une application  $p$ -linéaire antisymétrique  $\Phi$  du sous-espace de  $\bigotimes^1 V$  constitué des champs de vecteurs de classe  $C^1$  à valeurs dans l'espace vectoriel  $C^0(V; E)$ .

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $\omega \in \Lambda^p(V^*; E)$  telle que

$$\Phi(A^1, \dots, A^p) = \omega(A^1, \dots, A^p)$$

est que  $\Phi$  soit  $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ -linéaire; c'est-à-dire :

$$\Phi(fA^1, A^2, \dots, A^p) = f\Phi(A^1, \dots, A^p)$$

pour tout  $f \in \mathcal{A}(\mathbf{V})$ .

PREUVE. — La nécessité est immédiate :

$$(\Phi(fA^1, \dots, A^p))_x = \omega_x(f(x)A^1_x, \dots, A^p_x) = f(x)\omega_x(A^1_x, \dots, A^p_x)$$

Pour prouver la réciproque, nous allons montrer.

4.2.1 LEMME. — Soit  $A \in \bigotimes^1 V$  de classe  $C^k$ . Supposons que  $A_{x_0} = 0$ ; alors on peut trouver  $B^0, \dots, B^n \in \bigotimes^1 V$  de classe  $C^k$  et  $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{A}(\mathbf{V})$  de classe  $C^k$ , tels que

$$f_j(x_0) = 0 \quad \text{et que} \quad A = \sum_j f_j B^j$$

PREUVE. — Le lemme est évident si  $V$  est un ouvert d'un espace vectoriel  $E$ . Il suffit de prendre pour  $B^j (j = 1, 2, \dots, n)$  des champs de vecteurs constants égaux aux vecteurs d'une base de  $E$ . Les  $f_j$  sont alors les composantes de  $A$  dans cette base.

Sur une variété  $V$ , on considère une fonction  $p(x)$  égale à 1 en  $x_0$  et dont le support est contenu dans l'ouvert  $U$  de définition d'une carte  $\varphi$  de  $V$ . Posons :

$$\begin{aligned} B^0 &= A \\ f_0 &= 1 - p \\ C &= A - f_0 B^0 = pA. \end{aligned}$$

Soit  $\hat{C}$  la restriction de  $C$  à  $U$ . Transportons  $\hat{C}$  par  $\varphi_*$ ; on obtient  $\hat{\hat{C}}$ . Comme  $\hat{\hat{C}}_{\xi_0} = 0$  d'après ce qui précède :

$$\hat{\hat{C}} = \sum_{j=1}^n \hat{f}_j \hat{B}^j \quad \hat{f}_j(\xi_0) = 0$$

Soit  $\hat{B}_j = (\varphi^{-1})_* \hat{B}^j$ . Notons par  $p_1$  une seconde fonction de classe  $C^k$  égale à 1 sur le support de  $p_0$  et à support contenu dans  $U$ . Posons

$$\begin{aligned} B_x^j &= p_1(x) \hat{B}_x^j & \text{si } x \in U \\ B_x^j &= 0 & \text{si } x \notin U. \end{aligned}$$

Alors  $B^j \in \bigotimes^1 V$  et sera de classe  $C^k$  et de plus on aura :

$$A = f_0 B^0 + \sum_{j \geq 1} f_j B^j$$

où les  $f_j$  sont définies, pour  $j \geq 1$ , par :

$$\begin{aligned} f_j(x) &= p_1(x) \hat{f}_j(\varphi(x)) & \text{si } x \in U \\ f_j(x) &= 0 & \text{si } x \notin U \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

#### PREUVE DU THÉORÈME

$$4.2.2 \quad A_{x_0}^1 = 0 \quad \text{entraîne} \quad (\Phi(A^1, \dots, A^p))_{x_0} = 0$$

En effet, d'après 4.2.1 :

$$A^1 = \sum_j f_j B^j;$$

l'hypothèse de  $\mathcal{L}(V)$ -linéarité entraîne :

$$\Phi\left(\sum_j f_j B^j, A^2, \dots, A^p\right) = \sum_j f_j \Phi(B^j, A^2, \dots, A^p)$$

et comme  $f_j(x_0) = 0$  on en déduit 4.2.2.

Considérons l'application

$$u \in \mathcal{L}_{p.a.}\left(\bigotimes^1 V; E\right)$$

définie par :

$$u(A^1, \dots, A^p) = (\Phi(A^1, \dots, A^p))_{x_0}$$

Alors si  $A_{x_0}^i = \tilde{A}_{x_0}^i$ , on déduit de 4.2.2 que  $u(A^1, \dots, A^p) = u(\tilde{A}^1, \dots, \tilde{A}^p)$ . Par suite  $u$  se *factorise* via l'application  $v_{x_0}$  :

$$v_{x_0}(A) = A_{x_0}$$

c'est-à-dire qu'il existe une application :

$$\rho_{x_0} \in \mathcal{L}_{p,a}(\mathbb{T}_{x_0}(V); E)$$

telle que :

$$u(A^1, \dots, A^p) = \rho(v_{x_0}(A^1), \dots, v_{x_0}(A^p)),$$

ce qui démontre le théorème.

### 4.3 COBORD DES FORMES DIFFÉRENTIELLES DE DEGRÉ 1

Pour faciliter la lecture, nous introduirons d'abord le cobord pour les formes de degré 1, avant de faire l'exposé dans le cas général qui sera ensuite traité en suivant toujours la même approche.

4.3.1 LEMME FONDAMENTAL. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $\omega \in \Lambda^1(V; E)$ ,  $\omega$  de classe  $C^1$ ; quels que soient  $A, B \in \bigotimes^1 V$  de classe  $C^1$ , posons

$$\Phi(A, B) = \theta(A)(\langle B, \omega \rangle) - \theta(B)(\langle A, \omega \rangle) - \langle [A, B], \omega \rangle$$

Alors  $\Phi(A, B)$  est antisymétrique et  $\mathfrak{A}_0(V)$ -linéaire.

PREUVE. — Prenons  $f$  de classe  $C^1$ ; alors on a d'après 3.3.6

$$\Phi(fA, B) = f(\theta(A)\langle B, \omega \rangle) - \theta(B)(f\langle A, \omega \rangle) - \langle [fA, B], \omega \rangle$$

On a, d'après 3.2.2

$$\theta(B)(f\langle A, \omega \rangle) = (\theta(B)f)\langle A, \omega \rangle + f(\theta(B)\langle A, \omega \rangle)$$

et d'après 3.3.5

$$[fA, B] = f[A, B] - (B_\bullet f)A$$

D'où l'on obtient :

$$\Phi(fA, B) - f\Phi(A, B) = (B_\bullet f)\langle A, \omega \rangle - \langle (B_\bullet f)A, \omega \rangle = 0.$$

C.Q.F.D.

*Définition du cobord*

D'après I-7.5.5, il existe une forme

$$\sigma \in \Lambda^2(V; E)$$

unique telle que :

$$\langle A \wedge B, \sigma \rangle = \Phi(A, B)$$

On pose par définition :

$$\sigma = d\omega$$

et on appellera  $\sigma$  le *cobord* de  $\omega$ . Le cobord est par suite complètement déterminé par la formule :

$$4.3.2 \quad \theta(A)\langle B, \omega \rangle - \theta(B)\langle A, \omega \rangle = \langle [A, B], \omega \rangle + \langle A \wedge B, d\omega \rangle$$

*Propriétés du cobord*

#### 4.3.3 Cobord d'une différentielle

PROPOSITION. — Soit  $f \in C^2(V; E)$ . Posons

$$\omega = df$$

Alors

$$d\omega = 0 \quad (\text{c'est-à-dire } d^2f = 0)$$

PREUVE.

$$\begin{aligned} \theta(A)\langle B, df \rangle &= A \cdot B \cdot f \\ \theta(B)\langle A, df \rangle &= B \cdot A \cdot f \\ \langle [A, B], df \rangle &= [A, B] \cdot f \end{aligned}$$

Utilisant 3.3.2, on obtient que 4.3.2 s'écrit :

$$\langle A \wedge B, d\omega \rangle = 0$$

quels que soient A et B de classe  $C^1$ ; d'où  $d\omega = 0$ .

C.Q.F.D.

#### 4.3.4 Cobord et $\mathcal{A}(V)$ -linéarité

On a :

PROPOSITION. — Soit  $\omega \in \Lambda^1(V; E)$  de classe  $C^1$ ,  $f \in \mathcal{A}(V)$  de classe  $C^1$ . Posons

$$\pi = f\omega$$

Alors on a :

$$d\pi = df \wedge \omega + f d\omega.$$

PREUVE. — On a, d'après 4.3.2

$$\begin{aligned} \langle A \wedge B, d\pi \rangle &= \theta(A)(f\langle B, \omega \rangle) - \theta(B)(f\langle A, \omega \rangle) - f\langle [A, B], \omega \rangle \\ &= f\langle A \wedge B, d\omega \rangle + \langle A, df \rangle \langle B, \omega \rangle - \langle B, df \rangle \langle A, \omega \rangle. \end{aligned}$$

Utilisant la définition du produit extérieur des deux formes linéaires  $df_x$  et  $\omega_x$ , on obtient

$$\langle A \wedge B, df \wedge \omega \rangle = \begin{vmatrix} \langle A, df \rangle & \langle A, \omega \rangle \\ \langle B, df \rangle & \langle B, \omega \rangle \end{vmatrix}$$

d'où le résultat.

4.3.5 COROLLAIRE. — *Calcul du cobord.* Si  $\omega = \sum_{k=1}^n C_k df_k$ , alors  $d\omega = \sum_{k=1}^n dC_k \wedge df_k$ , où  $f_k$  et  $C_k$  sont des fonctions de  $\mathfrak{B}(\mathbf{V})$ , de classe  $C^2$  pour  $f_k$ , de classe  $C^1$  pour  $C_k$ . En effet, on a :

$$d(C_k df_k) = dC_k \wedge df_k + C_k d(df_k)$$

D'après 4.3.3, le second terme est nul; d'où le résultat.

#### 4.4 DÉFINITION GÉNÉRALE DU COBORD

Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $\omega \in \Lambda^p(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ . Nous définirons le cobord

$$d\omega \in \Lambda^{p+1}(\mathbf{V}; \mathbf{E})$$

par la formule, valable quels que soient

$$A_j \in \overset{1}{\otimes} \mathbf{V}, \quad A_j \text{ de classe } C^1,$$

$$\begin{aligned} 4.4.1 \quad & \langle A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{p+1}, d\omega \rangle \\ &= \sum_j (-1)^{j+1} \theta(A_j) (\omega(A_1, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_{p+1})) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(A_1, \dots, A_{i-1}, \hat{A}_i, [A_i, A_j], A_{i+1}, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_{p+1}) \end{aligned}$$

où le symbole  $\hat{A}_i$  ou  $\hat{A}_j$  signifie que l'on a retiré de l'expression,  $A_i$  ou  $A_j$ .

Reste à justifier cette définition. Le second membre est évidemment antisymétrique dans les  $A_i$ . Utilisant le théorème 4.2, tout revient à démontrer

4.4.2 LEMME. — *Le second membre de 4.4.1 est  $\mathfrak{B}(\mathbf{V})$ -linéaire par rapport à  $A_1$ .*

PREUVE. — Soit  $\tilde{A}_1 = fA_1$ . Les termes du second membre de 4.4.1 qui ne sont pas linéaires en  $f$  de façon évidente, s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq 2} (-1)^{j+1} \theta(A_j) (f\omega(A_1, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_{p+1})) \\ & + \sum_{1 < j} (-1)^{j+1} \omega([fA_1, A_j], A_2, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_{p+1}) \end{aligned}$$

La partie non linéaire en  $f$ , d'après :

$$[fA_1, A_j] = f[A_1, A_j] - (\theta(A_j)f)A_1,$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq 2} (-1)^{j+1} [(\theta(A_j)f)\omega(A_1, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_{p+1}) \\ & - (\theta(A_j)f)\omega(A_1, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_{p+1})] \end{aligned}$$

et est ainsi nulle.

C.Q.F.D.

## 4.5 EXPRESSION DU COBORD DANS UNE CARTE NUMÉRIQUE

THÉORÈME. — Soit  $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ ,  $\varphi_\alpha^i$  une carte numérique définie sur l'ouvert  $U^\alpha$  de  $V$ ,  $\omega^\alpha$  la restriction de  $\omega$  à  $U^\alpha$ ,  $(d\omega)^\alpha$  la restriction de  $d\omega$  à  $U^\alpha$ . Alors, si

$$\omega^\alpha = \sum_{\mathbf{H}} a_{\mathbf{H}} d\varphi_\alpha^{\mathbf{H}},$$

on a :

$$d\omega^\alpha = \sum_{\mathbf{H}} (da_{\mathbf{H}}) \wedge d\varphi_\alpha^{\mathbf{H}}$$

PREUVE. — Remarquons d'abord que :

$$(d\omega)^\alpha = d(\omega^\alpha)$$

Ceci tient au caractère local de la formule 4.4.1. En transportant  $\omega^\alpha$  sur l'ouvert  $O_\alpha$  d'arrivée de la carte  $\varphi_\alpha$ , tout revient à démontrer que si  $O$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et si

$$\pi = \sum_{\mathbf{H}} b_{\mathbf{H}} d\xi^{\mathbf{H}} \quad \pi \in \Lambda^p(O^*)$$

alors

$$d\pi = \sum_{\mathbf{H}} (db_{\mathbf{H}}) \wedge d\xi^{\mathbf{H}} \quad \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbf{R}^n$$

Notons par  $e_1 \dots e_n$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ ; si  $H_0$  est une partie à  $p+1$  éléments donnée

$$H_0 = (i_1, \dots, i_{p+1}),$$

considérons les champs de vecteurs constants :

$$A_1 = e_{i_1}, \dots, A_{p+1} = e_{i_{p+1}}$$

Alors

$$[A_i, A_j] = 0 \quad (\text{cf. 3.3.2})$$

D'autre part, notons  $H_0^j$  la partie  $i_1, \dots, i_{p+1}$  dont on a retiré  $i_j$ . On a :

$$\omega(A_1, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_{p+1}) = a_{H_0^j}$$

ce qui permet d'écrire 4.4.1

$$\langle e_{i_0} \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, (d\omega)_\xi \rangle = \sum_j (-1)^{j+1} \frac{\partial}{\partial \xi_{i_j}} (a_{H_0^j})$$

D'autre part, la formule proposée s'écrit en développant :

$$(d\omega)^\alpha = \sum_{\mathbf{H}, s} \frac{\partial a_{\mathbf{H}}}{\partial \xi_s} d\xi_s \wedge d\xi^{\mathbf{H}}$$

En identifiant :

$$H \cup \{s\} = H_0$$

d'où

$$H = H_0^j, \quad i_j = s$$

comme enfin

$$d\xi_{i_j} \wedge d\xi^{H_0^j} = (-1)^{j+1} d\xi^{H_0}$$

on obtient que les deux formules sont identiques.

C.Q.F.D.

#### 4.6 PROPRIÉTÉS DU COBORD

Ayant défini par 4.4.1, le cobord de façon intrinsèque nous allons, pour alléger les calculs qui pourraient être effectués à partir de 4.4.1, démontrer ces propriétés en utilisant 4.5.

4.6.1 *Le cobord est un opérateur défini sur les formes de classe  $C^1$  et prenant ses valeurs dans les formes de classe  $C^0$  qui augmente le degré d'une unité. De plus il est de carré nul :*

$$d(d\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \text{ est de classe } C^2$$

PREUVE. — Pour obtenir que le cobord est de carré nul (voir 4.3.3) il suffit de considérer les composantes c'est-à-dire les formes à valeurs scalaires. On se place alors, dans une carte numérique, sur un ouvert  $O$  de  $\mathbf{R}^n$ . On a :

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\mathbf{H}} a_{\mathbf{H}} d\xi^{\mathbf{H}} \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \\ d\omega &= \sum_{\mathbf{H}} da_{\mathbf{H}} \wedge d\xi^{\mathbf{H}} \\ &= \sum_{\mathbf{H}} \frac{\partial a_{\mathbf{H}}}{\partial \xi^k} d\xi^k \wedge d\xi^{\mathbf{H}} \\ d(d\omega) &= \sum_{\mathbf{H}} \frac{\partial^2 a_{\mathbf{H}}}{\partial \xi^s \partial \xi^k} d\xi^s \wedge d\xi^k \wedge d\xi^{\mathbf{H}} \end{aligned}$$

En regroupant les dérivées secondes, on obtient :

$$\left( \frac{\partial^2 a_{\mathbf{H}}}{\partial \xi^s \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 a_{\mathbf{H}}}{\partial \xi^k \partial \xi^s} \right) d\xi^s \wedge d\xi^k$$

parenthèse qui est nulle en vertu de la commutativité des dérivées partielles secondes.

4.6.2 *Cobord et structure d'algèbre sur  $\Lambda(V^*)$ . Le cobord est une antiderivation, c'est-à-dire que si  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda(V^*)$  on a :*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{r_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$$

où  $r_1 = \text{degré de } \omega_1$ .

On définit le cobord sur  $\Lambda^0(V, E) = \mathfrak{A}(V)$  comme la différentielle.

PREUVE. — En utilisant une carte numérique, tout revient à démontrer cette identité dans le cas d'un ouvert  $O$  de  $\mathbf{R}^n$ . Alors

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sum a_{\mathbf{H}_1} d\xi^{\mathbf{H}_1} \\ \omega_2 &= \sum b_{\mathbf{H}_2} d\xi^{\mathbf{H}_2} \\ \omega_1 \wedge \omega_2 &= \sum_{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2} a_{\mathbf{H}_1} b_{\mathbf{H}_2} d\xi^{\mathbf{H}_1} \wedge d\xi^{\mathbf{H}_2} \\ d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \sum_{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2} ((da_{\mathbf{H}_1})b_{\mathbf{H}_2} + a_{\mathbf{H}_1}(db_{\mathbf{H}_2})) \wedge d\xi^{\mathbf{H}_1} \wedge d\xi^{\mathbf{H}_2}\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}(da_{\mathbf{H}_1})b_{\mathbf{H}_2} \wedge d\xi^{\mathbf{H}_1} \wedge d\xi^{\mathbf{H}_2} &= (da_{\mathbf{H}_1} \wedge d\xi^{\mathbf{H}_1}) \wedge (b_{\mathbf{H}_2} d\xi^{\mathbf{H}_2}) \\ a_{\mathbf{H}_1}(db_{\mathbf{H}_2}) \wedge d\xi^{\mathbf{H}_1} \wedge d\xi^{\mathbf{H}_2} &= (-1)^{r_1}(a_{\mathbf{H}_1} d\xi^{\mathbf{H}_1}) \wedge (db_{\mathbf{H}_2} \wedge d\xi^{\mathbf{H}_2})\end{aligned}$$

d'où en sommant sur  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  on a le résultat.

4.6.3 COROLLAIRE. — Soit  $f_1, \dots, f_q \in \mathcal{A}(\mathbf{V})$ ,  $b_{\mathbf{K}} \in (\mathbf{V})$ . Posons

$$\omega = \sum_{\mathbf{K}} b_{\mathbf{K}} df^{\mathbf{K}}$$

Alors on a

$$d\omega = \sum_{\mathbf{K}} db_{\mathbf{K}} \wedge df^{\mathbf{K}}$$

PREUVE. — Si  $\mathbf{K} = (i_1, \dots, i_p)$  on a, d'après 4.6.2

$$\begin{aligned}d(df^{\mathbf{K}}) &= (ddf^{i_1}) \wedge df^{i_2} \wedge \dots \wedge df^{i_p} \\ &\quad - df^{i_1} \wedge d(df^{i_2}) \wedge \dots \wedge df^{i_p}\end{aligned}$$

Utilisant alors 4.6.1, on obtient que tous les termes sont nuls; d'où :

$$d(df^{\mathbf{K}}) = 0.$$

Utilisant encore 4.6.2, on obtient 4.6.3.

#### 4.6.4 Cobord et image réciproque

Soient  $\mathbf{V}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}$  deux variétés de classe  $C^2$ ; soit  $f \in C^2(\mathbf{V}; \tilde{\mathbf{V}})$   $\tilde{\omega} \in \tilde{\mathbf{V}} \wedge^p(\tilde{\mathbf{V}}; \mathbf{E})$ ,  $\tilde{\omega}$  de classe  $C^1$ , alors on a :

$$d(f^*\tilde{\omega}) = f^*(d\tilde{\omega})$$

Ce que l'on exprime en disant que *cobord et image réciproque commutent*.

PREUVE. — Il suffit de démontrer ce résultat pour les formes à valeurs scalaires. En utilisant des cartes numériques, on ramène la situation au cas où  $\mathbf{V}$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  sont deux ouverts de  $\mathbf{R}^n$  et  $\mathbf{R}^{\tilde{n}}$ . Alors  $f$  est donnée par  $\tilde{n}$  composantes :

$$f_1, \dots, f_{\tilde{n}}$$

et

$$\tilde{\omega} = \sum \tilde{a}_{\mathbf{H}} d\tilde{\xi}^{\mathbf{H}}.$$

On a alors

$$f^* \tilde{\omega} = \sum_{\mathbf{H}} b_{\mathbf{H}} df^{\mathbf{H}} \quad \text{où} \quad b_{\mathbf{H}} = f^* \tilde{a}_{\mathbf{H}}$$

$$d(f^* \tilde{\omega}) = \sum_{\mathbf{H}} db_{\mathbf{H}} \wedge df^{\mathbf{H}}$$

D'après 1.2.3, on a :

$$\begin{aligned} db_{\mathbf{H}} &= df^* a_{\mathbf{H}} = f^*(da_{\mathbf{H}}) \\ &= \sum f^*(da_{\mathbf{H}}) \wedge df^{\mathbf{H}} \\ &= f^*(\sum da_{\mathbf{H}} \wedge d\tilde{\xi}^{\mathbf{H}}) = f^* d\tilde{\omega} \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

#### 4.6.5 Produit intérieur

Soit  $A \in \bigotimes^1 V$ ,  $\omega \in \Lambda^p(V; E)$ ; nous définirons  $\pi \in \Lambda^{p-1}(V; E)$  par la formule :

$$\pi_x(z_1, \dots, z_{p-1}) = \omega_x(A_x, z_1, \dots, z_{p-1})$$

où  $z_1, \dots, z_{p-1} \in T_x(V)$

Le second membre est évidemment linéaire antisymétrique dans les  $z_i$ ; par suite, cette formule définit une application  $(p-1)$ -linéaire antisymétrique de  $T_x(V)$  dans  $E$ , c'est-à-dire  $\pi \in \Lambda^{p-1}(V; E)$ .

On pose

$$\pi = i(A)\omega$$

et on dit que  $i(A)$  est le produit intérieur de  $\omega$  par le champ  $A$ .

$$i(A) : \Lambda^p(V; E) \rightarrow \Lambda^{p-1}(V; E); \quad p \geq 1$$

sur  $\Lambda^1(V; E)$ ,  $i(A)$  n'est autre que l'accouplement :

$$i(A)\omega = \langle A, \omega \rangle$$

Enfin remarquons que sur  $\Lambda(V^*)$ ,  $i(A)$  est une antidérivation; c'est-à-dire que

$$4.6.6 \quad i(A)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i(A)\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{r_1} \omega_1 \wedge (i(A)\omega_2)$$

Cette formule se vérifie aisément en prenant un point  $x_0 \in V$ , une base  $e_1, \dots, e_n$  de  $T_{x_0}(V)$  avec  $e_1 = A_{x_0}$  et en écrivant  $(\omega_i)_{x_0}$  à l'aide de  $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ .

THÉORÈME DE CARTAN. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $\omega \in \Lambda^p(V; E)$ ,  $A \in \bigotimes^1 V$ ,  $A$  et  $\omega$  de classe  $C^1$ ; alors on a :

4.6.7

$$\theta(A)\omega = i(A)d\omega + di(A)\omega.$$

PREUVE. — On se ramène d'abord aux formes différentielles scalaires. Montrons la formule de Cartan au voisinage d'un point  $x_0 \in V$  tel que  $A_{x_0} \neq 0$ .

Appliquons le théorème de réduction et considérons une carte numérique dans laquelle le champ  $A$  se lise suivant le champ constant égal au premier vecteur de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

La formule de Cartan s'écrit alors dans cette carte, si  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$

$$\begin{aligned}\omega &= \sum a_{\mathbf{H}} d\xi^{\mathbf{H}}, & d\omega &= \sum da_{\mathbf{H}} \wedge d\xi^{\mathbf{H}}, \\ \theta(A)\omega &= \sum \frac{\partial a_{\mathbf{H}}}{\partial \xi^1} d\xi^{\mathbf{H}}.\end{aligned}$$

En utilisant 4.7.2

$$\begin{aligned}i(A)d\omega &= \sum (i(A) da_{\mathbf{H}}) \wedge d\xi^{\mathbf{H}} - \sum da_{\mathbf{H}} \wedge (i(A) d\xi^{\mathbf{H}}) \\ i(A)\omega &= \sum a_{\mathbf{H}} \wedge (i(A) d\xi^{\mathbf{H}}),\end{aligned}$$

on a :

$$di(A)\omega = \sum da_{\mathbf{H}} \wedge (i(A) d\xi^{\mathbf{H}}),$$

puisque  $i(A) d\xi^{\mathbf{H}}$  est monome extérieur de la forme  $d\xi^{\mathbf{H}'}$ , et par suite, de cobord nul. D'où :

$$i(A) d\omega + di(A)\omega = \sum (i(A) da_{\mathbf{H}}) \wedge d\xi^{\mathbf{H}}$$

Mais  $i(A) da_{\mathbf{H}} = \frac{\partial a_{\mathbf{H}}}{\partial \xi^1}$ , d'où le résultat. Ainsi le théorème de Cartan est vrai sur :

$$\Omega = \{x | A_x \neq 0\}.$$

$\Omega$  est un ouvert de  $V$ , d'après la continuité des deux membres de 4.7.3. Il en résulte que 4.7.3 est vrai sur  $\bar{\Omega}$ . Posons  $\Delta =$  complémentaire de  $\bar{\Omega}$ ; alors  $\Delta$  est un ouvert sur lequel  $A \equiv 0$ ; par suite la formule de Cartan est trivialement vraie sur  $\Delta$ , c'est-à-dire finalement sur  $V$  tout entier.

## 5 Le théorème de Frobenius

La théorie de Frobenius peut apparaître dans une certaine mesure comme la généralisation à une dimension supérieure à 1 de la notion de ligne de courant d'un champ de vecteurs. (Ce qui n'est d'ailleurs que partiellement exact). Mais la justification de l'étude entreprise dans ce paragraphe se trouve dans ses applications, (en particulier à la théorie des groupes de Lie).

### 5.1 NOTION DE $p$ -CHAMP

Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$  de dimension  $n$ ; soit  $p$  un entier  $< n$ . On appellera  $p$ -champ  $M$  la donnée en tout point  $x \in V$  d'un sous-espace, noté  $M_x$ , de dimension  $p$  de  $T_x(V)$ .

On a pour les  $p$ -champs les notions correspondantes à celle des champs de vecteurs (cf. I-7.4).

5.1.1 *Restriction d'un  $p$ -champ à un ouvert  $\Omega$  de  $V$ .*

La restriction est possible par l'identification  $T_x(\Omega)$  avec  $T_x(V)$  pour tout  $x \in \Omega$ .

5.1.2 *Transport d'un  $p$ -champ par un difféomorphisme*

Soient  $V$  et  $\tilde{V}$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $h$  un difféomorphisme de  $V$  sur  $\tilde{V}$ ,  $M$  un  $p$ -champ sur  $V$ , on définit un  $p$ -champ  $\tilde{M}$  sur  $\tilde{V}$  et on pose

$$\tilde{M} = h_* M$$

par la formule

$$\tilde{M}_{\tilde{x}} = h'(x) \cdot M_x \quad \text{où} \quad x = h^{-1}(\tilde{x}).$$

5.1.3 *Lecture d'un  $p$ -champ dans une carte*

Soit  $M$ , un  $p$ -champ défini sur une variété  $V$ ,  $\varphi_\alpha$  une carte de  $V$  définie sur l'ouvert  $U_\alpha$  de  $V$ . On note

$$M^\alpha \quad \text{la restriction de} \quad M \quad \text{à} \quad U_\alpha$$

et par

$$M^\alpha = (\varphi_\alpha)_* M^\alpha$$

On dira que  $M^\alpha$  est le  $p$ -champ  $M$  lu dans la carte  $\varphi_\alpha$ .

5.1.4  *$p$ -champ associé à un système de champs de vecteurs*

Donnons nous  $A^1, A^2, \dots, A^p, A^i \in \overset{1}{\otimes} V$ .

Supposons que quel que soit  $x \in V$ , les vecteurs

$$\{A_x^i\}_{i=1}^p \quad \text{sont linéairement indépendants.}$$

Alors les vecteurs  $A_x^i$  engendrent un sous-espace  $M_x$  de dimension  $p$  de  $T_x(V)$ . La correspondance  $x \rightarrow M_x$  définit un  $p$ -champ  $M$  sur  $V$ . On dira que  $M$  est défini par le système  $(A^1, \dots, A^p)$ .

Deux systèmes de champs de vecteurs différents  $(A^1, \dots, A^p)$  et  $(\tilde{A}^1, \dots, \tilde{A}^p)$  peuvent définir le même  $p$ -champ.

Par exemple, si  $p = 1$ , on a la proposition évidente suivante.

5.1.5 PROPOSITION. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  et  $\tilde{A}$  définissent le même 1-champ est que l'on ait*

$$A = h\tilde{A} \quad \text{avec} \quad h \in \mathcal{A}(V), \quad h(x) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in V$$

Cette proposition montre que la notion de 1-champ diffère de celle de champ de vecteurs.

5.1.6 *p*-champ de classe  $C^k$ 

Soit  $V$  une variété de classe  $C^{k+1}$ ,  $M$  un  $p$ -champ sur  $V$ . On dira que  $M$  est de classe  $C^k$  si pour tout  $x_0 \in V$  on peut trouver un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $x_0$  et  $A^1, \dots, A^p \in \bigotimes^1 \Omega$  les  $A^i$  étant de classe  $C^k$ , tels que la restriction de  $M$  à  $\Omega$  soit définie par  $A^1, \dots, A^p$ .

5.2 *p*-CHAMP COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE. LE THÉORÈME DE RÉDUCTION5.2.1 *Notion de carte adaptée*

Soit  $O$  un ouvert d'un espace vectoriel  $E$ . Nous dirons qu'un  $p$ -champ  $N$  défini sur  $O$  est *constant* si, pour tout  $\xi \in O$ ,  $N$  est un sous-espace fixe de  $E$ . (On identifie  $T_\xi(O)$  avec  $E$ ).

Étant donné une variété  $V$  et un  $p$ -champ  $M$  défini sur  $V$ , nous dirons qu'une carte  $\varphi$  d'un ouvert de  $V$  est *adaptée* à  $M$  si  $M$  se lit dans cette carte suivant un  $p$ -champ constant.

Le théorème de réduction consistera à affirmer l'existence d'une carte adaptée définie au voisinage de tout point de  $V$ .

Contrairement à la situation pour les champs de vecteurs (cf. 2.1) le théorème de réduction ne sera valable que si le  $p$ -champ  $M$  satisfait une *condition nouvelle* complètement différente d'hypothèses de « classe  $C^1$  ».

5.2.2 *Sous-module de  $\bigotimes^1 V$  associé à un  $p$ -champ*

Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $M$  un  $p$ -champ de classe  $C^1$  sur  $V$ . On associe à  $M$  la partie  $\mathfrak{M}$  de  $\bigotimes^1 V$  ainsi définie

$$\mathfrak{M} = \left\{ A \in \bigotimes^1 V \mid A \text{ de classe } C^1, \text{ et } A_x \in M_x \text{ pour tout } x \in V \right\}$$

Alors notant par  $\mathfrak{A}_1(V)$  les fonctions de classe  $C^1$  définies sur  $V$  on a que

$$\mathfrak{M} \text{ est un } \mathfrak{A}_1(V) \text{ module.}$$

5.2.3 *Condition de Frobenius*

Soit  $U_t$  un pseudo groupe de transformation à 1 paramètre de la variété  $V$ , soit  $M$  un  $p$ -champ sur  $V$  on dira que  $M$  est *invariant par  $U_t$*  si, notant par  $\tilde{M}$  la restriction de  $M$  à l'ouvert de définition de  $U_t$  et par  $\tilde{\tilde{M}}$  la restriction de  $M$  à l'ouvert de définition de  $U_{-t}$ , on ait

$$(U_t)_* \tilde{M} = \tilde{\tilde{M}}$$

Dans le cas particulier où  $U_t$  est défini sur tout  $V$  on a simplement :

$$(U_t)_* M = M.$$

Dans tous les cas on peut écrire l'invariance de  $M$  par  $U_t$ , sous la forme plus développée

$$U'_t(x) \cdot M_x = M_{U_t(x)}$$

sous la seule condition que  $x$  soit dans l'ouvert de définition de  $U_t$ .

5.2.4 DÉFINITION. — Un  $p$ -champ  $M$  d'une variété  $V$  sera dit complètement intégrable si quel que soit  $A \in \mathfrak{A}$ , le pseudo-groupe à 1 paramètre  $U_t$  associée à  $A$  laisse  $M$  invariant.

On a l'énoncé suivant :

5.2.5 THÉORÈME DE FROBENIUS. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $M$  un  $p$ -champ de classe  $C^1$  sur  $V$ , une condition nécessaire et suffisante pour qu'au voisinage de tout point  $x_0$  de  $V$ , on puisse trouver pour  $M$  une carte adaptée, est que  $M$  soit complètement intégrable.

PREUVE. — La nécessité est triviale. En effet la condition de Frobenius étant invariante par difféomorphisme il suffit de vérifier qu'un  $p$ -champ constant défini sur un ouvert  $O$  d'un espace vectoriel  $E$  la satisfait. Soit  $M$  un tel  $p$ -champ et notons par  $\hat{E}$  le sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $M_x = \hat{E}$  pour tout  $x \in O$ . Soit  $l \in E^*$  tel que  $l$  s'annule sur  $\hat{E}$ . Soit  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $x_1 \in O$ . Notons par  $U_t$  le groupe associé à  $A$ . Posons

$$l(U_t(x_1)) = \lambda(t)$$

Alors

$$\lambda'(t) \cdot 1 = l(A_{U_t(x_1)}) = 0$$

c'est-à-dire que  $\lambda(t)$  est constante. On en déduit que si l'on pose

$$H = \{x | x = x_1 + z \quad \text{où} \quad z \in \hat{E}\}$$

alors on a

$$U_t(H) \subset H$$

Comme d'après I-6.2.6

$$U'_t(x_1)(T_{x_1}(H)) = T_{U_t(x_1)}(U_t(H))$$

et comme

$$T_x(H) = \hat{E}$$

ceci s'écrit

$$U'_t(x_1) \cdot \hat{E} = \hat{E}$$

ou encore

$$U'_t(x_1)M_{x_1} = M_{U_t(x_1)}$$

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant démontrer le caractère suffisant de la condition de Frobenius, ceci par une récurrence sur la dimension  $p$  du  $p$ -champ  $M$ .

Si  $p = 1$ , on choisit  $A \in \mathcal{M}$  tel que  $A_x$  définisse  $M$  au voisinage de  $x_0$ . On applique ensuite au champ de vecteurs  $A$  le théorème de réduction 2.1, on obtient ainsi une carte  $\varphi$  envoyant  $A$  sur un champ de vecteurs constant, et par suite  $M$  sur un 1-champ constant.

Supposons le théorème démontré pour  $q < p$ .

5.2.6 LEMME. — Soit  $n$  la dimension de  $V$ . Donnons-nous  $x \in V$ . On peut considérer une sous-variété  $V_1$  de  $V$  de dimension  $n - 1$ , telle que  $x_0 \in V_1$  et  $A \in \mathcal{M}$  tel que

$$\dim(T_x(V_1) \cap M_x) = p - 1 \quad \text{pour tout } x \in V_1$$

et que  $A$  soit transverse à  $V_1$  en  $x_0$ .  
(c'est-à-dire que  $A_{x_0} \notin T_{x_0}(V_1)$ ).

PREUVE. — Remarquons d'abord que la conclusion du théorème de Frobenius étant de caractère local on peut remplacer  $V$  par une partie ouverte  $O$  d'un espace vectoriel  $E$ . Il suffit alors de prendre pour  $V_1$  une sous-variété linéaire  $L$  de  $E$  de dimension  $n - 1$  ne contenant pas  $M_{x_0}$ .

Alors l'hypothèse que  $M_x$  est de classe  $C^0$  entraîne que  $M_x \not\subset L = T_x(V_1)$  pour  $x$  assez voisin de  $x_0$ .

Soit  $e_0 \in M_{x_0}$ ,  $e_0 \notin L$ . Soit  $N$  un espace vectoriel supplémentaire de  $M_{x_0}$ . Alors, l'hypothèse que le  $p$ -champ  $M$  est de classe  $C^0$  entraîne que  $N$  est un supplémentaire de  $M_x$  pour  $x$  assez voisin de  $x_0$ , on a une projection naturelle :

$$\pi_x : E \rightarrow M_x$$

Posons  $A_x = \pi_x(e_0)$ . On définit ainsi un champ de vecteur  $A \in \bigotimes^1 V$ . L'hypothèse que  $M_x$  est de classe  $C^k$  entraîne que  $\pi_x$ , et par suite  $A$ , est de classe  $C^k$ .

5.2.7 LEMME. — Posons les notations étant celles du lemme 5.2.6

$$N_x = M_x \cap T_x(V_1) \quad x \in V_1,$$

alors  $N_x$  définit un  $(p-1)$  champ sur  $V_1$  vérifiant la condition de Frobenius.

PREUVE. — Donnons nous  $B \in \bigotimes^1 V_1$  tel que  $B \in N$ , construisons une extension  $\hat{B}$  de  $B$  à  $V$  telle que  $\hat{B} \in M$  (par exemple on construit d'abord une extension  $\hat{\hat{B}}$  de  $B$  à  $V$  et on pose  $C_{\xi} = \pi_{\xi}(\hat{\hat{B}})_{\xi}$ ). Soit  $\hat{U}_t$  (resp.  $U_t$ ) le groupe à un paramètre associé à  $\hat{B}$  (resp.  $B$ ) alors on a  $\hat{U}_t(x) \in V_1$  pour tout  $x \in V_1$  d'où

$$U_t = \text{restriction de } \hat{U}_t \text{ à } V_1$$

d'où

$$\hat{U}_t(V_1) \subset V_1,$$

d'où

$$\hat{U}'_t(T_x(V_1)) = T_{\hat{U}_t(x)}(V_1) \quad x \in V_1.$$

Par suite on a

$$U'_t(x)(N_x) = \hat{U}'_t(x)(N_x) = (\hat{U}'_t(x)(M_x)) \cap (\hat{U}'_t(x)(T_x(V_1)))$$

comme par hypothèse sur  $M$  on a  $(\hat{U}_t)_*M = M$  on en déduit

$$= M_{\hat{U}_t(x)} \cap T_{\hat{U}_t(x)}(V_1) = N_{U_t(x)}$$

C.Q.F.D.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — D'après l'hypothèse de récurrence on peut trouver une carte  $\psi$  de  $V_1$ , adaptée à  $N$ , définie sur un voisinage  $\Omega_1(x_0)$  de  $x_0$  dans  $V_1$  et prenant ses valeurs dans un espace vectoriel  $E_3$ . Notons par  $U_t$  le pseudo groupe à 1 paramètre défini par  $A$ . On peut trouver  $\varepsilon > 0$  et un voisinage  $\Omega(x_0)$  dans  $V$  tel que

$$U_t(x) \quad \text{soit défini quels que soient} \quad x \in \Omega(x_0) \quad \text{et} \quad |t| < \varepsilon$$

En restreignant au besoin  $\Omega_1(x_0)$  on peut supposer que  $\Omega_1(x_0) \subset \Omega(x_0)$ . Notons

$$O_1 = \psi(\Omega_1),$$

et par

$$O = O_1 \times \{t \in \mathbf{R}; |t| < \varepsilon\}$$

Définissons une application

$$F : O \rightarrow V$$

par la formule

$$5.2.8 \quad F(\xi, t) = U_t(\psi^{-1}(\xi))$$

Pour montrer que  $F$  définit un *difféomorphisme local* il suffit de montrer que

$$F'(\xi_0, 0) \quad \text{est inversible}$$

Comme  $\dim E_3 = n - 1$  la dimension des espaces du départ et d'arrivée de  $F'$  sont égales. Montrons sa *surjectivité*. Calculons les dérivées partielles

$$5.2.9 \quad F'_t(\xi, t) \cdot 1 = A_{F(\xi, t)}$$

$$5.2.10 \quad F'_\xi(\xi, 0) = (\psi^{-1})'(\xi)$$

d'où

$$\begin{aligned} A_{x_0} &\in \text{Image } F'(\xi_0, 0) \\ T_{x_0}(V_1) &\subset \text{Image } (F'(\xi_0, 0)) \end{aligned}$$

La *surjectivité* de  $F'(\xi_0, 0)$  entraîne que l'on peut trouver un voisinage  $\hat{O}$  de  $(\xi_0, 0)$  de la forme

$$\hat{O} = \hat{O}_1 \times \{|t| < \hat{\varepsilon}\}$$

tel que la restriction  $\hat{F}$  de  $F$  à  $\hat{O}$  définisse un *difféomorphisme* de  $\hat{O}$  sur  $\Omega = F(\hat{O})$ ,  $\Omega$  étant un ouvert de  $V$  contenant  $x_0$ .

Posons  $g = \hat{F}^{-1}$ . Nous désirons montrer que  $g$  est une *carte adaptée* à  $M$ . Pour ceci notons par  $\eta = \psi_* M$  alors comme  $\psi$  est adaptée à  $N$ ,  $\eta$  est un sous-espace constant de  $E_3$ .

Soit  $E_4 = E_3 \oplus \mathbf{R}$ ,  $e_4$  l'élément de  $E_4$  de coordonnées  $(0,1)$ ,  $m$  le sous-espace de  $E_4$  engendré par  $\eta$  et  $e_4$ . Nous montrerons que  $g$  est une carte adaptée en vérifiant :

$$5.2.11 \quad F_* m = \text{restriction de } M \text{ à } \Omega.$$

Montrons d'abord

$$5.2.12 \quad (F_* m)_x = M_x \quad \text{pour tout } x \in V_1.$$

On a en effet si  $x \in V_1$

$$(F_* m)_x = F'(\xi, 0) \cdot m \quad \text{où } \xi = \psi(x).$$

D'après 5.2.9

$$F'(\xi, 0) \cdot e_4 = A_x$$

et d'après 5.2.10

$$F'(\xi, 0) \cdot \eta = N_x$$

on en déduit (5.2.12)

Soit maintenant  $x \in \Omega$ . Alors on a

$$g(x) = (\xi_1, t) \quad \text{avec } \xi_1 \in \hat{O}_1.$$

On en déduit

$$x = U_t x_1 \quad \text{où } x_1 = \psi^{-1}(\xi_1).$$

D'autre part d'après la *condition de Frobenius* 5.2.3

$$M_x = U'_t(x_1) \cdot M_{x_1}$$

ce qui utilisant 5.2.12 s'écrit

$$5.2.13 \quad M_x = U'_t(x_1) \cdot (F_* m)_{x_1}$$

La relation 5.2.8 permet d'écrire :

$$F(\xi, t) = U_{t_0} \circ F(\xi, t - t_0)$$

d'où en dérivant par rapport à  $\xi$  et en faisant  $t = t_0$  on obtient :

$$F'_\xi(\xi, t_0) = U'_{t_0}(x_1) \circ F'_\xi(\xi, 0)$$

c'est-à-dire

$$F'(\xi, t_0)(\eta) = U'_{t_0}(x_1) \cdot N_{x_1}$$

Or, d'après 5.2.13

$$U'_{t_0}(x_1) \cdot N_{x_1} \subset M_x$$

D'où

$$F'(\xi, t_0) \cdot \eta \subset M_x$$

utilisant 5.2.9, on obtient

$$F'(\xi, t_0) \cdot m \subset M_x$$

Les deux espaces ayant même dimension, on en déduit

$$F'(\xi, t_0) \cdot m = M_x$$

et le théorème de Frobenius est démontré.

### 5.3 VARIÉTÉ INTÉGRALE

Soit  $V$  une variété,  $M$  un  $p$ -champ sur  $V$ . On appellera *variété intégrale* de  $M$  une sous-variété  $H$ , de  $V$ , connexe, telle que

$$T_x(H) \subset M_x \quad \text{pour tout } x \in H.$$

On dira que  $H$  est une *variété intégrale de dimension maximum* si  $\dim H = p$ .

Le problème de Cauchy pour les équations différentielles aura pour analogue la recherche des variétés intégrales de dimension maximum passant par un point donné. On a pour ce problème le résultat suivant.

**5.3.1 PROPOSITION.** — *Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $M$  un  $p$ -champ de classe  $C^1$  sur  $V$  complètement intégrable.*

*Existence.* Par tout point de  $V$  passe une variété intégrale de  $M$  de dimension maximum.

*Unicité.* Soit  $x_0$  un point de  $V$ ,  $H_1$  et  $H_2$  deux variétés intégrales de dimension maximum passant par  $x_0$ , alors il existe un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $x_0$  tel que

$$\Omega \cap H_1 = \Omega \cap H_2$$

**PREUVE.** — Ces deux énoncés ayant un caractère local et étant invariants par difféomorphisme il suffit de les démontrer dans l'ouvert d'arrivée d'une carte  $\varphi$  définie sur un voisinage de  $x_0$ . Nous prendrons pour carte  $\varphi$  une carte *adaptée* au  $p$ -champ  $M$ . On est ainsi ramené à démontrer la proposition dans le cas où  $V$  est un ouvert d'un espace vectoriel et où  $M$  est un  $p$ -champ constant, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace  $E_1$  de  $E$  tel que

$$M_x = E_1 \quad \text{pour tout } x \in V.$$

*Existence.* Soit  $x_0 \in V$  prenons pour  $H$  « le plan parallèle » à  $E_1$  passant par  $x_0$  c'est-à-dire

$$5.3.2 \quad H = \{x \in V \mid x = x_0 + z \text{ avec } z \in E_1\}$$

*Unicité.* Soit  $l \in E^*$  telle que  $l$  soit identiquement nulle sur  $E_1$ . Soit  $H_1$  une variété intégrale connexe de  $M$ . Soit  $i_1$  l'injection de  $H_1$  dans  $V$  et  $f$  la restriction de  $l$  à  $H_1$  :

$$f = l \circ i_1$$

Alors on a

$$(df)_x = dl|_{T_x(H_1)}$$

Comme  $l$  est linéaire  $dl = l$  et comme  $T_x(H_1) \subset E_1$  on en déduit

$$df = 0$$

c'est-à-dire  $f$  est localement constante. Comme nous avons supposé  $H_1$  connexe, on en déduit que  $f$  est constante. Comme ceci est satisfait pour toute forme linéaire  $l$  nulle sur  $E_1$  on en déduit que

5.3.3  $H_1 \subset H$  où  $H$  est défini en 5.3.2.

Montrons maintenant que si  $\dim H_1 = p$  alors

5.3.4  $H_1$  est une partie ouverte de  $H$ .

En effet utilisons l'équation locale d'une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  I-6.4.3. Soit  $E_2$  un sous-espace de  $E$  telle que  $E = E_1 \oplus E_2$ , soit  $x_1 \in H_1$ . Alors  $T_{x_1}(H_1) = E_1$  sur un voisinage  $\Omega(x_1)$  de  $x_1$  et

$$\Omega(x_1) \cap H_1 = \{x \mid x = z + z^* \quad \text{avec} \quad z^* = g(z)\}$$

$g$  étant une application d'un ouvert de  $E_1$  dans  $E_2$  ce qui démontre 5.3.4. (L'application  $g$  est d'ailleurs d'après 5.3.3 une application constante).

Ainsi appliquant 5.3.4 à  $H_2$  on obtient :

$$H_1 \cap H_2$$

une partie ouverte de  $H$  contenant  $x_0$  d'où l'unicité.

#### 5.4 QUELQUES ÉNONCÉS ÉQUIVALENTS DE LA CONDITION DE FROBENIUS

Nous allons modifier la condition de complète intégrabilité donnée dans la définition 5.2.3 de façon à la rendre analytiquement plus maniable.

5.4.1 PROPOSITION. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $M$  un  $p$ -champ sur  $V$  de classe  $C^1$ ,

$\mathfrak{M}$  le sous-module de  $\bigotimes^1 V$  associé à  $M$ ; alors

$M$  est complètement intégrable si et seulement si  $\mathfrak{M}$  est une sous-algèbre (c'est-à-dire  $A, B \in \mathfrak{M}$  entraîne  $[A, B] \in \mathfrak{M}$ ).

PREUVE. — Supposons  $M$  complètement intégrable. Soit  $U_t$  le pseudo-groupe de transformation de  $V$  associé à  $A$ . Alors on a

$$[A, B]_{x_0} = \left[ \frac{d}{dt} [(U_{-t})_* B]_{x_0} \right]_{t=0}$$

On a d'après 5.2.3

$$\psi(t) = [(U_{-t})_* B]_{x_0} \in M_{x_0}$$

Par suite

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \in M_{x_0}$$

d'où à la limite  $\psi'(0) \in M_{x_0}$  c'est-à-dire

$$[A, B]_{x_0} \in M_{x_0}$$

Ceci étant valable pour tout  $x_0$  on a  $[A, B] \in \mathfrak{M}$ .

*Inversement* supposons que  $\mathfrak{M}$  soit une sous-algèbre. Donnons nous  $A \in \mathfrak{M}$  et  $x_0 \in V$  et soit  $A^1, \dots, A^p \in \mathfrak{M}$  tel que  $A^1, \dots, A^p$  engendrent  $\mathfrak{M}$  au voisinage du point  $x_0$ . Montrons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$5.4.2 \quad ((U_t)_* M)_{x_0} = M_{x_0} \quad \text{si} \quad |t| < \varepsilon;$$

pour  $\varepsilon$  assez petit ceci est équivalent à

$$((U_t)_* A^i)_{x_0} \in M_{x_0}.$$

Soit  $l \in T_{x_0}(V^*)$  telle que  $l$  soit orthogonale à  $M_{x_0}$ . Posons

$$z^i(t) = \langle ((U_t)_* A^i)_{x_0}, l \rangle.$$

Alors on a d'après 3.11

$$\frac{dz^i}{dt}(t) = - \langle ((U_t)_* [A, A^i])_{x_0}, l \rangle$$

Comme les  $A^i$  engendrent  $\mathfrak{M}$  au voisinage de  $x_0$  on aura

$$[A, A^i]_x = \sum_k \lambda_k^i(x) A_x^k \quad \text{au voisinage de } x_0$$

où les  $\lambda_k^i(x)$  sont des fonctions *continues*.

Posons  $\hat{\lambda}_k^i(t) = \lambda_k^i(U_{-t}(x_0))$  on a

$$\frac{dz^i}{dt}(t) = - \sum \hat{\lambda}_k^i(t) \langle ((U_t)_* A^k)_{x_0}, l \rangle$$

ou encore

$$\frac{dz^i}{dt}(t) = - \sum_{k=1}^n \hat{\lambda}_k^i(t) z^k(t) \quad i = 1, \dots, n, |t| < \varepsilon.$$

Ainsi les  $\{z^i\}_{i=1}^n$  constituent un système de  $n$ -fonctions numériques satisfaisant un système différentiel linéaire à *coefficients continus*.

On sait que pour un tel système le problème de Cauchy possède une solution *unique* (cf. 2.2.2). On a :

$$z^i(0) = \langle A_{x_0}^i, l \rangle = 0.$$

Comme  $\tilde{z}^i(t) = 0$  est évidemment une solution du problème de Cauchy, avec les données de Cauchy nulles, on en déduit que

$$z^i = \tilde{z}^i$$

c'est-à-dire que  $z^i(t) = 0$  si  $|t| < \varepsilon$ .

Comme ceci est valable pour tout  $l \in T_{x_0}(V^*)$  orthogonal à  $M_{x_0}$  on en déduit 5.4.2.

On passe immédiatement de 5.4.2 à un résultat global.

Soit en effet  $I$  l'intervalle de  $\mathbf{R}$  où  $U_{-t}(x_0)$  est définie. Soit

$$K = \{t \in I \mid ((U_t)_* M)_{x_0} = M_{x_0}\}$$

Il résulte de la continuité de  $U_t'$  que  $K$  est une partie fermée de  $I$ . On voit facilement utilisant le fait que  $(U_{t+\tau})_* = (U_\tau)_* \circ (U_t)_*$  et 5.4.2 que  $K$  est ouvert d'où  $K = I$ . C.Q.F.D.

### 5.4.3 *Système de Pfaff*

On peut se donner un  $p$ -champ  $M$  sur une variété  $V$  par la donnée de  $n - p$  formes différentielles de degré 1,  $\omega^i \in \Lambda^1(V^*)$ , linéairement indépendantes.

On a alors

$$M_{x_0} = \bigcap_{i=1}^{n-p} \ker(\omega_{x_0}^i),$$

Le problème de recherche d'une variété intégrale  $H$  se traduit dans ces notations par la recherche d'une sous-variété  $H$  telle que

$$\omega^i|_H = 0 \quad i = 1 \dots n - p$$

ce que l'on trouve écrit quelquefois de la manière un peu ambiguë

$$\omega^i = 0$$

On appelle cette écriture *système de Pfaff*.

Nous allons procéder d'un point de vue un peu plus intrinsèque. Soit  $E$  un espace vectoriel,  $\omega \in \Lambda^1(V^*; E)$ . Alors pour tout  $x \in V$

$$\omega_x \in \mathcal{L}(T_x(V); E).$$

Supposons que la dimension de  $\ker(\omega_x)$  reste constante et soit égale à  $p$ . On définit un  $p$ -champ  $M$  sur  $V$  en posant

$$M_x = \ker(\omega_x)$$

On vérifie aisément que si  $\omega$  est de classe  $C^1$  alors  $M$  est de classe  $C^1$ .

Le cas d'un système de Pfaff correspond au cas où l'espace  $E$  est un espace  $\mathbf{R}^q$ .

## 5.4.4 Condition de complète intégrabilité pour un système de Pfaff

PROPOSITION. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $\omega \in A^1(V; E)$ ;  $\omega$  de classe  $C^1$ .

Supposons que  $\dim \ker (\omega_x) = \text{cte} = p$ . Soit  $M$  le  $p$ -champ défini

$$M_x = \ker (\omega_x)$$

Alors  $M$  est complètement intégrable si et seulement si pour tout  $x \in V$  on a

$$\ker (\omega_x) \wedge \ker (\omega_x) \subset \ker ((d\omega)_x).$$

5.4.5 Remarque. On peut écrire 5.4.4 sous la forme plus élémentaire suivante : quels que soient  $z_1, z_2 \in T_x(V)$  vérifiant

$$\begin{aligned} \langle z_1, \omega_x \rangle &= 0 \\ \langle z_2, \omega_x \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\langle z_1 \wedge z_2, (d\omega)_x \rangle = 0.$$

PREUVE. — Soient  $A, B \in \mathfrak{M}$ . Utilisons la formule

$$\langle A \wedge B, d\omega \rangle + \langle [A, B], \omega \rangle = \theta(A) \langle B, \omega \rangle - \theta(B) \langle A, \omega \rangle$$

Or puisque  $A$  et  $B \in \mathfrak{M}$  on a

$$\langle A, \omega \rangle = \langle B, \omega \rangle = 0$$

d'où le second membre est nul et on a

$$5.4.6 \quad \langle A \wedge B, d\omega \rangle + \langle [A, B], \omega \rangle = 0$$

Supposons 5.4.5 satisfait; on déduit de

$$\begin{aligned} \langle A_x, \omega_x \rangle &= 0 \\ \langle B_x, \omega_x \rangle &= 0 \end{aligned}$$

que

$$\langle A_x \wedge B_x, (d\omega)_x \rangle = 0$$

d'où en portant dans 5.4.6 on obtient

$$\langle [A, B]_x, \omega_x \rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$[A, B]_x \in M_x$$

ou encore

$$[A, B] \in \mathfrak{M}.$$

c'est-à-dire que  $\mathfrak{M}$  est une sous-algèbre.

*Inversement* supposons que  $\mathcal{M}$  soit une sous-algèbre. alors on déduit de 5.4.6 que

$$5.4.7 \quad \langle A \wedge B, d\omega \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad A, B \in \mathcal{M}.$$

Étant donné  $z_1, z_2 \in M_{x_0}$  on peut construire  $A, B \in \mathcal{M}$  tels que  $A_{x_0} = z_1, B_{x_0} = z_2$ . (On utilise une carte définie au voisinage de  $x_0$  pour se ramener à une construction d'algèbre linéaire on obtient ainsi deux champs  $A, B$  définis sur un voisinage de  $x_0$ . On les étend à tout  $V$  utilisant une des fonctions construite par le lemme I-3.4.1).

Écrivant 5.4.7 en  $x_0$  on obtient

$$\langle z_1 \wedge z_2, (d\omega)_{x_0} \rangle = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

### 5.5 DÉTERMINATION PRATIQUE DES VARIÉTÉS INTÉGRALES D'UN $p$ -CHAMP

Étant donnés une variété  $V$  de dimension  $n$ , un  $p$ -champ  $M$  complètement intégrable sur  $V$ ,  $x_0 \in V$ , on se propose de déterminer, par un calcul explicite, la variété intégrale  $W$  de  $M$ , de dimension maximum passant par  $x_0$ . La méthode utilisée sera locale; par suite, on peut par transport dans une carte, se ramener au cas où  $V$  est un ouvert d'un espace vectoriel  $E$ , que l'on munira d'une structure euclidienne, et où  $x_0 = 0$ .

Si  $p = 1$ , alors pour tout  $x \in V$ , on choisit un vecteur de base  $A_x$  de longueur 1,  $A_x \in M_x$ . On détermine ensuite la ligne de courant de  $A$  passant par  $O$ . Cette détermination s'effectue en résolvant un système d'équations différentielles.

Si  $p > 1$ , on considère un sous-espace vectoriel  $K$  de  $E$  de dimension  $n - p$  tel que  $K \cap M_0 = 0$ . A tout vecteur  $e \in M_0, e \neq 0$ , on associe le sous-espace vectoriel  $E_e$  engendré par  $K$  et  $e$ . On a alors :

$$\dim (E_e \cap M_0) = 1$$

et par continuité :

$$\dim (E_e \cap M_x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in V_e = V \cap E_e$$

est assez voisin de zéro. Ainsi  $M_x^e = M_x \cap E_e$  définit un 1-champ sur  $V_e$ . La ligne intégrale  $\Gamma_e$  de ce 1-champ passant par  $0$  n'est autre que  $W \cap E_e$ . Comme :

$$W = \bigcup W \cap E_e,$$

on obtient :

$$W = \bigcup_e \Gamma_e.$$

D'où :

*La détermination de  $W$  dépend en définitive de la solution d'un système de  $(n - p)$  équations différentielles dépendant de  $(p - 1)$ -paramètres. (En effet  $E_{\lambda e} = E_e$  si  $\lambda \neq 0$ .)*

## Exercices 2<sup>e</sup> partie

### CROCHET DE CHAMPS DE VECTEURS

1<sup>o</sup> On considère deux champs de vecteurs sur un ouvert d'un espace vectoriel  $E$  de dimension fini de classe  $C^\infty$ , soient  $A$  et  $B$ .  $U_t, V_t$  les pseudo-groupes associés.

Étant donné un point  $a$ , on considère successivement ( $t$  étant assez petit)

$$\begin{aligned} U_t(a) &= b(t) \\ V_t(b(t)) &= c(t) \\ U_{-t}(c(t)) &= d(t) \\ V_{-t}(d(t)) &= m(t) \end{aligned}$$

Quand  $t$  varie,  $m(t)$  décrit une courbe passant par  $a$  ( $a = m(0)$ ). Montrer que cette courbe admet pour vecteur tangent en  $a$   $[A, B]_a$ .

2<sup>o</sup> Soit  $V$  une variété de classe  $C^3$ ,  $A$  et  $\tilde{A}$  deux champs de vecteur de classe  $C^2$  définis sur  $V$ . Notons par  $\{U_t\}$  et  $\{\tilde{U}_t\}$  les groupes de transformation associés à  $A$  et à  $\tilde{A}$ .

On dira que  $\tilde{A}$  est *invariant* par  $\{U_t\}$  si

$$(1) \quad U_t'(\tilde{A}(x)) = \tilde{A}(y) \quad \text{quel que soit } y = U_t x, \quad x \in V.$$

a) Montrer que (1) est équivalent à

$$(2) \quad \tilde{U}_{t_2} \circ U_{t_1} = U_{t_1} \circ \tilde{U}_{t_2}$$

b) Montrer que (2) entraîne que

$$(3) \quad [A, \tilde{A}] = 0.$$

On pourra considérer  $k(t_1, t_2) = U_{t_1}^* \circ \tilde{U}_{t_2}^* f$ , où  $f \in \Lambda_2^0(V^*)$ . Calculer  $\frac{\partial^2 k}{\partial t_1 \partial t_2}$ ; puis utiliser (2)

c) Montrer que

$$(4) \quad U_t^* \theta(\tilde{A}) = \theta(\tilde{A}) U_t^*$$

est équivalent à (1).

d) Montrer que (3) entraîne (4). On pourra pour cela considérer

$$g_t = U_t^* \theta(\tilde{A}) f \quad \text{et} \quad h_t = \theta(\tilde{A}) U_t^* f \quad \text{où} \quad f \in \mathcal{A}(V).$$

Montrer que  $\frac{\partial g}{\partial t} = \theta(A)g$ . Utilisant (3) en déduire la même relation pour  $h$ .

Ensuite comparer  $f_t$  et  $g_t$  pour  $t = 0$ , et conclure.

### GRUPE A 1 PARAMÈTRE DE TRANSFORMATION ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

3° Soit  $V$  une variété différentiable de classe  $C^\infty$  et  $X$  un champ de vecteurs sur  $V$  de classe  $C^\infty$ . Un tel champ engendre un pseudo-groupe  $\Phi_t$ .

DÉFINITION. — On dit que  $X$  est *uniforme* s'il existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\Phi_t(p)$  soit défini quel que soit  $p \in V$  et  $t$  vérifiant  $|t| < \varepsilon_0$ . Montrer les deux propriétés :

a) Si  $X$  est uniforme,  $X$  engendre un *groupe global à un paramètre* c'est-à-dire quel que soit  $z \in V$ , les  $\Phi_t$  peuvent être définis pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

b) Si  $V$  est une variété compacte tout champ de vecteur  $X$  sur  $V$  est uniforme, par suite il engendre un groupe global à un paramètre.

4° a) En utilisant l'existence d'un  $C^2$ -difféomorphisme local réduisant un champ de vecteurs  $X$ , de classe  $C^2$  et non nul au voisinage du point  $p$  d'une variété différentiable  $V$ , à un champ de vecteurs constant, montrer que la solution  $\varphi(t, u)$  de l'équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = X(x)$ , prenant la valeur  $u$  pour  $t = 0$ , est de classe  $C^1$  par rapport à  $u$  et que  $\varphi'_u(t, u)$  est la solution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d}{dt} \varphi'_u(t, u) = X'(\varphi(t, u)) \circ \varphi'_u(t, u)$$

qui prend la valeur identité pour  $t = 0$ .

b) Supposant de plus que  $X$  soit une fonction de classe  $C^2$  de  $x$  et d'un paramètre  $\lambda$ , montrer que  $\varphi(t, x, \lambda)$  est une fonction de classe  $C^1$  et que  $\varphi'_\lambda$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \varphi'_\lambda = X'_x(\varphi) \circ \varphi'_\lambda + X'_\lambda(\varphi)$$

(On se ramènera au cas précédent en adjoignant à  $\frac{dx}{dt} = X(x, \lambda)$  l'équation  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ , avec les conditions initiales  $x(0) = u, \lambda(0) = \lambda$ .)

c) On considère le pseudo groupe à un paramètre  $x = \varphi(t, u)$  associé à l'équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = X(x)$ , où  $X$  est un champ de vecteurs de classe  $C^2$  un voisinage d'un point  $p$  de  $\mathbf{R}^n$ .

Montrer en appliquant a) que la condition pour que le groupe conserve le volume, (c'est-à-dire que le déterminant de la matrice associée à l'application linéaire  $\varphi'_u(t, u)$ , dans un système de coordonnées quelconques, soit égal à 1) et que  $\text{Trace } X'(x) = 0$ . (On utilisera le fait que si une matrice  $M$  est inversible et dérivable par rapport à un paramètre, son déterminant  $\Delta$  vérifie la relation  $\Delta' = \Delta \text{ Trace } (M'M^{-1})$ ). On pose *divergence*  $X = \text{Trace } X'(x)$ .

5° Soit  $V$  une variété différentiable de dimension  $n$ , et  $p$  un point de  $V$ . On se donne  $n$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_n$ , de classe  $C^2$ , dans un voisinage de  $p$ , et un point  $\alpha \in \mathbf{R}^n$ , ( $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ).

Montrer que l'on peut choisir  $\|\alpha\|$  assez petit pour que la courbe intégrale  $\varphi(t, \alpha)$  du champ  $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ , passant par  $p$ , soit définie sur un intervalle  $[-h, +h]$ ,  $h > 1$ .

En utilisant 4° b) montrer que  $\varphi'_\alpha(t, \alpha)$  est solution de l'équation différentielle  $\frac{d}{dt} \varphi'_\alpha(t, \alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X'_i \circ \varphi'_\alpha + A$ ,  $A$  étant une application linéaire de  $\mathbf{R}^n$  dans l'espace tangent au point  $\varphi(t, \alpha)$ , que l'on précisera.

En déduire que le vecteur  $\Delta(t) = t\varphi_t - \varphi'_\alpha \cdot \alpha$  est solution d'une équation différentielle linéaire. Remarquant que  $\Delta(0) = 0$ , en déduire que  $\Delta(t) = 0$  pour  $|t| \leq h$ , et donc que  $\varphi(t, \alpha)$  ne dépend que de  $t\alpha$ .

Montrer que l'application  $\psi : \alpha \rightarrow \varphi(1, \alpha)$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $\alpha = 0$ , et calculer  $\psi'(0)$  en fonction de  $A$ .

En déduire, si les vecteurs  $X_1, \dots, X_n$  sont linéairement indépendants au point  $p$ ,  $\psi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme local.

6° Montrer qu'à tout pseudo-groupe de transformation à un paramètre

$$x = \varphi(t, x_0)$$

est associée une équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = \omega(x)$ , telle que la solution prenant la valeur  $x_0$  au point  $t = 0$  soit précisément  $\varphi(t, x_0)$ .

#### 7° CHAMPS DE VECTEURS ET DÉRIVATIONS

Soit  $V$  une variété  $C^\infty$ ,  $A(V)$  l'anneau des fonctions numériques  $C^\infty$  sur  $V$ ,  $\overset{1}{\otimes} V$  les champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $V$ . On sait que  $\overset{1}{\otimes} V$  est un  $A(V)$  module et une algèbre de Lie sur  $\mathbf{R}$  (avec le crochet).

DÉFINITION. — Soit  $D$  une application  $R$  linéaire

$$D : A(V) \rightarrow A(V), \\ D(f.g) = fD(g) + gD(f).$$

$D$  s'appelle une dérivation.

L'ensemble des dérivations sera appelé  $\mathcal{D}$ .

a) Mettre sur  $\mathcal{D}$  une structure de  $A(V)$  module et une structure d'algèbre de Lie.

b) Soit  $D \in \mathcal{D}$ ,  $f \in A(V)$  avec  $f|_U = 0$  où  $U$  est un ouvert de  $V$ , montrer que  $Df|_U = 0$ . [Utiliser des fonctions  $C^\infty$  égale à 1 au voisinage d'un point et à support compact.]

c) Soit l'application  $T_V : \bigotimes_1 V \rightarrow \mathcal{D}$

$$X \rightarrow D_X \quad \text{définie par} \quad D_X f = \langle X, df \rangle$$

montrer que  $T$  est un homomorphisme injectif de  $A(V)$  modules et d'algèbres de Lie.

d) On veut démontrer que  $T$  est une bijection :

i) Soit  $m_0 \in U_1 \subset U \subset V$ ;  $U_1$  et  $U$  ouverts de  $V$ .

$U$  ouvert d'une carte avec les fonctions coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $g \in A(V)$  avec support  $g \subset U$  et  $g|_{U_1} = 1$ .

Montrer que l'application  $A(U) \rightarrow A(U)$

$$\tilde{D}\varphi \rightarrow D(\varphi.g) \quad \text{est une dérivation sur } U$$

ii) Supposant  $x_i(m_0) = 0$  pour tout  $i$ , montrer que si  $\varphi \in A(U)$ , il existe  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  appartenant à  $A(U)$  avec  $\varphi = \varphi(m_0) + \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i$ .

iii) En déduire que  $\tilde{D} = T_U \left( \sum_i \tilde{D}(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ .

iv) En déduire que  $T_V$  est bijective.

e) On identifiera désormais  $\bigotimes_1 V$  et  $\mathcal{D}$ .

Soit  $T$  un élément du dual du  $A(V)$  module  $\bigotimes_1 V$ . [On écrira  $T \in \left( \bigotimes_1 V_\infty \right)^*$ .]

i) Montrer que si  $w \in \bigotimes_1 V$ ,  $w|_U = 0$  ou  $U$  est un ouvert de  $V$ ,  $\langle T, w \rangle|_U = 0$ .

ii) En déduire que si  $\langle T, df \rangle = 0$  pour tout  $f \in A(V)$ , alors  $T = 0$ .

iii) Montrer alors que l'application canonique de  $\bigotimes_1 V$  dans  $\left( \bigotimes_1 V \right)^*$  est un isomorphisme.

## 8° GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET MÉCANIQUE ANALYTIQUE

V notera une variété de dimension  $2n$ ,  $\omega \in \Lambda^2(V^*)$  sera une forme différentielle de degré 2 donnée sur V. On considèrera un champ de vecteur  $A \in \mathcal{X}^1(V)$  tel que

$$(1) \quad \theta(A)\omega = 0.$$

V sera muni d'une carte  $\varphi$  dans un espace vectoriel  $V_0 = X \oplus P$  où X et P sont deux espaces vectoriels de dimension  $n$ , chacun muni d'un isomorphisme avec  $\mathbf{R}^n$  :  $x \in X$  s'écrit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , de même  $p \in P$  s'écrit  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . On note  $\omega_0$  l'image de  $\omega$  dans la carte  $\varphi$ .

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dx_k$$

a)  $H(x, p)$  note une fonction définie sur  $V_0$ . On lui associe le système d'équations différentielles

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \end{cases} \quad k = 1 \dots n.$$

Soit  $A_0$  le champ de vecteur sur  $V_0$  ayant pour équation de ses lignes de courant les équations (2). Montrer que

$$\theta(A_0)\omega_0 = 0.$$

b) On pose

$$\omega^2 = \omega \wedge \omega, \quad \omega^s = \omega \wedge \omega^{s-1}.$$

Remarquer que  $\omega^s = 0$  si  $s > n$ . Montrer que

$$\omega_0^n = n! \varepsilon \rho \quad \text{où} \quad \varepsilon^2 = 1$$

et où

$$\rho = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n.$$

Calculer  $\omega_0^{n-1}$ .

c) Dédire de (1) que

$$(3) \quad \theta(A)\omega^s = 0$$

Notant par  $U_t^0$  le groupe à 1 paramètre associé à (2), et par E une partie ouverte de  $V_0$ , déduire de (3)

$$\text{Volume}(U_t^0(E)) = \text{Volume}(E)$$

d) Soit  $\pi$  une forme de degré maximum sur V invariante par A (c'est -à-dire que  $\pi \in \Lambda^{2n}(V^*)$ ,  $\theta(A)\pi = 0$ ). Soit  $\tilde{\pi}$  une autre forme de degré maximum,

invariante par  $A$ , telle que  $\tilde{\pi}_x \neq 0$  quel que soit  $x \in V$ . Montrer que

$$\pi = h\tilde{\pi}$$

où  $h$  est une fonction telle que

$$(4) \quad \theta(A)h = 0.$$

Peut-on en déduire dans le cas particulier où  $V = V_0$ ,  $w = w_0$ , que  $h$  est une intégrale première de (2)?

e) Supposons  $w_x^n \neq 0$  quel que soit  $x \in V$ . Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur  $V$  telles que

$$\theta(A)f = \theta(A)g = 0$$

Montrer que  $df \wedge dg \wedge w^{n-1}$  est une forme de degré maximum invariante. Utilisant (4) on écrira

$$df \wedge dg \wedge w^{n-1} = hw^n$$

et on pose

$$(f, g) = \frac{1}{n} h.$$

Dans le cas particulier où  $V = V_0$ ,  $w = w_0$ , déduire de ce qui précède que si  $f$  et  $g$  sont deux intégrales premières de (2) alors  $(f, g)$  est une intégrale première de (2); calculer  $(f, g)$  en termes des dérivées partielles de  $f$  et  $g$ .

### 9° CROCHETS DE POISSON

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $2n$ . Soit  $\Omega$  une forme différentielle fermée de degré 2.  $M$  sera appelée variété hamiltonnienne (ou symplectique) si pour chaque point  $x \in M$ , la forme  $\Omega_x$  est une forme bilinéaire non dégénérée de  $T_x(M)$ .  $\Omega_x$  établit donc un isomorphisme

$$\mu_x: T_x(M) \rightarrow T_x(M^*)$$

défini par

$$\mu_x(X) = i(X)\Omega.$$

L'application  $\mu: \otimes_1(M) \rightarrow \overset{1}{\otimes}(M)$  définie par  $[\mu(X)]_x = \mu_x(X_x)$  est un  $\mathcal{F}$ -isomorphisme ( $\mathcal{F}$  étant l'anneau des fonctions différentiables de  $M$ ).

Nous poserons pour abrégé

$$\mu(X) = w_X \quad \text{et} \quad \mu^{-1}(w) = X_w.$$

Nous avons donc les relations

$$w_X = i(X)\Omega, \quad w = i(X_w)\Omega.$$

les relations

$$X_{w_X} = X \quad \text{et} \quad W_{X_w} = w.$$

A l'aide de l'isomorphisme  $\mu$ , nous pourrions transporter la structure d'algèbre de Lie de  $\otimes_1(\mathbf{M})$  sur  $\overset{1}{\otimes}(\mathbf{M})$ .

Explicitement si  $\omega_1, \omega_2 \in \overset{1}{\otimes}(\mathbf{M})$ , alors

$$[\omega_1, \omega_2] = \mu[\mu^{-1}(\omega_1), \mu^{-1}(\omega_2)] = i([\mathbf{X}_{\omega_1}, \mathbf{X}_{\omega_2}])\Omega.$$

Le crochet ainsi défini sur  $\overset{1}{\otimes}(\mathbf{M})$  s'appelle le crochet de Poisson des formes  $\omega^1$  et  $\omega^2$ .

a) Montrer que le crochet de Poisson de 2 formes fermées est une forme exacte.

b) Dans le cas particulier où  $\omega_1 = df$  et  $\omega_2 = dg$  sont des formes exactes, montrer que

$$[df, dg] = d[\theta(\mathbf{X}_{df})g] \quad \text{pour} \quad f, g \in \mathcal{F}.$$

Nous posons

$$[f, g] = \theta(\mathbf{X}_{df})g$$

montrer que

$$[f, g] = -[g, f]$$

et par suite que

$$[df, dg] = d[f, g].$$

c) Montrer que si  $f$  est constant sur les lignes de courant de  $\mathbf{X}_{dg}$  si et seulement si  $g$  est constant sur les lignes de courant de  $\mathbf{X}_{df}$ .

d) Un champ de vecteur  $\mathbf{X} \in \overset{1}{\otimes}(\mathbf{M})$  sera dit hamiltonien ou symplectique et définira un automorphisme infinitésimal de la structure  $(\mathbf{M}, \Omega)$  si  $\theta(\mathbf{X})\Omega = 0$ . Montrer que l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens sur  $\mathbf{M}$  est une sous algèbre de Lie de  $\overset{1}{\otimes}(\mathbf{M})$ .

e) Soit  $\mathbf{M} = \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$  et  $\pi_1 : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\pi_2 : \mathbf{M} \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$  les projections canoniques de  $\mathbf{M}$  sur  $\mathbf{R}^n$  et  $(\mathbf{R}^n)^*$ . Sur  $\mathbf{M}$ , il existe une forme différentielle  $\omega$  de degré 1, appelée la forme fondamentale de  $\mathbf{M}$  définie comme suit : pour chaque vecteur tangent  $\mathbf{X}_u$  en un point  $u \in \mathbf{M}$ , on pose :

$$\langle \mathbf{X}_u, \omega_u \rangle = \langle \pi_1'(\mathbf{X}_u), \pi_2(u) \rangle.$$

Notons que  $\pi_1'(\mathbf{X}_u)$  est un vecteur tangent à  $\mathbf{R}^n$  au point  $\pi_1(u)$  et s'identifie canoniquement à un vecteur de  $\mathbf{R}^n$ , tandis que  $\pi_2(u)$  est un élément de  $(\mathbf{R}^n)^*$ , si bien que la définition précédente a un sens.

Montrer que la forme  $d\omega$  définit une structure hamiltonienne sur  $\mathbf{M}$ . Choisissant pour  $\mathbf{R}^n$  la base canonique  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  et sur  $(\mathbf{R}^n)^*$  la base duale  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  un point  $u$  de  $\mathbf{M}$  a pour coordonnées  $(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$ , on évaluera  $\omega$  et  $d\omega$  dans cette base.

Par l'identification canonique de  $T_u(M)$ , avec  $M$ , nous avons une base canonique  $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}; \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right)$  de  $T_u(M)$  et une base duale associée

$$(dx^1, \dots, dx^n, dy^1, \dots, dy^n)_u \quad \text{de} \quad T_u^*(M).$$

Si  $X$  est le champ de vecteur sur  $M$  donné par

$$X = \sum_{i=1}^n \left( \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right),$$

évaluer  $w_X$ .

Inversement si  $w$  est une forme différentielle sur  $M$  donnée par

$$w = \sum_{i=1}^n (\gamma^i dx^i + \delta^i dy^i),$$

évaluer  $X_w$ . Enfin si  $f$  et  $g \in \mathcal{F}$ , évaluer le crochet  $[f, g]$ .

*f)* Dans le cadre de la mécanique classique de  $n$  points matériels nous avons  $M = (\mathbf{R}^{3n}) \times (\mathbf{R}^{3n})^*$ . On suppose l'existence de  $n$  nombres positifs  $m_1, \dots, m_n$  (où  $m_i$  est la masse du  $i^{\text{ème}}$  point) et d'une fonction  $V$  sur  $\mathbf{R}^{3n}$  (énergie potentielle) telle que les équations du mouvement soient

$$m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x^i}; \quad m_i \frac{d^2 y^i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial y^i}; \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial z^i}$$

Nous poserons

$$x_1 = q_1; \quad y_1 = q_2; \quad z_1 = q_3; \quad x_2 = q_4, \dots, \quad z_n = q_{3n}$$

et

$$M_1 = M_2 = M_3 = m_1; \quad M_4 = M_5 = M_6 = m_2 \quad \text{etc...}$$

les équations du mouvement sont alors :

$$M_i \frac{d^2 q^i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial q^i}$$

En un point  $q = (q^1, \dots, q^{3n})$  de  $\mathbf{R}^{3n}$ , l'espace vectoriel tangent  $T_q(\mathbf{R}^{3n})$  s'identifie canoniquement avec  $\mathbf{R}^{3n}$ . Autrement dit sur  $\sum_{q \in \mathbf{R}^{3n}} T_q(\mathbf{R}^{3n})$  nous avons une structure naturelle de variété identifiant cet ensemble à  $\mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^{3n}$  (fibré tangent trivial).

Sur  $\mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^{3n}$ , nous avons une base canonique naturelle et un point  $u \in \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^{3n}$  aura pour coordonnées

$$(q^1, \dots, q^{3n}; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^{3n})$$

En chaque point  $q \in \mathbf{R}^{3n}$ , nous avons une métrique donnée par

$$(v, v) = \sum_{i=1}^{3n} M_i \dot{q}_i^2$$

où

$$v = \sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i (\partial / \partial q^i)_q \in T_q(\mathbf{R}^{3n})$$

Cette métrique induit un difféomorphisme  $\lambda$  de  $\mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^{3n}$  dans  $\mathbf{R}^{3n} \times (\mathbf{R}^{3n})^*$  défini par

$$\lambda \left( \sum_{i=1}^{3n} \dot{q}_i (\partial / \partial q^i) \right) = \sum_{i=1}^{3n} p_i dq_i$$

soit

$$(q_1, \dots, q_{3n}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3n}) \rightarrow (q_1, \dots, q_{3n}; p_1, \dots, p_{3n})$$

avec

$$p_i = M_i \dot{q}_i$$

On a alors

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{p_i}{M_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q^i}$$

Considérons le champ de vecteurs sur  $\mathbf{R}^{3n} \times (\mathbf{R}^{3n})^*$  défini par

$$X = \sum_{i=1}^{3n} \left( \frac{p_i}{M_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

Montrer que  $i(X)\omega = -dH$  avec  $H = T + V$  (énergie totale) et  $T = \frac{1}{2} \sum \frac{p_i^2}{M_i}$  (énergie cinétique),  $\omega$  forme canonique de  $\mathbf{R}^{3n} \times (\mathbf{R}^{3n})^*$  et  $\Omega = d\omega$ . Montrer que  $\theta(X)H = 0$  (loi de conservation de l'énergie)  $H$  est constante de long de lignes de courant de  $X$ .

Plus généralement, montrer que si  $f$  est définie  $\mathbf{R}^{3n} \times (\mathbf{R}^{3n})^*$ , alors

$$\theta(X)f = [f, H].$$

Autrement dit  $\theta(X)f = 0$  c'est-à-dire une variable dynamique est une constante du mouvement si et seulement si elle commute avec l'hamiltonien.

#### EXERCICES DE CALCUL EN COORDONNÉES

10° Considérons l'espace numérique  $\mathbf{R}^n$  muni de sa structure de variété différentiable. Nous indiquons par  $x^1, \dots, x^n$  les fonctions coordonnées, par

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

les champs de vecteurs associés à ce système de coordonnées et par  $dx^1, \dots, dx^n$

les formes différentielles correspondantes. Si  $X$  est un champ de vecteurs et  $\omega$  une forme différentielle de degré  $p$ ,  $i(X)\omega$  le produit intérieur de  $X$  par  $\omega$ .

a) Montrer que  $i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\omega = 0$  si et seulement si dans l'expression de  $\omega$  au moyen des formes  $dx^1, \dots, dx^n$  ne figure pas la forme  $dx^k$ .

b) Supposons que  $i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\omega = 0$ . Soit

$$\omega = \sum_{1 < i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Montrer que la condition  $i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)d\omega = 0$  est équivalente à  $\frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} = 0$  c'est-à-dire les fonctions  $\alpha_{i_1 \dots i_p}$  ne dépendent pas de la coordonnée  $x^k$ .

11° Nous disons qu'une forme différentielle  $\omega$  est fermée si  $d\omega = 0$ . Nous disons que  $\omega$  est intégrable si  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

Prenons l'espace numérique  $\mathbf{R}^3$  muni de sa structure de variété différentiable. Soit  $\omega = x dx + y dy + z dz$ . Montrer que  $d\omega = 0$ .

Soit  $U \subset \mathbf{R}^3$  l'ouvert défini par la condition

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}.$$

Sur  $U$  considérons la forme  $\omega = \frac{1}{yz} dx + \frac{1}{xy} dy + \frac{1}{xz} dz$ . Montrer que  $\omega$  n'est pas fermée mais qu'elle est intégrable.

Calculer  $d\omega$ . Chercher une fonction différentiable  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $f(x, y, z) \neq 0$  ( $x, y, z \in U$ ) et que  $d(f\omega) = 0$ . Une telle fonction  $f$  s'appelle un facteur intégrant de  $\omega$ .

Imposer la condition  $d(f\omega) = 0$  et calculer explicitement les conditions que ceci entraîne. On trouve ainsi trois équations reliant  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}$  et  $f$ . En remplaçant  $\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x}$  par  $\frac{\partial}{\partial x} \log f$  et de même pour les autres dérivées, et en prenant comme nouvelle fonction inconnue  $\varphi = \log f$ , on trouve des équations reliant  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ .

## 12° CONSTRUCTION INTRINSÈQUE DU COBORD SUR LE FIBRÉ COTANGENT

Soit  $V$  une variété différentiable, de classe  $C^\infty$ , de dimension  $n$ ,  $\mathcal{A}$  un atlas de classe  $C^\infty$  sur  $V$ . Soient  $\varphi_\alpha$  une carte locale,  $E_\alpha$  l'espace d'arrivée de  $\varphi_\alpha$ .

On identifie localement  $V$  à un ouvert de l'espace vectoriel  $E_\alpha$ , par  $\varphi_\alpha$ , et l'espace fibré cotangent à  $V$ ,  $T(V^*)$ , est identifié localement à un ouvert du produit  $E_\alpha \times E_\alpha^*$ , où  $E_\alpha^*$  désigne le dual de  $E_\alpha$ .

Soit alors  $\Omega$  une application bilinéaire alternée de  $E_\alpha \times E_\alpha^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\Omega(z, z') = \langle x, y' \rangle - \langle x', y \rangle,$$

où  $z$  et  $z'$  sont des éléments de  $E_\alpha \times E_\alpha^*$ ,  $x$  et  $x'$  des éléments de  $E_\alpha$ ,  $y$  et  $y'$  des éléments de  $E_\alpha^*$ .

a) Soit une autre identification locale de  $V$  à l'espace vectoriel  $F$ . Et soit  $\varphi$  l'application de  $E_\alpha$  dans  $F$ .

Montrer que l'application correspondante de  $E_\alpha \times E_\alpha^*$  dans  $F \times F^*$  est définie par :

$$\Phi(x, y) = (\varphi(x), {}^t\varphi'(x) \cdot y),$$

où  $x \in E_\alpha$ ,  $y \in E_\alpha^*$ , et où la notation  ${}^t\varphi'(x)$  désigne l'application contragrédiente de l'application  $\varphi'(x) \in \mathcal{L}(E_\alpha, F)$ .

b) Montrer que l'on a :  $\Phi^*\Omega = \Omega$ , où  $\Phi^*$  désigne l'application du champ des tenseurs covariants sur  $F \times F^*$ , sur le champ des tenseurs covariants sur  $E_\alpha \times E_\alpha^*$ , application définie à partir de l'application  $\Phi$ .

On définit ainsi, de manière intrinsèque une forme extérieure de degré 2 sur la variété  $T(V^*)$ .

c) Soit  $\alpha \in \Lambda^1(V^*)$ ,  $s$  l'application de  $C^\infty$  de  $V$  dans  $T(V^*)$  telle que  $s(x) = \alpha_x$  on pose

$$d\alpha = s^*(\Omega),$$

ceci définit une forme de degré 2 sur la variété  $T(V^*)$ .

Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $f^*\theta$  sa différentielle. Montrer que pour  $\beta = f^*\theta$ , on a :  $d\beta = 0$ , et que l'on a :

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha.$$

d) Soit  $(x_i)$  un système de coordonnées locales de  $V$ ,  $(x_i, p_j)$  le système de coordonnées locales correspondant dans  $T(V^*)$ .

Exprimer  $\Omega$  et  $\alpha$  en fonction de ces coordonnées locales. En déduire une nouvelle définition possible du Cobord.

e) Soit maintenant  $V_q$  l'espace fibré des  $q$ -formes sur  $V$ ,  $V = \bigwedge^q T(V^*)$ , et  $p$  la projection de  $V_q$  sur  $V$ .

Soit  $u$  un élément de  $V_q$ , et  $z$  une  $q$ -forme au point  $u$  sur  $V$ . On définit une forme extérieure  $\pi_u$  sur  $T(V^*)$  par l'égalité :

$$\langle z, \pi_u \rangle = \left\langle \left( \bigwedge^q p' \right) z, u \right\rangle.$$

Dans le cas général, exprimer  $\pi_u$  en fonction des coordonnées locales de  $T(V^*)$ .

## 13° HOMOTOPIE ET FORMES DIFFÉRENTIELLES EXACTES : THÉORÈME DE POINCARÉ

Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $h$  une application de classe  $C^2$  de  $V \times [0, 1]$  dans  $V$  telle que

$$h(x, 0) = x, \quad h(x, 1) = a, \quad a \in V, \quad a \text{ fixé.}$$

(On dit que  $V$  est homotope à 1 point.) Posons

$$W = V \times ]0, 1[$$

On veut montrer alors que si  $\omega$  est une forme différentielle sur  $V$ , de degré  $\geq 1$ , de classe  $C^1$ , vérifiant  $d\omega = 0$  alors il existe une forme différentielle  $\pi$  telle que  $d\pi = \omega$ .

a) Posons  $\rho = h^* \omega$ . Soit  $V_{t_0}$

$$V_{t_0} = V \times \{t_0\}$$

Notons  $\rho_t$  la restriction de  $\rho$  à  $V_t$ . Soit  $U_t$  le pseudo groupe à 1 paramètre de  $W$  défini par

$$U_t(x, t) \rightarrow (x, t + \tau)$$

On a alors

$$\rho_t = (U_t^* \rho)_0$$

b) Montrer que  $\rho_1 = 0$ . En déduire que

$$\rho_0 = \int_1^0 \frac{\partial}{\partial t} (\rho_t) dt$$

c) Utilisant a) montrer que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_t) = (U_t^*(\theta(A)\rho))_0$$

où  $A \in \overset{1}{\otimes} W$  est associé au groupe à 1 paramètre  $U_t$  (cf. Exercice, II° 6°).

d) Utilisant la formule de Cartan démontrer

$$U_t^*(\theta(A)\rho) = d(U_t^*i(A)\rho)$$

En conclure que

$$\omega = d\pi \quad \text{avec} \quad \pi = \int_1^0 (U_t^*i(A)\rho)_0 dt$$

## FORMULATIONS DIVERSES DE LA CONDITION DE FROBENIUS

14° Toutes les variétés considérées seront de classe  $C^\infty$ . Si  $V$  est une variété

on notera  $\overset{1}{\otimes} V$  l'ensemble des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur  $V$ . Remarquer

que  $\overset{1}{\otimes} V$  est une algèbre de Lie, le produit étant le crochet de deux champs de vecteurs.

a) Soient  $V$  une variété,  $M$  un  $p$ -champ sur  $V$ . Supposons que l'on ait pu trouver :  $B^1, \dots, B^p \in \bigotimes^1 V$  tels que :

quel que soit  $x \in V$ ,  $B_x^1, \dots, B_x^p$  forment une base de  $M_x$

et que :

$$[B^i, B^j]_x \in M_x, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, p.$$

Montrer alors que  $M$  satisfait la condition de Frobenius.

b) Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ .

Soient  $A, B \in \bigotimes^1 O$ ,  $C = [A, B]$ . Notons par  $(a_k), (b_k), (c_k)$  les composantes de  $A, B, C$  respectivement.

Montrer que :

$$c_k = \theta(A)b_k - \theta(B)a_k.$$

(On pourra, par exemple, calculer :

$$\theta(A)\omega(B) - \theta(B)\omega(A)$$

où  $\omega = df \in \Lambda^1(O^*; \mathbf{R}^n)$ ,  $f$  désignant l'injection canonique de  $O$  dans  $\mathbf{R}^n$ ).

c) Soient  $V, \tilde{V}$  deux variétés,  $K = V \times \tilde{V}$  la variété produit,  $p_1$  et  $p_2$  les projections canoniques de  $K$  sur  $V$  et sur  $\tilde{V}$ , respectivement.

Donnons-nous  $A \in \bigotimes^1 V$ ,  $\tilde{A} \in \bigotimes^1 \tilde{V}$ . Alors montrer qu'il existe  $X \in \bigotimes^1 K$  unique tel que :

$$\left. \begin{aligned} p_1'(z) \cdot X_z &= A_{p_1(z)} \\ p_2'(z) \cdot X_z &= \tilde{A}_{p_2(z)} \end{aligned} \right\} \quad \text{quel que soit } z \in K.$$

On notera  $X = A \times \tilde{A}$  et on appellera  $X$  le *produit cartésien* de  $A$  et  $\tilde{A}$ .

Donnons-nous  $A, B \in \bigotimes^1 V$ ,  $\tilde{A}, \tilde{B} \in \bigotimes^1 \tilde{V}$ . Montrer alors que :

$$[A \times \tilde{A}, B \times \tilde{B}] = [A, B] \times [\tilde{A}, \tilde{B}]$$

(On pourra démontrer d'abord cette relation dans le cas où  $V$  et  $\tilde{V}$  sont des ouverts de  $\mathbf{R}^n$  et de  $\mathbf{R}^m$  respectivement.

d) On garde les notations de c). Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre de dimension finie de  $\bigotimes^1 V$  et soit  $\rho$  un homomorphisme d'algèbres de  $\mathcal{A}$  dans  $\bigotimes^1 \tilde{V}$ . Posons :

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= A \times \rho(A) \quad A \in \mathcal{A} \\ M_z &= (\Phi(\mathcal{A}))_z \end{aligned}$$

Supposons que  $\dim(M_z) = \text{constante}$ .

Montrer alors que  $M$  satisfait la condition de Frobenius.

15° Soit  $V$  une variété de classe  $C^\infty$ ,  $A$  et  $B$  deux champs  $C^\infty$  linéairement indépendants définis sur  $V$ ,  $u_t$  et  $v_\tau$  les groupes à un paramètre de transformations de  $V$  respectivement associés aux champs  $A$  et  $B$ ; on notera respectivement  $u(t, x_0)$  et  $v(t, x_0)$  les lignes de courant des champs  $A$  et  $B$ , passant par  $x_0$  pour  $t = 0$ .

a) On définit deux applications  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^2$  dans  $V$ ,  $\varphi$  et  $\psi$ , telle que :

$$\varphi(t, \tau) = u(t, v(\tau, x_0)) \quad \text{et} \quad \psi(t, \tau) = v(\tau, u(t, x_0)).$$

Calculer les dérivées premières et secondes de  $\varphi$  et  $\psi$  au point  $(0, 0)$ , en fonction de  $A$  et  $B$ .

b) On définit une application  $C^\infty$ ,  $h$ , de  $\mathbf{R}^2$  dans  $V$ ,

$$h(t, \tau) = v(-\tau, u(-t, v(\tau, u(t, x_0))))),$$

à laquelle correspond, pour  $t$  et  $\tau$  fixés, une application de  $V$  dans  $V$  :

$$h_{t,\tau}(x_0) = (v_{-\tau} \circ u_{-t} \circ v_\tau \circ u_t)(x_0).$$

Calculer les dérivées premières et secondes de  $h$  au point  $(0, 0)$ , en fonction du crochet de Lie des champs  $A$  et  $B$ .

En considérant le chemin défini sur  $V$  pour  $t \geq 0$ , par :  $t \rightarrow h_{\sqrt{t}, \sqrt{t}}(x_0)$ , donner une interprétation géométrique de  $[A, B]_{x_0}$ .

c) Montrer que si :

$$(v_\tau \circ u_t)(x_0) = (u_t \circ v_\tau)(x_0), \quad \text{pour tout} \quad x_0 \in V,$$

le crochet  $[A, B]$  est nul en tout point de  $V$ .

d) On suppose réciproquement dans cette question que  $[A, B] = 0$ . En appliquant le théorème de Frobenius au deux-champ  $M$  engendré par  $A$  et  $B$ , montrer que pour tout  $x_0 \in V$ , on a :

$$(v_\tau \circ u_t)(x_0) = (u_t \circ v_\tau)(x_0).$$

e) Dédire de c) et d) une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité du 2-champ  $M$ , exprimée à l'aide des groupes à un paramètre de  $A$  et  $B$ .

f) On revient au cas général.

On définit une application  $F$  de  $V$  dans l'ensemble des applications de  $\mathbf{R}^2$  dans  $T(V)$ , telle que :

$$x_0 \rightarrow ((h, k) \rightarrow hA_{x_0} + kB_{x_0}), \quad \text{où} \quad h \text{ et } k \in \mathbf{R}.$$

Pour  $x_0$  fixé, on notera  $F_{x_0}$  l'application de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, T_{x_0}(V))$  image de  $x_0$  par  $F$ .

En identifiant les espaces  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, T_{x_0}(V)))$  et  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}^2; T_{x_0}(V))$ , calculer l'expression :

$$F'(x_0) \circ F_{x_0} \cdot ((0, 1), (1, 0)) - F'(x_0) \circ F_{x_0} \cdot ((1, 0), (0, 1)),$$

en fonction de  $A$  et  $B$ . En déduire une nouvelle condition d'intégrabilité de  $M$ .

### ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES DU 1<sup>er</sup> ORDRE

16° Soit  $V$  une variété  $C^\infty$ ,  $Y_1 \dots Y_k$ ,  $k$  champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $V$ . On considère le système d'équation ( $f$  étant une fonction inconnue de classe  $C^\infty$  sur  $V$ )

$$(1) \quad \theta(Y_s) f = 0 \quad s = 1, \dots, k$$

a) Montrer que (1) entraîne

$$\theta([Y_s, Y_s]) f = 0$$

b) Notons par  $g$  le plus petit  $\mathbf{R}$  espace vectoriel contenant  $Y_1 \dots Y_s$  et stable pour le crochet. Montrer que si  $z \in g$  alors (1) entraîne

$$\theta(z) f = 0$$

c) En supposant dimension  $g_x =$  constante, montrer que l'application  $x \rightarrow g_x$  définit un  $q$ -champ satisfaisant la condition de Frobenius. En choisissant un système de coordonnées locales envoyant un  $q$ -champ sur un champ constant déduire la solution générale de (1).

d) Résoudre par le même procédé le système

$$(1') \quad \theta(Y_s) f = a_s \quad s = 1, \dots, k$$

où les  $a_s$  sont des fonctions données.

Sous les hypothèses de e) on choisira une carte locale réduisant  $g$  à 1 champ constant et on montre que (1') est équivalent à

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x^h} f = b_h \quad 1 \leq h \leq q$$

où les  $b_h$  se calculent à partir des  $a_s$ . Discuter ensuite le système (2).

17° a) Soient  $V$  une variété,  $p \in \mathbf{N}$  et pour tout  $i \leq p$

$$X_i \in \bigotimes^1 V \quad \text{et} \quad a_i \in \mathcal{A}(V).$$

On considère le système linéaire d'équations aux dérivées partielles (S)

$$1 \leq i \leq p, \quad \theta(X_i) \cdot f = a_i \quad \text{avec} \quad f \in \mathcal{A}(V), \quad f \text{ inconnu.}$$

Sur la variété  $V \times \mathbf{R}$ , on considère :

$$\tilde{X}_i = X_i + a_i \frac{\partial}{\partial t} \in \bigotimes^1 (V \times \mathbf{R})$$

et le système homogène :

$$(\Sigma) \quad 1 \leq i \leq p, \quad \theta(\tilde{X}_i) \cdot g = 0 \quad \text{avec} \quad g \in \mathfrak{A}(\mathbf{V} \times \mathbf{R})$$

Préciser les relations entre les solutions de ces deux systèmes.

b) On pose

$$\mathbf{V} = \{x \in \mathbf{R}^3; x_2 \neq 0\}$$

Soient  $\alpha$  et  $\beta \in \mathfrak{A}(\mathbf{V})$ , on considère le système :

$$(5) \quad \begin{cases} \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \equiv \sqrt{\sum x_i^2} \\ x_2 \alpha(x) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - [x_1 \alpha(x) + x_3 \beta(x)] \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + x_2 \beta(x) \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Calculer  $\tilde{X}_1$  et  $\tilde{X}_2$  dans la base canonique de  $\overset{1}{\otimes}(\mathbf{R}^4)$ . A quelle condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  et  $\beta$ , le système  $(\Sigma)$  est-il complètement intégrable. Cette condition est-elle toujours vérifiée?

c) Exhiber un 3-champ sur  $\mathbf{V} \times \mathbf{R}$  contenant  $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$  quelles que soient les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$ , et complètement intégrable.

Calculer les formes orthogonales à ce 3-champ. Préciser ses sous-variétés intégrales maximales; montrer que la famille de ces sous-variétés est conservée par un groupe de translations; généraliser ce résultat dans le cadre de *a*. Enfin en déduire des solutions de (S).

d) Constater que la solution classique de la première équation de (S) vérifie ce système. En déduire, si la  $\mathfrak{A}(\mathbf{V})$ -algèbre engendrée par  $\{X_1, X_2\}$  est  $\overset{1}{\otimes} \mathbf{V}$ , une résolution de (S) n'utilisant pas  $(\Sigma)$ .

Puis résoudre (S) dans le cas plus général où il n'existe pas de  $\mathfrak{A}(\mathbf{V})$ -module strictement compris entre les deux précédents.

### 18° CHAMP CARACTÉRISTIQUE D'UN $p$ -CHAMP

Soit  $\mathbf{V}$  une variété de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) de dimension  $n$  et  $\Delta$  un  $p$ -champ

En général  $\Delta$  n'admet pas de variétés intégrales de dimension  $p$ , ce qui exige la complète intégrabilité de  $\Delta$  (théorème de Frobenius).

Pourtant si nous nous contentons à chercher des variétés intégrales de dimension inférieure à  $p$ , il y a un procédé général qui permet d'en trouver certaines.

a) DÉFINITION. — Un champ de vecteurs  $X$  défini dans un ouvert  $U$  de  $\mathbf{V}$  est dit caractéristique (par rapport à  $\Delta$ ) si

i)  $X_x \in \Delta_x$  pour tout  $x \in U$

ii) pour tout champ de vecteurs  $Y$  défini dans  $U$  et tel que  $Y_x \in \Delta_x$ , pour tout  $x \in U$ , on a  $[X, Y]_x \in \Delta_x$  quel que soit  $x \in U$ .

Les champs caractéristiques de  $\Delta$  sont les champs qui laissent invariant  $\Delta$  et qui en plus appartiennent à  $\Delta$ .

Montrer que si  $X_1, X_2$  sont deux champs caractéristiques de  $\Delta$  définis dans  $U$  alors sont aussi caractéristiques des champs  $\alpha X_1 + \beta X_2$  et  $[X_1, X_2]$  où  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . (Utiliser l'identité de Jacobi.)

b) Nous dirons qu'une 1-forme différentielle définie dans  $U$  appartient à  $\Delta^\perp$  si en tout point  $x$  elle est nulle sur  $\Delta_x$ .

Montrer que si  $X$  est un champ de vecteur  $U$ . Pour que  $X$  soit caractéristique, il faut et il suffit que

i)  $X$  appartient à  $\Delta$

ii) pour toute 1-forme  $\omega$  appartenant à  $\Delta^\perp$ ,  $\theta(X)\omega$  appartient à  $\Delta^\perp$ .

En conclure

$X$  est caractéristique si et seulement si pour toute 1-forme  $\omega$  appartenant à  $\Delta^\perp$

a)  $i(X)\omega = 0$

b)  $i(X)d\omega$  appartient à  $\Delta^\perp$ .

c) Pour tout  $x \in V$  indiquons par  $\mathcal{D}_x$  le sous-ensemble de  $T_x(V)$  des vecteurs induits par les champs caractéristiques définis au voisinage de  $x$ . Autrement dit c'est l'ensemble de  $X_x$  où  $X$  est un champ caractéristique. On voit immédiatement que  $\mathcal{D}_x$  est un sous-espace vectoriel de  $T_x V$ . En général la dimension de  $\mathcal{D}_x$  peut varier avec  $x$ . Nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\dim \mathcal{D}_x = \rho \quad \text{est indépendante de } x \in V.$$

On voit alors que  $x \rightarrow \mathcal{D}_x$  est un  $\rho$ -champ sur  $V$  qui est différentiable.

Appelons  $\mathcal{D} : x \rightarrow \mathcal{D}_x$  le *champ caractéristique* de  $\Delta$ .

D'après les définitions,  $\mathcal{D}_x \subset \Delta_x$  pour tout  $x \in V$  donc toute variété intégrale de  $\mathcal{D}$  est aussi une variété intégrale de  $\Delta$ .

Appelons les variétés intégrales de  $\mathcal{D}$  les *caractéristiques de Cauchy* de  $\Delta$ .

Montrer que  $\mathcal{D}$  est complètement intégrable et que  $\Delta$  admet des caractéristiques de Cauchy de dimension  $\rho$ .

d) Montrer que pour tout  $x \in V$  il existe un système de coordonnées locales  $(U; x^1, \dots, x^n)$  et une base locale  $(U; \omega^1, \dots, \omega^q)$  de  $\Delta^\perp$  qui vérifie.

i) Les sous-variétés de  $U$  définies par les équations

$$x^{h+1} = c^{\rho+1}, \dots, x^n = c^n \quad \text{où les } c^{\rho+\alpha} \dots c^n$$

sont des constantes (qui peuvent varier dans un domaine de  $\mathbf{R}^{n-\rho}$ ) sont des variétés intégrales de  $\mathcal{D}$ .

$$\text{ii) } \omega^\lambda = \sum_{j=1}^n f_j^\lambda(x^{\rho+1}, \dots, x^n) dx^j \quad 1 \leq \lambda \leq q = n - \rho$$

c'est-à-dire les  $\omega^\lambda$  s'écrivent seulement à l'aide des coordonnées  $x^{\rho+1}, \dots, x^n$  et de leurs différentielles.

(On appelle une base locale  $(U; \omega^1, \dots, \omega^q)$ ,  $q = n - \rho$ , de  $\Delta^\perp$  où  $U$  est ouvert de  $V$  est un système de  $q$  formes différentielles linéaires  $\omega^1, \dots, \omega^q$  définies dans  $U$  qui appartiennent à  $\Delta^\perp$  et qui sont linéairement indépendantes en tout point.)

On utilisera le théorème de Frobenius pour réduire les variétés intégrales de  $\mathfrak{D}$  à la forme i).

e) La dernière proposition montre que le système  $\Delta$  initial qui était un système à  $n$ -variables se réduit en fait à un système à  $n - \rho$  variables  $x^{\rho+1}, \dots, x^n$ . Une variété intégrale de dimension  $\rho$  de ce système à  $n - \rho$  variables s'écrit par des équations

$$F_\mu(x^{\rho+1}, \dots, x^n) = 0$$

Or ces mêmes équations définissent une sous-variété de  $U$  de dimension  $\rho + \rho$  qui est une variété intégrale de  $\Delta$ . Cette dernière variété intégrale est une réunion de caractéristiques de Cauchy. En conclure que

Toute variété intégrale de  $\Delta$  est contenu dans une variété intégrale engendrée par une famille de caractéristiques de Cauchy.

### 19° ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 1<sup>er</sup> ORDRE

Soit  $E^1$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , soit  $E = E^1 \oplus \mathbf{R}$ , on étudie les surfaces  $\Sigma$  de  $E$  défini par

$$(1) \quad f(x) - z = 0 \quad \text{où} \quad x \in E^1$$

et où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$ . On pose

$$p_f = (p_1, \dots, p_n) \quad \text{avec} \quad p_k = \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

(En ayant choisi une base sur  $E^1$ ). On note par  $\mathbf{Q}$  l'espace dual de  $E^1$ , alors  $p_f \in \mathbf{Q}$ . On se donne une fonction  $F$  de classe  $C^2$  définie sur  $E \oplus \mathbf{Q}$  et on lui associe l'équation aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre

$$(2) \quad F(x, z, p_f) = 0$$

On appelle élément de *contact* de  $E$  la donnée d'un point  $(x, z)$  de  $E$  et d'un hyperplan passant par ce point. On dit qu'un élément de contact est *régulier* si cet hyperplan n'est pas parallèle à l'axe  $Oz$ .

a) Montrer que l'ensemble des éléments de contact régulier de  $E$  s'identifie à  $E \oplus \mathbf{Q}$ .

Montrer que si  $H$  est une sous-variété de  $E$  de dimension  $q$  ( $q \leq n$ ) alors l'ensemble des éléments de contact réguliers tangent à  $H$  forment une sous-

variété  $\hat{H}$  de  $E \oplus Q$  de dimension  $n$  (on dit qu'un élément de contact  $(z, P)$  est *tangent* à  $H$  si  $z \in H$  et si  $P \supset T_z(H)$ ).

b) Considérons sur  $E \oplus Q$  la forme différentielle

$$\theta = dz - \langle dx, p \rangle = dz - \sum_{i=1}^n p_i dx^i.$$

Montrer alors que  $\hat{H}$  est une variété intégrale de l'équation de Pfaff

$$(3) \quad \theta = 0$$

c) Montrer que l'équation (3) n'a pas de variétés intégrales de dimension  $> n$ .

d) Supposons que la fonction  $F$  définie en (2) ait une différentielle  $dF$  différente de zéro, alors

$$F(x, z, p) = 0$$

définit une sous-variété  $V$  de codimension 1 de  $E \oplus Q$ . On note par  $\omega$  la restriction de  $\theta$  à  $V$ .

Montrer alors qu'une hypersurface  $S$  est solution de (2) si et seulement si  $\hat{S}$  est une variété intégrale de l'équation de Pfaff

$$(4) \quad \omega = 0$$

e) Supposons  $\omega_v \neq 0$  pour tout  $v \in V$ . Montrer alors que le champ caractéristique (cf. Exercice, II<sup>e</sup> Partie, 18<sup>o</sup>) est de dimension 1 et peut être défini par le champ de vecteurs  $C$  de composantes

$$C = (P_i, \sum p_j P_j, -X_i - p_i Z)$$

où

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

(On utilisera 18<sup>o</sup> b). On appellera bande caractéristique les projections sur  $E$  d'une ligne de courant du champ  $C$ .

f) Utilisant 18<sup>o</sup> e et 19<sup>o</sup> c montrer que toute hypersurface de solution de (2) est engendrée par une famille de bandes caractéristiques. Montrer que le plan tangent à l'hypersurface le long d'une bande caractéristique en un point est l'élément de contact par lequel passe la ligne de courant du champ  $C$ .



# Théorie locale des groupes de Lie

## Applications géométriques

La géométrie élémentaire peut être considérée comme l'étude des « figures égales » ou l'étude des « propriétés intrinsèques d'une figure ». Ces deux notions ont le même concept sous jacent, à savoir celui d'une famille  $G$  de transformations permises dans le cadre de la géométrie considérée : déplacement en géométrie métrique, transformation linéaire en géométrie affine, etc.

Deux figures  $F_1$  et  $F_2$  sont « égales » s'il existe une transformation de  $G$  amenant  $F_1$  sur  $F_2$ .

Le fait que si  $F_1$  est « égale » à  $F_2$ ,  $F_2$  est « égale » à  $F_3$  entraîne que  $F_1$  est « égale » à  $F_3$ , implique que le produit de transformations de  $G$  est une transformation de  $G$ . Plus généralement le fait que la relation d'« égalité » pour les figures est une relation d'équivalence se traduit dans le fait que  $G$  est *un groupe*.

De ce point de vue une géométrie est la donnée d'un espace  $V$  muni d'un groupe de transformations  $G$ ; on supposera que  $G$  est transitif c'est-à-dire que deux points  $x, x'$  quelconque de  $V$  sont équivalents sous l'action de  $G$ . Alors  $V$  s'identifie à l'espace quotient  $G/H$  où  $H$  est le sous-groupe de  $G$  laissant stable un élément fixé de  $V$ .

En plus de cet aspect algébrique de la relation d'égalité des figures, la géométrie élémentaire utilise des propriétés de continuité, c'est dire que  $G$  est muni d'une topologie, et également des propriétés de différentiabilité : (notion de tangente à une courbe etc...) alors,  $G$  est muni d'une structure différentiable et on obtient la notion de *groupe de Lie*.

La théorie des figures équivalentes sera développée dans ce cadre général par la théorie de Cartan-Darboux du repère mobile sur un groupe de Lie arbitraire.

Dans un groupe topologique on peut propager par les translations du groupe une situation d'un voisinage de l'élément neutre à un voisinage d'un point quelconque; dans un groupe de Lie on a beaucoup plus : le développement taylorien arrêté à l'ordre deux de la loi de groupe à l'élément neutre détermine localement complètement celle-ci.

Cette structure infinitésimale conduira à l'algèbre de Lie de  $G$ .

L'étude des groupes de Lie sera ainsi ramené dans une large mesure à des problèmes algébriques sur des espaces vectoriels de dimension finie.

## 1 Parallélisme canonique sur un groupe de Lie

### 1.1 NOTION DE GROUPE DE LIE

La notion de groupe de Lie provient de la confluence de deux concepts, celui de variété et celui de groupe.

Plus précisément, nous appellerons structure de *groupe de Lie* sur  $G$ , la donnée :

- d'une structure de variété de classe  $C^3$  sur  $G$
- d'une structure de groupe sur  $G$  (on notera  $e$  l'élément neutre de  $G$ );

ces deux structures étant reliées par la condition 1.1.1 ci-dessous :

Remarquons que le produit définit une application

$$p : G \times G \rightarrow G$$

en posant :

$$p(g, g') = gg'$$

De même l'inverse définit une application

$$i : G \rightarrow G$$

en posant :

$$i(g) = g^{-1}$$

Nous imposons alors la relation suivante entre la structure algébrique et la structure de variété :

$$1.1.1 \quad p \in C^3(G \times G; G) \quad \text{et} \quad i \in C^3(G, G).$$

### 1.2 TRANSLATION A GAUCHE

A tout  $g_0 \in G$  fixé, nous associons la transformation de  $G$  dans  $G$ , soit  $\tau_{g_0}$ , définie par :

$$\tau_{g_0}(g) = g_0g$$

Il résulte de 1.1.1 que  $\tau_{g_0} \in C^3(G; G)$ . De plus on a :

$$1.2.1 \quad \begin{cases} \tau_{g_0} \circ \tau_{g_1} = \tau_{g_0g_1} \\ \tau_e = \text{identité sur } G \end{cases}$$

Par suite :

1.2.2 La translation à gauche  $\tau_{g_0}$  est un difféomorphisme de  $G$  sur  $G$ .

### 1.3 PARALLÉLISME CANONIQUE SUR UN GROUPE DE LIE

On a le théorème :

THÉORÈME. — *Un groupe de Lie  $G$  est muni d'un parallélisme canonique. Ce parallélisme est défini par :*

$$\omega \in \Lambda^1(G; T_e(G))$$

$\omega$  est de la classe  $C^2$  et on a :

$$\omega_e = \text{identité.}$$

On appellera  $\omega$  la *forme de Maurer-Cartan* de  $G$ .

PREUVE. — Remarquons que d'après 1.2.2 :

$\tau_{g_0}^{-1}$  est un difféomorphisme de  $G$  sur  $G$  envoyant le point  $g_0$  sur l'élément neutre  $e$ .

Par suite, en dérivant  $\tau_{g_0}^{-1}$  en  $g_0$ , on obtiendra un isomorphisme de  $T_{g_0}(G)$  sur  $T_e(G)$ .

Nous poserons :

$$\omega_{g_0} = \tau'_{g_0^{-1}}(g_0)$$

c'est-à-dire que par définition on a :

1.3.1

$$\langle z, \omega_{g_0} \rangle = \tau'_{g_0^{-1}}(g_0) \cdot z, \text{ pour tout } z \in T_{g_0}(G)$$

si  $g_0 = e$ , alors  $\tau_{g_0} = \text{identité}$  d'où  $\omega_e = \text{identité}$ ; et  $\omega$  satisfait les conclusions du théorème.

### 1.4 FORMES INVARIANTES À GAUCHE

Soit  $\pi \in \Lambda^1(G; E)$ ; on dira que  $\pi$  est *invariante à gauche* si :

$$\tau_{g_0}^* \pi = \pi \text{ pour tout } g_0 \in G.$$

Le théorème suivant montre que la forme de Maurer-Cartan est une forme universelle pour les formes invariantes à gauche.

THÉORÈME. — *Soient  $G$  un groupe de Lie,  $\omega$  sa forme de Maurer-Cartan; alors :*

1.4.1

$\omega$  est invariante à gauche;

1.4.2 Soit  $a \in \mathcal{L}(T_e(G); E)$  donné; posons

$$\rho = a \circ \omega$$

Alors  $\rho$  est invariant à gauche.

1.4.3 Inversement soit  $\pi \in \Lambda^1(G; E)$  invariant à gauche; alors  $\pi$  s'écrit sous la forme 1.4.2 avec

$$a = \pi_e$$

PREUVE. — Démontrons 1.4.1 :

$$\tau_{g_0}^* \omega = \omega$$

Plaçons-nous en un point  $g \in G$ ; soit  $z \in T_g(G)$ . Nous devons montrer que :

$$\langle z, (\tau_{g_0}^* \omega)_g \rangle = \langle z, \omega_g \rangle$$

Explicitant la définition de l'image réciproque dans le premier membre, on obtient :

$$= \langle \tau'_{g_0}(g) \cdot z, \omega_{g_0 g} \rangle$$

Appliquons la formule 1.3.1 pour calculer  $\omega_{g_0 g}$ , on obtient :

$$= \tau'_{(g_0 g)^{-1}}(g_0 g) (\tau'_{g_0}(g) \cdot z)$$

On a, d'après 1.2.1,

$$\tau_{g^{-1}g_0^{-1}} \circ \tau_{g_0} = \tau_{g^{-1}}$$

D'où en dérivant et en appliquant le théorème des fonctions composées :

$$\tau'_{g^{-1}g_0^{-1}}(g_0 g) \circ \tau'_{g_0}(g) = \tau'_{g^{-1}}(g).$$

D'où finalement :

$$\langle z, (\tau_{g_0}^* \omega)_g \rangle = \tau'_{g^{-1}}(g) \cdot z;$$

En appliquant 1.3.1, on reconnaît dans le second membre la définition de  $\langle z, \omega_g \rangle$  et ainsi 1.4.1 est démontré.

La démonstration de 1.4.2 est évidente : en effet

$$\tau_{g_0}^*(a \circ \omega) = a \circ (\tau_{g_0}^* \omega)$$

et d'après 1.4.1,  $\tau_{g_0}^* \omega = \omega$ ; d'où 1.4.2.

Reste à démontrer 1.4.3; soit  $z \in T_{g_0}(G)$

$$\langle z, \pi_{g_0} \rangle = \langle z, (\tau_{g_0}^* \pi)_{g_0} \rangle;$$

on a d'après I-7.6.8

$$= \langle \tau'_{g_0^{-1}}(g_0) \cdot z, \pi_{e_0} \rangle$$

d'après 1.3.1

$$\tau'_{g_0^{-1}}(g_0) \cdot z = \omega_{g_0}(z)$$

D'où

$$\langle z, \pi_{g_0} \rangle = \pi_e(\omega_{g_0}(z))$$

ce qui n'est autre que 1.4.3.

1.4.4 COROLLAIRE. — Deux formes  $\pi$  et  $\tilde{\pi} \in \Lambda^1(G^*; E)$  invariantes à gauche telles que :

$$\pi_e = \tilde{\pi}_e$$

sont égales.

PREUVE. — On a :

$$\pi = a \circ \omega \quad \tilde{\pi} = \tilde{a} \circ \omega$$

où

$$a = \pi_e = \tilde{\pi}_e = \tilde{a}, \quad \text{c.q.f.d.}$$

1.4.5 COROLLAIRE. — La forme de Maurer-Cartan  $\omega$  est caractérisée par les deux propriétés :

*elle est invariante à gauche*  
 $\omega_e = \text{identité.}$

### 1.5 CHAMPS DE VECTEURS INVARIANTS A GAUCHE

Comme  $\tau_{g_0}$  est un difféomorphisme de  $G$  sur  $G$ , l'opération image directe  $(\tau_{g_0})_*$  est bien définie.

Nous dirons que  $A \in \bigotimes^1 G$  est *invariant à gauche* si :

$$(\tau_{g_0})_* A = A \quad \text{pour tout } g_0 \in G$$

Nous noterons par :

$$\mathcal{C} = \left\{ A \in \bigotimes^1 G \mid A \text{ est invariant à gauche} \right\}$$

L'opération  $(\tau_{g_0})_*$  étant une opération linéaire, on déduit des définitions que :

1.5.1  $\mathcal{C}$  est un sous- $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de  $\bigotimes^1 G$ .

THÉORÈME. — Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\omega$  sa forme de Maurer-Cartan,  $\mathcal{C}$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $G$  invariants à gauche. Donnons nous  $X \in \bigotimes^1 G$ .

1.5.2 On a  $X \in \mathcal{C}$  si et seulement si  $\langle X, \omega \rangle = \text{constante}$ .

PREUVE. — Remarquons d'abord que 1.5.2 est équivalent à

$$\tau_{g_0}(\langle X, \omega \rangle) = \langle X, \omega \rangle$$

Ceci étant, appliquons I-7.6.7, on obtient :

$$\tau_{g_0}^*(\langle X, \omega \rangle) = \langle (\tau_{g_0^{-1}})_* X, \tau_{g_0}^* \omega \rangle$$

d'où utilisant 1.4.1

$$\langle (\tau_{g_0^{-1}})_* X, \omega \rangle = \langle X, \omega \rangle$$

ou encore

$$\langle Z, \omega \rangle = 0 \quad \text{en posant} \quad Z = (\tau_{g_0^{-1}})_* X - X$$

ce qui, avec le lemme suivant, montre que  $Z = 0$ , c'est-à-dire démontre le théorème.

1.5.3 LEMME. — Soit  $Z \in \bigotimes^1 G$  tel que  $\langle Z, \omega \rangle = 0$ ; alors  $Z = 0$ .

PREUVE. — Soit  $g \in G$ ; alors

$$\langle Z_g, \omega_g \rangle = 0$$

Comme  $\omega_g$  est un isomorphisme de  $T_g(G)$  sur  $T_e(G)$ , on en déduit que  $Z_g = 0$ . Comme ceci est vrai pour tout  $g$ , le lemme est démontré.

1.5.4 THÉORÈME. — Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{C}_g$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche sur  $G$ . Considérons l'application :

$$u : \mathcal{C}_g \rightarrow T_e(G)$$

définie en posant

$$u(A) = A_e.$$

Alors  $u$  est un isomorphisme d'espace vectoriel de  $\mathcal{C}_g$  sur  $T_e(G)$ .

PREUVE. — On a d'après 1.5.2 et si  $A \in \mathcal{C}_g$  :

$$\langle A, \omega \rangle = \langle A, \omega \rangle_e = A_e,$$

ce que l'on peut écrire :

$$1.5.5 \quad u(A) = \langle A, \omega \rangle$$

Montrons l'injectivité de  $u$ . Soit  $A \in \mathcal{C}_g$  tel que :

$$u(A) = 0,$$

ce qui s'écrit d'après 1.5.5,

$$\langle A, \omega \rangle = 0$$

On déduit de 1.5.3, que  $A = 0$  d'où l'injectivité.

Montrons la surjectivité. Donnons-nous  $z \in T_e(G)$ . Construisons  $X \in \bigotimes^1 G$  en translatant  $z$  par  $\tau'$ ; plus précisément, posons :

1.5.6

$$\boxed{X_g = \tau'_g(e) \cdot z}$$

En particulier, on a :  $X_e = z$ . Reste à montrer que  $X \in \mathcal{C}$ ; on le fera en montrant que  $X$  satisfait 1.5.2. On a :

$$\langle X, \omega \rangle_g = \langle \tau'_g(e) \cdot z, \omega_g \rangle$$

Utilisons 1.3.1 :

$$= \tau'_{g^{-1}}(g)(\tau'_g(e) \cdot z)$$

Comme  $\tau_{g^{-1}} \circ \tau_g = \text{identité}$ , on obtient en dérivant cette relation :

$$\tau'_{g^{-1}}(g) \circ \tau'_g(e) = \text{identité}$$

D'où  $\langle X, \omega \rangle_g = z = \text{constante}$ , et le théorème 1.5.4 est démontré.

1.5.7 COROLLAIRE. — *Tout champ invariant à gauche est de classe  $C^2$ .*

PREUVE. — Il est de la forme 1.5.6.

## 2 Algèbre de Lie et équation de structure de Maurer-Cartan

### 2.1 ALGÈBRE DE LIE ABSTRAITE

On appellera algèbre de Lie abstraite, la donnée d'un espace vectoriel  $F$  sur  $\mathbf{R}$ , muni d'une application :

$$\begin{array}{l} F \times F \longrightarrow F \\ \text{notée} \quad (u, v) \longmapsto [u, v] \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

*Antisymétrie :*

$$[u, v] = -[v, u];$$

*Linéarité en  $u, v$  étant fixé;*

*Identité de Jacobi :* quels que soient  $u, v, z \in F$  on a :

$$[[u, v], z] + [[v, z], u] + [[z, u], v] = 0.$$

2.1.1 *Exemple.* Soit  $V$  une variété de classe  $C^\infty$ , alors l'ensemble des champs de vecteurs sur  $V$  de classe  $C^\infty$  forme une algèbre de Lie.

*Crochet d'une forme différentielle à valeurs dans une algèbre de Lie.*

Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $F$  une algèbre de Lie abstraite. Soit  $\rho \in \Lambda^1(V; F)$ . Nous allons associer à  $\rho$  une forme  $\sigma \in \Lambda^2(V; F)$ . Fixons  $x \in V$ ; nous poserons, par définition, pour tout  $z_1, z_2 \in T_x(V)$  :

$$\Phi(z_1, z_2) = [\rho_x(z_1), \rho_x(z_2)]$$

Le second membre est, d'après l'antisymétrie du crochet de  $F$ , antisymétrique en  $z_1$  et  $z_2$ . De même, il est bilinéaire. Par suite  $\Phi$  est une application bilinéaire antisymétrique de  $T_x(V)$  dans  $F$ . A tout  $x \in V$ , on associe ainsi  $\Phi \in \mathcal{L}_{2, a}(T_x(V); F)$ . Cette correspondance définit une forme différentielle :

$$\sigma \in \Lambda^2(V; F)$$

vérifiant

$$2.1.2 \quad \langle z_1 \wedge z_2, \sigma_x \rangle = [\rho_x(z_1), \rho_x(z_2)]$$

On notera  $\sigma$  par  $[\rho, \rho]$  et on appelle  $\sigma$  la *forme crochet* de  $\rho$ .

## 2.2 ALGÈBRE DE LIE D'UN GROUPE DE LIE

Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $G$  invariants à gauche.

2.2.1 LEMME. — Si  $A$  et  $B \in \mathcal{G}$ , alors  $[A, B] \in \mathcal{G}$ .

PREUVE. — D'après 1.5.7,  $A$  et  $B$  sont de classe  $C^2$ ; le crochet est ainsi bien définie. D'autre part, l'opération crochet est une opération intrinsèque qui se transporte par difféomorphisme : on a, si  $f$  est un difféomorphisme quelconque :

$$f_*([A, B]) = [f_*A, f_*B]$$

En particulier si  $f_*A = A$ ,  $f_*B = B$  on déduit que  $f_*([A, B]) = [A, B]$ , ce qui démontre le lemme en prenant  $f = \tau_g$ .

DÉFINITION. — Sur  $\mathcal{G}$  est défini par l'opération crochet, un produit antisymétrique, satisfaisant l'identité de Jacobi. On appellera  $\mathcal{G}$  muni de ce produit et de sa structure d'espace vectoriel, l'*algèbre de Lie du groupe  $G$* .

### Exemple d'algèbre de Lie

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Munissant  $E$  de la loi de l'addition, alors  $E$  est un groupe de Lie  $G$ . Son algèbre de Lie est isomorphe à  $T_0(G)$  c'est-à-dire à  $E$ . Reste à calculer le crochet. Les champs invariants à gauche ne sont autres que les champs de vecteurs constants sur  $E$ . Si  $A^1, A^2 \in \mathcal{G}$ , alors en prenant une base  $e_1, \dots, e_n$  de  $E$  telle que

$$\begin{aligned} A_x^1 &= e_1 \\ A_x^2 &= e_2 \end{aligned} \quad (\text{quel que soit } x \in E)$$

on a :

$$\theta(A^i)f = \frac{\partial}{\partial \xi^i} f \quad \text{si} \quad (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

sont les coordonnées dans cette base.

On a alors :

$$[A^i, A^j] = \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial \xi^j} - \frac{\partial}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right),$$

expression nulle en vertu du théorème d'interversion des dérivations de Schwarz. Par suite  $[A^1, A^2] = 0$ . On a ainsi montré :

*L'algèbre de Lie du groupe d'un espace vectoriel est cet espace vectoriel muni du crochet identiquement nul.*

### 2.3 FORME CANONIQUE A VALEURS DANS L'ALGÈBRE DE LIE

Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie,  $\omega$  sa forme de Maurer-Cartan :

$$\omega \in \Lambda^1(G; T_e(G))$$

soit  $q$  l'isomorphisme de  $T_e(G)$  sur  $\mathcal{G}$ , inverse de l'isomorphisme  $u$  défini dans le théorème 1.5.4.

Utilisant  $q$ , il est facile de former, à partir de  $\omega$  une forme à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ . En effet, posons :

$$\hat{\omega} = q \circ \omega,$$

alors on a :

$$\hat{\omega} \in \Lambda^1(G; \mathcal{G})$$

On a l'interprétation géométrique suivante de  $\hat{\omega}$  qui généralise le théorème 1.5.4.

2.3.1 Pour tout  $g_0 \in G$ , l'application :

$$u_{g_0} : \mathcal{G} \rightarrow T_{g_0}(G)$$

définie en posant

$$u_{g_0}(A) = A_{g_0},$$

est un isomorphisme de  $T_{g_0}(G)$  sur  $\mathcal{G}$ .

De plus, on a :

$$\hat{\omega}_{g_0} = u_{g_0}^{-1} \circ \omega.$$

PREUVE. — Écrivant 1.5.6, on a :

$$u_e(A) = \langle A, \omega \rangle;$$

le second membre étant constant, calculons-le en  $g_0$ ; on obtient :

$$u_e(A) = \omega_{g_0}(A_{g_0});$$

d'où en appliquant  $q$  aux deux membres :

$$A = \hat{\omega}_{g_0}(A_{g_0})$$

Comme  $\hat{\omega}_{g_0}$  est une composition d'isomorphismes, il en résulte que  $\hat{\omega}_{g_0}$  est un isomorphisme de  $T_{g_0}(G)$  sur  $\mathcal{G}$ . De plus on a :

$$\hat{\omega}_{g_0}^{-1}(A) = A_{g_0} = u_{g_0}(A) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

## 2.4 ÉQUATION DE STRUCTURE DE MAURER-CARTAN

On a :

**THÉORÈME.** — Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie,  $\hat{\omega} \in \Lambda^1(G, \mathcal{G})$  la forme canonique définie en 2.3. Alors on a :

$$d\hat{\omega} + [\hat{\omega}, \hat{\omega}] = 0$$

**PREUVE.** — Soit  $g_0 \in G$ ,  $z_1, z_2 \in T_{g_0}(G)$  donnés. Nous devons montrer que :

$$\langle z_1 \wedge z_2, (d\hat{\omega})_{g_0} \rangle + [\hat{\omega}_{g_0}(z_1), \hat{\omega}_{g_0}(z_2)] = 0$$

Posons

$$2.4.1 \quad A^1 = \hat{\omega}_{g_0}(z_1), \quad A^2 = \hat{\omega}_{g_0}(z_2),$$

alors on a :  $A^1, A^2 \in \mathcal{G}$ .

On a, d'après la formule de définition du cobord II-4.3.2 :

$$\theta(A^1)(\langle A^2, \hat{\omega} \rangle) - \theta(A^2)(\langle A^1, \hat{\omega} \rangle) = \langle A^1 \wedge A^2, d\hat{\omega} \rangle + \langle [A^1, A^2], \hat{\omega} \rangle$$

Or d'après 1.5.2, le premier membre est nul d'où on obtient l'identité :

$$\langle A^1 \wedge A^2, d\hat{\omega} \rangle + \langle [A^1, A^2], \hat{\omega} \rangle = 0$$

Écrivons cette identité au point  $g_0$ ; on obtient compte tenu du fait que d'après 2.3.1

$$A_{g_0}^i = z^i \quad i = 1, 2$$

$$\langle z^1 \wedge z^2, (d\hat{\omega})_{g_0} \rangle + \langle [A^1, A^2]_{g_0}, \hat{\omega}_{g_0} \rangle = 0$$

Or  $[A^1, A^2] \in \mathcal{G}$ ; d'où d'après 2.3.1, on a :

$$\langle [A^1, A^2]_{g_0}, \hat{\omega}_{g_0} \rangle = [A^1, A^2]$$

ce qui s'écrit d'après 2.4.1

$$= [\hat{\omega}_{g_0}(z_1), \hat{\omega}_{g_0}(z_2)]$$

et le théorème est démontré.

*Convention de notation.* Dans la suite du chapitre, on identifiera  $\mathcal{G}$  avec  $T_e(G)$  via l'isomorphisme  $u$  défini en 1.5.4. La structure d'algèbre définie sur  $\mathcal{G}$  sera transportée par  $u$  à  $T_e(G)$  qui deviendra ainsi une algèbre de Lie.

Ces identifications faites, les formes  $\omega$  et  $\hat{\omega}$  se trouveront identifiées.

Nous avons retardé jusqu'à maintenant cette identification afin de pouvoir écrire sans ambiguïté la démonstration du théorème 2.4.

### 2.5 EXPRESSION DANS UNE BASE DES ÉQUATIONS DE STRUCTURE MAURER-CARTAN

Choisissons une base  $e_1, \dots, e_n$  de  $\mathcal{G}$ . Le crochet étant bilinéaire est défini par les crochets  $[e_i, e_j]$ . Posons

$$[e_i, e_j] = \sum_k C_{i,j}^k e_k.$$

Les coefficients  $C_{i,j}^k$  sont appelés les coefficients de structure de  $\mathcal{G}$  relativement à la base choisie. On a :

$$C_{i,j}^k = -C_{j,i}^k \quad \text{d'après l'antisymétrie du crochet.}$$

D'autre part l'identité de Jacobi s'écrit :

$$\sum_k (C_{i,j}^k \cdot C_{k,l}^s + C_{j,l}^k \cdot C_{k,i}^s + C_{l,i}^k \cdot C_{k,j}^s) = 0$$

identité vérifiée quels que soient  $i, j, l, s$ .

La forme de Maurer-Cartan va s'écrire :

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega^i e_i, \quad \omega^i \in \Lambda^1(G^*)$$

On a ainsi, si  $z_p \in T_{g_0}(G)$ ,  $p = 1, 2$ ,

$$\omega_{g_0}(z_p) = \sum \omega^i(z_p) e_i.$$

D'où

$$[\omega_{g_0}(z_1), \omega_{g_0}(z_2)] = \sum_{i,j} \omega^i(z_1) \omega^j(z_2) [e_i, e_j] = \sum_{i < j} \langle z_1 \wedge z_2, \omega^i \wedge \omega^j \rangle [e_i, e_j]$$

D'où

$$[\omega, \omega] = \sum_{i < j} \omega^i \wedge \omega^j [e_i, e_j] = \sum_k \left( \sum_{i < j} C_{i,j}^k \omega^i \wedge \omega^j \right) e_k$$

d'où les équations de structure de Maurer-Cartan s'écrivent :

$$d\omega^k = - \sum_{i < j} C_{i,j}^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

## 3 Théorie de l'équivalence de Darboux

### 3.1 DÉFINITION DE L'ÉQUIVALENCE

En géométrie élémentaire, deux figures sont « égales s'il existe un déplacement amenant la première sur la seconde. Ce point de vue rend naturelle la définition

suiuante, dont l'importance ne sera d'ailleurs pleinement justifiée que par ses applications géométriques ultérieures.

Donnons-nous une variété  $V$  de classe  $C^2$  et un groupe de Lie  $G$ . Dans l'espace fonctionnel

$$C^2(V; G)$$

établissons une *relation d'équivalence* :

$$f \text{ est équivalent à } \hat{f} \text{ s'il existe } g_0 \in G$$

tel que

$$\hat{f} = \tau_{g_0} \circ f.$$

Le problème de Darboux consiste à déterminer les classes d'équivalence de cette relation. Il sera résolu par l'usage des *différentielles de Darboux*.

### 3.2 DIFFÉRENTIELLE DE DARBOUX

Comme un groupe  $G$  est, en vertu de 1.3, une variété parallélisée, nous définirons la différentielle de Darboux d'une application  $f \in C^1(V; G)$  en utilisant la définition générale II-1.2.1 et en posant :

$$\pi_f = f^* \omega$$

où  $\omega$  est la forme de Maurer-Cartan de  $G$ . Alors

$$\pi_f \in \Lambda^1(V; \mathcal{G})$$

**3.2.1 PROPOSITION.** — Soient  $f, \hat{f} \in C^1(V; G)$ . Supposons que  $f$  et  $\hat{f}$  soient équivalentes au sens de 3.1, alors leurs différentielles de Darboux sont égales.

**PREUVE.** — En effet, il existe alors  $g_0 \in G$  tel que

$$\hat{f} = \tau_{g_0} \circ f$$

D'où

$$\hat{f}^* = f^* \circ \tau_{g_0}^*$$

D'où

$$\pi_{\hat{f}} = \hat{f}^* \omega = f^* (\tau_{g_0}^* \omega).$$

Mais d'après 1.4.1,  $\tau_{g_0}^* \omega = \omega$ ; donc :

$$\pi_{\hat{f}} = f^* \omega = \pi_f.$$

C.Q.F.D.

### 3.3 ÉQUATION DE STRUCTURE DES DIFFÉRENTIELLES DE DARBOUX

**3.3.1** Soit  $G$  un groupe de Lie,  $V$  une variété de classe  $C^2$  soit  $f \in C^2(V; G)$ , notons par  $\pi$  la différentielle de Darboux de  $f$ , alors

$$\pi \in \Lambda^1(V^*; \mathcal{G})$$

et vérifie l'équation de structure :

$$d\pi + [\pi, \pi] = 0.$$

PREUVE. — La démonstration résulte de  $\pi = f^*\omega$  de 2.4 et du lemme suivant :

3.3.2 — LEMME : *Conservation de l'équation de structure par image réciproque.* Soit données  $V, W$  deux variétés de classe  $C^1$ ,  $F$  une algèbre de Lie abstraite et  $\rho \in \Lambda^1(W^*; F)$ . Supposons que

$$d\rho + [\rho, \rho] = 0$$

soit  $f \in C^2(V; W)$ ,  $\theta = f^*\rho$ ; alors on a :

$$d\theta + [\theta, \theta] = 0.$$

PREUVE. — Donnons-nous  $x_0 \in V$ ,  $z_1, z_2 \in T_{x_0}(V)$  Calculons

$$\langle z_1 \wedge z_2, (d\theta)_{x_0} \rangle.$$

On a, d'après II-1.2.3

$$d\theta = f^* d\rho$$

c'est-à-dire

$$\langle z_1 \wedge z_2, (d\theta)_{x_0} \rangle = \langle \hat{z}_1 \wedge \hat{z}_2, (d\rho)_{y_0} \rangle$$

où

$$\hat{z}_i = f'(x_0) \cdot z_i \quad y_0 = f(x_0).$$

Mais  $\rho$  satisfait l'équation de structure; d'où :

$$= - [\rho_{y_0}(\hat{z}_1), \rho_{y_0}(\hat{z}_2)]$$

D'autre part, on a :

$$\rho_{y_0}(\hat{z}_i) = \langle f'(x_0) \cdot z_i, \rho_{y_0} \rangle = \langle z_i, \theta_{x_0} \rangle.$$

D'où on a montré :

$$\langle z_1 \wedge z_2, (d\theta)_{x_0} \rangle = - [\theta_{x_0}(z_1), \theta_{x_0}(z_2)]$$

C.Q.F.D.

### 3.4 THÉORÈME D'EXISTENCE FONDAMENTAL. CONSTRUCTION D'UNE APPLICATION AYANT UNE DIFFÉRENTIELLE DE DARBOUX DONNÉE

Nous allons montrer dans ce paragraphe qu'à une forme différentielle satisfaisant l'équation de structure, on peut associer une application dont elle est la différentielle de Darboux.

#### *Théorème fondamental d'existence*

Soit  $V$  une variété de classe  $C^3$ ,  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie. Donnons-nous  $x_0 \in V$ ,  $g_0 \in G$  et une forme de classe  $C^1$ .

$$\pi \in \Lambda^1(V; \mathcal{G})$$

satisfaisant l'équation de structure :

$$3.4.1 \quad d\pi + [\pi, \pi] = 0$$

*Existence.* On peut trouver un voisinage ouvert  $\hat{V}$  de  $x_0$  dans  $V$  et une application  $f \in C^1(\hat{V}; G)$  telle que :

$$3.4.2 \quad f(x_0) = g_0$$

et telle que :

3.4.3 La différentielle de Darboux de  $f$  soit la restriction de  $\pi$  à  $\hat{V}$ .

*Unicité.* Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux applications satisfaisant 3.4.2 et 3.4.3 et définies sur les deux voisinages ouverts  $\hat{V}_1$  et  $\hat{V}_2$  de  $x_0$ . Notons par  $\Omega$  la composante connexe de  $\hat{V}_1 \cap \hat{V}_2$  contenant  $x_0$ . Alors on a :

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

**PREUVE.** — L'idée de la démonstration consistera à géométriser le problème en remplaçant la détermination d'une application par celle de son graphe.

Le problème géométrique se trouvera être un problème de Frobenius qui sera traité par les méthodes de II-5.

### 3.5 DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION PAR SON GRAPHE

Nous noterons, dans ce paragraphe, par  $V$  et  $G$  deux variétés de classe  $C^1$ . Soit

$$K = V \times G$$

la variété produit de  $V$  par  $G$ . Nous noterons par  $p_1, p_2$  les deux projections naturelles :

$$\begin{aligned} p_1 : K &\rightarrow V \\ p_2 : K &\rightarrow G \end{aligned}$$

3.5.1 *Définition du graphe.* A tout  $f \in C^1(V; G)$  nous associons l'application :

$$\Phi \in C^1(V; K)$$

définie par :

$$\Phi(x) = (x, f(x))$$

Comme  $p_1 \circ \Phi = \text{identité sur } V$ , on en déduit que  $\Phi$  est un homéomorphisme de  $V$  sur  $\Phi(V)$ . D'autre part, en dérivant, on obtient :

$$3.5.2 \quad p_1'(z_0) \circ \Phi'(x_0) = \text{identité sur } T_{x_0}(V).$$

D'où  $\Phi$  est de rang maximum. Ainsi  $\Phi$  est un plongement de  $V$  dans  $K$ . Par suite de I-6.2.2

$$H = \Phi(V)$$

est une sous-variété de  $K$ . On appellera  $H$  le graphe de l'application  $f$ .

*Caractérisation des graphes*

Nous nous posons le problème : quelles sont les sous-variétés de  $K$  qui peuvent être obtenues comme graphes d'une application.

Nous dirons qu'un sous espace  $E$  de  $T_{z_0}(K)$  est *complètement transverse* si  $p'_1(z_0)$  restreint à  $E$  définit un isomorphisme de  $E$  sur  $T_{x_0}(V)$ .

Un sous-variété  $L$  de  $K$  est dite *complètement transverse*, si pour tout  $z_0 \in L$  alors  $T_{z_0}(L)$  est complètement transverse. On a alors :

## PROPOSITION

3.5.3 *Le graphe d'une application est une sous-variété de  $K$  complètement transverse.*

3.5.4 *Inversement, soit  $L$  une sous-variété de  $K$  complètement transverse. Soit  $z_0 \in L$ ,  $x_0 \in p_1(z_0)$ . Alors on peut trouver un voisinage ouvert  $\hat{V}$  de  $x_0$  et une application  $\hat{f}$  de  $\hat{V}$  dans  $G$  telle que le graphe  $\hat{H}$  de  $\hat{f}$  vérifie*

$$\hat{H} \subset L$$

$\hat{H}$  étant un voisinage ouvert de  $z_0$  dans  $L$ .

PREUVE DE 3.5.3. — On a puisque  $\Phi$  est un plongement, le fait que  $\Phi'(x_0)$  est un isomorphisme de  $T_{x_0}(V)$  sur  $T_{z_0}(H)$ . D'après 3.5.2, on obtient que la restriction  $q$  de  $p'_1(z_0)$  à  $T_{z_0}(H)$  est l'isomorphisme inverse de  $\Phi'(x_0)$ . C.Q.F.D.

PREUVE DE 3.5.4. — Notons par  $\hat{p}_1$  la restriction de  $p_1$  à  $L$ . Alors  $\hat{p}_1$  est un difféomorphisme local en vertu de l'hypothèse de complète transversalité et I.6.

Il existe donc un voisinage ouvert  $\hat{H}$  de  $z_0$  dans  $L$  et un voisinage ouvert  $\hat{V}$  de  $x_0$  dans  $V$  tel que  $\hat{p}_1$  définisse un difféomorphisme de  $\hat{H}$  sur  $\hat{V}$ . Notons par  $k$  le difféomorphisme réciproque. Posons

$$\hat{f} = p_2 \circ i \circ k$$

où  $i$  est l'injection canonique de  $L$  dans  $K$ . Alors  $\hat{f}$  satisfera les conclusions de 3.5.4.

## 3.6 TRADUCTION GÉOMÉTRIQUE ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL

PROPOSITION. — *Traduction sur les graphes de la donnée de la différentielle de Darboux. Donnons-nous*

$$\pi \in \Lambda^1(V; \mathcal{G})$$

Posons  $\lambda = p_1^* \pi - p_2^* \omega$ , où  $\omega$  note la forme de Maurer-Cartan de  $G$ . Alors :

$$\lambda \in \Lambda^1(K; \mathcal{G})$$

Soit  $f \in C^1(V; G)$  et  $H$  le graphe de  $f$ ; alors on a :

$$3.6.1 \quad \pi = f^* \omega$$

si et seulement si

3.6.2  $H$  est variété intégrale du  $p$ -champ  $\ker \lambda$ .

PREUVE. — On a vu en 3.5 que l'image de  $\Phi'(x_0)$  est  $T_{z_0}(H)$ ; par suite, 3.6.2 est équivalent à  $\Phi^* \lambda = 0$ .

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \Phi^* \lambda &= (\Phi^* \circ p_1^*) \pi - (\Phi^* \circ p_2^*) \omega \\ \text{Or } p_1 \circ \Phi &= \text{identité sur } V \\ p_2 \circ \Phi &= f \\ \text{d'où } \Phi^* \lambda &= \pi - f^* \omega, \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'équivalence de 3.6.1 et 3.6.2.

3.6.3 PROPOSITION. — Une variété intégrale  $R$  du  $p$ -champ  $\ker \lambda$  est complètement transverse si et seulement si  $R$  est une variété intégrale de dimension maximum.

PREUVE. — Montrons d'abord le lemme :

3.6.4 LEMME. —  $M_{z_0} = \ker \lambda_{z_0}$  est complètement transverse.

PREUVE. — Soit  $u \in T_{z_0}(K)$   $u_i = p'_i(z_0) \cdot u$  ( $i = 1, 2$ ). Alors :

$$\langle u, \lambda_{z_0} \rangle = \langle u_1, \pi_{x_0} \rangle - \langle u_2, \omega_{g_0} \rangle$$

D'où

$$\langle u, \lambda_{z_0} \rangle = 0$$

est équivalent à :

$$\pi_{x_0}(u_1) = \omega_{g_0}(u_2)$$

ou encore,  $\omega_{g_0}$  étant un isomorphisme, à

$$u_2 = \omega_{g_0}^{-1}(\pi_{x_0}(u_1))$$

Nous avons ainsi montré que  $p'_1(z_0)$  restreint à  $M_{z_0}$  est l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme :

$$u_1 \longmapsto (u_1, (\omega_{g_0}^{-1} \circ \pi_{x_0})(u_1))$$

et le lemme est établi.

Soit maintenant  $T_{z_0}(R)$  complètement transverse, alors on a :

$$\text{dimension de } V = \dim(T_{z_0}(R))$$

De même d'après le lemme :

$$\text{dimension de } M_{z_0} = \text{dimension de } V = \text{dimension de } R.$$

D'où  $R$  est variété intégrale de dimension maximum.

Inversement, si  $R$  est une variété intégrale de dimension maximum de  $M$ , alors pour tout  $z_0 \in R$ , on a :

$$T_{z_0}(R) = M_{z_0}$$

d'où, d'après le lemme,  $R$  est transverse.

C.Q.F.D.

### 3.6.5 Démonstration du théorème fondamental d'existence

L'existence d'une application  $f$  satisfaisant 3.4.1 et 3.4.2 est équivalente d'après les paragraphes 3.5 et 3.6 à l'existence d'une variété intégrale de dimension maximum du  $p$ -champ  $\ker \lambda$  passant par le point  $(x_0, g_0)$ .

Par suite, l'existence et l'unicité de  $f$  sera une conséquence de II-5.3.1 si nous montrons que le  $p$ -champ  $\ker \lambda$  satisfait la condition de Frobenius.

Nous utiliserons la condition II-5.4.4 et nous montrerons que :

$$3.6.6 \quad \langle u \wedge v, (d\lambda)_{z_0} \rangle = 0$$

quels que soient  $u, v \in T_{z_0}(K)$  vérifiant :

$$\lambda_{z_0}(u) = \lambda_{z_0}(v) = 0.$$

Posons  $p'_i(z_0)u = u_i$ ,  $p'_i(z_0)v = v_i$ ,  $i = 1, 2$ ; cette dernière égalité s'écrit :

$$3.6.7 \quad \begin{cases} \omega_{g_0}(u_2) = \pi_{x_0}(u_1) \\ \omega_{g_0}(v_2) = \pi_{x_0}(v_1) \end{cases}$$

D'autre part, on a :

$$d\lambda = p_1^* d\pi - p_2^* d\omega$$

Utilisant les équations de structures de  $\omega$  et de  $\pi$  et utilisant 3.3.2, on obtient que :

$$\begin{aligned} \langle u \wedge v, (p_1^* d\pi)_{z_0} \rangle &= [\pi_{x_0}(u_1), \pi_{x_0}(v_1)] \\ \langle u \wedge v, (p_2^* d\omega)_{z_0} \rangle &= [\omega_{g_0}(u_2), \omega_{g_0}(v_2)] \end{aligned}$$

D'où 3.6.6 s'écrit

$$[\pi_{x_0}(u_1), \pi_{x_0}(v_1)] - [\omega_{g_0}(u_2), \omega_{g_0}(v_2)] = 0$$

ce qui est une conséquence triviale de 3.6.7 et le théorème est démontré.

## 3.7 RÉOLUTION DU PROBLÈME DE L'ÉQUIVALENCE

On déduit aisément des résultats de ce paragraphe.

3.7.1 Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$  connexe. Soit  $G$  un groupe de Lie. Soit  $f$  et  $\hat{f} \in C^2(V; G)$ . Alors  $f$  et  $\hat{f}$  sont équivalents si et seulement si  $f$  et  $\hat{f}$  ont même différentielle de Darboux.

3.7.2 Exemple. Prenons pour groupe  $G$ , un espace vectoriel  $E$  muni de sa structure additive. Alors les différentielles de Darboux sont les différentielles usuelles. Le résultat 3.7.1 se lit : sur une variété connexe deux fonctions diffèrent d'une constante si et seulement si elles ont même différentielle.

Inversement donnons-nous un  $\pi \in \Lambda^1(V; E)$  une condition nécessaire pour que  $\pi$  soit une différentielle d'une fonction  $f$  est, de façon élémentaire, que toutes les conditions de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

soient satisfaites ce qui s'écrit, en terme de  $\pi$ , sous la forme

$$d\pi = 0 \quad (\text{cf. II-4.6.1})$$

On retrouve l'équation de structure de Cartan-Darboux :

$$d\pi + [\pi, \pi] = 0$$

puisque le crochet sur l'algèbre du Lie  $\mathcal{G}$  de  $E$  est identiquement nul. Un résultat élémentaire est alors que la condition d'intégrabilité  $d\pi = 0$  est suffisante pour l'existence d'une fonction  $f$  définie dans un voisinage homéomorphe à un cube de  $x_0$  et vérifiant  $df = \pi$ . Ce résultat reste valable dans un ouvert simplement connexe. On connaît en effet le résultat élémentaire suivant :

**3.7.3** Soit  $V$  simplement connexe et soit  $\pi \in \Lambda^1(V; E)$  vérifiant  $d\pi = 0$ , alors il existe  $f \in C^2(V; E)$  telle que  $df = \pi$ . (cf. Exercice 13<sup>o</sup> p. 146).

**3.7.4** Condition globale d'existence du théorème de Darboux.

On a l'énoncé parallèle à celui de 3.7.3 :

Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ , simplement connexe,  $G$  un groupe de Lie,  $\pi \in \Lambda^1(V, \mathcal{G})$  de classe  $C^1$ , où  $\mathcal{G}$  est l'algèbre de Lie de  $G$ . Supposons que  $d\pi + [\pi, \pi] = 0$ , alors il existe  $f \in C^2(V; G)$  telle que la différentielle de Darboux de  $f$  soit  $\pi$ .

**PREUVE.** — Cette preuve s'obtient en combinant le résultat local d'existence et d'unicité obtenu dans le théorème fondamental d'existence de Darboux avec la théorie des revêtements d'un espace topologique. Cette théorie constitue une branche de topologie générale sortant un peu du but de notre exposé pour être développée ici. Le lecteur pourra se reporter à Exercices III<sup>e</sup> partie, 7<sup>o</sup> et 8<sup>o</sup>.

## 4 Homomorphisme de groupes de Lie

**4.1 DÉFINITION.** — Nous noterons par  $G_1, G_2$  deux groupes de Lie, par  $e_1, e_2$  leurs éléments unité, par  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  leurs algèbres de Lie, par  $\omega^1$  et  $\omega^2$  leurs formes de Maurer-Cartan.

Nous appellerons homomorphisme de  $G_1$  dans  $G_2$  une application  $f$  vérifiant :

$$4.1.1 \quad f \in C^2(G_1; G_2)$$

$$4.1.2 \quad f(g_1 g'_1) = f(g_1) f(g'_1)$$

quels que soient  $g_1, g'_1 \in G_1$ .

Cette dernière relation entraîne :

$$4.1.3 \quad f(e_1) = e_2$$

Nous noterons  $\text{Hom}(G_1; G_2)$  l'ensemble de tous les homomorphismes de  $G_1$  dans  $G_2$ .

## 4.2 DIFFÉRENTIELLE DE DARBOUX D'UN HOMOMORPHISME

Un homomorphisme étant une application de la variété  $G_1$  dans le groupe  $G_2$ , nous lui appliquerons la théorie du paragraphe 3 et introduirons sa différentielle de Darboux.

4.2.1 PROPOSITION. — Soit  $f \in C^2(G_1; G_2)$ ,  $f$  satisfaisant 4.1.3; notons par  $\pi = f^* \omega_2$  la différentielle de Darboux de  $f$ ,

$$\pi \in \Lambda^1(G_1, \mathfrak{G}_2)$$

Alors si  $f \in \text{Hom}(G_1, G_2)$ , la différentielle de Darboux  $\pi$  est invariante à gauche sur  $G_1$ . Inversement, sous l'hypothèse supplémentaire que  $G_1$  soit connexe, si  $\pi$  est invariante à gauche sur  $G_1$ , alors  $f$  est un homomorphisme de  $G_1$  dans  $G_2$ .

PREUVE. — Démontrons d'abord le lemme :

LEMME. — La condition 4.1.2 est équivalente à la condition :

Étant donné  $g_1 \in G_1$ , il existe  $g_2 \in G_2$  tel que

$$4.2.2 \quad f \circ \tau_{g_1} = \tau_{g_2} \circ f.$$

PREUVE. — Évidemment 4.1.2 entraîne 4.2.2 avec  $g_2 = f(g_1)$ . Inversement écrivons 4.2.2 au point  $e_1$ , on obtient :

$$f(g_1 e_1) = g_2 f(e_1) = g_2 e_2;$$

d'où

$$f(g_1) = g_2,$$

et ainsi 4.2.2 s'écrit au point  $g'_1$

$$f(g_1 g'_1) = f(g_1) f(g'_1),$$

ce qui n'est autre que 4.1.2 et démontre le lemme.

Démonstration de l'énoncé direct de 4.2.1

On a :

$$\tau_{g'_1}^* \pi = \tau_{g'_1}^* f^* \omega_2 = (f \circ \tau_{g'_1})^* \omega_2$$

Utilisons 4.2.2, alors :

$$\tau_{g'_1}^* \pi = (\tau_{g'_1} \circ f)^* \omega_2 = f^* (\tau_{g'_1}^* \omega_2) = f^* \omega_2 = \pi,$$

donc  $\pi$  est invariante à gauche.

Inversement, considérons l'application suivante de  $G_1$  dans  $G_2$  :

$$k = f \circ \tau_{g_1}$$

L'hypothèse d'invariance de  $\pi$  signifie que  $f$  et  $k$  ont même différentielle de Darboux. Puisque  $G_1$  est connexe,  $f$  et  $k$  sont dans la même classe d'équivalence de Darboux; c'est-à-dire qu'il existe  $g_2$  tel que :

$$k = \tau_{g_2} \circ f$$

donc 4.2.2, et par suite, 4.1.2, est satisfaite.

*Remarque.* Si  $G_1$  n'est pas connexe, on peut considérer la composante connexe  $\hat{G}_1$  de  $e_1$ . On voit facilement que  $\hat{G}_1$  est une partie ouverte de  $G_1$  et est un sous-groupe de  $G_1$ . Alors  $\hat{G}_1$  est un groupe de Lie auquel on peut appliquer les résultats précédents.

### 4.3 HOMOMORPHISMES D'ALGÈBRES DE LIE ET DIFFÉRENTIELLES DE DARBOUX

Soient  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  deux algèbres de Lie abstraites, nous appellerons *homomorphisme* de  $\mathcal{G}_1$  dans  $\mathcal{G}_2$  une application

$$u \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$$

telle que :

$$u([z_1, z_2]) = [u(z_1), u(z_2)]$$

Nous noterons par  $\text{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$  l'ensemble de tous les homomorphismes de  $\mathcal{G}_1$  dans  $\mathcal{G}_2$ . Si  $G_1$  et  $G_2$  dénotent deux groupes de Lie,  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  leurs algèbres de Lie, considérons :

$$\mathcal{D}(G_1; \mathcal{G}_2) = \{\pi \in \Lambda^1(G_1; \mathcal{G}_2); d\pi + [\pi, \pi] = 0 \text{ et } \pi \text{ est invariante à gauche}\}$$

On a alors :

PROPOSITION. — Associons à  $\pi \in \mathcal{D}(G_1; \mathcal{G}_2)$  l'élément  $\pi_{e_1}$ . Alors

$$4.3.1 \quad \pi_{e_1} \in \text{Hom}(\mathcal{G}_1; \mathcal{G}_2).$$

De plus :

4.3.2 L'application :

$$\pi \longmapsto \pi_{e_1}$$

définit une bijection de  $\mathcal{D}(G_1; \mathcal{G}_2)$  sur  $\text{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ .

DÉMONSTRATION DE 4.3.1

Soient  $z_1, z_2 \in \mathcal{G}_1$  et écrivons l'équation de structure de la différentielle de Darboux de  $\pi$  au point  $e_1$ . On obtient :

$$4.3.3 \quad \langle z_1 \wedge z_2, (d\pi)_{e_1} \rangle + [\pi_{e_1}(z_1), \pi_{e_1}(z_2)] = 0$$

D'autre part on a d'après 1.4.3

$$4.3.4 \quad \pi = a \circ \omega_1 \quad \text{où} \quad a = \pi_{e_1},$$

ce qui entraîne

$$d\pi = a \circ (d\omega_1)$$

et le premier terme de 4.3.3 s'écrit :

$$\langle z_1 \wedge z_2, (d\pi)_{e_1} \rangle = a(\langle z_1 \wedge z_2, (d\omega_1)_{e_1} \rangle)$$

et d'après l'équation de structure de Maurer-Cartan sur  $G_1$

$$= -a([\omega_{1e_1}(z_1), \omega_{1e_1}(z_2)])$$

Comme  $\omega_{1e_1} = \text{identité}$ , on obtient

$$= -a([z_1, z_2])$$

Le second terme de 4.3.3 s'écrit, d'après 4.3.4

$$[a(z_1), a(z_2)]$$

D'où 4.3.3 s'écrit :

$$-a([z_1, z_2]) + [a(z_1), a(z_2)] = 0$$

c'est-à-dire précisément que :

$$a = \pi_{e_1} \in \text{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$$

DÉMONSTRATION DE 4.3.2

La correspondance  $\pi \longmapsto \pi_{e_1}$  est injective d'après 4.3.4. Montrons qu'elle est *surjective*. Donnons-nous  $b \in \text{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ . Posons  $\rho = b \circ \omega_1$ ; alors  $\rho$  est invariante à gauche sur  $G_1$ . Reste à vérifier que :

$$d\rho + [\rho, \rho] = 0$$

Soit  $z_1, z_2 \in T_{g_1}(G_1)$ ; alors on a :

$$\langle z_1 \wedge z_2, (d\rho)_{g_1} \rangle = b(\langle z_1 \wedge z_2, (d\omega_1)_{g_1} \rangle)$$

Appliquons l'équation de structure de Maurer-Cartan.

$$= -b([\omega_{1g_1}(z_1), \omega_{1g_1}(z_2)])$$

Comme  $b$  est un homomorphisme d'algèbres.

$$\begin{aligned} &= -[b \circ \omega_{1g_1} \cdot z_1, b \circ \omega_{1g_1} \cdot z_2] \\ &= -[\rho_{g_1}(z_1), \rho_{g_1}(z_2)] \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

## 4.4 HOMOMORPHISME DE GROUPES ET HOMOMORPHISMES D'ALGÈBRES

4.4.1 THÉORÈME. — Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes de Lie,  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  leurs algèbres de Lie; soit :

$$f \in \text{Hom}(G_1, G_2); \quad \text{alors} \quad f'(e_1) \in \text{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2).$$

PREUVE. — Introduisons la différentielle de Darboux de  $f$  soit :

$$\pi = f^* \omega_2.$$

Alors par un calcul immédiat on a :

4.4.2

$$f'(e_1) = \pi_{e_1}$$

Le théorème résulte alors de 4.3.1 et 4.2.1

4.4.3 THÉORÈME. — Considérons l'application

$$l : \text{Hom}(G_1, G_2) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$$

définie par le théorème 4.4.1. Alors :

Si  $G_1$  est connexe,  $l$  est injective;

Si  $G_1$  est connexe et simplement connexe,  $l$  est bijective.

PREUVE. — Si  $G_1$  est connexe, on utilise 3.4; on obtient que la correspondance qui à  $f \in \text{Hom}(G_1, G_2)$  associe sa forme de Darboux est injective et on applique 4.3.2.

Pour montrer la surjectivité, il faut passer d'une forme de Darboux

$$\pi \in \mathcal{D}(G_1; \mathcal{G}_2)$$

à une application définie sur  $G_1$  tout entier. Ce passage est possible moyennant 3.7.4 si  $G_1$  est simplement connexe et le théorème est démontré.

*Remarque.* Les hypothèses de nature topologique sur  $G_1$  ont pour but d'assurer l'unicité et l'existence globale de la solution d'un problème de Frobenius. On peut s'en passer en se contentant de conclusions locales.

4.4.4 *Énoncés locaux :*

Nous appellerons *homomorphisme local* de  $G_1$  dans  $G_2$  une application  $f$  d'un voisinage ouvert connexe  $U$  de  $e_1$ ,

$$f \in C^2(U, G_2)$$

telle qu'il existe un voisinage  $\tilde{U}$  de  $e_1$  vérifiant  $\tilde{U} \cdot \tilde{U} \subset U$  et tel que l'on ait :

$$f(g_1 g'_1) = f(g_1) f(g'_1) \quad \text{si} \quad g_1, g'_1 \in \tilde{U}.$$

Nous noterons par :

$$\text{Hom}_{\text{loc}}(G_1, G_2)$$

l'ensemble des homomorphismes locaux de  $G_1$  dans  $G_2$ . Nous dirons que

$$f, k \in \text{Hom}_{\text{loc}}(G_1, G_2)$$

sont *équivalents*, si  $f$  et  $k$  coïncident sur la composante connexe de  $e_1$  dans l'intersection de leurs domaines de définition.

On notera  $\overline{\text{Hom}}_{\text{loc}}(G_1, G_2)$  l'ensemble des classes, suivant cette équivalence, de  $\text{Hom}_{\text{loc}}(G_1, G_2)$ .

On obtient alors, en localisant les raisonnements précédents :

**THÉORÈME.** — Soit  $G_1, G_2$  deux groupes de Lie,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  leurs algèbres de Lie. Alors la correspondance qui à tout  $f \in \text{Hom}_{\text{loc}}(G_1, G_2)$  associe  $f'(e_1)$  définit une bijection de :

$$\overline{\text{Hom}}_{\text{loc}}(G_1, G_2) \text{ sur } \text{Hom}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

**4.4.5 Exemple.** Considérons un groupe de Lie de dimension 1. Soit  $\{e\}$  une base de son algèbre de Lie. On a  $[e, e] = 0$ . C'est-à-dire que le crochet est identiquement nul. Par suite deux algèbres de Lie de dimension 1 sont isomorphes; c'est-à-dire deux groupes de Lie de dimension 1 sont localement isomorphes. Comme  $\mathbf{R}$ , muni de sa structure additive, est un groupe de Lie de dimension 1 connexe et simplement connexe, on a : *tout groupe de Lie connexe de dimension 1 est isomorphe à  $\mathbf{R}$ , ou à  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ .*

## 5 Sous-groupes et sous-algèbres

**5.1 DÉFINITION.** — Soit  $G$  un groupe de Lie; nous appellerons *sous-groupe de Lie* de  $G$ , une partie  $H$  de  $G$  telle que :

$$\begin{aligned} H &\text{ soit une sous-variété de } G \\ H &\text{ soit un sous-groupe de } G. \end{aligned}$$

Alors  $H$  est muni d'une *structure de variété induite* par celle de  $G$ . D'autre part la restriction à  $H$  de la loi de groupe sur  $G$  définie sur  $H$  une *structure de groupe*.

Remarquons alors que :

**5.1.1** *Un sous-groupe de Lie  $H$  d'un groupe  $G$  est un groupe de Lie pour les structures induites par  $G$ . L'injection canonique de  $H$  dans  $G$  est un homomorphisme.*

**PREUVE.** — Soit :

$$\begin{aligned} p : G \times G &\rightarrow G \text{ défini par :} \\ p(g, g') &= gg'; \end{aligned}$$

On a  $p \in C^3(G \times G, G)$ . Par suite la restriction de  $p$  à  $H \times H$  sera de classe  $C^3$ .

De même l'application  $g \rightarrow g^{-1}$ , qui est de classe  $C^3$  sur  $G$ , aura une restriction de classe  $C^3$  à  $H$ . Par suite  $H$  est un groupe de Lie.

L'injection  $i$  étant de classe  $C^3$ , on a :

$$i \in \text{Hom}(H; G)$$

C.Q.F.D.

## 5.2. SOUS-ALGÈBRE DE LIE ASSOCIÉE A UN SOUS-GROUPE DE LIE

Nous allons associer à un sous-groupe de Lie une sous-algèbre de Lie par le théorème :

**THÉORÈME.** — Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie,  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Alors  $T_e(H)$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$ .

**PREUVE.** — La preuve est assez évidente, en raison des résultats du paragraphe 4. Néanmoins, nous la présenterons en détail. Notons par  $\mathcal{H}$  l'algèbre de Lie du groupe  $H$ . On a :

$$i'(e)(\mathcal{H}) = T_e(H).$$

Donnons-nous

$$z_1, z_2 \in T_e(H).$$

Alors il existe  $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$  tels que :

$$i'(e) \cdot y_1 = z_1, \quad i'(e) \cdot y_2 = z_2.$$

Posons  $y_3 = [y_1, y_2]_{\mathcal{H}}$ ,  $\mathcal{H}$  étant en indice pour bien marquer que le produit est pris dans l'algèbre  $\mathcal{H}$ . Posons :

$$z_3 = i'(e) \cdot y_3$$

On sait d'après 4.4.2 que :

$$i'(e) \in \text{Hom}(\mathcal{H}; \mathcal{G})$$

Par suite :

$$z_3 = i'(e) \cdot ([y_1, y_2]_{\mathcal{H}}) = [i'(e) \cdot y_1, i'(e) \cdot y_2] = [z_1, z_2]$$

Comme  $z_3 \in i'(e)(\mathcal{H}) = T_e(H)$ , on en déduit que  $z_1, z_2 \in T_e(H)$  entraîne

$$[z_1, z_2] \in T_e(H)$$

C.Q.F.D.

## 5.3 PROBLÈME DE FROBENIUS ATTACHÉ A UNE SOUS-ALGÈBRE DE LIE

Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\omega$  sa forme de Maurer-Cartan,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie,  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$ . Considérons le  $p$ -champ  $M$  défini par :

$$M_g = \omega_g^{-1}(\mathcal{A}) = \tau'_g(e)(\mathcal{A})$$

On peut dire que  $M$  est obtenu en « translatant » à gauche  $\mathcal{A}$ .

Alors, on a :

5.3.1 PROPOSITION. — *Le  $p$ -champ  $M$  satisfait la condition de Frobenius.*

PREUVE. — Nous écrivons  $M = \ker \rho$  où  $\rho = q \circ \omega$ ,  $q$  notant l'homomorphisme canonique :

$$q : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{A} = E.$$

La condition de Frobenius sera encore prise sous la forme II-5.4.4. Donnons-nous  $g_0 \in G$ ,  $z_1, z_2 \in T_{g_0}(G)$ ; calculons :

$$\langle z_1 \wedge z_2, (d\rho)_{g_0} \rangle = q(\langle z_1 \wedge z_2, (d\omega)_{g_0} \rangle) = -q([\omega_{g_0}(z_1), \omega_{g_0}(z_2)])$$

Supposons

$$\rho_{g_0}(z_i) = 0 \quad i = 1, 2$$

ce qui s'écrit :

$$\omega_{g_0}(z_i) \in \mathcal{A} \quad i = 1, 2$$

Comme  $G$  est une *sous-algèbre*, ceci entraîne

$$[\omega_{g_0}(z_1), \omega_{g_0}(z_2)] \in \mathcal{A},$$

c'est-à-dire qu'en appliquant  $q$  à cet élément de  $\mathcal{A}$ , on trouve zéro. Ainsi :

$$\ker d\rho \supset \ker \rho \wedge \ker \varphi$$

et la condition de Frobenius est satisfaite.

*Sous-groupe et Problème de Frobenius.*

On a l'énoncé suivant :

5.3.2 PROPOSITION. — *Soit  $G$  un groupe de Lie, d'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ ,  $H$  un sous-groupe de Lie,  $\mathcal{A} = T_e(H)$  la sous-algèbre associée à  $H$ ; alors  $H$  est une variété intégrale de dimension maximum du  $p$ -champ associé à  $G$ .*

PREUVE. — Si  $H$  est un sous-groupe, alors :

$$\tau_{g_0}(H) = H \quad \text{pour tout } g_0 \in H$$

On a d'après I-4.2.3 :

$$\tau'_{g_0}(e)(T_e(H)) = T_{g_0}(H)$$

c'est-à-dire :

$$T_{g_0}(H) = M_{g_0} \quad \text{pour tout } g_0 \in H.$$

C.Q.F.D.

#### 5.4 CORRESPONDANCE ENTRE SOUS-GROUPES ET SOUS-ALGÈBRES

Cette correspondance sera obtenue via le théorème de Frobenius; elle devra donc, de ce fait, être développée dans un cadre local.

Nous appellerons *noyau de sous-groupe* de  $G$  une sous-variété  $K$  de  $G$ , passant par l'élément neutre  $e$  tel qu'il existe en voisinage  $U$  de  $e$  dans  $K$  vérifiant :

$$5.4.1 \quad \begin{cases} g_1, g_2 \in U & \text{entraîne} & g_1 g_2 \in K \\ g_1 \in U & \text{entraîne} & g_1^{-1} \in K. \end{cases}$$

On a alors :

THÉORÈME. — Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie; alors :

5.4.2 Si  $K$  est un noyau de sous-groupe, alors  $T_e(K)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{G}$ .

5.4.3 Si  $K$  et  $\hat{K}$  sont deux noyaux de sous-groupe tels que  $T_e(K) = T_e(\hat{K})$  alors  $K \cap \hat{K}$  est un voisinage de  $e$  dans  $K$ .

5.4.4 Soit  $\alpha$  une sous-algèbre de  $\mathcal{G}$ , alors il existe un noyau de sous-groupe  $K_0$  tel que

$$T_e(K_0) = \alpha$$

PREUVE. — 5.4.2 et 5.4.3 s'obtiennent en localisant les raisonnements antérieurs.

Démontrons 5.4.4 soit  $M$  le  $p$ -champ associé en 5.3 à  $G$ . Notons par  $K_0$  une variété intégrale de  $M$ , de dimension maximum, connexe, passant par  $e$ . Remarquons que :

5.4.5  $M$  est invariant à gauche

En effet  $M = \ker \rho$  où  $\rho$  est défini en 5.3.1 et l'on a :

$$\tau_{g_0}^* \rho = q \circ \tau_{g_0}^* \omega = q \circ \omega = \rho$$

Remarquons ensuite que 5.4.5 entraîne que :

Si  $R$  est une variété intégrale de  $M$  alors,  $\tau_{g_0}(R)$  est une variété intégrale de  $M$ . En particulier,  $\tau_g(K_0)$  est une variété intégrale de  $M$ . Si, de plus,  $g^{-1} \in K_0$ , on a :

$$e \in \tau_g(K_0) \cap K_0$$

c'est-à-dire en utilisant le résultat d'unicité des variétés intégrales de dimension maximum II-5.3.1, on obtient : pour tout  $g \in K_0^{-1}$ ,

$$\Omega(g) = K_0 \cap \tau_g(K_0)$$

est un voisinage de  $e$  dans  $K_0$ .

Soit  $\Delta$  un voisinage compact de  $e$  dans  $K_0^{-1}$ . Posons :

$$U_1 = \bigcap_{g \in \Delta} \Omega(g)$$

Alors  $U_1$  est un voisinage de  $e$  dans  $K_0$ .

En effet, soit  $\varphi$  une carte numérique de  $G$  définie sur un voisinage  $N$  de  $e$  telle que  $\varphi(e) = 0$ . Posons

$$\tilde{\Omega}(g) = \varphi(N \cap \Omega(g))$$

$f(g) =$  distance de  $0$  à la frontière de  $\tilde{\Omega}(g)$  (où  $\mathbf{R}^n$  est muni de la distance usuelle).

Alors  $f(g)$  est une fonction *semi-continue inférieurement*, strictement positive, donc qui possède sur le compact  $\Delta$  un minimum strictement positif soit  $\varepsilon$ ; d'où

$$U_1 \supset \varphi^{-1}(\{\xi \mid |\xi| < \varepsilon\})$$

Nous pouvons écrire la définition de  $U_1$  sous la forme :

*Quels que soient  $g_1 \in U_1$ ,  $g_2 \in \Delta$ , il existe  $g \in K_0$  tel que :*

$$g_2 g = g_1$$

Multipliant les deux membres par  $g_2^{-1}$ , ceci s'écrit

$$g_2^{-1} g_1 \in K_0.$$

Prenant  $U = U_1 \cap \Delta^{-1}$ , on obtient alors la première formule de 5.4.1; la seconde s'obtient de façon analogue.

## 6 Application exponentielle

### 6.1 GROUPE DE TRANSFORMATIONS ATTACHÉ A UN CHAMP INVARIANT A GAUCHE

Soit  $A$  un champ de vecteurs invariant à gauche sur  $G$ . Alors  $A$  définit un pseudo-groupe  $U_t$  de transformations de  $G$ .

6.1.1 PROPOSITION. — *On a*

$$\tau_{g_1} \circ U_t = U_t \circ \tau_{g_1} \quad \text{quel que soit } g_1 \in G.$$

PREUVE. — Soit  $k(t)$  la ligne de courant de  $A \in \mathcal{C}$  telle que  $k(0) = g_0$ ; alors  $\tau_{g_1} \circ k(t)$  est une ligne de courant  $k_1$  de  $(\tau_{g_0})_* A = A$ . De plus  $k_1(0) = g_1 g_0$ . D'où  $k_1(t) = U_t(g_1 g_0)$  et 6.1.1 est démontré.

On en déduit :

6.1.2 PROPOSITION. — *Quel que soit  $t$  réel, le domaine de définition de  $U_t$  est  $G$  tout entier.*

PREUVE. — Notons par  $\Omega_t$  le domaine de définition de  $U_t$ . Alors il résulte de 6.1.1 que :

$$\tau_{g_0}(\Omega_t) = \Omega_t$$

c'est-à-dire que  $\Omega_t = G$ .

Par suite, si  $U_t$  n'était pas toujours défini, il existerait  $t_0 > 0$  tel que :

$U_t(g)$  serait défini pour tout  $g$  et tout  $t$  tel que  $0 < t < t_0$ .

$U_t(g)$  ne serait défini pour aucune valeur de  $g$  si  $t > t_0$ .

Soit  $t_1, \frac{1}{2}t_0 < t_1 < t_0$ ; alors  $U_{t_1}(U_{t_1}(g))$  est bien défini. Par suite  $U_{2t_1}(g)$  est défini, contrairement à l'hypothèse sur  $t_0$  et la proposition est démontrée.

6.1.3 PROPOSITION. — *On a :*

$$U_t(g) = gU_t(e)$$

PREUVE. — En effet, d'après 6.1.1, on a :

$$U_t \circ \tau_g = \tau_g \circ U_t.$$

Appliquant cette relation à  $e$ , on obtient le résultat.

*Remarque :* On lit le résultat en disant que le groupe à 1 paramètre engendré par un champ de vecteurs *invariant à gauche* s'obtient par une *multiplication à droite*.

## 6.2 APPLICATION EXPONENTIELLE

DÉFINITION. — A tout  $z \in \mathcal{G}$  nous associons :

$$\exp(z) = U_1(e)$$

On définit ainsi une application de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  dans le groupe de Lie  $G$ . La justification de cette notion et de cette terminologie apparaîtra en 7.3.3.

L'application exponentielle permet de calculer le groupe de transformations  $U_t$  considéré en 6.1. En effet :

6.2.1 *On a :*

$$U_{t_0}(e) = \exp(t_0 z)$$

PREUVE. — Posons  $z = t_0 z$ . Soient  $U_t, \tilde{U}_t$  les groupes à 1 paramètre associés. Le groupe  $\tilde{U}$  est défini par la ligne de courant  $\tilde{k}$  :

$$\tilde{k}'(t) \cdot 1 = z \tilde{k}(t) = t_0 z \tilde{k}(t)$$

Posons

$$\tilde{\tilde{k}}(t) = \tilde{k}(tt_0^{-1})$$

Alors  $\tilde{\tilde{k}}(t) = \tilde{k}(tt_0^{-1})$ . D'où :

$$\tilde{\tilde{k}}'(t) \cdot 1 = t_0^{-1} \tilde{k}'(t_0 t) \cdot 1 = z \tilde{\tilde{k}}(t)$$

c'est-à-dire que  $\tilde{\tilde{k}}$  est une ligne de courant du champ de vecteurs  $z$ . On obtient ainsi, remarquant que  $\tilde{\tilde{k}}(0) = \tilde{k}(0)$ , que :

$$\tilde{U}_{t_0^{-1}} = U_t$$

En appliquant à  $e$  et en faisant  $t = t_0$ , on a :

$$\tilde{U}_1(e) = U_{t_0}(e)$$

c'est-à-dire 6.2.1.

6.2.2 PROPOSITION. — On a  $U_t(g) = g \exp(tz)$ .

PREUVE. — Ceci résulte de 6.1.3 et 6.2.1.

6.2.3 PROPOSITION. — On a :

$$\exp(tz) \exp(t'z) = \exp((t + t')z)$$

PREUVE. — On a, si  $U_t$  est le groupe associé à  $z$ ,

$$U_{t'} \circ U_t = U_{t+t'}$$

Appliquons à  $e$ , on obtient :

$$U_{t'}(\exp(tz)) = \exp((t + t')z)$$

Utilisons 6.2.2

$$U_{t'}(\exp(tz)) = \exp(tz) \exp(t'z)$$

et 6.2.3 est démontré.

### 6.3 HOMOMORPHISME DE $\mathbf{R}$ DANS UN GROUPE DE LIE $G$

Munissons  $\mathbf{R}$  de sa structure additive et considérons-le comme un groupe de Lie, alors, pour tout  $z \in \mathcal{G}$  fixé, où  $\mathcal{G}$  désigne l'algèbre de Lie de  $G$ , posons :

$$\varphi_z(t) = \exp(tz)$$

On a alors

$$\varphi_z \in \text{Hom}(\mathbf{R}, G)$$

L'application :

$$z \longmapsto \varphi_z$$

est une bijection de  $\mathcal{G}$  sur  $\text{Hom}(\mathbf{R}; G)$ .

PREUVE. — On a, d'après 6.2.3,

$$\varphi_z(t + t') = \varphi_z(t) \varphi_z(t')$$

$\varphi_z$  est un homomorphisme. On peut se limiter au cas où  $G$  est connexe, puisque, si  $h \in \text{Hom}(\mathbf{R}, G)$ , alors  $h(t)$  appartient à la composante connexe  $\Delta$  de  $e$  et  $\Delta$  est un groupe de Lie ayant même algèbre de Lie de  $G$ ; il suffit dès lors de considérer  $\text{Hom}(\mathbf{R}; \Delta)$ .

Alors, il existe, d'après 4.4, une correspondance bijective entre  $\text{Hom}(\mathbf{R}; G)$  et  $\text{Hom}(\mathcal{G}_1; \mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}_1$  désigne l'algèbre de Lie de  $\mathbf{R}$ , c'est-à-dire (cf. 4.4.5)  $\mathbf{R}$  lui-

même muni du crochet nul. Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_1; \mathcal{G})$ . Alors  $u(t) = tu(1)$

$$[u(t), u(t')] = tt'[u(1), u(1)] = 0$$

en vertu de l'antisymétrie du crochet.

C'est-à-dire que toute application linéaire de  $\mathcal{G}_1$  dans  $\mathcal{G}$  est un homomorphisme d'algèbre. D'où :

$$\text{Hom}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathbf{R}; \mathcal{G}) \simeq \mathcal{G} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

## 7 Groupes de transformation de la géométrie élémentaire

### 7.1 RAPPEL DES DÉFINITIONS ÉLÉMENTAIRES DES GROUPES CLASSIQUES

L'étude des propriétés géométriques est l'étude des propriétés invariantes d'un groupe de transformations : du groupe linéaire et du groupe affine pour la géométrie affine, du groupe orthogonal et du groupe des déplacements pour la géométrie euclidienne, du groupe projectif et du groupe spécial linéaire pour la géométrie projective.

7.1.1 *Groupe affine.* On considère un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sur  $\mathbf{R}$ . On appelle *transformation affine* une application

$$x \longmapsto y = a + Ax$$

où  $a \in E$  et où  $A \in \text{GL}(E)$ , en notant  $\text{GL}(E)$  le groupe des applications linéaires inversibles de  $E$ . Les transformations affines forment un groupe pour la composition des applications.

7.1.2 *Groupe des déplacements. Groupe orthogonal.*

Supposons  $E$  muni d'un produit scalaire euclidien  $(x|y)$  c'est-à-dire tel que  $x \neq 0$  entraîne  $(x|x) > 0$

On appelle *déplacement*, une transformation de la forme :

$$y = a + Bx$$

où  $B$  est une *transformation orthogonale* c'est-à-dire telle que :

$$(Bx|By) = (x|y)$$

ou encore

$$B^*B = \text{identité},$$

en notant  $B^*$  l'opérateur transposé de  $B$ . Toute transformation orthogonale  $B$

est inversible et  $B^{-1} = B^*$ . On note  $O(E)$  le groupe des transformations orthogonales de  $E$ .

### 7.1.3 Groupe projectif.

Notons  $\tilde{E}$  l'ensemble  $E$  privé de  $O$ . Établissons sur  $\tilde{E}$  la relation d'équivalence :

$$x \sim x' \quad \text{s'il existe } t \in \mathbf{R} \quad \text{tel que } x' = tx$$

Notons  $\mathbf{P}(E)$  l'ensemble quotient; alors  $\mathbf{P}(E)$  peut être muni d'une structure de variété  $C^\infty$  et est appelé *l'espace projectif associé à  $E$* . Soit  $A \in \mathcal{L}(E, E)$ ; alors  $A$  est compatible avec la relation d'équivalence précédente; par suite  $A$  définit une application :

$$\dot{A} : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E)$$

On a  $\dot{A} = \dot{A}'$ , où  $A' \in \mathcal{L}(E, E)$ , si et seulement si il existe  $t_0, t_0 \neq 0$ , tel que  $A' = t_0 A$ .

On appelle *transformation projective* de  $\mathbf{P}(E)$  une transformation  $\dot{A}$  où  $A \in GL(E)$ . Les transformations projectives de  $\mathbf{P}(E)$  forment un groupe  $\Gamma(\mathbf{P}(E))$ . Soit :

$$SGL(E) = \{A \in GL(E) \mid \det(A) = 1\}$$

7.1.4.  $SGL(E)$  s'identifie à un sous-groupe distingué de  $\Gamma(\mathbf{P}(E))$ ; si  $n = \dim E$  est pair le groupe quotient est le groupe à 2 éléments, si  $n$  est impair  $K = \Gamma(\mathbf{P}(E))$ .

On doit résoudre l'équation en  $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \det(tA) = 1 & \quad \text{où } A \in GL(E) \\ t^n = (\det(A))^{-1} & \quad \text{d'où 7.1.4.} \end{aligned}$$

### 7.1.5 Expression en coordonnées

On note :

$$\begin{aligned} GL(n) &= GL(\mathbf{R}^n) \\ O(n) &= O(\mathbf{R}^n) \\ SGL(n) &= SGL(\mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

Les applications linéaires de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$  s'interprétant matriciellement,

$GL(n)$  est le groupe des matrices d'ordre  $n$ , inversibles

$O(n)$  est le groupe des matrices orthogonales d'ordre  $n$  (c'est-à-dire telle que  ${}^tX \cdot X = I$  où  ${}^tX$  désigne la transposée de  $X$ ).

$SGL(n)$  est le groupe des matrices d'ordre  $n$  de déterminant 1.

On appelle  $GL(n)$  le groupe linéaire d'ordre  $n$ ,  $O(n)$  le groupe orthogonal d'ordre  $n$ ,  $SGL(n)$  le groupe spécial linéaire d'ordre  $n$ .

## 7.2 GROUPES DE LIE ET GROUPES CLASSIQUES

Nous munirons tous les groupes classiques d'une structure de groupe de Lie.

Si  $E$  est un espace vectoriel euclidien de dimension finie sur  $\mathbf{R}$ , on peut, en choisissant

sant une base de  $E$ , construire un isomorphisme de  $E$  sur  $\mathbf{R}^n$ , isomorphisme transportant  $GL(E)$  sur  $GL(n)$ ,  $O(E)$  sur  $O(n)$ ,  $SGL(E)$  sur  $SGL(n)$ . On notera  $\mathcal{M}_n$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ .

On a :

7.2.1 PROPOSITION. —  $GL(n)$  est un groupe de Lie de dimension  $n^2$ .

PREUVE. —  $GL(n) = \{a \in \mathcal{M}_n \mid \det(a) \neq 0\}$ .

La fonction définie par :

$$\varphi(b) = \det(b) \quad b \in \mathcal{M}_n$$

est une fonction  $C^\infty$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n$  dans  $\mathbf{R}$ . Par suite  $GL(n)$  est une partie ouverte de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n$  donc est muni d'une structure de variété  $C^\infty$  induite, variété de dimension  $n^2$ . D'autre part :

$$\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$$

défini par le produit des matrices est une application bilinéaire donc de classe  $\infty C$ . Il en sera de même de sa restriction à  $GL(n)$ .

Enfin :

$$a \xrightarrow{q} a^{-1}$$

est donné par son terme d'ordre  $(i, j)$  :

$$[q(a)]_i^j = \frac{\det X_j^i}{\det a} = \frac{v_i^j(a)}{\det(a)}$$

où  $X_j^i$  est la matrice d'ordre  $n - 1$  obtenu en biffant de la matrice à la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ième colonne.

Les fonctions  $v_i^j(a) = \det(X_j^i)$  sont de classe  $C^\infty$ , si  $a \in \mathcal{M}_n$ . De plus  $(\det a)^{-1}$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $GL(n)$ . Ainsi  $(q(a))_i^j$  est de classe  $C^\infty$  sur  $GL(n)$  quels que soient  $i, j$ . D'où  $q$  est de classe  $C^\infty$ ; c'est-à-dire que  $GL(n)$  est un groupe de Lie.

*Convention de notation.*

Nous noterons par  $I$  la matrice identité qui est l'élément unité du groupe  $GL(n)$

7.2.2 PROPOSITION. —  $SGL(n)$  est un sous-groupe de Lie de  $GL(n)$  de dimension  $n^2 - 1$ .

PREUVE. —  $SGL(n)$  constitue évidemment un sous-groupe, reste à montrer que  $SGL(n)$  est une sous-variété de  $GL(n)$ . On a, posant

$$\psi(a) = \det a,$$

$$SGL(n) = \psi^{-1}(1).$$

En montrant que  $\psi$  à un rang constant sur  $GL(n)$  on pourra appliquer I-6.3.1 et on obtient le résultat. On a :

$$\psi(a+h) = \psi(a(I+a^{-1}h)) = \psi(a)\psi(I+a^{-1}h),$$

d'où en dérivant :

$$\psi'(a)h = \psi(a)\psi'(I) \cdot a^{-1}h$$

Comme l'application :  $\mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$  définie par :  $h \rightarrow a^{-1}h$  est surjective, et que  $\psi(a) \neq 0$  pour  $a \in GL(n)$ , on en déduit :

$$\text{Image } \psi'(a) = \text{Image de } \psi'(I)$$

c'est-à-dire que :

$$\text{rang } \psi'(a) = \text{rang } \psi'(I) \quad \text{où} \quad a \in GL(n);$$

d'où  $SGL(n)$  est une sous-variété de  $GL(n)$  de dimension  $n^2 - 1$ .

PROPOSITION.

7.2.3  $O(n)$  est un sous-groupe de Lie de  $GL(n)$  de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

De plus :

$$7.2.4 \quad T_I(O(n)) = \mathcal{M}_{n,a}$$

où  $\mathcal{M}_{n,a}$  dénote les matrices carrées d'ordre  $n$  antisymétriques.

PREUVE. — Considérons :

$$f: GL(n) \rightarrow \mathcal{M}_n$$

définie en posant :

$$f(a) = {}^t a a$$

(où  ${}^t a$  représente la transposée de la matrice  $a$ ). Alors  $O(n) = f^{-1}(I)$ . Tout le problème revient à prouver que  $f$  a un rang constant. On a, remarquant que  $f$  est bilinéaire en  ${}^t a$  et  $a$  :

$$f'(a) \cdot h = {}^t a h + {}^t h a$$

d'où

$$\ker(f'(a)) = \{h \mid {}^t a h + {}^t h a = 0\}$$

On en déduit :

$$h \in \ker(f'(a)) \quad \text{si et seulement si} \quad {}^t a h \in \mathcal{M}_{n,a}$$

On a ainsi :

$${}^t a(\ker(f'(a))) = \mathcal{M}_{n,a}$$

L'application linéaire :  $\mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$  définie par :

$$h \longmapsto {}^t a h$$

étant bijective si  $a \in \text{GL}(n)$ , alors elle conserve les dimensions des sous-espaces vectoriels :

$$\text{dimension}(\ker(f'(a))) = \dim \mathfrak{M}_{n,a} = \frac{n(n-1)}{2}$$

c'est-à-dire que  $f'(a)$  a un rang constant.

D'après I-6.3.1, on a :

$$T_I(\text{O}(n)) = \ker f'(I) = \mathfrak{M}_{n,a}$$

### 7.3 ALGÈBRE DE LIE DU GROUPE LINÉAIRE

Nous allons construire, dans ce cas concret, tous les intermédiaires nous ayant conduit à l'introduction des algèbres de Lie dans le cas général, cet exposé pouvant ainsi servir d'exemple de construction de l'algèbre de Lie.

#### 7.3.1 Forme de Maurer-Cartan sur $\text{GL}(n)$

Considérons la translation à gauche.

$$\tau_{a_0} : x \longmapsto a_0 x$$

Cette application est *linéaire* en  $x$ ; on en déduit en identifiant  $T_{a_0}(\text{GL}(n))$  à l'espace vectoriel sous jacent  $\mathfrak{M}_n$  que l'on a :

$$\tau'_{a_0}(x_0) \cdot h = a_0 h \quad \text{pour tout } h \in \mathfrak{M}_n$$

La forme de Maurer-Cartan  $\omega$  s'obtient en appliquant 1.3.1 :

$$\langle h, \omega_{a_0} \rangle = \tau'_{a_0^{-1}}(a_0) \cdot h = a_0^{-1} h$$

#### 7.3.2 Champ invariant à gauche

Alors on a :

$$T_I(\text{GL}(n)) = \mathfrak{M}_n.$$

Donnons-nous  $z \in \mathfrak{M}_n$ . Alors le champ invariant à gauche  $X$  tel que :

$$X_I = z$$

est donné par et s'écrit ainsi :

$$X_a = az$$

*Ligne de courant d'un champ invariant à gauche.*

On cherche la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = X_{k(t)} = k(t)z \\ k(0) = a_0 \end{cases}$$

où  $k(t) \in \text{GL}(n)$ ,  $z \in \mathfrak{M}_n$ .

Si  $b \in \mathcal{M}_n$ , posons :

$$7.3.2 \quad e^b = I + \frac{b}{1} + \dots + \frac{b^n}{n!} + \dots,$$

Alors, on obtient en dérivant terme à terme :

$$\frac{d}{dt} (e^{tb}) = b e^{tb}$$

d'où la solution immédiate suivante du problème de Cauchy donné.

$$7.3.3 \quad k(t) = a_0 e^{tz} = U_t(a_0)$$

où  $U_t$  désigne le groupe à 1 paramètre associé à  $z$ .

*Application exponentielle.*

On a d'après 6.2.2

$$U_t(a_0) = a_0 \exp(tz)$$

et d'autre part, d'après 7.3.3

$$= a_0 e^{tz}.$$

D'où

$$e^{tz} = \exp(tz).$$

On a ainsi démontré :

7.3.4 *L'application exponentielle définie par la théorie abstraite des groupes de Lie coïncide avec la fonction exponentielle définie sur  $\mathcal{M}_n$  par la série entière 7.3.2.*

Ceci étant on peut démontrer

**PROPOSITION.** — *L'algèbre de Lie de  $GL(n)$  est l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n$ , le crochet de deux matrices étant leur commutateur :*

$$7.3.5 \quad [z_1, z_2] = z_1 z_2 - z_2 z_1$$

**PREUVE.** — L'algèbre de Lie de  $GL(n)$  est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à  $T_1(GL(n)) = \mathcal{M}_n$ . Soient  $z_1, z_2 \in \mathcal{M}_n$ ,  $U_{t_1}^1$  et  $U_{t_2}^2$  les deux groupes à un paramètre associés; on a si  $f$  est une fonction :

$$7.3.6 \quad \theta([z_1, z_2])f = \theta(z_1)\theta(z_2)f - \theta(z_2)\theta(z_1)f$$

On a :

$$(\theta(z_2)f)(a) = \frac{\partial}{\partial t_2} (f(U_{t_2}^2(a)))$$

Posons :

$$g = \theta(z_2)f,$$

alors

$$(\theta(z_1)g)(I) = \frac{\partial g}{\partial t_1}(U_{t_1}^1(I))$$

D'où

$$(\theta(z_1)\theta(z_2)f)(I) = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} f(U_{t_2}^2 \circ U_{t_1}^1(I))$$

Utilisant 7.3.3 ceci s'écrit :

$$(\theta(z_1)\theta(z_2)f) = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} f(e^{t_1 z_1} e^{t_2 z_2})$$

Ainsi 7.3.6 s'écrit en tenant compte de la permutabilité de  $\frac{\partial}{\partial t_1}$  avec  $\frac{\partial}{\partial t_2}$

$$\langle [z_1, z_2], (df)_I \rangle = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} [f(e^{t_1 z_1} e^{t_2 z_2}) - f(e^{t_2 z_2} e^{t_1 z_1})]$$

le second membre étant calculé pour  $t_1 = t_2 = 0$ . Posons

$$k(t_1, t_2) = f(e^{t_1 z_1} e^{t_2 z_2}) - f(e^{t_2 z_2} e^{t_1 z_1})$$

Alors on a :

$$k(0, t_2) = k(t_1, 0) = 0;$$

D'où

$$\frac{\partial k}{\partial t_1}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial t_1^2}(0, 0) = 0.$$

Par suite, écrivant le développement de Taylor de  $k$  limité à l'ordre 2, on obtient :

$$\frac{\partial^2 k}{\partial t_1 \partial t_2}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k(t, t)}{t^2}$$

Évaluons  $k(t, t)$  en utilisant le théorème des accroissements finis

$$k(t, t) = f'(0) \cdot \delta + \eta \|\delta\| \quad \text{où} \quad \eta \rightarrow 0$$

lorsque  $t \rightarrow 0$  et où

$$\delta = e^{t z_1} e^{t z_2} - e^{t z_2} e^{t z_1}$$

Par suite,

$$\langle [z_1, z_2], (df)_I \rangle = f'(I) \lim_{t \rightarrow 0} \delta t^{-2}$$

d'où

$$[z_1, z_2] = \lim_{t \rightarrow 0} \delta t^{-2}.$$

En effectuant le produit des séries entières 7.3.2 on obtient

$$\delta = t^2(z_1 z_2 - z_2 z_1) + \eta_1 t^2$$

avec  $\eta_1 \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow 0$ ; d'où le résultat.

7.3.7 COROLLAIRE. — *L'algèbre de Lie de  $O(n)$  est  $\mathfrak{M}_{n,a}$ , le crochet étant donné par la formule 7.3.5.*

PREUVE. — Elle résulte de 7.2.4, 7.3.5 et 5.2.

7.3.8 COROLLAIRE. — *L'algèbre de Lie de  $SGL(n)$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{M}_n$  constitué par les matrices de trace nulle, le crochet étant donné par 7.3.5.*

PREUVE. — Utilisant le même raisonnement qu'en 7.3.7, tout revient à montrer que :

$$T_I(SGL(n)) = \{a \in \mathfrak{M}_n \mid \text{Tr}(a) = 0\}$$

Soit  $x \in \mathfrak{M}_n$  donné, on a le développement limité suivant :

$$\det(I + xt) = 1 + t \text{Tr}(x) + O(t^2)$$

Posons  $\psi(a) = \det(a)$ . On a :

$$\psi(I + tx) = 1 + t\psi'(I).x + O(t^2).$$

On obtient, en comparant ces deux développements limités :

$$\psi'(I).x = \text{Tr}(x)$$

D'autre part on a :

$$T_I(SGL(n)) = \ker \psi'(I) = \{x \mid \text{Tr}(x) = 0\}$$

C.Q.F.D.

#### 7.4 PRODUITS SEMI-DIRECTS. ALGÈBRE DE LIE DU GROUPE DES DÉPLACEMENTS

Une transformation affine de  $\mathbf{R}^n$  est donné par :

$$(\xi, a) \in \mathbf{R}^n \times GL(n)$$

qui détermine la transformation affine :

$$x \longmapsto x' = \xi + ax$$

Le produit des deux transformations affines  $x \longmapsto x'$ ,  $x' \longmapsto x''$ , s'écrit :

$$x'' = \tilde{\xi} + \tilde{a}.x' = \tilde{\xi} + \tilde{a}\xi + \tilde{a}a.x$$

Nous convenons de désigner par  $\tilde{a}\xi$  le produit à gauche d'une matrice carrée par une matrice colonne, par  $\tilde{a}a$  le produit de deux matrices.

On appelle *groupe affine de  $\mathbf{R}^n$* , le groupe dont l'ensemble est :

$$\mathbf{R}^n \times GL(n),$$

la loi de composition étant donnée par :

$$7.4.1 \quad (\tilde{\xi}, \tilde{a}).(\xi, a) = (\tilde{\xi} + \tilde{a}\xi, \tilde{a}a)$$

L'élément neutre est :

$$(0, I)$$

L'inverse s'écrit :

$$(\xi, a)^{-1} = (-a^{-1}\xi, a^{-1})$$

On obtient alors :

$$7.4.2 \quad \mathbf{R}^n \times \text{GL}(n),$$

*muni de la loi de composition 7.4.1 est un groupe de Lie que l'on notera  $A(n)$ .*

7.4.3. *Sous-groupes de  $A(n)$*

$$G_1 = \{(\xi, a) \in A(n) \mid a = I\}$$

et

$$G_2 = \{(\xi, a) \in A(n) \mid \xi = 0\}$$

sont deux sous-groupes de  $A(n)$ , respectivement isomorphes à  $\mathbf{R}^n$  et à  $\text{GL}(n)$ . De plus  $A(n)$  est la variété  $G_1 \times G_2$ ; toutefois le produit sur  $A(n)$  ne s'obtient pas en effectuant le produit composante par composante. On dit que  $A(n)$  est *produit semi-direct* de  $\mathbf{R}^n$  et de  $\text{GL}(n)$ .

*Algèbre de Lie de  $A(n)$ .*

*L'algèbre de Lie de  $A(n)$  est l'espace vectoriel*

$$\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{M}_n$$

*muni du crochet :*

$$7.4.4 \quad [h, \tilde{h}] = (c\tilde{\eta} - \tilde{c}\eta, c\tilde{c} - \tilde{c}c)$$

ou  $h = (\eta, c)$   $\tilde{h} = (\tilde{\eta}, \tilde{c})$ .

PREUVE. — D'après 5.2, les algèbres de Lie des sous-groupes  $G_1, G_2$  introduits en 7.4.3, s'identifient à des sous-algèbres de l'algèbre de Lie de  $A(n)$ . Ceci signifie que :

$$\begin{aligned} [(\eta, 0), (\tilde{\eta}, 0)] &= (0, 0) \\ [(0, c), (0, \tilde{c})] &= (0, c\tilde{c} - \tilde{c}c) \end{aligned}$$

en vertu de 7.3.5.

Par suite, utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du crochet, il suffit pour démontrer 7.4.4 de montrer que

$$[(0, c), (\tilde{\eta}, 0)] = c\tilde{\eta}$$

Le groupe  $U_t$  à un paramètre sur  $A(n)$  engendré par  $(0, c)$  est la multiplication à droite par :

$$(0, e^{ct})$$

De même, celui engendré par  $(\tilde{\eta}, 0)$ , soit  $\tilde{U}_t$ , est la multiplication à droite par :

$$(\tilde{\eta}t, 0)$$

(En effet, les lignes de courant des champs de vecteurs constants sur  $\mathbf{R}^n$  sont des droites).

Utilisant la même méthode, on aboutit à l'analogue de la formule 7.3.7 c'est-à-dire à

$$[(0, c), (\tilde{\eta}, 0)] = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-2} \delta(t)$$

où

$$\begin{aligned} \delta(t) &= (0, e^{ct})(\tilde{\eta}t, I) - (\tilde{\eta}t, I)(0, e^{ct}) \\ &= (e^{ct}\tilde{\eta}t, e^{ct}) - (\tilde{\eta}t, e^{ct}) = ((e^{ct} - 1)\tilde{\eta}t, 0) \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-2} \delta(t) = c\tilde{\eta} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

#### 7.4.5 Groupe des déplacements

Remarquons d'abord que si  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $GL(n)$ , alors

$$\mathbf{R}^n \times \Gamma$$

constitue un sous-groupe de  $A(n)$ .

On appelle *groupe des déplacements de  $\mathbf{R}^n$*  muni de sa structure euclidienne canonique le groupe :

$$\mathbf{R}^n \times O(n),$$

la loi de groupe étant celle induite par  $A(n)$ . On note  $D(n) = D(\mathbf{R}^n)$  le groupe des déplacements.

#### 7.4.6 L'algèbre de Lie $\mathfrak{D}_n$ du groupe des déplacements $D(n)$ est l'espace vectoriel.

$$\mathfrak{D}_n = \mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{M}_{n,a}$$

muni du crochet défini par la formule 7.4.4 où  $c, \tilde{c} \in \mathfrak{M}_{n,a}$ .

PREUVE. — Cf. 5.2 et 7.4.5.

#### 7.4.7 Formulation indépendante de la base

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Par le choix d'un repère orthonormé,  $E$  est isomorphe à  $\mathbf{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique, et 7.4.6 s'applique immédiatement.

Il est facile de traduire 7.4.6 en termes intrinsèques indépendants du choix d'un repère. On note  $D(E)$  le groupe des déplacements de  $E$  :  $D(E) = E \times O(E)$ . On note :

$$\tilde{H}(E) = \{A \in \mathfrak{L}(E; E) \mid (Ax \mid y) + (x \mid Ay) = 0\}$$

Alors l'algèbre de Lie de  $D(E)$  s'identifie à

$$E \oplus \check{H}(E)$$

le crochet étant donné par 7.4.4.

Toutefois, pour les calculs, l'usage de matrices reste souhaitable. Un des avantages de la théorie du repère mobile développée dans le paragraphe suivant est qu'elle permet de donner à cet usage un caractère intrinsèque.

### 7.5 LA MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . On appelle repère  $\mathcal{R}$  de  $E$  le système constitué par :

$x_0 \in E$  appelé l'origine de  $E$  et une base orthonormée  $e_1, \dots, e_n$  de l'espace vectoriel  $E$ . Alors on a :

7.5.1 *La donnée d'un repère  $\mathcal{R}$  de  $E$  est équivalent à la donnée d'une application isométrique  $u_{\mathcal{R}}$  de  $E$  sur  $\mathbf{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique.*

PREUVE. —  $u_{\mathcal{R}}^{-1}(\xi)$  est défini par :

$$u_{\mathcal{R}}^{-1}(\xi) = x_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$$

Alors si  $\xi = u_{\mathcal{R}}(x)$ ,  $\xi' = u_{\mathcal{R}}(x')$  on a :

$$d(x, x') = d(\xi, \xi')$$

Inversement si  $\psi$  est une isométrie de  $E$  sur  $\mathbf{R}^n$  nous posons :

$$\tilde{x}_0 = \psi^{-1}(0), \quad e^i = \psi^{-1}(\varepsilon_i) - \psi^{-1}(0)$$

où  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  est la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ , et nous définissons ainsi un repère  $\check{\mathcal{R}}$  tel que

$$u_{\check{\mathcal{R}}} = \psi.$$

#### 7.5.2 Matrices de passage

Soient  $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}$  deux repères de  $E$ ; nous considérerons :

$$d_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}} = u_{\mathcal{R}_0} \circ u_{\mathcal{R}}^{-1}$$

Alors  $d_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}}$  est une application de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$ , isométrique, par suite  $d_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}} \in D(n)$ .

7.5.3 PROPOSITION. — *Soient  $\mathcal{R}, \mathcal{R}_0, \check{\mathcal{R}}_0$  trois repères; alors on a :*

$$d_{\check{\mathcal{R}}_0, \mathcal{R}} = d_{\check{\mathcal{R}}_0, \mathcal{R}_0} \circ d_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}}$$

D'autre part, si  $\varphi \in D(E)$ , on a :

$$d_{\mathcal{R}_0, \varphi(\mathcal{R})} = d_{\varphi^{-1}(\mathcal{R}_0), \mathcal{R}}$$

PREUVE. — En effet :

$$d_{\tilde{\mathcal{R}}_0, \mathcal{R}} = u_{\tilde{\mathcal{R}}_0} \circ u_{\mathcal{R}}^{-1} = (u_{\tilde{\mathcal{R}}_0} \circ u_{\mathcal{R}_0}^{-1}) \circ (u_{\mathcal{R}_0} \circ u_{\mathcal{R}}^{-1}) = d_{\tilde{\mathcal{R}}_0, \mathcal{R}_0} \circ d_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}}$$

D'autre part, si  $\varphi \in D(E)$ , on a :

$$u_{\varphi(\mathcal{R})} = u_{\mathcal{R}} \circ \varphi^{-1}$$

d'où :

$$d_{\mathcal{R}_0, \varphi(\mathcal{R})} = u_{\mathcal{R}_0} \circ (u_{\mathcal{R}} \circ \varphi^{-1})^{-1} = u_{\mathcal{R}_0} \circ \varphi \circ u_{\mathcal{R}}^{-1} = u_{\varphi^{-1}(\mathcal{R}_0)} \circ u_{\mathcal{R}}^{-1} = d_{\varphi^{-1}(\mathcal{R}_0), \mathcal{R}}$$

#### 7.5.4 Définition d'un repère mobile

Donnons nous une variété abstraite  $V$ , un espace euclidien  $E$ . Notons par  $\Delta(E)$  l'ensemble des repères de  $E$ .

On appelle *repère mobile sur l'espace euclidien  $E$  et ayant  $V$  pour variété des paramètres*, une application :

$$f: V \rightarrow \Delta(E)$$

Si on choisit un repère  $\mathcal{R}_0$ , on pose :

$$f_{\mathcal{R}_0}(v) = d_{\mathcal{R}} f(v)$$

Alors

$$f_{\mathcal{R}_0}: V \rightarrow D(n).$$

On appelle  $f_{\mathcal{R}_0}$  l'expression de  $f$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$ . Cette expression dépend évidemment de  $\mathcal{R}_0$ ; la proposition suivante explicite cette dépendance.

7.5.5 PROPOSITION. — *Les expressions du repère mobile  $f$  sur l'espace euclidien  $E$  dans deux repères fixes  $\mathcal{R}_0$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_0$ , soit  $f_{\mathcal{R}_0}$  et  $f_{\tilde{\mathcal{R}}_0}$ , sont deux applications de  $V$  dans  $D(n)$  équivalentes au sens de Darboux (3.1). D'autre part, si  $\varphi \in D(E)$ ,  $f_{\mathcal{R}_0}$  et  $(\varphi \circ f)_{\mathcal{R}_0}$  sont deux applications équivalentes au sens de Darboux.*

PREUVE. — On a, d'après 7.5.3,

$$f_{\tilde{\mathcal{R}}_0}(v) = d_{\tilde{\mathcal{R}}_0, f(v)} = d_{\tilde{\mathcal{R}}_0, \mathcal{R}_0} \cdot f_{\mathcal{R}_0}(v)$$

c'est-à-dire que l'on passe de  $f_{\mathcal{R}_0}$  à  $f_{\tilde{\mathcal{R}}_0}$  en effectuant une *translation à gauche* ou encore que  $f_{\mathcal{R}_0}$  et  $f_{\tilde{\mathcal{R}}_0}$  sont deux applications équivalentes au sens de Darboux.

De même, d'après 7.5.3,

$$(\varphi \circ f)_{\mathcal{R}_0} = f_{\varphi^{-1}(\mathcal{R}_0)} = f_{\tilde{\mathcal{R}}_0}$$

en posant  $\tilde{\mathcal{R}}_0 = \varphi^{-1}(\mathcal{R}_0)$  et on se trouve ramené au cas précédent.

DÉFINITION. — On dira que le repère mobile  $f$  est de classe  $C^k$ , si  $f_{\mathcal{R}_0} \in C^k(V; D(n))$  propriété qui, d'après 7.5.5, est indépendante du choix de  $\mathcal{R}_0$ .

7.5.6 THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^2$ ,  $E$  un espace euclidien,  $f$  un repère mobile sur  $E$ ,  $V$  étant sa variété des paramètres. Alors il existe de façon canonique :

$$\pi \in \Lambda^1(V; \mathfrak{D}_n).$$

Inversement, la donnée d'une forme

$$\pi \in \Lambda^1(V; \mathfrak{D}_n)$$

satisfaisant l'équation de structure de Darboux et de classe  $C^1$  détermine un repère mobile complètement défini à un déplacement près.

PREUVE. — Soit  $\pi$  la différentielle de Darboux de  $f_{\mathcal{R}_0}$ . D'après 7.5.5 et 3.2, elle est indépendante du choix de  $f_{\mathcal{R}_0}$ . Si  $f_{\mathcal{R}_0}$  et  $\tilde{f}_{\mathcal{R}_0}$  ont même différentielle de Darboux, alors on sait qu'il existe  $d \in D(n)$  tel que

$$\tilde{f}_{\mathcal{R}_0} = \tau_d \circ f_{\mathcal{R}_0}.$$

Soit  $\tilde{\mathcal{R}}_0$  défini par :

$$u_{\tilde{\mathcal{R}}_0} = d \circ u_{\mathcal{R}_0};$$

alors on a :

$$\tilde{f}_{\mathcal{R}_0} = u_{\tilde{\mathcal{R}}_0} \circ u_{\mathcal{R}_0}^{-1} \circ f_{\mathcal{R}_0}.$$

Soit  $\varphi$  le déplacement suivant de  $E$  :

$$\varphi = u_{\tilde{\mathcal{R}}_0}^{-1} \circ u_{\mathcal{R}_0}.$$

On en déduit que :

$$\tilde{f}_{\mathcal{R}_0} = \varphi \circ f_{\mathcal{R}_0}$$

d'où

$$\tilde{f} = \varphi \circ f$$

Enfin, si  $\tilde{\pi}$  satisfait l'équation de structure de Darboux, on sait, (cf. 3.3.1) qu'il existe  $h \in C^2(V; D(n))$  dont  $\tilde{\pi}$  est la différentielle de Darboux. Choisissons  $\mathcal{R}_0 \in \Delta(E)$  et posons :

$$f = u_{\mathcal{R}_0}^{-1} \circ h.$$

On détermine ainsi un repère mobile associé à  $\tilde{\pi}$ .

DÉFINITION. — On appelle  $\pi \in \Lambda^1(V; \mathfrak{D}_n)$  la forme de Darboux du repère mobile  $f$ . Il est remarquable que, sans se donner aucune base sur  $E$ , on aboutisse de façon intrinsèque à des fonctions à valeurs matricielles.

Expression des équations de structures.

Nous allons utiliser la décomposition :

$$\mathfrak{D}_n = \mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{M}_{n,a}$$

Par suite :

$$\pi \in \Lambda^1(V; \mathfrak{D}_n)$$

s'écrit en projetant sur chaque composante :

$$\pi = \dot{\pi} + \ddot{\pi} \quad \text{où} \quad \dot{\pi} \in \Lambda^1(\mathbf{V}; \mathbf{R}^n) \quad \text{et} \quad \ddot{\pi} \in \Lambda^1(\mathbf{V}; \mathcal{M}_{n,a}).$$

On a, alors :

PROPOSITION. — *L'équation de structure de Darboux s'écrit :*

$$7.5.7 \quad \begin{cases} \langle \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}, d\dot{\pi} \rangle = \ddot{\pi}(\mathbf{A})\dot{\pi}(\mathbf{B}) - \ddot{\pi}(\mathbf{B})\dot{\pi}(\mathbf{A}) \\ \langle \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}, d\ddot{\pi} \rangle = \ddot{\pi}(\mathbf{A})\ddot{\pi}(\mathbf{B}) - \ddot{\pi}(\mathbf{B})\ddot{\pi}(\mathbf{A}) \end{cases}$$

ou  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \overset{1}{\otimes} \mathbf{V}$ .

PREUVE. — D'après 3.3.1, tout revient à calculer :

$$\langle \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, [\pi, \pi] \rangle = [\dot{\pi}(\mathbf{A}) + \ddot{\pi}(\mathbf{A}), \dot{\pi}(\mathbf{B}) + \ddot{\pi}(\mathbf{B})]$$

Utilisons 7.4.6

$$= (\ddot{\pi}(\mathbf{A})\dot{\pi}(\mathbf{B}) - \ddot{\pi}(\mathbf{B})\dot{\pi}(\mathbf{A}), \ddot{\pi}(\mathbf{A})\ddot{\pi}(\mathbf{B}) - \ddot{\pi}(\mathbf{B})\ddot{\pi}(\mathbf{A})),$$

d'où le résultat en séparant les composantes.

*Remarque.* La première équation 7.5.7 relie  $\ddot{\pi}$  au cobord de  $\dot{\pi}$ . Cette liaison est une propriété fondamentale, comme on le verra en 8.

*Expression des équations de structure dans une base de  $\mathcal{D}_n$ .*

Nous allons mettre 7.5.7 sous forme développée en choisissant une base de  $\mathcal{D}_n$ .

On a

$$\mathcal{D}_n = \mathbf{R}^n \oplus \mathcal{M}_n^a$$

Prenant dans  $\mathbf{R}^n$  la base canonique  $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$

$\dot{\pi}$  a pour composante  $\dot{\pi}^1, \dots, \dot{\pi}^n$ .

Dans  $\mathcal{M}_n^a$  il existe une base naturelle, celle constituée par les matrices anti-symétriques ayant tous leurs coefficients nuls sauf deux, celui au-dessus de la diagonale étant égale à 1. On notera par

$$\ddot{\pi}_i^j \quad i > j, \quad \begin{array}{l} i = \text{indice des colonnes} \\ j = \text{indice des lignes} \end{array}$$

la composante de  $\ddot{\pi}$  sur l'élément du rang  $(i, j)$  de cette base de  $\mathcal{M}_n^a$ . Il sera commode de considérer  $\ddot{\pi}_i^j$  lorsque  $i < j$  en posant par définition

$$\ddot{\pi}_i^j = \ddot{\pi}_j^i$$

Avec cette convention les  $\ddot{\pi}_i^j$  sont tout simplement les coefficients de la matrice  $\ddot{\pi}$ .

Ces coefficients sont liés par la relation

$$\ddot{\pi}_i^j + \ddot{\pi}_j^i = 0$$

qui expriment que la matrice  $\ddot{\pi}$  est antisymétrique.

On a

7.5.8 PROPOSITION. — *L'équation Darboux 7.5.7 s'écrit*

$$\begin{aligned} d\dot{\pi}^i &= - \sum_s \ddot{\pi}_s^i \wedge \dot{\pi}^s \\ d\dot{\pi}_i^j &= - \sum_s \ddot{\pi}_s^j \wedge \dot{\pi}_i^s \end{aligned}$$

PREUVE. —  $\dot{\pi}(B)$  est un vecteur de  $\mathbf{R}^n$  qui a pour composante  $\dot{\pi}^i(B)$ ,  $\ddot{\pi}(A)\dot{\pi}(B)$  est le transformé de ce vecteur par la matrice  $\ddot{\pi}(A)$  de coefficients  $\ddot{\pi}_i^j(A)$  ce vecteur aura pour  $i^{\text{ème}}$  composante

$$\sum_s \ddot{\pi}_s^i(A) \dot{\pi}^s(B)$$

d'où

$$- \langle A \wedge B, d\dot{\pi}^i \rangle = \sum_s (\ddot{\pi}_s^i(A) \dot{\pi}^s(B) - \ddot{\pi}_s^i(B) \dot{\pi}^s(A))$$

La parenthèse du second membre n'est rien d'autre que

$$\langle A \wedge B, \ddot{\pi}_s^i \wedge \dot{\pi}^s \rangle$$

d'où

$$- \langle A \wedge B, d\dot{\pi}^i \rangle = \langle A \wedge B, \sum_s \ddot{\pi}_s^i \wedge \dot{\pi}^s \rangle,$$

d'où la première formule.

De même considérons le coefficient de rang  $(i, j)$  de la matrice

$$\ddot{\pi}(A)\ddot{\pi}(B) - \ddot{\pi}(B)\ddot{\pi}(A),$$

coefficient qui s'obtient en calculant le produit des matrices  $\ddot{\pi}(A)$  et  $\ddot{\pi}(B)$ ,  $\ddot{\pi}(B)$  et  $\ddot{\pi}(A)$  :

$$- \langle A \wedge B, d\dot{\pi}_i^j \rangle = \sum_s (\ddot{\pi}_s^j(A) \dot{\pi}_i^s(B) - \ddot{\pi}_s^j(B) \dot{\pi}_i^s(A))$$

La parenthèse du second membre n'est rien d'autre que

$$\langle A \wedge B, \ddot{\pi}_s^j \wedge \dot{\pi}_i^s \rangle$$

d'où on obtient la deuxième formule.

C.Q.F.D.

*Interprétation géométrique de la différentielle de Darboux*

Soit  $\mathcal{R}_v$  un repère mobile sur l'espace euclidien  $E$ ,  $v \in V$ . Notons par  $M(v)$  l'origine du repère  $\mathcal{R}_v$ , par  $e_1(v), \dots, e_n(v)$  les  $n$  vecteurs orthonormés de la base de  $\mathcal{R}_v$ .

L'application  $v \rightarrow M(v)$  définit, sur  $V$ , une fonction à valeurs dans l'espace vectoriel  $V$ ; on a défini la différentielle d'une telle fonction. De même la différentielle de la fonction à valeurs vectorielles  $v \rightarrow e_i(v)$  est bien définie. On a alors :

PROPOSITION. — Avec les notations précédentes on a :

$$7.5.9 \quad \begin{cases} dM = \sum_i e_i \dot{\pi}^i \\ de_i = \sum_j e_j \dot{\pi}_i^j \end{cases}$$

$\dot{\pi}^i$  et  $\dot{\pi}_i^j$  étant les composantes de la forme de Darboux introduites en 7.5.8.

PREUVE. — Donnons-nous  $v_0 \in V$ . Nous voulons démontrer les égalités 7.5.9 en  $v_0$ . Prenons pour repère fixe  $\mathcal{R}_{v_0}$  et soit

$$f_0 : V \rightarrow D(n)$$

définie en posant :

$$f_0(v) = u_{\mathcal{R}_{v_0}} \circ u_{\mathcal{R}_v}^{-1}$$

Alors, d'après la définition même de différentielle de Darboux qui est indépendante du choix du repère fixe, on a :

$$\pi_{v_0} = (f_0^* \omega)_{v_0}$$

ou encore :

$$\pi_{v_0} = \omega_{f(v_0)} \circ f'(v_0).$$

Mais d'après le choix du repère fixe,

$$f'(v_0) = \text{identité de } D(n),$$

d'où

$$\omega_{f(v_0)} = \text{identité}$$

et :

$$\pi_{v_0} = f'(v_0),$$

d'où le résultat.

*Remarque.* Les formules 7.5.9 sont d'un usage élémentaire fréquent; on dit que l'on calcule les composantes des vitesses dans le repère mobile.

#### 7.5.10 Détermination explicite d'un repère mobile à partir des $\pi^i$ , $\pi_i^j$

Étant donnée une forme  $\pi$  satisfaisant les équations de structure, on veut déterminer explicitement un repère mobile  $\{\mathcal{R}_u\}_{u \in V}$  ayant  $\pi$  pour forme de Darboux.

Soient  $\mathcal{R}_0$  un repère donné de l'espace euclidien  $E$ ,  $v_0$  un point donné de  $V$ . Nous ferons correspondre au point  $v_0 \in V$ , le repère  $\mathcal{R}_{u_0} = \mathcal{R}_0$ . Si  $v_1$  désigne un second point de  $V$ , nous tracerons une courbe  $\Gamma$  sur  $V$ , soit  $t \rightarrow v(t)$ , telle que  $v(0) = u_0$   $v(1) = u_1$ .

Posons  $\varphi(t)$  le déplacement amenant  $\mathcal{R}_0$  sur  $\mathcal{R}_{v(t)}$  par :

$$\varphi(t) = u_{\mathcal{R}_0} \circ u_{\mathcal{R}_{v(t)}}^{-1}$$

On a :

$$\varphi(t) = (\varphi^i(t)_{1 \leq i \leq n}, (\varphi_j^k(t))_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}})$$

Remarquons que :

$$\langle v'(t) \cdot 1, \pi_{v(t)} \rangle = h(t)$$

est une fonction de  $t$ , complètement déterminée par la donnée de  $\pi$  et le choix de la courbe  $\Gamma$ ,

$$h(t) = ((k^i(t), (h_j^k(t))).$$

Projetons les premières équations vectorielles 7.5.9 sur le  $k$ -ième axe du repère  $\mathcal{R}_0$ ; on obtient :

$$\frac{d\varphi^k}{dt} = \sum_i \varphi_i^k h^i \quad 1 \leq k \leq n$$

De même projetons sur le  $k$ -ième axe de  $\mathcal{R}_0$  les secondes équations 7.5.9. On obtient

$$\frac{d\varphi_i^k}{dt} = \sum_j \varphi_j^k h_i^j \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i \leq n$$

Ces équations constituent un système de  $n + n^2$  équations différentielles *linéaires* dans les  $(n + n^2)$  fonctions inconnues  $\varphi^i, \varphi_j^i$ . Ce système possède une solution unique satisfaisant les conditions de Cauchy

$$\begin{aligned} \varphi_j^i(0) &= 0 & \text{si} & \quad i \neq j \\ \varphi^i(0) &= 0 \\ \varphi_i^i(0) &= 1 \end{aligned}$$

solution définissant les coordonnées du repère  $\mathcal{R}_{v(t)}$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ , ce qui est cherché.

### 7.5.11 Interprétation géométrique du repère mobile

PROPOSITION. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^1$ ,  $\mathcal{R}_x, x \in V$ , un repère mobile sur  $E$ ,  $f(x)$  l'origine de  $\mathcal{R}_x$ ; alors on a :

$$u_{\mathcal{R}_{x_0}} \circ (df)_{x_0} = \pi_{x_0}$$

PREUVE. — Soit  $q(t)$  un chemin définissant le vecteur  $z$ . On a alors en utilisant 7.5.6.

$$\pi_{x_0}(z) = \left[ \frac{d}{dt} (u_{\mathcal{R}_{x_0}} \circ u_{\mathcal{R}_{q(t)}}^{-1}) \right]_{t=0}$$

D'où en projetant sur la première composante  $\mathbf{R}^n$  de la décomposition en somme

directe :  $\mathcal{D}_n = \mathbf{R}^n \oplus \mathcal{M}_{n,a}$ , on obtient :

$$\dot{\pi}_{x_0}(z) = \frac{d}{dt} (u_{\mathcal{R}_{x_0}}(f(q(t))))$$

calculé pour  $t = 0$ ; ou encore :

$$\dot{\pi}_{x_0}(z) = u_{\mathcal{R}_{x_0}}(f'(x_0) \cdot z)$$

d'où la proposition.

*Remarque.* En considérant les colonnes  $\dot{\pi}^j$  de la matrice  $\dot{\pi}$  et  $g_i$  l'application de  $V \rightarrow E$  définie par le  $i$ -ième vecteur coordonnée, on obtient également :

$$\dot{\pi}_{x_0}^j = u_{\mathcal{R}_{x_0}} \circ (dg_j)_{x_0}$$

## 8 Géométrie riemannienne, dérivation covariante, plongements euclidiens

L'étude des surfaces de l'espace de la géométrie élémentaire est une des origines de la géométrie différentielle. Traduite en un langage plus moderne, cette étude est celle des sous-variétés de dimension 2 d'un espace euclidien de dimension 3. Nous avons vu en I-6 que toute sous-variété pouvait être réalisée par un plongement. Ainsi l'étude élémentaire des surfaces revient à l'étude des plongements d'une variété abstraite de dimension 2 dans un espace euclidien de dimension 3. En géométrie élémentaire on ne s'intéresse qu'aux propriétés des surfaces qui sont invariantes par un déplacement euclidien. Nous sommes ainsi amenés à la notion de *plongements équivalents*, c'est-à-dire des plongements tels que l'on passe de l'un à l'autre par un déplacement.

Une méthode naturelle pour étudier ces classes est d'associer à un plongement donné, un repère mobile. On sait en effet que le mouvement d'un repère mobile est déterminé, *modulo un déplacement*, par sa forme de Darboux.

Cette méthode a l'inconvénient qu'il n'existera pas un repère mobile associé de façon canonique à un plongement, mais toute une classe de repères. Notre préoccupation sera de dégager les propriétés géométriques du plongement, c'est-à-dire celles qui sont indépendantes du choix du repère mobile associé.

Ces notions seront développées dans le cadre de l'étude des plongements d'une variété de dimension  $n$  dans un espace euclidien de dimension  $p$  (où  $p \geq n$ ).

Nous traiterons d'abord le cas particulier où  $n = p$ , qui correspond à l'étude des « coordonnées curvilignes » sur un espace euclidien. Il peut également être regardé, ce qui est plus intéressant, comme une approche à l'étude des fondements de la géométrie euclidienne : est-il possible de caractériser cette dernière en terme d'objets invariants par difféomorphismes? Décrire une telle caractérisation. Ce problème nous conduira à la notion de dérivation covariante. Nous aborderons

ensuite le cas  $n > p$ , en faisant une étude complète du cas  $n = p - 1$  (cas des hypersurfaces).

## 8.1 VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

### 8.1.1 Plongements équivalents

Soit  $V$  une variété de dimension  $n$ ,  $E$  un espace euclidien de dimension  $p$ . On notera par  $D(E)$  le groupe des déplacements de  $E$ .

Soient  $f, \tilde{f} \in C^1(V; E)$ . On dira que  $f$  est équivalent à  $\tilde{f}$  s'il existe  $\Phi \in D(E)$  tel que

$$\tilde{f} = \Phi \circ f.$$

### 8.1.2 Variétés riemanniennes

Soit  $V$  une variété.

On appelle *champ de tenseurs covariants de degré 2* et l'on note  $l \in \bigotimes_2 V$ , la donnée, pour tout  $x \in V$ , d'une forme bilinéaire  $l_x$  sur  $T_x(V)$ . Si  $z_1, z_2 \in T_x(V)$ , on convient de noter :

$$l_x(z_1, z_2)$$

également par :

$$\langle z_1 \otimes z_2, l_x \rangle.$$

On dit que  $l$  est *symétrique* si

$$l_x(z_1, z_2) = l_x(z_2, z_1) \quad \text{pour tout} \quad z_1, z_2 \in T_x(V).$$

On note par  $\bigotimes_{2,s} V$  le  $\mathcal{A}_0(V)$ -module des champs de tenseurs covariants symétrique.

On dit qu'un champ de tenseurs covariants symétrique de degré 2, soit  $g \in \bigotimes_{2,s} V$ , est *défini positif* si quel que soit  $x \in V$  la forme quadratique sur  $T_x(V)$  définie par

$$q(z) = \langle z \otimes z, g_x \rangle$$

est définie positive, c'est-à-dire si

$$\text{et si} \quad \begin{array}{lll} q(z) \geq 0 & \text{pour tout} & z \in T_x(V) \\ q(z) = 0 & \text{entraîne} & z = 0. \end{array}$$

On appelle *variété riemannienne* une variété munie d'un champ  $g$  de tenseurs covariants symétrique de degré 2, défini positif. On appelle  $g$  le *champ de tenseurs métrique de  $V$* . Étant donnée une variété riemannienne, chaque espace tangent  $T_x(V)$  est muni d'une structure euclidienne naturelle, à savoir la structure définie par

$$g_x \in \bigotimes_{2,s} T_x(V).$$

On notera le produit scalaire de deux vecteurs  $z, z' \in T_x(V)$  par

$$(z|z') = \langle z \otimes z', g_x \rangle \quad z, z' \in T_x(V)$$

De même si  $A, B \in \bigotimes^1 V$  on note par  $(A|B)$  la fonction  $h$  définie par

$$h(x) = (A_x|B_x)$$

### 8.1.3 Exemple de variété riemannienne

Soit  $E$  un espace euclidien. Notons par  $(z|z')$  le produit scalaire sur  $E$ . Alors l'application :

$$l(z, z') = (z|z')$$

définit sur  $E$  un tenseur covariant symétrique  $\gamma$  de degré 2, défini positif, par la relation :

$$\gamma(z, z') = (z|z')$$

En tout point  $x \in E$ , on a une identification naturelle de  $T_x(E)$  avec  $E$ . Définissons un champ de tenseurs  $g$  sur  $E$  en posant

$$g_x = \gamma \quad x \in E.$$

Comme  $g$  est évidemment un champ de tenseurs covariants symétrique défini positif, on définit ainsi sur l'espace euclidien  $E$  une structure de variété riemannienne canonique.

### 8.1.4 Image réciproque d'une structure riemannienne par une application régulière

Soient  $V$  une variété abstraite,  $W$  une variété riemannienne,  $g$  son champ de tenseurs métrique. Soit  $f \in C^1(V; W)$ . Supposons que  $f$  soit régulière (c'est-à-dire que pour tout  $x \in V$ ,  $f'(x)$  soit injective). Posons

$$\tilde{g} = f^*g$$

Alors  $\tilde{g}$  définit une structure riemannienne sur  $V$

Évidemment  $\tilde{g} \in \bigotimes_{2,s} V$ . Reste à montrer que  $\tilde{g}$  est défini positif. Soit  $z \in T_x(V)$ . Alors, d'après la définition de l'image réciproque,

$$\langle z \otimes z, \tilde{g}_x \rangle = \langle (f'(x)z) \otimes (f'(x)z), g_y \rangle \quad \text{où} \quad y = f(x)$$

Comme  $g_y$  est défini positif, le premier membre ne peut être nul que si

$$f'(x)z = 0$$

Comme  $f'(x)$  est injectif ceci implique  $z = 0$ .

C.Q.F.D.

8.1.5 *Un exemple d'image réciproque*

Soit  $E$  un espace euclidien,  $g$  le champ de tenseurs définissant la structure riemannienne canonique sur  $E$  (cf. 8.1.3). Soit  $\varphi$  un déplacement de  $E$ . Alors

$$\varphi^*g = g$$

En effet  $\varphi$  conserve le produit scalaire de  $E$ .

*Structure riemannienne associée à un plongement euclidien*

On a

8.1.6 PROPOSITION. — Soit  $V$  une variété abstraite,  $f$  un plongement de  $V$  dans un espace euclidien  $E$ .

Alors ce plongement définit une structure riemannienne sur  $V$ , qui ne dépend que de la classe d'équivalence de  $f$ .

PREUVE. — Un plongement est une application régulière. Soit  $g$  le champ de tenseurs canonique sur  $E$ . Posons

$$\gamma = f^*g$$

alors  $\gamma$  définit une structure riemannienne sur  $V$  en vertu de 8.1.4.

Soit  $\tilde{f}$  un plongement équivalent à  $f$  alors

$$\tilde{f} = \varphi \circ f \quad \text{où} \quad \varphi \in D(E)$$

Ceci permet d'écrire

$$\tilde{\gamma} = \tilde{f}^*g = f^*\varphi^*g$$

En vertu de 8.1.5 on a

$$\varphi^*g = g$$

d'où  $\tilde{\gamma} = \gamma$ . La structure riemannienne sur  $V$  définie par  $\tilde{f}$  est la même que celle définie par  $f$ . C.Q.F.D.

*Remarque.* La proposition 8.1.6 donne ainsi une condition *nécessaire* pour que deux plongements de  $V$  dans le même espace euclidien puissent être équivalents, c'est qu'ils définissent la même structure riemannienne sur  $V$ . Un des théorèmes de ce chapitre sera que cette condition est *suffisante* si  $\dim V = \dim E$ .

## 8.2 CHAMPS DE REPÈRES

Soit  $V$  une variété de dimension  $n$ , on appelle *champ de repères* sur  $V$  la donnée d'un *parallélisme* sur  $V$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  c'est-à-dire la donnée d'une forme différentielle

$$\omega \in \Lambda^1(V^*; \mathbf{R}^n)$$

telle que quel que soit  $x \in V$  l'application linéaire

$$\omega_x \in \mathcal{L}(T_x(V); \mathbf{R}^n)$$

soit inversible.

Notons par  $e_1, \dots, e_n$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ . Alors la correspondance

$$x \rightarrow \omega_x^{-1}(e_i)$$

définit un champ de vecteurs  $A_i \in \bigotimes^1 V$ , les champs de vecteurs  $A_1, \dots, A_n$  étant tels qu'en tout point  $x \in V$

$$(A_1)_x \dots (A_n)_x \quad \text{constituent une base de} \quad T_x(V).$$

Inversement la donnée de  $n$  champs de vecteurs sur  $V$  soient  $A_1, \dots, A_n$  vérifiant cette condition définit un champ de repères sur  $V$ .

Nous allons démontrer un lemme qui sera fondamental mais dont la signification n'apparaîtra que dans le paragraphe suivant.

8.2.1 LEMME DE RIEMANN-CHRISTOFFEL. — Soit  $V$  une variété,  $\omega \in \Lambda^1(V^*; \mathbf{R}^n)$  définissant un champ de repères sur  $V$ ,  $\rho \in \Lambda^2(V^*; \mathbf{R}^n)$  alors il existe

$$\gamma \in \Lambda^1(V^*; \mathcal{M}_{n,a})$$

unique, telle que quels que soient  $A, B \in \bigotimes^1 V$  on ait

$$- \langle A \wedge B, \rho \rangle = \gamma(A)\omega(B) - \gamma(B)\omega(A)$$

PREUVE. — Nous démontrerons d'abord le lemme d'algèbre linéaire suivant :

LEMME. — Soit

$$F \in \mathcal{L}_{2,a}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$$

alors il existe

$$G \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n; \mathcal{M}_{n,a})$$

unique telle que

$$8.2.2 \quad F(\alpha, \beta) = G(\alpha)\beta - G(\beta)\alpha, \text{ quelque soient } \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n.$$

Démonstration de l'unicité

Notons par  $(\alpha|\beta)$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{R}^n$

$$(\alpha|\beta) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \beta^i.$$

Soit  $G$  satisfaisant 8.2.2.

Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}^n$  on a alors le système

$$(S) \quad \begin{aligned} (F(\alpha_1, \alpha_2)|\alpha_3) &= (G(\alpha_1)\alpha_2|\alpha_3) - (G(\alpha_2)\alpha_1|\alpha_3) \\ (F(\alpha_2, \alpha_3)|\alpha_1) &= (G(\alpha_2)\alpha_3|\alpha_1) - (G(\alpha_3)\alpha_2|\alpha_1) \\ (F(\alpha_3, \alpha_1)|\alpha_2) &= (G(\alpha_3)\alpha_1|\alpha_2) - (G(\alpha_1)\alpha_3|\alpha_2) \end{aligned}$$

En vertu de l'antisymétrie des matrices  $G(\alpha_1), G(\alpha_2), G(\alpha_3)$  les six quantités

figurant dans le second membre ne sont pas indépendantes; elles vérifient la relation

$$\begin{aligned} (G(\alpha_1)\alpha_2|\alpha_3) &= - (G(\alpha_1)\alpha_3|\alpha_2) \\ (G(\alpha_2)\alpha_3|\alpha_1) &= - (G(\alpha_2)\alpha_1|\alpha_3) \\ (G(\alpha_3)\alpha_1|\alpha_2) &= - (G(\alpha_3)\alpha_2|\alpha_1) \end{aligned}$$

Si l'on prend comme inconnues les premiers membres de ces trois relations, le système (S) s'écrit suivant *un système (S')* de trois équations à trois inconnues. On voit immédiatement que ce système est un système de Cramer; sa résolution donne

$$8.2.3 \quad (G(\alpha_1)\alpha_2|\alpha_3) = \frac{1}{2} [(F(\alpha_1, \alpha_2)|\alpha_3) + (F(\alpha_3, \alpha_1)|\alpha_2) - (F(\alpha_2, \alpha_3)|\alpha_1)]$$

Fixons  $\alpha_1$ . Soit  $\tilde{G}$  une autre solution de 8.2.2. Alors on aura d'après 8.2.3

$$(\tilde{G}(\alpha_1)\alpha_2|\alpha_3) = (G(\alpha_1)\alpha_2|\alpha_3)$$

Notons par  $e_1, \dots, e_n$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ . Prenons  $\alpha_2 = e_i, \alpha_3 = e_j$ , on obtient que les coefficients  $(i, j)$  des matrices  $G(\alpha_1)$  et  $\tilde{G}(\alpha_1)$  sont égaux ce que démontre l'unicité.

#### *Démonstration de l'existence*

Fixons  $\alpha_1$ . Posons

$$C_j^i = \frac{1}{2} [(F(\alpha_1, e_i)|e_j) + (F(e_j, \alpha_1)|e_i) - (F(e_i, e_j)|\alpha_1)]$$

alors utilisant l'antisymétrie de F on a

$$C_j^i = - C_i^j$$

Les coefficients  $C_j^i$  définissent une matrice antisymétrique notons-la par  $\hat{G}(\alpha_1)$ ; d'autre part  $\hat{G}(\alpha_1)$  est linéaire en  $\alpha_1$ , d'où

$$\hat{G} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n; \mathfrak{M}_{n,a}).$$

D'autre part l'identité 8.2.3 sera satisfaite si

$$\alpha_2 = e_i, \quad \alpha_3 = e_j.$$

Mais les deux membres de 8.2.3 sont bilinéaires en  $(\alpha_2, \alpha_3)$ . Par suite s'ils coïncident sur les couples  $(e_i, e_j)$  ils coïncident partout. Ainsi  $\hat{G}$  satisfait 8.2.3 et les deux autres identités obtenues en permutant circulairement  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Il en résulte que  $(\hat{G}(\alpha_1)\alpha_2|\alpha_3)$ ,  $(\hat{G}(\alpha_2)\alpha_3|\alpha_1)$ ,  $(\hat{G}(\alpha_3)\alpha_1|\alpha_2)$  est la solution du système (S').

Comme  $\hat{G}(\alpha_1)$  est une matrice antisymétrique, le système (S') est équivalent à (S). Par suite la première équation de (S) est satisfaite, équation qui s'écrit

$$(F(\alpha_1, \alpha_2) - \hat{G}(\alpha_1)\alpha_2 + \hat{G}(\alpha_2)\alpha_1|\alpha_3) = 0$$

Ce produit scalaire étant nul quel que soit  $\alpha_3$ ,  $\hat{G}$  satisfait 8.2.2. C.Q.F.D.

La formule des  $C^i$  donne une expression explicite des coefficients de la matrice  $G(\alpha_1)$ . Toutefois il sera souvent plus commode dans les calculs de ne pas utiliser cette expression et de définir la matrice  $G$  par l'équation 8.2.2 qui la détermine uniquement.

*Démonstration du lemme de Riemann-Christoffel*

Plaçons-nous en un point  $x \in V$ . Posons

$$\begin{aligned} \omega_x(A_x) &= \alpha \\ \omega_x(B_x) &= \beta \\ F(\alpha, \beta) &= \langle \omega_x^{-1}(\alpha) \wedge \omega_x^{-1}(\beta), \rho_x \rangle \end{aligned}$$

Cette formule définit une application bilinéaire antisymétrique de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Par suite il existe  $G$  tel que 8.2.2 soit satisfait. Posons

$$- \gamma_x(A_x) = G(\omega_x(A_x))$$

La correspondance  $x \rightarrow \gamma_x$  définit  $\gamma \in \Lambda^1(V^*; \mathfrak{M}_{n,a})$ . De plus 8.2.2 s'écrit

$$- \langle A \wedge B, \rho \rangle_x = \gamma_x(A_x)\omega_x(B_x) - \gamma_x(B_x)\omega_x(A_x)$$

Ceci étant vrai pour tout  $x$  on obtient 8.2.1. Enfin l'unicité de  $\gamma$  résulte de l'unicité de  $G$  et le lemme est démontré.

*Définition de la forme de Riemann-Christoffel*

Soit  $\omega \in \Lambda^1(V^*; \mathbf{R}^n)$  définissant un champ de repères sur  $V$ . Alors

$$d\omega \in \Lambda^2(V^*; \mathbf{R}^n).$$

Appliquons la formule 8.2.1 en posant  $\rho = d\omega$ , alors il existe  $\gamma \in \Lambda^1(V^*; \mathfrak{M}_{n,a})$  unique telle que quels que soient  $A, B \in \overset{1}{\otimes} V$  on ait

8.2.4  $- \langle A \wedge B, d\omega \rangle = \gamma(A)\omega(B) - \gamma(B)\omega(A)$

On appelle  $\gamma$  la *forme de Riemann-Christoffel* associée au champ de repères  $\omega$ .

### 8.3 FONDEMENT INTRINSÈQUE DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PAR SA STRUCTURE RIEMANNIENNE

Dans le cadre de la géométrie différentielle, les propriétés intrinsèques sont celles invariantes par difféomorphisme. Il est remarquable qu'il soit possible de caractériser, dans un cadre aussi général, la géométrie élémentaire. C'est l'objet de ce paragraphe.

#### *Champs de repères orthonormés*

Nous allons dans ce paragraphe, réunir les notions des paragraphes 8.1 et 8.2.

Soit  $V$  une variété riemannienne. On dira que  $\omega \in \Lambda^1(V^*; \mathbf{R}^n)$  définit un *champ de repères orthonormés* sur  $V$  si pour tout  $x \in V$ ,  $\omega_x$  est un isomorphisme d'espaces euclidiens entre  $T_x(V)$  muni de sa structure euclidienne naturelle et  $\mathbf{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique.

Si on définit un champ de repères sur  $V$  par un système de  $n$  champs de vecteurs  $A_1 \dots A_n \in \bigotimes^1 V$ , alors le champ de repères est orthonormé si et seulement si

$$\begin{aligned} (A_i | A_j) &= 0 & \text{si} & \quad i \neq j \\ &= 1 & \text{si} & \quad i = j \end{aligned}$$

Sur une variété riemannienne, tout point possède un voisinage sur lequel il existe une infinité de champs de repères orthonormés.

On a décrit comment on passe de l'un à l'autre à l'aide de

**PROPOSITION.** — *Soit  $V$  une variété riemannienne,  $\omega$  et  $\tilde{\omega}$  deux champs de repères orthonormés, alors il existe :*

$$f \in C(V; O(n))$$

tel que

$$8.3.1 \quad \tilde{\omega} = f \circ \omega$$

**PREUVE.** — Posons

$$f(x) = \tilde{\omega}_x \circ \omega_x^{-1}$$

alors  $f(x)$  est une application linéaire de  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  qui conserve la structure euclidienne de  $\mathbf{R}^n$  (en effet  $\omega_x^{-1}$  envoie cette dernière sur celle de  $T_x(V)$ , et  $\tilde{\omega}_x$  envoie celle de  $T_x(V)$  sur celle de  $\mathbf{R}^n$ ).

Par suite

$$f(x) \in O(n);$$

Comme

$$\tilde{\omega}_x = f(x) \circ \omega_x$$

on obtient 8.3.1.

Nous allons démontrer le résultat fondamental que des plongements euclidiens, dans le cas des dimensions égales, sont complètement caractérisés, à une équivalence près, par la structure riemannienne associée.

Précisément on a :

8.3.2 THÉORÈME FONDAMENTAL. — Soit  $V$  une variété abstraite de classe  $C^2$ , de dimension  $n$ ,  $h$  et  $\tilde{h}$  deux plongements de  $V$  dans un espace euclidien  $E$ , de dimension  $n$ . Soient  $g, \tilde{g}$  les structures riemanniennes sur  $V$  associées à ces plongements. Alors

$h$  est équivalent à  $\tilde{h}$

si et seulement si

$$g = \tilde{g}.$$

PREUVE. — La nécessité n'est autre que 8.1.6. Inversement supposons que  $g = \tilde{g}$ . Donnons-nous un champ de repères orthonormés sur  $V$  pour la structure riemannienne  $g$  (il le sera également pour  $\tilde{g}$ ). Donnons ce champ par  $A_1 \dots A_n \in \bigotimes^1 V$ . Notons par

$$\omega \in \Lambda^1(V^*; \mathbf{R}^n) \quad \text{la forme associée.}$$

Nous allons transporter par ce champ de repères sur  $V$  en un repère mobile sur  $E$  en posant

$$8.3.3 \quad \mathcal{R}_x = \{h(x), h'(x)(A_1)_x, \dots, h'(x)(A_n)_x\}$$

l'origine du repère  $\mathcal{R}_x$  est  $h(x)$ ,  $h'(x)(A_1)_x$  est le vecteur unitaire de son premier axe, etc...

L'hypothèse  $(A_i|A_j) = \delta_{i,j}$  donne que  $\mathcal{R}_x$  est un repère orthonormé de l'espace euclidien  $E$ .

On montrera que l'on passe de  $\mathcal{R}_x$  à  $\tilde{\mathcal{R}}_x$  par un déplacement en vérifiant qu'ils ont même forme de Darboux. On en déduira qu'il existe un déplacement  $\varphi$  tel que  $\varphi(\tilde{\mathcal{R}}_x) = \mathcal{R}_x$ .

En particulier on aura

$$\tilde{h}(x) = \varphi \circ h(x)$$

c'est-à-dire que  $h$  et  $\tilde{h}$  sont équivalents.

Notons par  $\pi = \dot{\pi} + \ddot{\pi}$  la forme de Darboux de

$$\mathcal{R}_x \quad \text{où} \quad \dot{\pi} \in \Lambda^1(V^*; \mathbf{R}^n), \quad \ddot{\pi} \in \Lambda^1(V^*; \mathcal{M}_{n,a})$$

8.3.4 LEMME. — On a avec les notations ci-dessus

$$\dot{\pi} = \omega.$$

PREUVE. — Plaçons nous en un point  $x_0 \in V$ , soit  $z \in T_{x_0}(V)$ , soit  $q(t)$  est un chemin tracé sur  $V$ , tel que  $q(0) = x_0$ ,  $q'(0) \cdot 1 = z$  alors on a utilisant 7.5.1

$$\pi_{x_0}(z) = \left[ \frac{d}{dt} (u_{\mathcal{R}_{x_0}} \circ u_{\mathcal{R}_{q(t)}}^{-1}) \right]_{t=0}$$

d'où, en projetant sur la première composante de  $\pi$ ,

$$\dot{\pi}_{x_0}(z) = \left[ \frac{d}{dt} u_{\mathcal{R}_{x_0}}(h(q(t))) \right]_{t=0}$$

d'où :

$$8.3.5 \quad \dot{\pi}_{x_0}(z) = u_{\mathcal{R}_{x_0}}(h'(x_0) \cdot z)$$

Écrivons  $z$  dans la base  $A_{x_0}^1, \dots, A_{x_0}^n$ , associée au champ de repère  $\mathcal{R}_{x_0}$ ; on a :

$$z = \sum_i \alpha_i A_{x_0}^i$$

Appliquons  $h'(x_0)$ , on obtient :

$$h'(x_0) \cdot z = \sum_i \alpha_i h'(x_0) \cdot A_{x_0}^i$$

Or d'après la définition de  $\mathcal{R}_{x_0}$ , on a :  $h'(x_0) \cdot A_{x_0}^i$  est le  $i$ -ème vecteur coordonnée de  $\mathcal{R}_{x_0}$ ; d'où :

$$u_{\mathcal{R}_{x_0}}(h'(x_0) \cdot z) = (\alpha_i)$$

D'après la définition de  $\omega$ , on a :

$$\omega_{x_0}(z) = (\alpha_i).$$

D'où

$$\dot{\pi}(z) = \omega_{x_0}(z)$$

et le lemme est démontré.

PREUVE DU THÉORÈME 8.3. — Notons par  $\pi$  (et  $\tilde{\pi}$ ) les deux formes et Darboux des repères mobiles  $\mathcal{R}_x$  définis en 8.3.3 (et  $\tilde{\mathcal{R}}_x$  défini par l'analogie de 8.3.3 où  $h$  a été remplacé par  $\tilde{h}$ ).

D'après le lemme 2.3 on obtient que

$$\dot{\pi} = \omega = \dot{\tilde{\pi}}$$

D'autre part en vertu des équations de structure 7.5.7 on a

$$\langle A \wedge B, d\dot{\pi} \rangle + \dot{\pi}(A)\dot{\pi}(B) - \dot{\pi}(B)\dot{\pi}(A) = 0$$

remplaçant  $\dot{\pi}$  par  $\omega$  on voit que  $\tilde{\pi}$  satisfait l'équation 8.2.4.

Comme il existe une solution *unique* de cette équation à savoir la forme de Riemann-Christoffel  $\gamma$  associé au champ de repères  $\omega$  on en déduit que

$$\tilde{\pi} = \gamma$$

De même

$$\dot{\tilde{\pi}} = \gamma$$

d'où

$$\pi = \tilde{\pi}$$

les deux repères mobiles  $\mathcal{R}_\omega$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_\omega$  sont équivalents, par suite les plongements  $h$  et  $\tilde{h}$ , ce qui démontre le théorème.

*Remarque.* La signification du théorème 8.3.2 est que toute la géométrie élémentaire est contenue dans l'oeuf dans la structure riemannienne de l'espace. On doit ainsi être capable de reconstruire à partir de cette structure tous les concepts de la géométrie élémentaire. Nous indiquerons la reconstruction de quelques-uns de ces concepts.

#### 8.4 DÉRIVATION COVARIANTE

Nous avons souvent utilisé le fait qu'étant donné un ouvert  $O$  d'un espace vectoriel  $E$ , il existe une identification canonique entre  $T_\omega(O)$  et  $E$ , définissant le parallélisme canonique sur un ouvert d'un espace vectoriel. Utilisant cette identification, un champ de vecteurs  $X$  sur  $O$  n'est rien autre qu'une fonction  $f$  définie sur  $O$  à valeurs dans  $E$ . Les opérations du calcul différentiel définies sur les fonctions s'étendent ainsi naturellement aux champs de vecteurs. Par exemple,

si  $A \in \overset{1}{\otimes} O$ , on peut associer au champ de vecteurs  $X$  le champ  $Y$

$$Y = \theta(A)f$$

On notera

$$Y = \nabla_A X.$$

Notons toujours par  $\mathcal{A}(O)$  l'algèbre des fonctions sur  $O$ ; on sait que la dérivée de Lie est  $\mathcal{A}(O)$ -linéaire sur les fonctions c'est-à-dire

$$\theta(kA)f = k\theta(A)f, \quad f, k \in \mathcal{A}(O)$$

Par suite

$$\nabla_{kA} X = k\nabla_A X, \quad k \in \mathcal{A}(O); A, X \in \overset{1}{\otimes} O$$

Cette dernière formule montre que  $\nabla_A$  est différent du crochet défini en II-3.3 (cf. II-3.3.5).

On appellera  $\nabla_A X$  la *dérivée covariante* de  $X$  suivant  $A$ .

Nous nous proposons d'étendre cette définition à une variété riemannienne arbitraire.

*Définition de la dérivée covariante sur une variété riemannienne.*

Soit  $V$  une variété riemannienne. Choisissons sur  $V$  un champ de repères orthonormés  $\omega \in \Lambda^1(V; \mathbb{R}^n)$ . Notons par  $\gamma \in \Lambda^1(V; \mathcal{A}_{n,a})$  la forme de Riemann-

Christoffel associée à  $\omega$ . Si  $A, X \in \overset{1}{\otimes} V$  posons par définition

$$(\nabla_A X)_x = \omega_x^{-1}(\theta(A)\omega(X) + \gamma(A)\omega(X))$$

ou encore de façon plus symétrique

8.4.1

$$\omega(\nabla_A X) = \theta(A)\omega(X) + \gamma(A)\omega(X)$$

Cette définition dépend à première vue du choix du champ de repères orthonormés  $\omega$ . Le théorème suivant montre qu'il n'en est rien.

8.4.2 THÉORÈME FONDAMENTAL. — Soit  $V$  une variété riemannienne de classe  $C^2$ , alors il existe un opérateur  $\nabla$  unique, tel que tout couple  $A, B \in \overset{1}{\otimes} V$ , de classe  $C^1$ , on associe  $\Delta_A B \in \overset{1}{\otimes} V$  de classe  $C^0$ . Cet opérateur ayant les propriétés suivantes

8.4.3  $\nabla_A B$  est linéaire en  $A$  et linéaire en  $B$ 8.4.4  $\nabla_A B$  est  $\mathfrak{A}(V)$ -linéaire en  $A$  c'est-à-dire

$$\nabla_{kA} B = k\nabla_A B \quad \text{si} \quad k \in \mathfrak{A}(V),$$

8.4.5  $\nabla_A(kB) = k\nabla_A B + (\theta(A)k)B$  où  $k \in \mathfrak{A}(V)$ 8.4.6  $\nabla_A B - \nabla_B A = [A, B]$ 8.4.7  $\theta(A)(B|C) = (\nabla_A B|C) + (B|\nabla_A C)$ 

PREUVE. — Démonstration de l'existence d'une telle opération.

Une telle opération ayant d'après 8.4.5 et 8.4.4 un caractère *local*, il suffit d'établir son existence dans un ouvert assez petit; nous choisissons cet ouvert tel que l'on puisse y définir un champ de repères orthonormés.

Nous définirons alors  $\nabla$  utilisant la formule 8.4.1.

Alors on a, en appliquant  $\omega$  au premier membre de 8.4.4 et en écrivant 8.4.1

$$\theta(kA)\omega(B) + \gamma(kA)\omega(B) = k\theta(A)\omega(B) + k\gamma(A)\omega(B)$$

d'où 8.4.4.

De même 8.4.5 s'écrit en transportant encore par  $\omega$

$$\theta(A)\omega(kB) + \gamma(A)\omega(kB) = (\theta(A)k)\omega(B) + k(\theta(A)\omega(B) + \gamma(A)\omega(B))$$

d'où 8.4.5.

De même on obtient en appliquant  $\omega$  au premier membre de 8.4.6

$$\theta(A)\omega(B) + \gamma(A)\omega(B) - \theta(B)\omega(A) - \gamma(B)\omega(A)$$

c'est-à-dire d'après 8.2.4

$$\theta(A)\omega(B) - \theta(B)\omega(A) - \langle A \wedge B, d\omega \rangle$$

Utilisons II-4.3.2 on obtient

$$= \langle [A, B], \omega \rangle$$

d'où 8.4.6.

Enfin puisque  $\omega$  est un champ de repères orthonormés on a

$$(B|C) = (\omega(B)|\omega(C))$$

d'où en appliquant  $\theta(A)$

$$\theta(A)(B|C) = (\theta(A)\omega(B)|\omega(C)) + (\omega(B)|\theta(A)\omega(C))$$

D'après l'antisymétrie de  $\gamma(A)$  on a

$$(\gamma(A)\omega(B)|\omega(C)) + (\omega(B)|\gamma(A)\omega(C)) = 0$$

en ajoutant cette équation à l'équation précédente on obtient 8.4.7 et l'existence de  $\nabla$  est démontrée.

*Démonstration de l'unicité*

Soit  $\tilde{\nabla}$  un autre opérateur satisfaisant les propriétés énoncées en 8.4.3 et 8.4.7.

Soit  $\omega$  un champ de repères orthonormés.

Notons par  $E^1 \dots E^n \in \bigotimes^1 V$  le système de champs de vecteurs orthonormés définis par  $\omega$ .

Si l'on écrit les *composantes* de  $\omega$  sous la forme

$$\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n)$$

alors on a

$$\omega^i(A) = (A|E^i)$$

Calculons

$$\langle A \wedge B, d\omega^i \rangle = \theta(A)\omega^i(B) - \theta(B)\omega^i(A) - \omega^i([A, B])$$

On a d'après 8.4.7

$$\theta(A)(B|E^i) = (\tilde{\nabla}_A B|E^i) + (B|\tilde{\nabla}_A E^i)$$

Comme

$$(\tilde{\nabla}_A B - \tilde{\nabla}_B A|E^i) = ([A, B]|E^i) = \omega^i([A, B])$$

On obtient

$$8.4.8 \quad \langle A \wedge B, d\omega^i \rangle = (\tilde{\nabla}_A E^i|B) - (\tilde{\nabla}_B E^i|A)$$

D'autre part la relation

$$(E^i|E^j) = \text{constante}$$

entraîne avec 8.4.7 que

$$(\tilde{\nabla}_A E^i|E^j) + (E^i|\tilde{\nabla}_A E^j) = 0$$

Posons

$$- \gamma_j^i(A) = (\tilde{\nabla}_A E^i | E^j)$$

Alors les  $\gamma_j^i(A)$  sont les coefficients d'une matrice antisymétrique  $\gamma(A)$ .

D'autre part l'application

$$A \rightarrow \gamma(A)$$

est, d'après 8.4.4,  $\mathfrak{A}_b(V)$ -linéaire, donc définit une forme différentielle  $\gamma \in \Lambda(V; \mathfrak{A}_{b_n, a})$ .

Donnons-nous  $A, B \in \bigotimes^1 V$ , écrivons

$$A = \sum \omega^i(A) E^i, \quad B = \sum \omega^i(B) E^i$$

et utilisons 8.4.8 on obtient

$$\begin{aligned} \langle A \wedge B, d\omega^i \rangle &= \sum_j [(\tilde{\nabla}_A E^i | E^j) \omega^j(B) - (\tilde{\nabla}_B E^i | E^j) \omega^j(A)] \\ &= - \sum_j [\gamma_j^i(A) \omega^j(B) - \gamma_j^i(B) \omega^j(A)] \end{aligned}$$

d'où en additionnant les composantes on obtient que 8.2.4 est satisfait c'est-à-dire

*$\gamma$  est la forme de Riemann-Christoffel du champ de repères  $\omega$ .*

Soit maintenant  $X \in \bigotimes^1 V$ , alors on a

$$X = \sum f_i E^i \quad \text{avec} \quad f_i = \omega^i(X)$$

Utilisons 8.4.5

$$\tilde{\nabla}_A X = \sum (\theta(A) f_i) E^i + \sum f_i (\tilde{\nabla}_A E^i)$$

On a

$$\tilde{\nabla}_A E^i = - \sum_j \gamma_j^i(A) E^j = \sum \gamma_i^j(A) E^j$$

d'où notant par  $e_1, \dots, e_n$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  on a

$$\begin{aligned} \omega(\sum f_i \tilde{\nabla}_A E^i) &= \sum \omega^i(X) \gamma_i^j(A) e^i \\ &= \gamma(A) \omega(X) \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\omega(\sum (\theta(A) f_i) E^i) = \sum (\theta(A) f_i) e_i = \theta(A) \omega(X),$$

d'où

$$\omega(\tilde{\nabla}_A X) = \theta(A) \omega(X) + \gamma(A) \omega(X)$$

C'est-à-dire que l'on retrouve la formule 8.4.1 et l'unicité est ainsi démontrée.

*Définition de la dérivée covariante*

On appelle dérivée covariante *l'opération unique*, donc intrinsèque, satisfaisant les conditions du théorème 8.4.2.

D'autre part la dérivée covariante peut être calculée, utilisant un champ de repère, par la formule 8.4.1. Ces deux aspects, soit axiomatique, soit celui de calculs explicites donne une grande souplesse.

Par exemple sur un ouvert d'un espace vectoriel la dérivée covariante peut être calculée en prenant un champ de repères  $\omega_0$  dont tous les vecteurs sont constants.

Alors  $d\omega_0 = 0$  d'où  $\gamma_0 = 0$  et on retrouve la définition élémentaire :

$$\omega_0(\nabla_A X) = \theta(A)\omega_0(X)$$

*Remarque.* La dérivation covariante permet de donner une nouvelle interprétation de la forme de Riemann-Christoffel.

Soit en effet  $\omega$  un champ de repères orthonormés définis par les champs de vecteurs  $E^1, \dots, E^n \in \bigotimes^1 V$ , soit  $\gamma$  la forme de Riemann-Christoffel associée à  $\omega$ . Alors on a

$$8.4.9 \quad \gamma(A) = (\omega(\nabla_A E^1), \omega(\nabla_A E^2), \dots, \omega(\nabla_A E^n))$$

où le second membre signifie l'écriture d'une matrice carrée d'ordre  $n$  à partir de ses  $n$  vecteurs colonnes.

La preuve est immédiate : on a en effet

$$\omega(E^i) = \text{constante}$$

d'où

$$\theta(A)\omega(E^i) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(\nabla_A E^i) = \gamma(A)E^i$$

On peut lire 8.4.9 en disant que  $\gamma(A)$  est la matrice des composantes des dérivés covariants des « vecteurs de base ». On retrouve ainsi dans le cas d'un repère mobile dans un espace euclidien la définition de  $\gamma$  à partir des dérivées des vecteurs de base (cf. 7.5.9).

## 8.5 COURBURE D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

LEMME FONDAMENTAL. — Soit  $V$  une variété riemannienne de classe  $C^3$ ,  $A, B, X \in \bigotimes^1 V$ , de classe  $C^2$ . Considérons le champ des vecteurs  $\Phi$  défini par

$$\Phi(A, B, X) = (\nabla_A \nabla_B - \nabla_B \nabla_A - \nabla_{[A, B]})X$$

Soit  $\omega$  un champ de repères orthonormés sur  $V$ ,  $\gamma$  sa forme de Riemann-Christoffel, alors on a

$$8.5.1 \quad \omega(\Phi(A, B, X)) = \langle A \wedge B, d\gamma + [\gamma, \gamma] \rangle \cdot \omega(X)$$

*Remarque.* 1° Dans cette formule,  $[\gamma, \gamma]$  dénote le crochet de la forme  $\gamma \in \Lambda^1(V; \mathfrak{M}_{n,a})$  où  $\mathfrak{M}_{n,a}$  est considéré comme l'algèbre de Lie de  $O(n)$ .

2° Un des intérêts de 8.5.1 est que le premier membre est intrinsèque alors qu'apparemment le second membre semble dépendre du choix du champ de repères  $\omega$ .

PREUVE. On a d'après 8.4.1

$$\begin{aligned}\omega(\nabla_{[A, B]}X) &= \theta([A, B])\omega(X) - \gamma([A, B])\omega(X) \\ &= (\theta(A)\theta(B) - \theta(B)\theta(A))\omega(X) - \gamma([A, B])\omega(X)\end{aligned}$$

De même

$$\omega(\nabla_A \nabla_B X) = \theta(A)\omega(\nabla_B X) - \gamma(A)\omega(\nabla_B X)$$

et en utilisant une nouvelle fois 8.4.1 on obtient

$$\begin{aligned}&= \theta(A)\theta(B)\omega(X) + \theta(A)(\gamma(B)\omega(X)) \\ &+ \gamma(A)\theta(B)\omega(X) + \gamma(A)\gamma(B)\omega(X)\end{aligned}$$

D'autre part utilisant la bilinéarité (ou bien le calcul sur les composantes), on montre que

$$\theta(A)(\gamma(B)\omega(X)) = (\theta(A)\gamma(B))\omega(X) + \gamma(B)(\theta(A)\omega(X))$$

d'où en regroupant les termes et en remarquant que les termes  $\theta([A, B])\omega(X)$ , et  $\gamma(B)(\theta(A)\omega(X))$  et  $\gamma(A)(\theta(B)\omega(X))$  se détruisent, on obtient

$$\begin{aligned}\omega(\Phi(A, B, X)) &= (-\gamma([A, B]) + \theta(A)\gamma(B) - \theta(B)\gamma(A) \\ &- \gamma(A)\gamma(B) + \gamma(B)\gamma(A))\omega(X)\end{aligned}$$

Utilisant alors II-4.3.2 on reconnaît dans les trois premiers termes  $\langle A \wedge B, d\gamma \rangle$  et le lemme est démontré.

*Définition de la courbure*

Notons par  $F = T_{x_0}(V)$ , muni de sa *structure euclidienne*. Posons

$$H_{x_0} = \{A \in \mathcal{L}(F; F) \mid (Ax|y) + (x|Ay) = 0\}$$

Nous définirons une application

$$\mathcal{C}_{x_0} \in \mathcal{L}_{2, a}(T_{x_0}(V); H_{x_0})$$

en posant si  $z_1, z_2, z_3 \in T_{x_0}(V)$

$$8.5.2 \quad \mathcal{C}_{x_0}(z_1, z_2) \cdot z_3 = \Phi(A^1, A^2, A^3)$$

où les  $A^i \in \overset{1}{\otimes} V$  et vérifient  $A_{x_0}^i = z_i$  et où  $\Phi$  a été défini en 8.5.1.

En regardant le second membre de 8.5.1 on voit que  $\Phi$  est  $\mathcal{A}(V)$ -linéaire, par suite la valeur de  $\mathcal{C}_{x_0}$  sera indépendant du choix des champs  $A^i$  et ne dépendront que des  $z_i$ .

D'autre part en regardant encore le second membre de 8.5.1,  $\mathcal{C}_{x_0}(z_1, z_2)$  s'écrit dans un repère orthonormé suivant une matrice antisymétrique d'où  $\mathcal{C}_{x_0}(z_1, z_2) \in H_{x_0}$ .

DÉFINITION. — On appelle l'opérateur  $\mathcal{C}_{x_0}$  la courbure de  $V$  en  $x_0$ .

*Variétés riemanniennes localement euclidiennes*

Étant donné une variété riemannienne  $V$ , nous dirons que  $V$  est localement euclidienne si pour tout  $x_0 \in V$  on peut trouver un voisinage ouvert de  $x_0$ , soit  $\tilde{V}$ , et un plongement  $f$  de  $\tilde{V}$  dans un espace euclidien de même dimension de telle sorte que ce plongement induise sur  $\tilde{V}$  la même structure riemannienne que celle obtenue en restreignant à  $\tilde{V}$  celle de  $V$ .

On a alors

8.5.3 THÉORÈME. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété riemannienne  $V$  soit localement euclidienne est que pour tout  $x \in V$ , la courbure en  $x$ , soit  $\mathcal{C}_x$ , soit nulle.

PREUVE. Nécessité. — Donnons-nous  $x_0 \in V$ , soit  $f$  un prolongement euclidien de  $\tilde{V}$ , soit  $E$  l'espace euclidien d'arrivée de  $f$ ,  $\tilde{\omega}_0$  le parallélisme canonique sur  $E$ . Prenons comme champ de repères sur  $\tilde{V}$   $\omega_0$  défini par

$$\omega_0 = f^* \tilde{\omega}_0$$

Alors

$$d\omega_0 = f^* d\tilde{\omega}_0 = 0$$

d'où

$$\gamma_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{C}_{x_0} = 0$$

Réciproquement si  $\mathcal{C}_x = 0$ , alors la forme de Riemann-Christoffel d'un champ de repères orthonormés vérifié d'après 8.5.1

$$8.5.4 \quad d\gamma + [\gamma, \gamma] = 0$$

Soit

$$\pi \in \Lambda^1(V; \mathfrak{D}_n)$$

défini par

$$\pi = \dot{\pi} + \ddot{\pi} \quad \text{avec} \quad \dot{\pi} = \omega, \quad \ddot{\pi} = \gamma$$

Alors on a en vertu de 8.2.4 et 8.5.4

$$d\pi + [\pi, \pi] = 0$$

Ainsi  $\pi$  satisfait l'équation de structure de Darboux; donc, étant donné  $x_0 \in V$ , définit une application d'un ouvert  $\tilde{V}$  de  $V$  assez petit contenant  $x_0$  dans  $D(n)$ , c'est-à-dire un repère mobile dans un espace euclidien  $E$ , soit  $\mathcal{R}_x$ ,  $x \in V$ . D'après la définition de  $\pi$  on a

$$\dot{\pi} = \omega$$

Notons par  $f(x)$  l'origine du repère  $\mathcal{R}_x$  on a d'après 8.3.4

$$8.5.5 \quad \omega = u_{\mathcal{R}_{x_0}} \circ (df)_{x_0}$$

Soit  $A^1, \dots, A^n \in \bigotimes^1 V$  les  $n$  champs de vecteurs constituant la base de  $\omega$ .

Alors on a par définition

$$\omega_{x_0}(A_{x_0}^i) = \tilde{e}_i$$

où  $e_i$  est la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  et où d'après 8.5.5

$$f'(x_0) \cdot A_{x_0}^i = e_{x_0}^i$$

$e_{x_0}^i$  étant le  $i$ -ème vecteur de base du repère  $\mathcal{R}_{x_0}$ .

Ainsi  $f'(x_0)$  envoie un repère orthonormé de  $T_{x_0}(V)$  sur un repère orthonormé de  $E$ , c'est-à-dire l'image réciproque de la structure riemannienne sur  $E$  est égale à celle sur  $V$  et le théorème est démontré.

**8.5.6 Remarque.** Sur une variété riemannienne de dimension 2 la courbure  $\mathcal{C}_{x_0}$  peut être donnée par un nombre réel.

En effet :

Soit  $F = T_{x_0}(V)$ , alors  $\dim F = 2$  et

$$\mathcal{C}_{x_0} \in \mathcal{L}_{2,a}(F; H_{x_0})$$

Remarquons que

$$\dim(H_{x_0}) = 1,$$

En effet une matrice antisymétrique d'ordre 2 est donnée par un seul de ses coefficients non diagonaux.

D'autre part

$$\dim(F \wedge F) = 1$$

Choisissons une orientation sur  $F$ , alors  $F \wedge F$  possède une base canonique à savoir  $e_1 \wedge e_2$  où  $e_1, e_2$  est une base orthonormée *directe*.

D'autre part  $H_{x_0}$  possède une base à savoir la matrice exprimant la rotation amenant  $e_1$  sur  $e_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi par le choix d'une orientation sur  $F$ ,  $\mathcal{F}(F \wedge F; H_{x_0})$  s'identifie à  $\mathcal{L}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$  c'est-à-dire à  $\mathbf{R}$ .

En changeant l'orientation de  $F$  on multiplie par  $-1$  les bases de  $F \wedge F$  et de  $H_{x_0}$  d'où l'on ne modifie pas l'identification précédente et le résultat est démontré.

## 8.6 PLONGEMENTS RIEMANNIENS

Soit  $V$  une variété de dimension  $n$ ,  $f$  un plongement de  $V$  dans une variété riemannienne  $W$  de dimension  $n'$ . Nous nous intéressons au cas dans ce paragraphe où  $n < n'$ .

Le plongement définit une structure riemannienne sur  $V$  par suite une dérivation covariante. D'autre part nous verrons que  $f(V)$  peut être muni d'une

dérivation covariante en *restreignant* celle de  $W$ . L'outil essentiel de notre étude consistera à comparer ces deux dérivations covariantes.

### 8.6.1 Restriction de la dérivation covariante à une sous-variété

Soit  $W$  une variété riemannienne,  $H$  une sous-variété de  $W$ . Notons par  $\nabla$  la dérivation covariante définie sur  $W$ .

Notons par  $\overset{1}{\otimes} H$  les champs de vecteurs sur  $H$ , par  $S(H; T(W))$  l'ensemble des applications

$$\varphi : H \rightarrow T(W)$$

telle que, quel que soit  $x$ ,  $\varphi(x) \in T_x(W)$ .

Remarquons que si  $Y \in \overset{1}{\otimes} W$ , alors en *restreignant*  $Y$  à  $H$  on obtient un élément de  $S(H; T(W))$ .

PROPOSITION. — On peut définir une opération  $\tilde{\nabla}$  qui à tout  $A \in \overset{1}{\otimes} H$ ,  $X \in S(H; T(W))$  associe  $\tilde{\nabla}_A X$  vérifiant :

$$\tilde{\nabla}_A X \in S(H; T(W))$$

8.6.1.1  $\tilde{\nabla}_A$  ayant les propriétés énumérées en 8.4.3, 8.4.4, 8.4.5, 8.4.7.

D'autre part, soit  $\tilde{A} \in \overset{1}{\otimes} W$ ,  $\tilde{A}$  étant tangent à  $H$ , et soit  $\tilde{X} \in \overset{1}{\otimes} W$ , notons par  $A, X$  les restrictions de  $\tilde{A}, \tilde{X}$  à  $H$ , alors on a

8.6.1.2 restriction à  $H$  de  $\nabla_{\tilde{A}} \tilde{X} = \tilde{\nabla}_A X$ .

PREUVE. — Soit  $\omega$  un champ de repères sur  $W$ , on pose

$$\omega_x((\nabla_A X)_x) = (\theta(A)\omega(X))_x + \gamma_x(A_x)\omega_x(X_x)$$

Montrons que le premier terme a un sens :

$\omega_x(X_x) = f(x)$  est une fonction définie sur  $H$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  et  $A$  est un champ de vecteurs défini sur  $H$ . Ainsi  $\tilde{\nabla}$  est définie.

Les vérifications de 8.4.3, 8.4.4, 8.4.5 et 8.4.7 se font immédiatement suivant la méthode utilisée en 8.4.2. C.Q.F.D.

### Dérivation covariante induite et restreinte

Soit  $V$  une variété,  $W$  une variété riemannienne,  $g$  son tenseur métrique,  $f$  un plongement de  $V$  dans  $W$ ,  $H$  l'image de  $V$ ,  $i$  l'injection canonique de  $H$  dans  $W$ .

Alors  $H$  est muni d'une structure de variété riemannienne à savoir celle définie par  $i^*g$ .

Par suite sur  $H$  est définie une dérivation covariante  $\nabla$  appelée *induite*.

D'autre part la dérivation covariante sur  $W$  définie par restriction (cf. 8.6.1) une dérivation covariante  $\tilde{\nabla}$  sur  $H$  appelée *restreinte*.

Pour tout  $x_0 \in H$

notons par  $p_{x_0}$  la projection orthogonale de  $T_{x_0}(W)$  sur  $T_{x_0}(H)$ ,

$q_{x_0}$  la projection de  $T_{x_0}(W)$  sur  $(T_{x_0}(H))^\perp$

où l'on note par  $(T_{x_0}(H))^\perp$  l'orthogonal de  $T_{x_0}(H)$  dans  $T_{x_0}(V)$ .

THÉORÈME. — *Les notations étant celles définies, soit  $A, B \in \overset{1}{\otimes} H$ , alors*

$$8.6.2.1 \quad p(\tilde{\nabla}_A B) = \nabla_A B$$

*D'autre part il existe pour tout  $x \in H$*

$$r_x \in \mathcal{L}_{2,s}(T_x(H); (T_x(H))^\perp)$$

*telle que*

$$8.6.2 \quad r_x(A_x, B_x) = q_x(\tilde{\nabla}_A B)_x \quad \text{pour tout} \quad A, B \in \overset{1}{\otimes} H.$$

PREUVE. — Posons

$$(\hat{\nabla}_A X)_x = p_x(\nabla_A X)_x \quad \text{où} \quad A, X \in \overset{1}{\otimes} H.$$

Nous allons montrer que  $\hat{\nabla}$  satisfait les propriétés 8.4.3 à 8.4.7 qui *caractérisent* la dérivation covariante sur  $H$ .

Seules 8.4.6 et 8.4.7 ne sont pas immédiatement évidentes.

Soient  $\tilde{A}, \tilde{B}$  deux extensions de  $A$  et  $B$  à tout  $W$ , alors on a en vertu de 8.6.1.2

$$(\nabla_{\tilde{A}} \tilde{B})_x = (\tilde{\nabla}_A B)_x \quad x \in H$$

où  $\nabla$  dans le premier membre désigne la *dérivation covariante sur  $W$* ; cette dérivation satisfait 8.4.7 d'où

$$\nabla_{\tilde{A}} \tilde{B} - \nabla_{\tilde{B}} \tilde{A} = [\tilde{A}, \tilde{B}]$$

D'autre part on a

$$[\tilde{A}, \tilde{B}]_x = [A, B]_x \quad \text{si} \quad x \in H$$

(En effet  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  étant tangents à  $H$ , alors les groupes à un paramètre engendré par  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  laissent  $H$  globalement invariant.)

En conclusion, on obtient sur  $H$  les égalités suivantes

$$\hat{\nabla}_A B - \hat{\nabla}_B A = \nabla_{\tilde{A}} \tilde{B} - \nabla_{\tilde{B}} \tilde{A} = [\tilde{A}, \tilde{B}] = [A, B]$$

et 8.4.6 est établi.

En ce qui concerne 8.4.7 on a d'après 8.6.11

$$\theta(A)(B|C) = (\tilde{\nabla}_A B|C) + (B|\tilde{\nabla}_A C), \quad C, B, A \in \overset{1}{\otimes} H;$$

comme  $C \in T_x(H)$

$$((\tilde{\nabla}_A B)_x | C_x) = (p_x \cdot (\tilde{\nabla}_A B)_x | C_x)$$

d'où

$$= (\hat{\nabla}_A B | C)$$

et 8.4.7 est établi. Il résulte du théorème 8.4.2 que  $\hat{\nabla}_A B$  est la dérivation covariante sur  $H$  et 8.6.2.1 est établi.

Pour montrer 8.6.2.2 nous posons

$$\Phi_x(A, B) = q_x \cdot (\tilde{\nabla}_A B)_x \quad \text{où} \quad A, B \in \bigotimes^1 H$$

Remarquons que, d'après 8.4.3,  $\Phi_x$  est  $\mathfrak{A}(V)$ -linéaire en  $A$ . De plus on a

$$\Phi_x(A, B) - \Phi_x(B, A) = q_x \cdot (\tilde{\nabla}_A B - \tilde{\nabla}_B A)_x$$

et utilisant 8.6.1.1

$$= q_x \cdot [A, B]_x$$

mais  $[A, B]_x \in \bigotimes^1 H$  d'où sa projection  $q_x$  est nulle.

C'est-à-dire que  $\Phi_x$  est *symétrique* et par suite est  $\mathfrak{A}(V)$ -linéaire en  $B$ ; donc utilisant II-4.2, 8.6.2 est démontré.

## 8.7 THÉORIE DES HYPERSURFACES

On se propose de *caractériser*, à un déplacement près, le *plongement* d'une variété  $V$  de dimension  $n$  dans un espace euclidien  $E$  de dimension  $n'$ . Pour faciliter l'exposé nous nous limiterons au cas où  $n' = n + 1$ . On appelle alors l'image de  $V$  une *hypersurface* de  $E$ .

Nous associons à un plongement deux tenseurs covariant d'ordre 2.

Le premier tenseur, appelé *tenseur métrique* sera le tenseur  $g$  définissant la structure riemannienne image réciproque par  $f$  de celle associée à la structure euclidienne de  $E$  (cf. 8.1.6). Alors  $g \in \bigotimes_{2,s} V$ .

D'autre part, avec les notations de 8.6.2, on a, si  $H = f(V)$ ,

$$\text{dimension } (T_x(H))^\perp = n' - n = 1$$

Comme  $T_x(H)$  est un espace euclidien, il possède une base canonique  $e_x^{n+1}$  définie à un signe près.

Pour lever cette ambiguïté on procède ainsi.

On *choisit* un champ de repères orthonormés sur  $V$ ; on le transporte en posant

$$8.7.1 \quad e_x^k = f'(x) \cdot E_x^k \quad 1 \leq k \leq n$$

et on *choisit*  $e_x^{n+1}$  de telle sorte que le repère  $e_x^1, \dots, e_x^{n+1}$ , garde la même orientation et que  $\|e_x^{n+1}\| = 1$ . Cette construction est indépendante du choix du champ de repère  $E_x^1, \dots, E_x^n$ , mais ne dépend que de l'*orientation* dudit champ de repères, c'est-à-dire ne dépend que du choix d'une *orientation* sur  $V$  et du choix d'une

orientation sur  $E$ . (Le choix d'une orientation sur  $V$  ne pourra en général qu'être effectué *localement*.)

Ce choix étant fait, on pose

$$8.7.2 \quad r_x(A_x, B_x) = \hat{l}_x(A_x, B_x) e_x^{n+1}$$

où  $r$  a été défini en 8.6.2.2. Alors  $\hat{l}_x$  est une forme bilinéaire *symétrique* sur  $T_x(H)$  donc  $\hat{l} \in \bigotimes_{2,s} H$ .

On remonte  $\hat{l}$  sur  $V$  par l'image réciproque et on pose  $l = f^* \hat{l}$ .

Alors  $l \in \bigotimes_{2,s} V$ ; on appelle  $l$  le *tenseur de courbure* du plongement  $f$ .

Il est complètement déterminé par  $f$  dès que l'on a choisi les orientations de  $V$  et  $E$ .

On a alors :

8.7.3 THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété de dimension  $n$ , connexe, orientée.

Soit  $f$  et  $\tilde{f}$  deux plongements de  $V$  dans un espace euclidien orienté  $E$ , de dimension  $n + 1$ , alors il existe un déplacement direct  $d \in D(E)$  tel que  $\tilde{f} = d \circ f$  si et seulement si  $f$  et  $\tilde{f}$  ont même tenseur métrique et même tenseur de courbure.

PREUVE. — La nécessité est évidente d'après 8.1.6 et du fait que 8.6.2 est invariant par déplacement.

Pour montrer que la condition est suffisante, choisissons  $\omega \in \Lambda^1(V; \mathbb{R}^n)$ , définissons sur  $V$  un champ de repères direct, orthonormé, soit  $E^1 \dots E^n \in \bigotimes_1 V$  les champs de vecteurs associés à  $\omega$ . Associons à  $\omega$  le repère mobile  $\mathcal{R}_x$  sur  $E$  défini ainsi :

$\mathcal{R}_x$  a pour origine  $f(x)$ , pour vecteurs de base  $e_x^1 \dots e_x^{n+1}$  où les  $e_x^k$  ont été définis en 8.7.1.

De même  $\tilde{f}$  définit à partir de  $\omega$ , par les mêmes formules, un repère mobile  $\tilde{\mathcal{R}}_x$ .

L'équivalence de  $f$  et  $\tilde{f}$  résultera alors de l'équivalence des repères mobiles  $\mathcal{R}_x$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_x$ . La variété  $V$  étant connexe cette équivalence sera d'après 7.5.6 une conséquence de l'identité des deux formes de Darboux associées à  $\mathcal{R}_x$  et à  $\tilde{\mathcal{R}}_x$ .

Ceci sera acquis si nous montrons que la forme de Darboux  $\pi$  de  $\mathcal{R}_x$  se calcule *uniquement* en termes des deux tenseurs  $l$  et  $g$  et du champ des repères donné  $\omega$ .

Soit

$$\pi^i, \quad \pi_k^i$$

les composantes de la forme de Darboux de  $\mathcal{R}_x$ .

De même soit

$$\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n)$$

les composantes du champ de repères sur  $V$ .

Alors on a

$$\begin{aligned}\pi^i &= \omega^i \quad 1 \leq i \leq n \\ \pi^{n+1} &= 0\end{aligned}$$

D'autre part

$$\pi_k^i = (de^i | e^k)$$

On a, si  $\tilde{\nabla}$  dénote la dérivation covariante sur  $E$ ,  $\nabla$  dénotant la dérivation covariante sur  $V$  et si  $A \in \bigotimes^1 V$ ,  $f_* A = \bar{A} \in \bigotimes^1 H$ ,  $\pi_k^i(A) = (\hat{\nabla}_{\bar{A}} e^i | e^k)$

Si  $i \leq n$ ,  $k \leq n$  nous utilisons 8.6.2.1 et obtenons

$$\pi_k^i(A) = (\nabla_A E^i | E^k) \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq n$$

La dérivation covariante  $\nabla_A$  ne dépend que de  $g$ , et ainsi on a obtenu une expression des  $\pi_k^i$  indépendante de  $f$ , sauf dans le cas où  $i = n + 1$  ou bien où  $k = n + 1$ . Remarquons d'abord que, en vertu de l'antisymétrie des  $\pi_j^i$  on a

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}^{n+1} &= 0 \\ \pi_i^{n+1} &= -\pi_{n+1}^i\end{aligned}$$

Il reste donc à calculer

$$\pi_{n+1}^i(A) = (\tilde{\nabla}_{\bar{A}} e^i | e^{n+1})$$

Utilisons 8.6.2.2 on obtient

$$\pi_{n+1}^i(A) = l(\bar{A}, e^{n+1})$$

et le théorème est démontré.

*Remarques.* 1° Si on s'intéresse à des hypersurfaces non orientées la critère d'équivalence s'écrira  $l = \pm \tilde{l}$ .

2° *Définition des formes quadratiques :*

Une forme bilinéaire symétrique est complètement déterminée par sa forme quadratique associée

$$q_2(A) = l(A, A)$$

(En effet  $4l(A, B) = q_2(A + B) - q_2(A - B)$ .)

On appelle *première forme quadratique fondamentale* (ou forme métrique) de l'hypersurface la forme  $g(A, A) = q_1(A)$ , la forme  $q_2(A)$  est appelée *deuxième forme quadratique fondamentale* (ou forme de courbure).

Alors le théorème 8.7.3 se lit que deux plongements sont équivalents si et seulement si les deux formes quadratiques fondamentales sont égales.



## Exercices III<sup>e</sup> partie

1<sup>o</sup> Un groupe de Lie  $G$  c'est la donnée d'une structure de variété différentiable sur  $G$  ainsi que d'une structure de groupe (sur  $G$ ) définie par la loi  $G \times G \xrightarrow{\varphi} G$  ces deux données étant reliées par la condition de compatibilité suivante :

- i)  $\varphi$  est différentiable;
- ii) l'application « inverse »  $x \xrightarrow{\psi} x^{-1}$  est différentiable.

Ces conditions de compatibilité sont surabondantes au sens suivant :

$G$  étant muni d'une structure de variété différentiable et d'une loi de groupe  $\varphi$  de telle sorte que  $\varphi$  est différentiable montrer que ceci entraîne que  $\psi$  est différentiable donc  $G$  est un groupe de Lie.

(Montrer initialement qu'il suffit de démontrer que  $\psi$  est différentiable en un voisinage de l'origine  $e \in G$  pour en conclure qu'elle est partout différentiable. Ensuite regarder qu'est-ce que les hypothèses entraînent pour les translations à gauche et à droite et utiliser finalement le théorème des fonctions implicites.)

2<sup>o</sup> Soient  $G$  et  $H$  deux groupes de Lie et  $\varphi : G \rightarrow H$  un homomorphisme de groupes de Lie (c'est-à-dire un homomorphisme de groupes et une application différentiable). Soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{H}$  les algèbres de Lie correspondantes et  $\varphi' : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$  l'homomorphisme d'algèbres de Lie induit par  $\varphi$ . Montrer que si  $\varphi$  est injectif il en est de même de  $\varphi'$ . Si  $G$  est connexe (pour la topologie sous-jacente) et  $\varphi$  surjectif alors  $\varphi'$  est surjectif. Donner des contre exemples pour montrer que des conditions d'injectivité et surjectivité pour  $\varphi'$  n'entraînent pas des conditions analogues pour  $\varphi$ .

3<sup>o</sup> CHAMPS DE VECTEURS INVARIANTS A DROITE

$G$  étant un groupe de Lie, l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  de  $G$  est l'ensemble des champs invariants à gauche de  $G$  muni du crochet usuel de champs de vecteurs. Indiquons par  $\mathcal{R}$  l'ensemble des champs de vecteurs invariants à droite de  $G$ . Montrer que

une combinaison linéaire à coefficients réels de deux champs invariants à droite ainsi que le crochet de deux tels champs et encore un champ invariant à droite. Montrer que pour tout vecteur  $v \in T_e G =$  espace tangent à l'origine de  $G$ , il existe un champ invariant à droite unique  $\theta$  tel que le vecteur induit au point  $e$   $\theta_e = v$ . Montrer que l'application  $v \rightarrow \theta$  est un isomorphisme linéaire. Il reste maintenant à établir des liens  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{H}$ . Pour ceci considérer l'application  $x \in G \xrightarrow{\psi} x^{-1} \in G$  qui est un difféomorphisme. Montrer que si  $X$  est un élément de  $\mathcal{C}$  alors  $\psi_* X \in \mathcal{H}$  et si  $\theta \in \mathcal{H}$  alors  $\psi_* \theta \in \mathcal{C}$ . Montrer que l'application  $\mathcal{C} \xrightarrow{\psi_*} \mathcal{H}$  ainsi obtenue est un isomorphisme d'algèbres de Lie pour les structures vectorielles et les crochets correspondants de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{H}$ . A l'aide de l'application exponentielle montrer que si  $X \in \mathcal{C}$ ,  $\psi_* X = \theta$ ,  $v = X_e$  et  $w \in \theta_e$ , où  $e \in G$  est l'origine, alors  $w = -v$ . Les applications  $X \in \mathcal{C} \rightarrow X_e \in T_e G$  et  $\theta \in \mathcal{H} \rightarrow \theta_e \in T_e G$  étant des isomorphismes linéaires elles définissent deux structures d'algèbre de Lie sur  $T_e(G)$  à savoir l'une par transport de la structure de  $\mathcal{C}$  et l'autre par transport de celle de  $\mathcal{H}$ . Nous indiquons le crochet pour la première structure de  $T_e G$  par  $[ , ]_l$  et le deuxième par  $[ , ]_d$ . A l'aide du résultat précédent ( $w = -v$ ) et à l'aide de  $\psi_*$  montrer que ces deux crochets sont opposés l'un de l'autre, c'est-à-dire

$$[v, v']_l = [v', v]_d \quad v, v' \in T_e(G).$$

#### 4° DÉVELOPPEMENTS TAYLORIENS ET CONSTANTES DE STRUCTURE

a) Soient  $G$  un groupe de Lie de dimension  $n$  sur  $R$ ,  $g$  son algèbre de Lie,  $e$  son élément unité.

A tout vecteur  $X \in g$ , on fait correspondre le champ invariant à gauche,

$\tilde{X} \in \overset{1}{\otimes} G$ , tel que  $\tilde{X}_e = X$ .

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  une base de  $\mathcal{C}$ , et  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$  les  $n$  champs invariants à gauche correspondants.

On pose :

$$[\tilde{X}_i, X_j] = \sum_{k=0}^n c_{ij}^k \tilde{X}_k,$$

ce qui définit les  $c_{ij}^k$  comme applications  $C^\infty$  de  $G$  dans  $R$ .

i) Montrer que ces applications sont constantes et qu'elles vérifient les relations :

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^n c_{ij}^l c_{kl}^m + c_{jk}^l c_{il}^m + c_{ki}^l c_{jl}^m = 0.$$

b) Soient  $X$  et  $Y$  deux éléments de  $\mathcal{C}$ , soit  $f$  une application  $C^\infty$  de  $G$  dans  $R$ , telle que  $f(e) = 0$ .

i) On considère l'application :  $(t, s) \rightarrow f(\text{Exp } tX \text{ Exp } sY)$ , définie sur  $I \times I$ , voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^2$ , et à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . Calculer ses dérivées partielles premières et secondes au point  $(0, 0)$ .

Écrire le développement de Taylor au voisinage de 0, à l'ordre 2 de l'application :  $t \rightarrow f(\text{Exp } tX \text{ Exp } tY)$ , de  $I \subset \mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .

ii) En remarquant que :

$$\text{Exp } tX \text{ Exp } tY = \text{Exp } Z(t),$$

où  $Z(t) \in g$ , et en utilisant le développement de  $Z(t)$  au voisinage de 0, (on pourra écrire :  $Z(t) = tZ_1 + t^2Z_2 + t^2\alpha(t)$ ), déterminer en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$  le développement de Taylor au voisinage de 0 et à l'ordre 2 de la fonction :  $t \rightarrow f(\text{Exp } tX \text{ Exp } tY)$ .

iii) En déduire la relation :

$$\text{Exp } tX \text{ Exp } tY = \text{Exp} \left( t(X + Y) + \frac{t^2}{2!} [X, Y] + o(t^2) \right), \quad \text{où } o(t^2)$$

désigne un élément de  $g$ , avec  $o(t^2)/t^2 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$ .

iv) Démontrer les relations :

$$\begin{aligned} \text{Exp}(-tX) \text{Exp}(-tY) \text{Exp } tX \text{Exp } tY &= \text{Exp}(t^2[X, Y] + o'(t^2)) \\ \text{Exp } tX \text{Exp } tY \text{Exp}(-tX) &= \text{Exp}(tY + t^2[X, Y] + o''(t^2)). \end{aligned}$$

c) Soit  $(\varphi, \Omega)$  une carte locale de  $G$  définie sur  $\Omega$  voisinage de  $e$ , à valeurs dans un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , et telle que  $\varphi(e) = 0$ .

Soient  $x$  et  $y \in \Omega$ , tels que  $p = xy \in \Omega$ .

On désigne par  $\varphi^i(x)$  la  $i$ -ème coordonnée de  $\varphi(x)$  dans  $\mathbf{R}^n$ .

i) En posant  $\psi^i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = p^i$ , et en utilisant le développement de Taylor de cette fonction au voisinage de l'origine démontrer la relation :

$$p^i = x^i + y^i + \sum_{jk} a_{jk}^i x^j y^k + \varepsilon^i, \quad \text{où } a_{jk}^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial x_j \partial y_k}(0, \dots, 0)$$

et

$$\frac{\varepsilon^i}{\sum (x^j)^2 + (y^j)^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } x^i \text{ et } y^i \rightarrow 0$$

ii) On pose :

$$q = x^{-1}y^{-1}xy \quad \text{et} \quad q^i = \eta^i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n).$$

Écrire le développement de Taylor de  $\eta^i$ , au voisinage de l'origine, au deuxième ordre, en fonction des  $a_{jk}^i$ ?

iii) En utilisant  $b$  iv), trouver la relation qui existe entre les coefficients  $a_{ij}^k$  et les coefficients  $c_{ij}^k$  définis dans  $a$ .

5° QUATERNIONS ET ROTATIONS DE  $\mathbf{R}^3$ 

Soit  $Q$  un espace vectoriel de dimension quatre sur  $\mathbf{R}$  de base  $e_0, e_1, e_2, e_3$ . On munit  $Q$  du produit distributif par rapport à l'addition donnée par la table de multiplication

$$\begin{cases} e_0 e_i = e_i e_0 = e_i \\ e_i^2 = -e_0 \\ e_i e_j = -e_j e_i = e_k, \quad i, j, k \text{ permutation de } 1, 2, 3 \end{cases}$$

$Q$  est alors une algèbre associative à élément unité. On notera désormais un élément  $q$  de  $Q$  sous la forme

$$q = xi + yj + zk + t \quad x, y, z, t \in \mathbf{R}. \quad \text{Calculer } q_1 q_2.$$

On pose  $q^* = -(xi + yj + zk) + t$ , calculer  $qq^*$ . En déduire que  $Q$  est un corps (corps des quaternions).

Montrer que pour la multiplication  $Q - \{0\}$  en un groupe de Lie  $G$ .

a) Montrer que l'Algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  de  $G$  contient une sous-algèbre isomorphe à l'espace  $\mathbf{R}^3$  muni du produit vectoriel. En déduire que le groupe de Lie des quaternions contient un sous-groupe isomorphe au groupe des rotations de l'espace Euclidien à trois dimensions.

b) Montrer que l'ensemble  $H$  des quaternions de norme unité (i.e.  $qq^* = 1$ ) est un groupe pour la multiplication.  $H$  est un sous-groupe du groupe de Lie  $G$  de dimension 3. Considérons l'espace vectoriel  $K \subset Q$  des quaternions tels que  $t = 0$ . Montrer que si  $\xi \in K$  et  $h \in H$ ,  $h\xi h^{-1} \in K$  et que  $\xi$  et  $h\xi h^{-1}$  ont même norme.

A tout  $h \in H$  on associe ainsi une rotation  $R_h$  de  $K$  telle que  $R_h(\xi) = h\xi h^{-1}$ . Montrer qu'on obtient ainsi toutes les rotations de  $K$  et que  $R_h$  est l'identité si et seulement si  $h = \pm 1$ . En déduire que le groupe des rotations de l'espace Euclidien à 3 dimensions est isomorphe au groupe quotient  $H/Z$  ou  $Z$  est le groupe à deux éléments  $\pm 1$ .

## 6° LE GROUPE LINÉAIRE COMPLEXE

$C^n$  est muni du produit hermitien  $(x, y) = \sum_1^n x_i \bar{y}_i$ . Les endomorphismes de l'espace vectoriel complexe  $C^n$  forment l'algèbre  $M(n)$  des matrices d'ordre  $n$  à coefficients complexes; soit  $GL(n)$  l'ouvert des éléments inversibles (i.e. des matrices de déterminant non nul). On pose  $M^* = {}^t \bar{M}$ , qu'on peut aussi définir par  $(Mx, y) = (x, M^*y)$ . Les parties de  $M(n)$  sont munies de la topologie induite par la topologie naturelle de  $M(n)$ .  $I$  est la matrice unité.

a) *Matrices hermitiennes d'ordre  $n$* :  $H = H^*$

Soit  $H(n)$  l'ensemble des matrices hermitiennes de  $M(n)$ . On rappelle que si  $H$  est hermitienne, il existe une base orthonormale de vecteurs propres, c'est-

à-dire que  $H$  se diagonalise par une matrice unitaire, ses valeurs propres étant réelles.

Montrer que  $H(n)$  est un espace vectoriel; quelle est sa dimension sur  $\mathbf{C}$ , sur  $\mathbf{R}$ .

$H^+(n)$  désigne les matrices hermitiennes  $P$  définies positives :  $P = P^*$  et, si  $x \neq 0$ , on a  $(Px, x) > 0$ . Montrer que  $H^+(n)$  est un ouvert de  $H(n)$ , et que l'application exponentielle est un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $H(n)$  sur  $H^+(n)$ ; ainsi  $H^+(n)$  est connexe.

b) *Matrices unitaires d'ordre  $n$*   $U^*U = I$

Soit  $U(n)$  l'ensemble des matrices unitaires d'ordre  $n$ , c'est-à-dire des matrices  $U$  conservant la forme hermitienne :  $(Ux, Ux) = (x, x)$ . On rappelle que  $U$  admet une base orthonormale de vecteurs propres, ses valeurs propres étant toutes de module 1.

En montrant que l'application qui à une matrice  $M$  de  $GL(n)$  associe  $M^*M$  est de rang constant, prouver que  $U(n)$  est une sous-variété compacte de  $M(n)$ . Quelle est sa dimension? Montrer que l'espace tangent en  $I$  à  $U(n)$  s'écrit  $iH(n)$ . Que peut-on dire de  $e^{iH}$  si  $H$  est dans  $H(n)$ ?

c) Montrer que l'ensemble  $SU(n)$  des matrices unitaires de déterminant 1 est une sous-variété de  $U(n)$ . Décrire  $U(1)$ ,  $SU(1)$ ,  $U(2)$ ,  $SU(2)$ .

d) Montrer que l'ensemble  $O(n)$  des éléments réels de  $U(n)$  (i.e. des matrices unitaires à coefficients réels) est l'ensemble des applications linéaires de  $\mathbf{R}^n$  dans lui-même qui conservent la forme euclidienne  $\sum_1^n x_i^2$ . Prouver que c'est une sous-variété compacte (de dimension  $\frac{(n-1)n}{2}$ ) de  $U(n)$ . On notera  $SO(n) = O(n) \cap SU(n)$  le groupe de rotations de  $\mathbf{R}^n$ . Décrire  $O(2)$  et  $SO(2)$ .

e) Soit  $P$  dans  $H^+(n)$ . En diagonalisant  $P$  montrer qu'il existe une unique  $R$  de  $H^+(n)$  telle que  $R^2 = P$ . Que peut-on dire de cette application ainsi définie? (passage à la racine carrée).

f) *Décomposition de  $GL(n)$ .*

Soit  $M$  dans  $GL(n)$ . Montrer que  $M$  se met de façon unique sous la forme  $M = UP$  avec  $U$  unitaire et  $P$  dans  $H^+(n)$ . On montrera par exemple que  $P^2$  est nécessairement égal à  $M^*M$ .

En déduire que  $GL(n)$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à la variété produit  $U(n) \times \mathbf{R}^{n^2}$ . Montrer un énoncé analogue pour les matrices réelles de  $GL(n)$ .

## 7° PROBLÈME DE FROBENIUS ET INTÉGRALES CURVILIGNES

Le problème se proposant de présenter une approche au théorème de Frobenius différente ayant l'avantage de conduire à des résultats globaux.

*Notations.*  $W$  note une variété de dimension  $n$ ,  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n - p$ ,  $\rho \in \Lambda^1(W^*; E)$  de classe  $C^1$ . On suppose que, pour tout  $x \in W$ ,  $\rho_x$  est une application linéaire surjective de  $T_x(W)$  sur  $E$  et que le  $p$ -champ  $\ker(\rho)$  satisfait la condition de Frobenius

$$(1) \quad \ker(d\rho) \supset \ker(\rho) \wedge \ker(\rho).$$

Étant donné un chemin  $\varphi$  tracé sur  $W$ , on dira que  $\varphi$  est un *chemin intégral* si  $\varphi^*\rho = 0$ . On note par  $Q$  le carré

$$Q = \{(t, \tau) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < t < 1, 0 < \tau < 1\}.$$

On appellera *carré singulier* sur  $W$  un élément  $q \in C^2(Q; W)$ , admettant un prolongement continu à l'adhérence de  $Q$ . On associera à un carré singulier deux familles de chemins : les chemins « parallèles au 1<sup>er</sup> axe »  $\varphi_\tau$  définis par

$$\varphi_\tau : t \rightarrow q(t, \tau) \quad (\text{où } \tau \text{ est un paramètre fixé})$$

et les chemins « parallèles au 2<sup>e</sup> axe »  $\psi_t$  définis par

$$\psi_t : \tau \rightarrow q(t, \tau) \quad (\text{où } t \text{ est un paramètre fixé}).$$

a) Utilisant l'algèbre linéaire élémentaire montrer que (1) entraîne : Quel que soit  $x_0 \in W$  et  $z \in T_{x_0}(W)$  il existe  $h \in \mathcal{L}(E; E)$  tel que

$$(1') \quad i(z)(d\rho)_{x_0} = h \circ \rho_{x_0}$$

b) Soit  $q$  un carré singulier dont tous les chemins « parallèles au 1<sup>er</sup> axe » sont intégraux. Posant

$$\tilde{\rho} = q^*\rho$$

montrer qu'il existe  $b \in C^1(Q; E)$  et  $\tilde{h} \in C^0(Q; \mathcal{L}(E; E))$  tels que

$$\tilde{\rho} = b d\tau, \quad d\tilde{\rho} = \tilde{h} \cdot b dt \wedge d\tau.$$

En déduire la relation

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \tilde{h} \cdot b$$

c) Soit  $q$  un carré singulier dont on suppose que tous les chemins « parallèles au 1<sup>er</sup> axe » sont intégraux et qu'un chemin « parallèle au 2<sup>e</sup> axe » est intégral. Montrer alors que *tous* les chemins de  $q$  « parallèles au 2<sup>e</sup> axe » sont intégraux. (Posant  $y(t) = b(t, \tau)$ , où  $\tau$  est fixé, on pourra montrer que  $y$  satisfait une équation différentielle linéaire homogène.)

### 8° THÉORÈME GLOBAL D'EXISTENCE DE CARTAN-DARBOUX

*Notations.* Étant donné deux chemins  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sur une variété  $V$  vérifiant  $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = a$  et  $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = b$ , rappelons que l'on dit que  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$

sont *homotopes* si l'on peut trouver un carré singulier  $q$  (cf. problème n°7) tel que

$$(2) \quad \begin{aligned} q(0, \tau) &= a, & q(1, \tau) &= b \\ q(t, 0) &= \varphi_0(t), & q(t, 1) &= \varphi_1(t). \end{aligned}$$

Si  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont toujours homotopes on dira que  $V$  est *simplement connexe*.

On notera par  $V$  une variété connexe et simplement connexe, par  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie et  $\omega$  sa forme de Maurer-Cartan. On se donne  $x_0 \in V$ ,  $g_0 \in G$  et  $\pi \in \Lambda^1(V^*, \mathcal{G})$  satisfaisant l'équation de structure  $d\pi + [\pi, \pi] = 0$ . On veut montrer le théorème de Cartan-Darboux *global* suivant :

Il existe  $f \in C^1(V; G)$  tel que  $f(x_0) = g_0$  et que

$$(3) \quad f^* \omega = \pi$$

(Bien remarquer que  $f$  est défini sur  $V$  *tout entier*.) On pose  $W = V \times G$ , on note par  $p_1$  la projection de  $W$  sur  $V$ , par  $p_2$  celle de  $W$  sur  $G$ , et soit

$$\rho = p_1^* \pi - p_2^* \omega.$$

Étant donné un chemin  $\varphi$  tracé sur  $V$ , vérifiant  $\varphi(0) = x_0$  on appellera *relèvement* de  $\varphi$  un chemin  $\tilde{\varphi}$  tracé sur  $W$  tel que

$$\begin{aligned} p_1 \circ \tilde{\varphi} &= \varphi, & \tilde{\varphi}(0) &= (x_0, g_0) \\ \tilde{\varphi}^* \rho &= 0 \end{aligned}$$

a) *Construction de  $f$* . On admettra que le relèvement  $\tilde{\varphi}$  existe, et est unique (ceci sera démontré dans b).

Pour tout  $x \in V$  on choisit un chemin  $\varphi_0$  tel que  $\varphi_0(0) = x_0$ ,  $\varphi_0(1) = x$  et on définit  $f$  par

$$f(x) = p_2(\tilde{\varphi}_0(1))$$

Cette définition est indépendante du choix de  $\varphi_0$ . Soit en effet  $\varphi_1$  un second chemin joignant  $x_0$  à  $x$ , considérons un carré singulier  $q$  vérifiant (2). Posons

$$\tilde{q}(t, \tau) = \tilde{\varphi}_\tau(t)$$

$\theta_t : \tau \rightarrow \tilde{q}(t, \tau)$  (où  $t$  est un paramètre fixé). Montrer que

$$\theta_t^* \rho = 0.$$

Utilisant le fait que  $p \circ \theta_t = \text{constante}$ , en déduire que  $\theta_t = \text{constante}$  et que  $\tilde{\varphi}_0(1) = \tilde{\varphi}_1(1)$ .

Utilisant ce qui précède montrer que  $f$  satisfait (3).

b) *Existence des relèvements*. Pour faciliter la démonstration on se limitera au cas où  $\varphi$  est un *plongement*; on notera par  $\Gamma$  la sous-variété de dimension 1 de  $V$  définie par  $\varphi$  et par  $\Sigma = p_1^{-1}(\Gamma)$ . Montrer que  $\Sigma$  est une sous-variété de  $W$ .

Définissons un 1-champ  $N$  sur  $\Sigma$  en posant

$$N_u = T_u(\Sigma) \wedge \ker(\rho)_u \quad u \in \Sigma$$

Montrer que  $\tilde{\varphi}$  aura pour image une ligne de champ de  $N$ . Inversement si  $\Delta$  est une ligne de champ de  $N$ , passant par  $(x_0, g_0)$  et telle que

$$(4) \quad p_1(\Delta) = \Gamma$$

Construire  $\tilde{\varphi}$  à partir de  $\Delta$ .

Conclure en montrant que les solutions maximales de l'équation différentielle des lignes de champ de  $N$  satisfont (4).

### 9° CONSTRUCTION D'UN GROUPE DE LIE A PARTIR D'UNE ALGÈBRE DE LIE

Le but du problème est de montrer qu'à toute algèbre de Lie abstraite  $F$  on peut associer un groupe de Lie local dont l'algèbre de Lie est isomorphe à  $F$ . Ceci étant, les trois parties du problème peuvent être traitées de façon indépendantes.

On appelle *algèbre de Lie abstraite*  $F$ , un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  de dimension  $n$ , muni d'un produit  $[x, y]$ ,  $x, y \in F$ , tel que :

$$\begin{aligned} [x, y] &= -[y, x] && \text{antisymétrie} \\ [\lambda x, y] &= \lambda[x, y] && \text{bilinéarité} \\ [x_1 + x_2, y] &= [x_1, y] + [x_2, y] \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0 && \text{(Identité de Jacobi)} \end{aligned}$$

On note par  $L(F, F)$  l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel  $F$ . On note par  $I$  l'endomorphisme identique. La structure d'algèbre de  $F$  définit une application :  $F \rightarrow L(F, F)$  qui à  $x \in F$  associe  $a_x \in L(F, F)$  défini par :

$$a_x(y) = [y, x]$$

On notera par  $V$  un ouvert de  $F$ , contenant l'origine et étoilé par rapport à l'origine.

On définit une application  $g$  de  $V$  dans  $L(F, F)$  en posant :

$$g(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} a_x^{m-1} = I + \frac{1}{2!} a_x + \frac{1}{3!} a_x^2 + \dots$$

Utilisant l'identification naturelle de  $T_x(V)$  à  $F$ ,  $g(x)$  définit une forme différentielle  $\gamma \in \Lambda^1(V^*; F)$ .

a) Notons par  $V'$   $V$  dont on a retiré l'origine. Considérons sur  $V'$  le groupe à un paramètre  $U_\lambda$  des homothéties :

$$U_\lambda : x \longmapsto e^\lambda x$$

Notons par  $A \in \overset{1}{\otimes} V'$  dont  $U_\lambda$  est le groupe à un paramètre associé. Calculer  $U_\lambda^* \gamma$ ; en déduire :

$$(1) \quad (\theta(A)\gamma)_x = I + a_x \circ \gamma_x$$

(On note par  $\theta(A)$  l'opérateur infinitésimal associé à  $A$ .)

b) On note par  $V$  une variété abstraite de dimension  $n$ .

Supposons que l'on se soit donné une forme  $\omega \in \Lambda^1(V^*; F)$  telle que :

$$(2) \quad \begin{aligned} \omega_x \text{ est inversible quel que soit } x \in V, \\ d\omega + [\omega, \omega] = 0. \end{aligned}$$

Notons par  $G$  l'ensemble des difféomorphismes  $h$  de  $V$  sur  $V$  tels que :

$$(3) \quad h^* \omega = \omega.$$

Remarquer que  $G$  forme un groupe de transformations de  $V$ . Choisissons  $x_0 \in V$ . Pour tout  $x_1 \in V$ , on cherche :

$$(4) \quad h \in G \quad \text{tel que} \quad h(x_0) = x_1.$$

On déterminera  $h$  par son graphe  $H$  qui est une sous-variété de  $W = V \times V$ . On montrera que (3) est équivalent à :

$$H \text{ est variété intégrale de } \nu = 0$$

où

$$\nu = p_1^* \omega_1 - p_2^* \omega_2$$

( $p_i$  notant la projection de  $W$  sur sa  $i$ -ème composante,  $\omega_i$  une copie de  $\omega$  placée sur cette composante,  $i = 1, 2$ ). En déduire l'unicité de  $h$  satisfaisant (4). L'existence de  $h$  sera montrée en prouvant la complète intégrabilité de l'équation de Pfaff  $\nu = 0$ . (On se satisfera d'un résultat d'existence locale.)

c) A tout  $h \in G$  on associe  $h(x_0) \in V$ . L'application  $u : G \rightarrow V$ , ainsi définie, permet d'identifier  $G$  à  $V$ . Par transport de structure, on munit  $G$  d'une structure de variété différentiable pour laquelle  $G$  est un groupe de Lie. Posons :  $\bar{\omega} = u^* \omega$ . Remarquer que  $\bar{\omega}$  est une forme invariante à gauche. (On pourra, en notant  $\tau_h$  la translation à gauche sur  $G$  démontrer que  $u \circ \tau_h = h \circ u$ .) En déduire que  $\bar{\omega} = k \circ \alpha$ , où  $\alpha$  est la forme de Maurer-Cartan de  $G$  et où  $k \in L(\mathcal{G}; F)$ ,  $\mathcal{G}$  notant l'algèbre de Lie de  $G$ . Montrer, en utilisant (3) et l'équation de structure de Maurer-Cartan de  $\alpha$ , que  $k$  est un isomorphisme d'algèbres de  $\mathcal{G}$  sur  $F$ .

d) Remarquer que quels que soient  $x, y, z \in F$ , on a :

$$(5) \quad a_x([y, z]) = [a_x(y), z] + [y, a_x(z)]$$

e) Soit  $\gamma \in \Lambda^1(V^*; F)$  défini en 1°. Posons  $\beta = d\gamma + [\gamma, \gamma]$ . Utilisant (1), montrer que :

$$(6) \quad (\theta(A)\beta)_x = a_x \circ \beta_x.$$

(Il sera commode de considérer  $z, z' \in \bigotimes^1 V'$ , invariants par homothétie et tels que  $[z, z']_{V'} = 0$ ,  $[z, z']_{V'}$  notant le crochet comme champs de vecteurs sur  $V'$ .) On montrera :

$$\begin{aligned} \langle z \wedge z', \theta(A)[\gamma, \gamma] \rangle &= [(\theta(A)\gamma)(z), z'] + [z, (\theta(A)\gamma)(z')] \\ \langle z \wedge z', d(a \circ \gamma) \rangle_x &= a_x(\langle z', \gamma \rangle_x) - a_x(\langle z, \gamma \rangle_x) + a_x(\langle z \wedge z', d\gamma \rangle_x) \end{aligned}$$

f) Fixons  $x_0 \in V'$ . Définissons une application  $f$  de  $[0, 1] \rightarrow L(F, F)$  en posant  $f(t) = (U_{\log t}^* \beta)_{x_0}$ . Dédire de (6) que

$$\frac{df}{dt} = a_{x_0} \circ f.$$

Dédire de ce qui précède que  $f(t) \equiv 0$ . Conclure qu'il existe localement un groupe de Lie  $G$  ayant  $F$  pour algèbre de Lie et qui est la forme de Maurer-Cartan de  $G$  lue dans la carte exponentielle.

### 10° ÉTUDE DU GROUPE MODULAIRE $G = \text{SL}(2, \mathbf{R})$

Le demi-plan supérieur  $H = \{z \in \mathbf{C}, \text{Im}z > 0\}$  est muni de son atlas canonique qui en fait une variété de classe  $C^\infty$  et de dimension 2. Les espaces de dimension finie sur  $\mathbf{R}$  sont munis de leur structure naturelle de variété de classe  $C^\infty$ . On note  $\text{GL}(2)$  l'ouvert de  $M(2) = \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$  formé des matrices inversibles;  $G$  est le noyau de l'application déterminant définie sur  $\text{GL}(2)$  (i.e. le sous-groupe des matrices de déterminant 1). Pour  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $z$  complexe on note  $g.z = \frac{az + b}{cz + d}$  lorsque le second membre a un sens.  $V$  désigne un espace de dimension finie sur  $\mathbf{C}$  donc une variété de classe  $C^\infty$ .

a) Le groupe de Lie  $G$ .

i) Montrer que  $G$  est une sous-variété de  $\text{GL}(2)$ , puis que c'est un groupe de Lie.

ii) Soit  $q$  l'application de  $G$  dans  $H$  donnée par  $q(g) = g.i$ ; montrer que  $q$  est continue et surjective. Pour  $t$  réel on pose

$$k(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix};$$

montrer que  $k$  est un plongement de  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  dans  $G$ , d'image  $K = q^{-1}(i)$ .

iii) Soit  $G(V) = C^\infty(G; V)$ ,  $H(V) = C^\infty(H, V)$ . A  $n$  entier on associe le sous-espace  $G_n(V)$  de  $G(V)$  fait de celles des applications  $f$  qui vérifient

$$f(gk(t)) = e^{nit}f(g) \quad \text{quels que soient } g \text{ dans } G, \quad t \text{ réel.}$$

Soit  $L_n$  l'application définie sur  $G_n(V)$  à valeurs dans  $H(V)$  par  $L^n(f) = F$  où  $F(g.i) = (ci + d)^n f(g)$  si  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Établir que  $L_n$  est un isomorphisme, et qu'il transporte l'action de  $G$  sur  $G_n(V)$  donnée par  $h^*f(g) = f(h^{-1}g)$  en  $h^*F(z) = (-cz + a)^{-n} F\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right)$  si  $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On notera  $H_n(V)$  l'espace  $H(V)$  où  $G$  opère ainsi.

b) *L'algèbre de Lie de G.*

i) On note  $e^M$  l'exponentielle de la matrice  $M$ . Si  $M$  est d'ordre 2 remarquer que  $e^M$  est dans  $G$  si et seulement si  $M$  est de trace nulle. Quelle est l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$ ? Pour  $X$  dans  $\mathcal{G}$  et  $f$  dans  $G(V)$  on note  $X.f(g) = \left(\frac{d}{dt} f(ge^{tX})\right)_{t=0}$ . On prolonge cette action (de  $\mathcal{G}$ ) aux éléments  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ , où  $a, b, c$  sont des nombres complexes par linéarité. On notera  $\mathcal{G}'$  l'ensemble de ces matrices.

ii) Soit la base de  $\mathcal{G}$  suivante  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $e^{tA}$ ,  $e^{tB}$ ,  $e^{tC}$ , on définit une base  $W, Z, \bar{Z}$  de  $\mathcal{G}'$  en posant  $A = 2iW$ ,  $B = Z + \bar{Z} = i(2C - A)$ . Donner les valeurs des crochets pour les deux bases.

iii) Si  $f$  est dans  $G(V)$ , montrer que  $f$  est dans  $G_n(V)$  si et seulement si  $A.f = \text{inf}$ , puis que si  $f$  est dans  $G_n(V)$  alors  $Z.f$  est dans  $G_{n+2}(V)$  et  $\bar{Z}.f$  dans  $G_{n-2}(V)$ . Par les isomorphismes  $L_n$  (cf. a iii) en déduire que  $Z$  et  $\bar{Z}$  définissent les opérateurs différentiels suivants

$$\begin{aligned} Z. \text{ de } H_n(V) & \quad \text{dans} \quad H_{n+2}(V) : Z.F(z) = \frac{n}{y} F(z) + 2i \frac{\partial F}{\partial z}(z) \\ \bar{Z}. \text{ de } H_n(V) & \quad \text{dans} \quad H_{n-2}(V) : \bar{Z}.F(z) = -2iy^2 \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z); \end{aligned}$$

compatibles avec l'action de  $G$

$$z = x + iy, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\bar{\partial}}{\partial z}$$

on dira que  $f$  est holomorphe si  $\bar{Z}.f = 0$ .

iv) Soit  $\Omega = W.W. + \frac{1}{2}(Z.\bar{Z} + \bar{Z}.Z)$ . Montrer que  $\Omega$  commute à l'action de tout élément de  $\mathcal{G}'$ . Quelle est l'action de  $\Omega$  sur  $H_n(V)$ ? Soit  $f$  holomorphe dans  $G_n(V)$  : montrer que  $\Omega.f = \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) f$ , puisque

$$\bar{Z}^p.Z^p.f = (-1)^{pp} n!(n+1) \dots (n+p-1)f \quad (p \geq 1)$$

11° REPRÉSENTATION DE DIMENSION FINIE DU GROUPE MODULAIRE (cf. exer. 10).

a) *Étude infinitésimale d'un homomorphisme  $\rho$  de  $G$  dans  $GL(V)$*

$GL(V)$  est l'ouvert de  $\mathcal{L}(V, V)$  fait des automorphismes de  $V$ . On suppose  $\rho$  de classe  $C^\infty$ .

i) Pour tout vecteur  $v$  de  $V$  développer en série de Fourier de  $t$  la fonction  $(\rho \circ k(t))v$ ; quels sont ses coefficients de Fourier? En déduire que pour tout  $n$  entier l'endomorphisme de  $V$  donné par

$$P_n(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\rho \circ k(t))ve^{-nit} dt$$

est un projecteur de  $V$  sur le sous-espace propre associé à la valeur propre  $e^{nit}$  de l'opérateur  $\rho \circ k(t)$ , soit  $V_n$ . Montrer que  $V$  est somme directe des  $V_n$ .

ii) Soit  $\rho'(X) = \left( \frac{d}{dt} \rho(e^{tX}) \right)_{t=0}$  pour  $X$  dans  $\mathcal{G}$ . Quelles sont les propriétés de  $\rho'$ ? Prolonger  $\rho'$  à  $\mathcal{G}'$ . Établir que la restriction de  $\rho'(A)$  à  $V_n$  est la multiplication par  $in$ , que  $\rho'(Z)$  ( $V_n$ ) est contenu dans  $V_{n+2}$  et  $\rho'(\bar{Z})$  ( $V_n$ ) est dans  $V_{n-2}$ . De la dimension finie de  $V$  déduire un vecteur non nul  $e_{-n}$  tel que

$$\rho'(A)e_{-n} = -ine_{-n}, \quad \rho'(\bar{Z})e_{-n} = 0$$

on posera alors  $\rho'(Z)^j e_{-n} = e_{-n+2j} j \geq 1$ . Montrer que

$$\rho'(A)e_p = ipe_p, \quad \rho'(Z)e_p = e_{p+2}, \quad \rho'(\bar{Z})e_p = \frac{(n+p)(n-p+2)}{4} e_{p-2}$$

iii) En déduire que si  $O$  et  $V$  sont les seuls sous-espaces  $V'$  de  $V$  tels que  $\rho(G)$  ( $V'$ ) soit contenu dans  $V'$ , alors  $V$  est de dimension  $n+1$ .

b) *Construction globale de  $\rho$  vérifiant iii) de a)*

$V$  est l'espace vectoriel des polynômes  $P(T)$  à coefficients complexes de degré au plus  $n$ .  $G$  opère sur  $V$  par  $\rho$  holomorphisme de  $G$  dans  $GL(V)$  défini par

$$\rho(g)P(T) = (-cT + a)^n P\left(\frac{dT - b}{-cT + a}\right) \quad \text{si } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Montrer

$$\begin{array}{lll} \rho'(A) & \text{transforme} & P(T) \text{ en } nTP(T) - (1 + T^2)P'(T) \\ \rho'(B) & \text{transforme} & P(T) \text{ en } nP(T) - 2TP'(T) \\ \rho'(C) & \text{transforme} & P(T) \text{ en } -P'(T) \end{array}$$

En déduire comment opèrent  $\rho'(Z)$  et  $\rho'(\bar{Z})$ . Acheter en montrant que la base  $e_p$  de  $V$  est

$$e_{-n+2j}(T) = \frac{(-1)^j}{(n-j)!} (T-i)^{n-j}(T+i)^j \quad 0 \leq j \leq n$$

## 12° AUTOMORPHISMES D'UN GROUPE DE LIE

Soient  $G$  un groupe de Lie,  $e$  l'élément neutre de  $G$ ,  $\Gamma$  son algèbre de Lie. On appellera *automorphisme de  $G$*  un difféomorphisme de  $G$  sur  $G$  qui est un homomorphisme de groupe. On note par  $\text{Aut}(G)$  l'ensemble de tous les automorphismes de  $G$ ;  $\text{Aut}(G)$  est un groupe pour la composition des applications. On note par  $\mathcal{L}(\Gamma)$  l'ensemble des applications linéaires de  $\Gamma$  dans  $\Gamma$ , par  $I$  l'identité de  $\mathcal{L}(\Gamma)$ , par  $\mathcal{L}_{\text{inv}}(\Gamma)$  le groupe des applications linéaires inversibles. On appellera *automorphisme de  $\Gamma$*  un élément  $C$  de  $\mathcal{L}_{\text{inv}}(\Gamma)$  tel que :

$$[Cx, Cy] = C([x, y]) \quad \text{quels que soient } x \text{ et } y \in \Gamma.$$

Les automorphismes de  $\Gamma$  forment un groupe noté  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

a) A tout  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ , on associe  $\hat{\varphi}$  défini en dérivant  $\varphi$  en  $e$  :  $\hat{\varphi} = \varphi'(e)$ . Alors  $\hat{\varphi} \in \mathcal{L}(\Gamma)$ ; remarquer de plus que  $\hat{\varphi} \in \text{Aut}(\Gamma)$ . Indiquer très brièvement comment la définition de  $\text{Aut}(G)$  doit être modifiée pour que la correspondance :

$$\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$$

réalise un isomorphisme de  $\text{Aut}(G)$  sur  $\text{Aut}(\Gamma)$ . On supposera dans toute la suite du problème que tel est le cas et on notera par  $\lambda$  cet isomorphisme :

$$\hat{\varphi} = \lambda(\varphi)$$

Supposons que :

$$(H) \quad \text{Aut}(\Gamma) \text{ est une sous-variété de } \mathcal{L}_{\text{inv}}(\Gamma).$$

Montrer que, sous cette hypothèse,  $\text{Aut}(\Gamma)$  est un sous-groupe de Lie de  $\mathcal{L}_{\text{inv}}(\Gamma)$ . Notons par  $\mathcal{D}$  son algèbre de Lie;  $\mathcal{D}$  s'identifie à une partie de  $\mathcal{L}(\Gamma)$ . Considérons :

$$\mathcal{D}_1 = \{A \in \mathcal{L}(\Gamma) \mid A([x, y]) = [Ax, y] + [x, Ay] \quad \text{quels que soient } x \text{ et } y \in \Gamma\}$$

Si  $B \in \mathcal{D}$ , montrez que :

$$e^{tB}[x, y] = [e^{tB}x, e^{tB}y];$$

dérivant cette relation en  $t = 0$ , en déduire que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$ . Montrez, de façon analogue, que  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$ .

b) A tout  $x \in \Gamma$  associons  $a_x \in \mathcal{L}(\Gamma)$  défini par :

$$a_x(y) = [x, y].$$

Montrez que  $a_x \in \mathcal{D}$ . (On note souvent  $a_x$  par  $ad(x)$ .)

A tout  $g_0 \in G$ ,  $g_0$  fixé, on associe  $\psi_{g_0} \in \text{Aut}(G)$  défini par :

$$\psi_{g_0}(g) = g_0 g g_0^{-1}.$$

En posant  $\hat{\psi}_{g_0} = \lambda(\psi_{g_0})$ , remarquez que l'application  $g_0 \rightarrow \hat{\psi}_{g_0}$  définit un homo-

morphisme de  $G$  dans  $\text{Aut}(\Gamma)$ ; on notera par  $l$  l'homomorphisme induit sur les algèbres de Lie :  $l$  est un homomorphisme de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{D}$ .

Soient  $y \in \Gamma$ ,  $Y$  le champ de vecteur sur  $G$  invariant à gauche correspondant, et  $\sigma_{g_0}^{-1}$  la translation à droite par  $g_0^{-1}$ . Montrez que :

$$\hat{\Psi}_{g_0}(y) = ((\sigma_{g_0}^{-1})_* Y)_e.$$

Soient maintenant un second élément  $x \in \Gamma$ ,  $U_t$  le groupe à 1 paramètre défini par le champ de vecteur sur  $G$  invariant à gauche associé à  $x$ ; posons  $g_t = \exp(tx)$ . Montrez que :

$$\hat{\Psi}_{g_t}(y) = ((U_{-t})_* Y)_e.$$

En déduire que :

$$l(x)(y) = a_x(y),$$

et par suite que :

$$l(x) = a_x.$$

c) On se propose de démontrer dans cette question l'hypothèse (H).

Posons  $W_I = \text{Aut}(\Gamma)$  et pour tout  $B_0 \in \mathcal{L}_{\text{inv}}(\Gamma)$ , notons par  $W_{B_0}$  le translaté à droite par  $B_0$  de  $W_I$  :

$$W_{B_0} = W_I \cdot B_0.$$

Soit  $\Omega = \mathcal{L}(\Lambda^2(\Gamma); \Gamma)$ . Nous associons à tout  $A \in \mathcal{L}_{\text{inv}}(\Gamma)$  l'élément  $f(A) \in \Omega$  que l'on montrera bien défini par la formule :

$$f(A)(x \wedge y) = [Ax, Ay] - A[x, y] \quad \text{quels que soient } x \text{ et } y \in \Gamma$$

Montrez que :

$$f(AB) = f(A) \circ \rho_B + Af(B),$$

où  $\rho_B$  est l'élément de  $\mathcal{L}(\Lambda^2(\Gamma))$  défini par la formule :

$$\rho_B(x \wedge y) = Bx \wedge By.$$

En déduire que si l'on pose :

$$k(Z) = Z^{-1}f(Z),$$

alors on a :

$$W_{B_0} = \{Z \in \mathcal{L}_{\text{inv}}(\Gamma) \mid k(Z) = k(B_0)\}$$

Appliquant cette formule en un point  $B_0$  où le rang de  $k$  est maximum, obtenir l'allure de  $W_{B_0}$  au voisinage de  $B_0$ ; en déduire celle de  $W_I$  au voisinage de  $I$ . Enfin démontrer l'hypothèse (H).

d) On définit sur  $\Gamma$  une forme bilinéaire en posant

$$B(x, y) = \text{Trace}(a_x a)^k$$

démontrer les relations

$$\begin{aligned} B(Cx, Cy) &= B(x, y) \quad \text{pour tout } C \in \text{Aut}(\Gamma) \\ B(x, [y, z]) &= B(y, [x, z]) = B(z, [x, y]) \end{aligned}$$

e) On suppose que la forme  $B$  soit non *dégénérée*. Soit  $J$  un idéal de  $\Gamma$ . Montrer que l'orthogonal de  $J$  pour  $B$  soit  $J^\perp$  est un idéal de  $\Gamma$  et que  $\Gamma$  est somme directe de  $J$  et de  $J^\perp$ .

Montrer que  $\mathcal{D}$  s'identifie avec  $a_x$  où  $x \in \Gamma$ . Que peut-on en déduire pour  $\text{Aut } \Gamma$  et  $\text{Aut } G$ ?

### 13° MÉTRIQUE RIEMANNIENNE BIINVARIANTES SUR UN GROUPE DE LIE

Soient  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie,  $\omega$  sa forme de Maurer-Cartan et  $s \in \bigotimes_2 G$ . Notons l'algèbre de Lie des champs invariants à gauche sur  $G$ ,  $\tau$  et  $\sigma$  les translations à gauche et à droite sur  $G$ .

#### I<sup>re</sup> PARTIE

a) Montrer que si pour tout  $\boxed{g \in G, s = \tau_g^* s} \quad (1)$ , alors quel que soit  $g \in G$ ,  $x$  et  $y \in T_g(G)$ , on a  $\langle x \otimes y, s_g \rangle = \langle \omega_g(x) \otimes \omega_g(y), s_g \rangle$ . En déduire que :

$$\text{quel que soit } A \text{ et } B \in \Gamma, \quad \langle A \otimes B, s \rangle = \text{cste}$$

b) Montrer que si quel que soit  $\boxed{g \in G, s = \sigma_g^* s} \quad (2)$ , alors pour tout  $C \in \Gamma$ ,  $\theta(C).s = 0$ .

c) En déduire que si (1) et (2) sont vérifiées, alors

$$\langle [C, A] \otimes B, s \rangle + \langle A \otimes [C, B], s \rangle = 0$$

#### II<sup>e</sup> PARTIE

e) Soit  $\beta \in \bigotimes_2 \mathcal{G}$ , montrer que  $s \in \bigotimes_2 G$  défini par

$$\langle x \otimes y, s_g \rangle = \langle \omega_g(x) \otimes \omega_g(y), \beta \rangle$$

vérifie (1).

f) Si  $G$  est compact, admettant l'existence d'une intégration sur  $G$  invariante par translation c'est-à-dire telle que : pour tout  $\varphi$  continu à support compact, pour tout  $h \in G$ ,

$$\int \varphi(hg) dg = \int \varphi(g) dg$$

montrer que  $s \in \bigotimes_2 G$  défini pour  $x$  et  $y \in T_h(G)$

$$\langle x \otimes y, s_h \rangle = \int \langle \omega_{hg}(\sigma'_g(h) \cdot x) \otimes \omega_{hg}(\sigma'_g(h) \cdot y), \beta \rangle dg$$

vérifie (1) et (2).

### III<sup>e</sup> PARTIE

Soient  $\beta \in \bigotimes_2 \mathcal{G}$  symétrique défini positif et  $s \in \bigotimes_2 G$  le tenseur associé en  $e$ .

Quel que soit  $a$  et  $b \in \mathcal{G}$ , on notera  $\langle a \otimes b, \beta \rangle = (a|b)$

g) Montrer que

$$\psi : g \in G \rightarrow (\tau_g \circ \sigma_{g^{-1}})'(e) \in \{L \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{G}); L \text{ inversible}\}$$

est un homomorphisme de  $\mathcal{G}$ .

h) Soit  $R = \{L \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{G}); \text{quel que soit } a \text{ et } b \in \mathcal{G}, (La|Lb) = (a|b)\}$  Prouver que

$$(2) \text{ est équivalent à } R \supset \text{Im } \psi$$

k) En déduire que

$$(2) \text{ est équivalent à } \mathcal{R} \supset \text{Im } \psi'(e)$$

$\mathcal{R}$  étant l'algèbre de Lie de  $R$ , que l'on précisera.

l) Prouver enfin que  $\forall a \in \mathcal{G}, \psi'(e) \cdot a \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$  est l'application  $x \rightarrow [a, x]$ ; conclure que

$$(2) \text{ est équivalent à } \forall a, b, c \in \mathcal{G} \quad [(c, a), b] + (a, [c, b]) = 0.$$

On pourra trouver dans le problème 12 une étude plus développée de  $g$  et  $l$ .

### IV<sup>e</sup> PARTIE

m) Soit  $A \in \Gamma$  et  $s \in \bigotimes_2 G$  vérifiant (1) et (2); définissons  $\lambda \in \Lambda^1(G^*)$  par :

$$g \in G, x \in T_g(G) \quad \langle x, \lambda_g \rangle = \langle x \otimes A_g, s_g \rangle$$

Montrer que  $\theta(A)\lambda = 0$

n) Si  $s_e$  est symétrique défini positif  $x \in T_g(G) \rightarrow \sqrt{\langle x \otimes x, s_g \rangle} \in \mathbf{R}, g \in G$ , définit sur  $G$  une métrique riemannienne sur  $G$  invariante pour les translations à droite et les translations à gauche. Montrer que  $\forall A \in \Gamma$ , les lignes de courant de  $A$  sont des géodésiques de cette métrique.

### 14<sup>o</sup> GROUPE DE TRANSFORMATIONS SUR UNE VARIÉTÉ

On notera par  $G$  un groupe de Lie (on supposera que  $G$  est une variété de classe  $C^\infty$  et que les opérations de groupe sont de classe  $C^\infty$ ). On notera par  $e$  l'élément

neutre de  $G$ , par  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie constituée par les champs de vecteurs invariants à gauche sur  $G$ .

Étant donné une variété  $V$ , on appellera *loi d'opération* de  $G$  sur  $V$ , la donnée :

$$u \in C^\infty(V \times G; V)$$

telle que :

$$(1) \quad \begin{cases} (xg_1)g_2 = x(g_1g_2) \\ xe = x \end{cases} \quad x \in V, \quad g_1 \quad \text{et} \quad g_2 \in G$$

(On convient de noter dans ces formules  $u(x, g)$  par  $xg$ .)

On utilisera librement les résultats de l'exercice de la 2<sup>e</sup> partie 14<sup>o</sup>, p. 146.

A toute loi d'opération  $u$  de  $G$  sur  $V$  on veut associer

$$\varphi_u \in \text{Hom}(\mathcal{G}; \overset{1}{\otimes} V).$$

Considérons  $v_{x_0} \in C^\infty(G; V)$  définie par :

$$v_{x_0} : g \rightarrow u(x_0, g)$$

Nous définissons  $\varphi_u(A) = \varphi(A)$  par la formule :

$$(2) \quad (\varphi(A))_x = v_x'(e) \cdot A_e \quad x \in V$$

Comme évidemment  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{G}; \overset{1}{\otimes} V)$ , il reste à montrer que :

$$(3) \quad [\varphi(A), \varphi(\tilde{A})] = \varphi([A, \tilde{A}]) \quad A, \tilde{A} \in \mathcal{G}$$

a) Posons :

$$\begin{aligned} B &= \varphi(A) \\ u(x, \exp(tA)) &= \hat{U}_t(x) \end{aligned}$$

Remarquer que  $\hat{U}_t$  est un groupe à 1 paramètre de transformations de  $V$ . Posant :

$$\hat{k}_x(t) = \hat{U}_t(x)$$

on a :

$$\hat{k}_x'(0) \cdot 1 = B_x$$

Utilisant la propriété de groupe de  $\hat{U}_t$ , en déduire que :

$$\hat{k}_x'(t_0) \cdot 1 = B_y \quad \text{où} \quad y = \hat{U}_{t_0}(x)$$

et conclure que, notant par  $U_t$  le pseudo-groupe de transformations de  $V$  associé à  $B$ , alors on a :

$$(4) \quad U_t(x) = u(x, \exp(tA))$$

b) Si  $A, \tilde{A} \in \mathcal{A}'_x, f \in \mathcal{A}_b(V)$ , montrer que :

$$\langle [\varphi(A), \varphi(\tilde{A})], df \rangle_x = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-2} (f(\tilde{U}_t \circ U_t(x)) - f(U_t \circ \tilde{U}_t(x)))$$

Calculer le second membre en utilisant (4). En déduire (3).

c) On veut montrer que,  $G$  étant supposé connexe, deux lois d'opération  $u$  et  $\hat{u}$  de  $G$  sur  $V$  telles que  $\varphi_u = \varphi_{\hat{u}}$  sont identiques.

Soient :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= G \times V, \\ \Phi(A) &= A \times \varphi(A), \quad \Phi_z(A) = (\Phi(A))_z, \quad M_z = \Phi_z(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Montrer que  $M$  définit un  $p$ -champ sur  $\mathbf{K}$  avec  $p = \dim(G)$ . Conclure en montrant que le graphe de  $v_x$  est une variété intégrale de  $M$ . On pourra écrire (1) sous la forme :  $v_{x_0} \circ \tau_{g_0} = v_{y_0}$  où  $y_0 = u(x_0, g_0)$ .

d) Inversement, étant donné  $\psi \in \text{Hom}(\mathcal{G}; \overset{1}{\otimes} V)$ , montrer que l'on peut lui associer une loi d'opération  $u$  de  $G$  sur  $V$  telle que  $\varphi_u = \psi$ .

On admettra que les constructions locales que l'on aura à envisager peuvent être effectuées globalement.

Effectuer toutes les vérifications nécessaires pour aboutir à la construction de  $u$ . Montrer que  $u$  satisfait (1).

### 15° ÉTUDE DU GROUPE LAISSANT INVARIANT UN CHAMP DE REPÈRES

On se donne une variété  $V$ , connexe, de dimension  $n$ , et  $\rho \in \Lambda^1(V^*; \mathbf{R}^n)$  telle que  $\rho_x$  soit inversible quelque soit  $x \in V$ ; on note par  $\Delta(V, \rho)$  le groupe des difféomorphismes  $f$  de  $V \rightarrow V$  tels que

$$(1) \quad f^* \rho = \rho$$

Soit

$$\Gamma = \{A \in \overset{1}{\otimes} V \mid \theta(A)\rho = 0\},$$

$\Gamma$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ ; à tout  $x \in V$  on attache une application linéaire  $h_x$  de  $\Gamma$  dans  $T_x(V)$  en posant, pour tout  $A \in \Gamma$ ,

$$h_x(A) = A_x$$

Toutes les données seront supposées de classe  $C^\infty$ . On ne demande que des démonstrations ayant un caractère local. Les parties II et III sont indépendantes. La partie IV peut être traitée en admettant certains résultats donnés dans l'énoncé de II et III.

I<sup>re</sup> PARTIE

a) Montrer qu'il existe une fonction  $C$  définie sur  $V$ , à valeurs dans l'espace vectoriel des applications bilinéaires antisymétriques de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  soit

$$C : V \rightarrow \mathcal{L}_2^a(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$$

telle que, quels que soient  $z_1, z_2 \in T_{x_0}(V)$ , on ait

$$(2) \quad \langle z_1 \wedge z_2, (d\rho)_{x_0} \rangle = C(x_0)(\rho_{x_0}(z_1), \rho_{x_0}(z_2))$$

b) Soient  $B_1, B_2 \in \bigotimes^1 V$ ,  $\lambda \in \Lambda^1(V^*)$  alors montrer que

$$\theta([B_1, B_2])\lambda = (\theta(B_1)\theta(B_2) - \theta(B_2)\theta(B_1))\lambda.$$

En conclure que  $A_1, A_2 \in \Gamma$  entraîne  $[A_1, A_2] \in \Gamma$ ;  $\Gamma$  a ainsi une structure d'algèbre sur  $\mathbf{R}$ .

c) Soit  $M$  un  $p$ -champ sur  $V$ . Supposons que l'on ait pu trouver  $B_1 \dots B_p \in \bigotimes^1 V$  tels que

$$[B_i, B_j] \in M \text{ et que quel que soit } x, \text{ les } (B_i)_x \text{ engendrent } M_x.$$

Montrer alors que  $M$  est complètement intégrable.

Posant  $N_x = h_x(\Gamma)$ , admettons provisoirement que  $\dim N_x$  est constante et que la correspondance  $x \rightarrow N_x$  est de classe  $C^\infty$ , montrer alors que  $N$  est complètement intégrable.

d) Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\omega$  sa forme de Maurer-Cartan.

On note par  $\sigma_\gamma$  la translation à droite définie par

$$\sigma_\gamma(g) = g\gamma$$

On dit que  $B \in \bigotimes^1 G$  est *invariant à droite* si

$$(\sigma_\gamma)_* B = B \quad \text{quel que soit } \gamma \in G.$$

On veut montrer que  $B$  est invariant à droite si et seulement si

$$\theta(B)\omega = 0$$

On montrera l'équivalence de cette condition avec

$$[A, B] = 0 \quad \text{quel que soit } A \in \bigotimes^1 G, \text{ invariant à gauche.}$$

(On pourra calculer  $\theta(B)\langle A, \omega \rangle$ .) Ensuite on montrera que cette dernière condition est équivalente à l'invariance à droite de  $B$ .

II<sup>e</sup> PARTIE

e) On désire montrer que  $h_x$  est injectif. Cet énoncé résultera de la proposition.

$$(3) \quad h_{x_0}(A) = 0 \quad \text{entraîne} \quad A_x = 0, \quad x \in \text{voisinage de } x_0.$$

Soit  $u$  une carte locale de  $V$  définie au voisinage de  $x_0$  :

$$u(x) = (\xi^1 \dots \xi^n)$$

Soit  $A^i$  les composantes du champ  $A \in \Gamma$  lu dans cette carte. D'autre part  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  $\omega_k \in \Lambda^1(V^*)$ ; enfin dans la carte  $u$  les  $\omega_k$  se lisent

$$\omega_k = \sum_i a_{k,i} d\xi^i$$

Écrivant l'équation  $\theta(A)\omega = 0$  dans la carte  $u$ , montrer que les  $A^i$  satisfont un système de  $n^2$  équations linéaires et homogènes en  $A^i$ ,  $\frac{\partial A^i}{\partial \xi^s}$ .

En déduire que les restrictions de  $A^i$  à un chemin tracé dans l'espace des  $\xi$  satisfont un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre de rang  $n$ . En déduire (3).

III<sup>e</sup> PARTIE

On supposera dans toute cette partie que  $\dim N_x = n$ .

f) Montrer que l'application  $C$  définie par (2) est constante (On pourra montrer  $z \in T_{x_0}(V)$  étant donné que  $\langle z, (dC)_{x_0} \rangle = 0$  en l'écrivant sous la forme  $(\theta(A)C)_{x_0}$  où  $A \in \Gamma$ ,  $A_{x_0} = z$ .)

g) Notons par  $V_1, V_2$  deux copies de  $V$ , par  $\rho_1, \rho_2$  les copies de  $\rho$  sur  $V_1$  et  $V_2$ , par  $W = V_1 \times V_2$ , par  $p_i$  la projection canonique de  $W$  sur  $V_i$  ( $i = 1, 2$ ). Posons

$$\lambda = p_1^* \rho_1 - p_2^* \rho_2.$$

Montrer que  $f \in \Delta(V, \rho)$  si et seulement si son graphe  $\Gamma$  est une variété intégrale de dimension maximum de

$$(4) \quad \lambda = 0$$

h) Montrer que l'équation (4) est complètement intégrable.

Fixons  $x_0 \in V$ , soit  $\varphi$  l'application de  $\Delta \rightarrow V$  définie par

$$f \rightarrow f^{-1}(x_0)$$

Montrer que  $\varphi$  est une *bijection*. En transportant par  $\varphi$  la structure différentiable de  $V$  à  $\Delta$ , montrer que l'on définit sur  $\Delta$  une structure de variété de classe  $C^\infty$ ,

indépendante du choix de  $x_0$ , et que pour cette structure  $\Delta$  est un groupe de Lie. Notons par  $\delta$  son algèbre de Lie.

k) Montrer que  $\varphi^*\rho$  est une forme invariante à gauche, en déduire une expression de  $\rho$  en termes de la forme de Maurer-Cartan de  $\Delta$ . En déduire que  $\varphi^*$  transporte sur  $\Gamma$  l'ensemble des champs de vecteurs de  $\Delta$  invariants à droite et que, notant par  $\psi$  l'application de  $\Delta \rightarrow V$  définie par  $f \rightarrow f(x_0)$ ,  $\psi_*$  réalise un isomorphisme d'algèbre entre  $\delta$  et  $\Gamma$ , isomorphisme indépendant du choix de  $x_0$ .

#### IV<sup>e</sup> PARTIE

l) On suppose que  $p = \dim \Gamma$  vérifie  $0 < p < n$ . Soit  $H$  une variété intégrale connexe de dimension  $p$  de  $N$ . Soit  $I$  une partie à  $p$  éléments de l'ensemble des  $n$  premiers entiers,  $q_I$  la projection de  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$  obtenu en biffant toutes les coordonnées dont le rang  $\notin I$ , soit

$$\tilde{\rho} = q_I \circ \rho|_H$$

Choisissons  $I$  de telle sorte que  $\tilde{\rho}_x$  soit inversible. Montrer que, si  $A \in \Gamma$  et si on note par  $\tilde{A}$  la restriction de  $A$  à  $H$ , on a

$$\theta(\tilde{A})\rho = \tilde{\rho}.$$

Appliquant III en déduire l'existence d'un groupe de Lie  $G_{I,H}$  de transformations de  $H$  conservant  $\tilde{\rho}$ . Montrer que  $G_{I,H}$  et  $G_{I',H'}$  ont leur algèbre de Lie canoniquement isomorphes et sont ainsi localement canoniquement isomorphes. On note par  $G$  le groupe de Lie *type* de la famille  $G_{I,H}$ , par  $\Phi_{I,H}$  l'isomorphisme canonique  $\Phi_{I,H} : G \rightarrow G_{I,H}$ . A tout  $g \in G$  on associe la transformation  $f$  de  $V$  laissant les variétés  $H$  globalement invariantes et définie par le fait que sa restriction à chaque  $H$  est la transformation  $\Phi_{I,H}(g)$ , (le choix de  $I$  étant arbitraire).

Posons

$$f = k(g)$$

Montrer que la restriction de  $k$  à un voisinage de  $e$  convenable est une injection. En déduire que par transport de structure on peut munir  $\Delta$  d'une structure de groupe de Lie, compatible avec la structure topologique naturelle de  $\Delta$  (la convergence d'une suite  $f_n \in \Delta$  étant définie comme la convergence uniforme de  $f_n$  et de ses dérivés premières sur tout compact de  $V$ ).

#### 16<sup>o</sup> INTÉGRATION D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL PAR QUADRATURES ET GROUPES DE LIE RÉSOUBLES

E notera une variété de dimension  $n + 1$ , de classe  $C^3$ ,  $G$  un groupe de Lie de dimension  $n$ ,  $e$  son élément neutre,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie,  $w \in \Lambda^1(G; \mathcal{G})$  sa forme de Maurer-Cartan,  $\tau_{g_0}$  la translation à gauche par  $g_0 \in G$ .

On suppose que  $G$  est un groupe de transformations de  $E$ , c'est-à-dire qu'à tout  $g \in G$  on a associé une transformation  $S_g : E \rightarrow E$  de telle sorte que

$$S_g \circ S_{g'} = S_{gg'},$$

l'application  $(x, g) \rightarrow S_g(x)$  étant une application de classe  $C^3$  de  $E \times G \rightarrow E$ .

On considère sur  $E$  la relation d'équivalence  $x \sim x'$  s'il existe  $g \in G$  tel que  $x' = S_g x$ , une classe d'équivalence étant appelée une *orbite* de  $G$ . On suppose que  $G$  opère sans points fixes c'est-à-dire que

$$(1) \quad S_g x = x \quad \text{pour un seul } x \in E \quad \text{entraîne} \quad g = e.$$

On suppose que chaque orbite de  $G$  est une sous-variété de  $E$  de dimension  $n$ .

D'autre part on se donne sur  $E$  un 1-champ  $M$  de classe  $C^2$ , tel que une orbite  $V$  et une courbe intégrale  $\Gamma$  de  $M$  se coupant en un point et un seul, point où  $\Gamma$  n'est pas tangente à  $V$ .

On notera par  $h_V(x)$  l'application  $E \rightarrow V$  définie ainsi : à tout  $x \in E$  on associe la courbe intégrale  $\Gamma_x$  de  $M$  passant par  $x$ . Soit  $y$  le point d'intersection de  $\Gamma_x$  avec  $V$ , on pose

$$h_V(x) = y.$$

On supposera que quel que soit  $g \in G$

$$(2) \quad S_g \text{ laisse invariant le 1-champ } M.$$

Le but du problème est d'utiliser l'hypothèse (2) pour ramener à des quadratures, moyennant l'hypothèse supplémentaire de II, la détermination des lignes intégrales de  $M$ .

### I<sup>re</sup> PARTIE

a) Soit  $V$  une orbite de  $G$ ,  $x_0 \in V$ . Posons

$$\varphi_{x_0}(g) = S_{g^{-1}}(x_0)$$

Remarquer que  $\varphi_{x_0}$  réalise une bijection de  $G$  sur  $V$  et que  $\tilde{x}_0$  dénotant un second point de  $V$ , il existe  $\gamma \in G$  tel que

$$\varphi_{\tilde{x}_0} = \varphi_{x_0} \circ \tau_\gamma.$$

Soit  $\psi_{x_0}$  la bijection réciproque de  $\varphi_{x_0}$ . Posons

$$(3) \quad \theta = \psi_{x_0}^* \omega$$

Montrer que  $\theta$  est indépendant du choix de  $x_0$  dans  $V$ .

A toute orbite  $V$  on associe ainsi de façon intrinsèque  $\theta \in \Lambda^1(V^*; \mathcal{G})$ .

b) Soit  $V_1, V_2$  deux orbites de  $G$ ,  $\theta_1, \theta_2$  les formes associées par (3), soit  $k_{2,1}$  la restriction de  $h_{V_2}$  à  $V_1$ . Montrer

$$k_{2,1} \circ S_g = S_g \circ k_{2,1}$$

en déduire que si  $x_1 \in V_1, x_2 = k_{2,1}(x_1), k_{2,1} \circ \varphi_{x_1} = \varphi_{x_2}$  alors conclure que,

$$(4) \quad k_{2,1}^* \theta_2 = \theta_1$$

c) Choisissons une orbite  $V$  de  $G$ , soit  $\theta$  sa forme associée par (3). Posons

$$\pi = h_V^* \theta$$

Montrer que  $\pi$  est indépendant du choix de l'orbite  $V$ , et que l'on construit ainsi de façon intrinsèque  $\pi \in \Lambda^1(E; \mathcal{G})$ . Remarquer que  $\pi$  satisfait l'équation de structure de Cartan-Darboux, en déduire qu'il existe par suite une application  $f: E \rightarrow G$  telle que

$$\pi = f^* \omega$$

Expliciter  $f$  en terme d'applications  $h$  et  $\psi$ .

Pourrait-on donner une définition de  $\pi$ , différente de celle proposée précédemment, à partir d'une application  $f$ ?

d) Montrer que quelle que soit l'orbite  $V$

$$\pi|_V = \theta$$

et que

$$\langle M, \pi \rangle = 0$$

Montrer que ces deux relations permettent de calculer  $\pi$  sans qu'il soit besoin de déterminer au préalable les lignes intégrales du 1-champ  $M$ . Montrer que  $M$  peut être défini par l'équation de Pfaff

$$\pi = 0$$

## II<sup>e</sup> PARTIE

Soit  $E$  une variété,  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie de dimension  $n$ ,  $\pi \in \Lambda^1(E; \mathcal{G})$  satisfaisant l'équation de structure de Cartan-Darboux.

e) Supposons  $n = 3$  et que l'on ait pu trouver une base  $e_1, e_2, e_3$  de  $\mathcal{G}$  telle que

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= 0 \\ [e_1, e_3] &= e_1 \\ [e_2, e_3] &= e_2 \end{aligned}$$

Écrire les équations de structure de Cartan-Darboux en terme des composantes  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ , de  $\pi$  sur cette base.

f) Sous les hypothèses de e) on considère le système de Pfaff

$$(5) \quad \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$$

Montrer que l'équation  $\pi_3 = 0$  s'intègre par une quadrature. Continuer l'intégration en restreignant le système (5) à une hypersurface solution de  $\pi_3 = 0$ , et ainsi ramener l'intégration de (5) à *trois quadratures*.

g) Si  $\mathcal{G}$  est une algèbre de Lie on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^1 &= [\mathcal{G}, \mathcal{G}], & \mathcal{G}^{(2)} &= [\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^1] \\ \mathcal{G}^{(n)} &= [\mathcal{G}^{(n-1)}, \mathcal{G}^{(n-1)}] \end{aligned}$$

On dit que  $\mathcal{G}$  est *résoluble* s'il existe  $N$  tel que  $\mathcal{G}^{(N)} = 0$ . Étendre la méthode d'intégration de f) aux groupes de Lie  $G$  dont l'algèbre de Lie est résoluble. (Montrer que  $u_k: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{G}^k$  définit un homomorphisme d'algèbre de Lie et résoudre par quadratures  $u_k \circ \pi = 0$ .)

*Exemple de l'exercice précédent* (qui peut être traité indépendamment)

a) On note par  $H$  le plan rapporté à un système d'axes  $Ox$  et  $Oy$ , on désigne par  $G$  le groupe des transformations de  $H$  engendré par les homothéties de centre  $O$  et les translations parallèles à l'axe des  $x$ . La transformation de  $G$  la plus générale s'écrit

$$(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$$

où

$$(1) \quad \begin{cases} \tilde{x} = \xi + \eta x \\ \tilde{y} = \eta y \end{cases}$$

Remarque que l'on peut identifier  $G$  à l'ensemble

$$\{(\xi, \eta) \mid \xi \text{ et } \eta \in \mathbf{R}, \eta \neq 0\}$$

la loi de composition étant donnée par

$$(\xi', \eta')(\xi, \eta) = (\xi' + \eta'\xi, \eta\eta')$$

Cette identification faite, montrer que

$$w_1 = \frac{d\xi}{\eta}, \quad w_2 = \frac{d\eta}{\eta}$$

sont deux formes invariantes par les translations à gauche de  $G$  et que la forme de Maurer-Cartan  $w$  de  $G$  s'écrit

$$w = e_1 w_1 + e_2 w_2$$

où  $e_1, e_2$  est une base convenable de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$ . Vérifier que

$$(2) \quad \begin{cases} dw_1 = w_1 \wedge w_2 \\ dw_2 = 0 \end{cases}$$

b) On considère dans le plan  $H$  l'équation différentielle du second ordre

$$(3) \quad yy'' = F(y')$$

Montrer qu'elle est invariante par les transformations de  $G$ .

Notant par  $E$  l'espace à trois dimensions  $x, y, z$ , en posant

$$y' = z$$

remarquer alors qu'il y a équivalence entre l'intégration de (3) et la recherche des lignes intégrales du 1-champ  $M$  défini sur  $E$  par le champ de vecteurs

$$X(p) \quad \begin{cases} y \\ zy \\ F(z) \end{cases} \quad \text{où} \quad p = (x, y, z)$$

A tout  $g \in G$  associons la transformation de  $E$

$$S_g : (x, y, z) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

où  $\tilde{z} = z$  et  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  sont donnés par (1).

Montrer que  $M$  est invariant par  $S_g$ .

c)  $h$  étant une constante notons par

$$V_h = \{(x, y, z) \mid y \neq 0 \text{ et } z = h\}$$

et par  $a_h = (0, 1, h)$ . Montrer que l'application

$$g \rightarrow S_g(a_h)$$

permet d'identifier  $G$  à  $V_h$ , et en transportant  $w_1$  et  $w_2$  par cette identification on obtient 2 formes  $\tilde{w}_1$  et  $\tilde{w}_2$

$$\tilde{w}_1 = \frac{dx}{y}, \quad \tilde{w}_2 = \frac{dy}{y}$$

invariantes par  $S_g$ .

Posons

$$\pi_1 = \tilde{w}_1 + b(x, y, z) dz, \quad \pi_2 = \tilde{w}_2 + c(x, y, z) dz$$

où  $b$  et  $c$  sont déterminés par les conditions  $\langle X, \pi_1 \rangle = 0$ ,  $\langle X, \pi_2 \rangle = 0$  (on suppose  $F(h) \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ). Montrer que  $b$  et  $c$  ne dépendent que de  $z$ . En déduire que  $\pi_1$  et  $\pi_2$  satisfont aux relations (2). Remarquer d'autre part que le 1-champ  $M$  peut être défini par le système de Pfaff

$$(4) \quad \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$$

d) Soit (4) un système de Pfaff sur  $E$  où les  $\pi_i$  satisfont les relations (2). Montrer qu'il existe une fonction  $f$  telle que

$$\pi_2 = df$$

et que le calcul de  $f$  s'obtient par une quadrature. Si  $\alpha$  est une constante on note par

$$W_\alpha = \{p \in E \mid f(p) = \alpha\}$$

Supposant que  $W_\alpha$  est une variété, notant par  $\rho_\alpha$  la restriction de  $\pi_1$  à  $W_\alpha$ , montrer qu'il existe une fonction  $k_\alpha$  défini sur  $W_\alpha$  vérifiant

$$dk_\alpha = \rho_\alpha$$

$k_\alpha$  s'obtient encore par une quadrature. Conclure en montrant que l'intégration de (4) dépend de 2 quadratures. Intégrer par cette méthode l'équation (3).

#### 17° ESPACE FIBRÉ DES REPÈRES ORTHONORMÉS SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

Le but du problème est de reprendre dans un cadre intrinsèque les fondements de la géométrie Riemannienne. Pour le traiter une connaissance des premières définitions de la théorie des variétés Riemanniennes est suffisante.

##### a) La forme différentielle canonique sur $\mathcal{U}(E)$

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ , muni d'une origine  $O$ . On notera par  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(E)$  l'ensemble de toutes les bases orthonormées de  $E$ . On identifiera une telle base avec l'application linéaire isométrique  $u$  de  $E$  dans  $\mathbf{R}^n$  qu'elle définit; ainsi  $\mathcal{U}(E)$  apparaît comme une sous-variété de  $\mathcal{L}(E; \mathbf{R}^n)$  et est ainsi muni d'une structure de variété  $C^\infty$ .

A tout élément fixé  $u_0 \in \mathcal{U}$  on associe le difféomorphisme  $\Phi_{u_0}$  de  $\mathcal{U}$  sur le groupe orthogonal  $O(n)$  défini par

$$(1) \quad \varphi_{u_0}(u) = u_0 \circ u^{-1}.$$

Soit  $\lambda$  la forme de Maurer Cartan de  $O(n)$ . Montrer que quel que soit  $u_0, u_1 \in \mathcal{U}$  on a

$$\varphi_{u_0}^* \lambda = \varphi_{u_1}^* \lambda,$$

en déduire que posant  $\mu = \varphi_{u_0}^* \lambda$  on définit ainsi une forme *canonique*  $\mu \in \Lambda^1(\mathcal{U}^*; \mathfrak{A}_{n,a})$ .

##### b) L'espace fibré des repères

L'ensemble de ce paragraphe constitue essentiellement l'introduction des notations et concepts utilisés dans la suite du problème, il contient peu de démonstrations.

Dans toute la suite du problème on notera par  $V$  une variété riemannienne de classe  $C^2$  et de dimension  $n$ . On associera à  $V$  l'ensemble  $\Sigma(V)$  constitué par la réunion de toutes les bases orthonormées de tous les espaces tangents à  $V$ , c'est-à-dire que

$$\Sigma = \bigcup_{x \in V} \mathcal{U}(T_x(V))$$

(Cette réunion étant une réunion *ensembliste disjointe* c'est-à-dire que  $\mathcal{U}(T_x(V)) \cap \mathcal{U}(T_{x'}(V)) = \emptyset$  si  $x \neq x'$ .)

Ainsi un élément  $r_0 \in \Sigma$  est constitué par la donnée d'un point  $x_0 \in V$  et d'une base orthonormée de  $T_{x_0}(V)$ . On définit une projection  $p$  de  $\Sigma$  sur  $V$  en associant à tout  $r_0 \in \Sigma$  le point  $x_0 = p(r_0)$  tel que  $r_0$  soit une base de  $T_{x_0}(V)$ . Il sera commode de noter par

$$\Sigma_{x_0} = p^{-1}(x_0) = \mathcal{U}(T_{x_0}(V)).$$

On notera par  $\tilde{\Gamma}(\Sigma)$  l'ensemble des applications  $h$  de  $V$  dans  $\Sigma$  vérifiant

$$p \circ h = \text{identité sur } V.$$

Avec ces notations la donnée d'un *champ de repères* sur  $V$  est équivalente à la donnée d'un élément de  $\tilde{\Gamma}(\Sigma)$ .

Ceci étant si  $h_0$  est un *champ de repères* donné sur  $V$  on lui associera la bijection

$$\psi_{h_0} : \Sigma \rightarrow V \times O(n)$$

définie par

$$(2) \quad \psi_{h_0}(r) = (p(r), \varphi_{h_0(p(r))}(r))$$

où  $\varphi$  a été définie en (1).

On notera par  $\Gamma(\Sigma)$  l'ensemble de tous les champs de repères de classe  $C^1$  de  $V$ . On supposera dans toute la suite que  $\Gamma(\Sigma)$  est non vide. On définira une *structure de variété de classe  $C^1$  sur  $\Sigma$*  en choisissant un élément  $h_0 \in \Gamma(\Sigma)$  et en transportant par  $\psi_{h_0}^{-1}$  la structure de variété sur  $V \times O(n)$ . (On voit facilement, mais ceci n'est pas demandé, que la structure de variété obtenue sur  $\Sigma$  ne dépend pas du choix de  $h_0$  dans  $\Gamma(\Sigma)$ ).

Remarquer alors que  $p$  est une application de classe  $C^1$  de  $\Sigma$  sur  $V$  et que  $\Sigma_{x_0}$  est une sous-variété de  $\Sigma$  pour tout  $x_0 \in V$ .

*Un groupe de transformations sur  $\Sigma$ .*

Notons par  $F$  l'ensemble des applications de classe  $C^1$  de  $V$  dans  $O(n)$ .  $F$  opère comme un *groupe de transformations sur  $\Sigma$*  par la formule

$$f \cdot r = f(p(r)) \circ r \quad \text{pour tout } r \in \Sigma, f \in F.$$

Une forme canonique sur  $\Sigma$ .

Nous définirons une forme  $\rho^1 \in \Lambda^1(\Sigma; \mathbf{R}^n)$  ainsi : étant donné  $r_0 \in \Sigma$ ,  $z \in T_{r_0}(\Sigma)$  nous poserons

$$\langle z, \rho_{r_0}^1 \rangle = r_0(p'(r_0) \cdot z)$$

Justifier très rapidement cette définition.

c) *Le parallélisme canonique sur  $\Sigma$ .*

On dira qu'un sous-espace  $E$  de  $T_{r_0}(\Sigma)$  est *transverse* si la restriction à  $E$  de  $p'(r_0)$  est une application bijective de  $E$  sur  $T_{x_0}(V)$ .

Si  $h \in \Gamma(\Sigma)$  on associe à  $h$  la forme différentielle  $\omega^h = \omega \in \Lambda^1(V^*; \mathbf{R}^n)$  définie par

$$\omega^h = h^* \rho^1.$$

On dira que le champ de repères  $h$  est *osculateur en  $x_0$*  si

$$(3) \quad (d\omega^h)_{x_0} = 0.$$

Ceci étant on veut montrer la proposition (P) *En tout point  $r_0 \in \Sigma$  il existe un sous-espace  $M_{r_0}$  transverse unique ayant la propriété que*

$$(4) \quad \langle z_1 \wedge z_2, d\rho_{r_0}^1 \rangle = 0 \quad \text{quel que soit } z_1, z_2 \in M_{r_0}$$

Associant à un sous-espace transverse  $E$

$$\Gamma_E(\Sigma) = \{h \in \Gamma(\Sigma) \mid T_{r_0}(h(V)) = E\}$$

remarquer que (P) est équivalent à

(P') *En tout point  $x_0 \in V$  on peut trouver un champ de repères osculateur. Si  $h_1$  et  $h_2$  sont deux champs de repères osculateurs en  $x_0$  tels que  $h_1(x_0) = h_2(x_0)$ , alors  $h_1'(x_0) = h_2'(x_0)$ .*

Pour démontrer (P') choisissons  $h_0 \in \Gamma(\Sigma)$  tel que  $h_0(x_0) = r_0$ . Alors tout  $h \in \Gamma(\Sigma)$  vérifiant

$$h(x_0) = r_0$$

peut s'écrire

$$h = f \cdot h_0 \quad \text{où } f \in F, f(x_0) = e.$$

Alors on aura

$$\omega_x^h = f(x) \circ \omega_x^{h_0}$$

et que (3) s'écrit

$$(df)_{x_0} \dot{+} \gamma_{x_0} = 0$$

où  $\gamma_{x_0}$  est la forme de Riemann-Christoffel du champ de repères  $h_0$ . Conclure en démontrant (P').

*Le n-champ canonique*

La correspondance  $r_0 \rightarrow M_{r_0}$  définit un  $n$ -champ  $M$  sur  $\Sigma$ . De plus on a

$$(5) \quad T_{r_0}(\Sigma) = T_{r_0}(\Sigma_{x_0}) \oplus M_{r_0}.$$

*Le parallélisme canonique sur  $\Sigma$ .*

Notons par  $q_{r_0}$  la projection de  $T_{r_0}(\Sigma)$  sur le premier facteur de la somme directe (5). Soit  $\mu_{r_0}$  la forme canonique définie en 1° sur  $\Sigma_{x_0}$  (où  $x_0 = p(r_0)$ ).

Définissons  $\rho^2 \in \Lambda^1(\Sigma; \mathcal{M}_{n,a})$  en posant

$$\rho_{r_0}^2 = \mu_{r_0} \circ q_{r_0}$$

Notant par  $\mathcal{D}_n$  l'algèbre de Lie du groupe des déplacements,  $\rho = (\rho^1, \rho^2)$ , alors on a  $\rho \in \Lambda^1(\Sigma; \mathcal{D}_n)$  et  $\rho$  définit un parallélisme sur  $\Sigma$ .

*d) Équation de structure de  $\rho$ .*

On veut montrer que quel que soit  $A, B \in \overset{1}{\otimes} \Sigma$  on a

$$(6) \quad - \langle A \wedge B, d\rho^1 \rangle = \rho^2(A)\rho^1(B) - \rho^2(B)\rho^1(A)$$

On veut démontrer cette relation au point  $r_0 \in \Sigma$ . Utilisant (5) remarquer qu'il suffit de la démontrer dans les trois cas suivants i), ii), iii)

- i)  $A_{r_0}$  et  $B_{r_0} \in M_{r_0}$
- ii)  $A_{r_0}$  et  $B_{r_0} \in T_{r_0}(\Sigma_{x_0})$  où  $x_0 = p(r_0)$
- iii)  $A_{r_0} \in M_{r_0}$  et  $B_{r_0} \in T_{r_0}(\Sigma_{x_0})$

Dans le cas i) on remarquera que (4) entraîne que les deux membres de (6) sont nuls.

Dans le cas ii) on considérera la restriction de  $\rho^1$  à  $\Sigma_{x_0}$ , et on montrera que les deux membres de (6) sont identiquement nuls.

Dans le cas iii) on introduira le champ  $\hat{A} \in \overset{1}{\otimes} \Sigma$  obtenu par transport parallèle sur  $\Sigma$  de  $A_{r_0}$  c'est-à-dire défini par l'équation

$$\langle \hat{A}, \rho \rangle = \text{constante} = (0, a)$$

où  $a \in \mathcal{M}_{n,a}$  est défini par

$$\langle A_{r_0}, \rho_{r_0} \rangle = (0, a).$$

Soit  $U_t$  le groupe à 1 paramètre de transformation de  $\Sigma$  associé à  $\hat{A}$ . Remarquer que l'on a

$$U_t r = e^{ta} \circ r$$

Soit  $\hat{B} \in \bigotimes^1 \Sigma$  tel que  $B_{r_0} = \hat{B}_{r_0}$  et que  $(U_t)_* \hat{B} = \hat{B}$ ; alors on a

$$\langle \hat{A} \wedge \hat{B}, d\rho^1 \rangle = \theta(\hat{A}) \langle \hat{B}, \rho^1 \rangle.$$

Utilisant le fait que  $p \circ U_t = p$  en déduire qu'en  $r_0$  le second membre est égal

$$\left[ \frac{d}{dt} [e^{ta} \circ \rho_{r_0}^1(B_{r_0})] \right]_{t=0}$$

Reconnaître dans cette dernière expression

$$\mu_{r_0}(A_{r_0}) \rho_{r_0}^1(B_{r_0})$$

et en déduire (6).

c) Soit  $h \in \Gamma(\Sigma)$ ,  $\gamma$  la forme de Riemann-Christoffel associé au champ de repère  $h$ . Déduire de (6) que l'on a

$$\gamma = h^* \rho^2.$$

Montrer que  $V$  est une variété riemannienne localement euclidienne si et seulement si le  $n$ -champ  $M$  défini en 3° est complètement intégrable.

Interpréter le tenseur de courbure sur  $V$  comme  $\theta \in \Lambda^2(\Sigma; \mathcal{D})$  telle que

$$d\rho + [\rho, \rho] = \theta.$$

# Calcul des variations

Le principe de Fermat décrit le trajet d'un rayon lumineux comme étant celui qui, de tous les trajets possibles, réalise le *temps de parcours minimum*. Cette idée caractérisant une trajectoire par une condition de minimum, fut ensuite développée avec grand succès en mécanique avec les principes de Maupertuis, de Lagrange, d'Hamilton.

A coté de ces problèmes physiques, des problèmes purement géométriques font appel au même cercle d'idées, par exemple : étant donné une surface  $S$  de l'espace euclidien à 3 dimensions et deux points  $M, M' \in S$ , trouver la courbe tracée sur  $S$ , joignant  $M$  à  $M'$  et ayant la *longueur minimum*. Plus généralement, étant donné une variété Riemannienne  $V$  et étant donné deux points de  $V$ , trouver la courbe joignant ces deux points et ayant une longueur minimum.

Utilisant les variétés abstraites, ces divers problèmes se trouvent immédiatement réunis dans un cadre géométrique unique. Le traitement intrinsèque du problème nous conduira naturellement à l'invariant intégral de Hilbert et à la forme d'Elie Cartan des équations d'Euler. Ensuite, la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour le minimum nous amènera à la notion de champ de courbes extrémales, notion qui correspond en optique géométrique à celle de l'ensemble des rayons d'un même faisceau lumineux.

La théorie sera complètement développée dans un cadre intrinsèque, faisant intervenir fibré tangent et fibré cotangent, ce dernier étant le cadre naturel des équations d'Hamilton.

## 1 Formulation du problème

### 1.1 MÉTRIQUE SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

Nous appellerons *métrie* sur un espace vectoriel  $E$  la donnée d'une fonction  $f$  *positivement homogène* c'est-à-dire telle que

$$f(az) = af(z) \quad a \in \mathbf{R}, a > 0.$$

Étant donné une variété  $V$ , une *métrique sur  $V$*  sera constituée par la donnée d'une métrique  $f_x$  sur chaque  $T_x(V)$ , cette métrique  $f_x$  « variant continuellement » lorsque  $x$  décrit  $V$  (resp. étant de classe  $C^1$  lorsque  $x$  varie).

Cette dernière phrase a besoin d'être définie de façon précise. Pour cela le plus simple est de considérer l'ensemble de tous les vecteurs tangents à  $V$ , qui constitue un espace fibré que nous avons noté  $T(V)$ . Si  $V$  est une variété de classe  $C^k$ , nous avons muni  $T(V)$  d'une structure de variété de classe  $C^{k-1}$  (cf. I-7). Il existe une projection naturelle

$$\pi : T(V) \rightarrow V$$

à savoir l'application qui à tout vecteur tangent associe son origine.

Nous poserons :

$$F(z) = f_x(z) \quad \text{où} \quad x = \pi(z)$$

$F$  est ainsi une fonction définie sur  $T(V)$ .

Dire que la *métrique est de classe  $C^1$*  signifiera que  $F$  est une fonction de classe  $C^1$  définie sur  $T(V)$ .

Écrivons le fait que  $f_x$  est une métrique sur  $T_x(V)$ , on a la relation suivante que satisfait  $F$ .

$$1.1.1 \quad F(az) = aF(z), \quad z \in T(V), \quad a \in \mathbf{R}, \quad a \geq 0$$

Inversement, considérons une fonction  $F$  définie sur  $T(V)$  satisfaisant 1.1.1 en posant

$$f_x = \text{restriction de } F \text{ à } T_x(V)$$

on définit une métrique sur  $V$ .

*Exemple.* Soit  $V$  une variété Riemannienne,  $g \in \bigotimes_{2s} V$  son tenseur métrique, on définit alors une métrique

$$F(z) = (g_x(z, z))^{\frac{1}{2}} \quad \text{où} \quad z \in T_x(V)$$

### Longueur d'une courbe

Étant donné une métrique sur  $V$ , nous pouvons définir la « longueur d'une courbe orientée »  $\Gamma$  tracée sur  $V$  et de classe  $C^1$ . Soit  $t \mapsto x(t)$  une représentation paramétrique (I.6.2.7) de  $\Gamma$ , envoyant  $[t_0, t_1]$  sur  $\Gamma$ , nous poserons :

$$1.1.2 \quad I(\Gamma) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) dt$$

Une telle intégrale est indépendante de la représentation paramétrique choisie. En effet si  $\hat{x}(\tau)$  est une seconde représentation paramétrique, alors il existe une fonction croissante  $t = h(\tau)$  telle que

$$\hat{x} = x \circ h$$

Utilisant le théorème des fonctions composées et 1.1.1 on a

$$1.1.3 \quad F\left(\frac{d\hat{x}}{d\tau}\right) = F\left(\frac{dx}{dt}\right) \frac{dh}{d\tau}$$

d'où les seconds membres de 1.1.2, calculés pour  $x$  et  $\hat{x}$ , sont égaux.

## 1.2 RELÈVEMENT SUR LE FIBRÉ TANGENT

Le fibré tangent apparaîtra comme le cadre naturel au calcul des variations. Il ne faut pas s'en étonner : en effet la théorie élémentaire des équations d'Euler conduit (cf. IV-2.6) à des équations différentielles du second ordre; ces dernières équations s'écrivent, de manière intrinsèque, comme celles des lignes de courant d'un *champ de vecteur sur le fibré tangent* (cf. I-7.3).

Pour cette raison, il conviendra de relever sur le fibré tangent les différentes notions introduites d'abord sur  $V$ .

### *Relèvement d'une courbe de $V$ sur $T(V)$*

Étant donné une courbe orientée  $\Gamma$  sur  $V$ ,  $x(t)$  une représentation paramétrique de  $\Gamma$ , nous appellerons relèvement de  $\Gamma$  associé à la représentation paramétrique  $x(t)$  la courbe  $\tilde{\Gamma}$  de  $T(V)$  définie par la représentation paramétrique

$$1.2.1 \quad \tilde{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Évidemment

$$1.2.2 \quad \pi \circ \tilde{x}(t) = x(t)$$

Il y a autant de relèvements de  $\Gamma$  sur  $T(V)$  que de représentations paramétriques de  $\Gamma$ .

Le vecteur vitesse de  $\tilde{x}(t)$  tangent à  $\tilde{\Gamma}$  en  $\tilde{x}(t)$ , soit  $C_t$ , sera appelé « l'accélération intrinsèque » du mouvement  $x(t)$ . Notant, pour simplifier les notations  $T(V)$  par  $V_1$ , alors on a  $C_t \in T_{\tilde{x}(t)}(V_1)$ . D'autre part 1.2.2 entraîne que

$$\pi'(C_t) = \tilde{x}(t) \quad \text{où} \quad C_t \in T_{\tilde{x}(t)}(V_1)$$

### *Notion de jet*

On appelle *jet* la donnée d'un vecteur  $y$  tangent à  $V_1$  au point  $z$  tel que :

$$\pi'(y) = z. \quad \text{Ainsi pour tout } t,$$

### 1.2.3 *l'accélération intrinsèque $C_t$ est un jet*

Remarquons qu'une équation différentielle du second ordre sur une variété  $V$  s'interprète de façon intrinsèque suivant un champ de jets sur  $T(V)$ .

### *Relèvement sur $T(V)$ d'un champ de vecteur sur $V$*

Soit  $A \in \bigotimes^1 V$ ,  $U_\lambda$  le groupe à un paramètre associé à  $A$ .

Soit  $z_0 \in V_1$ ,  $x_0 = \pi(z_0)$  et posons

$$\tilde{U}_\lambda(z_0) = U'_\lambda(x_0)z_0$$

Alors  $\tilde{U}_\lambda$  constitue un groupe à un paramètre de transformations de  $V_1$ . D'autre part

$$\pi(z_1) = U_\lambda(x_0) = U_\lambda(\pi(z_0))$$

d'où

$$1.2.4 \quad \pi \circ \tilde{U}_\lambda = U_\lambda \circ \pi$$

ce qui entraîne qu'une trajectoire de  $\tilde{U}_\lambda$  est projetée par  $\pi$  suivant une trajectoire de  $U_\lambda$ . Par suite notant par  $\tilde{A}$  le champ de vecteur sur  $V_1$  associé à  $\tilde{U}_\lambda$  on a]

$$1.2.5 \quad \pi'(\tilde{A}) \stackrel{r}{=} A$$

Nous dirons que  $\tilde{A}$  est le champ de vecteur sur  $V_1$  *relevé du champ*  $A$ .

### 1.3 FORME DIFFÉRENTIELLE DE HILBERT

Nous allons associer à la métrique définie par la fonction  $F$  une forme différentielle  $\omega$  qui jouera un rôle essentiel dans tout ce chapitre.

Soit  $V_1 = T(V)$ ,  $z \in V_1$ ,  $A \in T_z(V_1)$

Posons

$$1.3.1 \quad \langle A, \omega_z \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [F(z + \varepsilon \pi'(A)) - F(z)]$$

Remarquons que le crochet figurant dans le second membre de 1.3.1 est bien défini : soit  $x = \pi(z)$  alors  $\pi'(A) \in T_x(V)$ , et comme  $z \in T_x(V)$ , la somme  $z + \varepsilon \pi'(A)$  est bien définie.

Prenant une carte locale, on voit aisément qu'une hypothèse de classe  $C^1$  pour  $F$  implique que la limite du second membre de 1.3.1 existe et dépend linéairement de  $A$ . Le second membre de 1.3.1 définit une forme linéaire sur  $T_z(V_1)$  par suite un élément  $\omega_z \in T_z^*(V_1)$ .

La correspondance  $z \rightarrow \omega_z$  définit une forme différentielle  $\omega \in \Lambda^1(V_1)$ . On appelle  $\omega$  *la forme de Hilbert* de la métrique  $F$ .

*Propriétés de la forme de Hilbert*

$$1.3.2 \quad \text{Si } \pi'(A) = z \text{ alors } \langle A, \omega_z \rangle = F(z).$$

En effet on a, en tenant compte de 1.1.1

$$F(z + \varepsilon \pi'(A)) - F(z) = F(z(1 + \varepsilon)) - F(z) = \varepsilon F(z)$$

Soit maintenant  $\Gamma$  une courbe tracée sur  $V$ ,  $\tilde{\Gamma}$  un relèvement de  $\Gamma$ , alors

1.3.3

$$I(\Gamma) = \int_{\tilde{\Gamma}} \omega$$

En effet l'intégrale du second membre vaut

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle C_t, \omega \rangle dt$$

Utilisant 1.3.2 on obtient

$$\langle C_t, \omega \rangle = F(z(t))$$

d'où 1.3.3.

Une dernière propriété importante de la forme de Hilbert, mais évidente d'après 1.3.1 est que

$$\langle A, \omega_z \rangle$$

ne dépend que de  $\pi'(A)$ . Nous traduirons ce fait en disant que  $\omega_z$  est un *covecteur basique*.

Étant donné l'importance de cette notion dans le reste de ce chapitre, nous allons la développer en *détail* dans le paragraphe suivant.

#### 1.4 COVECTEURS BASIQUES SUR $T(V)$

Soit  $z \in V_1 = T(V)$ , étant donné, un covecteur  $y^* \in T_z(V_1)$ , nous dirons que  $y^*$  est basique s'il existe  $\hat{y} \in T_{\pi(z)}(V)$  tel que

$$1.4.1 \quad \langle y, y^* \rangle = \langle \pi'(y), \hat{y} \rangle \quad \text{pour tout} \quad y \in T_z(V)$$

Si  $\hat{y}$  existe, il est unique puisque  $\pi'$  est surjective.

On appellera  $\hat{y}$  le *covecteur de base* de  $y^*$ .

1.4.2 Si  $\omega$  est la forme de Hilbert alors  $\omega_z$  est un *covecteur basique* quel que soit  $z \in V_1$ .

Il sera intéressant d'avoir une caractérisation des covecteurs basiques. Elle est donnée par le lemme suivant d'algèbre linéaire, évident dans le cadre d'une théorie générale de la dualité des espaces vectoriels.

1.4.3 LEMME. — Soit  $z \in V_1$ ,  $y^* \in T_z(V_1)$ , alors  $y^*$  est *basique* si et seulement si

$$\pi'(y) = 0 \quad \text{entraîne} \quad \langle y, y^* \rangle = 0 \quad (y \in T_z(V_1))$$

PREUVE. — La nécessité résulte immédiatement de 1.4.1.

Inversement supposons  $\ker(\pi') \subset \ker(y^*)$ .

Pour tout  $\hat{y} \in T_{\pi(z)}(V_1)$  définissons

$$l(\hat{y}) = \langle y, y^* \rangle \quad \text{où l'on choisit} \quad y \in (\pi')^{-1}(\hat{y}).$$

Remarquons que la valeur du second membre ne dépend pas du choix de  $y$ , en effet si  $y, y_1 \in (\pi')^{-1}(\hat{y})$  alors

$$\pi'(y) = \pi'(y_1)$$

C'est-à-dire  $y - y_1 \in \ker(\pi')$  et par suite

$$\langle y - y_1, y^* \rangle = 0$$

ce qui montre que  $l$  est bien défini.

On vérifie immédiatement que  $l$  est une forme linéaire sur  $T_{\pi(z)}(V)$  et on a d'après sa définition

$$\langle y, y^* \rangle = l(\pi'(y))$$

ce qui démontre 1.4.3.

Nous allons démontrer un lemme moins évident et dont l'intérêt apparaîtra au paragraphe suivant.

1.5 LEMME FONDAMENTAL. — Soit  $z \in V_1, y \in T_z(V_1)$ ,  $y$  étant un jet, c'est-à-dire tel que

$$1.5.1 \quad \pi'(y) = z$$

Soit  $\omega$  la forme de Hilbert, alors

$$1.5.2 \quad i(y) (d\omega)_z \quad \text{est un covecteur basique}$$

PREUVE. — En utilisant 1.4.3 il suffit de montrer que quel que soit  $B \in \bigotimes^1 V_1$ , vérifiant

$$1.5.3 \quad \pi'(B) = 0 \quad \text{alors} \quad \langle B_z, i(y) (d\omega)_z \rangle = 0,$$

ce que l'on peut écrire

$$1.5.4 \quad \langle y, i(B) (d\omega)_z \rangle = 0.$$

D'après la formule de Cartan

$$\theta(B)\omega = i(B) d\omega + d(\langle B, \omega \rangle)$$

Or 1.5.3 et 1.4.2 entraînait  $\langle B, \omega \rangle = 0$  d'où 1.5.4 s'écrit

$$1.5.5 \quad \langle y, (\theta(B)\omega)_z \rangle = 0$$

Pour calculer  $\theta(B)\omega$  il est naturel d'introduire le groupe de transformations de  $V_1$ , soit  $H_\tau$ , associé à  $B$ .

Fixons  $x_0 \in V$ , alors 1.5.3 et le théorème du rang constant implique que

$$B_u \text{ est tangent à } \pi^{-1}(x_0) \quad \text{quel que soit } u \in \pi^{-1}(x_0)$$

par suite  $H_\tau$  laisse invariant  $\pi^{-1}(x_0)$  ce qui s'écrit

$$1.5.6 \quad \pi \circ H_\tau = \pi$$

Soit

$$g(\tau) = \langle \mathcal{Y}, (H_\tau^* \omega)_z \rangle = \langle H'_\tau(z) \cdot \mathcal{Y}, \omega_{H_\tau(z)} \rangle$$

D'après 1.5.6 on a

$$\pi' \circ H'_\tau = \pi'$$

d'où utilisant 1.5.1 et la définition 1.3.1 de la forme de Hilbert, on obtient

$$g(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [F(H_\tau(z) + \varepsilon z) - F(H_\tau(z))]$$

et 1.5.5 est équivalent à

$$1.5.7 \quad g'(0) = 0$$

Posons  $x_0 = \pi(z)$ , notons par

$$\begin{aligned} E &= \pi^{-1}(x_0) \\ f &= \text{restriction de } F \text{ à } E \end{aligned}$$

Comme on a vu en 1.5.6  $H_\tau$  laisse  $E$  invariant; notons par  $h_\tau$  sa restriction à  $E$ . Alors avec ces notations  $g(\tau)$  s'écrit

$$g(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(h_\tau(z) + \varepsilon z) - f(h_\tau(z))]$$

ce qui montre que le calcul de  $g(\tau)$  ne dépend que d'opérations effectuées dans l'espace vectoriel  $E$ . Si  $z = 0$  alors  $g(\tau) = 0$  et 1.5.7 est vrai. Supposons  $z \neq 0$  et choisissons une base de  $E$  de telle sorte que  $z$  soit le premier vecteur de base. Alors  $f$  s'écrit comme une fonction de  $n$  variable  $\xi^1 \dots \xi^n$  et l'on a

$$g(\tau) = \frac{\partial f}{\partial \xi^1}(h_\tau(z))$$

On montrera 1.5.7 en montrant que

$$1.5.8 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^1 \partial \xi^j}(z) = 0 \quad \text{quel que soit } 1 \leq j \leq n.$$

Or d'après 1.1.1  $f$  est une fonction homogène de degré 1, par suite elle vérifie l'identité d'Euler

$$\sum_{k=1}^n \xi^k \frac{\partial f}{\partial \xi^k} = f$$

Dérivons cette identité par rapport à  $\xi^j$  on obtient  $n$  identités

$$\sum_{k=1}^n \xi^k \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^k \partial \xi^j} = 0$$

Écrivons ces identités au point  $z = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$  on obtient 1.5.8 et par suite 1.5.7 et le lemme est démontré.

## 2 Une condition nécessaire d'extrémum régulier : l'équation d'Euler-Cartan

### 2.1 COURBES EXTRÉMALES RÉGULIÈRES

Nous allons d'abord préciser les notions de minimum envisagé rapidement dans l'introduction.

Étant donné une variété  $V$  munie d'une métrique  $F$ ,  $x_0, x_1$  deux points de  $V$ , nous dirons qu'une courbe  $\Gamma$  joignant  $x_0$  à  $x_1$  est une courbe extrémale si

2.1.1  $\Gamma$  est de classe  $C^1$ .

2.1.2 Quelle que soit la courbe  $\Delta$  de classe  $C^1$  joignant  $x_0$  à  $x_1$  on a

$$I(\Gamma) \leq I(\Delta)$$

On appellera courbe extrémale *régulière* une courbe  $\Gamma$  pour laquelle la condition 2.1.1 aura été remplacée par la condition plus forte

2.1.3  $\Gamma$  est de classe  $C^2$ .

On a alors

### 2.2 THÉORÈME FONDAMENTAL (EULER-CARTAN)

Soit  $V$  une variété de classe  $C^3$ ,  $F$  une métrique de classe  $C^2$  définie sur  $V$ ,  $w$  la forme de Hilbert associée à cette métrique,  $\Gamma$  une courbe extrémale régulière,  $x(t)$  une représentation paramétrique de  $\Gamma$ ,  $C_t$  l'accélération intrinsèque de  $x(t)$ , alors on a

$$2.2.1 \quad i(C_t)(dw)_{x(t)} = 0$$

*Remarque.* On appellera l'équation 2.2.1 l'équation d'Euler-Cartan. Un des aspects du théorème 2.2 c'est que l'on est libre de choisir une représentation paramétrique arbitraire de  $\Gamma$ .

Des choix de représentation paramétrique différents conduiront à des expressions analytiques différentes de 2.2.1, bien que toujours équivalentes entre elles.

*Plan général de la démonstration*

Nous considérons  $A \in \overset{1}{\otimes} V$ ,  $U_\lambda$  le groupe à 1 paramètre de transformation de  $V$  associé. Nous noterons

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda &= U_\lambda(\Gamma) \\ f_A(\lambda) &= I(\Gamma_\lambda) \end{aligned}$$

Supposons que

$$2.2.2 \quad A(x_0) = A(x_1) = 0$$

alors on aura  $U_\lambda x_0 = x_0$ ,  $U_\lambda x_1 = x_1$ , par suite  $\Gamma_\lambda$  passera par  $x_0$  et  $x_1$ . L'hypothèse que  $\Gamma$  est extrémale entraînera

$$f_A(0) \leq f_A(\lambda)$$

c'est-à-dire supposant  $f$  de classe  $C^1$ , que

$$2.2.3 \quad f'_A(0) = 0.$$

La démonstration du théorème se constituera de deux points, d'abord du calcul de  $f'(0)$ , ensuite la démonstration que  $f'(0) = 0$  quel que soit  $A$  vérifiant 2.2.2 entraîne 2.2.1.

### 2.3 CALCUL DE LA VARIATION DE LA LONGUEUR D'UNE COURBE

Nous allons donner une proposition permettant de calculer  $f'(0)$  sans l'hypothèse que les extrémités de  $\Gamma$  restent fixes, c'est-à-dire sans supposer 2.2.2.

PROPOSITION. — *Les notations étant celles du paragraphe 2.2. Soit  $\Delta$  une courbe orientée de classe  $C^2$  tracée sur  $V$  et joignant  $x_0$  à  $x_1$ , soit  $A \in \bigotimes^1 V$ ,  $U_\lambda$  le groupe à 1 paramètre associé,  $\Delta_\lambda = U_\lambda(\Delta)$ ,  $f(\lambda) = I(\Delta_\lambda)$ , alors on a*

$$2.3.1 \quad f'_A(0) = \langle \tilde{A}, w \rangle_{z_1} - \langle \tilde{A}, w \rangle_{z_0} + \int_{\tilde{\Delta}} i(\tilde{A}) dw$$

(où  $z_1$  et  $z_0$  sont les extrémités de  $\tilde{\Delta}$ ).

PREUVE. — Choisissons une représentation paramétrique  $x(t)$  de  $\Delta$ . Alors  $U_\lambda(x(t))$  sera représentation paramétrique de  $\Delta_\lambda$ , notons par  $\tilde{\Delta}_\lambda$  le relèvement de  $\Delta_\lambda$  associé à cette représentation, on a, d'après la définition de  $\tilde{U}_\lambda$

$$\tilde{\Delta}_\lambda = \tilde{U}_\lambda(\tilde{\Delta})$$

D'autre part, d'après 1.3.3

$$f(\lambda) = \int_{\tilde{\Delta}_\lambda} w = \int_{\tilde{U}_\lambda(\tilde{\Delta})} w$$

Utilisant la définition de  $\tilde{U}_\lambda^*$  on obtient

$$f(\lambda) = \int_{\tilde{\Delta}} \tilde{U}_\lambda^* w$$

Dérivons sous le signe somme, on obtient

$$f'(0) = \int_{\tilde{\Delta}} \theta(\tilde{A}) w.$$

Utilisant la formule d'Elie Cartan

$$\theta(\tilde{A})w = d(i(\tilde{A})w) + i(\tilde{A})dw$$

et remarquant que

$$\int_{\tilde{\Delta}} d(i(\tilde{A})w) = [i(\tilde{A})w]_{z_0}^{z_1} = \langle \tilde{A}, w \rangle_{z_1} - \langle \tilde{A}, w \rangle_{z_0}$$

on démontre 2.3.1.

#### 2.4 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'EULER-CARTAN

Utilisant 2.2.2 et 2.3.1 on obtient

$$\begin{aligned} f'_A(0) &= \int_{\tilde{\Gamma}} i(\tilde{A})dw = \int_{t_0}^{t_1} \langle \tilde{A}_{x(t)} \wedge C_t, (dw)_{x(t)} \rangle dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \langle \tilde{A}_{x(t)}, i(C_t)(dw)_{x(t)} \rangle dt \end{aligned}$$

Utilisons le lemme fondamental 1.5 l'hypothèse 1.5.1 étant vérifiée en vertu de 1.2.3, on obtient

$$i(C_t)(dw)_{x(t)} \text{ est un covecteur basique.}$$

Soit  $\psi_t$  son covecteur de base, alors  $\psi_t \in T_{x(t)}(V^*)$  et en vertu de 1.2.5

$$2.4.1 \quad f'_A(0) = - \int_{t_0}^{t_1} \langle A_{x(t)}, \psi_t \rangle dt$$

Supposons  $\psi_t \neq 0$ . Soit  $t_2$  tel que

$$2.4.2 \quad \psi_{t_2} \neq 0$$

Alors comme  $\psi$  dépend continûment de  $t$  il existe un intervalle

$$I = [t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon], \quad \text{où} \quad t_0 < t_2 - \varepsilon \quad \text{et} \quad t_1 > t_2 + \varepsilon$$

dans lequel  $\psi_t \neq 0$ .

Pour tout  $t \in I$  choisissons  $z_t \in T_{x(t)}(V)$ , tel que

$$\langle z_t, \psi_t \rangle = 1 \quad t \in I$$

Nous choisissons de plus  $z_t$  dépendant de classe  $C^1$  de  $t$ . Soit  $B \in \bigotimes^1 V$ , tel que

$$B_{x(t)} = z_t \quad t \in I.$$

Notons par  $g$  une fonction de classe  $C^1$  définie sur  $V$ , positive telle que  $g(x(t_2)) = 1$   $g(x(t)) = 0$  si  $t \notin I$ .

Posons

$$A = gB$$

Alors  $A$  satisfait 2.2.2. D'autre part on a pour ce champ  $A$

$$\begin{aligned} f'_A(0) &= - \int_{t_0}^{t_1} g(x(t)) \langle B_{x(t)}, \psi_t \rangle dt \\ &= - \int_{t_2-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} g(x(t)) dt < 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit 2.2.3, montre que 2.4.2 est absurde et démontre le théorème 2.2 d'Euler-Cartan.

## 2.5 EXEMPLE : GÉODÉSIIQUES D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

Soit  $V$  une variété riemannienne. On munit  $V$  d'une métrique  $F(Z)$  en posant

$$F(z) = (z|z)^{1/2} = (g_x(z, z))^{1/2}, \quad z \in T_x(V)$$

où  $g \in \bigotimes_{2,s} V$  dénote le tenseur métrique sur  $V$ . On notera également  $F(z)$  par  $\|z\|$ .

Soit  $\Gamma$  une courbe orientée de  $V$ . On appellera tangente unitaire à

$$2.5.1 \quad A_x \in T_x(\Gamma), \quad \|A_x\| = 1,$$

$A_x$  étant orienté dans le sens de  $\Gamma$ , on a avec ces notations

Soit  $\Gamma$  une courbe régulière, alors  $\Gamma$  satisfait l'équation d'Euler-Cartan si et seulement si

$$2.5.2 \quad \nabla_A A = 0$$

où  $\nabla$  dénote la dérivation covariante.

*Remarque.*  $A \in \bigotimes_1 \Gamma$ , alors  $\nabla_A B$  a été défini suivant la méthode considérée en III 8.6.1

PREUVE. — La forme de Hilbert s'écrit après un calcul immédiat.

$$w_z(B) = 2(z|\pi'(B))$$

choisissons un champ de repère orthonormé défini par  $\lambda \in \Lambda^1(V; \mathbf{R}^n)$

$$\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)$$

Nous choisissons  $A$  de telle sorte que

$$2.5.3 \quad \lambda(A) = (1, 0, 0, \dots, 0) = e_1$$

Associons à  $\lambda$  un difféomorphisme  $\psi$  de  $T(V)$  sur  $V \times \mathbf{R}^n$  défini en posant

$$\psi(z) = (x, \lambda_x(z)) \quad x = \pi(z).$$

Nous transportons notre problème par ce difféomorphisme et nous notons par

$\tilde{z}$ ,  $\tilde{w}$ , ... les éléments transportés. On a :

$$\tilde{z} = (x, \xi) \quad \text{où} \quad x \in V, \xi \in \mathbf{R}^n$$

Posons

$$\tilde{\lambda}^i = \pi^* \lambda^i \quad \text{alors} \quad \tilde{\lambda}^i \in \Lambda^1(\tilde{V}_1^*)$$

alors on a

$$\tilde{w}_{\tilde{z}} = \sum_i \xi^i \hat{\lambda}_x^i$$

Par suite on a

$$d\tilde{w} = \sum_i d\xi^i \wedge \hat{\lambda}_x^i + \xi^i \wedge d\hat{\lambda}^i$$

On a

$$T_{\tilde{z}}(\tilde{V}_1) = T_x(V) \oplus \mathbf{R}^n$$

A tout  $X \in \bigotimes^1 V$ , on associe le champ  $Y \in \bigotimes^1 \tilde{V}$ , défini par

$$Y_{\tilde{z}} = (X_x, 0)$$

La forme

$$i(C_i) d\omega \quad \text{étant basique,}$$

l'équation d'Euler-Cartan est équivalente à

$$2.5.4 \quad \langle \hat{X} \wedge C, d\omega \rangle_{z(t)} = 0 \quad \text{quel que soit} \quad X \in \bigotimes^1 V.$$

D'où écrivant

$$C_x = C_x^1 + C_x^2 \quad \text{avec} \quad C^1 \in T_x(V), \quad C_x^2 \in \mathbf{R}^n,$$

et, tenant compte de l'expression de  $d\omega$ , on obtient que 2.5.4 s'écrit

$$(C^2 | \hat{\lambda}(\hat{X})) + (\xi | \langle \hat{X} \wedge C, d\hat{\lambda} \rangle) = 0$$

où les produits scalaires sont des produits dans  $\mathbf{R}^n$  muni de la structure euclidienne naturelle.

On a

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \wedge C, d\hat{\lambda} \rangle &= \langle \pi'(\hat{X}) \wedge \pi'(C), d\lambda \rangle \\ &= \langle X \wedge C^1, d\lambda \rangle \end{aligned}$$

Si  $\gamma$  est la forme de Riemann Christoffel associée à  $\lambda$  ceci s'écrit

$$\gamma(X)\lambda(C^1) - \gamma(C^1)\lambda(X)$$

d'où 2.5.2 s'écrit

$$2.5.5 \quad - (C^2 | \lambda(X)) + (\xi | \gamma(X)\lambda(C^1) - \gamma(C^1)\lambda(X)) = 0$$

Choisissons une représentation paramétrique de  $\Gamma$  normale c'est-à-dire telle que

$$\|x'(t) \cdot 1\| = 1$$

(Si  $y(t)$  est une représentation paramétrique quelconque de  $\Gamma$  on obtient une représentation normale en effectuant le changement de variable

$$t = \varphi(t) \quad \text{où} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \left\| \frac{dy}{dt} \right\|^{-1}$$

alors on a d'après 2.5.1

$$\psi(A_{x(t)}) = (x(t), e_1)$$

d'où

$$C_t^1 = A_{x(t)}, \quad C_t^2 = 0$$

d'où 2.5.5 s'écrit

$$(e_1 | \gamma(\mathbf{X}) e_1 - \gamma(\mathbf{A}) \lambda(\mathbf{X})) = 0$$

Utilisant l'antisymétrique on a :

$$(e_1 | \gamma(\mathbf{X}) e_1) = 0$$

d'où l'équation s'écrit

$$(\gamma(\mathbf{A}) e_1 | \lambda(\mathbf{X})) = 0 \quad \text{quel que soit } \mathbf{X}$$

C'est-à-dire

$$2.5.6 \quad \gamma(\mathbf{A}) e_1 = 0$$

Or on a

$$\nabla_{\mathbf{A}} \mathbf{A} = \theta(\mathbf{A}) \lambda(\mathbf{A}) + \gamma(\mathbf{A}) \lambda(\mathbf{A})$$

c'est-à-dire que 2.5.6 n'est rien d'autre que 2.5.2 et l'équivalence est ainsi démontrée.

## 2.6 EXEMPLE : LES ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE

L'équation satisfaite par les extrémales mise sous la forme

$$i(C_t) dw = 0$$

est d'une grande souplesse, on est en effet libre de choisir la représentation paramétrique la plus adaptée à notre problème (par exemple, la représentation normale dans le cas de 2.5). Nous allons dans ce paragraphe expliciter complètement les calculs dans le cas de la représentation paramétrique où le paramètre est l'une des coordonnées.

Donnons d'abord la formulation classique du problème par Euler-Lagrange. On se donne une fonction

$$L(\lambda, y, y')$$

où  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $y \in \mathbf{R}^n$ ,  $y' \in \mathbf{R}^n$ . A une application  $\lambda \mapsto y(\lambda)$  de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$  on associe

$$2.6.1 \quad \hat{\mathbf{I}}(y) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} L\left(\lambda, y(\lambda), \frac{dy(\lambda)}{d\lambda}\right) d\lambda.$$

Le problème qu'on se pose est de déterminer la fonction  $y(\lambda)$  de telle sorte que  $a, b \in \mathbf{R}^n$  étant donnés,

$$2.6.2 \quad \begin{cases} a) \text{ on ait } y(\lambda_0) = a, y(\lambda_1) = b \text{ et} \\ b) \hat{I}(y) \text{ soit minimum parmi toutes les fonctions } y(\lambda) \text{ de classe } C^1 \\ \text{satisfaisant } a). \end{cases}$$

Il est facile de ramener 2.6.2 à un problème du type considéré en 2.2. Notons par  $V = \mathbf{R}^{n+1}$ , un point de  $V$  étant  $(\lambda, y)$ .

La donnée d'une fonction  $y(\lambda)$  définit sur  $V$  une courbe  $\Gamma_\lambda$  dont la représentation paramétrique s'écrit

$$2.6.3 \quad \begin{cases} \lambda = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$V$  est muni de la carte numérique suivante :  $(\lambda, y_1, \dots, y_n)$ ,

qui donne sur  $T(V)$  le système de coordonnées  $(\lambda, y_1, \dots, y_n, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Écrivant

$$L(\lambda, y, y') = L(\lambda, y, y'_1 \dots y'_n)$$

nous poserons  $z \in T(V)$ ,  $z = (\lambda, y_1 \dots y_n, \xi_0, \xi_1 \dots \xi_n)$

$$2.6.4 \quad F(z) = \xi_0 L\left(\lambda, y, \frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right)$$

Alors  $F(z)$  définit par suite une métrique sur  $V$ . Notant par  $I$  l'intégrale associée à cette métrique, on a en prenant la représentation paramétrique 2.6.3 de  $\Gamma_y$  :

$$I(\Gamma_y) = \hat{I}(y)$$

Si bien que le problème d'extrémales de 2.8.2 est ramené à 2.2.

Calculons en termes de  $L$  la forme de Hilbert de  $F$ , on a

$$w = \frac{\partial F}{\partial \xi_0} d\lambda + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i} dy_i$$

Calculant les dérivées partielles de  $F$  à l'aide de 2.6.4 on obtient

$$w = L d\lambda + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial y'_i} \left( dy_i - \frac{\xi_i}{\xi_0} d\lambda \right)$$

$w$  est invariant par une homothétie sur les  $\xi$ . Pour marquer ce fait posons

$$m_i = \frac{\xi_i}{\xi_0}$$

et avec ces notations on a

$$2.6.5 \quad w = L d\lambda + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial y'_i} (dy_i - m_i d\lambda)$$

Dans cette expression on a posé

$$L = L(\lambda, y, m), \quad \frac{\partial L}{\partial y'_i} = \frac{\partial L}{\partial y'_i}(\lambda, y, m)$$

Remarquons que sur le relèvement  $\tilde{\Gamma}_y$  de  $\Gamma_y$  on a

$$2.6.6 \quad m_i = y'_i(\lambda)$$

Notons par  $C_t$  l'accélération intrinsèque associée à  $\Gamma_y$ , alors  $C_t$  a pour composantes

$$2.6.7 \quad C_t = (1, y'_1, \dots, y'_n, 0, y''_1, \dots, y''_n)$$

D'où 2.6.6 et 2.6.7 donnent

$$2.6.8 \quad i(C_t) (dy_i - m_i d\lambda) = 0 \quad i = 1 \dots n.$$

Dérivant extérieurement 2.6.5 on a

$$dw = dL \wedge d\lambda + \sum_{i=1}^n d \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) \wedge (dy_i - m_i d\lambda) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial y'_i} dm_i \wedge d\lambda$$

Calculons  $i(C_t) dw$  utilisant le fait que  $i(C_t)$  est une antidérivation, que 2.6.8 est satisfaite et que si  $h$  est une fonction  $i(C_t) dh = \theta(C_t)h$

$$2.6.9 \quad \begin{aligned} i(C_t)dw &= (\theta(C_t)L) d\lambda - dL + \sum_i \left( \theta(C_t) \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) (dy_i - m_i d\lambda) \\ &\quad - \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i} (\theta(C_t)m_i) \wedge d\lambda \\ &\quad + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} dm_i \end{aligned}$$

On peut ajouter une interprétation simple de  $\theta(C_t)$ . Soit en effet  $f(\lambda, y, m)$  on a en se reportant à 2.6.7

$$\theta(C_t)f = \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} y'_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} y''_i$$

ceci n'est rien autre que

$$\frac{d}{d\lambda} (f(\lambda, y(\lambda), y'(\lambda)))$$

ce que l'on notera rapidement  $\frac{d}{d\lambda} f$  (notation un peu rapide mais consacrée par l'usage).

D'où 2.6.9 s'écrit en tenant compte de 2.6.6

$$i(C_t) dw = \theta(C_t)L d\lambda - dL + \sum_i \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) (dy_i - y'_i d\lambda) - \sum_i y''_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} d\lambda + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} dm_i$$

On a

$$(\theta(C_t)L) d\lambda = \left[ \frac{\partial L}{\partial \lambda} + \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial y_1} y'_i + \frac{\partial L}{\partial y'_i} y''_i \right) \right] d\lambda - dL = - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda - \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i} dy_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} dm_i$$

d'où

$$i(C_t) dw = \sum_i y'_i \frac{\partial L}{\partial y_i} d\lambda - \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i} dy_i + \sum_i \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) (dy_i - y'_i d\lambda)$$

Écrivons que le coefficient de  $d\lambda$  et des  $dy_i$  sont nuls on obtient, d'abord pour  $dy_i$

$$2.6.10 \quad - \frac{\partial L}{\partial y_i} + \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) = 0 \quad i = 1 \dots n$$

et pour  $d\lambda$

$$2.6.11 \quad \sum_i y'_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} - y'_i \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) = 0$$

En multipliant l'équation 2.6.10 par  $-y'_i$  et en additionnant les équations correspondant aux différentes valeurs de  $i$  on obtient 2.6.11 qui apparaît ainsi comme une conséquence de 2.6.10 qui est dans ce système de coordonnées la traduction de 2.2.1.

On a ainsi démontré :

**PROPOSITION.** — Soit  $L(\lambda, y_1 \dots y_n, y'_1, \dots y'_n)$  une fonction de classe  $C^2$  strictement positive.

Appelons extrémale régulière la donnée de  $n$  fonctions  $y_1(\lambda) \dots y_n(\lambda)$  de classe  $C^2$  telle l'intégrale  $\hat{I}(y)$  défini en 2.6.1 soit minimum sous les conditions 2.6.2 a). Alors les fonctions  $y_i$  satisfont les équations d'Euler-Lagrange

$$2.6.12 \quad \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) = 0 \quad i = 1 \dots n.$$

Ces équations sont équivalentes à l'équation 2.2.

*Remarque.* Pour bien fixer la terminologie, étant donné une variété  $V$  munie d'une métrique  $F$  nous appellerons une solution de l'équation

$$i(C_t) dw = 0$$

une *géodésique*. Alors avec ce vocabulaire 2.2 se lit : toute courbe extrémale régulière est une géodésique.

En utilisant la représentation paramétrique d'Euler les géodésiques apparaissent comme les solutions des équations

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) = 0 \quad i = 1 \dots n.$$

En développant le second terme de ces équations on obtient une expression qui est linéaire en  $y''_i$ . D'où un système de  $n$  équations linéaires en  $y''_i$  que l'on pourra résoudre sous la forme

$$y'' = G(\lambda, y, y')$$

si la matrice des coefficients des  $y''_i$  c'est-à-dire *la matrice*

$$2.6.13 \quad \left( \frac{\partial^2 L}{\partial y'_i \partial y'_j} \right)_{i,j} \quad \text{est de rang } n.$$

La théorie des équations différentielles du second ordre nous apprend que, donnée  $a, m$  et  $\lambda_0$  il existe une solution unique de  $y'' = G(\lambda, y, y')$  telle que

$$y(\lambda_0) = a, \quad y'(\lambda_0) = m$$

Transcrivant ceci géométriquement on obtient :

*Étant donné  $x_0 \in V$  et  $X_0 \in T_{x_0}(V)$  il existe une géodésique unique passant par  $x_0$  et tangente à  $X_0$ .*

De même en utilisant la propriété suivante des équations différentielles du second ordre : si  $(a_0, \lambda_0), (a_1, \lambda_1)$  sont assez voisins il existe une solution unique de  $y'' = G(\lambda, y, y')$  telle  $y(\lambda_i) = a_i$  ( $i = 0, 1$ ) on obtient

*Étant donné  $x_0 \in V$ , il existe un voisinage  $O$  de  $x_0$  tel que pour tout point  $x \in O$  il existe une géodésique unique joignant  $x_0$  à  $x$  et tracée dans  $O$ .*

### 3 Champs géodésiques. Invariants intégraux

Poincaré, puis E. Cartan, ont montré que les équations de la mécanique pouvait être formulé en exprimant qu'une certaine intégrale curviligne, l'intégrale « d'impulsion-énergie », restait invariante durant le mouvement. C'est cette approche qui conduisit E. Cartan à formuler les équations d'Euler sous la forme 2.2.1 Nous allons, dans le cadre général du calcul des variations, donner une brève introduction à cette théorie à la fois en raison de son intérêt propre et également en raison d'une application que nous ferons dans la recherche de condition suffisante de minimum.

## 3.1 DESCENTE DE LA FORME DE HILBERT

Donnons-nous  $z \in T_x(V)$  alors

$w_z$  est un covecteur *basique* que l'on peut identifier à un covecteur  $\tilde{w}_z$  de  $(T_x(V))^*$

On appelle

$\tilde{w}_z$  la forme de Hilbert *descendue* sur  $V$  suivant le vecteur  $z$

Plus généralement soit une sous-variété  $W$ ,  $x_0 \in W$  et  $z \in T_{x_0}(V)$ ; considérons la *restriction* de  $w_z$  à  $T_{x_0}(W)$ , on appellera cette restriction la forme de Hilbert *descendue sur  $W$*  suivant le vecteur  $z$ .

Si maintenant en tout  $x \in W$  nous nous sommes donné  $A_x \in T_x(V)$ , alors la descente sur  $W$  suivant  $A_x$  définit une forme  $\hat{w} \in \Lambda^1(W^*)$ ; on appelle  $\tilde{w}$  la forme de Hilbert descendue sur  $W$  suivant  $A$ .

Remarquons que  $\hat{w}_{fA} = \hat{w}_A$  où  $f$  est une fonction quelconque. En effet  $F$  était homogène de degré 1 sur  $T_{x_0}(V)$ ,  $w$  est *homogène* de degré zéro.

## 3.2 CHAMP GÉODÉSIQUE

Soit  $W$  une sous-variété de  $V$  (éventuellement on pourra avoir  $V = W$ ). On appellera *champ géodésique* un champ de vecteur  $A \in \overset{1}{\otimes} W$  tel que les lignes de courant de  $A$  soient des géodésiques de  $W$  muni de la métrique  $F_1$  restriction de  $F$ ; la forme de Hilbert  $\omega_1$  de  $F_1$  étant la restriction de  $\omega$  à  $T(W)$  il résulte de 2.2 que tout géodésique de  $V$  tracé sur  $W$  est une géodésique de  $W$ .

On a alors

**THÉORÈME.** — Soit  $V$  une variété munie d'une métrique  $F$ ,  $W$  une sous-variété de  $V$ ,  $A$  un champ géodésique sur  $W$ ,  $\lambda$  la forme de Hilbert de  $F$  descendue sur  $W$  suivant  $A$ . Alors

$$i(A) d\lambda = 0$$

**PREUVE.** — Notons par  $\omega$  la forme de Hilbert associée à  $F$ . Comme  $\lambda$  est indépendant de la normalisation de  $A$ , il nous suffit de démontrer le théorème lorsque

$$F(A) = 1$$

Soit  $\varphi : W \rightarrow T(V)$  défini par  $A$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \lambda &= \varphi^* \omega \\ d\lambda &= \varphi^* (d\omega) \end{aligned}$$

Soit  $B \in \bigotimes^1 W$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle B, i(A) d\lambda \rangle_x &= \langle A \wedge B, d\lambda \rangle_x = \langle A \wedge B, \varphi^*(d\omega) \rangle_x = \langle \varphi'(A) \wedge \varphi'(B), d\omega \rangle_{\varphi(x)} \\ &= \langle \varphi'(B), i(\varphi'(A)) d\omega \rangle_{\varphi(x)} \end{aligned}$$

Calculons  $\varphi'(A)$ . Soit  $\Gamma_x$  la géodésique du champ passant par  $x$ , alors  $\varphi'(A)$  est tangente à  $\varphi(\Gamma_x)$ ; mais  $\varphi(\Gamma_x)$  n'est rien autre que le relèvement  $\tilde{\Gamma}_x$  de  $\Gamma_x$  associé à la représentation canonique (puisque  $A$  est normalisé).

L'accélération intrinsèque  $C_t$  est par sa définition même tangente à  $\tilde{\Gamma}_x$ , d'où il existe  $\alpha \in \mathbf{R}$  tel que

$$\varphi'(A) = \alpha C_t$$

et

$$i(\varphi'(A)) d\omega = \alpha i(C_t) d\omega = 0,$$

en vertu de 2.2.2, et le théorème est démontré.

**COROLLAIRE.** — Soit  $A$  un champ géodésique sur  $W$ , supposons  $A$  normalisé par  $F(A) = 1$ ; soit  $U_t$  le groupe à 1 paramètre de transformation de  $W$  associé à  $A$  soit enfin  $\lambda$  la forme de Hilbert descendue sur  $W$  suivant  $A$ . Alors  $\lambda$  est invariant par  $U_t$  c'est-à-dire

$$U_t^* \lambda = \lambda$$

**PREUVE.** — On a

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_t^* \lambda) = U_t^* (\theta(A)\lambda)$$

D'après la formule d'E. Cartan

$$\theta(A)\lambda = i(A) d\lambda + d(i(A)\lambda)$$

Le premier terme est nul en vertu de 3.2, pour le second terme on a d'après 2.1

$$i(A)\lambda = \langle A, \omega_A \rangle = F(A)$$

d'où le second terme s'annule puisque  $F(A) = 1$ . Par suite

$$\frac{\partial}{\partial t} U_t^* \lambda = 0$$

et le corollaire est démontré.

### 3.3 COROLLAIRE (Poincaré-E. Cartan). — INVARIANTS INTÉGRAUX

*Notations.* Soit  $C_1$  une courbe fermée de  $V$ , en chaque point  $x \in C_1$  choisissons un vecteur  $B_x \in T_x(V)$  et soit  $\Gamma_x$  la géodésique passant par  $x$  et tangente à  $B_x$  on supposera que si  $x \neq x'$  alors  $\Gamma_x \neq \Gamma_{x'}$ . On appelle  $\bigcup_{x \in C_1} \Gamma_x = T$  un tube géodésique. On suppose que  $T$  est une variété de dimension 2. Soit  $C_2$  une courbe fermée tracée sur  $T$  et coupant chaque géodésique  $\Gamma_x$  en un point et un seul.  $C_1$  et  $C_2$  jouent des rôles symétriques et seront appelés des directrices du tube  $T$ .

La famille de géodésique  $\Gamma_x$  définit sur  $T$  un champ géodésique naturel  $A$  en associant à tout  $y \in T$  la tangente à la géodésique de la famille  $\Gamma_x$  passant par  $y$  : Alors on a

Soit  $T$  un tube de géodésique,  $\lambda$  la forme de Hilbert descendue sur  $T$  suivant le champ géodésique de  $T$ , soient  $C_1$  et  $C_2$  deux directrices de  $T$ , alors

$$\int_{C_1} \lambda = \int_{C_2} \lambda$$

PREUVE. — D'après 3.2 on a

$$i(A) d\lambda = 0$$

d'où quel que soit  $E \in \bigotimes^1 T$

$$\langle A \wedge E, d\lambda \rangle = 0$$

mais, comme  $T$  est de dimension 2,  $A_y \wedge E_y$  constituent une base de  $\Lambda^2(T_y(T))$  qui est de dimension 1, ce qui entraîne

$$d\lambda = 0$$

Soit  $\tilde{\Gamma}_x$  l'arc ouvert de  $\Gamma_x$  situé entre  $x$  et le point  $x_1$  où  $\Gamma_x$  coupe  $C_2$ . Soit  $\hat{T} = \bigcup_x \hat{\Gamma}_x$ .

Alors le bord de  $\tilde{T}$ , soit  $\partial\tilde{T}$ , est  $C_2 - C_1$ .

On peut orienter  $T$  à partir de l'orientation de  $C_1$  et de celle des  $\tilde{\Gamma}_x$ ; le théorème de Stokes peut s'appliquer et l'on a

$$\int_{\partial\tilde{T}} \lambda = \int_{\tilde{T}} d\lambda = 0$$

d'où

$$\int_{C_2} \lambda - \int_{C_1} \lambda = 0$$

C.Q.F.D.

#### 4 Condition suffisante d'extremum : méthode de Hilbert

Tout ce que nous avons montré jusqu'à présent c'est que toute courbe extrémale régulière est une géodésique. Ceci laisse ouvert les deux questions suivantes

- 1° Sous quelles conditions existe-t-il des extrémales?
- 2° Sous quelles conditions toutes les extrémales sont régulières?

Le premier problème a été traduit dans la théorie des espaces « abstraits ». On considérait « l'espace des courbes » joignant deux points donnés de  $V$  et on cherchait si la « fonction » qui à toute courbe lui associe sa longueur, possédait un minimum. Sous cette forme il a eu un rôle moteur dans la construction de la

théorie des espaces topologiques en contribuant à faire dégager d'une part la notion d'espace compact, d'autre part celle de fonction semi-continue inférieurement.

Le second problème est plus délicat. Le cas est compliqué par le fait que même sous hypothèses de classe  $C^\infty$  pour  $V$  et  $F$ ; il peut exister des extrémales non régulières. Ceci, bien que surprenant dans un certain sens, peut se comprendre: le calcul de la longueur de la courbe fait intervenir simplement les dérivées premières; tandis que l'hypothèse de régularité signifie que les dérivées secondes existent.

Au lieu d'essayer de répondre directement au problème 1° et 2° nous suivons une voie indirecte :

Nous exhiberons une famille  $\Phi$  de géodésiques telle que si  $\Gamma$  est une géodésique de  $\Phi$  et si  $x_0, x_1 \in \Gamma$ , toute courbe joignant  $x_0$  à  $x_1$  a une longueur supérieure à celle de  $\Gamma$ . Alors il résultera que  $\Gamma$  est une extrémale (d'où une réponse affirmative à 1°) et qu'il n'existe que des extrémales régulières (réponse affirmative à 2°).

Avant de réaliser ce programme nous avons besoin de définir sur  $V$  muni de la métrique  $F$  une notion « d'orthogonalité » qui correspondra à la démarche de la géométrie élémentaire qui consiste à introduire la notion de perpendiculaire à partir de la notion de distance minimum.

#### 4.1 TRANSVERSALITÉ

Soit  $V$  une variété munie d'une métrique  $F$ , soient  $\Delta$  et  $\hat{\Delta}$  deux sous-variétés de  $V$ , si  $x \in \Delta$ ,  $\hat{x} \in \hat{\Delta}$ , on notera par  $\Gamma_{x, \hat{x}}$  une géodésique joignant  $x$  à  $\hat{x}$  (cette géodésique existera en vertu de 2.6.12 si  $x$  et  $\hat{x}$  sont assez voisins, sous cette hypothèse elle sera d'ailleurs unique au sens de 2.6.12. Dans le cas général où il n'y a pas unicité on suppose que l'on prend  $\Gamma_{x, \hat{x}}$  dépendant de  $x, \hat{x}$  de « façon différentiable »). Soit

$$4.1.1 \quad f(x, \hat{x}) = I(\Gamma_{x, \hat{x}})$$

Alors  $f$  définit une fonction sur  $\Delta \times \hat{\Delta}$ . On s'intéressera au minimum de la fonction  $f$ . Si ce minimum existe et est atteint au point  $x_0, \hat{x}_0$  alors on aura

$$4.1.2 \quad \begin{aligned} f'_x(x_0, \hat{x}_0) &= 0 \\ f'_{\hat{x}}(x_0, \hat{x}_0) &= 0 \end{aligned}$$

Lorsque 4.1.2 est vérifié on dira que la géodésique  $\Gamma_{x_0, \hat{x}_0}$  est *transverse* à  $\Delta$ . La géodésique réalisant le minimum de  $f$ , si elle existe, sera à la fois transverse à  $\Delta$  et  $\hat{\Delta}$ .

On a la condition simple suivante de transversalité :

**THÉORÈME.** — Soit  $V$  une variété munie d'une métrique  $F$ ,  $\Delta$  et  $\hat{\Delta}$  deux sous-variétés de  $V$ ,  $\Gamma_0$  une géodésique coupant  $\Delta$  en  $x_0$ , soit  $A_{x_0}$  une tangente à  $\Gamma_0$  en  $x_0$ , notons par  $\lambda_{x_0}$  la

forme de Hilbert descendue sur  $V$  suivant  $A_{x_0}$ . Alors  $f$  étant défini en 4.1.1 on a

$$4.1.3 \quad f'_x = \lambda_{x_0} | T_{x_0}(\Delta)$$

En particulier  $\Gamma_0$  est transverse à  $\Delta$  si et seulement si

$$4.1.4 \quad \lambda_{x_0} \text{ est orthogonal à } T_{x_0}(\Delta)$$

*Remarque.* La variété  $\hat{\Delta}$ , figurant dans les hypothèses, a complètement disparu de la conclusion, la propriété de transversalité ne dépend que de  $\Delta$  et  $\Gamma_0$ , elle a un caractère local, fait bien connu si  $V$  est l'espace euclidien.

PREUVE. — Soit  $x(\tau)$ , une courbe tracée sur  $\Delta$  telle que  $x(0) = x_0$ . Soit

$$\Gamma_\tau = \Gamma_{x(\tau), \hat{x}_0}$$

Soit  $W = \bigcup_\tau \Gamma_\tau$  et supposons que, pour  $\varepsilon$  assez petit, par tout point  $y \in W$ , différent de  $x_0$  passe une seule géodésique de  $\Gamma_\tau$  soit  $\Gamma_{\tau(y)}$ . Posons  $s(y) =$  longueur sur  $\Gamma_\tau$  de l'arc  $(x(\tau), y)$ . Alors l'application  $y \rightarrow (\tau(y), s(y))$  définit une carte de  $W$ . Dans cette carte les géodésiques  $\Gamma_\tau$  se transforment en des droites parallèles à l'axe des  $s$ .

Le champ de vecteur  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  est un champ de vecteur  $E \in \bigotimes^1 W$ . Notons par  $U_\tau$  le groupe de transformations de  $W$  associé, on a

$$\Gamma_\tau = U_\tau \Gamma_0$$

Soit  $B$  un champ de vecteur défini sur  $V$  prolongeant  $E$ ,  $\bar{U}_\tau$  le groupe de transformation associé. Alors on aura

$$\bar{U}_\tau|_W = U_\tau$$

d'où

$$\Gamma_\tau = \bar{U}_\tau(\Gamma_0)$$

on a alors d'après 2.3.1

$$f'_x \left( \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right) = \langle \tilde{B}, w \rangle_{\hat{x}_0} - \langle \tilde{B}, w \rangle_{x_0} + \int_{\tilde{\Gamma}} i(\tilde{B}) dw$$

On sait que  $\hat{x}_0$  reste fixe d'où  $B_{\hat{x}_0} = 0$ . D'autre part  $\Gamma_0$  étant une géodésique l'intégrale du second membre est nulle, enfin

$$\langle \tilde{B}, w \rangle_{x_0} = \langle \pi'(\tilde{B}), \lambda_{x_0} \rangle = \langle E, \lambda_{x_0} \rangle$$

c'est-à-dire

$$f'_x \left( \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right) = \left\langle \frac{dx(\tau)}{d\tau}, \lambda_{x_0} \right\rangle$$

Ceci étant valable quel que soit  $\frac{dx(\tau)}{d\tau}$  donne 4.1.3 et démontre le théorème.

## 4.2 CHAMP DE NORMALES

On appellera *champ de normales* une famille  $\Phi$  de géodésiques telle que

4.2.1 par tout  $x \in V$  passe une géodésique de la famille et une seule.

4.2.2 Il existe une hypersurface  $\Sigma$  de  $V$  telle que chaque géodésique de  $\Phi$  est coupée par  $\Sigma$  en un point et un seul et telle qu'en ce point cette géodésique soit *transverse* à  $\Sigma$ .

Nous appellerons *normale du champ* une géodésique de la famille  $\Phi$ .

A un champ de normales est associé de façon naturelle un *champ géodésique* : pour tout  $x \in V$  on fera correspondre la géodésique  $\Gamma \in \Phi$  passant par  $x$ ; la tangente orientée à  $\Gamma$  porte un vecteur  $A_x$  vérifiant  $F(A_x) = 1$ ;  $A$  définira le *champ géodésique associé*. On a

THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété munie d'une métrique  $F$ , soit  $\Phi$  un champ de normales sur  $V$ ,  $A$  le champ géodésique associé,  $\lambda$  la forme de Hilbert descendue sur  $V$  suivant  $A$ , alors il existe une fonction  $S$ , appelée la fonction d'onde du champ de normales, telle que

$$4.2.3 \quad \lambda = dS$$

Notant

$$\Sigma_\tau = \{x | S(x) = \tau\}$$

alors  $\Sigma_\tau$  est une hypersurface de  $V$ .

4.2.4 Toute normale du champ  $\Phi$  est *transverse* à  $\Sigma_\tau$  et rencontre  $\Sigma_\tau$  en un seul point.

Enfin on a

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

PREUVE. — Supposons le champ géodésique  $A$  normalisé par la condition  $F(A) = 1$ , soit  $U_\tau$  le groupe à 1 paramètre associé à  $A$ . Posons

$$\Sigma_\tau = U_\tau(\Sigma)$$

Soit  $y \in \Sigma_\tau \cap \Sigma_{\tau'}$ , alors

$$y = U_\tau x_1 = U_{\tau'} x_2, \quad x_1, x_2 \in \Sigma$$

d'où

$$x_2 = U_{\tau' - \tau} x_1$$

la normale passant  $x_1$  recouperait  $\Sigma$  en  $x_2$  d'où contradiction. Par suite

$$\Sigma_\tau \cap \Sigma_{\tau'} = \emptyset \quad \text{si} \quad \tau \neq \tau'$$

Par suite on définira une fonction bien déterminée  $S$  par la formule

$$S(y) = \tau \quad \text{si et seulement si} \quad y \in \Sigma_\tau$$

Démontrons 4.2.4 : on a d'après 3.3

$$U_{\tau}^* \lambda = \lambda$$

d'où si  $E \in \bigotimes^1 \Sigma_{\tau}$  on a

$$\langle E, \lambda \rangle = \langle E, U_{\tau}^* \lambda \rangle = \langle (U_{\tau})_* E, \lambda \rangle$$

or  $(U_{\tau})_* E \in \bigotimes^1 \Sigma$  et la dernière quantité est nulle puisque les géodésiques de  $\Phi$  sont transverses à  $\Sigma$ ; par suite

$$4.2.5 \quad \langle E, \lambda \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad E \in \bigotimes^1 \Sigma_{\tau} \quad \text{d'où 3.2.4.}$$

Pour montrer 4.2.3 remarquons que si  $y \in \Sigma_{\tau}$  on a

$$T_y(V) = T_y(\Sigma_{\tau}) \oplus A_y$$

Montrer que

$$\lambda_y = (dS)_y$$

est équivalent à montrer

$$4.2.6 \quad \begin{cases} \lambda_y | T_y(\Sigma_{\tau}) = (dS)_y | T_y(\Sigma_{\tau}) \\ \langle A_y, \lambda_y \rangle = \langle A_y, (dS)_y \rangle \end{cases}$$

Dans la première relation le premier membre est nul d'après 4.2.5, le second membre d'après la définition de  $S$ . Passons à la seconde relation le premier membre vaut d'après 1.12  $F(A_y)$ , c'est-à-dire 1. D'autre part puisque  $U_{\tau}$  est le groupe associé à  $A$  on a

$$4.2.7 \quad \langle A_y, (dS)_y \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [S(U_{\varepsilon} y) - S(y)]$$

Posons  $S(y) = \tau$ , soit  $x \in \Sigma$  tel que  $U_{\tau} x = y$ , alors

$$\begin{aligned} S(y) &= \tau \\ U_{\varepsilon} y &= U_{\varepsilon} U_{\tau} x = U_{\tau + \varepsilon} x \end{aligned}$$

d'où

$$U_{\varepsilon} y \in \Sigma_{\tau + \varepsilon}$$

d'où

$$S(U_{\varepsilon} y) = \tau + \varepsilon$$

En portant dans le second membre de 4.2.7 on voit qu'il est identiquement égal à 1, d'où 4.2.6 et le théorème est démontré.

### 4.3 CONDITION SUFFISANTE DE MINIMUM DE HILBERT

Précisons un peu le vocabulaire. Étant donné deux points de  $V$  soient  $x_0$  et  $x_1$  nous dirons qu'une courbe  $\Omega$  joignant  $x_0$  à  $x_1$  est *extrémale stricte* entre  $x_0$  et  $x_1$

si quel que soit la courbe  $\Delta$  de classe  $C^1$  joignant  $x_0$  à  $x_1$ ,  $\Delta \neq \Omega$ , on ait

$$I(\Omega) < I(\Delta)$$

D'autre part on dira qu'une métrique  $F$  est strictement convexe si quel que soit  $z, z' \in T_x(V)$ ,  $z$  et  $z'$  linéairement indépendants, on ait

$$4.3.1 \quad F(z + z') < F(z) + F(z')$$

On a alors

4.3.2 THÉORÈME. — Soit  $V$  une variété de classe  $C^3$  munie d'une métrique  $F$  strictement convexe de classe  $C^2$ . Supposons qu'il existe sur  $V$  un champ de normales  $\Phi$ . Soient  $x_0, x_1$  deux points de  $V$  situé sur la même normale  $\Gamma$  du champ  $\Phi$ , notons par  $\Gamma_{x_0x_1}$  l'arc de  $\Gamma$  compris entre  $x_0$  et  $x_1$ .

Alors  $\Gamma_{x_0x_1}$  est extrémale stricte entre  $x_0$  et  $x_1$ .

PREUVE. — Soit  $\Delta$  une courbe de classe  $C^1$  joignant  $x_0$  à  $x_1$ . Soit  $\lambda$  la forme de Hilbert descendue suivant le champ de normales. Alors d'après 1.3.3 on a

$$I(\Gamma_{x_0, x_1}) = \int_{\Gamma_{x_0, x_1}} \lambda$$

D'autre part d'après 4.2.3

$$\begin{aligned} &= S(x_1) - S(x_0) \\ &= \int_{\Delta} \lambda \end{aligned}$$

d'où

$$4.3.4 \quad I(\Delta) - I(\Gamma_{x_0, x_1}) = I(\Delta) - \int_{\Delta} \lambda$$

4.3.4 est le point essentiel de la démonstration : il ramène la comparaison de deux intégrales prises sur deux courbes différentes à celles de deux intégrales prises sur la même courbe  $\Delta$ .

Soit  $x(t)$  une représentation paramétrique de  $\Delta$  alors

$$4.3.5 \quad I(\Delta) - \int_{\Delta} \lambda = \int_{t_0}^{t_1} (F(B_t) - \langle B_t, \lambda_{x(t)} \rangle) dt$$

où on a posé pour abrégier  $B_t = \frac{dx(t)}{dt}$ . On a

$$\langle B_t, \lambda_{x(t)} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [F(A_{x(t)} + \varepsilon B_t) - F(A_{x(t)})]$$

Utilisant la convexité de  $F$  on a

$$F(A_{x(t)} + \varepsilon B_t) \leq F(A_{x(t)}) + \varepsilon F(B_t)$$

l'inégalité étant stricte si  $B_t$  n'est pas colinéaire à  $A_{x(t)}$ .

D'où l'inégalité

$$\langle B_t, \lambda_{x(t)} \rangle \leq F(B_t).$$

Par suite la fonction figurant sous le signe somme du second membre de 4.3.5 est toujours positive, et même strictement positive aux points où  $B_t$  n'est pas colinéaire à  $A_{x(t)}$ .

Si, quel que soit  $t$ ,  $B_t$  était colinéaire à  $A_{x(t)}$ , alors  $\Delta$  serait une ligne de courant du champ  $A$ , par suite  $\Delta$  serait la géodésique  $\Gamma_{x_0, x_1}$ . Sinon l'intégrale 4.3.5 est strictement positive. Ceci démontre le théorème.

#### 4.3.6 Remarque sur les conditions d'application du théorème 4.3.2.

Étant donné deux points  $x_0$  et  $x_1$  de  $V$ , on construira une géodésique joignant  $x_0$  à  $x_1$ , soit  $\Gamma_{x_0, x_1}$ , puis on essaiera de construire un champ de normales dans lequel  $\Gamma_{x_0, x_1}$  soit une normale particulière du champ. Cette construction ne sera pas possible en général sur la totalité de  $V$  en raison principalement de la condition 4.2.1.

Par contre on peut montrer sous l'hypothèse 2.6.13 que cette construction est possible sur une partie ouverte  $V_1$  de  $V$ . On pourra appliquer alors le théorème 4.3.2 à  $V_1$  et on obtiendra que

$$I(\Gamma_{x_0, x_1}) < I(\Delta)$$

pour toute courbe  $\Delta$  de classe  $C^1$ , joignant  $x_0$  et  $x_1$  et contenu dans un voisinage de  $\Gamma_{x_0, x_1}$  assez petit (à savoir  $V_1$ ); on dira alors que  $\Gamma_{x_0, x_1}$  réalise un minimum relatif de la distance de  $x_0$  à  $x_1$ .

## 5 Théorie d'Hamilton-Jacobi

Nous avons vu dans le paragraphe précédent l'importance de la notion de *champ de normales*. Nous allons maintenant déterminer toutes les fonctions d'onde associés à de tels champs et identifier l'ensemble d'une part des fonctions d'onde et l'ensemble des solutions d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

### 5.1 APPLICATION D'HAMILTON

Soit  $V$  une variété munie d'une métrique  $F$ ,  $\omega$  la forme de Hilbert correspondante. Nous noterons par  $T^0(V)$  le fibré tangent à  $V$  dont on a exclu les vecteurs nuls. Nous allons associer à cette situation une application

$$h : T^0(V) \rightarrow T(V^*)$$

du fibré tangent  $T^0(V)$  dans le fibré cotangent  $T(V^*)$ . Notons  $T(V)$  par  $V_1$ ,

soit  $z \in V_1$ ,  $x = \pi(z)$ ,  $A \in T_x(V)$ . Posons par définition

$$5.1.1 \quad \langle A, h(z) \rangle = \langle B, w_z \rangle \quad \text{où} \quad B \in T_z(V_1), \quad \pi'(B) = A$$

Le second membre ne dépend que de  $\pi'(B)$ , par suite est bien défini par la donnée de  $A$ . En remontant à la définition de  $w$  on peut lire 5.1.1 immédiatement sous la forme

$$5.1.2 \quad \langle A, h(z) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [F(z + \varepsilon A) - F(z)]$$

On appellera  $h$  l'application d'Hamilton associée à la métrique  $F$ .

On a

PROPOSITION. — L'application d'Hamilton satisfait les propriétés suivantes

$$5.1.3 \quad \pi \circ h = \pi$$

$$5.1.4 \quad h(\alpha z) = h(z), \quad \alpha > 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

PREUVE. — Dans le 5.1.3 par un abus de langage on a noté par la même lettre  $\pi$  les projections de  $T(V)$  et  $T(V^*)$  sur  $V$ . Moyennant cet abus de langage 5.1.3 est évident. 5.1.4 résulte du fait que la forme de Hilbert dans une carte de la forme 1.14 se lit

$$w = \sum \frac{\partial F}{\partial v^i} dq^i$$

mais les  $\frac{\partial F}{\partial v^i}$  sont homogènes de degré zéro d'où 5.1.4.

*Définition de la figuratrice.*

Nous noterons par  $\mathcal{H}$  l'image de  $T^0(V)$  par  $h$ .  $\mathcal{H}$  sera appelée la figuratrice de la métrique  $F$ . Si  $\gamma \in \Lambda^1(V^*)$  nous dirons que  $\gamma \in \mathcal{H}$  si

$$\gamma_x \in \mathcal{H} \cap \pi^{-1}(x) \quad \text{quel que soit} \quad x \in V.$$

*Expression de l'application  $h$  dans une carte locale.* Soit  $q$  une carte locale de  $V$ ,  $(q, v)$  la carte locale correspondante de  $T(V)$ ,  $(q, p)$  la carte locale correspondante de  $T(V^*)$ .

Alors on a

$$h(q, v) = \left( q, \frac{\partial F}{\partial v^i}(q, v) \right)$$

5.2 THÉORÈME (Équation d'Hamilton-Jacobi). — Soit  $V$  une variété munie d'une métrique  $F$ ,  $\mathcal{H}$  la figuratrice de la métrique; soit  $S$  la fonction d'ondes d'un champ de normales. Alors

$$5.2.1 \quad dS \in \mathcal{H}$$

PREUVE. — Soit  $A \in \bigotimes^1 V$  le champ géodésique associé au champ de normales. Alors on a montré (cf. 4.2.3) si  $B \in T_x(V)$  on a

$$\langle B, (dS)_x \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [F(A_x + \varepsilon B) - F(A_x)]$$

Le second membre se lit d'après 5.1.2

$$= \langle B, h(A_x) \rangle$$

d'où

$$(dS)_x = h(A_x)$$

et 5.2.1 est démontré.

### 5.3 FORME CANONIQUE SUR $T(V^*)$

Soit  $V$  une variété quelconque, (que nous ne supposons pas munie d'une métrique) notons par  $V_2$  son fibré cotangent  $T(V^*)$ . Nous allons définir de façon canonique une forme  $\varphi \in \Lambda^1(V_2)$ .

Soit  $y \in V_2$ ,  $A \in T_y(V_2)$ . Définissons le produit scalaire  $\langle A, \varphi_y \rangle$  par

$$5.3.1 \quad \langle A, \varphi_y \rangle = \langle \pi'(A), y \rangle$$

Le second membre a bien un sens, en effet, posant  $\pi(y) = x$ , alors  $\pi'(A) \in T_x(V)$ , d'autre part  $y \in (T_x(V))^*$  d'où l'accouplement du second membre de 5.3.1 est bien défini.

On appellera  $\varphi$  la forme canonique de  $T(V^*)$ .

PROPOSITION. — Soit  $q = (q^1 \dots q^n)$  une carte locale sur  $V$ ,  $(q, p)$  la carte locale correspondante sur  $T(V^*)$ , alors la forme canonique  $\varphi$  de  $T(V^*)$  se lit dans la carte  $(q, p)$  sous l'expression

$$5.3.2 \quad \varphi = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$$

PREUVE. — La vérification de cette formule est purement formelle et ne présente aucune difficulté. Nous allons toutefois, pour la commodité des lecteurs l'écrire en détail :

Soit  $x_0 \in V$  de coordonnées  $\{q_0^i\}$ , notons  $e_i$  la base de  $T_{x_0}(V^*)$  associée à la carte  $q$ .

Alors si

$$y_0 \in V_2, \pi(y_0) = x_0 \quad \text{on a} \quad y_0 = \sum p_i e_i$$

Alors  $A \in T_{y_0}(V_2)$  s'écrit en utilisant la base de  $T_{y_0}(V)$  associée à la carte  $(q, p)$

$$5.3.3 \quad A = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_i \eta_i \frac{\partial}{\partial p^i}$$

on a

$$\pi'(A) = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

d'où

$$5.3.4 \quad \langle \pi'(A), y_0 \rangle = \sum_i \xi^i p_i$$

D'autre part il résulte de 5.3.3 que

$$\langle A, dq^i \rangle = \xi^i$$

D'où 5.3.4 donne 5.3.2.

*Reconstruction de la forme de Hilbert à partir de l'application d'Hamilton*

PROPOSITION. — Soit  $V$  une variété munie d'une métrique  $F$ ,  $w$  la forme de Hilbert,  $h$  l'application d'Hamilton associées. Notons par  $\varphi$  la forme canonique de  $T(V^*)$ , alors on a

$$5.3.5 \quad w = h^* \varphi$$

PREUVE. — Soit  $V_1 = T(V)$ ,  $z \in V_1$ ,  $x = \pi(z)$ ,  $y = h(z)$ .

Soit  $A \in T_z(V_1)$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \langle A, (h^* \varphi)_z \rangle &= \langle h'(A), \varphi_y \rangle. \quad \text{Appliquons 5.3.1} \\ &= \langle \pi' \circ h'(A), y \rangle \end{aligned}$$

D'autre part 5.1.3 entraîne que  $\pi' \circ h' = \pi'$  d'où en portant dans la dernière égalité on obtient

$$\langle A, (h^* \varphi)_z \rangle = \langle \pi'(A), y \rangle$$

Mais  $y = h(z)$ , utilisons 5.1.1 on obtient

$$\begin{aligned} \langle \pi'(A), h(z) \rangle &= \langle A, w_z \rangle \\ \langle A, (h^* \varphi)_z \rangle &= \langle A, w_z \rangle \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

#### 5.4 FORME CANONIQUE DES ÉQUATIONS D'EULER : ÉQUATIONS D'HAMILTON

Appelons *indicatrice* de la métrique  $F$ ,  $J = \{z \in T(V); F(z) = 1\}$ . Nous ferons dans tout ce paragraphe l'hypothèse.

5.4.1 La figuratrice  $\mathcal{H}$  est une variété de dimension  $2n - 1$  et l'application d'Hamilton  $h$  réalise un difféomorphisme de l'indicatrice  $I$  sur la figuratrice  $\mathcal{H}$ .

On peut montrer facilement que l'hypothèse 5.4.1 est satisfaite lorsque la métrique  $F$  est strictement convexe.

5.4.2 LEMME. — Soit  $\Gamma$  une courbe tracée sur  $V$ ,  $\tilde{\Gamma}$  un relèvement de  $V$  sur  $T(V)$ , alors  $\hat{\Gamma} = h(\tilde{\Gamma})$  est indépendant de la manière dont le relèvement  $\tilde{\Gamma}$  a été effectué.

PREUVE. — En effet si  $z_1(t)$ ,  $z_2(\tau)$  sont les équations de 2 relèvements  $\tilde{\Gamma}_1$  et  $\tilde{\Gamma}_2$  de  $\Gamma$  sur  $T(V)$  alors on a

$$z_2(\tau) = k(\tau)z_1(t) \quad \text{où} \quad t = f(\tau)$$

et utilisant 5.1.4 on obtient

$$h(z_2(\tau)) = h(z_1(t))$$

C'est-à-dire  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$  ce qu'il fallait démontrer.

Nous appellerons  $\hat{\Gamma} = h(\tilde{\Gamma})$  le relèvement de  $\Gamma$  sur la figuratrice.

On a

THÉORÈME (Hamilton-E. Cartan). — Soit  $V$  une variété munie d'une métrique  $F$ ,  $\mathcal{H}$  la figuratrice de cette métrique, supposons que 5.4.1 soit vérifié. Notons par  $\varphi$  la forme canonique sur  $T(V^*)$ .

Soit  $\Gamma$  une géodésique pour la métrique  $F$ ,  $\hat{\Gamma}$  son relèvement sur la figuratrice,  $A$  un vecteur tangent à  $\hat{\Gamma}$ . Alors on a

$$5.4.3 \quad i(A) d\varphi|_{\mathcal{H}} = 0$$

PREUVE. — Nous construisons  $\hat{\Gamma}$  en prenant pour  $\tilde{\Gamma}$  le relèvement canonique de  $\Gamma$  sur  $T(V)$ . Alors  $\tilde{\Gamma}$  est tracé sur l'indicatrice  $I$  de la métrique.  $h$  réalisant un difféomorphisme de  $J$  avec  $\mathcal{H}$  on peut transporter par  $h$  l'équation 2.2.1 Remarquons qu'en vertu de 4.3.1 la forme de Hilbert de  $F$  se transporte sur  $\varphi$  on démontre le théorème.

Remarque. Un des avantages de 5.4.3 sur 2.2.1 est que l'on a remplacé une forme différentielle  $\omega$ , qui dépendait de la métrique  $F$  par une forme  $\varphi$ , qui est indépendante de la métrique. Ceci va en particulier conduire à la forme canonique des équations d'Euler.

5.4.5 COROLLAIRE (Équations d'Hamilton). — Supposons que  $V = W \times \mathbf{R}$ . Soit  $q = (q^1 \dots q^{n-1})$  une carte locale de  $W$ ;  $(q, t)$  la carte correspondante de  $V$ ,  $p_1, \dots, p_{n-1}$ , —  $E$  les coordonnées correspondantes de  $T_x(V^*)$ . Supposons que la figuratrice  $\mathcal{H}$  puisse être défini par l'équation :

$$5.4.6 \quad E = H(q, t, p)$$

Soit  $\Gamma$  une géodésique de la métrique  $F$ .

Soit  $(q(t), t, p(t), E(t))$  la représentation paramétrique de son relèvement  $\hat{\Gamma}$  sur la figuratrice. Alors on a

$$5.4.7 \quad \begin{cases} \frac{dq^i(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

PREUVE. — Avec ces notations l'expression de la forme 5.4.2 s'écrit

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} p_i dq^i - E dt$$

$$\varphi|_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n-1} p_i dq^i - H(q, t, p) dt$$

d'où 
$$d\varphi|_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$$

La tangente  $A$  à  $\hat{\Gamma}$  a pour composantes  $(\alpha^i, 1, \beta_i, \gamma)$  où l'on a posé pour noter de façon abrégée  $\frac{dq^i}{dt} = \alpha^i$ ,  $\beta_i = \frac{dp_i}{dt}$ ,  $\gamma = -\frac{dH}{dt}$ . On a ainsi

$$5.4.8 \quad i(A) d\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i dq^i - \alpha^i dp_i) + dH - (i(A) dH) dt$$

Prenant pour base de  $T_y(\mathcal{H})$  les  $dp_i$ ,  $dq^i$  et  $dt$  on doit annuler les coefficients de toutes les différentielles de 5.4.8.

On peut remarquer que le 3<sup>e</sup> terme ne contient pas les différentielles  $dp_i$  et  $dq^i$ . Par suite on a en annulant le coefficient de  $dq^i$

$$\beta_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} = 0$$

puis en annulant le coefficient de  $dp_i$  on obtient

$$\alpha^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$$

ce qui donne les équations d'Hamilton 4.4.7.

Remarquons pour terminer que l'annulation du coefficient de  $dt$  dans 5.4.8 conduirait à la relation

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{dH}{dt} = 0$$

qui est une conséquence immédiate des équations 5.4.7.

En particulier si l'Hamiltonien ne dépend pas du temps on retrouve  $H = \text{cte}$  d'où d'après 5.4.6 l'intégrale première d'énergie de la Mécanique.

5.4.9. *Remarque.* — Considérons l'équation aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre

$$df \in \mathcal{H}$$

où  $f$  est la fonction inconnue. Alors les bandes caractéristiques au sens de Cauchy (p. 153) sont les relèvements des géodésiques sur la figuratrice. Ce fait remarquable établit un lien entre le calcul des variations et les équations aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre.



## Exercices 4<sup>e</sup> partie

1<sup>o</sup> Soit  $G$  un groupe de Lie. Nous supposons que sur  $G$  est donnée une métrique  $g$  bi-invariante, c'est-à-dire  $g$  est invariante par les translations à gauche et à droite de  $G$ .  $G$  muni de  $g$  est une variété Riemannienne et les translations à gauche et à droite sont des isométries. Ces données définissent une dérivation covariante sur  $G$  et en particulier des géodésiques. Montrer que toute géodésique n'est autre que la ligne de courant d'un champ de vecteurs invariant à droite.

Comme les translations à gauche sont des isométries on est ramené à faire des considérations au voisinage de l'origine de  $G$ . En particulier on est ramené à montrer que les géodésiques issues de  $e$  sont les groupes à un paramètre.

### 2<sup>o</sup> UN EXEMPLE DE CONTROLE OPTIMAL

Un bateau à moteur est affecté à un service de traversée d'un fleuve où règne un courant non uniforme. On suppose que le moteur marche à régime constant et imprime ainsi, à l'embarcation une vitesse relative  $V$  de module constant. Le capitaine contrôle par le gouvernail la direction de  $V$ . Le problème du capitaine est d'effectuer la traversée en un temps minimum.

On représentera le fleuve par un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  et les bords du fleuve par les deux courbes  $\Gamma_1, \Gamma_2$  limitant cet ouvert. Le champ de courant sera donné par ses composantes  $(u(x, y), v(x, y))$ , où  $(x, y) \in \Omega$ . On note par  $\theta(t)$  l'angle de  $V$  avec l'axe des  $x$ . On choisit les unités pour que  $|V| = 1$ . De plus on choisit les axes tels que le point d'où part l'embarcation au temps  $t = 0$  soit le point  $(0, 0) \in \Gamma_0$ . Ceci étant, la trajectoire du bateau est déterminée par la résolution du système différentiel (1) :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, y) + \cos(\theta(t)) \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y) + \sin(\theta(t)) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

On notera par  $(x_\theta(t), y_\theta(t))$  la solution du système (1). On pose :

$$T_\theta = \text{temps où } (x_\theta(t), y_\theta(t)) \text{ atteint } \Gamma_1.$$

On se pose le problème (P) :

(P) Rechercher le contrôle minimisant  $T_\theta$  sous la condition que le point d'arrivée est imposé, c'est-à-dire que l'on se donne  $(a, b) \in \Gamma_1$  et que l'on veut avoir :

$$x_\theta(T_\theta) = a, \quad y_\theta(T_\theta) = b.$$

### I<sup>re</sup> PARTIE

a) Utilisant la théorie des multiplicateurs de Lagrange, ramener le problème (P) à l'étude du minimum libre de la fonction :

$$g(t, \theta) = t + \mu_1 x_\theta(t) + \mu_2 y_\theta(t)$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux constantes et où  $t$  et  $\theta$  sont deux variables indépendantes,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\theta \in \mathcal{C}$  (où  $\mathcal{C}$  dénote l'ensemble des contrôles c'est-à-dire l'ensemble des applications continues de  $\mathbb{R}^+$  dans le cercle).

b) Soit  $(t_0, \theta_0)$  un point où  $g$  atteint son minimum. Calculant  $g'_i$ , en déduire une relation entre  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

Soit  $\theta_1 \in \mathcal{C}$ . On pose  $f(\lambda) = g(t, \theta_0 + \lambda\theta_1)$ . Alors on a  $f'(0) = 0$ .

On pose

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} x_{\theta_0 + \lambda\theta_1}(t) \right]_{\lambda=0} \\ \varphi_2(t) &= \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} y_{\theta_0 + \lambda\theta_1}(t) \right]_{\lambda=0} \end{aligned}$$

En dérivant (1) par rapport à  $\lambda$ , montrer que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  satisfait le système différentiel linéaire :

$$(2) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = A_t \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \theta_1(t) B_t \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 \end{cases}$$

où

$$A_t = \begin{pmatrix} u_x' & u_y' \\ v_x' & v_y' \end{pmatrix} \quad \text{et où} \quad B_t = \begin{pmatrix} -\sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $f'(0) = 0$  s'écrit :

$$(3) \quad (\mu | \varphi(t)) = 0,$$

où  $( | )$  dénote le produit scalaire de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  et où  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ ,  
 $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ .

e) Notons par  $\psi(\tau)$  la fonction définie sur  $0, t$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et solution du système adjoint de (2) suivant :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = -A_\tau^* \cdot \psi(\tau) & 0 < \tau < t \\ \psi(t) = \mu. \end{cases}$$

Posons  $k(\tau) = (\psi(\tau) | \varphi(\tau))$ . Dérivant  $k$  en tenant compte de (2) et (4) montrer que :

$$k'(t) = (\psi(\tau) | B_\tau) \theta_1(\tau).$$

Écrire (3) sous la forme  $\int_0^t k'(\tau) d\tau = 0$ .

En conclure que :

$$(5) \quad (\psi(\tau) | B_\tau) = 0 \quad 0 < \tau < t.$$

d) Tirant de (5)  $\psi_2 = \psi_1 \operatorname{tg} \theta_0$  et portant dans (4), on déduit deux équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre, auxquelles  $\psi_1$  doit satisfaire. Écrire que ces deux équations sont identiques et obtenir la condition de compatibilité :

$$(6) \quad \frac{d\theta_0}{dt} = F(u_x, u_y, v_x, v_y, \theta_0)$$

Montrer que le système (1) auquel on adjoint l'équation différentielle (6) détermine complètement le mouvement optimum du bateau dès que l'on s'est donné la valeur de :  $\theta(0) = \alpha$  ( $\alpha$  est « l'angle de tir »). On notera par  $\Delta_\alpha$  la trajectoire optimale correspondant à la valeur  $\alpha$  de l'angle de tir.

Pour résoudre (P), on détermine directement  $\alpha$  par la condition que le point  $(a, b)$  appartient à  $\Delta_\alpha$ .

## II<sup>e</sup> PARTIE

### Équation de Hamilton-Jacobi

On note par  $S(x, y)$  ( $(x, y) \in \Omega$ ), le temps minimum mis par le bateau partant du point  $(0, 0)$  pour atteindre  $(x, y)$ .

e) Soit  $\delta > 0$  fixé, montrer :

$$S(x, y) = \inf_{\theta} (S(x - \delta(u + \cos \theta), y - \delta(v + \sin \theta)) + \delta) + \varepsilon \delta$$

où  $\varepsilon \rightarrow 0$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . En déduire que :

$$(7) \quad 1 = uS'_x + vS'_y + \sup_{\theta} (S'_x \cos \theta + S'_y \sin \theta)$$

ce qui s'écrira :

$$1 = uS'_x + vS'_y + [(S'_x)^2 + (S'_y)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Équation de Hamilton-Jacobi de (P)}).$$

*f)* Reprenant l'équation (6), montrer qu'à chaque instant dans une traversée optimale la *vitesse relative V du bateau est normale à la courbe de niveau de la fonction S passant au même point.*

### 3° CALCUL EXPLICITE POUR UNE MÉTRIQUE CONVEXE EN DIMENSION 2

#### I<sup>re</sup> PARTIE

*a)* Soit  $P$  un espace vectoriel sur  $R$  de dimension 2,  $P'$  son dual. Nous appellerons « élément de contact » tout couple  $(m; M)$  formé d'un point  $m$  de  $P$ , et d'une droite  $M$  affine de  $P$  passant par  $m$ . Soit  $(m, M)$  un élément de contact tel que  $M$  ne passe pas par  $O$  (origine de  $P$ , on lui associe l'élément de contact de  $P'$   $(m', M')$ , où  $m'$  est la forme linéaire sur  $P$  telle que  $M$  ait pour équation  $m'(x) = 1$ , et  $M'$  est la droite de  $P'$  affine d'équation  $m(x') = 1$  : montrez que l'on a défini ainsi une bijection  $\varphi$  des éléments de contacts de  $P$  (dont la droite ne passe pas par  $O$ ) sur les éléments de contacts de  $P'$  (dont la droite ne passe pas par l'origine  $O'$  de  $P'$ ). En renversant les rôles de  $P$  et  $P'$ , on définit de même une application  $\varphi'$ , montrez que c'est l'inverse de  $\varphi$ .

*b)* Soit une courbe  $C$  de  $P$ , strictement convexe (une droite affine n'a avec  $C$  au plus que 2 points en communs) deux fois différentiable (on ne donnera pour les calculs cette courbe paramétriquement, les coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  d'un point de  $C$  étant des fonctions deux fois dérivables), dont aucune tangente ne passe par  $O$ . Montrez que  $\varphi$  fait correspondre aux éléments de contacts  $(m, M)$  formés d'un point de  $C$  et de la tangente à  $C$  en ce point) des éléments de contacts  $(m', M')$  tels que  $m'$  soit sur une courbe différentiable (strictement convexe et dont aucune tangente ne passe par  $O'$ )  $S'$  (que nous noterons encore  $\varphi(C)$ ), et que  $M'$  soit la tangente en  $m'$  à  $C'$ . Montrer que l'application  $f$  de  $C$  sur  $C'$ , qui au point  $m$  de  $C$  fait correspondre le point  $m'$  de l'élément de contact  $\varphi(m, M)$ , est un difféomorphisme de  $C$  sur  $C'$ .

*c)* Soit  $V$  une variété réelle de dimension 2,  $T(V)$  son fibré tangent et  $W$  une sous-variété de  $T(V)$ , de dimension 3, qui coupe  $T_x(V)$  (espace tangent à  $V$  en  $x$ ) suivant une courbe  $C_x$  (strictement convexe, n'ayant pas de tangente passant par  $O$ ) alors l'ensemble des points de  $\varphi(C_x)$  ( $\varphi$  étant l'application définie dans *b*)) pour tous les  $x$ , forment une sous-variété  $W'$  (noté encore  $\varphi(W)$ ) de dimension 3 de  $T(V^*)$  (fibré cotangent), ayant les mêmes propriétés que  $W$ . On a une définition analogue pour l'application que nous appellerons  $\varphi'$ , et on a  $\varphi'(\varphi(W)) = W$ . Montrez aussi que l'application (que nous noterons encore  $f$ ) de  $W$  sur  $W'$  dont la restriction à  $T_x(V)$  est l'application  $f$  du *b*), est un difféomorphisme de  $W$  sur  $W'$ .

*d)* Soit  $F$  une métrique strictement convexe sur  $V$ ,  $I$  l'indicatrice de  $F$ , alors la figuratrice  $H$  de  $F$  est  $\varphi(I)$ , et l'application d'Hamilton  $h$  restreinte à  $I$ , n'est autre que  $f$ .

II<sup>e</sup> PARTIE

Prenons comme variété  $V$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $y > 0$ . Considérons sur  $V$  l'équation aux dérivées partielles :

$$(1) \quad (\partial S / \partial x)^2 + (\partial S / \partial y)^2 = 1/y^2.$$

Soit  $H$  la sous-variété de  $T(V^*)$  d'équation  $p^2 + q^2 = 1/y^2$ , (où  $p$  et  $q$  représentent les coordonnées d'un point de l'espace cotangent dans la base associée au système de coordonnées  $(x, y)$  pour la variété  $V$ ) : dire qu'une fonction  $S$  vérifie l'équation (1) est dire que sa différentielle appartient à  $H$ .

Montrer que  $H$  vérifie bien les conditions imposées aux variétés  $W$  et  $W'$  dans (1<sup>o</sup>, c), et que la sous-variété  $I = \phi'(H)$  est l'indicatrice d'une métrique strictement convexe  $F$  que l'on déterminera.

Chercher toutes les géodésiques de cette métrique : après avoir remarqué que  $y' = \text{cste}$  ne peut être une géodésique, on cherchera celles-ci en prenant  $y$  comme paramètre, et en utilisant les équations de Lagrange;  $F$  ne faisant pas intervenir  $x$ , on a une intégrale première évidente de l'équation de Lagrange.

III<sup>e</sup> PARTIE

a) Montrer que si l'on a un champ de normales de la métrique  $F$ , la fonction d'onde  $S$  associée est solution de (1).

b) Réciproquement soit  $S$  une solution de (1) :  $dS$  appartient à  $H$ , et soit  $A$  le champ de vecteur  $A = h^{-1}(dS)$ , montrer que la forme de Hilbert descendue suivant  $A$  est  $df$ , et en déduire que  $A$  est un champ géodésique. Montrer que c'est un champ de géodésique d'un champ de normales, les géodésiques du champ étant transverses aux surfaces  $S = \text{cste}$ .

IV<sup>e</sup> PARTIE

Soit  $W$  la droite  $x = 1$ , et soit sur  $W$  la fonction  $s = \text{Argsh}(y/2)$ . En un point  $m$  de  $W$ , considérons l'ensemble  $E_m$  des éléments de  $T_m(V^*)$ , dont la projection sur  $T_m(W^*)$  est  $ds$ , alors  $E_m$  est composé de deux points, soit  $A_m$  un de ces points (le choix du point étant suivi par continuité le long de  $W$ ) : Soit  $B_m = h^{-1}(A_m)$ , et soit  $\tilde{B}$  la famille des géodésiques tangentes en  $m$  à  $B_m$ , calculer  $B$ . Montrer que  $\tilde{B}$  est un champ de normales : pour cela, on considèrera le groupe  $U$  associé à  $\tilde{B}$ , et l'application  $u(m) = U_{-s(m)+\text{cste}}(m)$  ( $m$  appartenant à  $W$ ), et on montrera que  $\tilde{B}$  est transverse à  $\Sigma = u(W)$ . En déduire une fonction  $S$  solution de (1), dont la restriction à  $W$  soit  $s$ .



# Démonstration du théorème de réduction d'un champ de vecteurs

Bien que nous ne l'ayons utilisé que dans le cadre d'ouverts de  $\mathbf{R}^n$ , nous allons, en raison de ces applications possibles à la théorie des équations différentielles, le démontrer dans le cadre des espaces de Banach, ce qui ne complique pas la démonstration.

**THÉORÈME DE RÉDUCTION.** — Soit  $E$  un espace de Banach,  $\Omega$  une partie ouverte de  $E$ ,  $A$  un champ de vecteur de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ . Soit  $x_0 \in \Omega$ . Supposons que

$$A_{x_0} \neq 0.$$

Alors on peut trouver un voisinage ouvert  $\tilde{\Omega}$  de  $x_0$  et une carte de  $\tilde{\Omega}$  tel que la restriction  $\tilde{A}$  de  $A$  à  $\tilde{\Omega}$  lu dans cette carte soit un champ de vecteur constant.

**PREUVE.** — Par une translation ramenons-nous au cas où  $x_0 = 0$ . Posons  $e = A_{x_0}$ . Soit  $e^*$  un élément du dual de  $E$  tel que  $\langle e, e^* \rangle = 1$

$$\tilde{E} = \{x \in E \mid \langle x, e^* \rangle = 0\}$$

Alors

$$E = \tilde{E} \oplus \mathbf{R}e$$

En effet pour tout  $x \in E$  écrivons

$$x = \tilde{x} + \xi e \quad \text{où} \quad \xi = \langle x, e^* \rangle$$

alors on constate

$$\langle \tilde{x}, e^* \rangle = \langle x, e^* \rangle - \xi \langle e, e^* \rangle = 0$$

c'est-à-dire que  $\tilde{x} \in \tilde{E}$ . Ainsi nous avons la décomposition

$$x = \tilde{x} + \xi e \quad \text{avec} \quad \tilde{x} \in \tilde{E} \quad \text{et} \quad \xi = \langle x, e^* \rangle.$$

Posons

$$a(x) = A_x - e.$$

Choisissons le rayon  $r_1 > 0$  tel que notant par  $\mathfrak{B}(r_1)$  la boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $r_1$

$$(0) \quad \|a(x)\| < \frac{1}{2}$$

et

$$\|a'(x)\| < K < \infty \quad \text{quel que soit} \quad x \in \mathfrak{B}(r_1)$$

(ceci est possible puisque  $a \in C^1(\Omega; E)$ ).

Soit  $r_2$  un nombre positif tel que

$$(1) \quad \begin{aligned} r_2 &\leq \frac{r_1}{4\|e\|}, \\ r_2 &\leq \frac{1}{4K} \end{aligned}$$

Considérons le cylindre

$$\mathcal{C} \left( \frac{r_1}{4}, r_2 \right) = \left\{ x = (\tilde{x}, t) \mid \|\tilde{x}\| < \frac{r_1}{4}, |\xi| < r_2 \right\}$$

Alors  $\mathcal{C}$  vérifie

$$(2) \quad \mathcal{C} \left( \frac{r_1}{4}, r_2 \right) \subset \mathfrak{B} \left( \frac{r_1}{2} \right)$$

Nous allons construire une application  $\varphi$  de classe  $C^1$  du cylindre  $\mathcal{C}$  dans  $E$  dont l'application inverse donnera la carte cherchée.

Nous chercherons à réaliser  $\varphi$  de telle sorte que  $\varphi$  transporte le champ de vecteur *constant* égal à  $e$  sur la restriction du champ  $A$  à l'image de  $\varphi$ .

Si tel est le cas,

$$\varphi(\tilde{x} + te) \quad \text{sera une ligne de courant du champ } A.$$

C'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} (\varphi(\tilde{x} + te)) = e + a(\varphi(\tilde{x} + te))$$

ou en intégrant

$$(3) \quad \boxed{\varphi(\tilde{x} + \xi e) - \varphi(\tilde{x}) = \int_0^\xi (e + a(\varphi(\tilde{x} + te))) dt}$$

Nous imposerons à  $\varphi$  une seconde condition à savoir

$$\varphi(x) = x \quad \text{pour} \quad x \in \tilde{E} \cap C$$

Alors (3) s'écrit

$$(4) \quad \boxed{\varphi(x) = x + \int_0^\xi a(\varphi(\tilde{x} + te)) dt} \quad \text{où } x = (\tilde{x}, \xi) = \tilde{x} + \xi e$$

Ces préliminaires étant terminées, abordons la démonstration. Celle-ci consistera à montrer que l'équation (4) détermine  $\varphi$ , que la fonction  $\varphi$  ainsi trouvée est de classe  $C^1$ , enfin qu'elle définit un difféomorphisme local, enfin qu'elle répond à la question. Ces quatre points seront traités dans les quatre paragraphes I, II, III, IV, le paragraphe le plus délicat étant II.

I. CONSTRUCTION DE  $\varphi$

Notons par  $H = C^0\left(\mathcal{C}\left(\frac{r_1}{4}, r_2\right); \mathcal{B}(r_1)\right)$ .

Si  $f \in H$  nous poserons  $\|f\|_H = \sup_{x \in \mathcal{C}} \|f(x)\|$ . Alors  $H$  est un espace complet.

Considérons l'application défini sur  $H$  en posant

$$\Phi(f) = g \quad \text{où } f \in H \quad \text{et où } g(x) = x + \int_0^\xi a(f(\tilde{x} + te)) dt$$

Montrons que  $\Phi$  est une contraction. Si

$$\Phi(f_i) = g_i, \quad i = 1, 2,$$

on a

$$g_1(x) - g_2(x) = \int_0^\xi [a(f_1(\tilde{x} + te)) - a(f_2(\tilde{x} + te))] dt$$

Évaluons le crochet en utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient qu'il est inférieur à

$$K \|f_1(\tilde{x} + te) - f_2(\tilde{x} + te)\|$$

d'où

$$\|g_1 - g_2\| \leq K r_2 \|f_1 - f_2\|$$

et utilisant 1

$$(5) \quad \|\Phi(f_1) - \Phi(f_2)\| \leq \frac{1}{4} \|f_1 - f_2\|.$$

Montrons que

$$\Phi(H) \subset H.$$

Soit  $f_0(x)$  la fonction identiquement nulle. Alors  $g_0 = \Phi(f_0)$  n'est rien d'autre

$$g_0(x) = x$$

d'où d'après (2)

$$\|g_0\| < \frac{r_1}{2}$$

Soit maintenant  $f_1 \in H$ . Alors  $\|f_1 - f_0\| \leq r_1$  et on a

$$\|\Phi(f_1)\| \leq \|\Phi(f_0)\| + \|\Phi(f_1) - \Phi(f_0)\|$$

la dernière norme est inférieure à  $\frac{r_1}{4}$ , d'où

$$\|\Phi(f_1)\| < r_1, \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \Phi(f_1) \in H.$$

Ainsi  $\Phi$  est une contraction de l'espace métrique complet  $H$ . Elle possède un point fixe unique soit  $\varphi$  ce point fixe.  $\varphi$  est une fonction continue de  $\mathcal{C}$  à valeur de  $\mathfrak{B}(r_1)$  qui satisfait l'équation (4).

## II. $\varphi$ EST DE CLASSE $C^1$

Supposons démontré le fait que  $\varphi$  est de classe  $C^1$ , et dérivons *formellement* 5.1.4 par rapport à la variable  $\tilde{x}$  on obtient

$$\varphi'_x(x) = J + \int_0^{\xi} a'(\varphi(\tilde{x} + te)) \circ \varphi'_x(\tilde{x} + te) dt$$

où  $J$  note l'injection canonique de  $\tilde{E}$  dans  $E$ .

Ce calcul formel rend naturel l'introduction de l'équation

$$(6) \quad \boxed{D(x) = J + \int_0^{\xi} a'(\varphi(\tilde{x} + te)) \circ D(\tilde{x} + te) dt}$$

Nous allons noter par

$$G = C^0(\mathcal{C}; \mathcal{L}(\tilde{E}; E))$$

$G$  est un espace vectoriel, nous cherchons une solution  $D$  de (6) qui soit un élément de  $G$ .

Considérons l'application  $L \in \mathcal{L}(G; G)$  définie en posant

$$L(R) = S$$

où

$$S(x) = \int_0^{\xi} a'(\varphi(\tilde{x} + te)) \circ R(\tilde{x} + te) dt \quad \text{où} \quad x = \tilde{x} + \xi e$$

Alors

$$\|L(R)\|_G = \sup \|S(x)\|_{\mathcal{L}(E, E)} \leq \sup \|R(x)\|_{\mathcal{L}(E, E)} Kr_2$$

d'où utilisant (1)

$$\|L(R)\|_G < \frac{1}{4} \|R\|_G$$

Ainsi  $L$  est une application linéaire de norme  $< \frac{1}{4}$ .

L'équation 6 s'écrit

$$D - L(D) = j$$

où  $j$  est la fonction constante partout égale à  $J \in \mathcal{L}(\tilde{E}; E)$ . Alors on a

$$D = j + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} L^n \right) j$$

ce qui démontre l'existence de  $D$  à valeur dans  $\mathcal{L}(\tilde{E}, E)$  continue, satisfaisant (6). Remarquons de plus que

$$(7) \quad \|D - j\| \leq \left\| \left( \sum_{n=1}^{+\infty} L^n \right) j \right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n \leq \frac{1}{2}$$

Montrons maintenant que si  $h \in \tilde{E}$  on a

$$\varphi(x + \tilde{h}) - \varphi(x) = D(x) \cdot \tilde{h} + \varepsilon \|h\|$$

avec  $\varepsilon \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

Fixons  $\tilde{x}_0 \in \tilde{E}$ , et posons

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t) &= \varphi(\tilde{x}_0 + te) \\ \hat{\varphi}_{\tilde{h}}(t) &= \varphi(\tilde{x}_0 + te + \tilde{h}) \\ \hat{D}(t) &= D(\tilde{x}_0 + te). \end{aligned}$$

Alors  $\hat{\varphi}, \hat{\varphi}_{\tilde{h}} \in C^0(I; E)$ ,  $\hat{D} \in C^0(I; \mathcal{L}(\tilde{E}, E))$ , où  $I$  est l'intervalle  $] -r_2, +r_2[$   $t$  D'autre part d'après (4) on a

$$(8) \quad \hat{\varphi}(\lambda) - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}(\lambda) = \tilde{h} + \int_0^\lambda (a(\hat{\varphi}(t)) - a(\hat{\varphi}_{\tilde{h}}(t))) dt$$

On a d'après le théorème des accroissements finis

$$a(\hat{\varphi}(t)) - a(\hat{\varphi}_{\tilde{h}}(t)) = a'(\hat{\varphi}(t)) \cdot (\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}(t)) + \|\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}(t)\| \rho(t)$$

où

$$\|\rho(t)\| \leq \sup \|a'(\hat{\varphi}(t)) - a'(x)\| \quad \text{où} \quad x \in [\hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}_{\tilde{h}}(t)]$$

Utilisons la continuité uniforme de  $a'(\xi)$ , on obtient que pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $\eta$  tel que

$$\|\rho(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad \|\tilde{h}\| < \eta \quad \text{quel que soit} \quad t \in \bar{I}.$$

Alors (8) s'écrit

$$(9) \quad \hat{\varphi}(\lambda) - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}(\lambda) = \tilde{h} + \int_0^\lambda a'(\hat{\varphi}(t)) \cdot (\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}(t)) + \rho_1(\lambda) \|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}\|$$

où

$$\|\rho_1(\lambda)\| \leq r_2 \varepsilon \quad \text{si} \quad \|\tilde{h}\| < \eta$$

et où

$$\|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}\| = \|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}\|_{C^0(I; E)} = \sup_{t \in I} \|\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}(t)\|$$

D'autre part 6 s'écrit dans ces notations

$$D(x_0 + \lambda l) \cdot \tilde{h} = \tilde{h} + \int_0^\lambda (a'(\hat{\phi}(t)) \circ D(\hat{\phi}(t))) \cdot \tilde{h} dt$$

d'où en retranchant cette égalité de 9 on obtient en posant

$$\delta(t) = \hat{\phi}(t) - \hat{\phi}_{\tilde{h}}(t) - D(\hat{\phi}(t)) \cdot \tilde{h}$$

$$(10) \quad \delta(\lambda) = \int_0^\lambda a'(\hat{\phi}(t)) \cdot \delta(t) dt + \rho_1(\lambda) \|\hat{\phi} - \hat{\phi}_{\tilde{h}}\|$$

Considérons l'opérateur linéaire  $l$  défini sur  $C^0(I; E)$  en posant

$$l(\psi) = X$$

où  $X$  est la fonction

$$X(\lambda) = \int_0^\lambda a'(\hat{\phi}(t)) \cdot \psi(t) \cdot dt.$$

Remarquons que

$$\|l(\psi)\| \leq r_2 \sup_{t \in I} \|a'(\hat{\phi}(t))\| \|\psi\|$$

et utilisant (1)

$$\|l(\psi)\| < \frac{1}{2} \|\psi\|$$

Utilisant  $l$  nous écrivons (10) sous la forme

$$\delta - l(\delta) = \|\hat{\phi} - \hat{\phi}_{\tilde{h}}\| \rho_1 \quad \text{avec} \quad \|\rho_1\|_{C^0(I; E)} \leq \varepsilon r_2$$

lorsque  $\|\tilde{h}\| < \eta$ .

Comme  $l$  est un opérateur linéaire de norme  $< \frac{1}{2}$ , on peut inverser le premier membre par la série géométrique et on obtient

$$\delta = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} l^n \right) \cdot (\|\hat{\phi} - \hat{\phi}_{\tilde{h}}\| \rho_1)$$

d'où

$$\|\delta\| \leq \|\hat{\phi} - \hat{\phi}_{\tilde{h}}\| \|\rho_1\| \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n \right)$$

c'est-à-dire

$$(11) \quad \|\delta\| \leq 2 \|\hat{\phi} - \hat{\phi}_{\tilde{h}}\| \cdot \|\rho_1\|$$

Enfin on a, appliquant à la définition de  $\delta$  l'inégalité du triangle

$$\|\delta\| \geq \|\hat{\phi} - \hat{\phi}_{\tilde{h}}\| - \|D(\hat{\phi}(t))\|_{C^0(I; \alpha(\tilde{E}, E))} \cdot \|\tilde{h}\|;$$

d'où remarquant que (7) entraîne

$$\sup_{t \in I} \|D(\hat{\varphi}(t))\|_{\alpha(\tilde{F}, E)} < \frac{3}{2},$$

on a

$$\|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}\| - \frac{3}{2} \|\tilde{h}\| \leq 2\|\rho_1\| \|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}\|$$

d'où on obtient que

$$\|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}\| \leq \frac{2}{2(1 - 2\|\rho_1\|)} \|\tilde{h}\| \quad \text{si} \quad \|\rho_1\| < 1/2$$

Or comme  $\|\rho_1\| < \varepsilon r_2$  on aura en prenant  $\varepsilon$  assez petit

$$\|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}\| < 3\|\tilde{h}\| \quad \text{si} \quad \|\tilde{h}\| < \eta$$

En portant dans (11) on obtient que

$$\|\delta\| \leq 6\|\tilde{h}\| \|\rho_1\| \leq 3\|\tilde{h}\| \varepsilon r_2 \quad \text{si} \quad \|\tilde{h}\| \leq \eta$$

c'est-à-dire en particulier que

$$\|\delta(t)\| \leq 3\|\tilde{h}\| \varepsilon r_2$$

ou encore

$$\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}_{\tilde{h}}(t) - D(\tilde{x}_0 + te) \cdot h = \|h\|u$$

où  $\|u\| \rightarrow 0$  lorsque  $\tilde{h} \rightarrow 0$ .

Ainsi l'application  $\varphi(x)$  possède en tout point  $x$  une application *dérivée partielle suivant*  $\tilde{E}$  et cette *dérivée partielle* est  $D(x)$ , par suite est *continue*.

D'autre part l'application dérivée partielle de  $\varphi$  suivant le sous-espace de dimension 1 engendré par  $e$  s'obtient en dérivant (4) suivant  $\xi$ , on obtient :

$$\varphi'_\xi(x) \cdot 1 = a(\varphi(x)) + e$$

Cette dérivée partielle existe donc et est *continue*.

On en déduit de l'existence et de la continuité des dérivées partielles que  $\varphi'(x)$  existe quel que soit  $x \in \mathcal{C}$  et est continu. Ainsi

$$\varphi \in C^1(\mathcal{C}; E).$$

### III. $\Phi$ DÉFINIT UN DIFFÉOMORPHISME

Nous allons montrer que  $\varphi$  réalise un *difféomorphisme* du cylindre  $\mathcal{C}$  sur son image.

Comme  $\varphi'_x(x) = D(x)$  remarquons que (7) entraîne que

$$\|\varphi_x(x) - J\| < \frac{1}{2}.$$

D'autre part on a

$$(12) \quad \varphi'(x) \cdot e = e + a(\varphi(x))$$

d'où

$$(13) \quad \|\varphi'(x) - I\| < 1/2 \quad \text{en vertu de } 0$$

où  $I$  note l'identité de  $\mathcal{L}(E; E)$ . On déduit de (13) que

$\varphi'(x)$  est *invertible* quel que soit  $x \in \mathcal{C}$ . L'application  $\varphi$  est ainsi localement invertible en vertu du théorème des fonctions implicites.

Montrons que  $\Phi(x)$  est *injectif*. En effet  $\mathcal{C}$  est convexe. Soit  $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ . Alors on a en appliquant le théorème des accroissements finis et en tenant compte de (13)

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (x_1 - x_2) + \rho \|x_1 - x_2\|$$

où  $\|\rho\| < \frac{1}{2}$ .

Si  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$  on en déduit

$$\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \quad \text{c'est-à-dire} \quad x_1 = x_2$$

Ainsi  $\varphi$  est un difféomorphisme.

#### IV. $(\varphi^{-1})_*$ TRANSPORTE LE CHAMP $A$ SUR UN CHAMP CONSTANT

Notons par  $\tilde{\Omega}$  l'image de  $\varphi$ . Soit  $\psi$  le difféomorphisme inverse de  $\varphi$  qui envoie  $\tilde{\Omega}$  sur  $\mathcal{C}$ . Notons  $\tilde{A}$  la restriction de  $A$  à  $\tilde{\Omega}$ . Montrons que

$$\psi_* \tilde{A} = e$$

Comme  $\varphi_*$  réalise un isomorphisme des champs de vecteurs  $\mathcal{C}$  sur les champs de vecteurs sur  $\tilde{\Omega}$  il suffit de montrer

$$\varphi_*(\psi_* \tilde{A}) = \varphi_* e$$

Mais

$$\varphi_* \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = \text{identité.}$$

d'où tout revient à montrer que

$$(14) \quad \begin{array}{l} \varphi_* e = A \\ (\varphi_* e)_{\tilde{x}} = \varphi'(x)e \quad \text{où} \quad \tilde{x} = \varphi(x) \end{array}$$

Il résulte de (12) que

$$\boxed{\varphi'(x) \cdot e = a(\varphi(x)) + e = A_{\varphi(x)}}$$

c'est-à-dire que

$$(\varphi_* e)_{\tilde{x}} = A_{\varphi(x)} = A_{\tilde{x}}$$

Ce qui démontre (14) et achève ainsi la démonstration du théorème de réduction.

*Remarque. Trivialisation de problèmes sur les équations différentielles*

Il est facile de déduire du théorème de réduction un théorème d'existence et d'unicité pour les solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(0) = a \end{cases}$$

On se ramène en effet à chercher les lignes de courant d'un champ de vecteurs  $A$  de classe  $C^1$  (si  $f$  est de classe  $C^1$ ) passant par un point donné. Le théorème de réduction permet alors de se ramener au *cas trivial* où  $A$  est constant.

De même le théorème de réduction donne, par réduction du cas trivial de champs constants, la dépendance  $C^1$  de solution d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre de façon  $C^1$ . Réciproquement ce dernier résultat pourrait permettre de démontrer le théorème de réduction qui lui est ainsi équivalent. (cf. p. 136, 137.)



# Bibliographie

- AVEZ A. et ARNOLD V. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Gauthier-Villars, 1967.
- BERGER M. *Géométrie différentielle*. Armand Colin, 1972.
- BERGER M. *Le spectre d'une variété riemannienne*. Springer Lecture Notes, 1971.
- BUSEMAN H. *Recent synthetic differential geometry*. Springer, 1970.
- CARTAN E. *Systèmes différentiels extérieurs*. Hermann, 1946.
- CARTAN H. *Formes différentielles*. Hermann, 1967.
- CHEVALLEY C. *Lie groups*. Princeton, 1946.
- CHEVALLEY C. *Théorie des groupes de Lie*. Hermann, 1951.
- CHERN S. S. *Complex manifold without potentiel theory*. Van Nostrand, 1967.
- CHOQUET-BRUHAT Y. *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*. Dunod, 1968.
- EELS J. *Singularities of smooth maps*. Gordon and Bred, 1967.
- GODBILLON C. *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Hermann, 1969.
- GOLDBERG S. *Curvature and Homology*. Academic Press, 1962.
- GROMOLL D. *Riemansche Geometrie in Grossen*. Springer Lecture Notes, 1968.
- HELGASON S. *Differential geometry and symmetric spaces*. Academic Press, 1962.
- HICKS N. *Notes on differential geometry*. Van Nostrand, 1965.
- KOBAYASHI S. *Differential manifolds*. Marcel Dekker, New York, 1972.
- KOBAYASHI S. et NOMIZU K. *Foundations of differential geometry*. Interscience Publish, 1963.
- KODAIRA K. et MORROW J. A. *Complex manifolds*. Holt Rinehart, 1971.
- KOSZUL J. L. *Lectures on fiber bundles and differential geometry*. Tata Institute, 1960.
- KOSZUL J. L. *Lectures on groups of transformation*. Tata Institute, 1965.
- KUMPERA A. et SPENCER D. *Lie equations*. Princeton, 1972.
- LICHNEROWICZ A. *Géométrie différentielle des espaces homogènes*. N. Zanichelli, Bologne, 1962.
- de RHAM G. *Variétés différentiables, formes courantes, formes harmoniques*. Hermann, 1955.
- SOURIAU J. M. *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, 1970.
- STERNBERG S. *Lectures on differential geometry*. Prentice Hall, 1964.
- WARNER F. W. *Foundations of differential manifolds and Lie groups*. Scott et Foresman, Chicago, 1971.



# Index

- A**
- A(V) linéarité, 113
    - du crochet, 108
  - Accélération intrinsèque, 257
  - Accouplement covariant-contravariant, 71
  - Algèbre de Lie, 161
    - d'un groupe de Lie, 162
    - des groupes classiques, 192
  - Application dérivée, 26
  - Application exponentielle, 182, 189
  - Application propre, 53
  - Application régulière, 52
  - Atlas. Atlas numérique, 17
  - Atlas équivalents, 22, 29
  - Automorphisme d'un groupe de Lie, 237
- B**
- Brouwer (théorème de), 20
- C**
- Cartan (formule de), 121
  - Cartan-Darboux cf. Darboux
  - Carte adaptée
    - à un champ de vecteurs, 293
    - à un  $p$ -champ, 124
    - à une sous-variété, 54
    - à une application de rang constant, 49
  - Carte exponentielle, 137 : 5°
  - Cauchy (problème de), 96
    - solution maximale, 98
  - Champ caractéristique, 150 : 18°
  - $p$ -champ, 122
  - Champ de covecteurs, 73
  - Champ géodésique, 272
  - Champ de normales, 277
  - Champ de repères orthonormés, 204
  - Champ de tenseurs covariants, 71
  - Champ de vecteurs, 69
  - Chemin, 33
  - Classe  $C^k$ , 27
    - (applications), 32
    - (Atlas), 18, 29
  - Cobord, 115, 117, 119
    - dans une carte numérique, 118
  - Coefficients de structure d'une algèbre de Lie, 165
  - Construction d'un groupe de Lie à partir de son algèbre de Lie, 232 : 9°
  - Courbe cf. sous-variété de dimension 1
  - Courbure, 215, 222
  - Covecteurs basiques, 259
  - Crochets, 106
  - Crochet d'une forme différentielle à valeurs dans une algèbre de Lie, 162
- D**
- Darboux (théorème d'existence de), 167, 171
    - résultats globaux, 230
  - Degré d'une application, 85
  - Dérivation covariante, 211, 212
    - induite, restreinte, 219
  - Dérivation et champs de vecteurs, 70
  - Dérivée de Lie, 102
    - calcul en coordonnées, 110

Dérivée (application), 26  
 Dérivées d'ordre supérieur, 68  
 Descente de la forme de Hilbert, 272  
 Développement Taylorien de la loi de groupe, 226 : 4°  
 Difféomorphismes, 28  
   locaux, 29, 47  
   d'une variété, 34  
 Différentielle  
   d'une application, 90  
   d'une fonction, 91  
   de Darboux, 166  
   d'un repère mobile, 196, 200  
 Divergence, 137 : 4°

**E**

Équations aux dérivées partielles, 152 : 19°  
   linéaire, 149 : 16°  
   et calcul des variations, 281, 285  
 Équation de structure de Maurer-Cartan, 164, 168  
 Équations différentielles, 96, 97, 98  
 Équivalence de Darboux, 165  
   de repères mobiles, 196  
   de plongements euclidiens, 202  
 Équivalence locale  
   de 2 champs de vecteurs, 95  
   d'applications, 46  
   de fonctions au voisinage d'un point critique (théorème de Morse), 82  
 Espace tangent, 38, 42, 57  
 Euler-Cartan (équation d'), 262  
 Exponentielle (application), 182, 189  
   (cartes), 137 : 5°  
 Extrémale régulière, 262  
 Extremum  
   condition nécessaire, 262  
   condition suffisante, 279

**F**

Fibré tangent, 63  
   cotangent, 144 : 12°, 280, 282  
   de repères orthonormés, 250 : 17°  
 Fonctions composées (théorème des), 26, 40  
 Fonction dérivée, 64  
 Fonctions indépendantes, 62  
 Fonctions sur une variété, 33

Forme de Maurer-Cartan, 157, 163, 164  
 Formes différentielles, 72  
   calcul en coordonnées, 92  
 Forme différentielle invariante à gauche, 157  
 Forme différentielle invariante par un pseudo-groupe, 111  
 Formes quadratiques d'une hypersurface de l'espace euclidien, 223  
 Frobenius (théorème de), 125

**G**

Géodésiques, 271  
   d'une variété riemannienne, 265  
 Grassmannienne, 78  
 Groupes classiques :  
   groupe affine, 184  
   groupe des déplacements, 184  
   groupe linéaire, 184  
   groupe linéaire complexe, 228 : 6°  
   groupe modulaire, 234  
   groupe orthogonal, 184  
   groupe projectif, 185  
 Groupe à un paramètre et champ de vecteurs, 99, 137 : 6°  
 Groupe laissant invariant un champ de repères, 242 : 15°  
 Groupe de Lie, 156  
 Groupe de Lie résoluble, 245 : 16°  
 Groupe de transformations, 240 : 14°

**H**

Hamilton  
   (application d'), 280  
   (équations d'), 284  
 Hamilton-Jacob (équation d'), 281, 289  
 Hilbert  
   (forme différentielle d'), 258  
   (condition suffisante d'extremum), 279

Homomorphismes de groupes de Lie, 172  
 Hypersurface d'un espace euclidien, 221

**I**

Image directe, 36  
   d'un champ de vecteurs, 70

Image réciproque, 73  
 d'un champ de vecteurs covariants,  
 76  
 (calcul en coordonnées), 94  
 et différentielle, 91  
 Immersions, 52  
 Intégrabilité (condition d'), 125, 130, 133  
 Intégration par quadratures, 245 : 16°  
 Intégrale première, 111  
 Invariants à gauche (formes et champs  
 de vecteurs), 158, 159  
 Invariants intégraux, 274  
 Inversion locale (théorème d'), 47

**J**

Jacobi (identité), 108, 161

**L**

Lagrange (équations de), 267  
 Lecture dans des cartes  
 d'une application, 24  
 de l'espace tangent, 45  
 d'un  $p$ -champ, 123  
 Ligne de courant, 96  
 Localisation (principe de), 28, 34, 41  
 Longueur d'une courbe, 256

**M**

Matrice jacobienne, 27  
 Maurer-Cartan cf. forme de Maurer-  
 Cartan  
 Mécanique analytique, 24, 139, 140, 142,  
 143, 267, 273, 281, 284  
 Métrique, 255  
 Métrique biinvariante sur un groupe  
 de Lie, 239 : 13°

**O**

Orientation d'une variété, 85

**P**

Parallélisée (variété), 89  
 Parallélisme sur un groupe de Lie, 151  
 $p$ -champ, 122  
 complètement intégrable, 125  
 Pfaff (système de), 132

Plongements, 53  
 euclidiens, 202, 209  
 riemanniens, 218  
 Pseudo-groupe associé à un champ de  
 vecteurs, 99  
 Poincaré (théorème de), 146  
 Produit intérieur, 121

**Q**

Quaternions, 228

**R**

Rang d'une application, 47  
 constant (théorème du), 49  
 Réduction  
 d'une application, 49  
 d'un champ de vecteurs, 95  
 Relèvement sur le fibré tangent, 257  
 Représentation paramétrique d'une sous-  
 variété, 58  
 Restriction à une sous-variété  
 d'un champ covariant, 75  
 d'un champ de vecteurs, 76  
 Riemann-Christofel (forme de), 205, 207,  
 215  
 Repère mobile, 194  
 Riemannienne (variété), 202  
 Rotations de  $\mathbf{R}^3$ , 228

**S**

Sard (théorème de Morse), 80  
 Sections, 69  
 Sous-groupe d'un groupe de Lie, 177, 180  
 à 1 paramètre, 183  
 Sous-variété, 53  
 de  $\mathbf{R}^n$ , 61  
 Symplectique (variété), 139, 140, 142,  
 143

**T**

Transport par difféomorphisme des champs  
 de tenseurs, 75  
 Transversalité, 275

**V**

Variation de la longueur d'une courbe, 263  
 Variété intégrale d'un  $p$ -champ, 129

IMPRIMÉ EN FRANCE, DURAND, 28-LUISANT  
DÉPOT LÉGAL : QUATRIÈME TRIMESTRE 1972  
NUMÉRO D'ÉDITION : 5696  
HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

# Enseignement des sciences



la marque des meilleurs  
livres scientifiques

Les ouvrages de cette collection s'adressent aux étudiants de sciences de divers niveaux. Œuvres de spécialistes éminents qui, tout en suivant les programmes universitaires, apportent des vues personnelles au traitement de leur discipline, ces volumes sont autant des livres de référence générale que des manuels d'enseignement. Largement utilisés dans les universités françaises et étrangères, ils intéressent autant les étudiants que les chercheurs.

Henri Cartan      Université Paris XI

## Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes

Deuxième édition, Quatrième tirage

Gustave Choquet      Université Paris VI

## L'enseignement de la géométrie

Troisième tirage

Jean Dieudonné      de l'Institut

## Algèbre linéaire et géométrie élémentaire

Troisième édition

Noël Gastinel      Université scientifique et médicale  
de Grenoble

## Analyse numérique linéaire

Roger Godement      Université Paris VII

## Cours d'algèbre

Troisième édition

Jean Kuntzmann      Université scientifique et médicale  
de Grenoble

## Méthodes numériques

Pierre Laszlo      Université de Liège

## Leçons de chimie      en préparation

P.-J. Laurent      Université scientifique et médicale  
de Grenoble

## Approximation et optimisation

J. Leite Lopes      Université Louis Pasteur, Strasbourg

## Fondements de la physique atomique

P. Malliavin      Université Paris VI

## Géométrie différentielle intrinsèque

Laurent Schwartz      Professeur à l'École Polytechnique

## Méthodes mathématiques pour les sciences physiques

Deuxième édition, Quatrième tirage

## Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle