

daniel lehmann  
rudolphe bkouche

# initiation à la géométrie



MATHÉMATIQUES

## *Initiation à la géométrie*

**COLLECTION DIRIGÉE PAR PAUL DEHEUVELS**

MATHÉMATIQUES

*Initiation  
à la géométrie*

PAR

DANIEL LEHMANN

*Professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille*

APPENDICE HISTORIQUE DE

RUDOLPHE BKOUCHE

*Professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille*

*à l'usage des étudiants en mathématiques,  
préparant licence ou maîtrise, CAPES ou agrégation,  
et pour la formation continue des professeurs*



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE



## DU MÊME AUTEUR

En collaboration avec C. SACRÉ, *Géométrie et topologie des surfaces*, PUF, 1982.

ISBN 2 13 040160 0

ISSN 0246-3822

Dépôt légal — 1<sup>re</sup> édition : 1988, juin

© Presses Universitaires de France, 1988  
108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

# SOMMAIRE

PRÉFACE	9
---------	---

## PREMIÈRE PARTIE

### UN STOCK DE FIGURES ÉLÉMENTAIRES

CHAPITRE PREMIER / <i>Droites concourantes dans un triangle</i>	19
1 / Médianes et centre de gravité	19
2 / Médiatrices et centre du cercle circonscrit	21
3 / Hauteurs et orthocentre	22
4 / Bissectrices, cercles inscrit et exinscrits	24
5 / Exercices	27
CHAPITRE II / <i>Problèmes d'angles</i>	29
1 / Le point sur les angles	29
2 / Somme des angles d'un triangle	32
3 / Théorème de l'arc capable	34
4 / Théorème de l'angle pivotant	39
5 / Exercices	42
CHAPITRE III / <i>Divisions harmoniques et cercles orthogonaux</i>	45
1 / Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant	45
2 / Puissance d'un point par rapport à un cercle	47
3 / Axe radical de deux cercles non concentriques	49
4 / Faisceaux de cercles et droites	56
5 / Exercices	66

<b>CHAPITRE IV / <i>Etude plane élémentaire des coniques</i></b>	<b>69</b>
1 / Première définition plane (définition bifocale des coniques à centre)	69
2 / Deuxième définition plane, par foyer, directrice et excentricité (coniques non circulaires)	75
3 / Allure générale des coniques	77
4 / Tangentes à une conique	82
5 / Exercices	93

## DEUXIÈME PARTIE

### QUELQUES TRANSFORMATIONS NOUVELLES

<b>CHAPITRE V / <i>Perspectives</i></b>	<b>99</b>
1 / Introduction et propriétés élémentaires	99
2 / Rapports et birapports	104
3 / Points à l'infini	113
4 / Perspectives de parallélogrammes et quadrilatères complets	122
5 / Perspectives de triangles homothétiques et triangles homologiques	126
6 / Perspectives de cercles et coniques	129
7 / Introduction au dessin en perspective	135
8 / Exercices	150
<b>CHAPITRE VI / <i>Inversions</i></b>	<b>157</b>
1 / Introduction	157
2 / Conservation des angles et des contacts	160
3 / Conservation de l'ensemble des droites et cercles	164
4 / Introduction d'un point à l'infini	173
5 / Inversions dans un espace de dimension 3	175
6 / Projections stéréographiques	178
7 / Exercices	187
<b>CHAPITRE VII / <i>Transformations par polaires réciproques (tppr)</i></b>	<b>191</b>
1 / Points conjugués par rapport à un cercle	191
2 / Polaire d'un point par rapport à un cercle	193
3 / Tppr relative à un cercle	196
4 / Tppr relative à une conique propre	205

5 / Premiers exemples de théorèmes duaux	211
6 / Appendice : Enveloppe d'une famille de droites dans le plan	215
7 / Exercices	223

## TROISIÈME PARTIE

## MISE EN ŒUVRE DE NOUVEAUX OUTILS

CHAPITRE VIII / <i>Droites projectives</i>	229
1 / Droite projective prototype $\widehat{K}$	229
2 / Birapport de quatre nombres	230
3 / Homographies	233
4 / Droites projectives sur $K$	241
5 / Homographies entre deux droites d'un plan; théorèmes de Pappus et Copappus	249
6 / Homographies d'une conique sur elle-même; théorèmes de Pascal et Brianchon	254
7 / Générations homographiques ponctuelles et tangentielles des coniques	257
8 / Exercices	262
CHAPITRE IX / <i>Espaces projectifs</i>	267
1 / Espaces $P^n(K)$ , $P(E)$	267
2 / Transformations projectives et repères projectifs	269
3 / Structures d'espace projectif sur un ensemble	275
4 / Quelques exemples de calculs	289
5 / Exercices	293
CHAPITRE X / <i>Structures additionnelles sur un espace projectif</i>	295
1 / Structures affines sur un espace projectif	295
2 / Structures réelles sur un espace projectif complexe	303
3 / Structures angulaires (ou semblables) sur un espace projectif complexe, et pseudoangulaires sur un espace projectif quelconque	308
4 / Topologie sur les espaces projectifs réels et complexes	322
5 / Exercices	327



<b>CHAPITRE XI / Transformations géométriques</b>	<b>329</b>
1 / Quelques « traductions »	329
2 / Groupes et géométries	349
3 / Géométrie dont relève un théorème : pourquoi en sortir?	352
4 / Géométrie dont relève un problème : pourquoi y rester?	354
5 / Exercices	356
<b>CHAPITRE XII / Formes quadratiques, coniques et quadriques</b>	<b>359</b>
1 / Classification des courbes algébriques du second degré	359
2 / Quelques conséquences	371
3 / Classification des quadriques	375
4 / Dualité	380
5 / Faisceaux de coniques et transformations quadratiques	383
6 / Exercices	392
<b>CHAPITRE XIII / Introduction aux géométries elliptique et hyperbolique</b>	<b>399</b>
1 / Généralités sur la géométrie des espaces métriques	399
2 / Géométrie sphérique	404
3 / Le plan projectif elliptique	409
4 / Le plan hyperbolique	411
5 / Exercices	431
<b>APPENDICE HISTORIQUE (par R. Bkouche)</b>	<b>435</b>
<b>INDEX DES NOMS CITÉS</b>	<b>491</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>495</b>
<b>INDEX TERMINOLOGIQUE</b>	<b>499</b>

# Préface

*Ce fut un travail considérable et indispensable de remise en ordre qu'effectuèrent les mathématiciens du groupe Bourbaki, depuis quarante ou cinquante ans, en précisant les fondements, les structures communes sous-jacentes à des situations issues de branches parfois fort différentes des mathématiques, en remettant en cause certains clivages traditionnels, et en faisant bénéficier certaines théories d'éclairages nouveaux et insoupçonnés. Mais ce fut un travail de mathématiciens professionnels, destiné en priorité à des mathématiciens professionnels, connaissant bien les mathématiques passées et contemporaines, et qui avaient — à ce titre — des choses à remettre en ordre.*

*Cela n'a par contre aucun sens de ranger et de structurer le vide. L'erreur, selon moi, de certains disciples trop zélés de Bourbaki, a été de croire que le mode d'exposition formaliste et structuraliste pouvait avoir valeur de modèle pédagogique<sup>(1)</sup>, et se transposer à la formation de débutants ne connaissant encore rien — ou presque — aux mathématiques.*

*Une grande confusion s'est alors instaurée entre les objets mathématiques et leur structure, les problématiques et leur méthode d'approche, les résultats profonds et les outils pour les formuler ou les démontrer. Ceux-ci ont pris peu à peu le pas sur ceux-là, dans l'enseignement universitaire d'abord, puis secondaire et même élémentaire. Avant qu'aucun débat n'ait permis de relativiser, dans l'esprit des élèves et celui des professeurs qu'on formait, le rôle qu'il convenait d'attribuer aux structures, aux axiomatiques et à la rigueur, on s'est mis à enseigner partout les «structures*

<sup>(1)</sup> Ce que d'ailleurs Bourbaki, en tant que tel, n'a jamais prétendu!

*fondamentales* », dont les personnes mal informées auraient pu croire que c'était presque par miracle qu'il était possible de les appliquer à des exemples.

En géométrie tout particulièrement, de nouveaux lieux communs ont fleuri : on a prétendu que la géométrie élémentaire se ramenait désormais à quelques calculs triviaux sur un espace affine muni d'un produit scalaire, et que la géométrie tout court était moins l'étude des figures que celle des groupes de transformations. Les questions concernant la rigueur et la nécessité de partir d'une axiomatique (élémentaire ou pas) se sont posées en géométrie avec apparemment plus d'acuité qu'en algèbre et en analyse (peut-être parce que les axiomatiques y sont moins opérationnelles quand elles sont élémentaires et plus abstraites quand elles sont efficaces; peut-être aussi parce que les propriétés et les règles manipulatoires des points, des distances et des angles de l'espace dans lequel nous vivons, sont plus naturelles que celles des nombres et des fonctions, et que par conséquent la nécessité de les définir avec précision prête d'avantage à contestation; peut-être enfin par transposition mal comprise de la méthode formaliste qui s'est avérée indispensable au début du siècle pour résoudre une crise des fondements <sup>(1)</sup> laquelle ne peut concerner les débutants). La géométrie a joué en fait à l'égard de ces problèmes un rôle de révélateur, sans doute parce qu'il était plus difficile de les en évacuer : cela ne signifie pas qu'ils ne se posaient pas ailleurs!

Bien entendu l'algèbre linéaire, les groupes de transformations avec la classification des géométries, ainsi que certaines axiomatiques adaptées à certains niveaux de rigueur, sont de puissants outils pour mieux comprendre, aller plus vite et aller plus loin. Encore faut-il qu'on en ait eu besoin en ayant d'abord quelque chose à comprendre et à dépasser (des résultats, par exemple, susceptibles d'être énoncés dans un langage suffisamment simple pour pouvoir être appréciés par tout le monde, et en même temps suffisamment étonnants pour susciter la surprise et la curiosité d'un néophyte).

<sup>(1)</sup> Le livre *Les fondements de la Géométrie*, de D. Hilbert, est un ouvrage de recherche, qui — en dépit de l'ambiguïté du titre — s'adresse à des spécialistes et non à des débutants. D. Hilbert a aussi écrit, en collaboration avec Cohn-Vossen, un ouvrage d'enseignement, remarquable, dont on parle beaucoup moins en France (et qui n'a d'ailleurs jamais été traduit en français, contrairement au précédent) : *La Géométrie et l'imagination*.

*Les diverses tentatives de ces vingt dernières années pour enseigner ces théories puissantes à des débutants étaient donc d'avance<sup>(2)</sup> vouées à l'échec, dans la mesure où elles reposaient sur l'illusion qu'il suffirait que ceux-ci en disposent pour éprouver spontanément le besoin de s'en servir. Souvent, même, la confusion était faite entre ces outils et leur usage, ou bien cet usage était méprisé sous prétexte qu'il rendait faciles des démonstrations réputées autrefois pénibles (confusion entre l'intérêt d'un résultat et la difficulté de sa démonstration). La plupart du temps d'ailleurs, il n'était pas question « d'outils » à « utiliser », mais de « théories » qu'on pouvait — au mieux et quand il restait du temps — « appliquer »; comme si la plantation des clous n'était qu'une « application » de la théorie du marteau, à faire éventuellement en exercice pour s'assurer qu'on avait bien compris!*

*C'est pourquoi, avant de classer, transformer et structurer quoi que ce soit, ce livre propose au débutant, en première partie, un « stock de figures élémentaires ». (Beaucoup d'entre elles étaient autrefois bien connues des collégiens, des lycéens et de leurs professeurs.) Bien entendu c'est plus l'existence même d'un tel stock qui me semble importante que sa composition précise, et je ne souhaite pas polémiquer sur la nécessité de remettre à la mode tels ou tels résultats particuliers, bien que certains d'entre eux soient probablement moins périmés et moins inutiles au mathématicien d'aujourd'hui qu'on a bien voulu le dire!*

*En deuxième partie, il s'agit de montrer ce que sont de « vraies » transformations et l'usage qu'on peut en faire. Bien que cette notion soit relative (nous dirons qu'une transformation est « vraie » pour un théorème donné si elle n'appartient pas au groupe de la géométrie dont relève ce théorème), je veux surtout faire allusion par-là au fait que les étudiants, au cours de leurs études antérieures, n'ont pratiquement jamais manipulé que des similitudes (compositions d'isométries et d'homothéties) qui ne changent pas la « forme » des figures (c'est-à-dire les angles et les rapports de distances). Très peu ont réellement utilisé les rares transformations affines un peu*

<sup>(2)</sup> Nous l'avons écrit dès 1966 (bulletin de l'Association des professeurs de Mathématiques n° 256).



plus générales qu'ils ont rencontrées (combien, par exemple, ont vu les propriétés d'une ellipse que l'on peut déduire de celles du cercle principal? Combien ont abordé les règles du dessin en perspective, fut-elle cavalière?). Il est fréquent, dans l'enseignement des mathématiques, que des exemples trop particuliers ne soient pas les meilleurs pour introduire une notion, dès lors qu'ils recèlent un phénomène parasite exceptionnel; or la conservation de la forme des figures en est bien un! C'est pourquoi l'usage des transformations me paraît d'autant plus facile pour un débutant qu'elles transforment davantage. Non que les similitudes ne servent à rien; mais l'idée, par exemple, d'utiliser une homothétie pour démontrer l'existence de l'orthocentre d'un triangle ainsi que son alignement avec le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité, ou celle d'utiliser des symétries orthogonales dans les problèmes «de billard», peuvent sembler des astuces, difficiles à intégrer dans une méthode générale. Alors que toute personne, amenée à dessiner en perspective deux triangles homothétiques ou des cercles, trouvera quasi automatiquement le théorème de Desargues, les propriétés diamétrales de l'ellipse et les propriétés projectives d'une conique. A cet égard, et pour pousser à la caricature, le groupe de transformations réduit à l'identité, bien qu'il soit le plus facile à définir, est peut-être celui dont il est le plus difficile de faire comprendre qu'il peut aussi servir à quelque chose (cette distinction n'ayant évidemment d'intérêt que si l'on admet le postulat selon lequel le destin d'un groupe de transformations n'est pas d'être seulement défini!).

Si les groupes occupent aujourd'hui une telle place en géométrie, surtout depuis le programme d'Erlangen de F. Klein en 1872 et les travaux de S. Lie et E. Cartan, c'est parce qu'ils permettent de classer les propriétés géométriques selon le groupe des transformations qui les préservent, et de définir réciproquement la géométrie associée à un groupe opérant sur un ensemble, comme l'ensemble des notions et des théorèmes sur cet ensemble qui sont préservés par ce groupe. Un tel usage des groupes peut sembler bien abstrait à un débutant en géométrie et rester extrêmement théorique, car ne correspondant pas du tout à ses préoccupations. Il aura fallu, en effet, qu'il ait déjà rencontré beaucoup de résultats de géométrie élémentaire pour éprouver seulement le besoin de les classer et de

*définir avec précision la structure sous-jacente; il aura fallu qu'il ait déjà eu l'occasion de tâter en pratique de la dualité sous une forme ou sous une autre pour comprendre l'utilité de définir une structure d'espace projectif sur l'ensemble des droites d'un plan; il devra s'être déjà servi du birapport de quatre points sur une conique ou sur une autre courbe unicursale pour trouver naturel de munir cette courbe d'une structure de droite projective. Faute de telles pratiques antérieures, ces définitions n'auraient pas de signification à ses yeux.*

*C'est précisément pour acquérir ces pratiques nécessaires que la transformation de figures et de théorèmes en des figures et des résultats nouveaux, ou la résolution de problèmes que l'on peut ramener par transformation à des cas particuliers connus, prennent tout leur sens. On a beaucoup daubé sur l'intérêt limité, pour le mathématicien, des résultats que l'on pouvait obtenir ainsi (essentiellement à cause du caractère plus ou moins automatique du procédé<sup>(1)</sup>). Mais il ne faut pas confondre recherche et enseignement. L'acquisition de certains automatismes permet d'abord une économie de moyens, facilitant la disponibilité d'esprit nécessaire pour passer au stade suivant. Et ces exercices de style ont surtout, par la gymnastique et les analyses auxquelles ils obligent, une importante valeur formatrice; ils constituent un pas naturel et indispensable entre l'étude naïve des figures et la géométrie structurée. Ils ont enfin un rôle démystificateur tout à fait appréciable : n'importe qui<sup>(2)</sup>, ou presque, devient capable d'inventer un « théorème » en transformant une figure connue, et même de maquiller le procédé pour en faire un « problème »; si tel n'est pas l'objet de la recherche mathématique, du moins est-ce une façon de redonner confiance en eux à des étudiants qu'on a davantage habitués à subir qu'à maîtriser.*

*En troisième partie, enfin, s'il s'agit de mettre un peu d'ordre dans tout cela, de préciser certaines des structures entrevues précédemment, et de les classer par leur groupe de transformations : ce n'est plus, maintenant, par pure spéculation, mais cela nous*

<sup>(1)</sup> Cf. « Eléments d'histoire des mathématiques », de Bourbaki (Ed. Hermann), p. 171 et suivante.

<sup>(2)</sup> Cf. Chasles (1837), cité par Bourbaki ci-dessus.

*permet au contraire d'approfondir notre compréhension des phénomènes déjà rencontrés et d'en découvrir de nouveaux. Lorsque nous énonçons par exemple, au chapitre 11, que les tangentes à une parabole en des points alignés avec le foyer sont orthogonales, que leur point de concours est sur la directrice, et qu'il se projette orthogonalement en le foyer sur la droite qui joint les points de contact, ce n'est plus au résultat en lui-même que nous nous intéressons (résultat que l'on peut d'ailleurs parfaitement se permettre d'ignorer, et qui se démontre aussi de façon très élémentaire); ce que nous voulons, c'est plutôt faire comprendre pourquoi il est équivalent, au sens de la géométrie projective complexe, à cet autre résultat, qu'un élève de sixième pourrait admettre : tout parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange. Il s'agit en effet d'expliquer, entre autres choses, l'interprétation de la géométrie angulaire en géométrie projective complexe au moyen des points cycliques ou de l'ombilicale, ainsi que sa généralisation en géométrie non euclidienne conduisant aux modèles des géométries elliptique et hyperbolique.*

*Bien entendu, je n'ai rien inventé, et ne peux que renvoyer le lecteur à certains cours de géométrie d'il y a trente ou cinquante ans (Deltheil et Caire, Lebossé et Hémery, Michel...), que j'ai tout au plus voulu structurer progressivement et élaguer quelque peu pour essayer de l'adapter au public d'aujourd'hui (il n'était pas nécessaire pour cela de bouleverser les contenus autant qu'on le fit dans les années 70).*

*Le livre que nous proposons ici s'adresse en priorité aux étudiants préparant une licence ou une maîtrise de Mathématiques, le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux professeurs de l'enseignement secondaire formés au cours des dix dernières années. Les prérequis en géométrie correspondent donc aux connaissances moyennes de ces lecteurs, c'est-à-dire quelques généralités sur les espaces affines et l'algèbre linéaire, en particulier sur le calcul vectoriel dans le plan ou l'espace (avec produit scalaire si besoin est), ainsi que sur les formes quadratiques, et c'est à peu près tout! J'aurais d'ailleurs pu aisément me passer, au prix de quelques lourdeurs dans les démonstrations, du peu de calcul vectoriel utilisé dans les premiers chapitres. Quant à l'algèbre linéaire proprement dite, je ne l'utilise*

*guère avant les chapitres 8 ou 9; si les lecteurs n'en avaient déjà fait, il aurait toujours été temps, à ce moment-là seulement, de voir le minimum indispensable. Un tel cours au niveau de la licence aurait probablement été plus à sa place, et j'aurais préféré en revanche pouvoir supposer connue toute la première partie : il est clair qu'une éventuelle réédition de cet ouvrage, d'ici quelques années, devrait tenir compte d'éventuels nouveaux cursus qu'on pourrait espérer plus cohérents.*

*Rudolphe Bkouche a bien voulu rédiger un appendice historique. Robert Gergondey et lui m'ont suggéré certaines retouches, et m'ont aussi aidé à sélectionner des exercices. Qu'ils soient ici remerciés, et qu'ils sachent combien j'ai apprécié leur collaboration!*

Daniel LEHMANN





## **PREMIÈRE PARTIE**

# **Un stock de figures élémentaires**

<b>CHAPITRE I. — Droites concourantes dans un triangle</b>	<b>19</b>
<b>CHAPITRE II. — Problèmes d'angles</b>	<b>29</b>
<b>CHAPITRE III. — Divisions harmoniques et cercles orthogonaux</b>	<b>45</b>
<b>CHAPITRE IV. — Étude plane élémentaire des coniques</b>	<b>69</b>



## CHAPITRE PREMIER

# *Droites concourantes dans un triangle*

### 1 - Médianes et centre de gravité d'un triangle

Etant donnés trois points non alignés, A, B et C, dans un plan, notons A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

#### **Théorème 1-1**

- (i) *Il existe un unique point <sup>(1)</sup> dans le plan <sup>(2)</sup> (nous noterons G ce point) tel que*

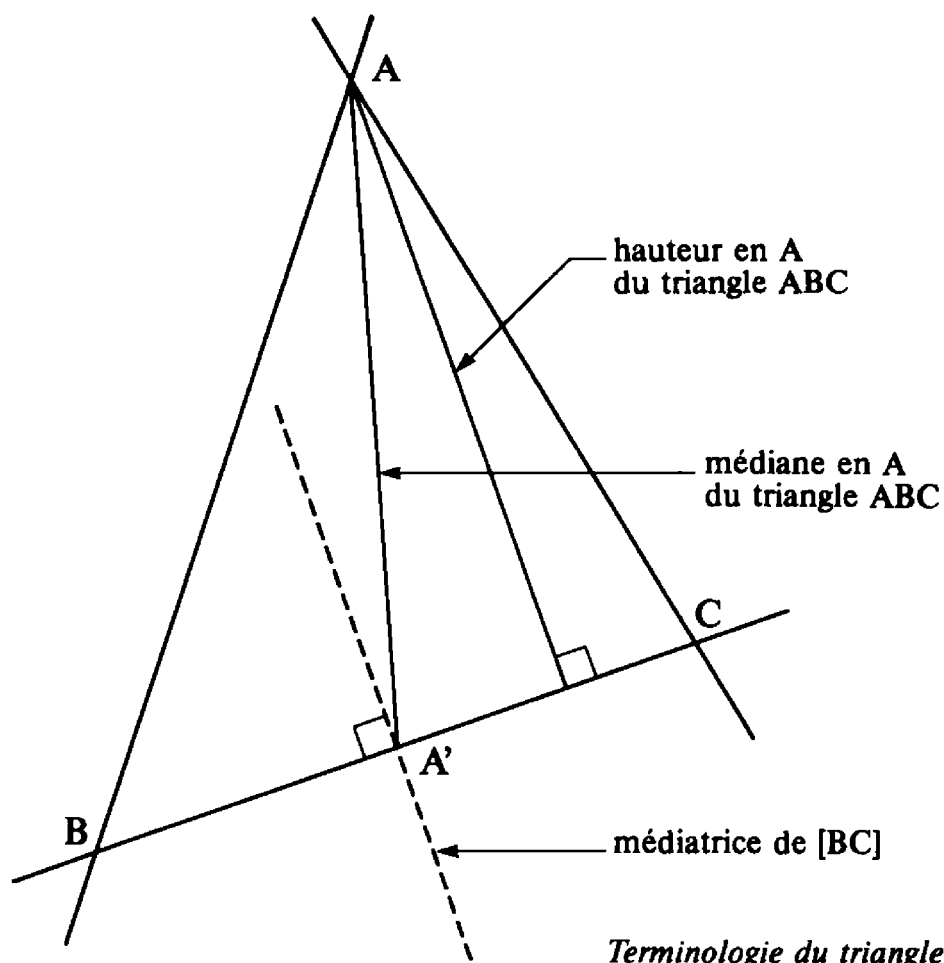
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$$

- (ii) *Les trois médianes AA', BB' et CC' sont concourantes, et leur point de concours est G.*  
(iii) *Les points A', B' et C' sont respectivement homologues de A, B et C dans l'homothétie de centre G et rapport  $-\frac{1}{2}$ .*

<sup>(1)</sup> Le point G est appelé *centre de gravité* du triangle. On dit aussi que c'est le « barycentre » des points A, B et C, tous trois affectés du même coefficient 1.

<sup>(2)</sup> Bien que la notion naïve de plan suffise aux besoins de cet énoncé, le lecteur qui connaîtrait la notion d'*espace affine* remarquera que c'est relativement à une telle structure sur le plan que les notions de « milieu », « médiane », « homothétie », « barycentre » et « centre de gravité », prennent un sens.

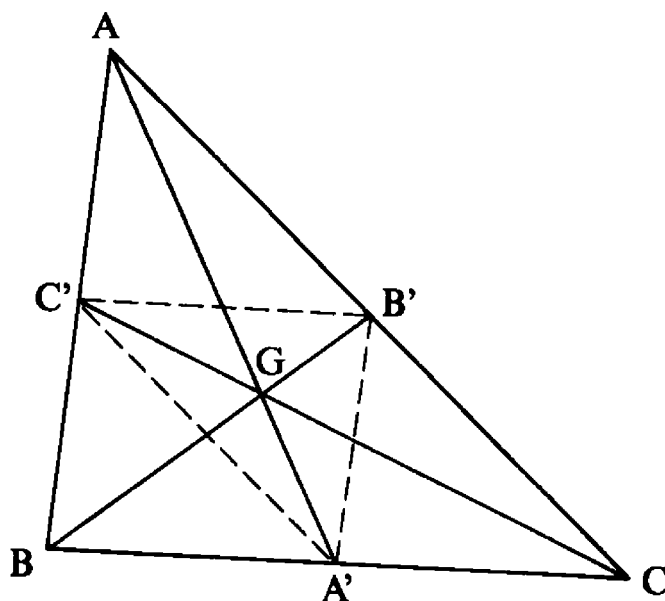




*Terminologie du triangle*

Choisissons en effet arbitrairement un point  $O$  du plan, destiné à servir de référence. Puisque, pour tout point  $M$  du plan, on a :

$$3\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}),$$



la relation  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$  équivaut à  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ,  
d'où l'existence et l'unicité de G.

Puisque  $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 0$ ,

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{GA'},$$

et la relation  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$  devient :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = 0 \text{ et, de même,}$$

$$\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB'} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GC'} = 0.$$

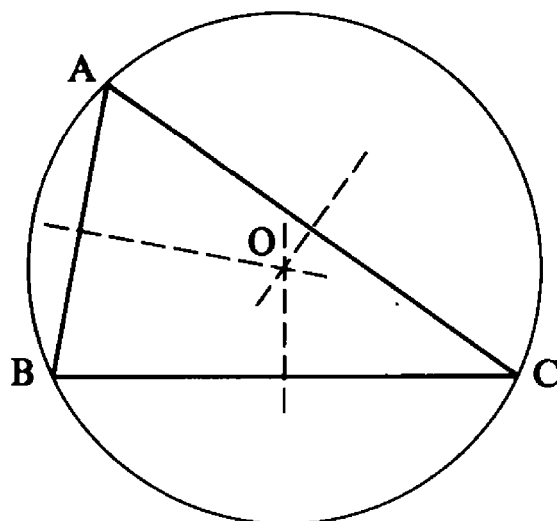
Les conclusions (ii) et (iii) du théorème en résultent.

## 2 - Médiatrices et cercle circonscrit à un triangle

Soient A, B, et C trois points non alignés dans un plan<sup>(3)</sup>.

### Théorème 1-2

- (i) *Les trois médiatrices des segments [BC], [AC] et [AB] sont concourantes.*



<sup>(3)</sup> Il faut supposer le plan muni d'une structure *euclidienne* ou « métrique », pour que les notions de « médiatrice » et de cercle prennent un sens.

- (ii) *Leur point de concours est le centre d'un cercle passant par A, B et C.*
- (iii) *Il n'existe qu'un seul tel cercle passant par A, B et C. [Le cercle en question est appelé le cercle circonscrit au triangle.]*

*Démonstration.* — Notons O le point d'intersection des médiatrices de [AB] et [AC] (non parallèles, puisque A, B et C ne sont pas alignés) : on a donc à la fois  $\|OA\| = \|OB\|$  et  $\|OA\| = \|OC\|$ . On en déduit  $\|OB\| = \|OC\|$  : c'est dire que la médiatrice de [BC] passe aussi par O, qui est donc centre d'un cercle de rayon  $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\|$  passant par A, B, C.

Il est bien clair que ce cercle était le seul possible qui puisse passer par A, B et C.

### 3 - Hauteurs et orthocentre d'un triangle

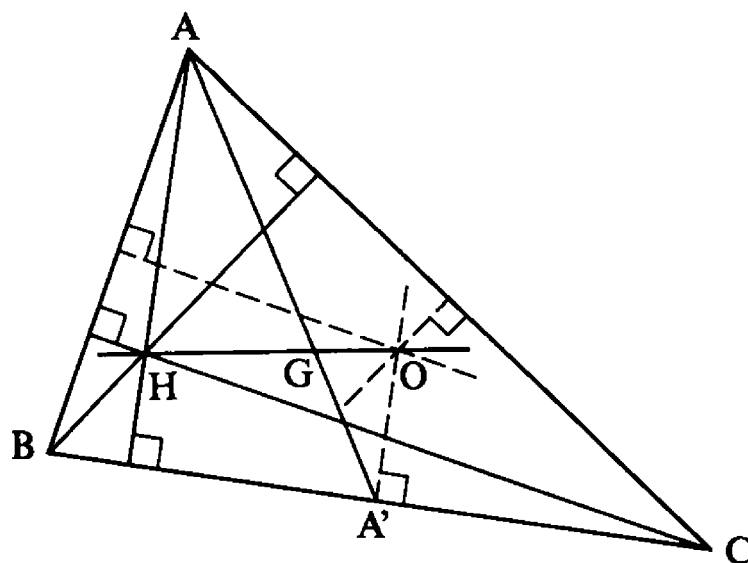
Reprenant la figure du paragraphe 2, on remarque que les médiatrices de [BC], [AC] et [AB] sont aussi les hauteurs du triangle A'B'C' en A', B' et C' respectivement (B'C' est en effet parallèle à BC d'après le théorème de Thalès; de même A'B' et A'C' sont parallèles à AB et AC respectivement).

Les hauteurs du triangle A'B'C' sont donc concourantes. L'homothétie de centre G et rapport  $-2$  transforment les hauteurs de A'B'C' en celles de ABC, on en déduit le

#### **Théorème 1-3**

- (i) *Les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes.*
- (ii) *Leur point de concours, H, est aligné avec le centre de gravité G et le centre O du cercle circonscrit, vérifiant :*

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}.$$



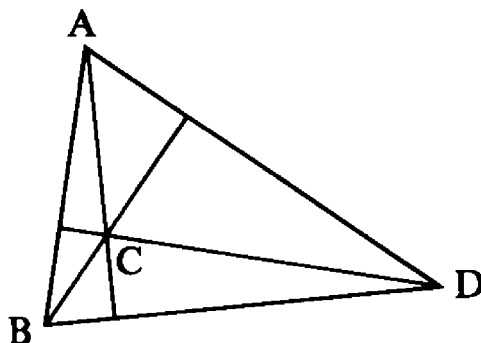
**Remarques :**

1) Le point H s'appelle l'*orthocentre* du triangle ABC, et la droite GH (bien définie si le triangle n'est pas équilatéral) la *droite d'Euler*.

2) L'homothétie de centre G et rapport  $-\frac{1}{2}$  transformant le centre O du cercle circonscrit à ABC en le centre O' du cercle circonscrit à A'B'C', le point O' appartient aussi à la droite d'Euler, et vérifie :

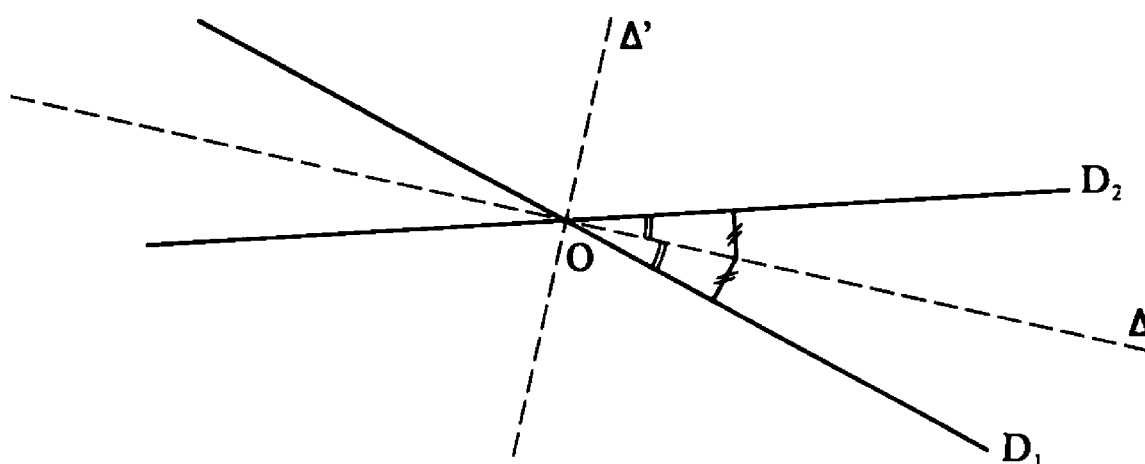
$$\overrightarrow{GO} = -2\overrightarrow{GO'}.$$

3) Soient A, B, C et D quatre points tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés : si l'un d'eux est orthocentre du triangle formé par les trois autres, cette propriété est alors encore vérifiée par chacun d'eux : on dit que les quatre points forment un *système orthocentrique*.

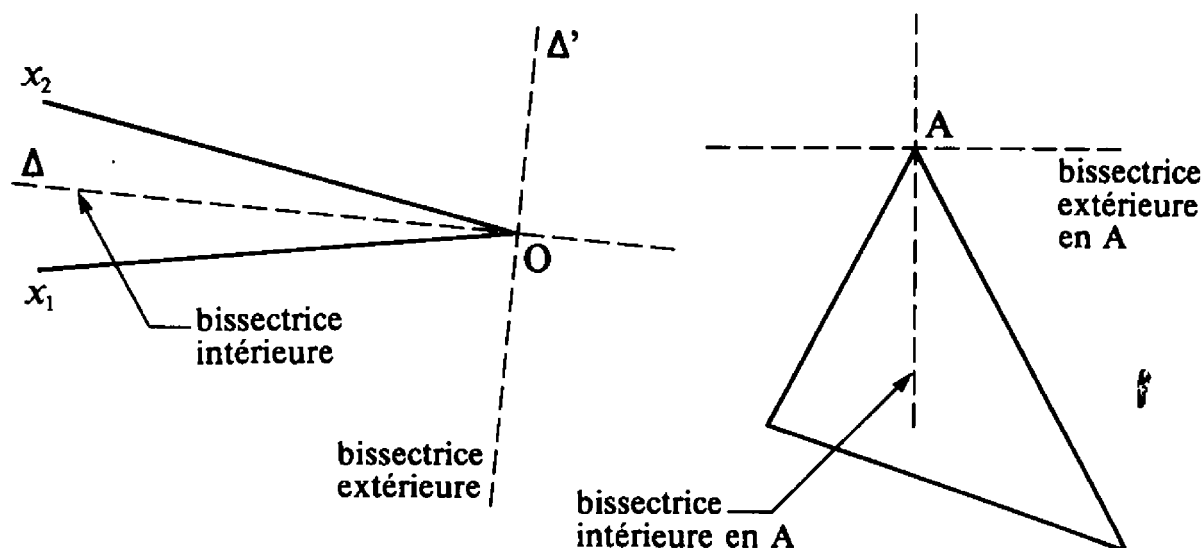


#### 4 - Bissectrices. Cercles inscrit et exinscrits à un triangle

Rappelons d'abord que, dans un plan euclidien, la figure formée par deux droites  $D_1$  et  $D_2$  concourant en un point  $O$  admet deux axes de symétrie,  $\Delta$  et  $\Delta'$ , se coupant orthogonalement en  $O$  (les « bissectrices » de l'angle de droites  $(D_1, D_2)$ ), l'ensemble  $\Delta \cup \Delta'$  étant aussi le lieu des points équidistants de  $D_1$  et  $D_2$ .



Si  $Ox_1$  (resp.  $Ox_2$ ) désigne l'une des deux demi-droites portées par  $D_1$  (resp.  $D_2$ ), rappelons aussi qu'il n'y a plus qu'une seule des deux bissectrices  $\Delta$  ou  $\Delta'$  qui est axe de symétrie de la figure formée par  $(Ox_1, Ox_2)$  : on l'appelle *bissectrice intérieure* de l'angle des demi-droites  $Ox_1$  et  $Ox_2$ , l'autre étant appelée *bissectrice extérieure*.



Etant donnés trois points non alignés  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on définit de même les bissectrices intérieures et extérieures du triangle, en  $A$ ,  $B$  et  $C$  respectivement.

### **Théorème 1-4**

- (i) *Les trois bissectrices extérieures d'un triangle  $ABC$  forment un triangle  $JKL$  admettant les trois bissectrices intérieures ou  $ABC$  comme hauteurs.*
- (ii) *Les trois bissectrices intérieures de  $ABC$  sont concourantes. Leur point de concours  $I$  est l'orthocentre du triangle  $JKL$ . Les deux bissectrices extérieures en  $B$  et  $C$  du triangle  $ABC$  concourent en  $J$  avec la bissectrice intérieure en  $A$ , et de même en permutant circulairement  $A$ ,  $B$ ,  $C$  d'une part,  $J$ ,  $K$ ,  $L$  d'autre part.*
- (iii) *L'ensemble des points du plan équidistants des trois droites  $AB$ ,  $BC$  et  $AC$  est l'ensemble des quatre points  $I$ ,  $J$ ,  $K$  et  $L$ .*
- (iv) *Les points  $I$ ,  $J$ ,  $K$  et  $L$  sont chacun le centre d'un cercle tangent à la fois aux trois droites  $AB$ ,  $AC$  et  $BC$ . Ces quatre cercles sont les seuls ayant cette propriété.*

Des quatre cercles définis en (iv), celui de centre  $I$  est appelé *cercle inscrit* dans le triangle  $ABC$ , et celui de centre  $J$  est appelé *cercle exinscrit dans l'angle  $\widehat{A}$*  du triangle  $ABC$  [et de même pour les cercles de centre  $K$  et  $L$ , respectivement exinscrits dans l'angle  $\widehat{B}$  et dans l'angle  $\widehat{C}$  de  $ABC$ ].

*Démonstration.* — Notons

$J$  l'intersection des bissectrices extérieures en  $B$  et  $C$ ,  
 $K$  l'intersection des bissectrices extérieures en  $A$  et  $C$ ,  
 $L$  l'intersection des bissectrices extérieures en  $A$  et  $B$ .

Le point  $J$ , étant sur la bissectrice extérieure en  $B$ , est à égale distance des droites  $BA$  et  $BC$ . De même, il est à égale distance des droites  $CA$  et  $BC$ . Il est donc à égale distance de  $AB$  et  $AC$ ,



## 5 - Exercices sur le chapitre 1

- 1/ On se donne un triangle  $ABC$  et trois points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  respectivement sur  $BC$ ,  $AC$ , et  $AB$ .

$$\text{On pose : } P(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \times \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \times \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}.$$

a) Montrer (Menelaüs) l'équivalence des deux conditions :

- (i)  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont alignés,
- (ii)  $P(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ .

[Si  $\Delta_0$  désigne la parallèle à  $\beta\gamma$  passant par  $A$ , on pourra utiliser le point d'intersection  $I = \Delta_0 \cap BC$ .]

[Lorsque  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont alignés, on dira qu'ils forment une « transversale » au triangle  $ABC$ .]

b) Montrer (Céva) l'équivalence des deux conditions :

- (i) Les droites  $A\alpha$ ,  $B\beta$ ,  $C\gamma$  sont concourantes.
- (ii)  $P(\alpha, \beta, \gamma) = -1$ .

[On peut, soit utiliser a), soit les propriétés du barycentre de trois points.]

c) Utiliser le théorème de Céva pour redémontrer que les hauteurs (resp. les médianes, resp. les bissectrices) d'un triangle sont concourantes.

d) On suppose que  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont les points de contact, avec les côtés du triangle, du cercle inscrit (resp. de l'un des cercles exinscrits). Calculer  $P(\alpha, \beta, \gamma)$ . Conclusion.

e) On note :

$\alpha'$  le symétrique de  $\alpha$  par rapport au milieu de  $[BC]$ ,  
 $\beta'$  le symétrique de  $\beta$  par rapport au milieu de  $[AC]$ ,  
 $\gamma'$  le symétrique de  $\gamma$  par rapport au milieu de  $[AB]$ .

Comparer  $P(\alpha', \beta', \gamma')$  et  $P(\alpha, \beta, \gamma)$ . Conclusion.

- 2/ Notons  $\Gamma$  un cercle de centre  $O$  passant par deux points  $B$  et  $C$  (distincts). On suppose qu'un point  $M$  parcourt  $\Gamma$ .



- a) Quel est le lieu du centre de gravité  $G$  du triangle  $BCM$ ?
- b) Quel est le lieu de l'orthocentre  $H$  de ce triangle?
- c) Par quelle transformation indépendante de  $M$  les points  $M$  et  $H$  sont-ils homologues?
- 3/ Construire un triangle, à la règle et au compas, connaissant les longueurs des trois médianes.
- 4/ Notons  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  les milieux des côtés d'un triangle  $ABC$ ,  $H$  son orthocentre,  $O$  le centre de son cercle circonscrit,

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = AH \cap BC \\ B_1 = BH \cap AC \\ C_1 = CH \cap AB \end{array} \right\} \text{ les « pieds » des hauteurs,}$$

et  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  les milieux respectifs des segments  $[AH]$ ,  $[BH]$  et  $[CH]$ . Montrer que le milieu du segment  $[OH]$  sur la droite d'Euler est le centre  $O'$  du cercle circonscrit au triangle  $A'B'C'$  et que ce cercle passe aussi par  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ . (« Cercle des 9 points ». Théorème de Feuerbach.)

- 5/ Soient  $ABC$  un triangle, et  $\alpha$  un point intérieur au segment  $[BC]$ . Construire  $\beta$  sur  $[AC]$  et  $\gamma$  sur  $[AB]$  de façon que le périmètre du triangle  $\alpha\beta\gamma$  soit minimum (Fagano). [Utiliser les symétries relatives aux droites  $AB$  et  $AC$ .] Ce périmètre minimum dépend-il de  $\alpha$ ?

## CHAPITRE II

# *Problèmes d'angles*

### 1 - Le point sur les angles (rappels sans démonstration)

Les angles dont il va s'agir dans la suite seront tantôt des angles de demi-droites (ou de vecteurs, ou d'axes), tantôt des angles de droites.

De façon générale, deux couples de demi-droites  $(Ox, Oy)$  et  $(O'x', O'y')$  (resp. de droites  $D_1D_2$  et  $(D'_1, D'_2)$ ) *définiront le même angle* s'il existe une isométrie<sup>(1)</sup> de l'espace, transformant  $(Ox, Oy)$  en  $(O'x', O'y')$  (resp.  $(D_1, D_2)$  en  $(D'_1, D'_2)$ ); la somme des angles sera alors définie de façon à correspondre à la somme des « mesures ».

Mais, selon la dimension de l'espace euclidien dont on considère les isométries (plus précisément selon qu'il s'agit spécifiquement d'un plan ou pas nécessairement), et selon les différents types d'isométrie (directe<sup>(2)</sup>, ou pas nécessairement), on sera amené à distinguer trois sortes d'angles, dont il faudra bien préciser à chaque fois dans quel espace ils sont définis, à quelle condition on sait définir leur(s) mesure(s), et quel est le degré d'indétermination éventuelle de celles-ci.

*a) Les angles orientés de demi-droites* seront définis dans un plan euclidien (non nécessairement orienté), en considérant les

<sup>(1)</sup> C'est-à-dire une transformation préservant les distances.

<sup>(2)</sup> C'est-à-dire préservant l'orientation.

isométries *directes* <sup>(3)</sup> de ce plan euclidien; il sera par contre nécessaire d'avoir orienté le plan pour définir les mesures de ces angles ( $\alpha \pmod{2\pi} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  pour des mesures exprimées en radians); ces angles sont donc définis par les données simultanées de *leur sinus et de leur cosinus, une fois le plan orienté*; si on change l'orientation du plan,  $\alpha \pmod{2\pi}$  devient  $-\alpha \pmod{2\pi}$ .

*b) Les angles orientés de droites* seront également définis dans un plan euclidien (non nécessairement orienté), en considérant toujours les isométries *directes* <sup>(3)</sup> de ce plan euclidien; il sera encore nécessaire d'avoir orienté le plan, pour définir les mesures de ces angles qui — cette fois-ci — seront définies modulo  $\pi$

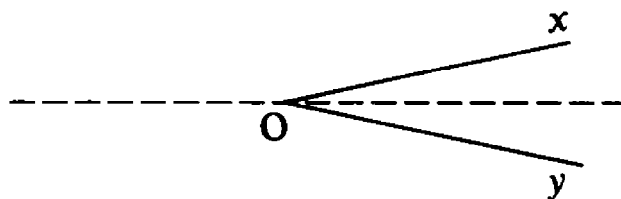
$$(\alpha \pmod{\pi} \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$$

pour des mesures exprimées en radians); ces angles seront donc définis par *leur tangente, une fois le plan orienté*; si on change l'orientation du plan,  $\alpha \pmod{\pi}$  est changé en  $-\alpha \pmod{\pi}$ .

*c) Les angles non orientés de demi-droites* seront définis dans un espace euclidien de *dimension quelconque* (supérieure ou égale à 2), en considérant *toutes* les isométries de cet espace; celui-ci n'a nullement besoin d'être orienté, non seulement pour que ces angles puissent être définis, mais aussi — cette fois-ci — pour que leur mesure puisse être définie : ils en admettent en effet une et une seule en radians dans  $[0, \pi]$  et sont donc définis par leur *cosinus*.

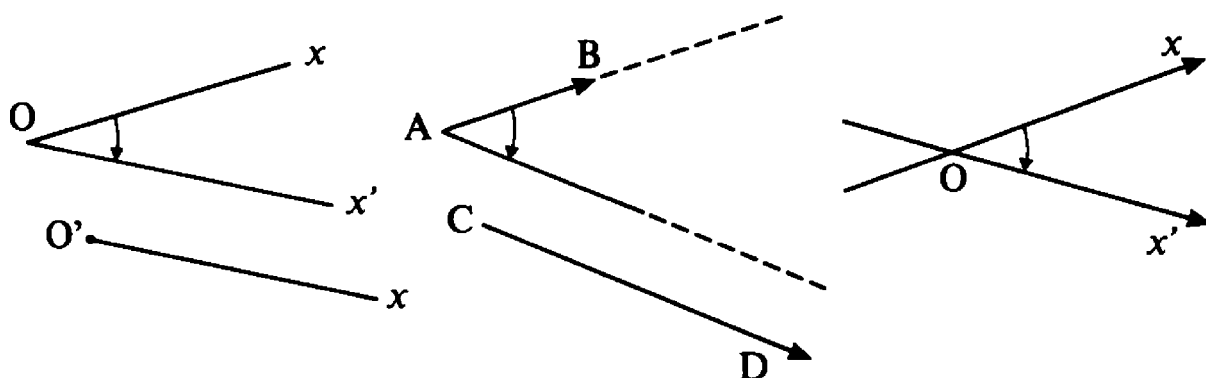
On pourrait songer à définir aussi les angles orientés de demi-droites dans un espace euclidien de dimension  $\geq 3$  en considérant les isométries directes d'un tel espace. Mais cette notion est sans intérêt, car alors,  $(Ox, Oy)$  et  $(Oy, Ox)$  sont toujours homologues par une isométrie directe : par exemple, si l'espace est de dimension 3, une rotation d'angle  $\pi$  autour de la bissectrice de  $(Ox, Oy)$  permute  $Ox$  et  $Oy$ , et c'est une isométrie directe (alors que sa restriction au plan engendré par  $Ox$  et  $Oy$  est une isométrie indirecte de ce plan!).

<sup>(3)</sup> Pour dire qu'une isométrie est directe ou non, il n'est pas nécessaire que le plan euclidien ait été orienté, car une isométrie qui préserve l'une des orientations du plan préserve l'autre!

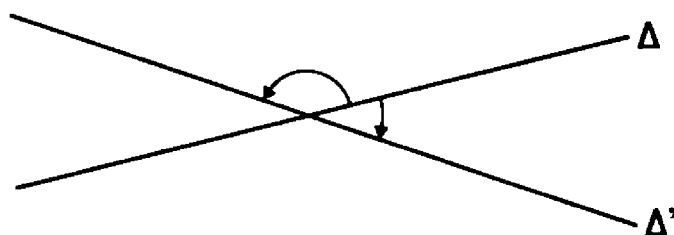


### Notations

- angles orientés de demi-droites (ou vecteurs, ou axes<sup>(4)</sup>) dans un plan euclidien :



- angles orientés de droites dans un plan euclidien :

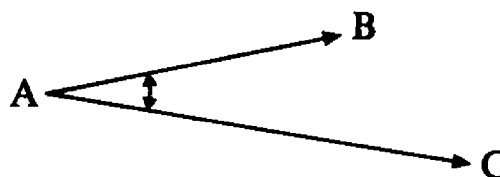
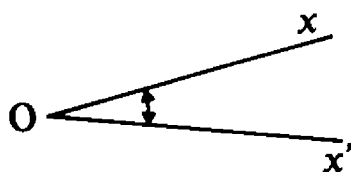


- angles orientés de demi-droites (ou vecteurs, ou axes) :

$(\widehat{Ox}, \widehat{O'x})$  ou  $\widehat{xOx'}$  si  $O = O'$

$(\widehat{AB}, \widehat{CD})$  ou  $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$  au lieu de  $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$

$(\widehat{\Delta}, \widehat{\Delta'})$



(<sup>4</sup>) « Axe » signifie : droite orientée.

On utilisera souvent *l'abus de notation* consistant à identifier un angle avec ses ou sa mesure, et on écrira par exemple :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \alpha \pmod{2\pi} \quad \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

$$(\Delta, \Delta') = \alpha \pmod{\pi} \quad \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z},$$

$$\widehat{BAC} = \alpha \quad \in [0, \pi].$$

[Il faut prendre bien garde, toutefois, que les deux premiers abus de notation n'ont de sens que si le plan a été préalablement orienté.]

Rappelons enfin les « relations de Chasles » :

$$(Ox, Oy) + (Oy, Oz) = (Ox, Oz)$$

$$(\text{resp. } (\Delta, \Delta') + (\Delta', \Delta'') = (\Delta, \Delta''))$$

entre angles orientés de demi-droites (resp. de droites) dans un plan euclidien, qui forment un groupe abélien<sup>(5)</sup> isomorphe à  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (resp.  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ ), la donnée d'une orientation du plan définissant un tel isomorphisme.

## 2 - Somme des angles d'un triangle

### Théorème 2-1

Pour tout triangle ABC, on a :

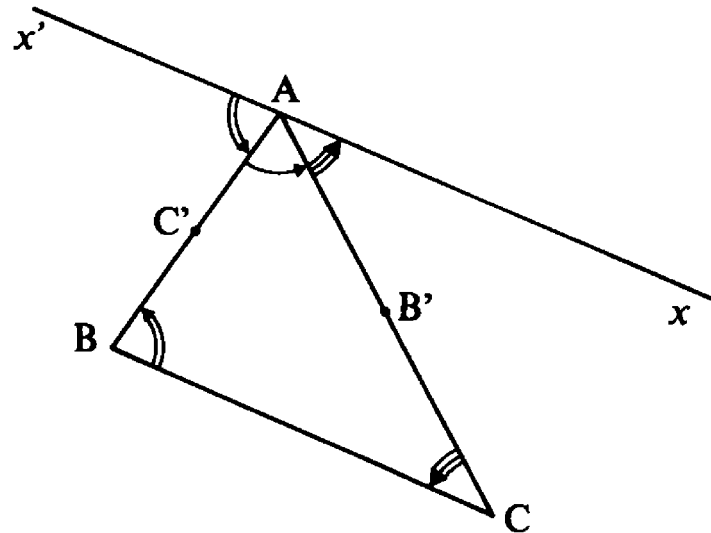
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi \pmod{2\pi}.$$

### Remarques :

1) Puisque  $\pi \equiv -\pi \pmod{2\pi}$ , la notation  $\pi \pmod{2\pi}$  désigne tout simplement un angle plat, lequel est égal à son opposé dans le groupe des angles orientés; il n'est donc pas nécessaire d'avoir orienté le plan pour donner un sens à cette notation.

(<sup>5</sup>) C'est-à-dire un groupe commutatif.

2) Puisqu'il s'agit d'angles orientés, la formule de l'énoncé désigne des angles du plan ABC.



### Corollaire

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$  (dans un plan ou un espace de dimension plus grande)

[où  $\hat{A}$  désigne  $\widehat{BAC}$ ,  $\hat{B} = \widehat{CBA}$  et  $\hat{C} = \widehat{BCA}$ ].

Il existe en effet une orientation du plan ABC telle que chacun des trois angles  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$  et  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$  admette une mesure (et une seule) dans  $]0, \pi[$ , d'où le corollaire.

*Démonstration du théorème.* — Menons par A la parallèle à BC, en notant Ax la demi-droite de même sens que  $\overrightarrow{BC}$ , et Ax' la demi-droite opposée. Notons B' et C' les milieux respectifs des segments [AC] et [AB] : la symétrie centrale  $\sigma_{B'}$  par rapport à B' est une isométrie directe du plan, d'où :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, Ax).$$

$$\text{De même } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (Ax', \overrightarrow{AB}).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ = (Ax', \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, Ax), \\ = (Ax', Ax), \end{aligned}$$

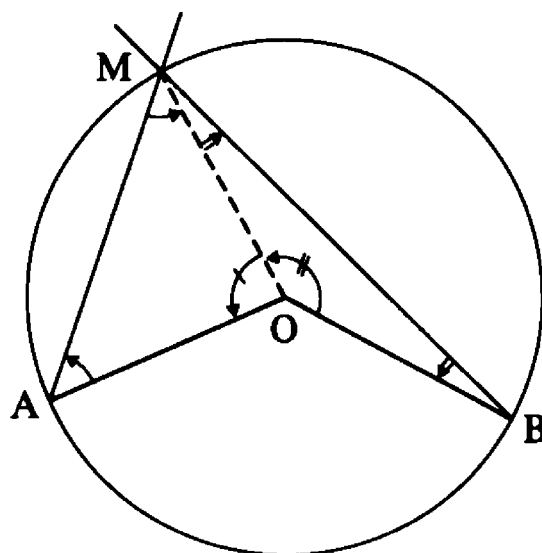
d'où le théorème.

### 3 - Théorème de l'arc capable

#### Théorème 2-2

Si  $O$  désigne le centre du cercle circonscrit à un triangle  $MAB$ , on a :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$



**Remarque :**  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$  est un angle orienté de droites, dont les mesures en radian, une fois le plan orienté, sont définies modulo  $\pi$ ; tandis que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  est un angle orienté de vecteurs dont les mesures sont définies modulo  $2\pi$ ; mais  $\frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  a alors ses mesures définies modulo  $\pi$ , d'où la cohérence de l'égalité qui figure dans l'énoncé.

**Démonstration.** — Le théorème 2-1, appliqué au triangle isocèle  $OMA$ , devient :

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \pi \pmod{2\pi}.$$

De même, appliqué au triangle isocèle OMB, le théorème devient :

$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi \pmod{2\pi}.$$

En sommant terme à terme ces deux égalités, on a :

$$2[(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})] + [(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})] = 0 \pmod{2\pi},$$

soit :  $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 0 \pmod{2\pi}$ , d'où le théorème.

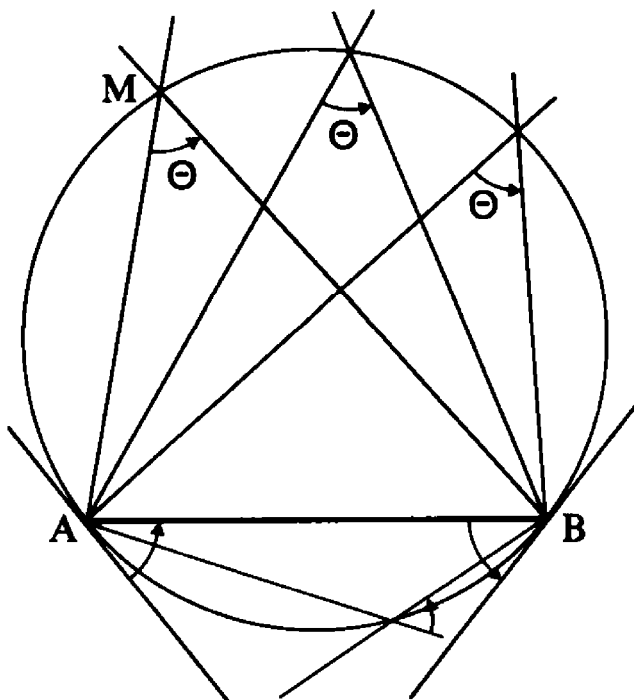
### Corollaire 1 (« théorème de l'arc capable »)

Soit  $\theta$  un angle orienté de droites, dans un plan euclidien, et A et B deux points distincts de ce plan. Le lieu des points M du plan tels que  $(MA, MB) = \theta$  est

- la <sup>(6)</sup> droite AB si  $\theta = 0 \pmod{\pi}$ ,
- le cercle passant par A et B, d'angle au centre

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\theta \pmod{2\pi} \quad \text{si } \theta \neq 0.$$

La démonstration du corollaire à partir du théorème ne présente aucune difficulté.



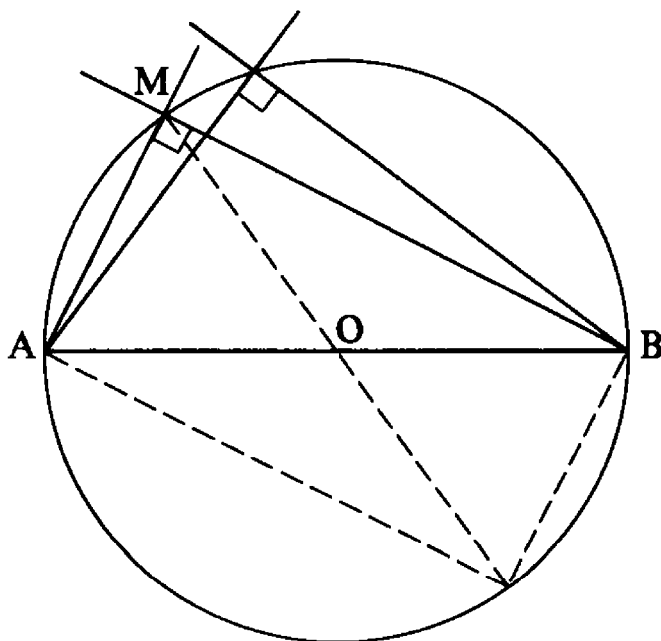
<sup>(6)</sup> On verra ultérieurement (chapitres 5 et 8) qu'il y a lieu d'ajouter la « droite de l'infini » à la droite AB.



[Si  $M$  tend vers  $A$  (resp.  $B$ ), la droite  $MA$  tend vers la tangente  $a$  en  $A$  (resp.  $b$  en  $B$ ) au cercle, et l'on convient<sup>(7)</sup> que  $MA$  (resp.  $MB$ ) désigne cette tangente pour  $M$  en  $A$  (resp. en  $B$ ), de sorte que  $A$  et  $B$  appartiennent encore au lieu cherché, et que  $(a, AB) = (AB, b) = \theta \pmod{\pi}$ .]

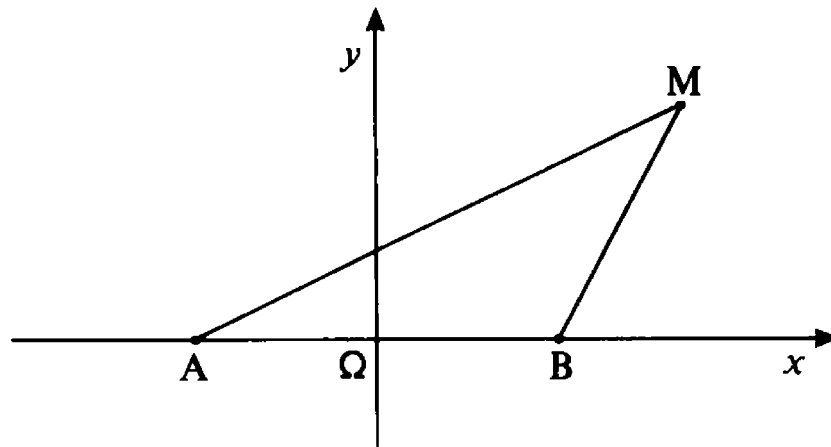
*Cas particulier*  $\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ . — Le cercle admet alors le segment  $[AB]$  comme diamètre. [Une démonstration directe est aisée si l'on se souvient :

- (i) qu'un triangle rectangle est un « demi-rectangle »,
- (ii) que les quatre sommets d'un rectangle sont cocycliques sur un cercle centré au point d'intersection des diagonales.]



*Démonstration analytique du corollaire 1.* — Choisissons un repère orthonormé  $(\Omega x, \Omega y)$  par rapport auquel les points  $A$  et  $B$  admettent respectivement comme coordonnées  $(-a, 0)$  et  $(a, 0)$ . Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x, y)$ .

<sup>(7)</sup> Prolongement « par continuité ».



1) Pour  $\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ , la condition  $(MA, MB) = \frac{\pi}{2}$  s'écrit :

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = 0$$

soit  $(x + a)(x - a) + y^2 = 0,$

ou encore

$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$

On reconnaît l'équation d'un cercle de diamètre  $[AB]$ .

2) Pour  $\theta \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  et  $x \neq -a$ , la pente de MA est égale à  $\frac{y}{x + a}$ ; tandis que, pour  $x \neq a$ , la pente de MB est égale à  $\frac{y}{x - a}$ ; pour  $x \neq a, -a$ , la condition

$$(MA, MB) = \theta$$

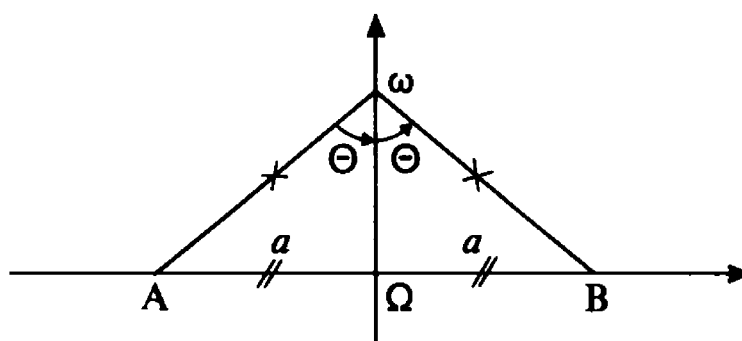
s'écrit :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{y}{x - a} - \frac{y}{x + a}}{1 + \frac{y}{x - a} \cdot \frac{y}{x + a}},$$

soit  $\operatorname{tg} \theta = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2},$

d'où l'équation<sup>(8)</sup> du lieu cherché :

- (i)  $x^2 + y^2 - a^2 - 2ay \cotg \theta = 0$  pour  $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ ,
  - (ii)  $y = 0$  pour  $\theta = 0 \pmod{\pi}$ .
- (i) est l'équation d'un cercle passant par A et B, et dont le centre O a pour coordonnées  $(0, a \cotg \theta)$ , d'où
- $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\theta \pmod{2\pi}.$$



- (ii) est l'équation de l'axe des abscisses.

## Corollaire 2

- (i) *Pour que quatre points coplanaires et non alignés A, B, C, D soient cocycliques, il faut et il suffit que*

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}).$$

- (ii) *Etant donnés quatre points coplanaires A, B, C, D, l'une quelconque des égalités suivantes entraîne toutes les autres :*

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}), \quad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}),$$

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}), \quad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}),$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}), \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}).$$

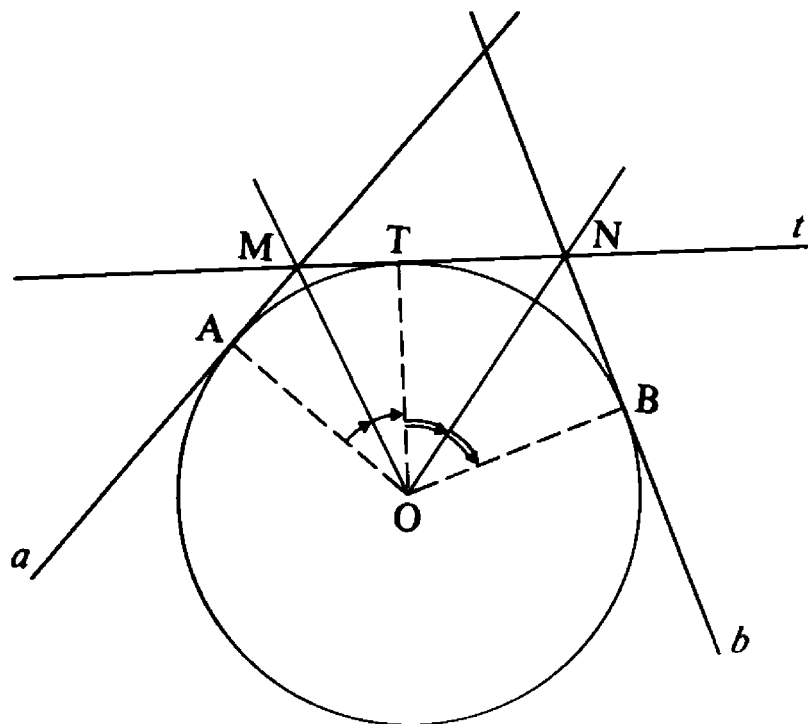
La démonstration du corollaire 2 à partir du corollaire 1 est évidente.

(\*) L'étude des cas  $x = a$  ou  $x = -a$  est laissée au lecteur.

#### 4 - Théorème de l'angle pivotant

Soient  $a$ ,  $b$  et  $t$  trois tangentes distinctes à un même cercle de centre  $O$ , dont on notera respectivement  $A$ ,  $B$  et  $T$  les points de contact. Supposons que  $t$  recoupe  $a$  et  $b$ , et notons  $M$  (resp.  $N$ ) les points d'intersection

$$M = a \cap t \quad \text{et} \quad N = b \cap t.$$



##### Théorème 2-2

$$(OM, ON) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

La droite  $OM$  est en effet orthogonale à  $TA$  tandis que  $ON$  est orthogonale à  $TB$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} (OM, ON) &= (OM, TA) + (TA, TB) + (TB, ON), \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}). \end{aligned}$$

**Remarque :**  $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ . La notation  $\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  pour représenter un angle droit a donc un sens même si le plan n'a pas été préalablement orienté.

Il résulte immédiatement du théorème 2-3 le

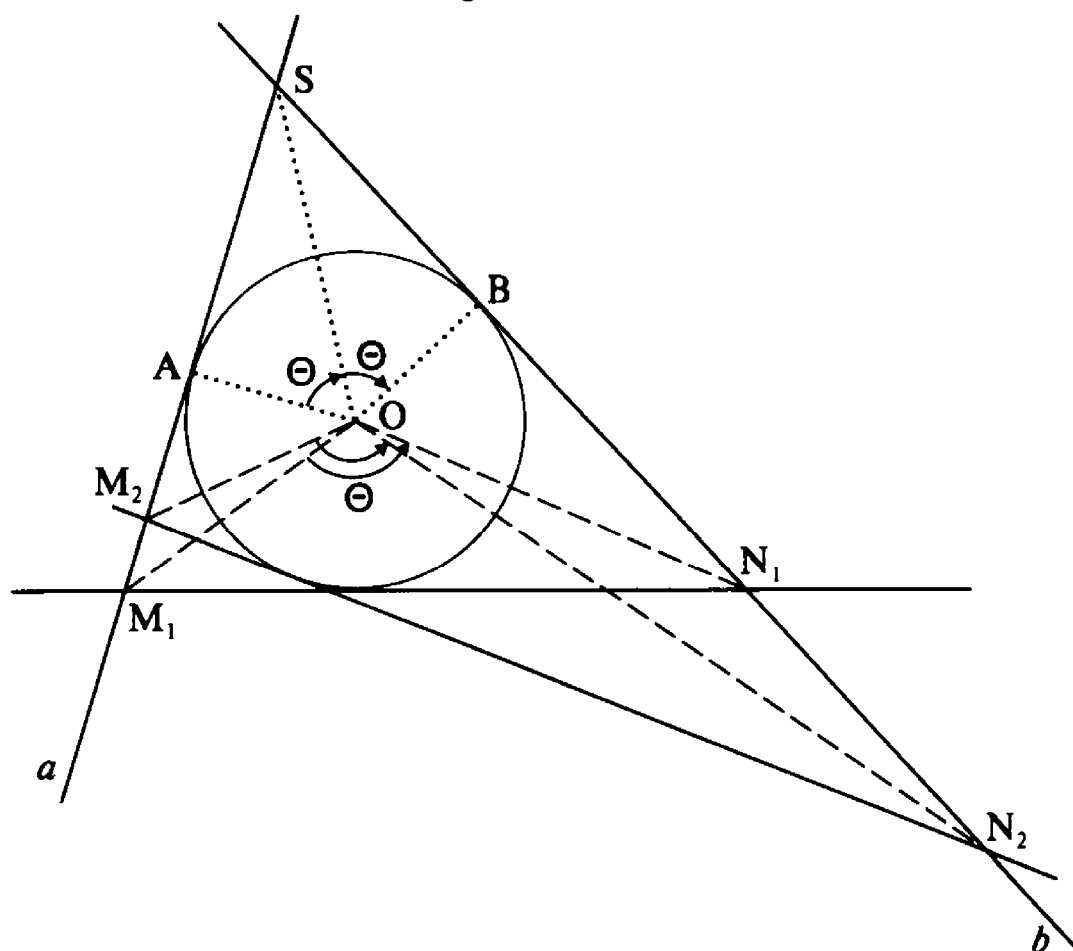
**Corollaire** (théorème de l'angle pivotant)

*Soit  $\theta$  ( $\theta \neq 0$ ) un angle orienté de droites dans un plan euclidien,  $a$  et  $b$  deux droites de ce plan, et  $O$  un point du plan situé à égale distance (supposée non nulle) de  $a$  et de  $b$ .*

*L'enveloppe<sup>(9)</sup> des droites  $t$  qui coupent respectivement  $a$  et  $b$  en des points  $M$  et  $N$  tels que*

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \theta$$

*est le cercle de centre  $O$  tangent à  $a$  et  $b$ .*

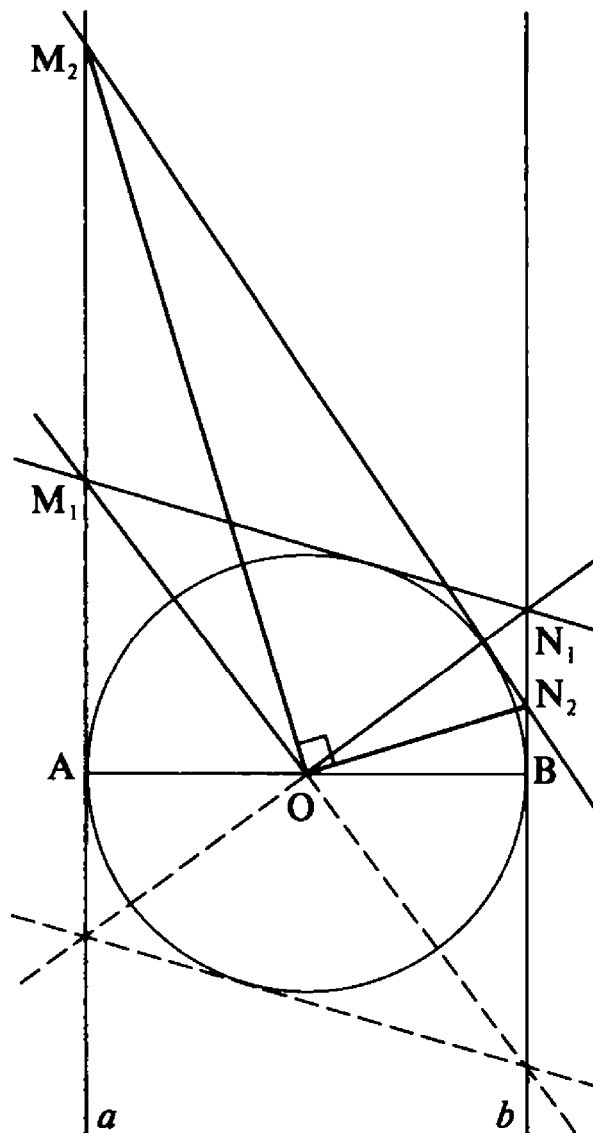


<sup>(9)</sup> Cette expression signifie simplement que l'ensemble des droites  $t$  est égal à l'ensemble des tangentes au cercle considéré (cf. appendice chapitre 7).

Si  $M$  tend vers le point de contact  $A$  de  $a$ ,  $N$  tend vers le point d'intersection  $S$  de  $a$  et  $b$  s'il existe ou s'éloigne à l'infini sur  $b$  si  $a$  et  $b$  sont parallèles; de même si  $N$  tend vers le point de contact  $B$  de  $b$ ,  $M$  tend vers  $S$  ou s'éloigne à l'infini sur  $a$  si  $a$  et  $b$  sont parallèles. On a donc encore

$$(\overline{OA}, \overline{OS}) = (\overline{OS}, \overline{OB}) = \theta \quad \text{pour} \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

*Cas particulier*  $\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ . — Les droites  $a$  et  $b$  sont alors tangentes en des points diamétralement opposés sur le cercle. Une



démonstration directe du corollaire est aisée, qui utilise les deux propriétés suivantes :

- (i) deux tangentes à un cercle, parallèles en des points diamétralement opposés, forment avec une troisième tangente à ce cercle un « demi-losange »,
- (ii) les diagonales d'un losange sont orthogonales.

## 5 - Exercices sur le chapitre 2

1/ On considère la figure plane constituée par deux droites ( $\beta_1$  et  $\gamma_1$ ) et deux cercles ( $\beta$  et  $\gamma$ ). On suppose que

- $\beta_1$  et  $\gamma_1$  se coupent en 1 point A,
- $\beta$  et  $\gamma$  se coupent en 2 points U et V,
- $\beta_1$  et  $\beta$  se coupent en 2 points B et B',
- $\gamma_1$  et  $\gamma$  se coupent en 2 points C et C',

(tous ces points étant distincts).

a) Démontrer la relation :

$$(VB', VC') - (AB, AC) = (CU, BU).$$

b) Montrer que si trois points appartenant respectivement à  $\beta \cap \gamma$ ,  $\beta \cap \beta_1$  et  $\gamma \cap \gamma_1$  sont alignés (resp. cocycliques avec A), les trois points restant parmi les six sont cocycliques avec A (resp. alignés).

2/ a) Etant donné un triangle ABC et trois points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  respectivement sur BC, AC et AB (et distincts de A, B, C), montrer que les cercles circonscrits aux triangles  $A\beta\gamma$ ,  $B\alpha\gamma$  et  $C\alpha\beta$  sont concourants.

b) Montrer l'équivalence des deux propositions :

- (i) le point de concours de ces trois cercles est cocyclique avec A, B, C,
- (ii)  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont alignés.

c) Quel est le lieu des points  $M$  du plan dont les projections orthogonales  $\alpha, \beta, \gamma$  sur les trois côtés d'un triangle sont alignés (« droites de Simson »)?

3/ On considère la figure plane constituée par quatre cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ . On suppose que

$\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se coupent en deux points  $A, A'$ ,

$\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  se coupent en deux points  $B, B'$ ,

$\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  se coupent en deux points  $C, C'$ ,

$\Gamma_4$  et  $\Gamma_1$  se coupent en deux points  $D, D'$ .

a) Démontrer la relation :

$$(D'B', D'C') - (A'B', A'C') = (BA, BD) - (CA, CD).$$

b) Montrer qu'il est équivalent, de dire que quatre points appartenant respectivement à  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2, \Gamma_2 \cap \Gamma_3, \Gamma_3 \cap \Gamma_4, \Gamma_4 \cap \Gamma_1$  sont « cocycliques », ou que les quatre points restant parmi les huit sont « cocycliques ». (Miquel.)

c) Etendre ce résultat au cas où certains(s) des cercles  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$  ( $\Gamma_4$  et  $\Gamma_1$ ) sont tangents.

4/ Etant donnés quatre points  $A, B, C, D$  sur un cercle de centre  $O$ , démontrer la relation :

$$(AB, CD) = \frac{1}{2} [(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})].$$

5/ Montrer que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à chacun des côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.

6/ Dans un plan euclidien, on se donne un point  $P$ . A tout triangle  $ABC$  du plan, tel que  $P$  n'appartienne à aucune des trois droites  $AB, AC, BC$ , on associe le triangle

$$A'B'C' = \mathcal{T}(ABC)$$

dont les sommets sont les projections orthogonales  $A', B'$  et  $C'$  de  $P$  sur  $BC, AC$  et  $AB$ .



*a)* Montrer que  $P$  n'appartient à aucune des trois droites  $A'B'$ ,  $A'C'$ ,  $B'C'$ .

*b)* Montrer que le triangle  $A'''B'''C''' = \mathcal{T}^{(3)}(ABC)$  est semblable à  $ABC$  [c'est-à-dire que les deux triangles ont des angles égaux deux à deux]. (Neuberg.)

- 7/ Soient  $A' \in BC$ ,  $B' \in AC$ ,  $C' \in AB$  les pieds des hauteurs d'un triangle  $ABC$ . Montrer que les hauteurs de  $ABC$  sont aussi des bissectrices du triangle  $A'B'C'$ .
- 8/ On se donne un triangle  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\Omega$  un point du plan. Notons  $(\alpha)$   $(\beta)$  et  $(\gamma)$  les cercles circonscrits respectivement aux triangles  $\Omega\beta\gamma$ ,  $\Omega\alpha\gamma$  et  $\Omega\alpha\beta$ . Montrer que s'il existe un triangle  $ABC$  vérifiant simultanément  $A \in (\alpha)$ ,  $B \in (\beta)$ ,  $C \in (\gamma)$ ,  $\alpha \in BC$ ,  $\beta \in AC$ ,  $\gamma \in AB$ , il en existe une infinité,  $A$  pouvant être choisi arbitrairement sur  $(\alpha)$ . Montrer que tous ces triangles restent directement semblables à l'un d'entre eux. Quel est le centre de similitude?

## CHAPITRE III

# *Divisions harmoniques et cercles orthogonaux*

### **1 - Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant**

Donnons-nous deux points distincts A et B dans un plan euclidien.

#### **Théorème 3-1**

- (i) *Soit  $k$  un nombre strictement positif. Le lieu des points M du plan tels que*

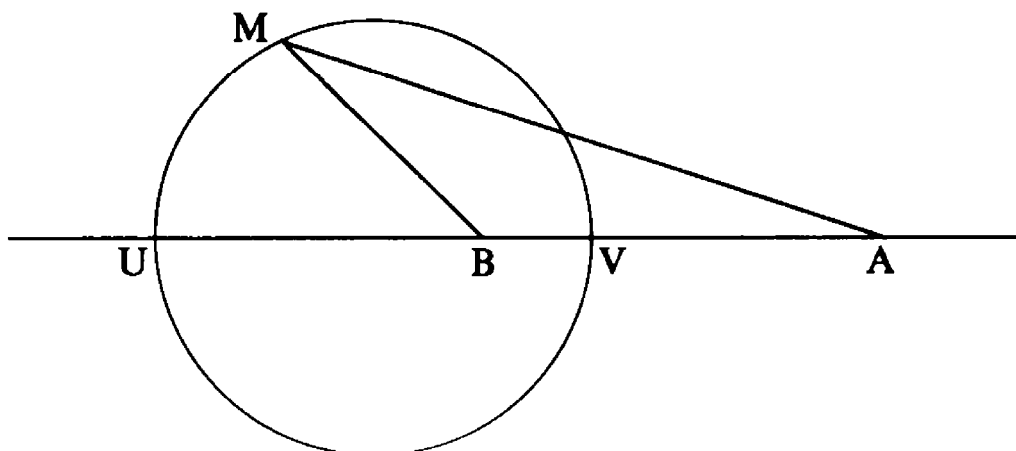
$$\|MA\| = k \|MB\|$$

*est — la médiatrice de [AB] si  $k = 1$ ,*

*— un cercle centré sur la droite AB, et qui recoupe cette droite en les deux points U et V tels que  $\frac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = k$ ,  $\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}} = -k$ .*

*(U extérieur au segment [AB], V intérieur) lorsque  $k$  est différent de 1.*

- (ii) *Si deux points U et V de la droite AB, distincts, et différents tous deux de A et de B, vérifient  $\frac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = -\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$ , le rapport  $\frac{\|MA\|}{\|MB\|}$  reste constant, lorsque M parcourt le cercle de diamètre [U, V].*



Le cas de la médiatrice est bien connu. Supposons  $k$  distinct de 1, et notons  $I$  le « barycentre » des points  $A$  et  $B$  affectés respectivement des coefficients 1 et  $-k^2$ , c'est-à-dire le point  $I$  tel que  $\overrightarrow{IA} - k^2 \overrightarrow{IB} = 0$ .

Puisque  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ ,

$$\|MA\|^2 = \|MI\|^2 + \|IA\|^2 + 2\langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IA} \rangle,$$

et de même,  $\|MB\|^2 = \|MI\|^2 + \|IB\|^2 + 2\langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IB} \rangle$ .

On en déduit :

$$\|MA\|^2 - k^2 \|MB\|^2 = (1 - k^2) \|MI\|^2 + \|IA\|^2 - k^2 \|IB\|^2,$$

et par conséquent, pour  $k \neq 1$ , le lieu des points  $M$  tels que  $\|MA\| = k \|MB\|$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon

$$\left( \frac{k^2 \|IB\|^2 - \|IA\|^2}{1 - k^2} \right)^{1/2}.$$

Pour  $k$  différent de 1, le point  $I$ , qui est sur la droite  $AB$ , est extérieur au segment  $[AB]$ .

Le cercle précédent admet donc la droite  $AB$  comme diamètre, avec pour extrémités des points  $U$  et  $V$  qui appartiennent au lieu cherché, et vérifient par conséquent  $\frac{\|UA\|}{\|UB\|} = \frac{\|VA\|}{\|VB\|} = k$ .

Comme il n'existe, sur AB, qu'un seul point U (extérieur à [AB]) vérifiant à  $\frac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = k$ , et un seul point V (intérieur à [AB]) vérifiant  $\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}} = -k$ , la première partie du théorème en résulte.

Si  $\frac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = -\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$ , on définit le nombre  $k$ , strictement positif, égal à la valeur absolue commune de ces deux rapports, et le lieu des points M tels que  $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} = k$  est le cercle de diamètre [UV] d'après la première partie du théorème. La partie (ii) en résulte.

**Définition.** — Lorsque quatre points alignés distincts A, B, U, V vérifient la relation

$$\frac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = -\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$$

on dit qu'ils forment une *division harmonique*.

## 2 - Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $\omega$  et de rayon  $R$ , dans un plan euclidien, et soit M un point de ce plan.

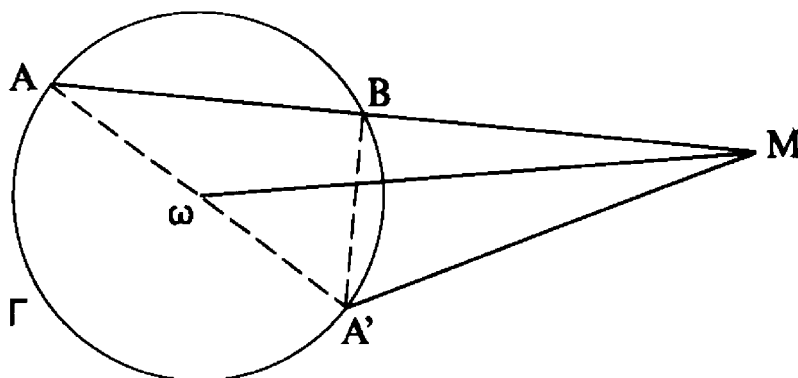
### Théorème 3-2

Si une droite  $\Delta$ , passant par M, coupe  $\Gamma$  en deux points A et B, on a alors la relation :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \|M\omega\|^2 - R^2.$$

En particulier, le produit  $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$  ne dépend pas de la droite  $\Delta$  passant par M.

[Le nombre  $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ , qui ne dépend donc que de M et de  $\Gamma$ , sera appelé *puissance de M par rapport à  $\Gamma$* , et noté  $\mathcal{I}_\Gamma(M)$ .]



Notons en effet  $A'$  le point du cercle  $\Gamma$  diamétralement opposé à  $A$ . D'après le théorème de l'arc capable, les droites  $BA$  et  $BA'$  sont orthogonales, et par conséquent

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'} \rangle.$$

Or  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M\omega} + \overrightarrow{\omega A}$ ,  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{M\omega} + \overrightarrow{\omega B}$ ,  
et  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \langle \overrightarrow{M\omega} + \overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{M\omega} + \overrightarrow{\omega A'} \rangle$   
 $= \|\overrightarrow{M\omega}\|^2 - R^2.$  c. q. f. d.

### Remarques :

- 1) La puissance  $\mathcal{I}_\Gamma(M)$  est
- { positive si M est extérieure à  $\Gamma$ ,
  - { nulle si M est sur  $\Gamma$ ,
  - { négative si M est intérieur à  $\Gamma$ .

- 2) Si  $\Gamma$  admet l'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

relativement à un repère orthonormé, on a toujours, si  $(x, y)$  désignent les coordonnées d'un point M du plan :

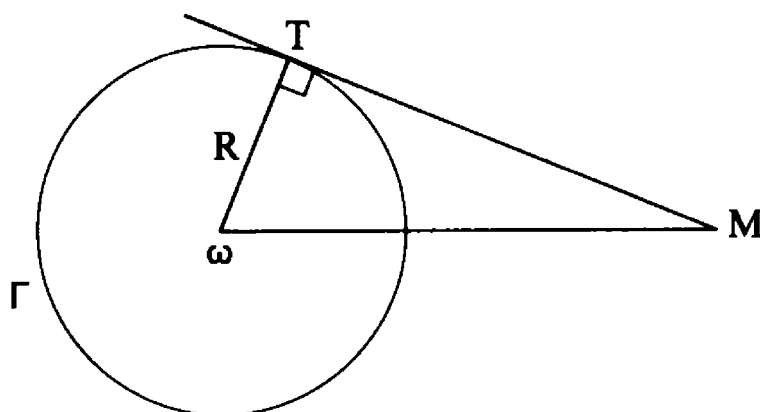
$$\mathcal{I}_\Gamma(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c.$$

[En effet  $\|\overrightarrow{M\omega}\|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$  et  $R^2 = a^2 + b^2 - c$ .]

3) Si  $M$  est extérieur à  $\Gamma$  et si  $T$  désigne le point de contact d'une tangente à  $\Gamma$  issue de  $M$ , on a encore :

$$\mathcal{P}_\Gamma(M) = \|MT\|^2$$

(théorème de Pythagore dans le triangle rectangle  $\omega TM$ ).



### 3 - Axe radical de deux cercles non concentriques

#### Théorème 3-3

*Le lieu des points d'un plan euclidien qui ont même puissance par rapport à deux cercles non concentriques de ce plan,  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , est une droite perpendiculaire à la droite joignant les centres  $\omega$  et  $\omega'$  de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .*

Notons en effet

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ et } x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0,$$

les équations respectives de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  relativement à un repère orthonormé. Si  $(x, y)$  désignent les coordonnées d'un point  $M$  du plan par rapport à ce repère, on obtient l'égalité

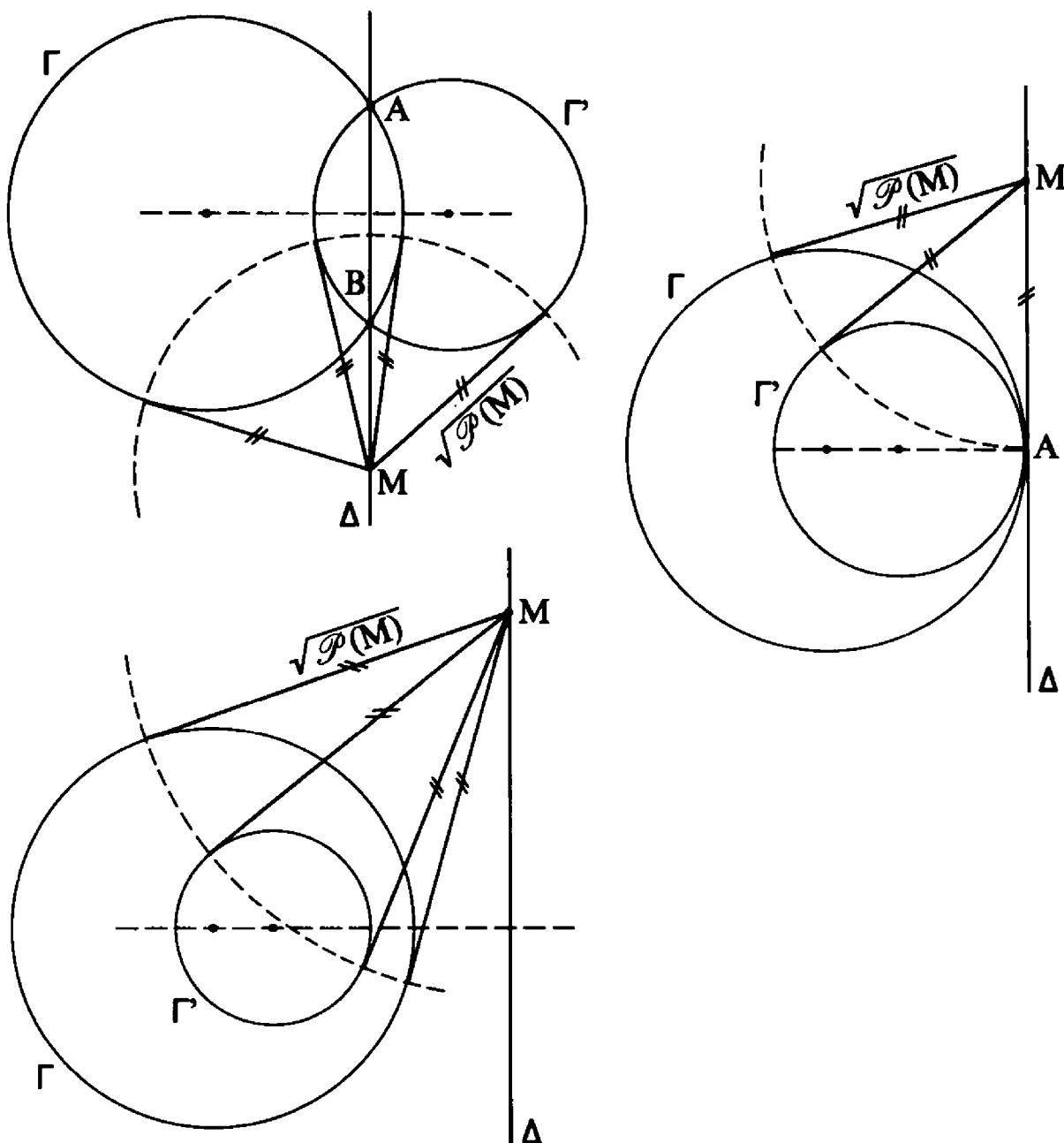
$$\mathcal{P}_\Gamma(M) - \mathcal{P}_{\Gamma'}(M) = 2(a - a')x + 2(b - b')y + c' - c,$$

d'où l'équation du lieu cherché

$$2(a - a')x + 2(b - b')y + c' - c = 0,$$

c'est l'équation d'une droite, perpendiculaire au vecteur  $\overrightarrow{\omega\omega'}$  de coordonnées  $(a' - a, b' - b)$ .

Cette droite est appelée *l'axe radical* des deux cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  (non concentriques). [Si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  étaient concentriques,  $\overrightarrow{\omega\omega'}$  serait nul, et le lieu serait vide.]



*Position de l'axe radical.* — Trois cas sont à envisager, selon que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  :

- se coupent en deux points distincts (A et B);
- sont tangents en un point A;
- ne se coupent pas.

Puisque, dans les deux premiers cas, A a même puissance (zéro en l'occurrence) par rapport à  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , A doit appartenir à l'axe radical, qui est donc :

- la droite AB dans le premier cas;
- la tangente commune en A aux deux cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  dans le deuxième cas.

Le troisième cas sera étudié plus loin. Auparavant, démontrons-le.

#### **Théorème 3-4**

Soit M un point de l'axe radical de deux cercles non concentriques  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .

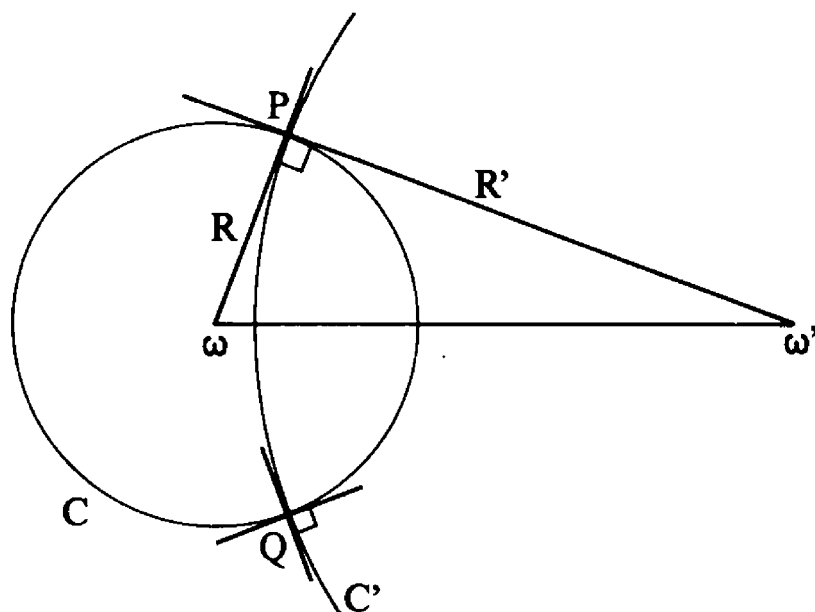
*Si M est extérieur à l'un des deux cercles, il est extérieur à l'autre; sa puissance commune  $\mathcal{P}$  par rapport aux deux cercles est positive, et les points de contact des tangentes à  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  issues de M appartiennent au cercle de centre M et de rayon  $\sqrt{\mathcal{P}}$ .*

On a en effet  $\mathcal{P} = \|MT\|^2$  pour tout point de contact T d'une tangente issue de M à  $\Gamma$  ou  $\Gamma'$ .

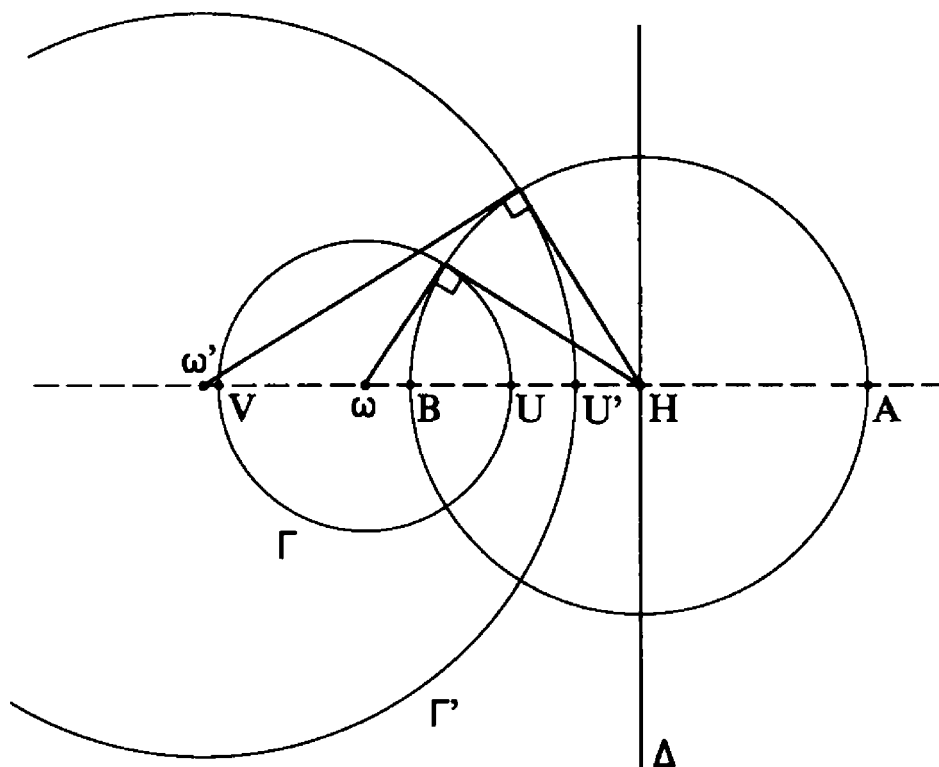
De deux cercles coplanaires C et C', de centres respectifs  $\omega$  et  $\omega'$  et de rayons respectifs R et R', on dira qu'ils sont *orthogonaux* s'ils se coupent en deux points P et Q tels que les triangles  $\omega P \omega'$  et  $\omega Q \omega'$  soient rectangles, respectivement en P et Q. Il revient au même de dire que les tangentes en P (ou en Q) aux deux cercles sont orthogonales, ou encore, d'après le théorème de Pythagore, que  $\|\omega \omega'\|^2 = R^2 + R'^2$ , ce qui équivaut à  $\mathcal{P}_C(\omega') = R'^2$  ou  $\mathcal{P}_{C'}(\omega) = R^2$ .

On peut alors reparaphraser le théorème 3-4 en énonçant que si M est un point de l'axe radical de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  ayant une puissance commune  $\mathcal{P}$  par rapport à ces deux cercles strictement positive, le cercle de centre M et de rayon  $\sqrt{\mathcal{P}}$  est orthogonal à la fois à  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .





Revenons maintenant à la position de l'axe radical  $\Delta$  de deux cercles non concentriques  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  ne se coupant pas.



Tout d'abord,  $\Delta$  ne coupe aucun des deux cercles (sinon ceux-ci seraient nécessairement sécants en un tel point). En particulier, le

point H où  $\Delta$  coupe la droite  $\omega\omega'$  est extérieur simultanément à  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  : si  $a$  désigne le nombre strictement positif tel que

$$\mathcal{P}_\Gamma(H) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(H) = a^2,$$

le cercle de centre H et de rayon  $a$  est orthogonal à la fois à  $\Gamma$  et à  $\Gamma'$ , en vertu du théorème 3-4. Notons A et B les extrémités du diamètre de ce cercle porté par la droite des centres  $\omega\omega'$ .

### Théorème 3-5

*Le rapport des distances  $\frac{\|MA\|}{\|MB\|}$  reste constant quand M parcourt le cercle  $\Gamma$ , et quand M parcourt le cercle  $\Gamma'$ .*

D'après le théorème 3-1, il suffit de montrer que les extrémités U et V du diamètre de  $\Gamma$  porté par  $\omega\omega'$  (resp. U', V',  $\Gamma'$ ) forment une division harmonique avec A, B.

Notons  $\xi$  l'abscisse du centre  $\omega$  de  $\Gamma$ , la droite  $\omega\omega'$  étant repérée avec H comme origine,  $\overline{HA} = a$ ,  $\overline{HB} = -a$ . Notons R le rayon de  $\Gamma$ .

La relation d'orthogonalité entre  $\Gamma$  et le cercle de diamètre [AB] s'écrit :

$$\xi^2 = a^2 + R^2.$$

Or l'expression  $\frac{\overline{UA}}{\overline{UB}} \times \frac{\overline{VB}}{\overline{VA}}$  est égale à

$$\frac{(a - \xi - R)(-a - \xi + R)}{(-a - \xi - R)(a - \xi + R)}, \quad \text{soit} \quad \frac{a^2 + R^2 - \xi^2 - 2aR}{a^2 + R^2 - \xi^2 + 2aR}.$$

Puisque  $\xi^2 = a^2 + R^2$ , l'expression précédente est égale à  $-1$ . : c'est-à-dire que la division U, V, A, B est harmonique, et de même pour U', V', A, B.

Montrons, réciproquement, que le couple  $\{A, B\}$  est entièrement caractérisé par la propriété de rendre simultanément les deux divisions U, V, A, B et U', V', A', B' harmoniques. Notons à cet effet  $u, v, u', v'$  les abscisses de U, V, U', V' relativement à un repère quelconque de la droite  $\omega, \omega'$ , et notons  $x, y$  les abscisses de deux points P et Q tels que les deux divisions U, V, P, Q et U', V', P, Q soient harmoniques.

La première condition s'écrit

$$\frac{u-x}{u-y} \times \frac{v-y}{v-x} = -1,$$

soit  $2xy - (x+y)(u+v) + 2uv = 0.$

La deuxième condition s'écrit de même :

$$2xy - (x+y)(u'+v') + 2u'v' = 0.$$

Les deux cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  n'étant pas concentriques, les nombres  $u+v$  et  $u'+v'$  sont distincts, de sorte que le système

$$\begin{cases} 2P - S(u+v) + 2uv = 0 \\ 2P - S(u'+v') + 2u'v' = 0 \end{cases}$$

de deux équations, à deux inconnues  $S$  et  $P$ , est cramérien. On en déduit l'existence et l'unicité d'une solution  $S, P$ ;  $x$  et  $y$  étant alors les deux racines de l'équation du second degré  $X^2 - SX + P = 0$ , l'ensemble  $\{x, y\}$  est parfaitement défini par les conditions imposées. [Puisque  $\{A, B\}$  existe, ces deux racines  $x$  et  $y$  sont nécessairement réelles et distinctes dès lors que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  ne se coupent pas!] On a ainsi démontré le

### **Théorème 3-6**

*Si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  ne se coupent pas, il existe<sup>(1)</sup> un unique couple de points  $\{A, B\}$  tel que les deux divisions  $U, V, A, B$  et  $U', V', A, B$  soient harmoniques : l'axe radical  $\Delta$  de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  est alors la médiatrice de  $[AB]$ , et les cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont orthogonaux au cercle de diamètre  $[AB]$ .*

<sup>(1)</sup> Nous dirons (chapitre 8, § 1) que  $\{A, B\}$  est l'ensemble des points doubles de l'unique involution définie par les 2 couples de points homologues  $(U, V)$  et  $(U', V')$ .

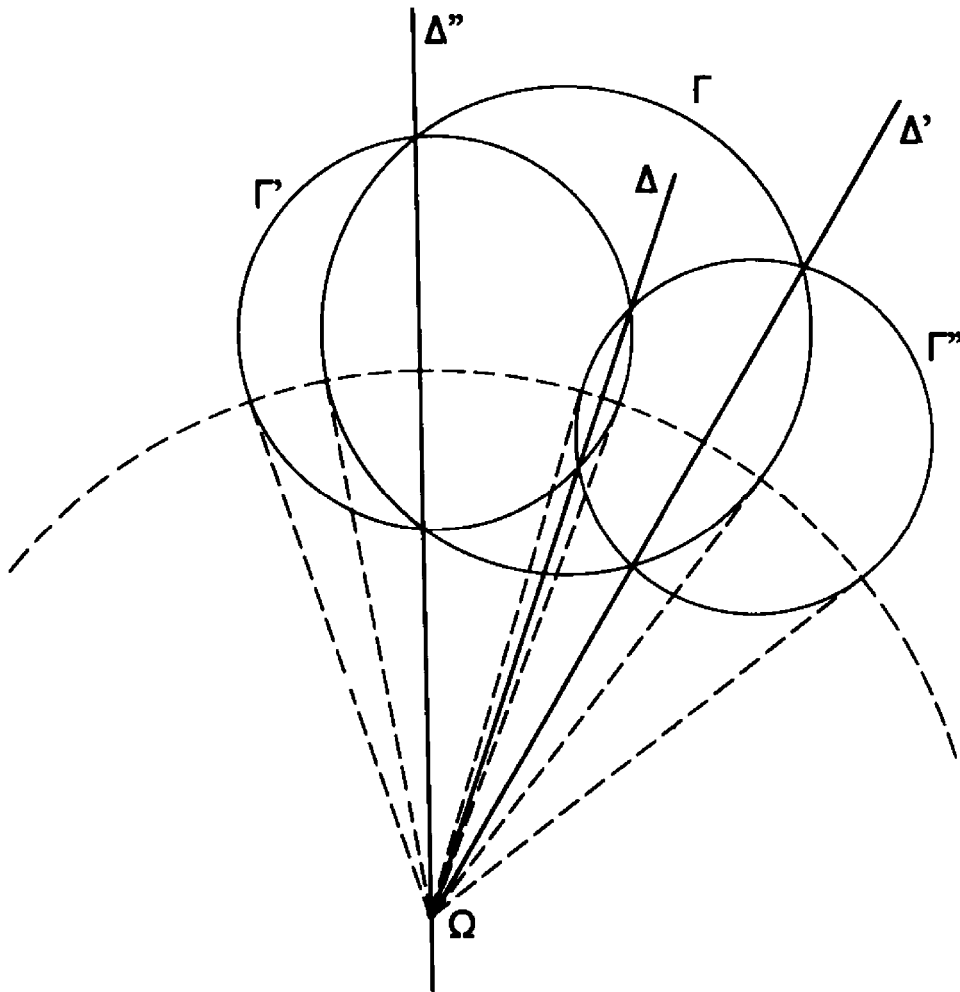
Démontrons aussi le

**Théorème 3-7**

*Si  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$  désignent trois cercles du plan dont les centres ne sont pas alignés, alors :*

- (i) il existe un unique point  $\Omega$  dans le plan ayant même puissance par rapport à ces trois cercles,*
- (ii) les trois axes radicaux  $\Delta$  de  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$ ,  $\Delta'$  de  $\Gamma$  et  $\Gamma''$  et  $\Delta''$  de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont concourants,*
- (iii) leur point de concours est le point  $\Omega$ .*

Puisque les centres des trois cercles ne sont pas alignés, les trois axes radicaux sont deux à deux concourants.



Notons alors  $\Omega$  le point d'intersection de  $\Delta$  et  $\Delta'$  :

puisque  $\Omega$  est sur  $\Delta$ ,  $\mathcal{P}_{\Gamma'}(\Omega) = \mathcal{P}_{\Gamma''}(\Omega)$ ;

puisque  $\Omega$  est sur  $\Delta'$ ,  $\mathcal{P}_{\Gamma}(\Omega) = \mathcal{P}_{\Gamma''}(\Omega)$ ;

on en déduit  $\mathcal{P}_{\Gamma}(\Omega) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(\Omega)$ ; c'est dire que le point  $\Omega$  appartient aussi à  $\Delta''$ , d'où le théorème.

Le point  $\Omega$  est appelé *centre radical* des trois cercles.

**Remarque.** — Si le centre radical  $\Omega$  est extérieur à l'un des trois cercles, il est aussi extérieur aux deux autres puisque sa puissance commune  $\mathcal{P}$  par rapport aux trois cercles ne peut qu'être positive. Les tangentes menées par  $\Omega$  à chacun des trois cercles ont alors des points de contact qui sont tous sur le cercle de centre  $\Omega$  et rayon  $\sqrt{\mathcal{P}}$ .

#### 4 - Faisceaux de cercles et droites

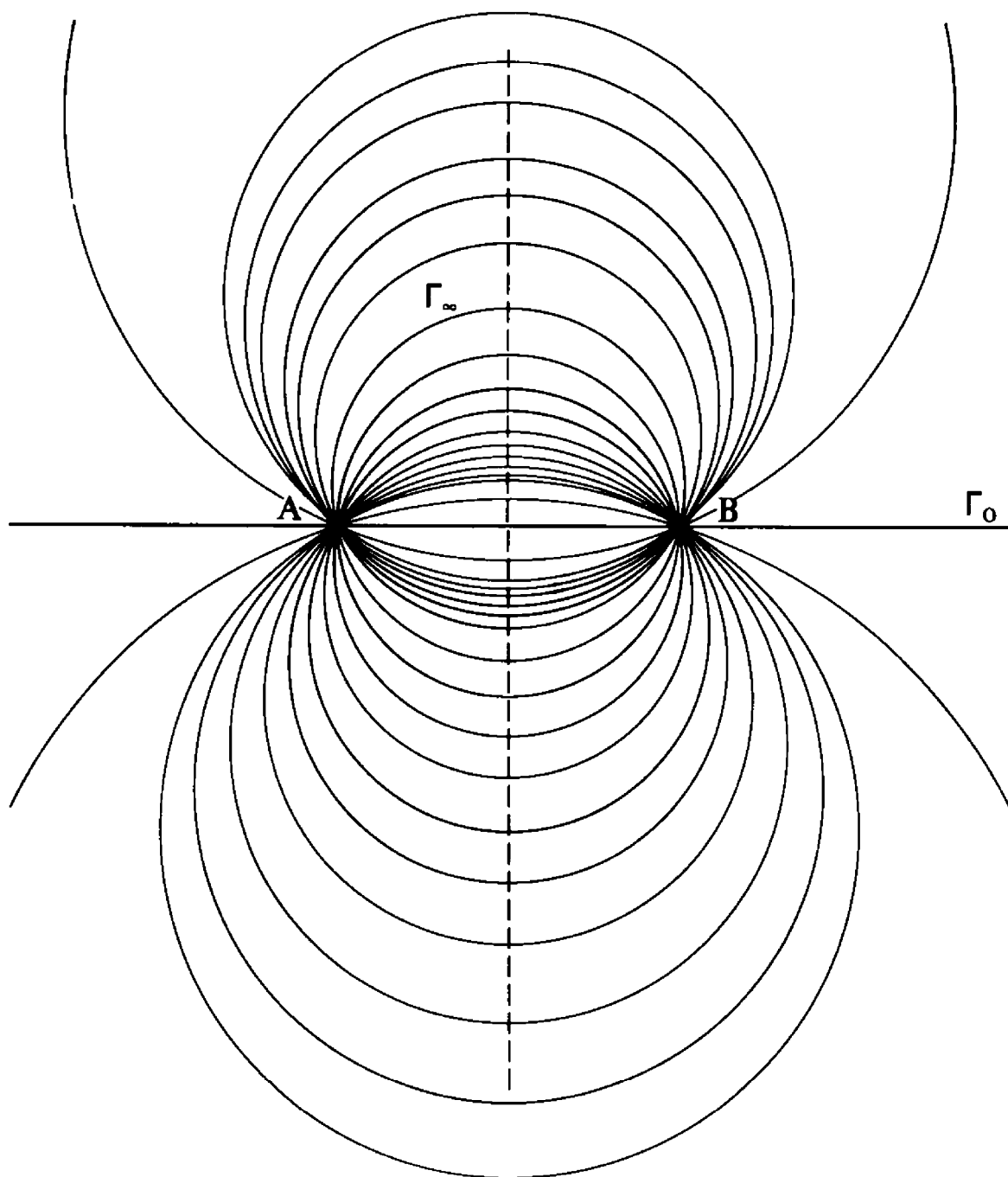
1 / *Faisceaux à points de base.* — Soient A et B deux points distincts d'un plan euclidien. On a vu, au chapitre 2, que le lieu  $\Gamma_t$  des points M du plan tels que  $\text{tg}(\text{MA}, \text{MB})$  prenne une valeur fixée  $t$  est

- un cercle passant par A et B pour  $t \neq 0$ ,
- la droite AB pour  $t = 0$ .

On peut en outre noter  $\text{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$  et  $\Gamma_{\infty}$  le cercle de diamètre [AB].

L'ensemble des courbes  $\Gamma_t$  ainsi obtenu quand  $t$  parcourt  $\mathbb{R} \setminus \{\infty\}$  (droite et cercles passant par A et B) est appelé le faisceau de cercles, à points de base A et B.

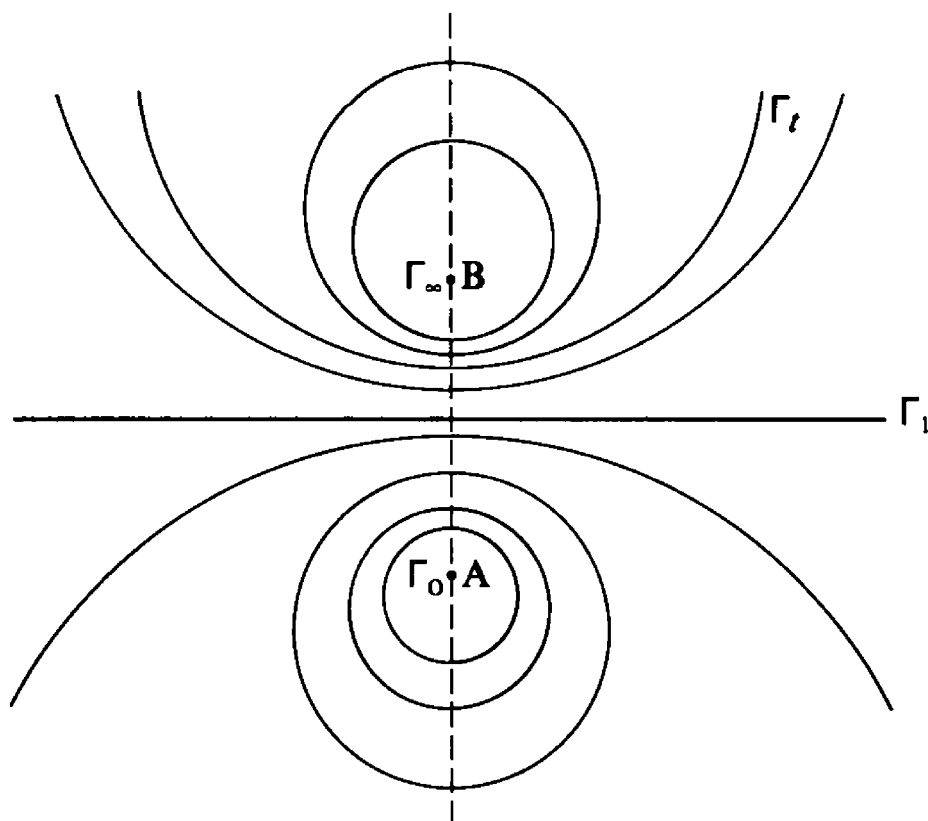
2 / *Faisceaux à points limites.* — Soient A et B deux points distincts d'un plan euclidien. On a vu, au paragraphe 1 de ce chapitre, que le lieu  $\Gamma_t$  des points M du plan tels que  $\frac{\|\text{MA}\|}{\|\text{MB}\|}$  prenne une valeur fixée  $t$  (positive) est



- la médiatrice de  $[AB]$  pour  $t = 1$ ,
- un cercle centré sur la droite  $AB$ , dont les extrémités  $U$  et  $V$  du diamètre porté par  $AB$  forment, avec  $A$  et  $B$ , une division harmonique, si  $t \neq 1$ .

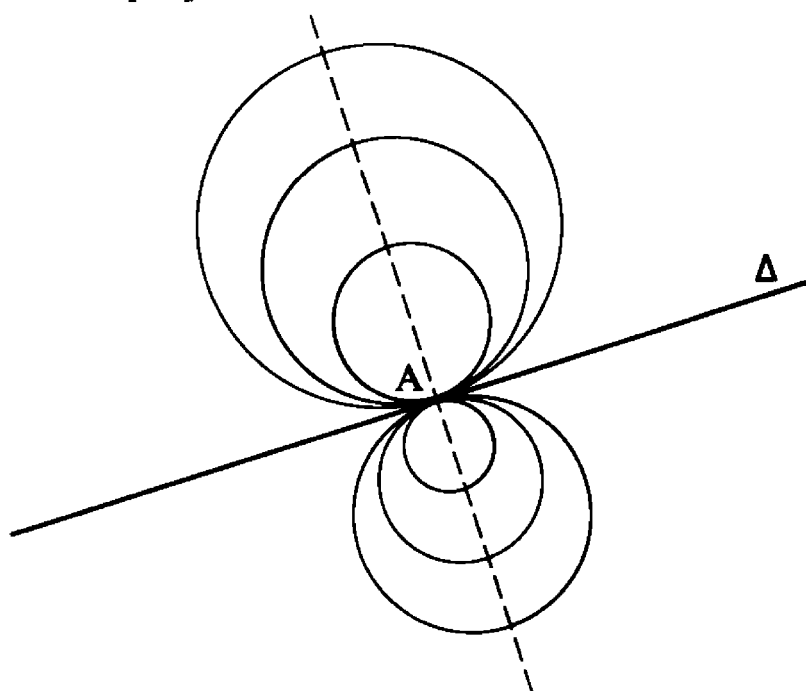
Si  $t$  tend vers 0 (resp. vers  $+\infty$ ),  $\Gamma_t$  a un centre qui tend vers  $A$  (resp. vers  $B$ ) et un rayon qui tend vers 0. On posera :

$$\Gamma_0 = \{A\}, \quad \Gamma_\infty = \{B\}.$$



L'ensemble des courbes  $\Gamma_t$  ainsi obtenu quand  $t$  parcourt  $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  est appelé faisceau de cercles à points limites  $A$  et  $B$ .

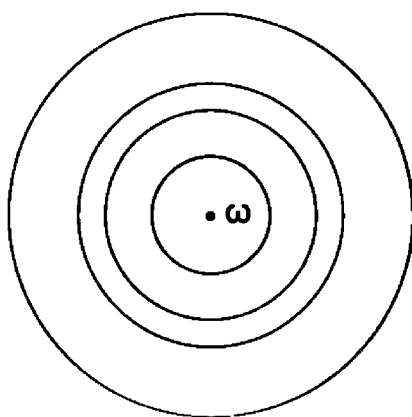
3 / *Faisceaux tangents*. — Soit  $\Delta$  une droite dans un plan euclidien,  $\Delta'$  la perpendiculaire à  $\Delta$  en l'un de ses points  $A$ .



Choisissons une orientation de  $\Delta'$ , et notons  $\Gamma_t$  le cercle tangent à  $\Delta$  en  $A$  dont le centre  $\omega$  vérifie  $\overline{A\omega} = t$ . Posons  $\Gamma_\infty = \Delta$ .

On appelle faisceau de cercles tangents en  $A$  à  $\Delta$  l'ensemble des courbes  $\Gamma_t$  ainsi obtenu quand  $t$  parcourt  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

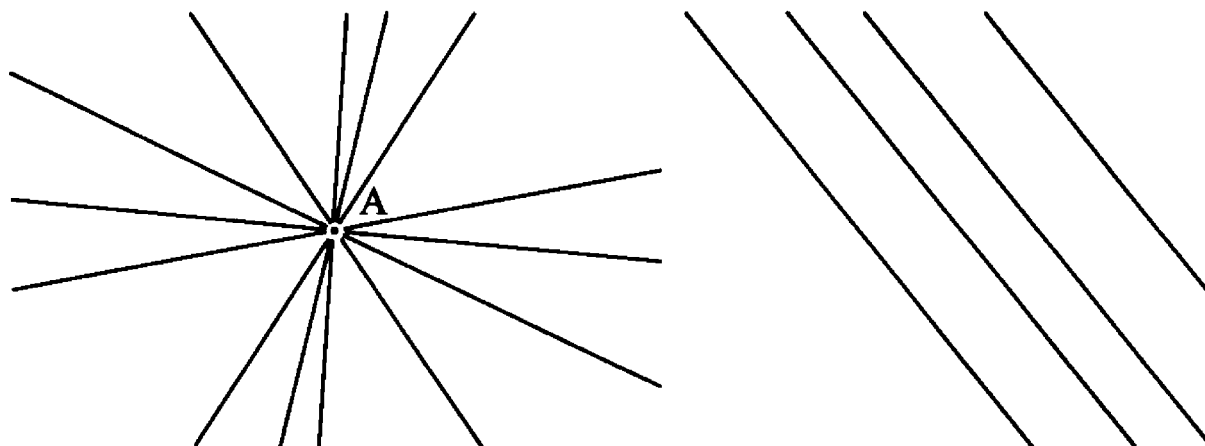
4/ *Faisceaux de cercles concentriques.* — On appelle ainsi la famille de tous les cercles de centre fixé  $\omega$ , auxquels on ajoute  $\{\omega\}$  (cercle de rayon 0).



[On note  $\Gamma_t$  le cercle de rayon  $\sqrt{t}$  ( $t \geq 0$ ).]

5/ *Faisceaux de droites.* — On appelle *faisceau de droites sécantes* la famille de toutes les droites du plan passant par un point  $A$  donné.

On appelle *faisceau de droites parallèles* la famille de toutes les droites du plan parallèles à une direction donnée.





● *Propriétés communes à tous ces faisceaux* <sup>(2)</sup>

1) Toute courbe appartenant à l'un de ces faisceaux est une droite ou un cercle, et admet donc une équation que l'on peut écrire

$$(\star) \quad A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

par rapport à un repère orthonormé, A, B, C, D désignant des nombres réels, A, B et C n'étant pas simultanément nuls.

2) Le faisceau est entièrement déterminé par deux courbes distinctes lui appartenant : si l'une de ces courbes admet  $f(x, y) = 0$  pour équation, et l'autre  $g(x, y) = 0$ , relativement à un repère donné, l'ensemble des courbes du faisceau est l'ensemble des courbes ayant, relativement à ce même repère, une équation de la forme

$$\lambda f(x, y) + \mu g(x, y) = 0,$$

$\lambda$  et  $\mu$  désignant des nombres réels non simultanément nuls, équation que l'on peut encore écrire, pour  $\lambda \neq 0$  :

$$f(x, y) + tg(x, y) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ou  $g(x, y) = 0 \quad (\text{cas } \lambda = 0).$

[La démonstration<sup>(3)</sup>, fastidieuse compte tenu de chaque cas particulier, mais ne présentant aucune difficulté, est laissée au lecteur.]

Il faut noter cependant que dans le cas d'un faisceau à points limites ou d'un faisceau de cercles concentriques, certaines valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  (ou de  $t$ ) peuvent donner lieu à des courbes vides. En fait, on verra plus tard (chapitre 10, paragraphe 2) que ces courbes

<sup>(2)</sup> Cf. les faisceaux de coniques (chapitre 12, paragraphe 5).

<sup>(3)</sup> Cf. chapitre 9, paragraphe 3 : droites dans l'espace projectif des courbes algébriques de degré 2.

ne seront vides que dans l'ensemble des points « réels », mais ne le seront plus dès qu'on ajoutera à l'espace des « points imaginaires » : donner à  $t$  des valeurs négatives, revient à considérer des « cercles réels de rayon imaginaire pur », dans le cas des équations

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 - t[(x+a)^2 + y^2] = 0 \\ \text{ou } (x+a)^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

utilisées au cours de la démonstration du théorème 3-1 (faisceau à points limites), ou  $x^2 + y^2 - t = 0$  (faisceau de cercles concentriques).

3) Pour les faisceaux de cercles à points de base, à points limites, ou tangents, l'unique droite  $\Delta$  appartenant au faisceau est axe radical de deux quelconques des cercles du faisceau : tout point  $M$  de  $\Delta$  a donc même puissance par rapport à *tous* les cercles du faisceau.

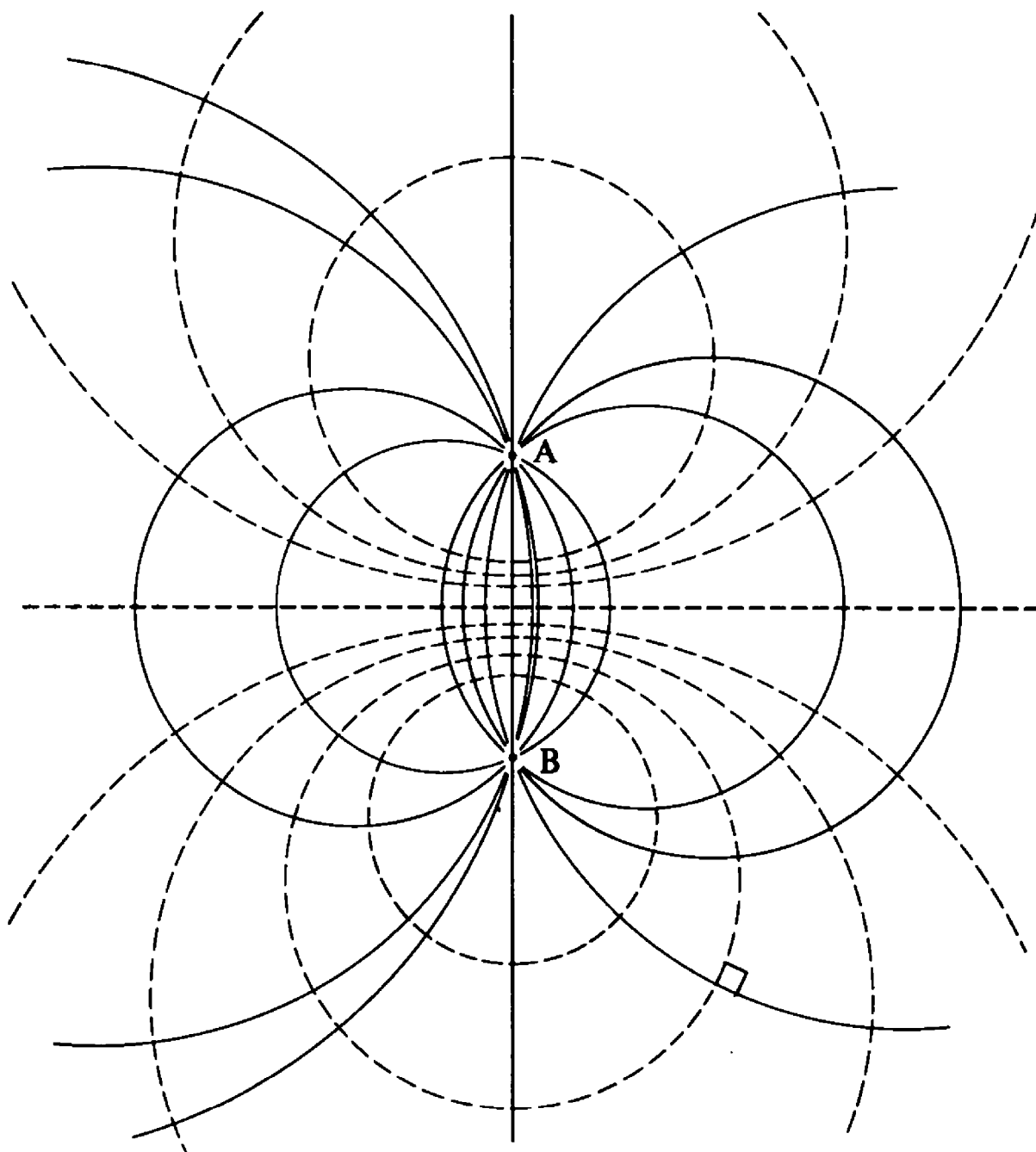
4) On appellera *points critiques* du faisceau :

- les points de base pour un faisceau à point de base,
- les points limites pour un faisceau à points limites,
- le point de contact avec  $\Delta$  pour un faisceau tangent,
- le centre des cercles d'un faisceau de cercles concentriques,
- le point de concours d'un faisceau de droites sécantes.

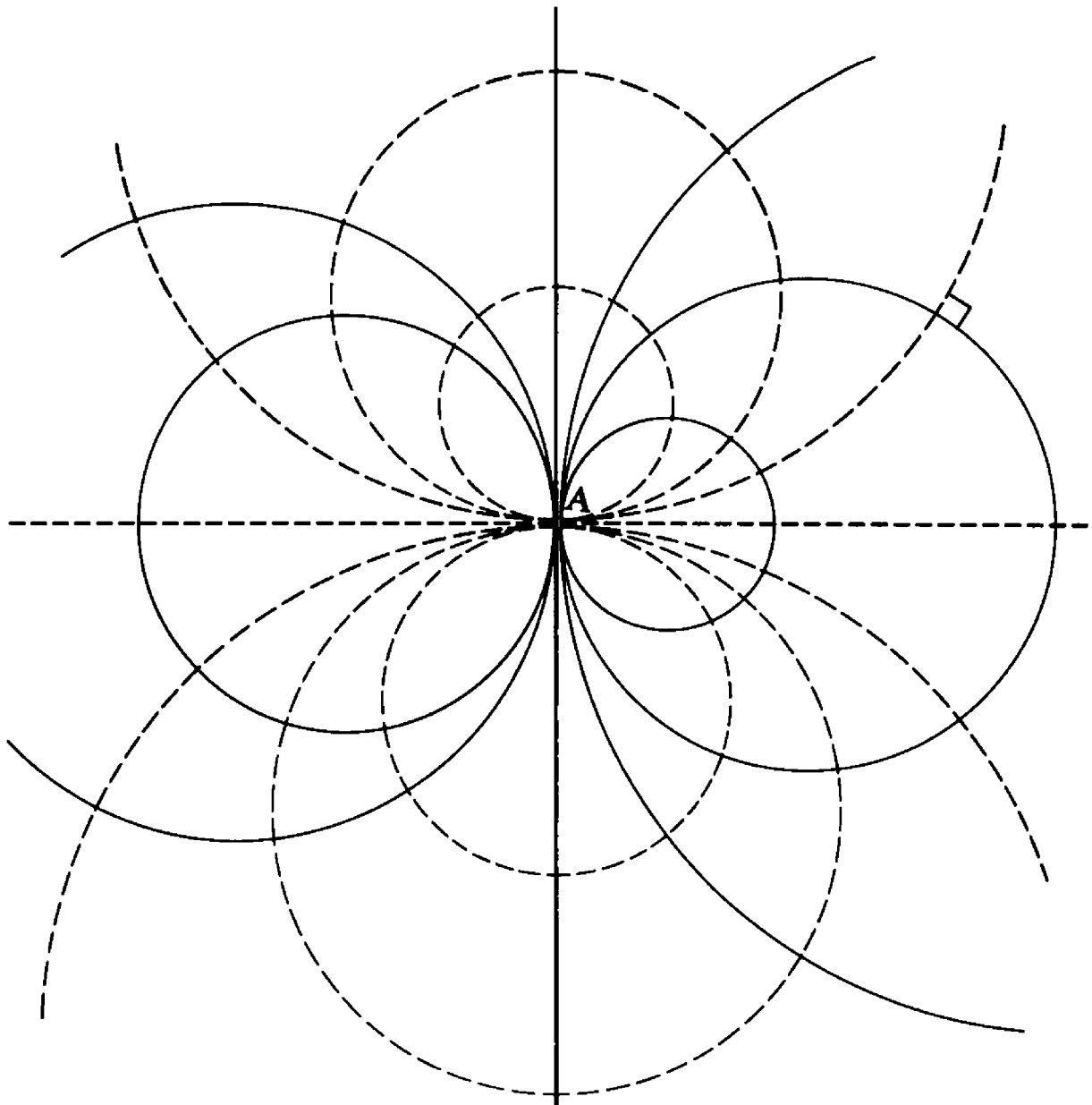
*Par tout point du plan qui n'est pas un point critique, passe alors une courbe du faisceau et une seule.*

#### ● *Faisceaux conjugués*

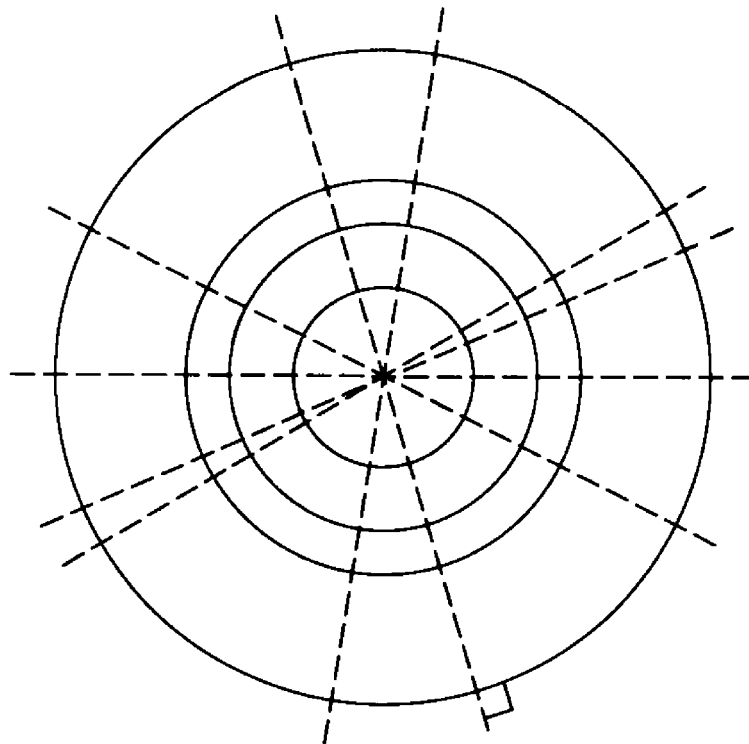
Etant donnés deux points distincts  $A$  et  $B$ , les deux faisceaux, à points de base  $A$  et  $B$  d'une part, à points limites  $A$  et  $B$  d'autre part, seront dits conjugués l'un de l'autre.



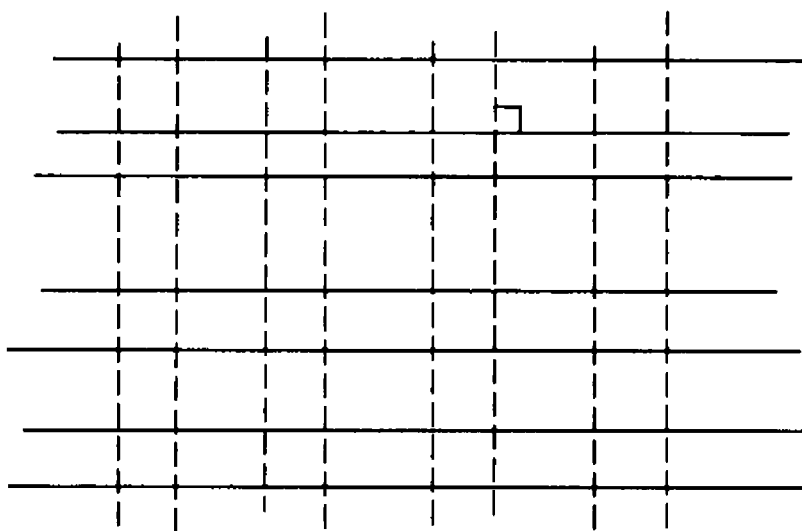
Etant données deux droites orthogonales  $\Delta$  et  $\Delta'$  se coupant en un point A, les deux faisceaux tangents en A respectivement à  $\Delta$  et  $\Delta'$  seront dits conjugués l'un de l'autre.



Etant donné un point A dans le plan, le faisceau des cercles de centre A, et le faisceau des droites passant par A seront dits conjugués l'un de l'autre.



Etant données deux directions orthogonales dans le plan, les faisceaux de droites parallèles à l'une et à l'autre de ces directions seront dits conjugués l'un de l'autre.

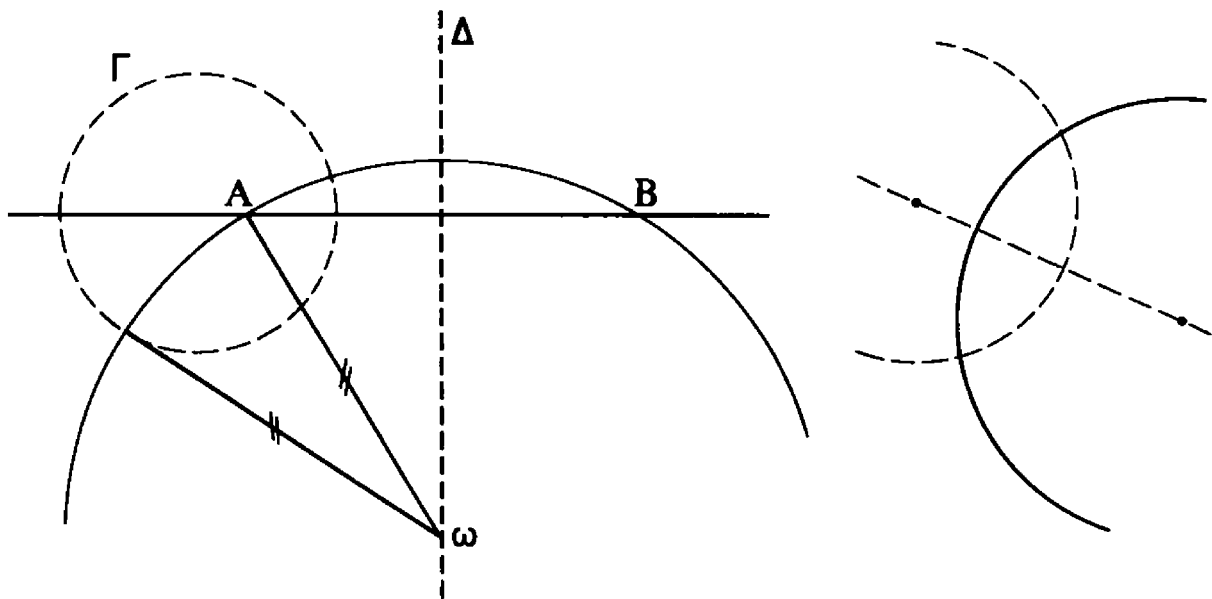


Observons que deux faisceaux conjugués ont même ensemble de points critiques.

### Théorème 3-8

*Par tout point non critique d'un couple de faisceaux conjugués, les courbes de chacun des faisceaux passant par ce point (cercles ou droites) sont orthogonales.*

1) Cas des faisceaux à points de base et points limite A et B :



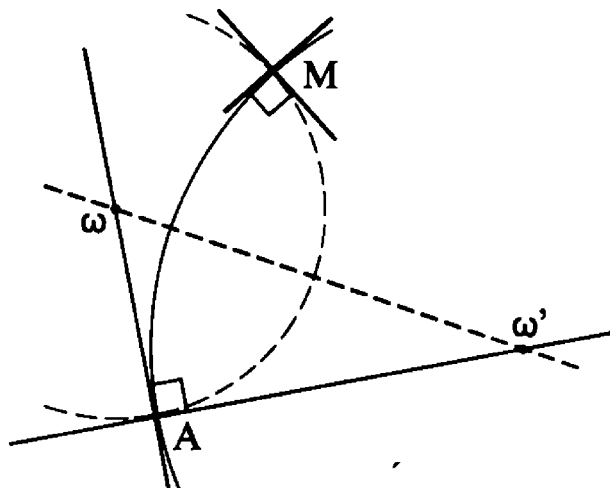
Soit M un point du plan autre que A ou B, et  $\Gamma$  la courbe du faisceau  $\mathcal{F}$  à points limites A et B passant par M :

a) Si M est sur la médiatrice  $\Delta$  de  $[AB]$ ,  $\Gamma$  est la médiatrice en question, laquelle est orthogonale à tous les cercles passant par A et B (puisque'elle en est un diamètre) ainsi qu'à la droite AB elle-même.

b) Si M n'est pas sur la médiatrice de  $[AB]$ ,  $\Gamma$  est un cercle et la tangente en M à  $\Gamma$

- ou bien est parallèle à  $\Delta$ , auquel cas M est sur AB,
- ou bien recoupe  $\Delta$  en un point  $\omega$  qui, d'après le théorème 3-4, a même puissance  $\mathcal{P}$  positive par rapport à tous les cercles de  $\mathcal{F}$  :  $\mathcal{P} = \|\omega M\|^2 = \|\omega A\|^2 = \|\omega B\|^2$ ; on en déduit que le cercle de centre  $\omega$  et rayon  $\sqrt{\mathcal{P}}$ , qui est orthogonal à  $\Gamma$ , passe par A et B et est donc la courbe du faisceau à points de base A et B qui passe par M.

## 2) Cas des faisceaux tangents :



Etant donné un cercle de chacun des deux faisceaux tangents conjugués, la droite  $\omega\omega'$  qui joint leur centre est axe de symétrie de la figure qu'ils forment : comme ils se coupent orthogonalement en A, il en est de même en leur second point M d'intersection.

## 3) Les autres cas sont évidents.

## 5 - Exercices sur le chapitre 3

- 1/ Notons  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  les pieds des hauteurs (respectivement sur BC, AC, AB) d'un triangle ABC, et H son orthocentre. Démontrer la relation

$$\overline{HA} \cdot \overline{HA_1} = \overline{HB} \cdot \overline{HB_1} = \overline{HC} \cdot \overline{HC_1}.$$

(Utiliser l'exercice 3 du chapitre 2.)

- 2/ On note  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  les points d'intersection d'une droite avec chacun des trois côtés BC, AC, AB d'un triangle ABC. [On suppose que  $\Delta$  ne passe par aucun des sommets du triangle ABC.]

a) Démontrer que l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$  a même puissance par rapport à chacun des trois cercles de diamètre  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$ . [Utiliser l'exercice 1 de ce chapitre.]

b) Démontrer que les orthocentres des quatre triangles  $ABC$ ,  $AB'C'$ ,  $A'BC'$ ,  $A'B'C$  sont alignés sur une droite  $\Delta_1$ , et que les milieux des segments  $[AA']$ ,  $[BB']$  et  $[CC']$  sont alignés sur une droite  $\Delta_2$  perpendiculaire à  $\Delta_1$ .

3/ On se donne un triangle  $ABC$  et trois points  $\alpha$  sur  $BC$ ,  $\beta$  sur  $AC$  et  $\gamma$  sur  $AB$ .

On note

$\alpha'$  le conjugué harmonique de  $\alpha$  par rapport à  $B$  et  $C$ ,

$\beta'$  le conjugué harmonique de  $\beta$  par rapport à  $A$  et  $C$ ,

$\gamma'$  le conjugué harmonique de  $\gamma$  par rapport à  $A$  et  $B$ .

Montrer l'équivalence des 2 propositions :

(i)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont alignés,

(ii)  $A\alpha'$ ,  $B\beta'$  et  $C\gamma'$  sont concourantes.

4/ On veut démontrer le théorème de Pascal (cf. chapitre 8, corollaire 8-13) dans le cas particulier où  $\mathcal{C}$  est un cercle. Soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  six points sur  $\mathcal{C}$ . On pose :

$$u = AE \cap BD, \quad v = AF \cap CD, \quad w = BF \cap CE,$$

$$\text{et } P = AE \cap BF, \quad Q = AF \cap CD, \quad R = BF \cap CE.$$

a) Appliquer l'exercice 1 du chapitre 1 aux transversales  $uDB$ ,  $vAF$  et  $wCE$  du triangle  $PQR$  [tous les points étant supposés à distance finie].

b) Montrer que  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont alignés, toujours en utilisant l'exercice 1 du chapitre 1, ainsi que les puissances de  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  relativement à  $\mathcal{C}$ .

5/ Etant donnée, dans un espace euclidien de dimension 3, une sphère  $\Sigma$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ , ainsi qu'un point  $M$ , on définit la puissance de  $M$  par rapport à  $\Sigma$ , comme étant le nombre (noté  $\mathcal{P}_\Sigma(M)$ ) égal à  $\|MO\|^2 - R^2$ . Quel est le lieu des points  $M$  qui ont même puissance par rapport



- a) à deux sphères  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  non concentriques?
- b) à trois sphères  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$  dont les centres ne sont pas alignés?
- c) à quatre sphères dont les centres ne sont pas coplanaires?
- 6/ On se donne, dans un plan, un cercle  $\Gamma$  et deux points A et B. Construire, à la règle et au compas, les « cercles » appartenant à chacune des quatre cases :

	<i>cercles passant par A et B</i>	<i>cercles du faisceau à points limites A et B</i>
cercles tangents à $\Gamma$	I	II
cercles orthogonaux à $\Gamma$	III	IV

- 7/ Problème analogue au précédent, en prenant pour  $\Gamma$  une droite.
- 8/ Problème analogue au précédent en remplaçant faisceau à points de base ou à points limites par faisceau de cercles tangents.

*N.B.* On conviendra, à partir de maintenant, de mettre des *guillemets* au mot « cercle » pour désigner indistinctement un cercle ou une droite selon les cas. On dira, de même, que des points sont « cocycliques » s'ils sont cocycliques ou alignés.

## CHAPITRE IV

# *Etude plane élémentaire des coniques*

### 1 - Première définition plane des coniques (définition bifocale pour les coniques à centre)

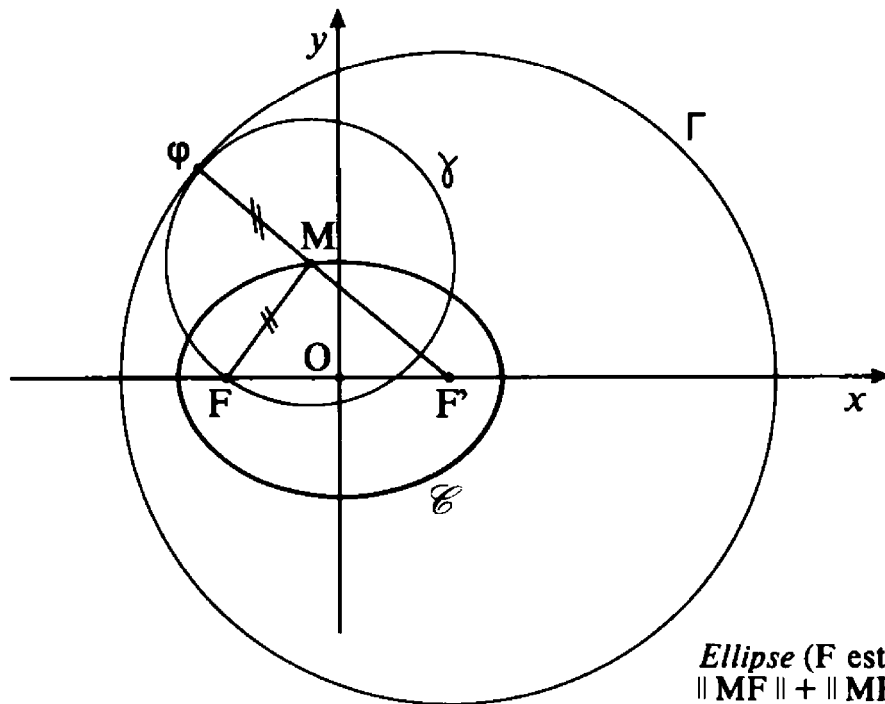
Donnons-nous, dans un plan euclidien, un cercle ou une droite  $\Gamma$ , ainsi qu'un point  $F$  n'appartenant pas à  $\Gamma$ . Le lieu  $\mathcal{C}$  des points  $M$  qui sont centre d'un cercle  $\gamma$  tangent à  $\Gamma$  et passant par  $F$  s'appelle la *conique* de foyer  $F$  et cercle directeur  $\Gamma$  (ou directrice si  $\Gamma$  est une droite).

1. — Lorsque  $\Gamma$  est un cercle, notons  $F'$  son centre,  $2a$  son rayon, et  $2c$  la distance  $\|FF'\|$ . Selon que  $F$  est intérieur à  $\Gamma$  ( $c < a$ ), ou extérieur ( $c > a$ ), on dit que la conique est une *ellipse* ou une *hyperbole*. Si  $M$  appartient à une telle conique, et si  $\varphi$  désigne le point de contact avec  $\Gamma$  du cercle  $\gamma$  de centre  $M$  passant par  $F$ ,  $M$  est nécessairement intérieur (resp. extérieur) au segment  $[F'\varphi]$  dans le cas d'une ellipse (resp. d'une hyperbole), et la condition de contact s'écrit :

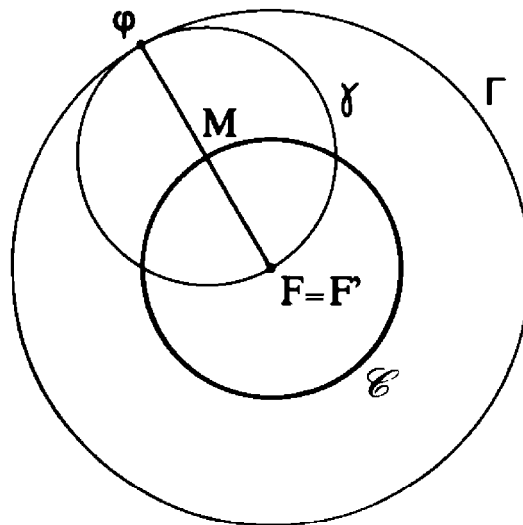
$$\|M\varphi\| + \|MF'\| = 2a \text{ (resp. } |\|M\varphi\| - \|MF'\|| = 2a).$$

soit, puisque  $\|M\varphi\| = \|MF\|$  :

$$\|MF\| + \|MF'\| = 2a \text{ (resp. } |\|MF\| - \|MF'\|| = 2a).$$



*Ellipse* ( $F$  est intérieur à  $\Gamma$ )  
 $\|MF\| + \|MF'\| = 2a$

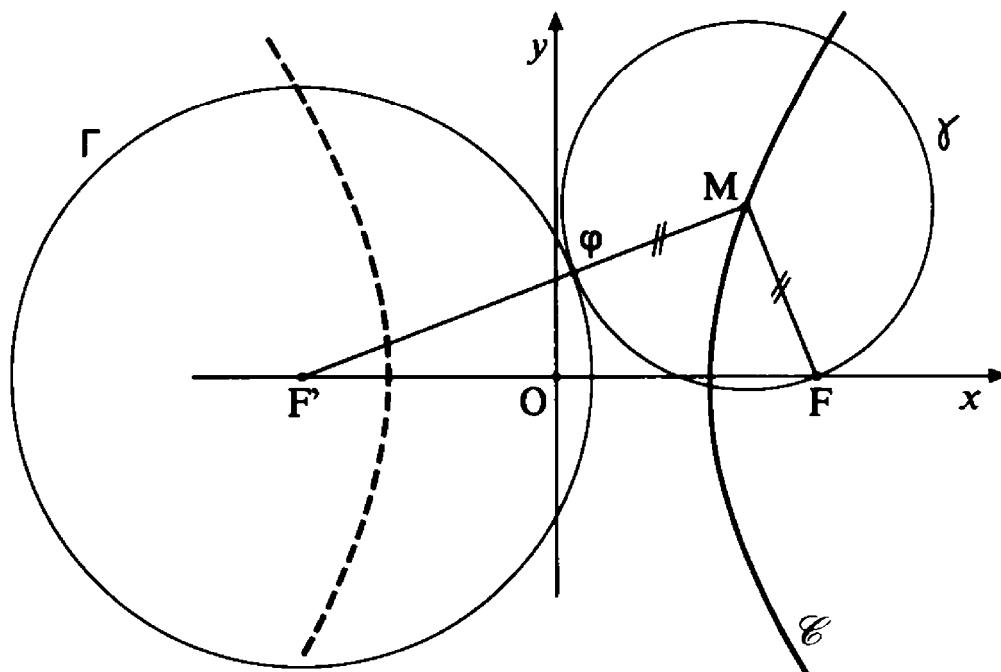


si  $F = F'$ ,  
 l'ellipse est un cercle

Réciproquement, si  $\|MF\| + \|MF'\| = 2a$ ,  $\|FF'\|$  est nécessairement inférieur à  $2a$  ( $c < a$ ) d'après l'inégalité triangulaire :  $F$  est intérieur au cercle  $\Gamma$  de centre  $F'$  et rayon  $2a$ , et le cercle  $\gamma$  de centre  $M$  passant par  $F$  est tangent intérieurement à  $\Gamma$ . De même, si  $\|MF\| - \|MF'\| = 2a$ , l'inégalité triangulaire

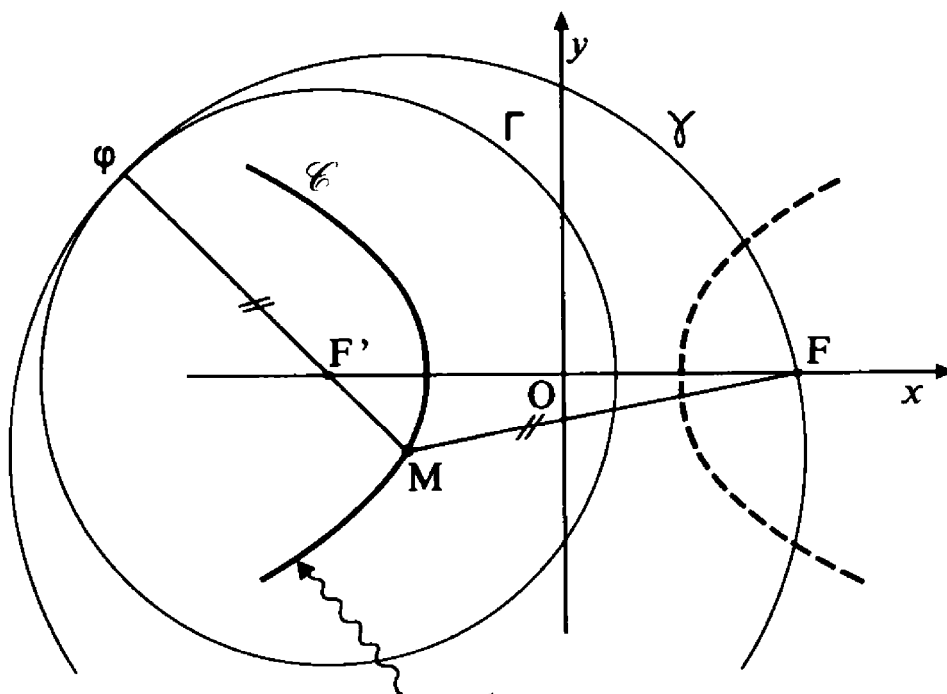
$$\|MF\| < \|MF'\| + \|FF'\|$$

implique  $a < c$  :  $F$  est extérieur à  $\Gamma$  et le cercle  $\gamma$  de centre  $M$  passant par  $F$  est tangent à  $\Gamma$  et contient  $\Gamma$  en son intérieur. Si



*Hyperbole* ( $F$  est extérieur à  $\Gamma$ )

branche  
 $\|MF'\| - \|MF\| = 2a$



branche  
 $\|MF\| - \|MF'\| = 2a$

$\|MF'\| - \|MF\| = 2a$ , on a encore  $a < c$ , et  $\gamma$  tangent à  $\Gamma$ , mais — cette fois-ci — les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre. On a en résumé la

**Proposition 4-1**

Soient  $F$  et  $F'$  deux points du plan, situés à la distance  $\|FF'\| = 2c$  l'un de l'autre, et soit  $a$  un nombre  $> 0$ .

(i) L'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|MF\| + \|MF'\| = 2a$  est

- l'ellipse de foyer  $F$  et cercle directeur le cercle  $\Gamma$  de centre  $F'$  et rayon  $2a$  si  $a > c$ ,
- le segment  $[FF']$  si  $a = c$ ,
- vide si  $a < c$ .

(ii) L'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$|\|MF\| - \|MF'\|| = 2a$$

est

- l'hyperbole de foyer  $F$  et cercle directeur le cercle  $\Gamma$  de centre  $F'$  et rayon  $2a$  si  $a < c$ ,
- l'extérieur du segment  $[FF']$  sur la droite  $FF'$  si  $a = c$ ,
- vide si  $a > c$ .

**Remarques :**

(i)  $F$  et  $F'$  jouent des rôles parfaitement symétriques dans les relations  $\|MF\| + \|MF'\| = 2a$  ou  $|\|MF\| - \|MF'\|| = 2a$ , de sorte que, pour  $a > c$ , (resp.  $a < c$ ), l'ellipse (resp. l'hyperbole) est aussi définie avec le foyer  $F'$  et le cercle directeur  $\Gamma'$  de centre  $F$  et rayon  $2a$ . On dira que  $F$  et  $F'$  sont les foyers de l'ellipse ou de l'hyperbole, et les relations de définition

$$\|MF\| + \|MF'\| = 2a \quad (|\|MF\| - \|MF'\|| = 2a)$$

seront appelées *définition bifocale* de l'ellipse (resp. de l'hyperbole).

(ii) De cette définition bifocale, résulte que la droite  $FF'$  et la médiatrice du segment  $[FF']$  sont toutes deux *axes de symétrie* <sup>(1)</sup> de l'ellipse ou de l'hyperbole tandis que le milieu

<sup>(1)</sup> La droite  $FF'$  est appelée l'axe focal. Les points de  $C$  situés sur un axe s'appellent les *sommets* de la conique.

O de [FF'] est *centré de symétrie* : on dira que l'ellipse et l'hyperbole sont des *coniques à centre*. (Si  $F=F'$ , l'ellipse est un cercle dont tout diamètre est axe de symétrie.)

On réservera désormais le nom d'ellipse au cas

$$\|MF\| + \|MF'\| = 2a \quad \text{avec} \quad a > \frac{\|FF'\|}{2} = c$$

et d'hyperbole au cas

$$|\|MF\| - \|MF'\|| = 2a \quad \text{avec} \quad a < \frac{\|FF'\|}{2} = c.$$

Posons  $\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{pour une ellipse,} \\ -1 & \text{pour une hyperbole.} \end{cases}$

Dans les deux cas, la relation s'écrit

$$(\|MF\| + \varepsilon \|MF'\|)^2 = 4a^2,$$

et l'on définit un nombre  $b^2 > 0$  en posant  $a^2 - c^2 = \varepsilon \cdot b^2$ .

Puisque l'ensemble des points tels que

$$\|MF\| + \|MF'\| = 2a \quad (\text{resp. } |\|MF\| - \|MF'\|| = 2a)$$

est vide si  $c > a$  (resp.  $c < a$ ), la relation précédente équivaut encore à :

$$((\|MF\| + \|MF'\|)^2 - 4a^2) \cdot ((\|MF\| - \|MF'\|)^2 - 4a^2) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(*) \quad (\|MF\|^2 + \|MF'\|^2 - 4a^2)^2 - 4\|MF\|^2 \cdot \|MF'\|^2 = 0.$$

Relativement à un repère orthonormé (Oxy) dont l'axe Ox est porté par la droite FF' ( $\overline{OF} = c = -\overline{OF'}$ ) et l'axe Oy par la médiatrice du segment [FF'], et notant (x, y) les coordonnées d'un point M de la conique, on a :

$$\|MF\|^2 = (x - c)^2 + y^2, \quad \|MF'\|^2 = (x + c)^2 + y^2,$$

(\*) Une ellipse (non circulaire) admet quatre sommets (deux sur l'axe focal et deux sur l'axe non focal). Une hyperbole n'en admet que deux (sur l'axe focal).

et la relation (\*) s'écrit :

$$(x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2 - (x^2 + y^2 + c^2 + 2xc)(x^2 + y^2 + c^2 - 2xc) = 0,$$

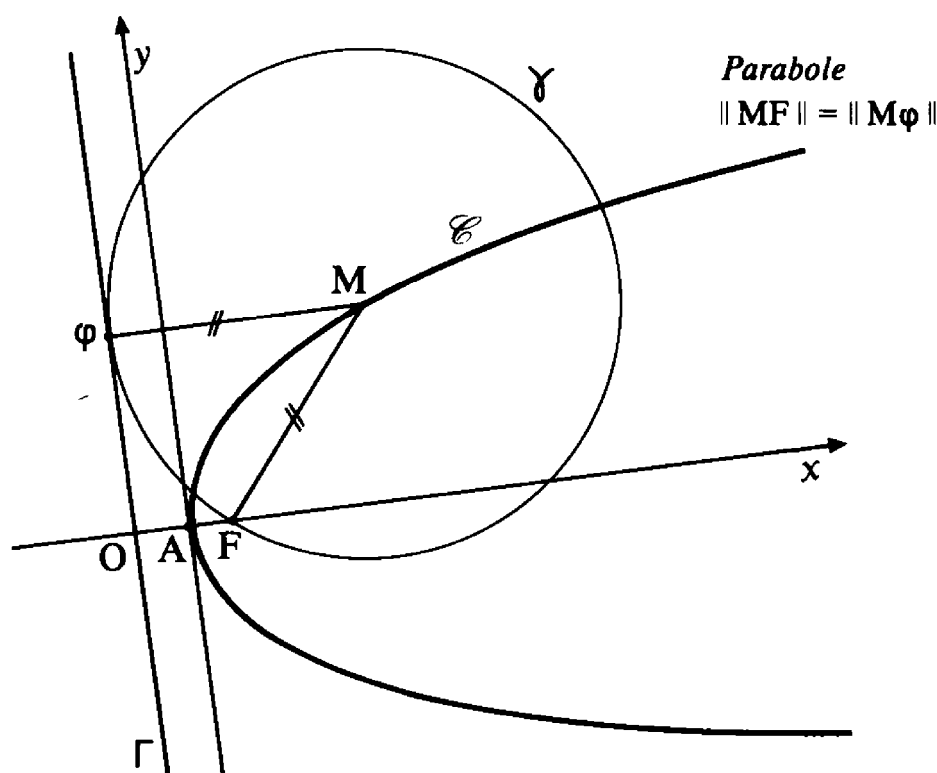
soit :  $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0,$

c'est-à-dire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

2. — Lorsque  $\Gamma$  est une droite, on dit que la conique est une *parabole*. Le point de contact  $\varphi$ , avec  $\Gamma$ , du cercle  $\gamma$  centré en un point  $M$  de la parabole et passant par  $F$ , est la projection orthogonale de  $M$  sur  $\Gamma$ , de sorte que  $\|MF\| = \|M\varphi\|$ .

Réciproquement, si  $\varphi$  désigne la projection orthogonale de  $M$  sur  $\Gamma$  et si  $\|MF\| = \|M\varphi\|$ ,  $M$  est centre d'un cercle tangent à  $\Gamma$  et passant par  $F$ .



De la définition, résulte que la perpendiculaire passant par F à la directrice  $\Gamma$  est axe de symétrie de la parabole : on l'appellera *l'axe* de la parabole.

Le point A, situé sur l'axe à mi-distance entre le foyer F et la directrice  $\Gamma$  est un point de la parabole, appelé *le sommet* de la parabole.

Relativement à un repère orthonormé  $(Ax, Ay)$  où Ax est porté par l'axe de la parabole avec  $\overline{AF} = p/2$  ( $p > 0$ ) (c'est-à-dire que  $p$  désigne la distance du foyer F à la directrice  $\Gamma$ ), la relation  $\|MF\| = \|M\varphi\|$  s'écrit, pour un point M de coordonnées  $(x, y)$  sur la parabole :

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2,$$

soit

$y^2 - 2px = 0.$
------------------

## 2 - Deuxième définition plane des coniques, par foyer, directrice, et excentricité (coniques non circulaires)

Soit D une droite, et F un point n'appartenant pas à D, dans un plan euclidien.

Soit  $e$  un nombre strictement positif.

### **Théorème 4-2**

*Le lieu des points M du plan, dont la projection orthogonale m sur D vérifie*

$$\|MF\| = e \|Mm\|$$

*est une ellipse non circulaire pour  $0 < e < 1$ ,*

*une parabole pour  $e = 1$ ,*

*une hyperbole pour  $e > 1$ ,*

*F étant dans tous les cas l'un des foyers (le foyer dans le cas de la parabole), au sens du paragraphe précédent.*



*Réciproquement, toute conique  $C$ , au sens du paragraphe précédent, autre qu'un cercle, peut s'obtenir par le procédé précédent, et d'une seule façon une fois fixé l'un des foyers dans le cas d'une conique à centre : le nombre  $e$  correspondant est alors défini, pour une conique à centre, par la formule*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\|FF'\|}{2a},$$

*tandis que  $D$  est l'axe radical du faisceau  $(\Gamma, \{F\})$  engendré par le cercle directeur  $\Gamma$  (centre  $F'$ , rayon  $2a$ ) et le cercle point  $\{F\}$ .*

Le cas de la parabole est évident car la relation  $\|MF\| = \|Mm\|$  équivaut à l'affirmation que  $M$  est centre d'un cercle passant par  $F$  et tangent à  $D$ .

Dans le cas d'une conique à centre, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

peut encore s'écrire :

$$y^2 = \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) x^2 + a^2 - c^2$$

$$\begin{aligned} \text{soit : } (x - c)^2 + y^2 &= (x - c)^2 + \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) x^2 + a^2 - c^2 \\ &= \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2xc + a^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2. \end{aligned}$$

Or l'expression  $(x - c)^2 + y^2$  est égale à  $\|MF\|^2$ , lorsque  $M$  est le point de coordonnées  $(x, y)$  sur la conique, tandis que l'expression  $\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$  est égale à  $\|Mm\|^2$ ,  $m$  désignant la projection orthogonale de  $M$  sur la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{a^2}{c}$ . L'équation

$$(x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$$

équivalent donc à

$$\|MF\|^2 = \frac{c^2}{a^2} \|Mm\|^2.$$

Puisque l'axe radical du faisceau engendré par le cercle  $\Gamma$  d'équation

$$(x+c)^2 + y^2 - 4a^2 = 0$$

et du cercle point  $\{F\}$  d'équation  $(x-c)^2 + y^2 = 0$  a pour équation

$$[(x+c)^2 + y^2 - 4a^2] - [(x-c)^2 + y^2] = 0$$

soit  $x - \frac{a^2}{c} = 0,$

D est bien l'axe radical en question.

c. q. f. d.

[Remarque : Le point  $m_0$  où la droite D coupe l'axe focal est aussi le conjugué harmonique de F par rapport aux deux sommets de la conique à centre, qui se trouvent sur l'axe focal.]

### 3 - Allure générale des coniques

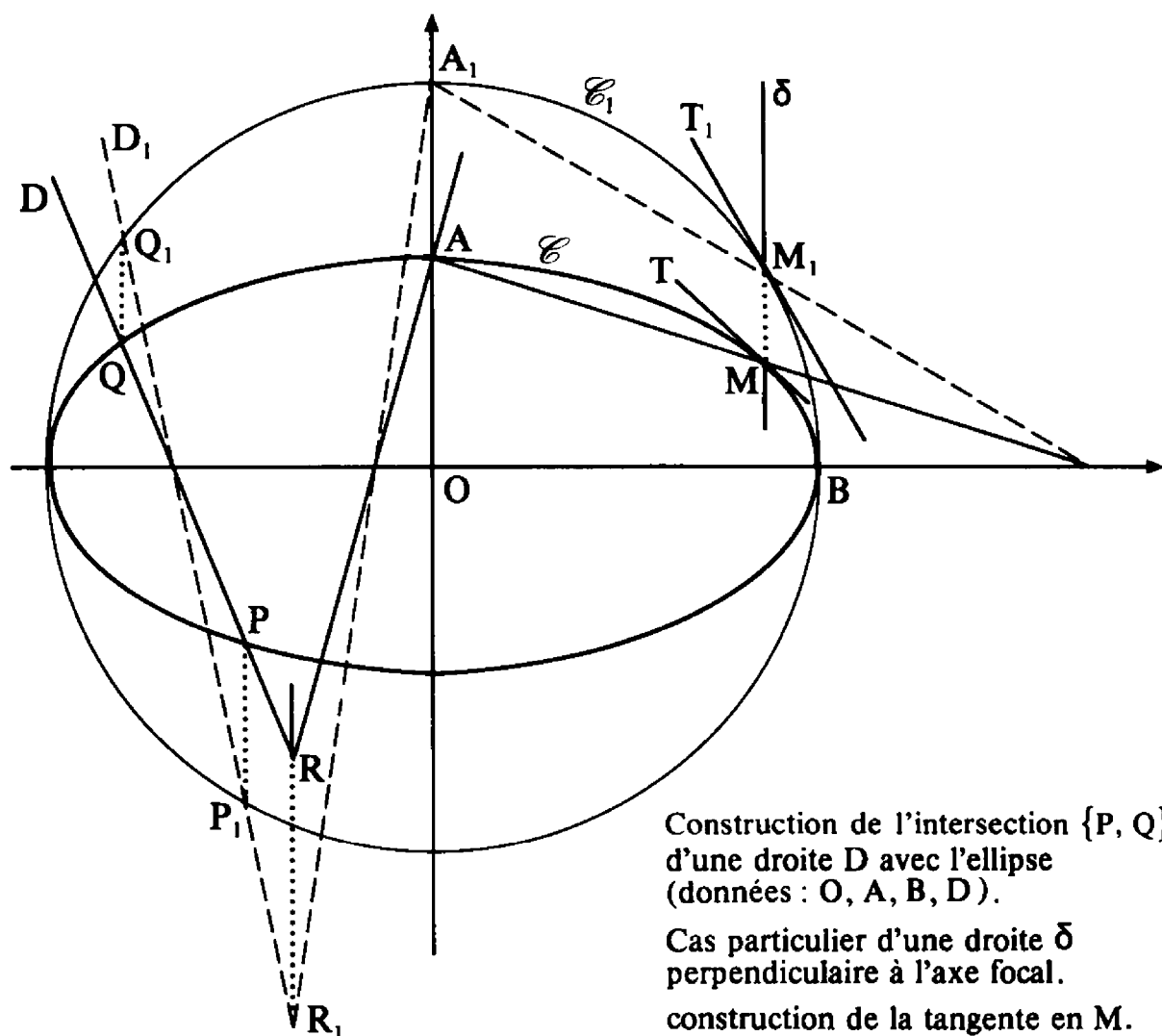
1. — *Ellipse*. — L'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , dans un repère orthonormé porté par les axes, prouve que l'ellipse est l'image du cercle d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \left( \text{resp. } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$$

dans l'affinité orthogonale<sup>(2)</sup>

$$(x, y) \longrightarrow \left(x, \frac{b}{a} y\right)$$

d'axe  $Ox$  et rapport  $\frac{b}{a}$  (resp. dans l'affinité orthogonale  $(x, y) \longrightarrow \left(\frac{a}{b} x, y\right)$  d'axe  $Oy$  et rapport  $\frac{a}{b}$ ). De cette observation



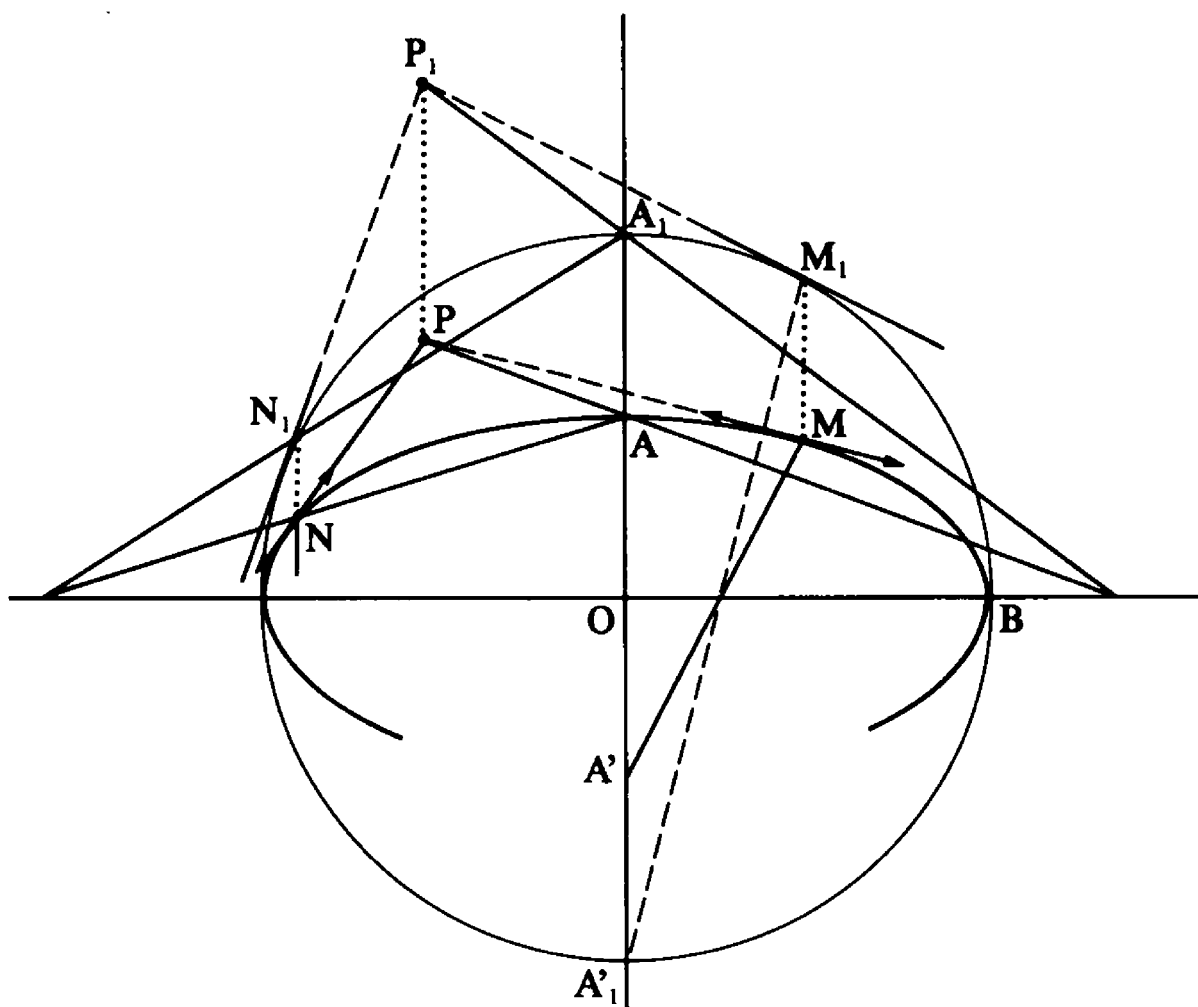
<sup>(2)</sup> Rappelons qu'une affinité orthogonale d'axe  $\Delta$  et rapport  $k (\neq 0)$  est la transformation qui

- admet les points de  $\Delta$  comme ensemble de points invariants,
- préserve globalement chaque droite perpendiculaire à  $\Delta$  et coïncide sur une telle droite avec une homothétie de rapport  $k$ .

Elle préserve l'alignement, ainsi que le rapport algébrique  $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$  de trois points  $A, B, C$  alignés (et en particulier la notion de milieu).

Elle multiplie les aires par  $k$ .

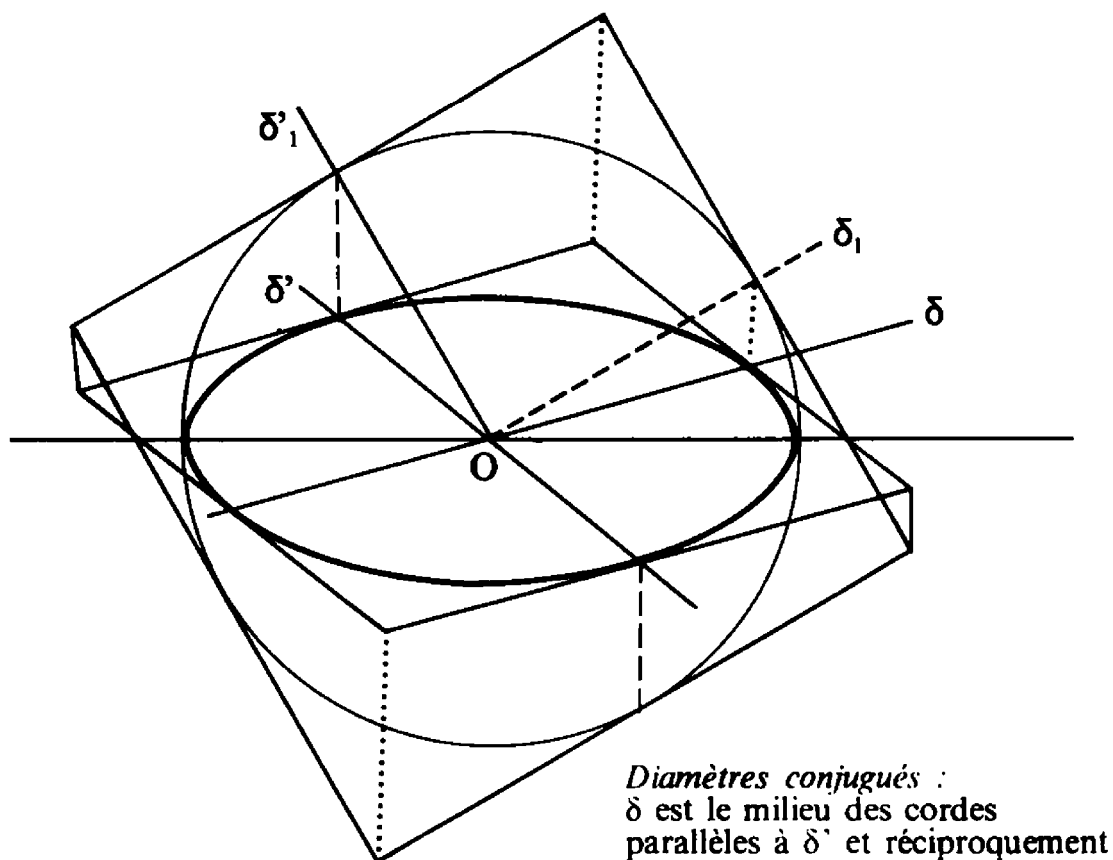
on peut déduire l'allure générale de l'ellipse, ainsi que quelques constructions élémentaires telles par exemple celle de l'intersection avec une droite, de la tangente en un point ou des tangentes qu'on peut mener d'un point.



Construction des tangentes à l'ellipse, issues d'un point donné P (données : O, A, B, P)

**Remarques :** On peut aussi en déduire :

- l'aire  $S = \frac{b}{a} (\pi a^2) = \pi ab$  de l'ellipse,
- ses propriétés diamétrales (diamètres conjugués : chacun est le lieu des milieux des cordes parallèles à l'autre et parallèles également aux tangentes en ses extrémités).



2. — *Hyperbole.* — L'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , dans un repère orthonormé, montre que l'hyperbole  $C$  est image, par l'affinité orthogonale d'axe  $Ox$  et rapport<sup>(3)</sup>  $b/a$ , de l'hyperbole  $C_1$  dite « équilatère » d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ .

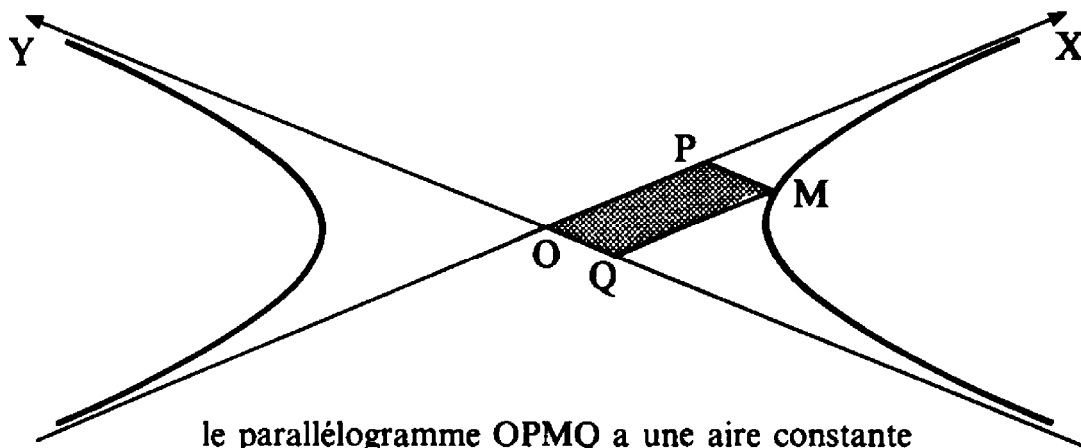
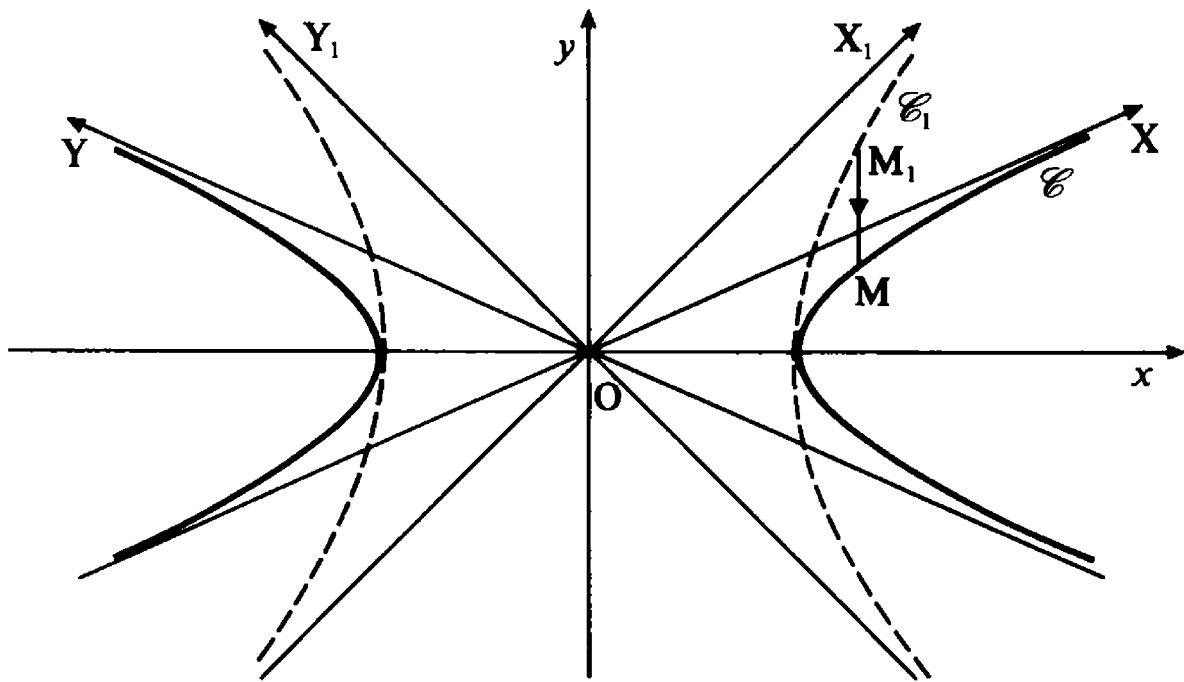
Posant  $x = \frac{X_1 + Y_1}{\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{Y_1 - X_1}{\sqrt{2}}$ , on obtient un changement de repère orthonormé (le nouveau repère se déduit de l'ancien par rotation d'angle  $\pi/4$  autour de  $O$ ). Par rapport à ce nouveau repère,  $C_1$  admet pour équation  $2X_1Y_1 = -a^2$  et est donc le graphe (bien connu) de la fonction homographique  $X_1 \longrightarrow Y_1 = \frac{-a^2}{2X_1}$ .

<sup>(3)</sup> Contrairement au cas de l'ellipse où  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  est toujours plus petit que  $a$ ,  $b$  est ici égal à  $\sqrt{c^2 - a^2}$  et peut être plus petit, plus grand, ou égal à  $a$ .

L'allure générale de  $\mathcal{C}$  s'en déduit par affinité orthogonale. En particulier, les droites d'équation

$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b}{a} x$$

sont *asymptotes*.



le parallélogramme OPMQ a une aire constante

**Remarque :** L'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  s'écrit aussi  $X \cdot Y = -1$ , où

$$X = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad \text{et} \quad Y = \frac{y}{b} - \frac{x}{a}$$

désignent de nouvelles coordonnées «obliques» dont les axes  $OX$  et  $OY$  sont portés par les asymptotes.

[En particulier, lorsqu'un point  $M$  parcourt l'hyperbole, l'aire du parallélogramme de diagonale  $OM$  admettant les deux asymptotes parmi ses côtés est constante.]

3. — *Parabole.* — L'équation  $y^2 - 2px = 0$ , dans un repère orthonormé, montre que la parabole a l'allure — bien connue — du graphe de la fonction  $x$  de la variable  $y$  définie par  $x = \frac{y^2}{2p}$ . (Revoir la figure 4-3.)

[En particulier,  $Ox$  est direction asymptotique, avec branche infinie parabolique.]

#### 4 - Tangentes à une conique

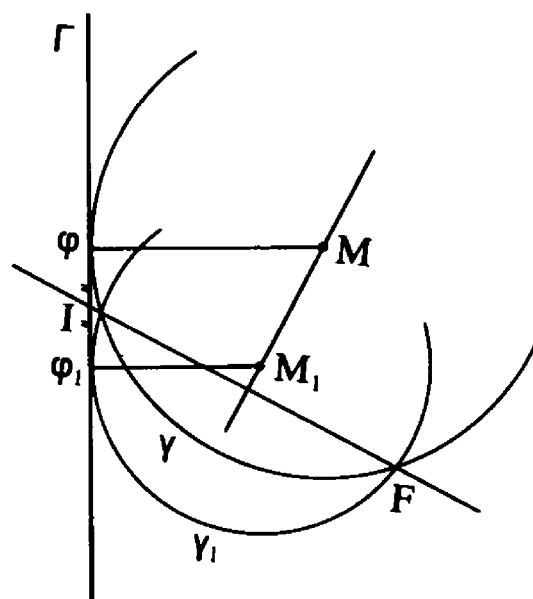
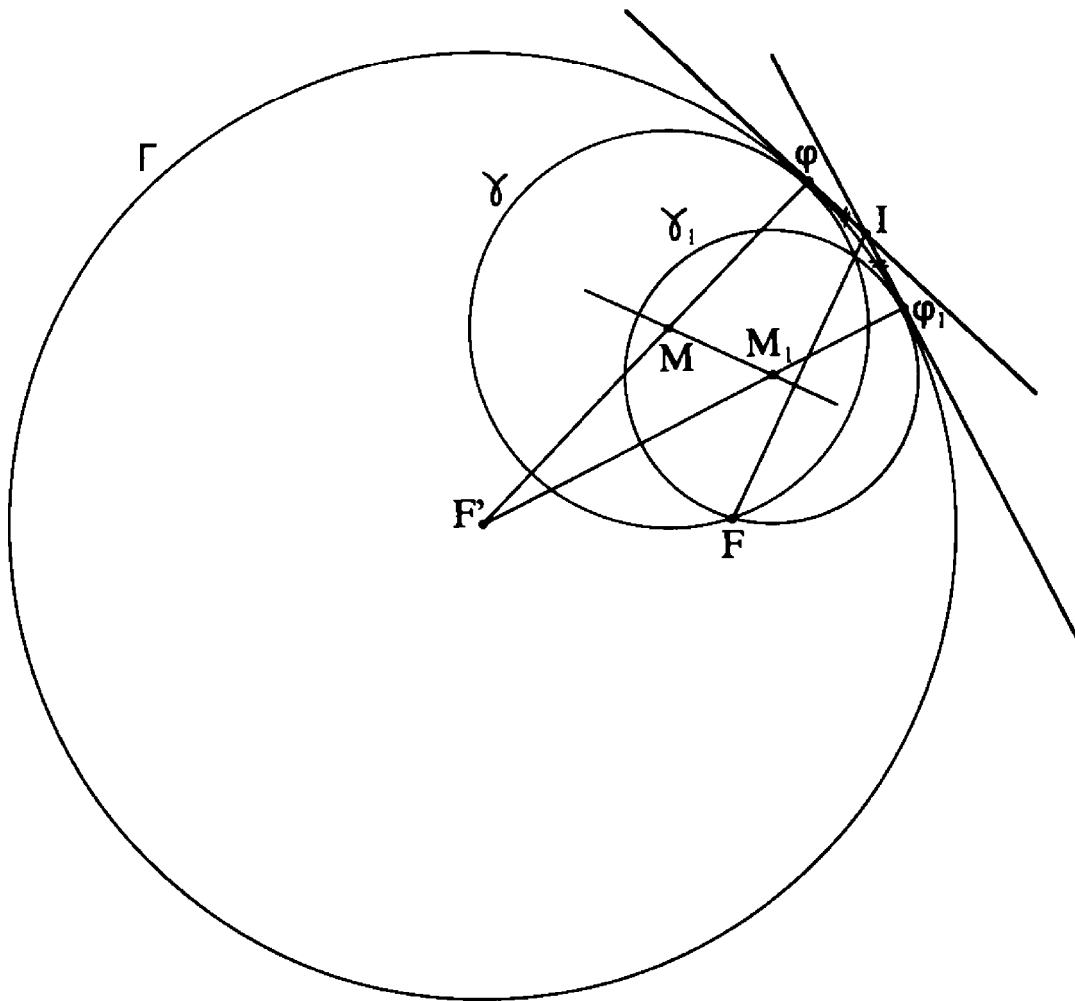
Soit  $C$  la conique de foyer  $F$  et cercle directeur (ou directrice)  $\Gamma$ .

##### **Théorème 4-3**

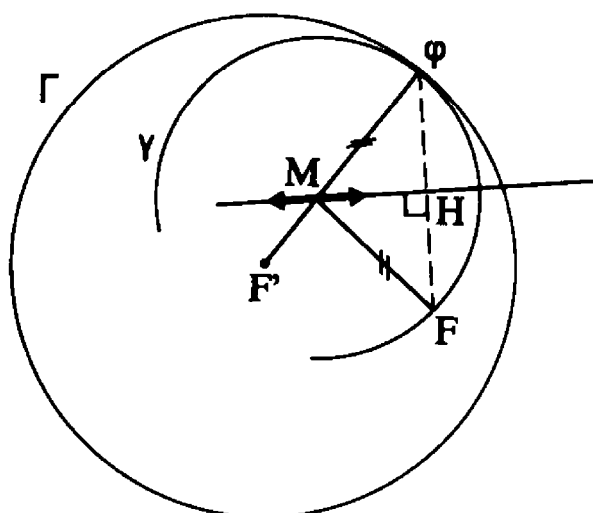
*Soit  $M$  un point de  $C$ , et  $\varphi$  le point de contact avec  $\Gamma$  du cercle  $\gamma$  passant par  $F$  dont  $M$  est le centre : la conique  $C$  admet une tangente en  $M$ , qui est la médiatrice du segment  $[F\varphi]$ .*

Soit en effet  $M_1$  un autre point de  $C$ , centre d'un cercle  $\gamma_1$  passant  $F$  et tangent à  $\Gamma$  en  $\varphi_1$ . La droite  $MM_1$  est perpendiculaire à l'axe radical de  $\gamma$  et  $\gamma_1$ , qui passe par  $F$  et le centre radical  $I$  des trois cercles  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  et  $\Gamma$  si  $\Gamma$  est un cercle (resp. par le milieu  $I$  du segment  $[\varphi\varphi_1]$  si  $\Gamma$  est une droite). Lorsque  $M_1$  tend vers  $M$ ,  $\varphi_1$  tend vers  $\varphi$  ainsi que  $I$ , de sorte que la droite  $MM_1$  tend vers la perpendiculaire à  $F\varphi$  passant par  $M$ .

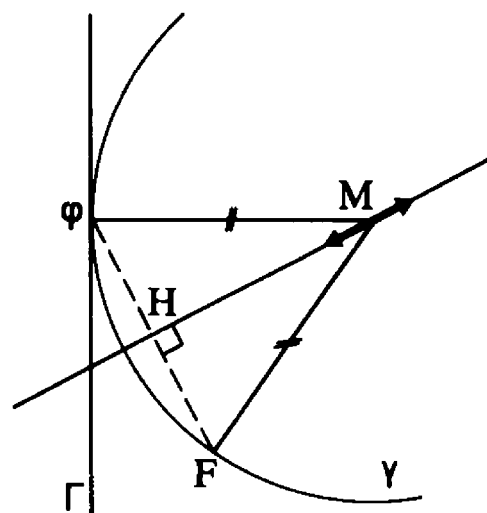
c. q. f. d.



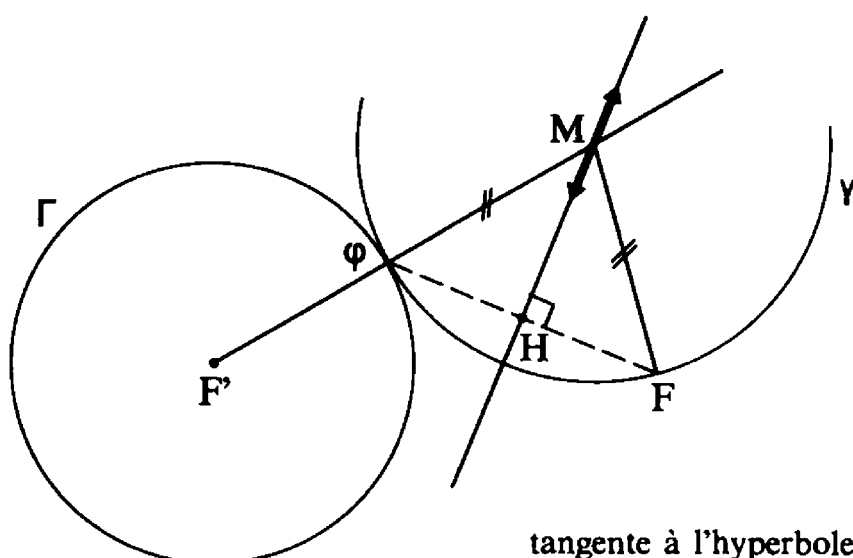




tangente à l'ellipse



tangente à la parabole



tangente à l'hyperbole

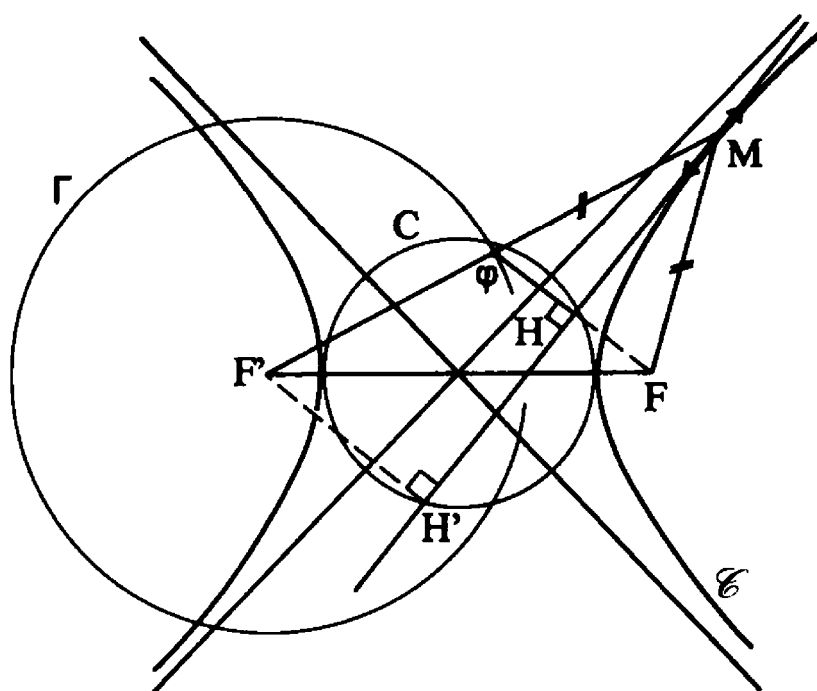
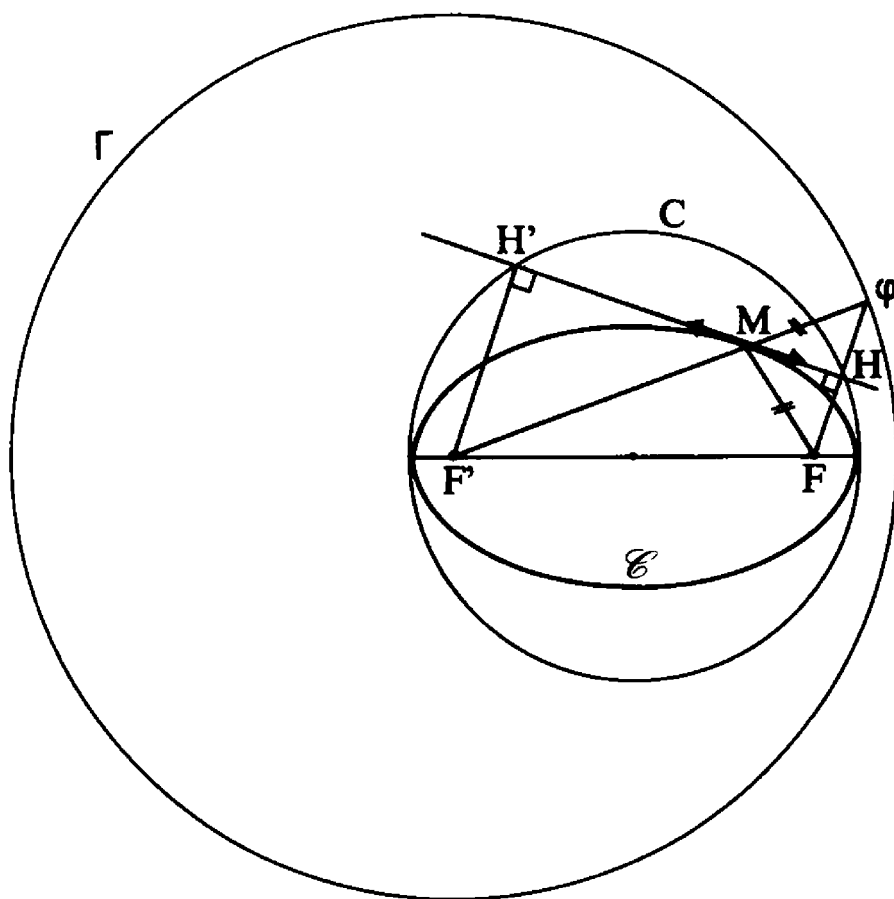
On en déduit le

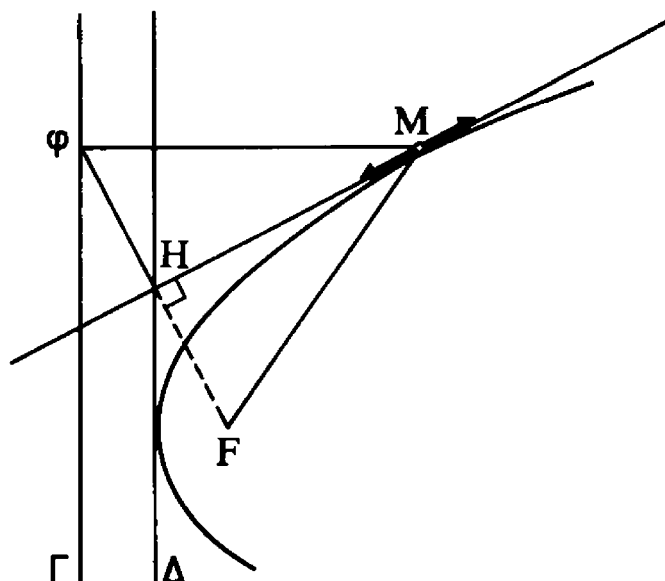
#### Corollaire 4-4

*Le point H, pied de la perpendiculaire abaissée de F sur la tangente en M à C, décrit*

- *le cercle principal C, tangent à C aux deux extrémités de l'axe focal, dans le cas d'une conique à centre,*
- *la tangente Δ en le sommet A de C, dans le cas d'une parabole.*

Le point  $H$  est en effet le milieu de  $[F\varphi]$ , qui décrit donc l'image du lieu  $\Gamma$  de  $\varphi$  dans l'homothétie de centre  $F$  et rapport  $1/2$ .





### Remarques :

1) Si  $F$  est extérieur à  $\Gamma$  (cas d'une hyperbole), et si  $[F\varphi]$  est tangente à  $\Gamma$ , la médiatrice de  $[F\varphi]$  est asymptote à l'hyperbole : en effet, si  $\varphi_1$  est le point de contact d'un cercle  $\gamma_1$ , de centre  $M_1$ , passant par  $F$ , la perpendiculaire à  $F\varphi$  passant par  $M_1$  est la médiatrice de  $[FL_1]$ ,  $L_1$  désignant le point où  $\gamma_1$  recoupe  $F\varphi$ . Quand  $\varphi_1$  tend vers  $\varphi$  sur  $\Gamma$ ,  $L_1$  tend vers  $\varphi$ ,  $M_1$  s'éloigne à l'infini dans la direction perpendiculaire à  $F\varphi$  (puisque  $M_1$  est à l'intersection de  $F'\varphi_1$  et de la médiatrice de  $[F\varphi_1]$  qui tendent toutes deux à devenir parallèles à cette direction), et la médiatrice de  $[FL_1]$  tend vers celle de  $[F\varphi]$ .

2) Les deux foyers  $F$  et  $F'$  d'une conique  $C$  à centre jouant le même rôle, et le cercle principal  $C$  étant aussi l'image du cercle  $\Gamma'$  de centre  $F$  et rayon  $2a$  dans l'homothétie de centre  $F'$  et rapport  $1/2$ , la projection orthogonale  $H'$  de  $F'$  sur la tangente en  $M$  à  $C$  est aussi sur  $C$ , les deux droites  $FH$  et  $F'H'$  étant symétriques par rapport au centre  $O$  de  $C$  (qui est aussi le centre de la conique). On en déduit :

$$\begin{aligned}\overline{FH} \cdot \overline{F'H'} &= -\mathcal{I}_c(F) = a^2 - c^2 \\ &= \varepsilon \cdot b^2.\end{aligned}$$



si  $F_0$  est tangent à  $\Gamma$ ,  $M$  est « à l'infini »

$\|FF'\| = 2c \geq 0$ ) et si  $k$  est une constante réelle non nulle, l'ensemble des droites  $D$  du plan telles que les projections orthogonales  $H$  et  $H'$  de  $F$  et  $F'$  sur  $D$  vérifient

$$\overline{FH} \cdot \overline{F'H'} = k$$

est l'ensemble des tangentes (et asymptotes éventuellement si  $k < 0$ ) à la conique à centre  $C$ , de foyers  $F$  et  $F'$ , admettant comme longueur de l'axe focal

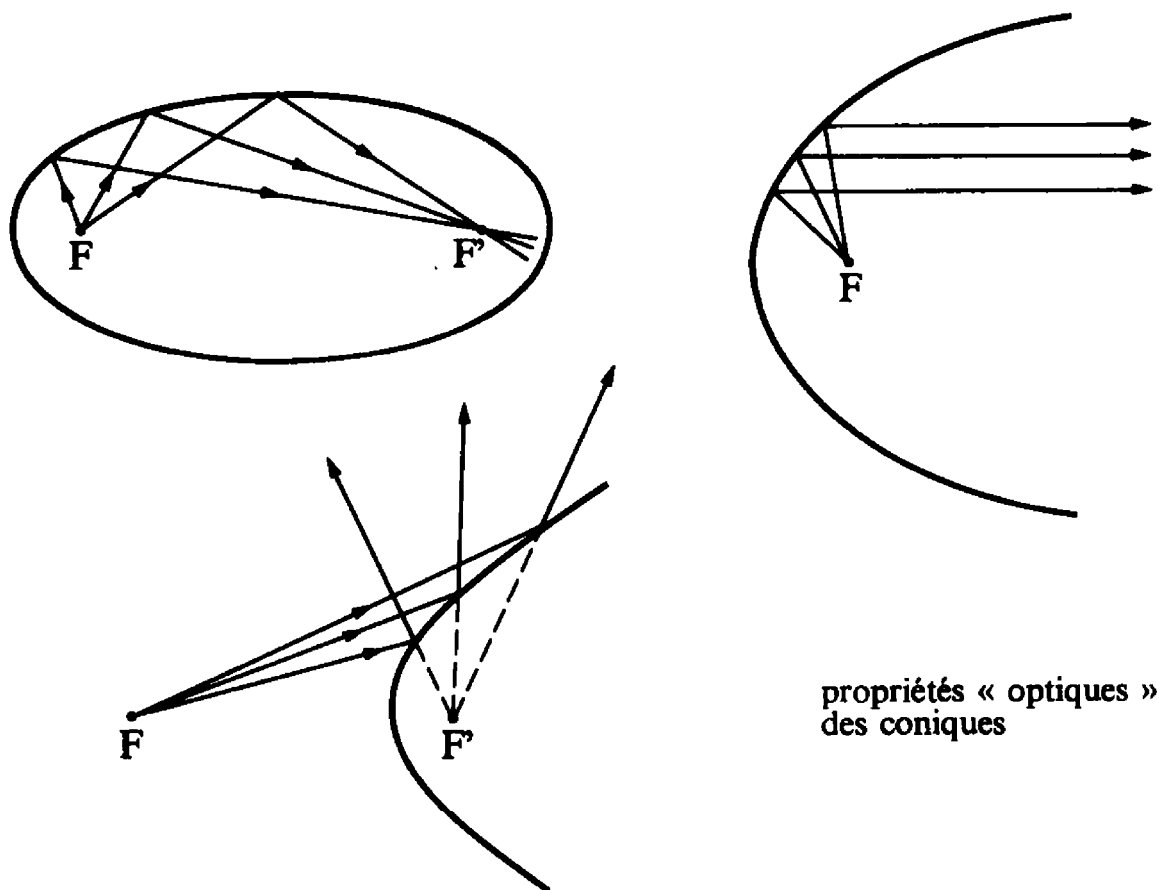
$$2a = \sqrt{c^2 + k}$$

(c'est une ellipse si  $k > 0$ , une hyperbole pour  $k < 0$ ).

### Corollaire 4-5

- (i) *Etant donnée une conique à centre de foyers  $F$  et  $F'$ , la tangente en un point  $M$  de la conique est bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$  (bissectrice extérieure pour l'ellipse, intérieure pour l'hyperbole).*
- (ii) *Etant donnée une parabole de foyer  $F$  et d'axe  $Fx$ , la tangente en un point  $M$  de la parabole est bissectrice extérieure de l'angle  $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{Mx})$ .*

La démonstration est immédiate sur la figure 4-9.



### Corollaire 4-6 (Théorème de l'angle pivotant)

Soit  $C$  une conique de foyer  $F$ .

- (i) *Si  $P$  désigne le point d'intersection des deux tangentes à  $C$  en deux points distincts  $A$  et  $B$ , la droite  $FP$  est l'une des bissectrices de l'angle  $(FA, FB)$ , et plus précisément*

— la bissectrice intérieure lorsque  $C$  est une ellipse ou une parabole, ou que  $C$  est une hyperbole lorsque  $A$  et  $B$  appartiennent à la même branche :

$$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FP}) = (\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}),$$

— la bissectrice extérieure lorsque  $C$  est une hyperbole et que  $A$  et  $B$  n'appartiennent pas à la même branche :

$$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FP}) = (\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) + \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Si une troisième tangente à  $C$  coupe les tangentes en  $A$  et  $B$  respectivement en  $M$  et  $N$ , l'angle des droites  $(FM, FN)$  ne dépend que de  $A$  et de  $B$ , et est plus précisément égal à

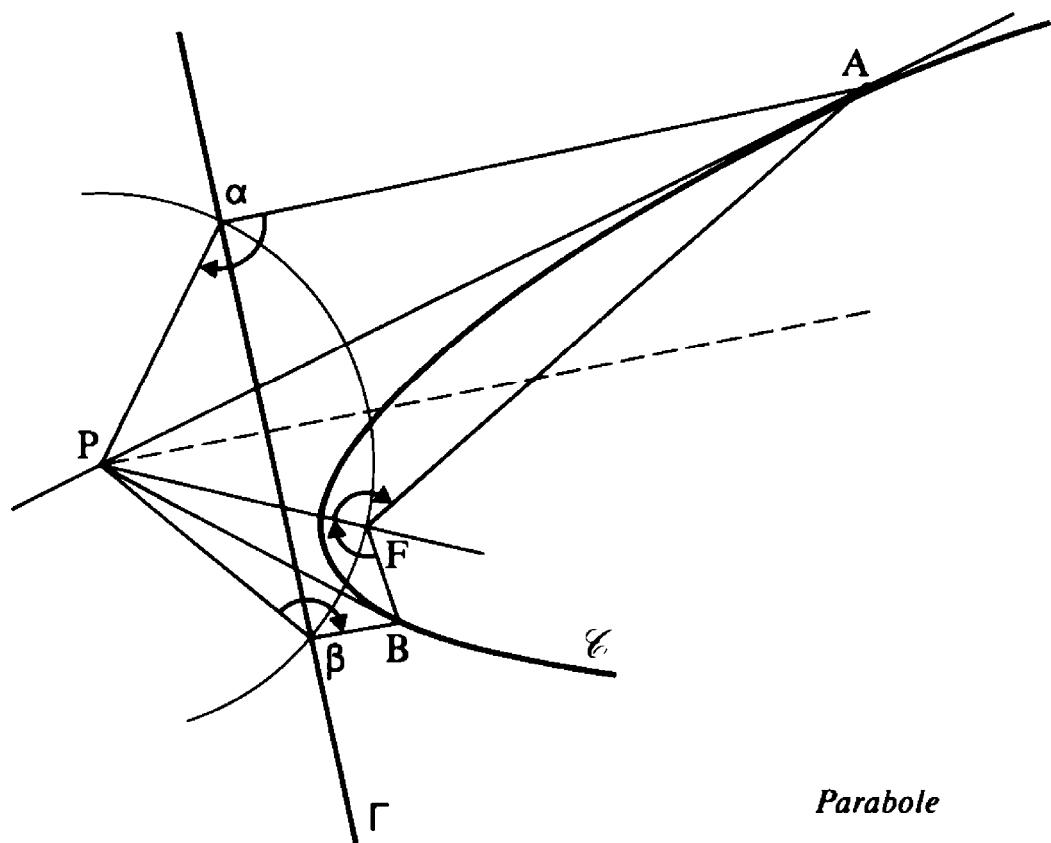
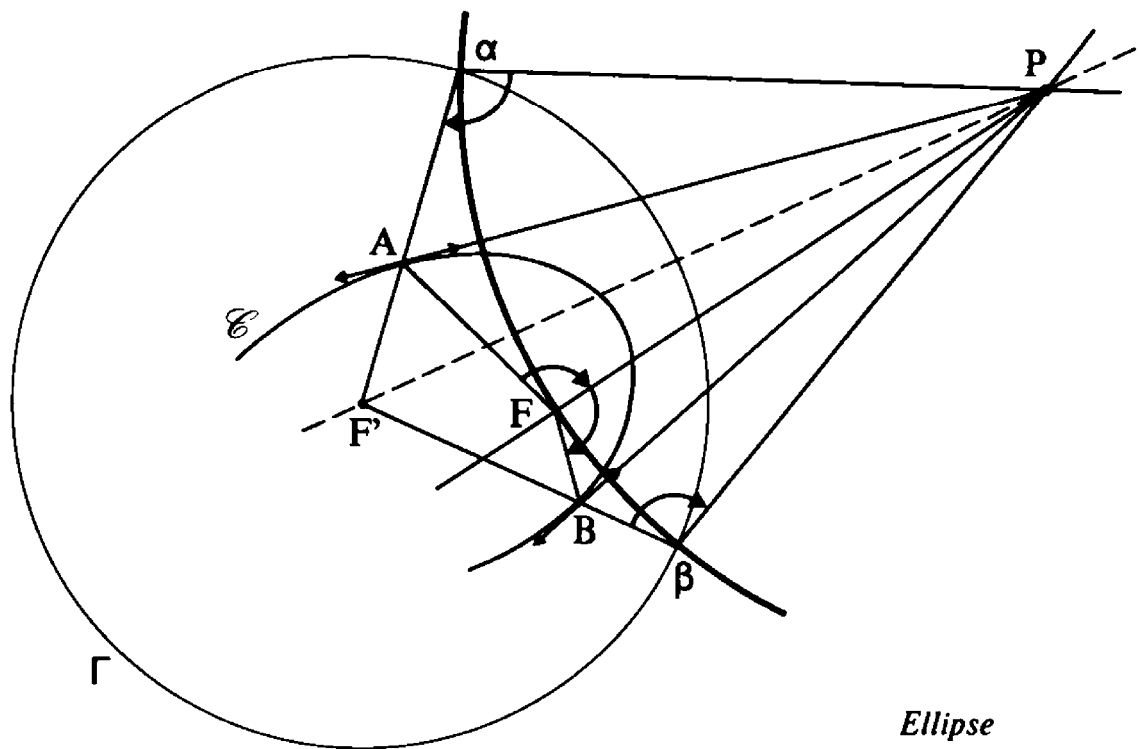
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) \text{ dans le premier des deux cas,} \\ & \frac{1}{2} (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) + \frac{\pi}{2} \text{ dans le second.} \end{aligned}$$

Supposons en effet la conique  $C$  définie par le foyer  $F$  et le cercle directeur (ou la droite directrice dans le cas de la parabole). Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les points de  $\Gamma$  correspondant respectivement aux points  $A$  et  $B$  de  $C$ , de sorte que  $P$  est centre du cercle circonscrit au triangle  $F\alpha B$  :

$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FP}) = -(\overrightarrow{\alpha A}, \overrightarrow{\alpha P})$  puisque  $AP$  est médiatrice de  $[F\alpha]$ ,  
et  $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FB}) = -(\overrightarrow{\beta P}, \overrightarrow{\beta B})$  puisque  $BP$  est médiatrice de  $[F\beta]$ .

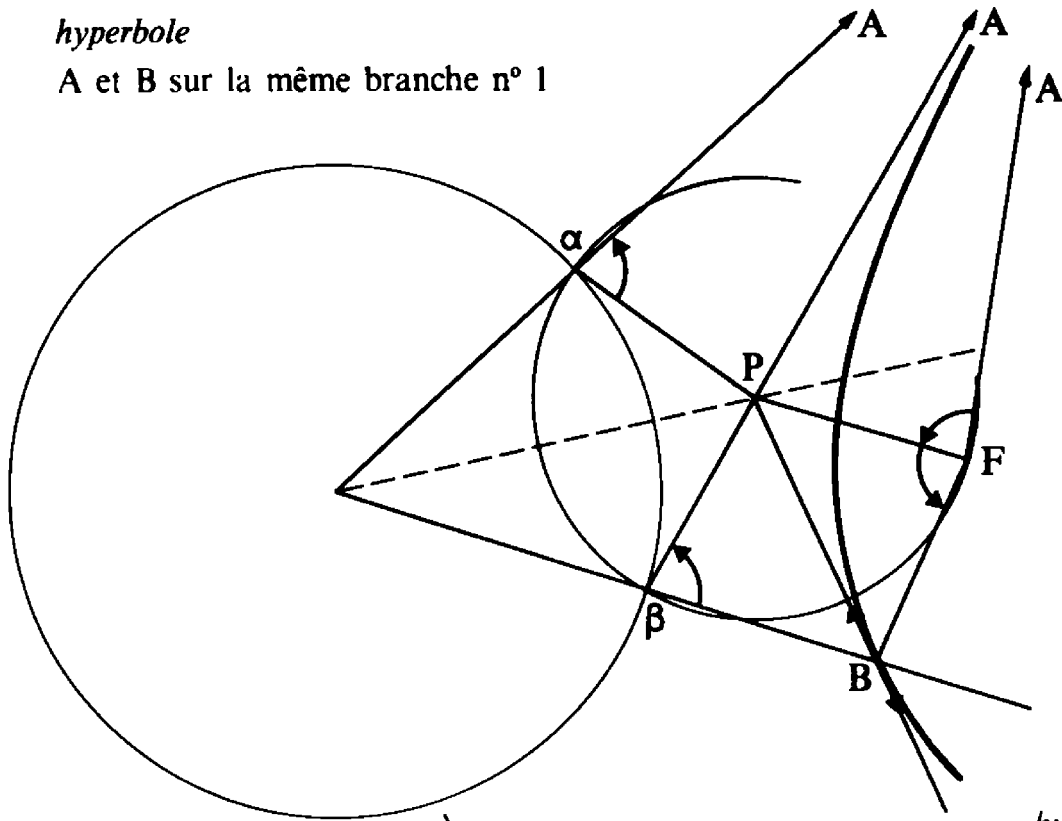
(Les vecteurs  $\overrightarrow{\alpha P}$  et  $\overrightarrow{\beta P}$ ) sont symétriques relativement à la médiatrice de  $[\alpha\beta]$ . Les droites  $\alpha A$  et  $\beta B$  aussi, mais les axes définis par les vecteurs  $\overrightarrow{\alpha A}$  et  $\overrightarrow{\beta B}$  ne sont symétriques que dans le premier des deux cas, tandis que l'orientation de l'un des deux vecteurs doit être changée dans le second cas, d'où

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\alpha A}, \overrightarrow{\alpha P}) &= (\overrightarrow{\beta P}, \overrightarrow{\beta B}) \text{ dans le premier cas,} \\ &= (\overrightarrow{\beta P}, \overrightarrow{\beta B}) + \pi \text{ dans le deuxième.} \end{aligned}$$



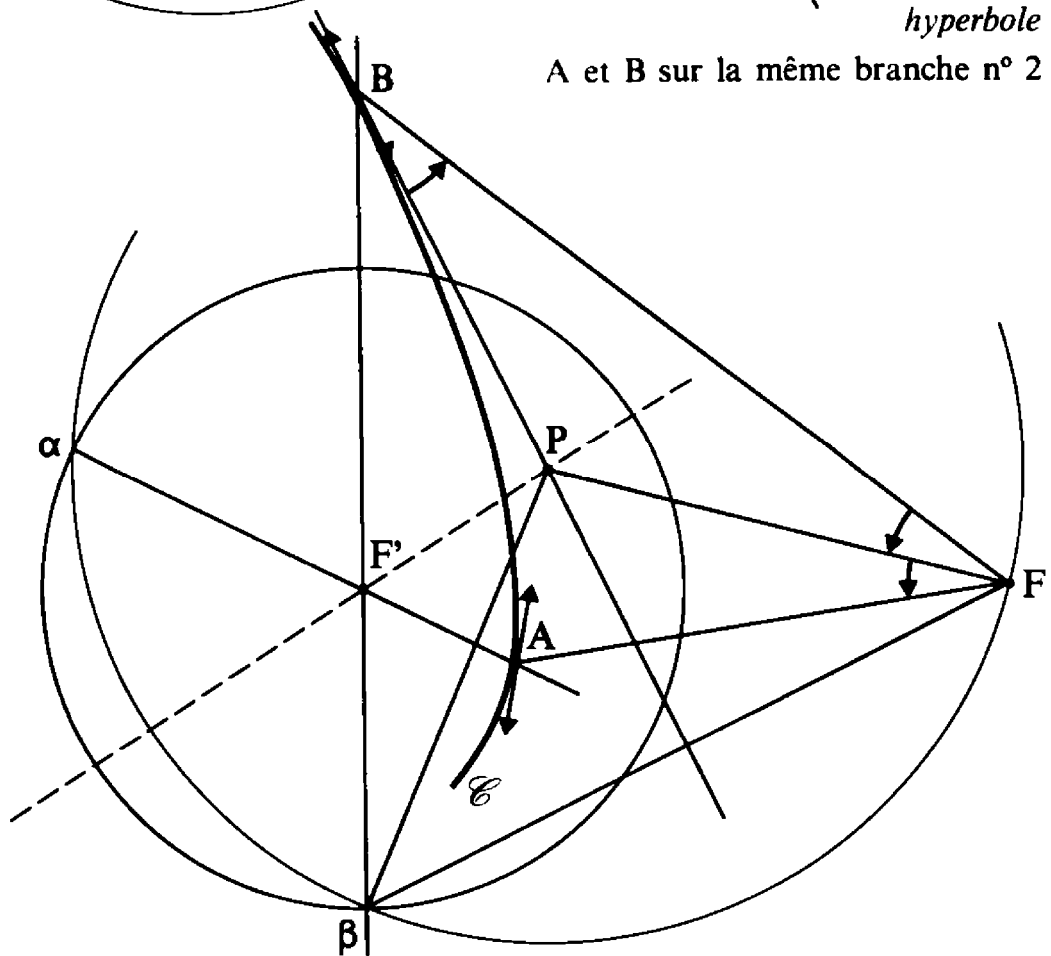
*hyperbole*

A et B sur la même branche n° 1

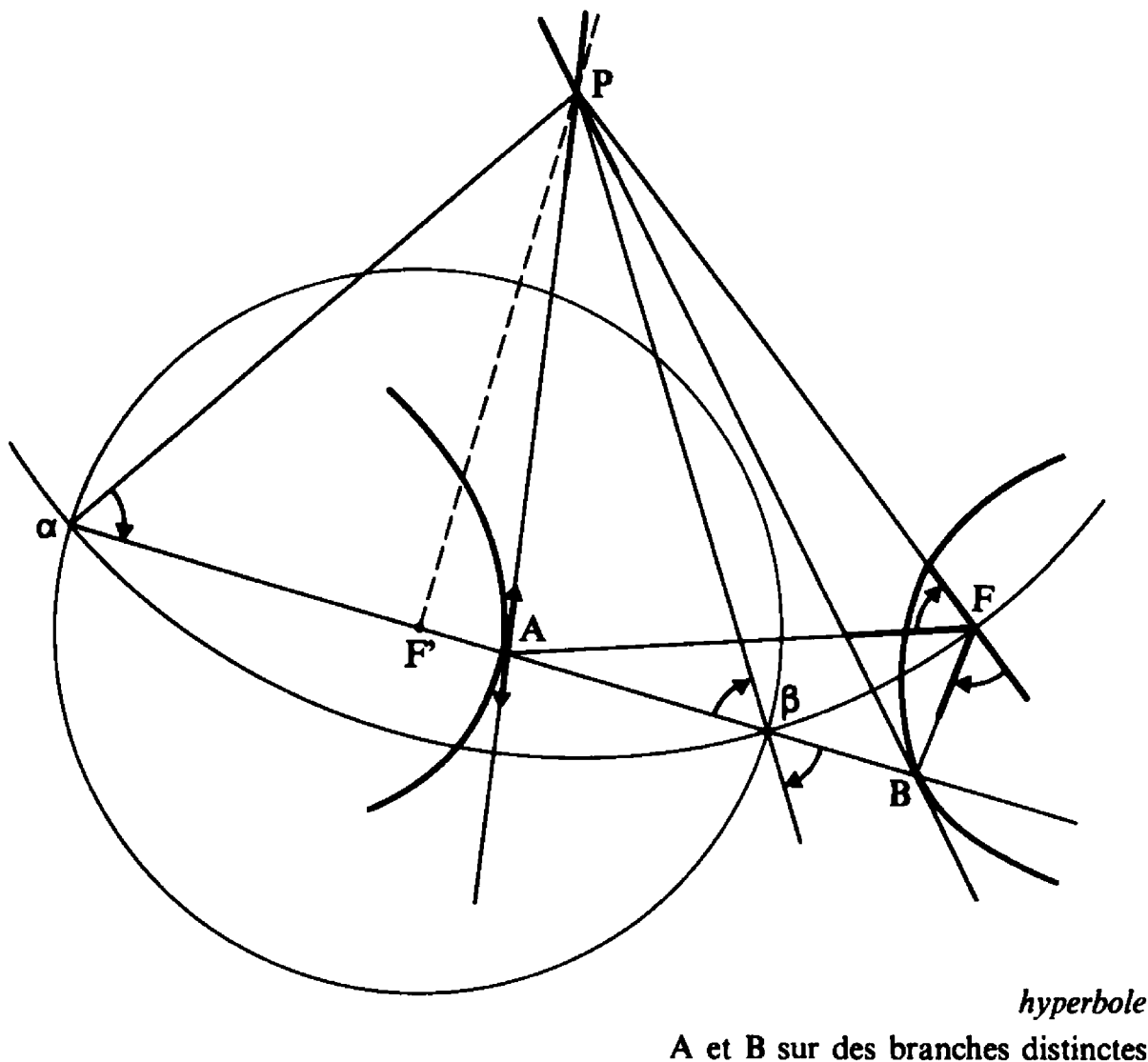


*hyperbole*

A et B sur la même branche n° 2







Si MN est tangente à  $\mathcal{C}$  en X,

$$(FM, FN) = (FM, FX) + (FX, FN)$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FX}) + \delta(X) \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{FX}, \overrightarrow{FB}) + \delta'(X) \cdot \frac{\pi}{2}$$

où  $\delta(X)$  et  $\delta'(X)$  sont des nombres, dépendant de X, égaux à 0 ou 1, et définis ainsi :

$$\delta(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{C} \text{ est une hyperbole et que A et X sont sur des} \\ & \text{branches distinctes,} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

$$\delta'(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{C} \text{ est une hyperbole et que B et X sont sur des} \\ & \text{branches distinctes,} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\delta(X) + \delta'(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{C} \text{ est une hyperbole et que A et B sont sur} \\ & \text{des branches distinctes,} \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Puisque  $\pi/2 + \pi/2 = 0$  dans  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ , la partie (ii) du corollaire en résulte.

**Remarques :**

1) Ce résultat a déjà été vu au chapitre 2, lorsque  $\mathcal{C}$  est un cercle.

2) Il sera revu au chapitre 8 dans le cadre de la génération homographique tangentielle des coniques, mais ne prendra véritablement tout son sens qu'au chapitre 10 lorsque foyers et angles auront été définis en termes de « points cycliques ».

3) L'extension au cas où l'on remplace, dans l'énoncé ci-dessus, une (ou deux) tangente par une (les) asymptote(s) est laissé au lecteur.

## 5 - Exercices sur le chapitre 4

1/ Soit  $\mathcal{C}$  une conique de foyer  $F$  et cercle directeur ou droite directrice  $\Gamma$ . Soit  $\Delta$  une droite du plan, et  $f$  le symétrique de  $F$  relativement à  $\Delta$ .

a) On suppose  $F$  non sur  $\Delta$ . Montrer que les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $\Delta$  sont les centres des cercles  $\gamma$  appartenant au faisceau à points de base  $(F, f)$  et tangents à  $\Gamma$ . En déduire une construction de ces points. Discuter, et étudier en particulier le cas où  $\Delta$  est tangente à  $\mathcal{C}$ .

b) Adapter les considérations qui précèdent au cas où  $F$  est sur  $\Delta$ .

- 2/ Montrer que les tangentes menées d'un point  $P$  à une conique  $\mathcal{C}$  ont mêmes bissectrices
  - (i) que  $(PF, PF')$  si  $\mathcal{C}$  est une conique à centre de foyers  $F$  et  $F'$ ,
  - (ii) que  $(PF, Px)$  si  $\mathcal{C}$  est une parabole de foyer  $F$  et direction asymptotique  $x$ .
- 3/ Etant donnée une parabole  $\mathcal{P}$  de foyer  $F$  et sommet  $A$ , on note  $M$  un point de  $\mathcal{P}$ ,  $m$  sa projection orthogonale sur l'axe  $AF$ ,  $T$  (resp.  $N$ ) le point d'intersection avec cet axe de la tangente (resp. normale) en  $M$  à  $\mathcal{P}$ .
  - a) Montrer que  $\overline{mN} = 2\overline{AF}$  (en déduire le rayon du cercle osculateur à  $\mathcal{P}$  en  $A$ ).
  - b) Montrer que  $A$  est milieu de  $[Tm]$ .
- 4/ Quel est le lieu des centres des cercles tangents à deux « cercles » (c.-à-d. cercle ou droite) donnés  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ ? Discuter en fonction de la nature et des positions relatives de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .
- 5/ Quel est le lieu des centres des cercles faisant avec un « cercle »  $\Gamma$  un angle  $\alpha$  fixé et avec un « cercle »  $\Gamma'$  un angle  $\alpha'$  fixé ( $\alpha, \alpha' \in [0, \pi/2]$ )? Discuter.
- 6/ Quel est le lieu des centres des cercles du plan ayant une puissance donnée par rapport à un point donné, et tangents à un « cercle » donné?
- 7/ Quel est le lieu du foyer des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle  $ABC$ ? (Cf. exercice 2 du chapitre 2.)
- 8/ On se donne deux droites fixes  $\Delta$  et  $\Delta'$ , dans un plan euclidien, se coupant en un point  $O$  et un « solide » mobile dont un point,  $A$ , parcourt  $\Delta$  et un autre,  $A'$ , parcourt  $\Delta'$  (mouvement « plan sur plan »; le mot « solide » signifie que la distance de deux points liés à ce solide, ou « molécules », reste constante, en particulier la distance  $\|AA'\|$ ). On se propose de démontrer que toute molécule  $M$  de ce solide décrit une ellipse de centre  $O$  (éventuellement dégénérée en un segment de droite) (théorème de La Hire).

a) Cas particulier de la « bande de papier » : On suppose  $\Delta$  et  $\Delta'$  orthogonales et  $M$  sur la droite  $AA'$ . Démontrer alors le résultat en utilisant un repère orthonormé porté par  $\Delta$  et  $\Delta'$ , et en faisant intervenir le milieu  $\omega$  de  $[AA']$ .

b) Cas général : Montrer que le cercle  $\gamma$  circonscrit au triangle  $AA'O$  a un rayon constant, et coïncide par conséquent à chaque instant toujours avec les mêmes molécules du solide, de même que son centre  $\omega$ . Si  $M \neq \omega$ , on note  $B$  et  $B'$  les extrémités du diamètre  $M\omega$  de  $\gamma$ . Montrer qu'on peut alors utiliser a) en remplaçant  $AA'$  par  $BB'$ . Conclure directement si  $M = \omega$ .

c) Montrer que la normale en  $M$  au lieu de  $M$  est la droite  $IM$ , où  $I$  est le point d'intersection des perpendiculaires en  $A$  à  $\Delta$  et en  $A'$  à  $\Delta'$ .

d) Montrer que les extrémités de deux demi-diamètres conjugués  $OM_1$  et  $OM_2$  correspondent à deux positions orthogonales de la « bande de papier ».

- 9/ Etant donnée une conique  $\Gamma$  à centre, de foyers  $F$  et  $F'$ , dont on note  $2a$  la longueur du grand axe, montrer que l'angle  $\alpha$  de deux tangentes à  $\Gamma$ , se coupant en un point  $P$ , vérifie la relation ( $M$  et  $M'$  points de contact) :

$$4a^2 = \|PF\|^2 + \|PF'\|^2 - 2 \|PF\| \cdot \|PF'\| \cos \alpha.$$

En déduire le lieu des points  $P$  en lesquels on peut mener à  $\Gamma$  deux tangentes orthogonales.

- 10/ Etant donnée une parabole  $\mathcal{P}$  de foyer  $F$  et directrice  $\Delta$ , on note  $P$  un point du plan extérieur à  $\mathcal{P}$ ,  $P_0$  sa projection orthogonale sur  $\Delta$ , et  $\alpha$  l'angle  $\widehat{MPM'}$  des tangentes  $PM$  et  $PM'$  menées par  $P$  à  $\mathcal{P}$  ( $M$  et  $M'$  désignant les points de contacts), montrer que l'on a la relation

$$\overline{PP_0} = \|PF\| \cdot \cos \alpha$$

(les parallèles à l'axes étant orientées de  $A$  vers  $F$ ).

Quel est le lieu des points d'où l'on peut mener à  $\mathcal{P}$  deux tangentes orthogonales?



## DEUXIÈME PARTIE

# Quelques transformations nouvelles

CHAPITRE V. — Perspectives	99
CHAPITRE VI. — Inversions	157
CHAPITRE VII. — Transformations par polaires réciproques (tppr)	191



## CHAPITRE V

# *Perspectives*

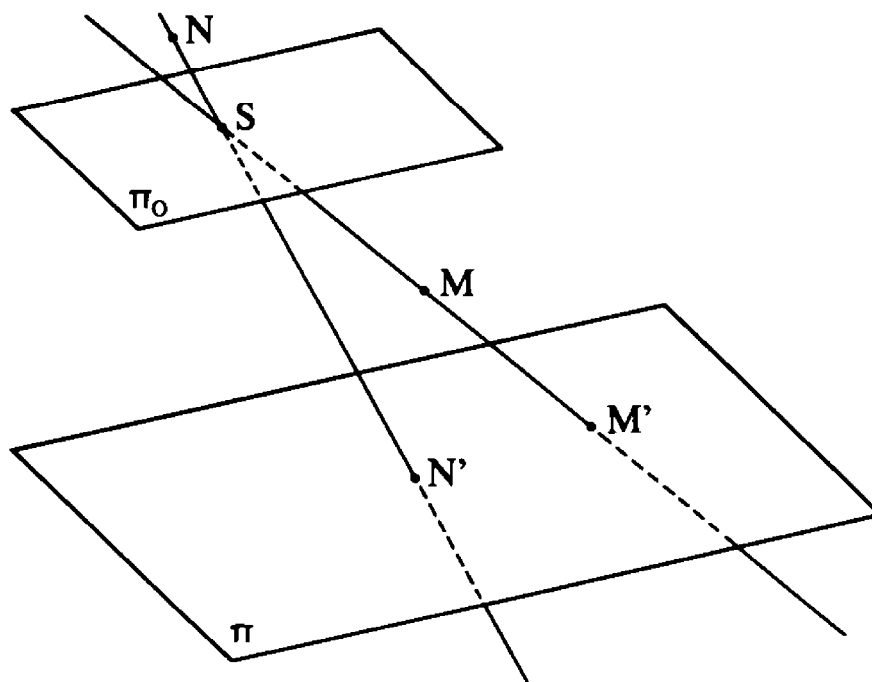
### 1 - Introduction et propriétés élémentaires

Le dessin en perspective, ainsi que les problèmes d'ombre portée, sont probablement à l'origine historique de l'importance des projections ou « perspectives », coniques et cylindriques, que nous allons étudier dans ce chapitre. Ces motivations pratiques sont un peu tombées en désuétude aujourd'hui, et c'est bien dommage! On satisfera parfois davantage le géomètre moderne en présentant les projections coniques (resp. cylindriques) de droite sur droite ou plan sur plan comme les prototypes des transformations projectives (resp. affines). Mais c'est là une discussion d'intérêt tout à fait secondaire, puisque les géométries projective et affine sont elles mêmes issues des problèmes de dessin auxquels on a commencé à répondre dès le  $xv^e$  siècle.

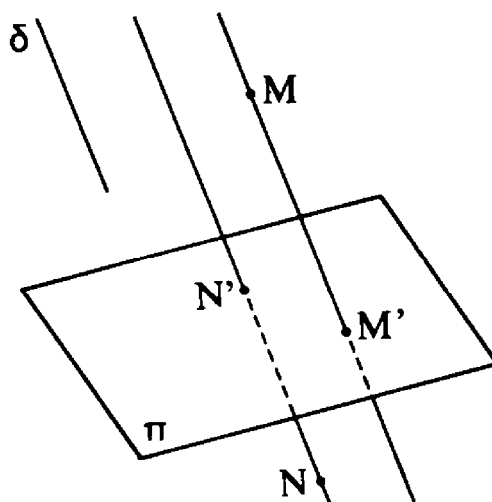
Etant donné un espace affine  $E$  de dimension 3, un point  $S$  de  $E$ , un plan  $\Pi$  de  $E$  ne contenant pas  $S$  et le plan  $\Pi_0$  parallèle à  $\Pi$  passant par  $S$ , on appelle *projection conique* sur  $\Pi$ , de sommet  $S$ , (ou « perspective conique » de point de vue  $S$ ) l'application de  $E - \Pi_0$  sur  $\Pi$  qui, à tout point  $M$  de  $E$  non situé dans  $\Pi_0$ , associe le point d'intersection  $M'$  de  $\Pi$  avec la droite  $SM$ . [Bien entendu, pour que deux points  $M_1$  et  $M_2$  aient même image par cette projection, il faut et il suffit qu'ils soient alignés avec  $S$ .]

Etant donné un espace affine  $E$  de dimension 3, une direction  $\delta$  de droite dans  $E$ , et un plan  $\Pi$  de  $E$  non parallèle à  $\delta$ , on appelle *projection cylindrique* sur  $\Pi$  parallèlement à  $\delta$  (on dit aussi





« perspective cavalière » de direction  $\delta$ ) l'application de  $E$  sur  $\Pi$  qui, à tout point  $M$  de  $E$ , associe le point d'intersection  $M'$  de  $\Pi$  avec la parallèle à  $\delta$  passant par  $M$ . [Deux points  $M_1$  et  $M_2$  de  $E$  ont même image lorsque la droite qui les joint est parallèle à  $\delta$ .]

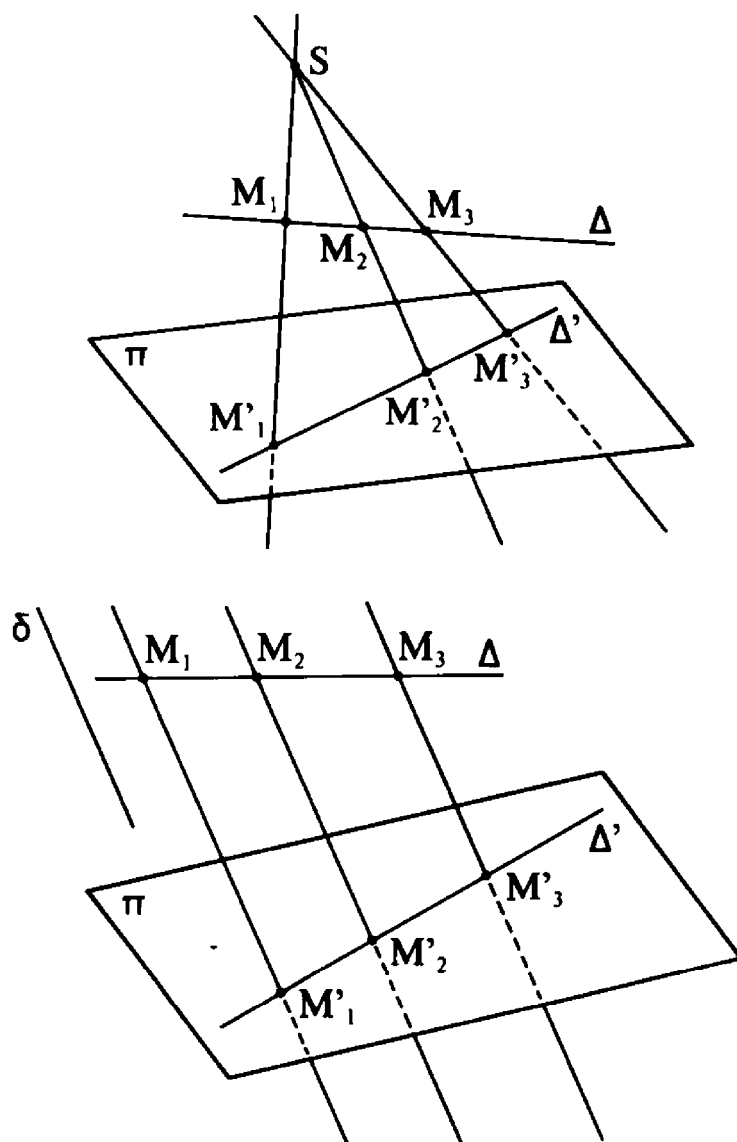


**Proposition 5-1** (préservation de l'alignement par perspective)

*Soient  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  trois points de  $E - \Pi_0$  (resp.  $E$ ), alignés sur une droite  $\Delta$  ne passant pas par  $S$  (resp. non parallèle à  $\delta$ ).*

*Les projections coniques de sommet  $S$  (resp. cylindriques parallèlement à  $\delta$ ) des trois points  $M_1, M_2, M_3$  sont alors alignées sur une droite  $\Delta'$  de  $\Pi$ .*

[La droite  $\Delta'$  est appelée la projection de  $\Delta$ .]

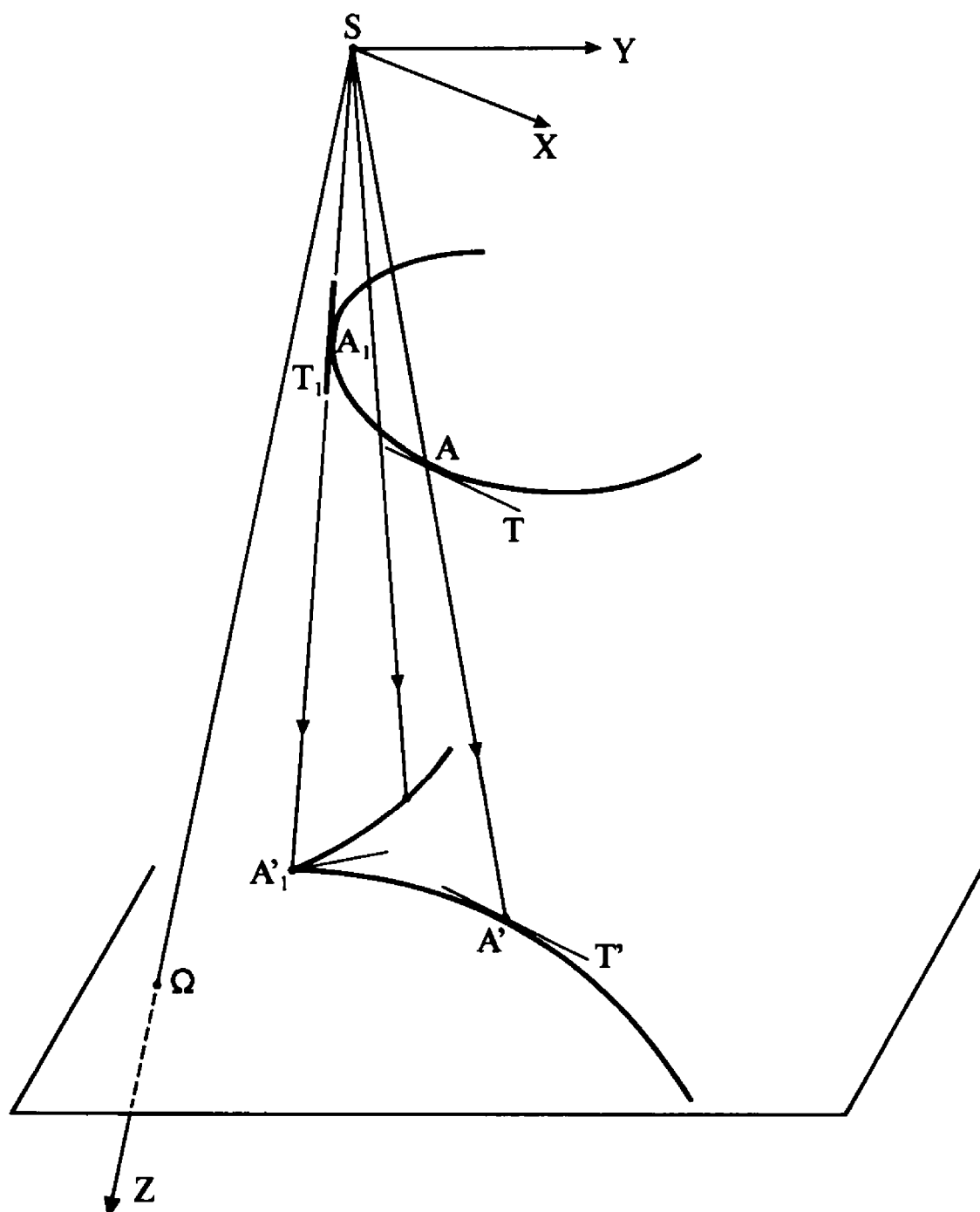


Le plan passant par  $S$  et  $\Delta$  (resp. passant par  $\Delta$  et parallèle à  $\delta$ ) coupe en effet  $\Pi$  selon une droite  $\Delta'$ , et les projections  $M'_i$  des points  $M_i$  ne peuvent qu'être sur  $\Delta'$ .

Soit maintenant  $\gamma$  une courbe différentiable de  $E - \Pi_0$  (resp. de  $E$ ),  $A$  un point de  $\gamma$ , et  $T$  la tangente (droite affine) à  $\gamma$  en  $A$ .

**Proposition 5-2 (préservation des contacts par perspective)**

- (i) *La projection conique (resp. cylindrique) de  $\gamma$  est une courbe  $\gamma'$  dans  $\Pi$ , différentiable.*
- (ii) *Si  $T$  ne passe pas par  $S$  (resp. n'est pas parallèle à  $\delta$ ), la projection  $T'$  de  $T$  est la tangente à  $\gamma'$  en le point  $A'$  projection de  $A$ .*



Notons en effet  $(O, X, Y, Z)$  un repère affine de  $E$  par rapport auquel :

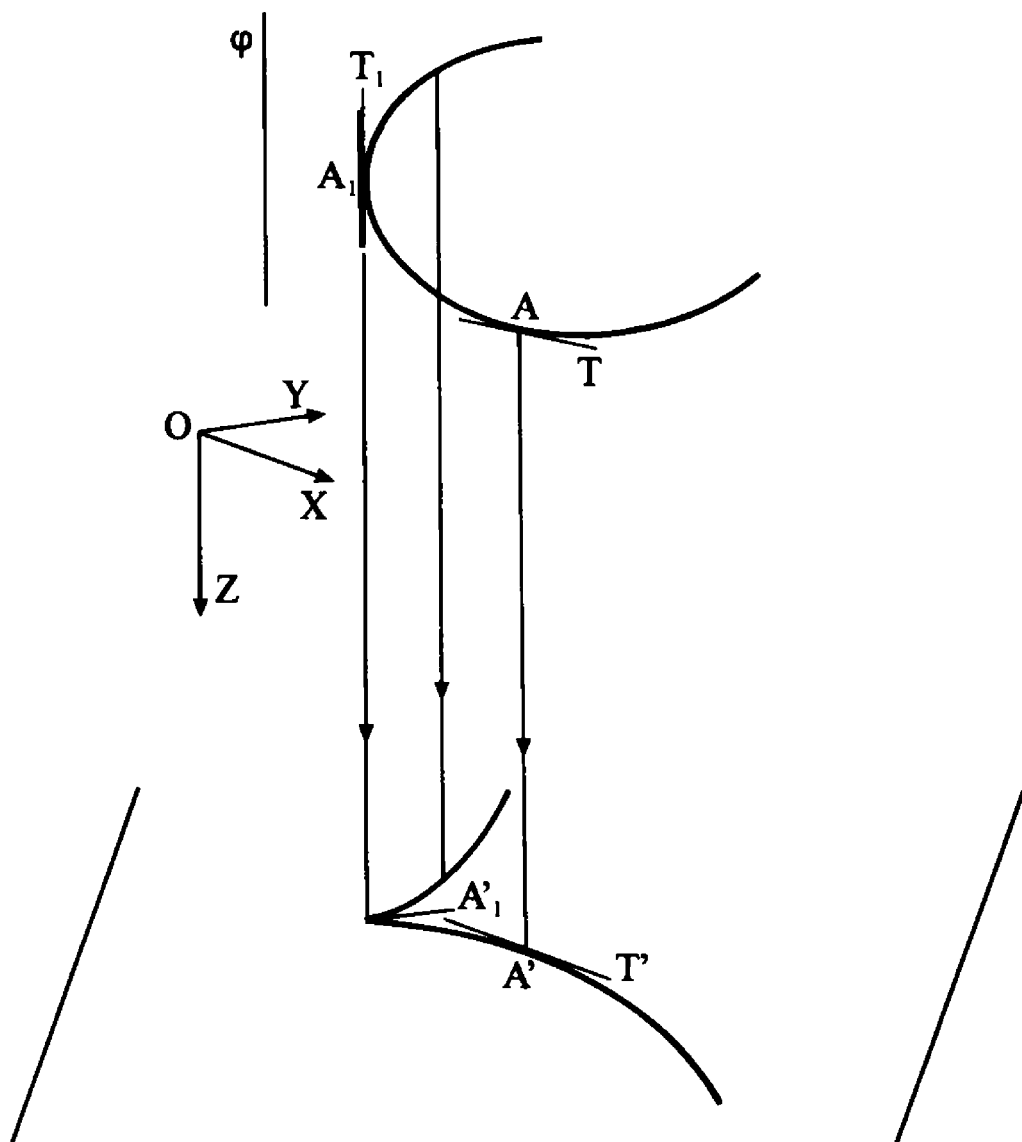
1)  $\Pi$  admet l'équation  $Z=1$  (en particulier  $(x = X|_{\Pi}, y = Y|_{\Pi})$ ) constitue un système de coordonnées affines sur  $\Pi$ .

2)  $S=0$  (resp.  $OZ$  est parallèle à  $\delta$ ).

La projection est alors représentée par l'application

$$(X, Y, Z) \longrightarrow (x = X/Z, y = Y/Z)$$

(resp.  $(X, Y, Z) \longrightarrow (x = X, y = Y)$ ), qui est indéfiniment différentiable. La proposition 5-2 en résulte.

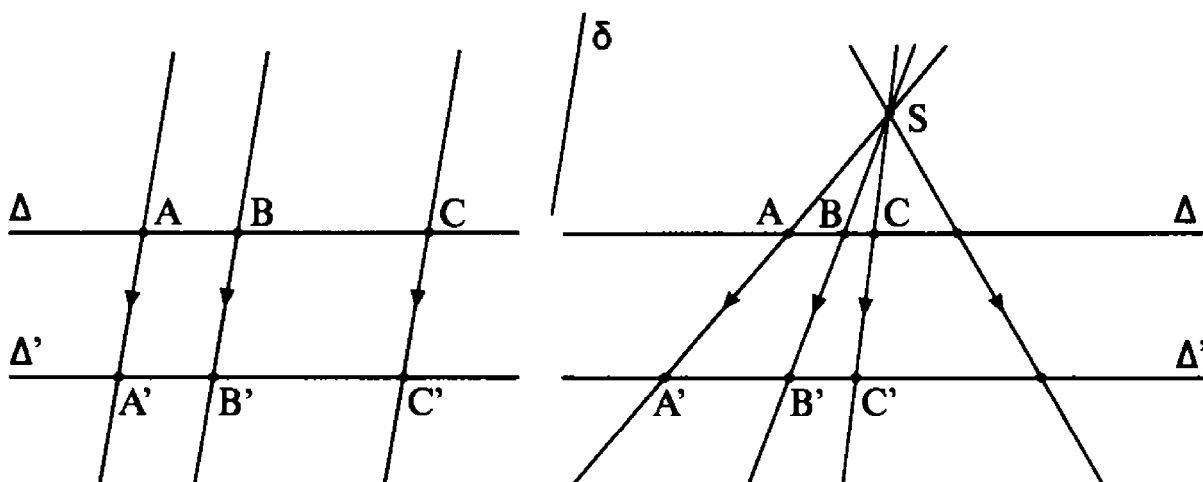


**Remarque :** Si  $T$  passe par  $S$  (ou est parallèle à  $\delta$ ), le point  $A'$  de  $\gamma'$  sera généralement un point singulier : le plan osculateur de  $\gamma$  en  $A$ , s'il existe, passera par  $S$  (resp. sera parallèle à  $\delta$ ) et la projection de ce plan sur  $\Pi$  pourra être une tangente de rebroussement ou d'inflexion de  $\gamma'$  en  $A'$ .

## 2 - Le birapport (resp. le rapport), invariant des projections coniques (resp. cylindriques)

Soit  $\Delta$  une droite de  $E$ , ne passant pas par  $S$  (resp. non parallèle à  $\delta$ ), et  $\Delta'$  sa projection sur  $\Pi$ .

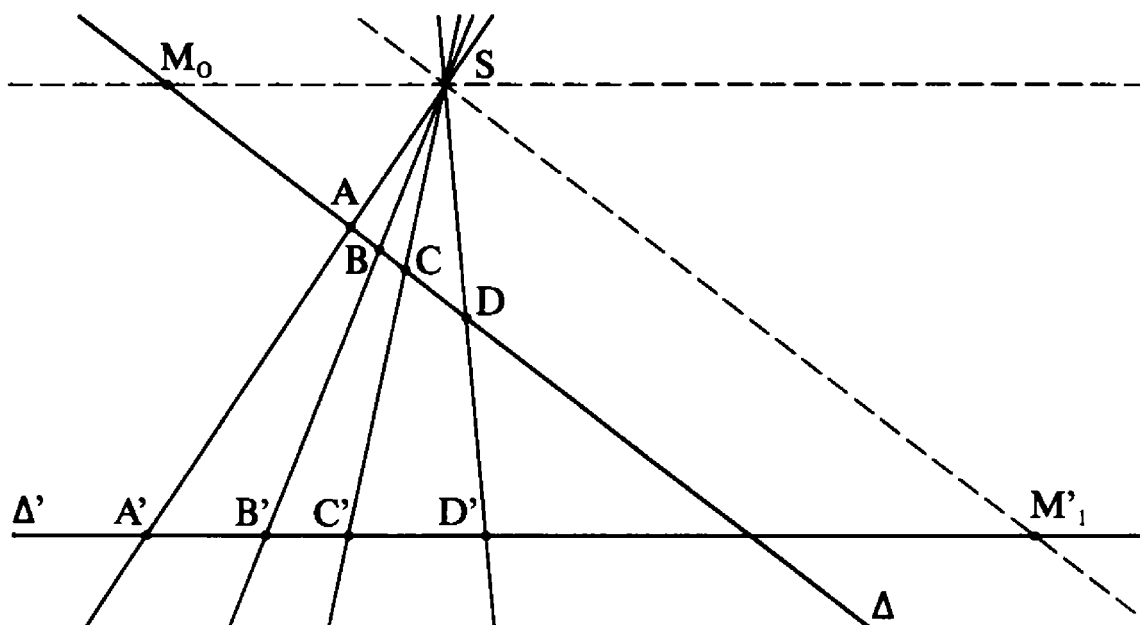
Si  $\Delta$  est parallèle à  $\Pi$ , la restriction à  $\Delta$  de la projection conique de sommet  $S$  (resp. cylindrique parallèlement à  $\delta$ ) est une homothétie de centre  $S$  (resp. une translation parallèle à  $\delta$ ) de  $\Delta$  sur  $\Delta'$ .



Dans ce cas, le rapport  $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$  de trois points distincts sur  $\Delta$  est évidemment préservé par projection :  $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ .

Supposons maintenant la droite  $\Delta$  non parallèle à  $\Pi$ . Dans le cas d'une projection conique  $E - \Pi_0 \longrightarrow \Pi$ , notons  $M_0$  le point d'intersection de  $\Delta$  avec  $\Pi_0$ , et  $M_1$  le point d'intersection avec  $\Pi$

de la parallèle à  $\Delta$  passant par  $S$ . La projection conique (resp. cylindrique) est alors une bijection de  $\Delta - \{M_0\}$  sur  $\Delta' - \{M'_1\}$  (resp. de  $\Delta$  sur  $\Delta'$ ).



Etant donnés trois points distincts  $A, B, C$  alignés sur une droite  $\Delta$ , on appellera *rapport* de ces trois points, pris dans cet ordre, et l'on notera  $(A, B, C)$  le nombre

$$(A, B, C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

(non nul puisque  $A$  et  $C$  sont distincts, fini puisque  $B$  et  $C$  sont distincts, différent de 1 puisque  $A$  et  $B$  sont distincts).

Etant donnés quatre points distincts  $A, B, C, D$  alignés sur une droite  $\Delta$ , on appellera *birapport* de ces quatre points, pris dans cet ordre, et l'on notera  $(A, B, C, D)$  le nombre

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) &= \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} \\ &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \end{aligned}$$

(non nul puisque  $(A, B, C)$  est non nul et  $(A, B, D)$  fini, fini puisque  $(A, B, D)$  est non nul et  $(A, B, C)$  fini, et différent de 1 puisque  $C$  et  $D$  sont distincts).

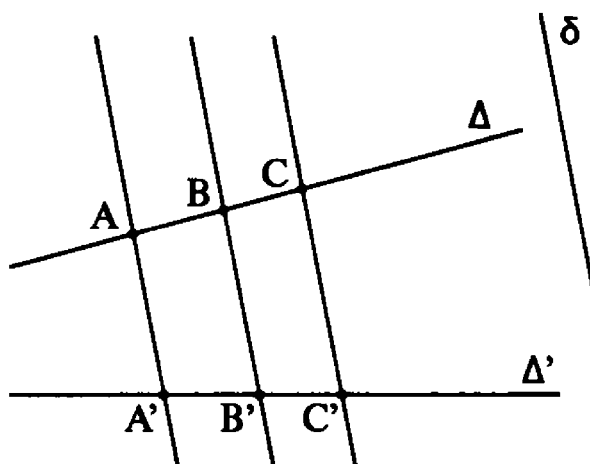
**Remarques :**

- (i)  $(B, A, C, D) = \frac{1}{(A, B, C, D)}$  et  $(A, B, C) = \frac{1}{(B, A, C)}$ .
- (ii)  $(C, D, A, B) = (A, B, C, D)$ .
- (iii)  $(A, B, C) = -1$  signifie que  $C$  est milieu du segment  $[AB]$ .
- (iv)  $(A, B, C, D) = -1$  signifie que la division  $A, B, C, D$  est harmonique.

**Proposition 5-3** (préservation des rapports par perspective cavalière, et par similitude)

- (i) *Toute similitude (en particulier toute isométrie et toute homothétie) préserve les rapports (donc a fortiori les birapports).*
- (ii) *Toute projection cylindrique préserve les rapports (donc a fortiori les birapports).*

La partie (i) de la proposition résulte immédiatement des définitions. Quant à la partie (ii), elle ne fait que paraphraser le théorème de Thalès.



Il est bien évident, par contre, qu'une projection conique n'a plus aucune chance, en général, de conserver les rapports (à moins que  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne soient parallèles). Nous allons voir qu'elle conserve cependant les birapports. Reprenons, plus précisément, les notations de la figure 5-6. Notons  $A, B, C, D$  quatre points distincts de  $\Delta - \{M_0\}$ , et  $A', B', C', D'$  leur image par projection conique sur  $\Delta'$ .

**Théorème 5-4 (préservation des birapports par perspective)**

- (i)  $(A', B', C', D') = (A, B, C, D)$ ,
- (ii)  $(A', B', C') = (A, B, C, M_0)$ ,
- (iii)  $(A', B', C', M_1) = (A, B, C)$ .

Tout revient à démontrer la formule (ii).

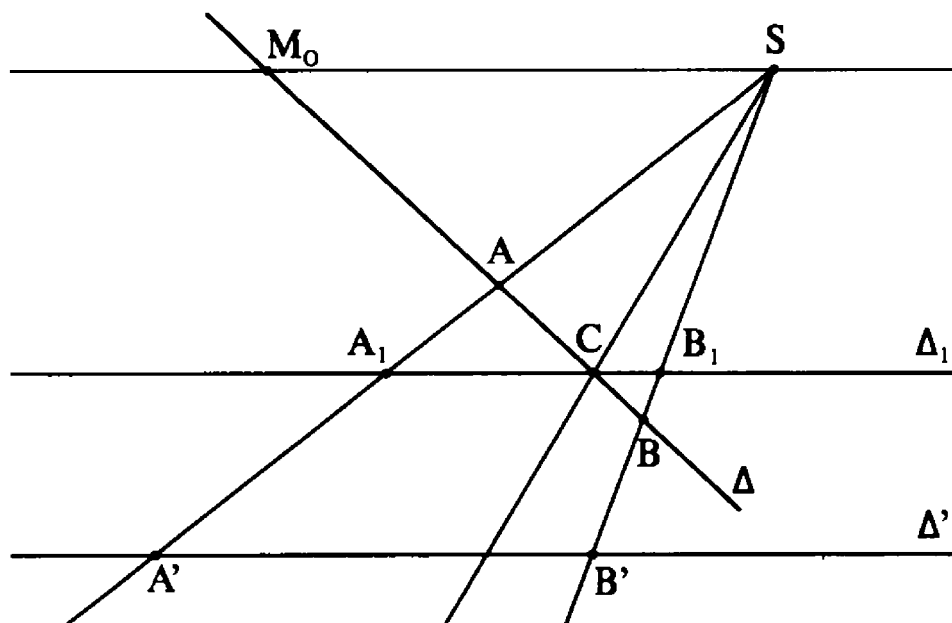
La formule (iii) est en effet exactement la même, après permutation des rôles de  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

Quant à la formule (i), elle s'obtient ainsi à partir de (ii) :

$$\begin{aligned}
 (A', B', C', D') &= \frac{(A', B', C')}{(A', B', D')} \quad \text{par définition du birapport,} \\
 &= \frac{(A, B, C, M_0)}{(A, B, D, M_0)} \quad \text{d'après (i),} \\
 &= \frac{(A, B, C)}{(A, B, M_0)} \cdot \frac{(A, B, D)}{(A, B, M_0)}, \\
 &= \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}, \\
 &= (A, B, C, D).
 \end{aligned}$$

Pour démontrer la formule (i), on mène par  $C$  la parallèle  $\Delta_1$  à  $\Delta'$ , coupant les droites  $SAA'$  en  $A_1$  et  $SBB'$  en  $B_1$ . En vertu du théorème de Thalès.





$(A', B', C') = (A_1, B_1, C)$  (homothétie de centre S),

$\frac{\overline{A_1 C}}{\overline{S M_0}} = \frac{\overline{A C}}{\overline{A M_0}}$  (homothétie de centre A),

$\frac{\overline{B_1 C}}{\overline{S M_0}} = \frac{\overline{B C}}{\overline{B M_0}}$  (homothétie de centre B).

On en déduit :

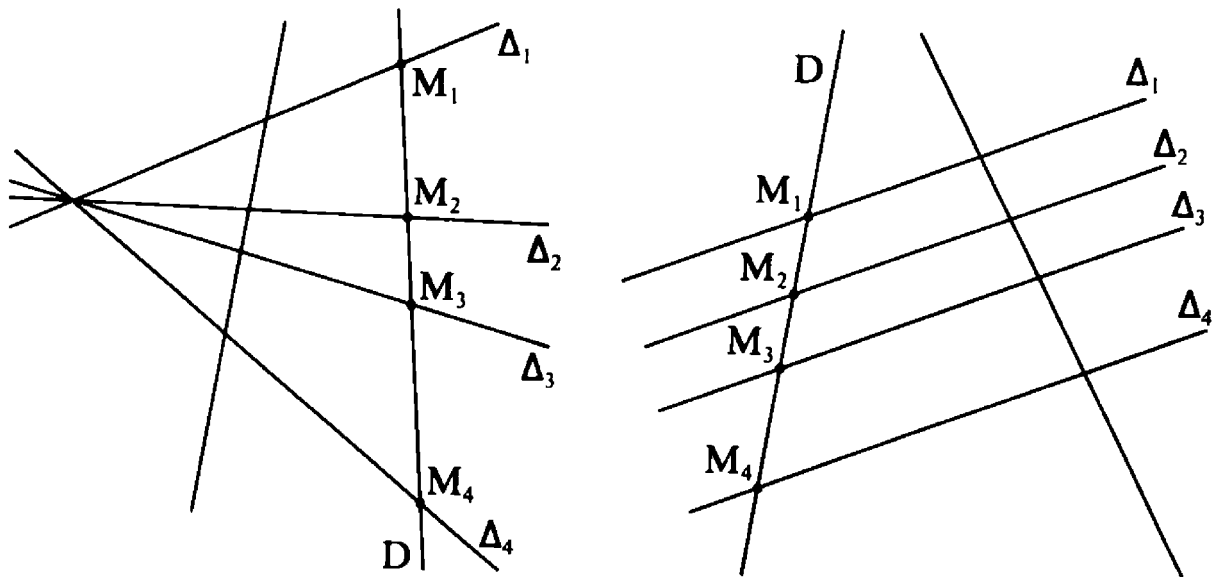
$$\frac{\overline{A' C'}}{\overline{A' B'}} = \frac{\overline{A_1 C}}{\overline{B_1 C}} = \frac{\overline{A C}}{\overline{A M_0}} : \frac{\overline{B C}}{\overline{B M_0}} = (A, B, C, M_0) \quad \text{c. q. f. d.}$$

### Corollaire 1

- (i) Si  $A, B, C, M_0$  est une division harmonique,  $C'$  est le milieu de  $[A'B']$ ,
- (ii) Si  $C$  est le milieu de  $[AB]$ , la division  $A', B', C', M'_1$  est harmonique.
- (iii) Si  $ABCD$  est une division harmonique,  $A', B', C', D'$  l'est aussi.

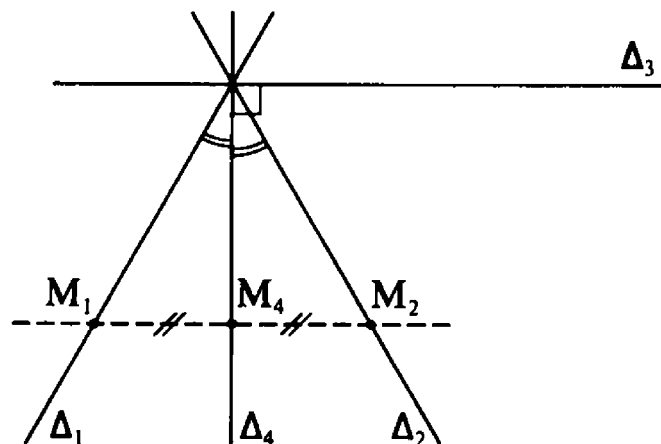
*Birapport de quatre droites coplanaires, concourantes ou parallèles.* — On choisit une droite  $D$  du plan coupant chaque droite  $\Delta_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) en un point  $M_i$  (on suppose que  $D$  ne passe pas par

le point de concours dans le cas de quatre droites  $\Delta_i$  concourantes, ou que  $D$  n'est pas parallèle aux droites  $\Delta_i$  quand celles-ci sont parallèles entre elles). Le birapport  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  ne dépend pas du choix de  $D$ , d'après le théorème 4-4 lorsque les droites  $\Delta_i$  sont concourantes, et d'après le théorème de Thalès lorsqu'elles sont parallèles. C'est ce birapport qu'on appellera birapport des quatre droites, et qu'on notera  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$ . Si ce birapport est égal à  $-1$ , on dira que les quatre droites  $\Delta_i$  constituent un *faisceau harmonique*.



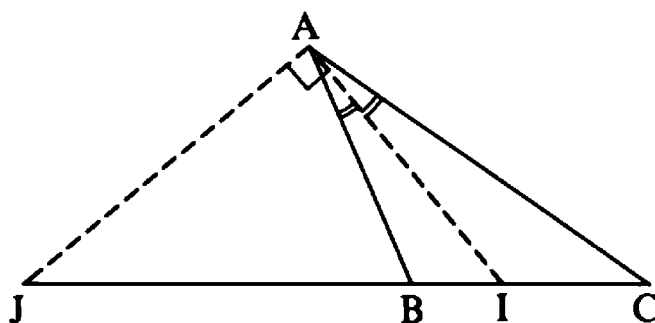
### Exemples :

1) Si  $\Delta_3$  et  $\Delta_4$  sont les bissectrices de deux droites concourantes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , le faisceau  $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$  est harmonique.



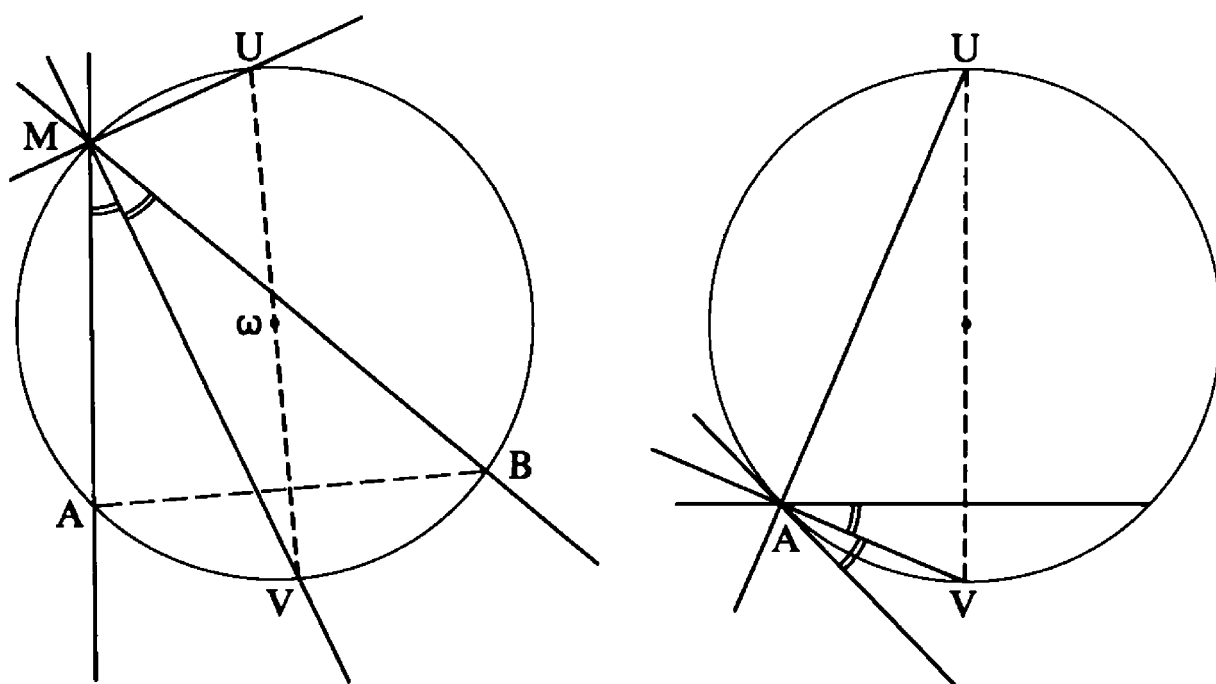
[En effet, si  $D$  est une parallèle à  $\Delta_3$  coupant  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et  $\Delta_4$  en  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_4$  respectivement, le rapport  $(M_1, M_2, M_3)$  est égal à  $-1$ ; la partie (ii) du corollaire 1 permet de conclure.]

2) Supposons que les bissectrices intérieure et extérieure en  $A$ , dans un triangle  $ABC$ , coupent  $BC$  respectivement en  $I$  et  $J$  : la division  $BCIJ$  est alors harmonique.



[Le faisceau  $AB, AC, AI, AJ$  est en effet harmonique d'après ce qui précède.]

3) Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts d'un cercle,  $U$  et  $V$  les extrémités du diamètre de ce cercle porté par la médiatrice de  $[AB]$ . Pour tout point  $M$  du cercle, le faisceau  $MA, MB, MU, MV$  est alors harmonique (si  $M$  est en  $A$  ou en  $B$ ,  $MA$  ou  $MB$  désigne la tangente au cercle en  $A$  ou  $B$ ).

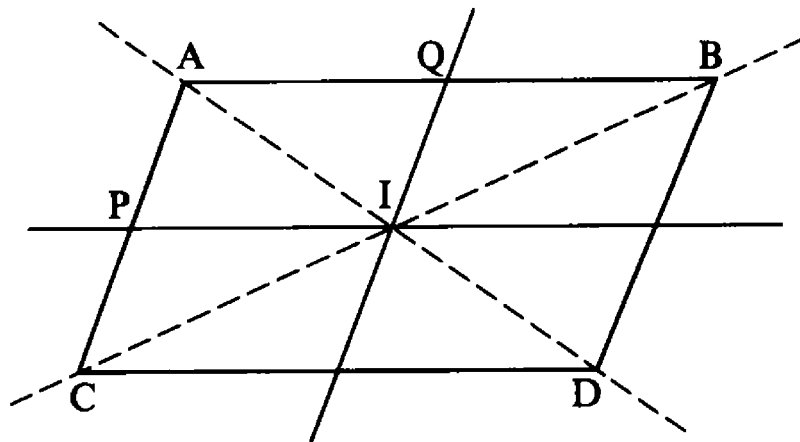


En effet, si  $\omega$  désigne le centre du cercle,

$$(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}) = (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega U}) + (\overrightarrow{\omega U}, \overrightarrow{\omega B}) = 2(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega U})$$

et, de même,  $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}) = 2(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega V})$  : le théorème de l'arc capable permet alors de conclure que MU et MV sont les bissectrices de (MA, MB).

4) Pour tout parallélogramme, les médianes forment avec les diagonales un faisceau harmonique :  $(IA, IB, IP, IQ) = -1$ .



C'est évident, puisque Q est le milieu de AB et que IP est parallèle à AB.

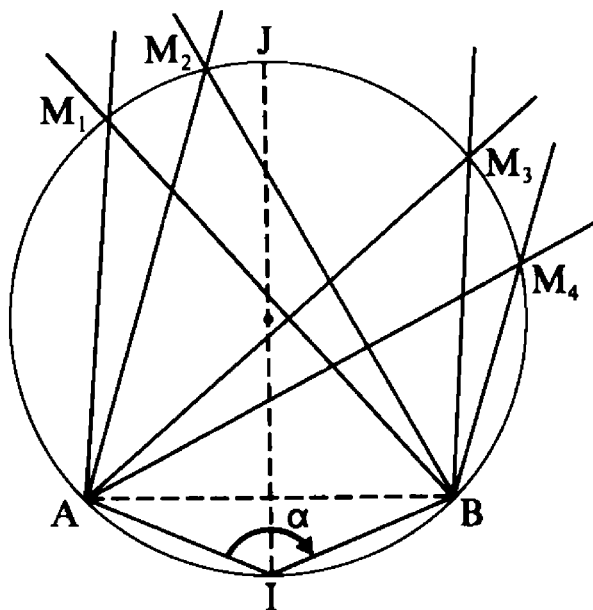
**Remarque sur les structures affines.** — Nous avons défini le birapport  $(A, B, C, D)$  de quatre points comme le quotient  $\frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}$  de deux rapports. Cela suppose que l'on a su définir le rapport  $(A, B, C)$  de trois points alignés, donc que l'espace a été muni d'une « structure affine ». On verra plus tard (chapitre 9) qu'une structure plus grossière que la structure affine, celle « d'espace projectif », permettra de définir directement les birapports, celle de rapport n'étant pas définie.

Toute transformation affine conserve les rapports, donc les birapports : ceci généralise le cas des similitudes et des projections cylindriques envisagé à la proposition 5-3. On appellera plus tard « transformation projective » toute transformation préservant les birapports : il y en a bien d'autres que les seules transformations

affines, par exemple les projections coniques de plan sur plan; cependant, seules les transformations affines conservent aussi les rapports.

**Birapport de quatre points cocycliques.** — Soient  $M_1M_2M_3M_4$  quatre points distincts sur un cercle, et  $A$  un cinquième point du cercle : le birapport  $(AM_1, AM_2, AM_3, AM_4)$  des quatre droites  $AM_i$  ne dépend *pas* du choix de ce cinquième point  $A$ . En effet, si  $B$  est un sixième point du cercle, notons  $I$  et  $J$  les extrémités du diamètre porté par la médiatrice de  $[AB]$ , et posons :

$$\alpha = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}), \quad \beta = (\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JB}).$$



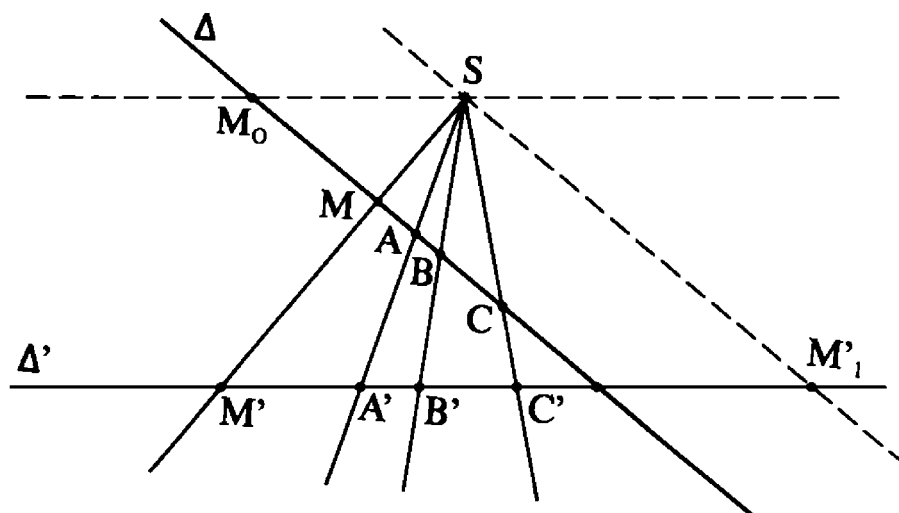
D'après le théorème de l'arc capable, l'image d'une droite  $AM_i$  par la rotation de centre  $I$  et d'angle  $\alpha$  est la droite  $BM_i$ . Puisqu'une rotation est une isométrie, elle conserve évidemment les birapports de points alignés, donc aussi les birapports de droites concourantes; on en déduit :

$$(AM_1, AM_2, AM_3, AM_4) = (BM_1, BM_2, BM_3, BM_4).$$

C'est ce nombre, indépendant de  $A$ , qu'on appelle *birapport des quatre points cocycliques*  $M_i$ , et que l'on note  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ .

### 3 - Points à l'infini

Reprenons la figure du théorème 5-4. Notons  $A, B$  et  $C$  trois points distincts fixés sur  $\Delta - \{M_0\}$  et  $M$  un quatrième point de  $\Delta - \{M_0\}$ . Lorsque  $M$  tend vers  $M_0$  sur  $\Delta$ , la projection conique  $M'$  de  $M$  s'éloigne à l'infini sur  $\Delta'$ ,  $(A, B, C, M)$  tend vers  $(A, B, C, M_0)$ , tandis que  $(A', B', C', M')$  tend vers  $(A', B', C')$ . De même, si  $M$  s'éloigne à l'infini sur  $\Delta$  (d'un côté ou de l'autre, peu importe d'ailleurs),  $M'$  tend vers  $M'_1$ ,  $(A, B, C, M)$  tend vers  $(A, B, C)$  tandis que  $(A', B', C', M')$  tend vers  $(A', B', C', M'_1)$ .



Ceci suggère de compléter formellement les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  en leur adjoignant un « point à l'infini » à chacune, noté  $\infty_\Delta$  (resp.  $\infty_{\Delta'}$ ), et de prolonger la projection conique  $\Delta - \{M_0\} \rightarrow \Delta' - \{M'_1\}$  en une bijection  $\Delta \cup \{\infty_\Delta\} \rightarrow \Delta' \cup \{\infty_{\Delta'}\}$  envoyant  $M_0$  sur  $\infty_{\Delta'}$  et  $\infty_\Delta$  sur  $M'_1$ .

De façon générale, pour toute droite  $\mathbb{D}$  ou  $E$ , notons  $\widehat{\mathbb{D}}$  la droite  $\mathbb{D}$  complétée par un « point à l'infini »  $\infty_{\mathbb{D}}$

$$\widehat{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \{\infty_{\mathbb{D}}\}$$

et prolongeons la définition du birapport en posant :

$$(A, B, C, \infty_{\mathbb{D}}) = (C, \infty_{\mathbb{D}}, A, B) = (A, B, C),$$

$$(\infty_{\mathbb{D}}, C, A, B) = (A, B, \infty_{\mathbb{D}}, C) = \frac{1}{(A, B, C)};$$

[formules obtenues par passage à la limite de  $(A, B, C, M)$ ,  $(C, M, A, B)$ ,  $(M, C, A, B)$  et  $(A, B, M, C)$  lorsque  $M$  s'éloigne à l'infini].

*Les formules (ii) et (iii) du théorème 5-4 peuvent alors s'interpréter comme étendant la formule (i) au cas où le quatrième point  $D$  (ou  $D'$ ) est à l'infini.*

L'image  $M'$  de  $M$  est l'intersection de  $SM$  avec  $\Delta'$  pour  $M \neq M_0$ . Pour  $M = M_0$ , on peut encore dire la même chose ( $M' = \infty_{\Delta'}$ ) à condition de considérer que deux droites parallèles,  $SM_0$  et  $\Delta'$  en l'occurrence, ont même point à l'infini.

De façon générale, on dira que deux droites  $D_1$  et  $D_2$  de  $E$  ont même point à l'infini si elles sont parallèles : notant  $\delta(E)$  l'ensemble des directions de droites de  $E$  (ou classes d'équivalence pour le parallélisme), on appellera désormais point à l'infini de  $D$ , et l'on notera  $\infty_D$ , la direction de  $D$  :

$$\infty_D \in \delta(E).$$

Si  $\Pi$  est un plan affine dans  $E$ , on notera  $\delta(\Pi)$  ( $\delta(\Pi) \subset \delta(E)$ ) l'ensemble des directions de droite dans  $E$  qui sont parallèles à  $\Pi$ .

On appellera *complété projectif* de  $E$  (resp. de  $\Pi$ ) la réunion disjointe

$$\widehat{E} = E \amalg \delta(E) \text{ (resp. } \widehat{\Pi} = \Pi \amalg \delta(\Pi)).$$

Les points de  $\delta(E)$  (resp.  $\delta(\Pi)$ ) sont appelés points à l'infini de  $E$  (resp.  $\Pi$ ) et  $\widehat{\Pi}$  est inclus dans  $\widehat{E}$ .

On appellera *plan de*  $\widehat{E}$  :

- ou bien le complété  $\widehat{\Pi}$  d'un plan affine  $\Pi$  de  $E$ ,
- ou bien la partie  $\delta(E)$  de  $\widehat{E}$ , appelée *plan de l'infini* dans  $\widehat{E}$ .

On appellera *droite de*  $\widehat{E}$

- ou bien le complété  $\widehat{D}$  d'une droite  $D$  de  $E$ ,
- ou bien l'ensemble  $\delta(\Pi)$  des directions de droites parallèles à un plan affine  $\Pi$  de  $E$  ( $\delta(\Pi)$  est appelé *droite de l'infini* de  $\widehat{\Pi}$ ).

Avec ces définitions, on a les relations d'incidence suivantes :

*Deux droites coplanaires distinctes de  $\widehat{E}$  se coupent toujours en un point et un seul de  $\widehat{E}$ .*

Quatre cas sont à envisager :

- (i)  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_2$  sont des droites de  $E$ , sécantes dans  $E$  :

$$\widehat{\mathbb{D}}_1 \cap \widehat{\mathbb{D}}_2 = \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2.$$

- (ii)  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_2$  sont deux droites parallèles de  $E$  :

$$\widehat{\mathbb{D}}_1 \cap \widehat{\mathbb{D}}_2 = \{\infty_{\mathbb{D}_1}\} = \{\infty_{\mathbb{D}_2}\}.$$

- (iii)  $\mathbb{D}$  est parallèle à  $\Pi$  :

$$\widehat{\mathbb{D}} \cap \delta(\Pi) = \{\infty_{\mathbb{D}}\}.$$

- (iv)  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont deux plans non parallèles de  $E$ , se coupant suivant une droite  $\mathbb{D}$  :

$$\delta(\Pi_1) \cap \delta(\Pi_2) = \{\infty_{\mathbb{D}}\}.$$

*Deux plans distincts de  $\widehat{E}$  se coupent toujours suivant une droite de  $\widehat{E}$ .*

Trois cas sont à envisager :

- (i)  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont deux plans de  $E$  se coupant suivant une droite  $\mathbb{D}$  de  $E$  :

$$\widehat{\Pi}_1 \cap \widehat{\Pi}_2 = \widehat{\mathbb{D}}.$$

- (ii)  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont deux plans parallèles de  $E$  :

$$\widehat{\Pi}_1 \cap \widehat{\Pi}_2 = \delta(\Pi_1) = \delta(\Pi_2).$$

- (iii)  $\Pi$  est un plan affine de  $E$  :

$$\widehat{\Pi} \cap \delta(E) = \delta(\Pi).$$

*Par deux points distincts de  $\widehat{E}$ , passe toujours une droite de  $\widehat{E}$  et une seule.*

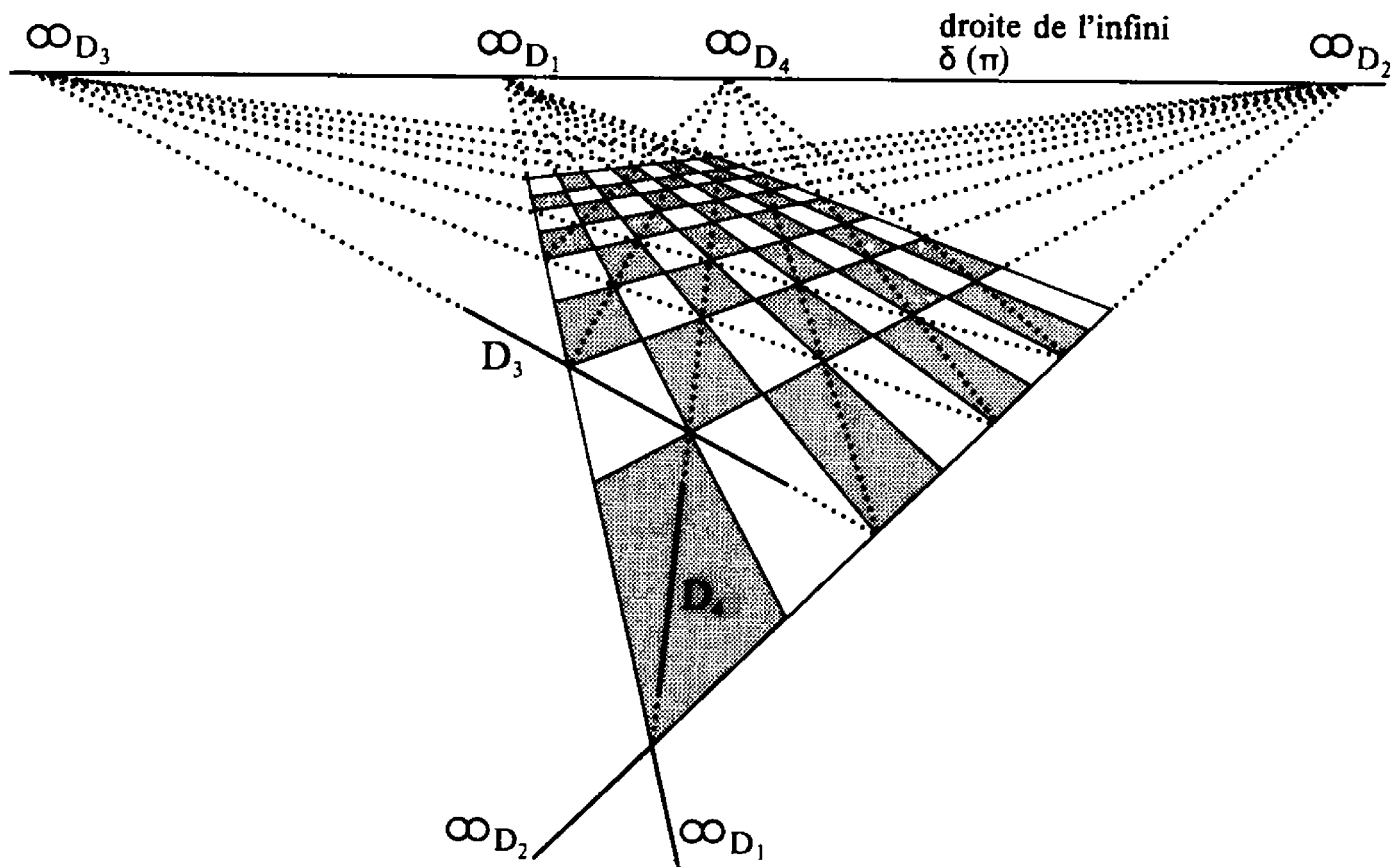
*Par trois points distincts de  $\widehat{E}$ , ou par une droite de  $\widehat{E}$  et un point de  $\widehat{E}$  n'appartenant pas à cette droite, passe toujours un plan de  $\widehat{E}$  et un seul.*



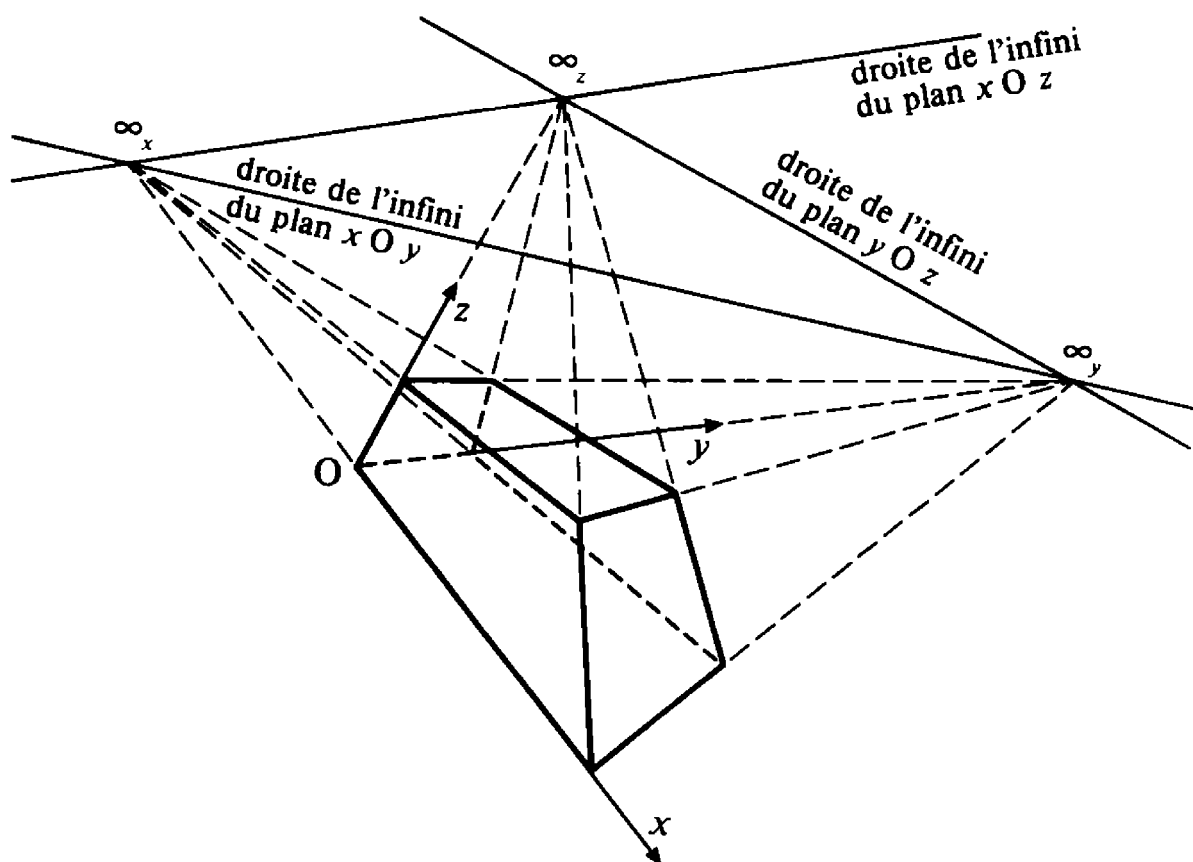
[Démonstration facile, cas par cas, laissée au lecteur.]

Le birapport de quatre points alignés de  $\widehat{E}$ , ou de quatre droites coplanaires concourantes de  $\widehat{E}$ , se définit sans difficulté, cas par cas, en fonction de ce qui précède.

Sur les figures ci-dessous, on a schématisé les points à l'infini des droites qui apparaissent sur un échiquier (figure plane) et sur un parallélépipède (figure à trois dimensions). Le fait que ces *schémas* ressemblent fort à des dessins en perspective n'est évidemment pas le fruit du hasard, mais ce n'est qu'au paragraphe 7 qu'ils recevront véritablement ce statut de *dessins*!



*Droites parallèles et perspectives.* — Revenons à la définition d'une projection conique  $p_S : E - \Pi_0 \longrightarrow \Pi$ , de sommet  $S$ .



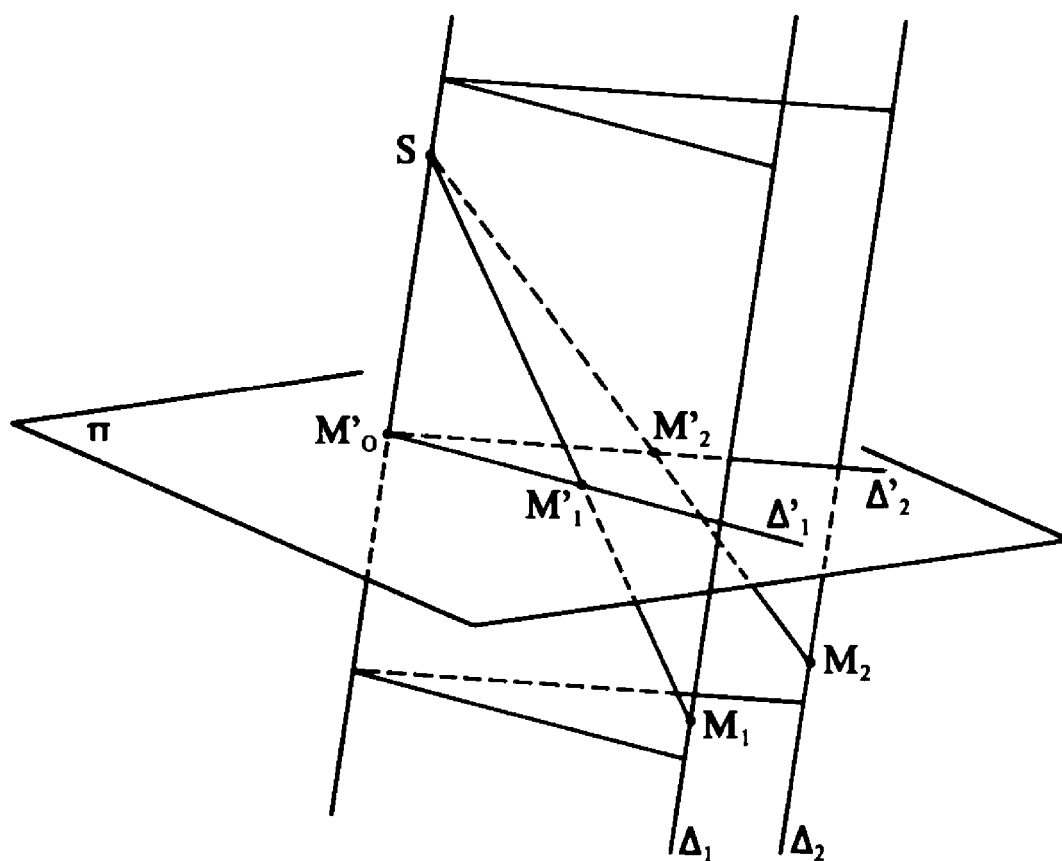
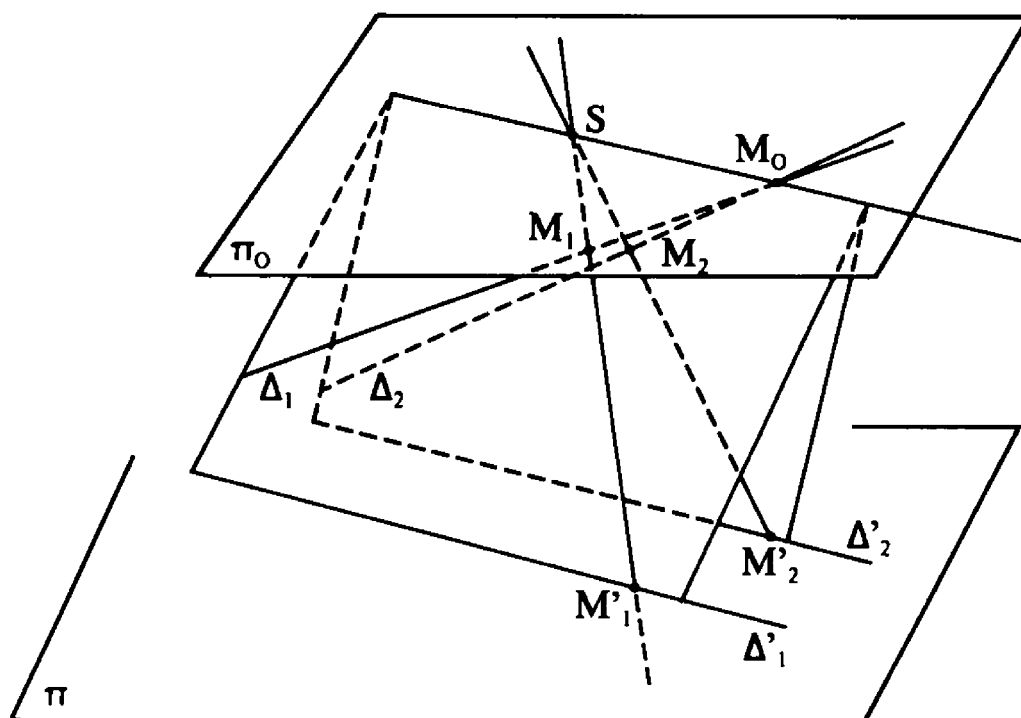
### Théorème 5-5

- (i) Si deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  de  $E$ , non incluses dans  $\Pi_0$ , coupent  $\Pi_0$  en un même point  $M_0$  distinct de  $S$ , leurs images  $\Delta'_1$  et  $\Delta'_2$  par perspective sur  $\Pi$  sont parallèles, vérifiant :

$$\infty_{\Delta'_1} = \infty_{\Delta'_2} = \infty_{SM_0}.$$

- (ii) Si  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont deux droites parallèles dans  $E$ , ne passant pas par  $S$ , et non parallèles à  $\Pi$ , leurs images  $\Delta'_1$  et  $\Delta'_2$  par perspective sur  $\Pi$  concourent en le point d'intersection  $M'_0$  de  $\Pi$  avec la parallèle menée par  $S$  à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

Restreignant la perspective au plan  $\Pi_1$  engendré par  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , les deux parties du théorème ne sont évidemment qu'un même résultat, après permutation du rôle des deux plans  $\Pi_1$  et  $\Pi$ .



En ce qui concerne la partie (i), les plans  $(S, \Delta_1)$  et  $(S, \Delta_2)$  ont une intersection commune avec  $\Pi_0$ , qui est la droite  $SM_0$ . Ils coupent donc le plan  $\Pi$ , parallèle à  $\Pi_0$ , en des droites  $\Delta'_1$  et  $\Delta'_2$  parallèles à  $SM_0$ , donc parallèles entre elles. c. q. f. d.

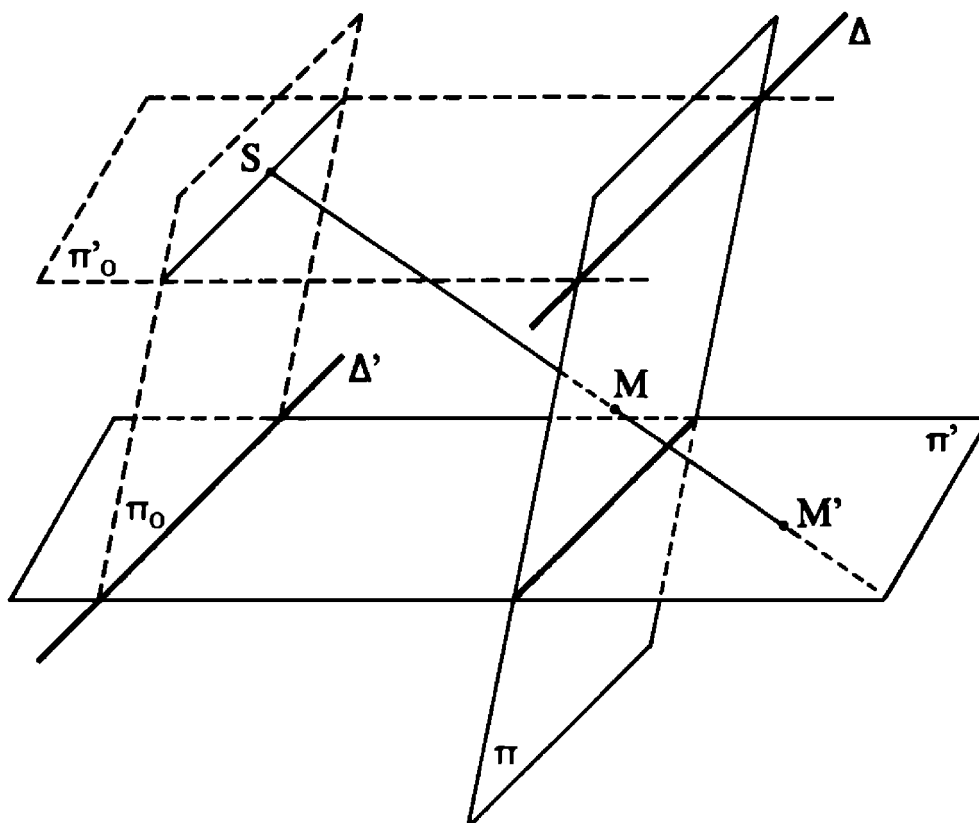
Lorsque  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) tend vers  $M_0$  sur  $\Delta_1 - \{M_0\}$  (resp.  $\Delta_2 - \{M_0\}$ ), sous les hypothèses de (i), sa projection  $M'_1$  (resp.  $M'_2$ ) s'éloigne à l'infini sur  $\Delta'_1$  (resp.  $\Delta'_2$ ). Il est donc naturel de prolonger la perspective  $p_S : E - \Pi_0 \longrightarrow \Pi$  à tout  $E - \{S\}$  en posant :

$$\begin{aligned} p_S(M_0) &= \infty_{SM_0} \\ &= \infty_{\Delta'_1} = \infty_{\Delta'_2}. \end{aligned}$$

Lorsque  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) s'éloigne à l'infini sur  $\Delta_1$  (resp.  $\Delta_2$ ), sous les hypothèses de (ii), sa projection  $M'_1$  (resp.  $M'_2$ ) tend vers le point  $M'_0$ . Il est donc naturel de prolonger la perspective  $p_S : E - \{S\} \longrightarrow \hat{\Pi}$  à tout  $\hat{E} - \{S\}$  en posant :

$$p_S(\infty_{\Delta_1}) = p_S(\infty_{\Delta_2}) = M'_0,$$

et  $p_S(\infty_{\Delta}) = \infty_{\Delta}$  si  $\Delta$  est parallèle à  $\Pi$ .



La perspective conique  $p_S$  sera donc désormais considérée comme une application de  $\widehat{E} - \{S\}$  sur  $\widehat{\Pi}$ . Avec ces définitions, il reste vrai que  $p_S$  préserve :

- l'alignement dans  $\widehat{E} - \{S\}$ ,
- le birapport de quatre points alignés sur une droite incluse dans  $\widehat{E} - \{S\}$ ,
- le birapport de quatre droites coplanaires concourantes de  $\widehat{E}$ .

Si  $\Pi$  et  $\Pi'$  désignent deux plans affines de  $E$  ne passant pas par  $S$ , la restriction à  $\widehat{\Pi}$  de la perspective  $p_S : \widehat{E} - \{S\} \longrightarrow \widehat{\Pi}'$  sur  $\Pi'$  est une *bijection de  $\widehat{\Pi}$  sur  $\widehat{\Pi}'$*  dont l'inverse est la restriction à  $\widehat{\Pi}'$  de la perspective  $q_S : \widehat{E} - \{S\} \longrightarrow \widehat{\Pi}$  sur  $\Pi$ , de même sommet  $S$ .

Notant respectivement  $\Pi_0$  et  $\Pi'_0$  les plans parallèles à  $\Pi$  et  $\Pi'$  passant par  $S$ , et supposant  $\Pi$  et  $\Pi'$  non parallèles, notons  $\Delta$  la droite d'intersection  $\Pi \cap \Pi'_0$ , et  $\Delta'$  la droite d'intersection  $\Pi' \cap \Pi_0$ .

### Proposition 5-6

On a alors :  $p_S(\widehat{\Delta}) = \delta(\Pi')$ ,

$$p_S(\delta(\Pi)) = \widehat{\Delta'},$$

( $\delta(\Pi)$  et  $\delta(\Pi')$  désignant respectivement les droites de l'infini dans  $\widehat{\Pi}$  et  $\widehat{\Pi}'$ ).

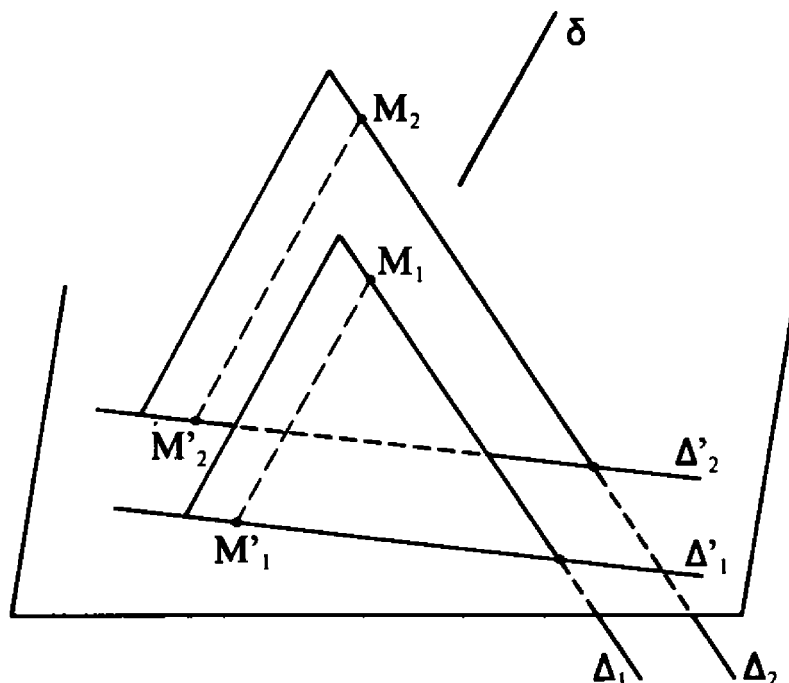
[Si  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont parallèles, la restriction de  $p_S$  à  $\Pi$  est une homothétie de centre  $S$  de  $\Pi$  sur  $\Pi'$ , qui se prolonge à l'infini par l'identité sur  $\delta(\Pi) = \delta(\Pi')$ .]

Supposons maintenant que  $p_\delta : E \longrightarrow \Pi$  soit une projection cylindrique, parallèlement à une direction  $\delta$  non parallèle à  $\Pi$ . On a alors le

### Théorème 5-5'

- (i) Deux droites parallèles de  $E$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , non parallèles à  $\delta$ , ont des images  $\Delta'_1$  et  $\Delta'_2$  parallèles par perspective cylindrique sur  $\Pi$ .
- (ii) Réciproquement, si les perspectives cylindriques  $\Delta'_1$  et  $\Delta'_2$  sur  $\Pi$  de deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont parallèles, et si les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont coplanaires, elles sont aussi parallèles.

[Démonstration immédiate, laissée au lecteur.]



Lorsque  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) s'éloigne à l'infini sur  $\Delta_1$  (resp.  $\Delta_2$ ), la projection  $M'_1$  (resp.  $M'_2$ ) s'éloigne à l'infini sur  $\Delta'_1$  (resp.  $\Delta'_2$ ). On prolongera donc la perspective cylindrique  $p_\delta : E \longrightarrow \Pi$  à tout  $\widehat{E} - \{\delta\} = E \setminus (\delta(E) - \{\delta\})$ , en posant :

$$p_\delta(\infty_{\Delta_1}) = \infty_{\Delta'_1}, \text{ si } \infty_{\Delta_1} \neq \delta.$$

La perspective cylindrique  $p_\delta$  sera donc désormais considérée comme une application de  $\widehat{E} - \{\delta\}$  sur  $\widehat{\Pi}$ , préservant :

- l'alignement dans  $\widehat{E} - \{\delta\}$ ,
- le rapport de trois points alignés sur une droite de  $E$  non parallèle à  $\delta$ , et le birapport sur une droite de  $\widehat{E} - \{\delta\}$ ,
- le birapport de quatre droites concourantes ou parallèles.

Si  $\Pi$  et  $\Pi'$  désignent deux plans affines de  $E$ , non parallèles à  $\delta$ , la restriction à  $\widehat{\Pi}$  de la perspective cylindrique  $p_\delta : \widehat{E} - \{\delta\} \longrightarrow \widehat{\Pi}'$  sur  $\Pi'$  est une bijection de  $\widehat{\Pi}$  sur  $\widehat{\Pi}'$ , dont l'inverse est la restriction à  $\widehat{\Pi}'$  de la perspective cylindrique  $q_\delta : \widehat{E} - \{\delta\} \longrightarrow \widehat{\Pi}$  sur  $\Pi$ , de même direction  $\delta$ , et préservant les points à distance finie et à l'infini : la restriction de  $p_\delta$  à  $\Pi$

(resp.  $\delta(\Pi)$ ) est une bijection sur  $\Pi'$  (resp.  $\delta(\Pi')$ ). [Si, en outre,  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont parallèles,  $p_\delta : \Pi \longrightarrow \Pi'$  est une translation (de vecteur parallèle à  $\delta$ ), qui se prolonge à l'infini par l'identité sur  $\delta(\Pi) = \delta(\Pi')$ .]

### Remarques :

1) Les théorèmes 5-4 et 5-5 sont à la base des règles du dessin en perspective pour un observateur à distance finie, tandis que la proposition 5-3 et le théorème 5-5' sont à la base des règles du dessin en perspective cavalière (observateur supposé infiniment éloigné dans une direction donnée) : cf. le paragraphe 7.

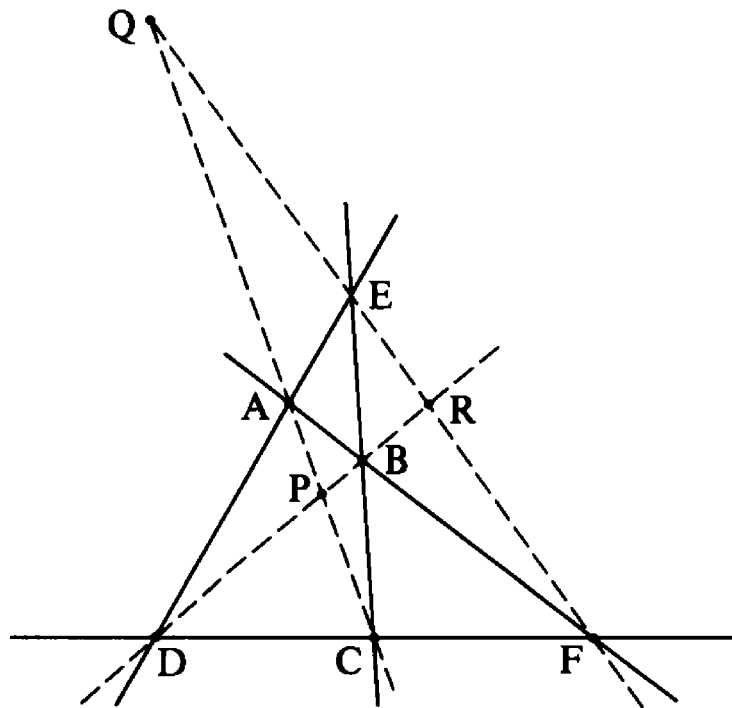
2) La proposition 5-6 est à l'origine des généralisations, en géométrie projective, de *n'importe quel* théorème de géométrie affine.

Les deux paragraphes suivants vont précisément consister à expliquer comment faire cette généralisation, quand on part des théorèmes de géométrie affine les plus élémentaires, concernant :

- d'une part les propriétés du parallélogramme (liées aux translations d'un plan affine),
- et d'autre part les propriétés des triangles homothétiques (liées aux homothéties de ce plan).

## 4 - Quadrilatères complets comme perspectives de parallélogrammes

Soit  $\Pi$  un plan affine, et  $\widehat{\Pi}$  son complété. On appelle *quadrilatère complet* la figure formée par quatre droites distinctes de  $\widehat{\Pi}$ , telle que trois d'entre elles ne soient jamais concourantes. Les quatre droites en question s'appellent les *côtés* du quadrilatère, leurs intersections deux à deux s'appellent les *sommets*. Un quadrilatère complet possède six sommets, que l'on peut grouper deux par deux de façon unique pour que la droite qui joint les deux sommets d'un même groupe ne soit pas un côté : une telle droite est appelée *diagonale*, et un quadrilatère complet a donc trois diagonales.

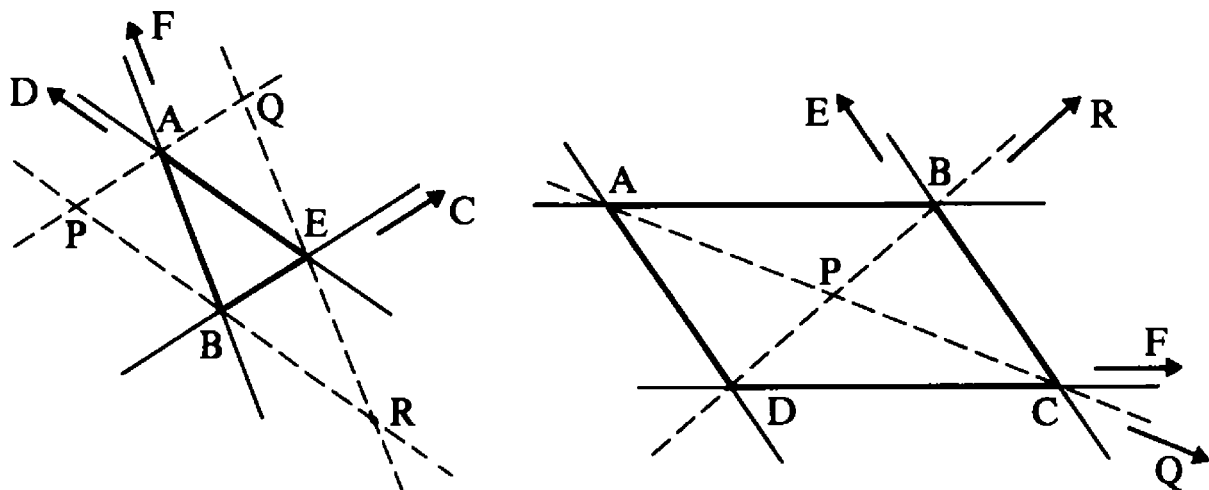


Sur cette figure, les six sommets sont notés A, B, C, D, E, F; chaque côté passe par trois sommets : ABF, ADE, BCE et CDF sont les quatre côtés; AC, BD et EF sont les trois diagonales, qui forment entre elles un triangle dont les sommets sont notés P, Q, R.

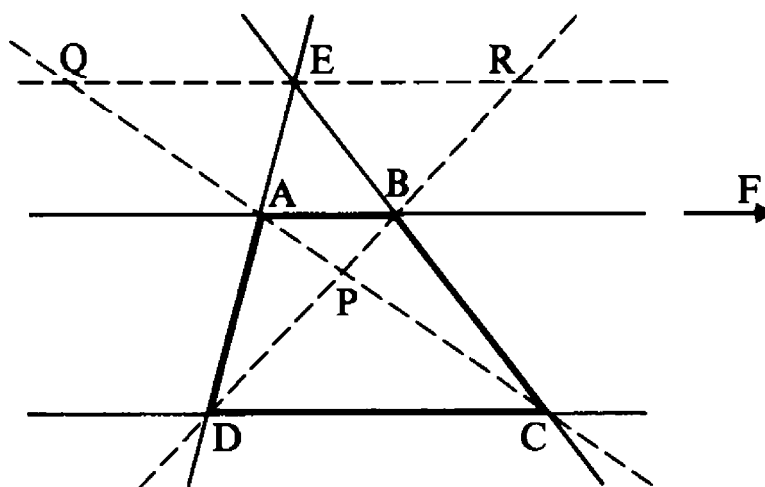
Si l'un des côtés est la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$ , les trois autres côtés forment un *triangle*.

Si l'une des diagonales est la droite de l'infini, QR par exemple, le quadrilatère est un *parallélogramme* (deux des sommets, E et F dans ce cas) sont à l'infini.

Si un seul sommet est à l'infini, le quadrilatère est un *trapèze*.







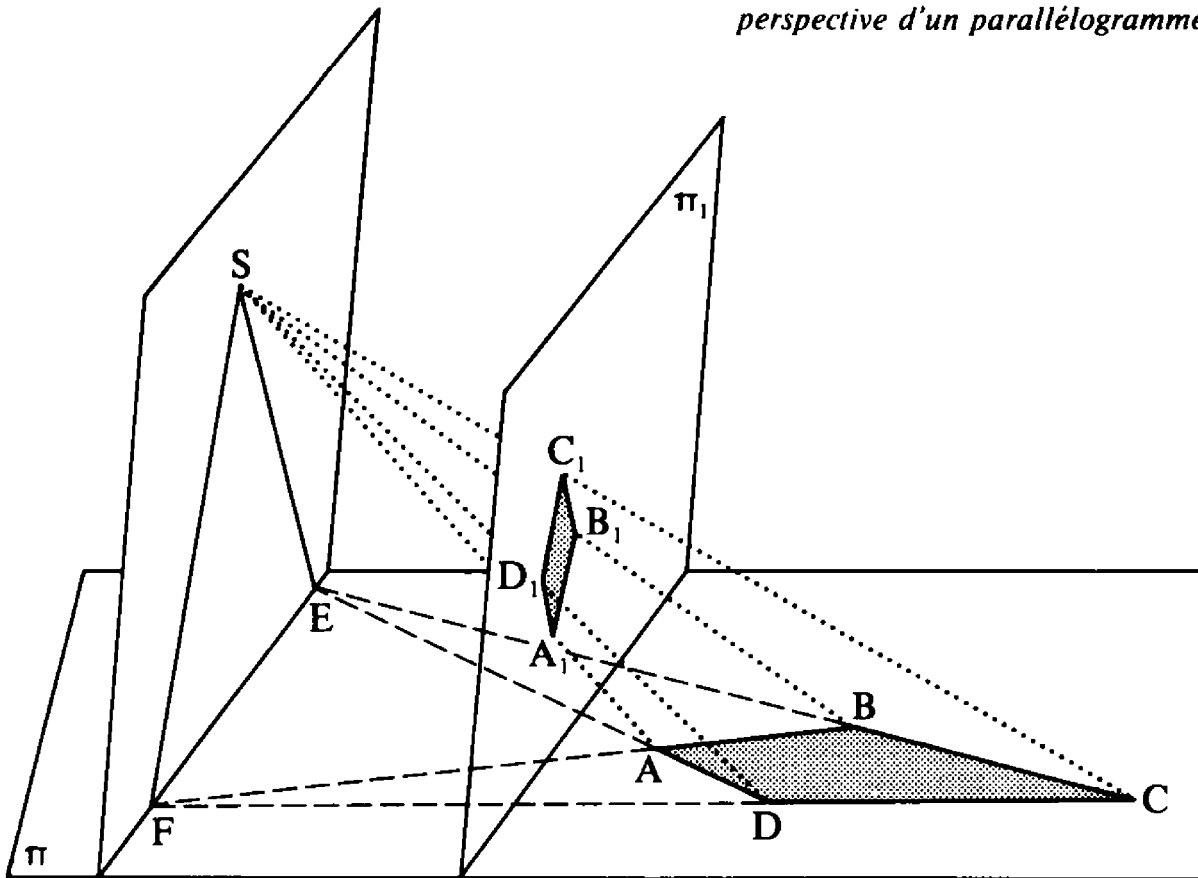
### Théorème 5-7

- (i) *Tout quadrilatère complet peut être obtenu comme projection conique d'un parallélogramme<sup>(1)</sup>.*
- (ii) *Tout parallélogramme peut être obtenu comme projection cylindrique d'un carré.*

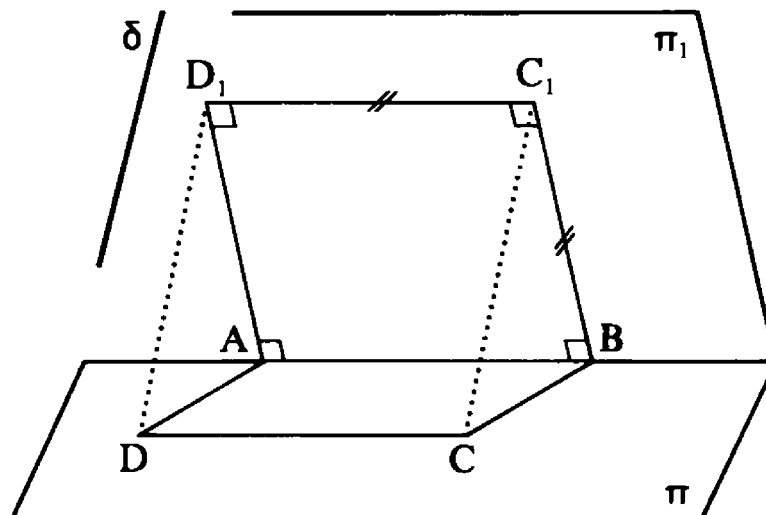
Supposons en effet le plan  $\Pi$  du quadrilatère complet plongé dans un espace affine  $\mathcal{E}$  de dimension trois. Soit  $S$  un point quelconque de  $\mathcal{E} - \Pi$ , et choisissons la diagonale du quadrilatère complet que l'on veut obtenir comme image par perspective de la droite de l'infini, soit  $EF$  pour fixer les idées. [Si  $EF$  est déjà la droite de l'infini, c'est que le quadrilatère complet est déjà un parallélogramme, ce que nous ne supposerons pas.] Choisissons alors un plan affine  $\Pi_1$  de  $\mathcal{E}$ , parallèle au plan  $SEF$ , ne passant pas par  $S$ . La perspective de point de vue  $S$  de  $\Pi$  sur  $\Pi_1$  transforme alors le quadrilatère complet en un parallélogramme de  $\Pi_1$ , d'après la proposition 5-6 ou le théorème 5-5, dont les côtés  $A_1B_1$  et  $C_1D_1$  sont parallèles à  $SF$ , tandis que  $A_1D_1$  et  $B_1C_1$  sont parallèles à  $SE$  ( $E_1$  et  $F_1$  étant à l'infini sur  $\delta(\Pi_1)$ , dans les directions  $SE$  et  $SF$  respectivement), d'où la partie (i) du théorème, par perspective de  $\Pi_1$  sur  $\Pi$ .

(<sup>1</sup>) On peut montrer, en fait, que tout parallélogramme peut être obtenu directement comme projection conique d'un carré. (Cf. exercice 9 de ce chapitre, ainsi que la règle n° 3 du § 7 ci-dessous.)

perspective d'un parallélogramme



Si  $ABCD$  est un parallélogramme ( $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ) dans un plan affine  $\Pi$  que l'on plonge dans un espace affine  $\mathcal{E}$  de dimension 3, choisissons un plan  $\Pi_1$  de  $\mathcal{E}$  coupant  $\Pi$  suivant la droite  $AB$ , et construisons un carré dans  $\Pi_1$  admettant  $[AB]$  comme côté, soit  $ABC_1D_1$ , avec  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D_1C_1}$ .



$$\begin{aligned}
\text{Puisque } \overrightarrow{C_1C} &= \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{BC}, \\
&= \overrightarrow{D_1t} + \overrightarrow{AD}, \\
&= \overrightarrow{D_1D},
\end{aligned}$$

les droites  $C_1C$  et  $D_1D$  sont parallèles, et la projection cylindrique de  $\Pi_1$  sur  $\Pi$  parallèlement à la direction commune  $\delta$  de  $C_1C$  et  $D_1D$  réalise la perspective cherchée, d'où la partie (ii) du théorème.

Avec les notations de la figure 5-23, on a le

### **Corollaire 5-7'**

*Dans tout quadrilatère complet, les divisions EFRQ, ACPQ, et BDPR sont harmoniques.*

Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu d'une part, et le faisceau formé par les médianes et les diagonales d'autre part est harmonique, comme on l'a vu au paragraphe 2 [on peut d'ailleurs le redémontrer en le constatant de façon élémentaire dans le cas d'un carré ou d'un rectangle, et en appliquant la partie (ii) du théorème 5-7]. Tout quadrilatère complet étant perspective de parallélogramme, et la perspective préservant l'harmonie, le corollaire en résulte.

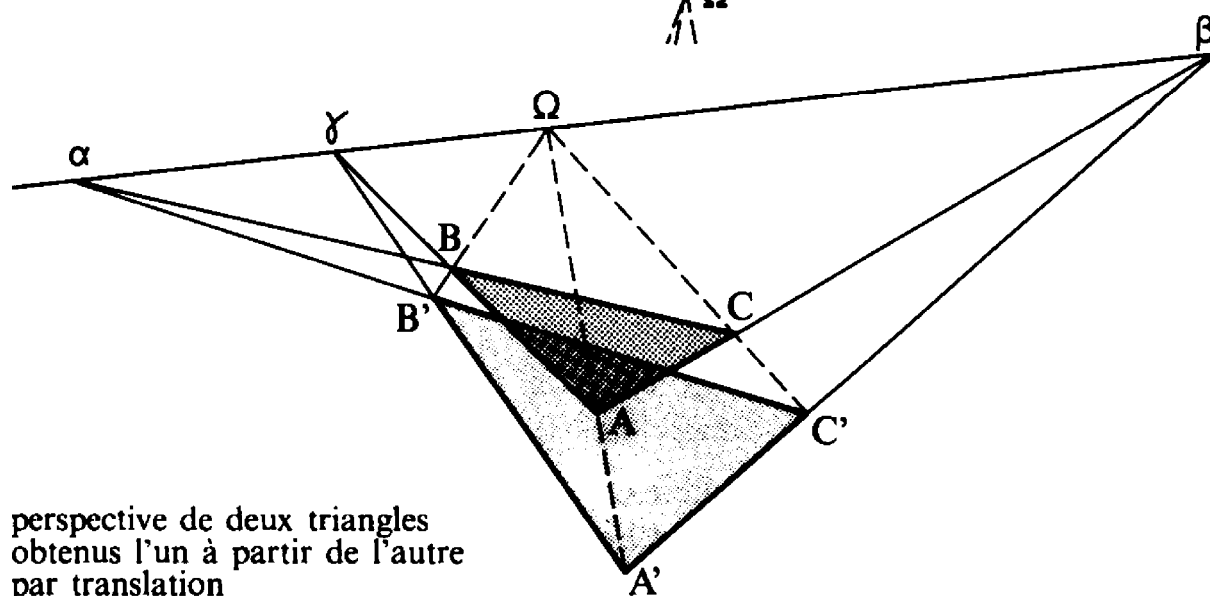
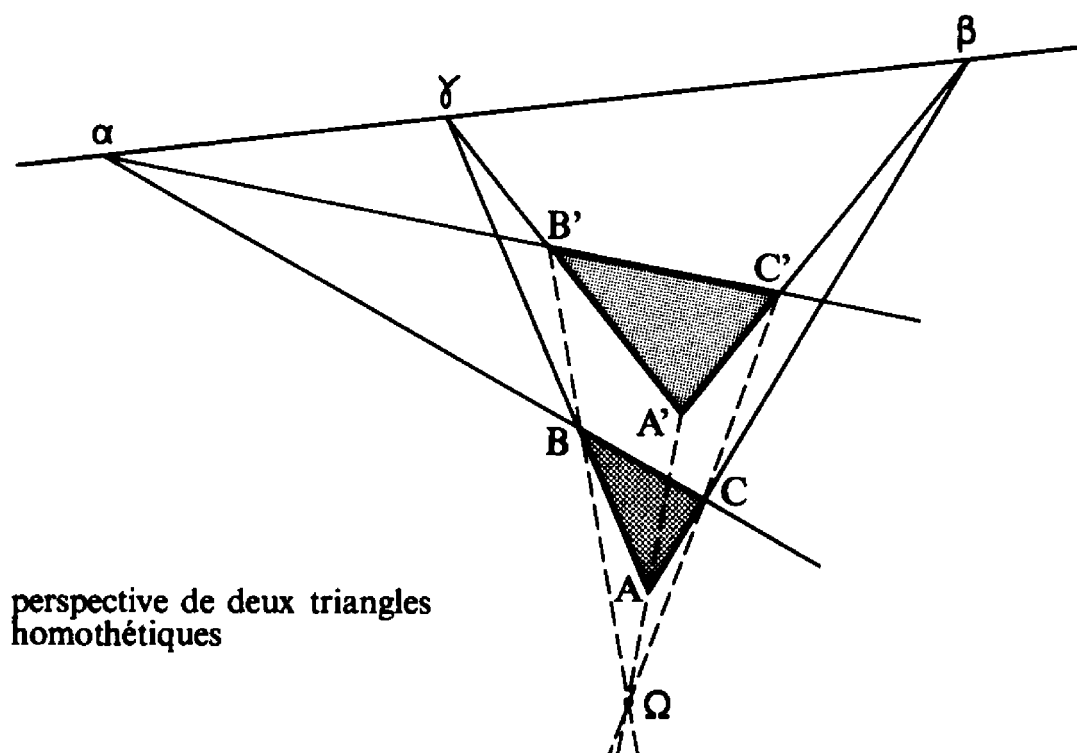
## **5 - Triangles homologues<sup>(2)</sup> comme perspectives de triangles homothétiques ou translatés l'un de l'autre**

Étudions les images  $ABC$  et  $A'B'C'$  de deux triangles  $A_1B_1C_1$  et  $A'_1B'_1C'_1$ , homothétiques ou translatés l'un de l'autre dans un plan affine  $\Pi_1$ , par une perspective  $p : \widehat{\Pi}_1 \longrightarrow \widehat{\Pi}$  sur un plan  $\Pi$  : si  $\Delta$  désigne l'image par  $p$  de la droite de l'infini  $\delta(\Pi_1)$ , des droites parallèles dans  $\Pi_1$  se projettent suivant des droites se coupant sur  $\Delta$ , de sorte que les droites  $BC$  et  $B'C'$  concourent en un point de  $\Delta$  (point que l'on notera  $\alpha$ ), les droites  $AC$  et  $A'C'$  concourent en

<sup>(2)</sup> Cf. exercice 10 de ce chapitre.

un point  $\beta$  de  $\Delta$ , et les droites  $AB$  et  $A'B'$  en un point  $\gamma$  de  $\Delta$ . [En effet, les triangles  $A_1B_1C_1$  et  $A'_1B'_1C'_1$  ont leurs côtés deux à deux parallèles.] En outre, les droites  $AA'$ ,  $BB'$ , et  $CC'$  seront toujours concourantes en un point  $\Omega$  de  $\Pi$ .

[ $\Omega$  étant la projection du centre d'homothétie  $\Omega_1$  et n'étant donc pas sur  $\Delta$  dans le cas de triangles homothétiques,  $\Omega$  étant la projection de la direction commune aux droites parallèles  $A_1A'_1$ ,  $B_1B'_1$  et  $C_1C'_1$  dans le cas de triangles translatés avec par conséquent  $\Omega$  sur  $\Delta$ .]



Donnons-nous plus généralement deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  dans le complété  $\widehat{\Pi}$  d'un plan affine  $\Pi$ . Supposons les droites  $BC$  et  $B'C'$  distinctes, et notons  $\alpha$  leur point d'intersection dans  $\widehat{\Pi}$ . De même supposons  $AC$  et  $A'C'$  (resp.  $AB$  et  $A'B'$ ) distinctes, et notons  $\beta$  (resp.  $\gamma$ ) leur point d'intersection.

### **Théorème 5-8 (Desargues)**

*Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Les trois points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont alignés.*
- (ii) *Les trois droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sont concourantes.*
- (iii) *Les deux triangles peuvent être obtenus par perspective à partir de deux autres triangles coplanaires, homothétiques ou traduits l'un de l'autre.*

Notons  $\Delta$  la droite  $\beta\gamma$  (les points  $\beta$  et  $\gamma$  étant nécessairement distincts), et soit

$$p : \widehat{\Pi}_1 \longrightarrow \widehat{\Pi}$$

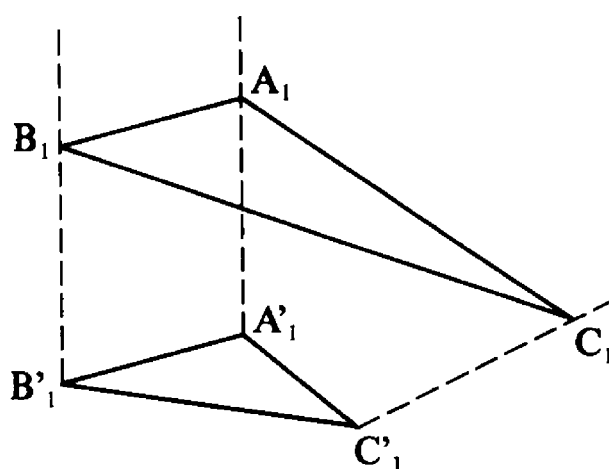
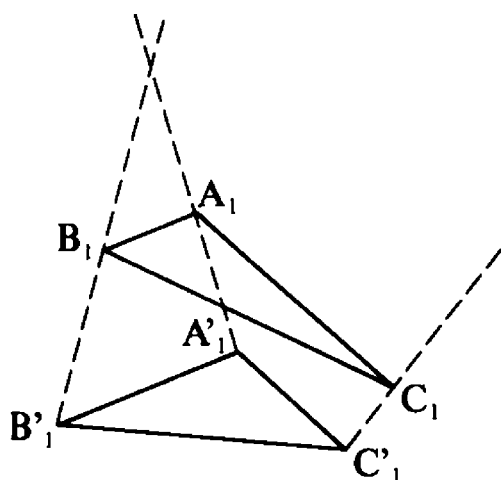
une perspective telle que  $p(\delta(\Pi_1)) = \Delta$ . [Il en existe : il suffit de choisir  $S$  quelconque dans  $\mathcal{E} - \Pi$ , et  $\Pi_1$  parallèle à  $(S, \Delta)$  ne passant pas par  $S$ .] Notons  $q = p^{-1}$  la perspective inverse de  $\Pi$  sur  $\Pi_1$ , et  $A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1$  les images de  $A, B, C, A', B', C'$  par  $q$ . Puisque  $\gamma$  est sur  $\Delta$ , les droites  $A_1B_1$  et  $A'_1B'_1$  sont parallèles. Soit donc  $k$  le nombre réel non nul tel que  $\overline{A'_1B'_1} = k\overline{A_1B_1}$ .

Si  $k$  est différent de 1, il existe une homothétie  $h$  dans  $\Pi_1$ , de rapport  $k$ , dont nous noterons  $\Omega_1$  le centre, entièrement déterminée par la donnée des deux couples de points homologues  $(A_1, A'_1)$  et  $(B_1, B'_1)$ . Sachant alors *a priori* que  $A_1C_1$  et  $A'_1C'_1$  sont aussi des droites parallèles (puisque  $\beta$  est sur  $\Delta$ ), le théorème de Thalès permet d'affirmer l'équivalence des trois propositions :

- (i)  $B_1C_1$  et  $B'_1C'_1$  sont parallèles.
- (ii)  $C_1C'_1$  passe par le centre d'homothétie  $\Omega_1$ .
- (iii)  $h(C_1) = C'_1$ .

Si  $k$  est égal à 1, il existe une translation  $\tau$  dans  $\Pi_1$ , de vecteur  $\overrightarrow{A_1A'_1} = \overrightarrow{B_1B'_1}$ . Sachant *a priori* que  $A_1C_1$  et  $A'_1C'_1$  sont aussi des droites parallèles, les trois propositions suivantes sont évidemment équivalentes :

- (i)  $B_1C_1$  et  $B'_1C'_1$  sont parallèles.
- (ii)  $C_1C'_1$  est parallèle à  $A_1A'_1$  et  $B_1B'_1$ .
- (iii)  $\tau(C_1) = C'_1$ .



Dans les deux cas, la transcription de ces trois propositions équivalentes par la perspective  $p : \hat{\Pi}_1 \longrightarrow \hat{\Pi}$  permet d'achever la démonstration du théorème.

## 6 - Coniques comme perspectives de cercles

Nous verrons au chapitre 12 que toute perspective de conique est une conique. Dans ce paragraphe, nous nous limiterons aux perspectives de cercles, dont le point de vue  $S$  est situé sur l'axe<sup>(3)</sup> du cercle dans le cas d'une projection conique, dont la direction de projection  $\delta$  est perpendiculaire au plan du cercle dans le cas d'une perspective cylindrique.

Soit donc  $\Gamma_1$  un cercle dans un plan  $\Pi_1$  d'un espace de dimension 3.

<sup>(3)</sup> Dans un espace euclidien de dimension 3, l'axe d'un cercle est la perpendiculaire au plan du cercle, passant par son centre.

**Théorème 5-9 (Dandelin)**

1) *L'image  $\Gamma$  de  $\Gamma_1$  par une perspective de point de vue  $S$  situé sur l'axe de  $\Gamma_1$ , sur un plan  $\Pi$  ne passant pas par  $S$ , est une conique, et plus précisément,*

- *une ellipse, si le plan  $\Pi_0$ , parallèle à  $\Pi$  passant par  $S$ , ne coupe pas  $\Gamma_1$ ,*
- *une hyperbole, si  $\Pi_0$  coupe  $\Gamma_1$  en deux points distincts,*
- *une parabole si  $\Pi_0$  est tangent à  $\Gamma_1$ .*

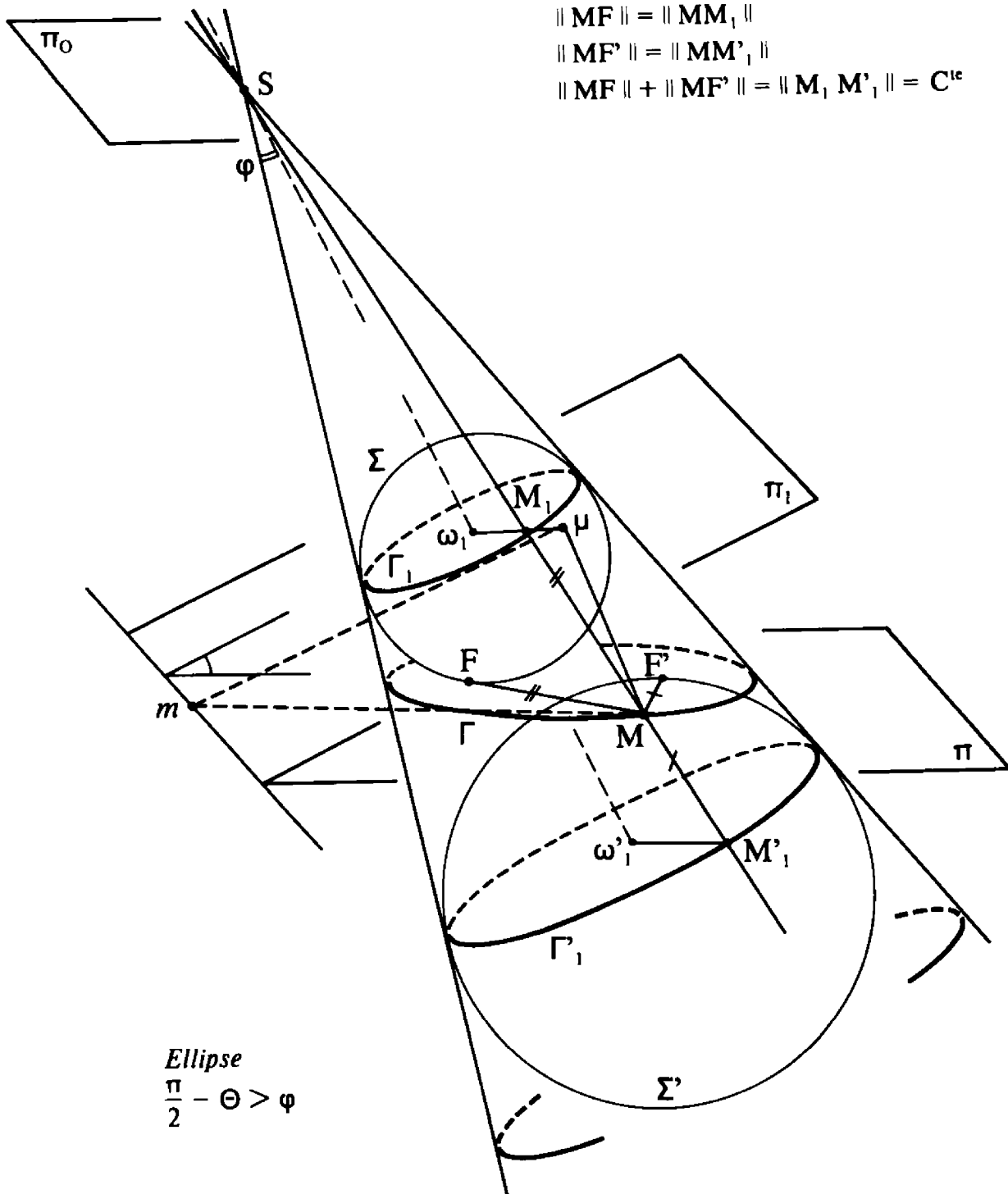
2) *L'image  $\Gamma$  de  $\Gamma_1$  par une perspective cylindrique parallèlement à une direction  $\delta$  perpendiculaire au plan de  $\Gamma_1$ , sur un plan  $\Pi$  non parallèle à  $\delta$ , est une ellipse.*

Notons  $\mathcal{C}$  le cône de révolution (resp. le cylindre de révolution) de sommet  $S$  (resp. de génératrices parallèles à  $\delta$ ) et admettant  $\Gamma_1$  comme courbe directrice. Il existe toujours au moins une sphère  $\Sigma$  inscrite dans  $\mathcal{C}$  et tangente à  $\Pi$ . [Il en existe même deux, sauf dans le cas où  $\Pi_0$  est tangent à  $\Gamma_1$ .] Notons  $F$  le point de contact de  $\Sigma$  avec  $\Pi$ . Quitte à remplacer  $\Gamma_1$  par un cercle homothétique (resp. translaté) qui aura même projection sur  $\Pi$ , on peut toujours supposer que  $\Gamma_1$  est le cercle de contact de  $\Sigma$  avec  $\mathcal{C}$ , et  $\Pi_1$  le plan du cercle du contact. Si  $\Pi$  et  $\Pi_1$  sont parallèles,  $\Gamma$  est un cercle homothétique (resp. translaté) de  $\Gamma_1$ . Supposons désormais  $\Pi$  et  $\Pi_1$  non parallèles et notons  $\Delta$  la droite d'intersection  $\Pi \cap \Pi_1$  de ces deux plans. Notons  $\theta$  l'angle des plans  $\Pi$  et  $\Pi_1$  ( $0 < \theta \leq \pi/2$ ), et  $\varphi$  le demi-angle au sommet du cône de révolution  $\mathcal{C}$  (on posera  $\varphi = 0$  dans le cas d'une projection cylindrique).

Soit  $M_1$  un point du cercle de contact  $\Gamma_1$ , se projetant en un point  $M$  de  $\Gamma = \mathcal{C} \cap \Pi$ . Notons  $\mu$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $\Pi_1$ ,  $m$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $\Delta$ , qui est aussi celle de  $\mu$  sur  $\Delta$ . Puisque  $M_1$  et  $F$  sont les points de contact de deux tangentes menées par  $M$  à la sphère  $\Sigma$ ,

$$\|MF\| = \|MM_1\|.$$

$$\text{Or } \|MM_1\| = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \|M\mu\|, \text{ et } \|M\mu\| = \sin \theta \cdot \|Mm\|.$$

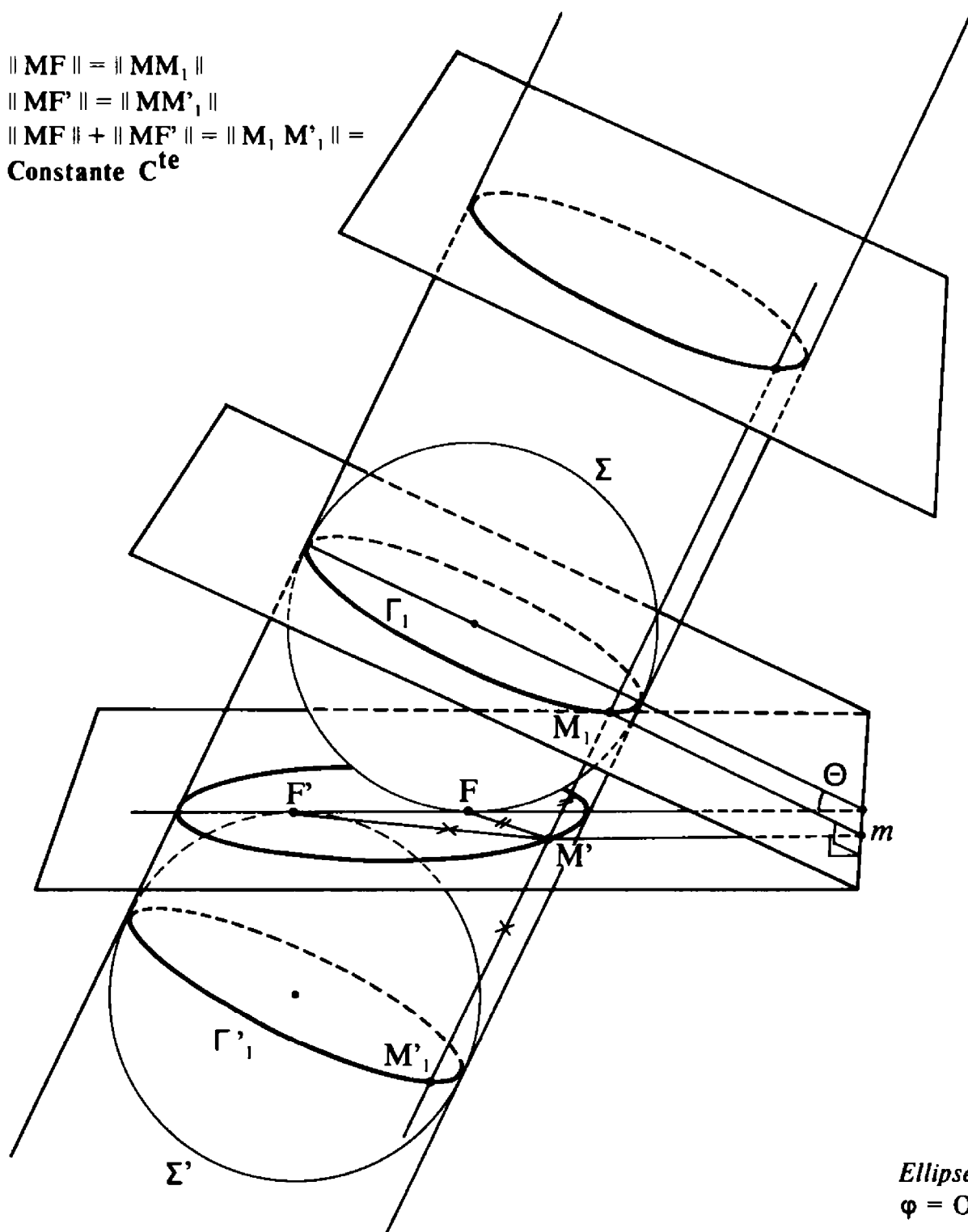


On en déduit :

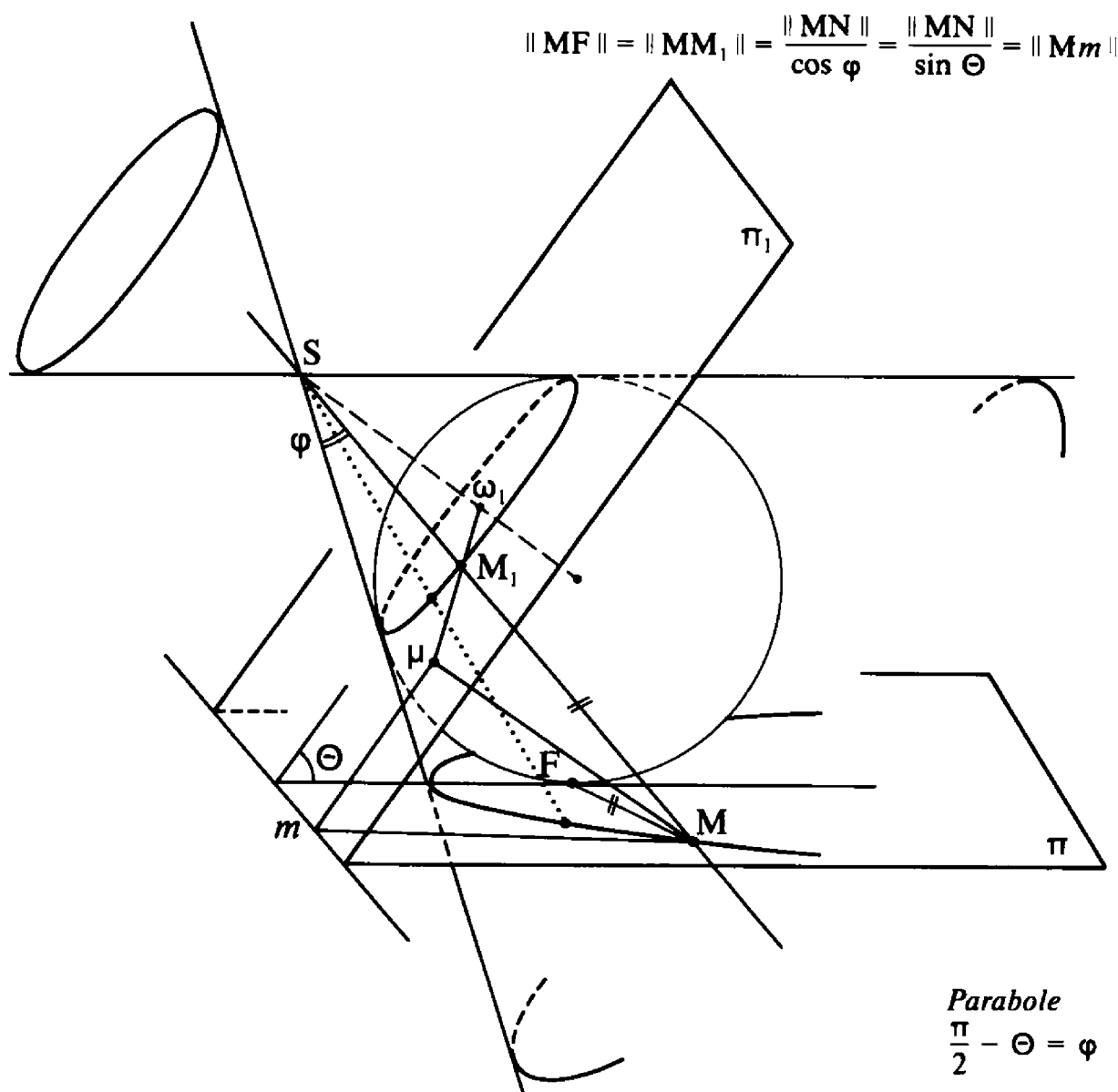
$$\|MF\| = e \cdot \|Mm\| \text{ avec } e = \frac{\sin \theta}{\cos \varphi}$$



$$\begin{aligned} \|MF\| &= \|MM_1\| \\ \|MF'\| &= \|MM'_1\| \\ \|MF\| + \|MF'\| &= \|M_1M'_1\| = \\ &\text{Constante } C^{te} \end{aligned}$$



C'est dire que  $M$  appartient à la conique de foyer  $F$ , de directrice  $\Delta$ , et d'excentricité  $e$ .



Réciproquement, si  $M$  est un point de la conique précédente, notons  $P$  le plan méridien de  $C$  contenant  $M$  :  $P$  coupe  $\Gamma_1$ , en deux points distincts diamétralement opposés, et  $M$  ne peut qu'être la projection de l'un d'eux : l'image  $\Gamma$  de  $\Gamma_1$  par perspective est toute la conique.

Dans le cas d'une projection cylindrique,  $\cos \varphi = 1$  et  $e = \sin \theta$  est strictement inférieur à 1 :  $\Gamma$  est toujours une ellipse.

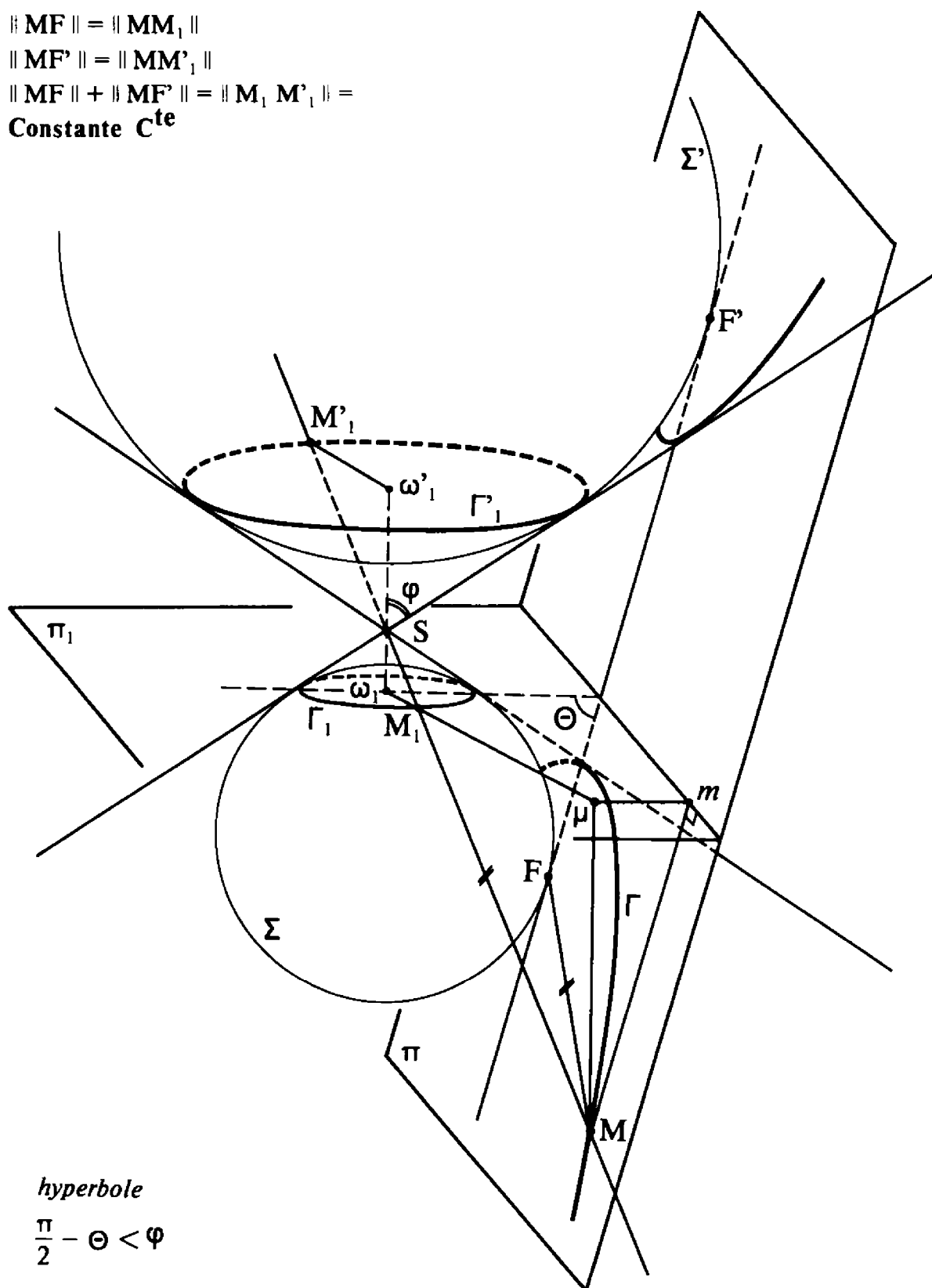
Dans le cas d'une projection conique, on obtient une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que  $\pi/2 - \theta$  est strictement supérieur à  $\varphi$  ( $\Pi_0$  ne rencontre pas  $\Gamma_1$ ), strictement inférieur à  $\varphi$  ( $\Pi_0$  coupe  $\Gamma_1$  en deux points), ou égal à  $\varphi$  ( $\Pi_0$  est alors tangent à  $\Gamma_1$ ).

$$\|\mathbf{MF}\| = \|\mathbf{MM}_1\|$$

$$\| \mathbf{MF}' \| = \| \mathbf{MM}'_1 \|$$

$$\| \mathbf{MF} \| + \| \mathbf{MF}' \| = \| \mathbf{M}_1 \mathbf{M}'_1 \| =$$

**Constante C<sup>te</sup>**



$$\frac{\pi}{2} - \Theta < \varphi$$

### Proposition 5-10

*Toute conique peut s'obtenir comme perspective conique d'un cercle par le procédé précédent, et aussi comme perspective cylindrique si elle est une ellipse.*

Il suffit d'observer qu'en jouant sur  $\theta$  et  $\varphi$ , on peut obtenir toutes les excentricités désirées sous la forme  $\frac{\sin \theta}{\cos \varphi}$ , et même sous la forme  $\sin \theta$  si elle est strictement inférieure à 1.

### Corollaire 5-11

*Etant donnés quatre points distincts  $M_i$  sur une conique  $\Gamma$  et un cinquième point  $A$ , le birapport des quatre droites  $AM_i$  ne dépend pas du choix de  $A$ .*

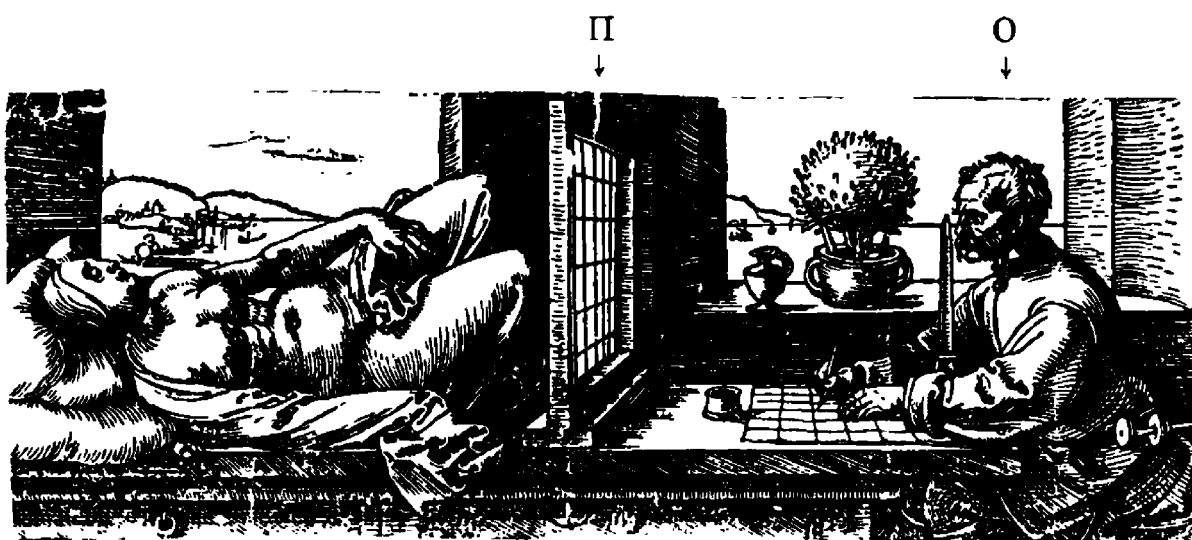
Grâce à la proposition 5-10, et puisque toute perspective préserve les birapports de droites concourantes, on peut se ramener au cas où  $\Gamma$  est un cercle, auquel cas le résultat a déjà été démontré à la fin du paragraphe 2 de ce chapitre. [On appellera le birapport en question le *birapport des quatre points  $M_i$  sur la conique  $\Gamma$* , et on le notera  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ .]

## 7 - Introduction au dessin en perspective

On appelle « dessin en perspective » la reproduction par similitude de l'image du sujet dans une projection conique ayant pour point de vue  $O$  l'œil de l'observateur (supposé borgne et immobile), sur un plan  $\Pi$  appelé le *plan du tableau*. On dira qu'il s'agit d'une *perspective cavalière* si l'observateur est suffisamment éloigné<sup>(4)</sup> du sujet pour que l'on puisse considérer son œil comme à l'infini dans une direction donnée, et la projection correspondante sur le plan du tableau comme cylindrique.

(4) Cette notion est relative à la dimension du sujet : celle-ci doit être négligeable par rapport à la distance entre l'œil et un point quelconque du sujet.

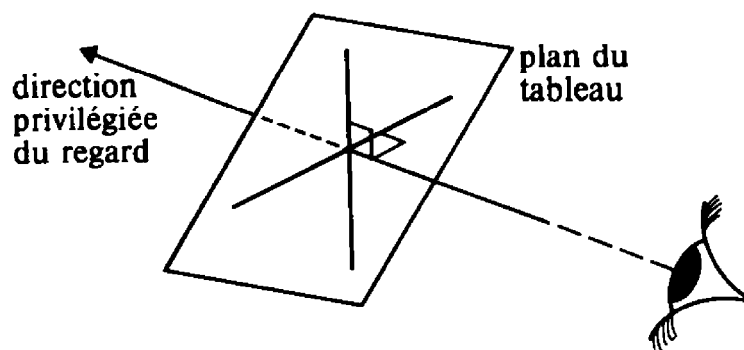
Le dessin d'A. Dürer,» intitulé «Le dessinateur et la femme couchée», outre qu'il montre qu'un géomètre ne doit pas se laisser distraire par l'érotisme de son sujet, illustre parfaitement la définition ci-dessus : le point de vue O est ici la pointe du petit obélisque, proche de l'un des yeux du dessinateur (mais présentant sur l'œil l'avantage d'être plus immobile et plus ponctuel); le plan  $\Pi$  du tableau est matérialisé par le cadre vertical posé sur la table; les carroyages de  $\Pi$  et de la feuille de dessin permettent à l'artiste de réaliser facilement la similitude entre l'image du sujet par projection sur  $\Pi$  et la reproduction dessinée.



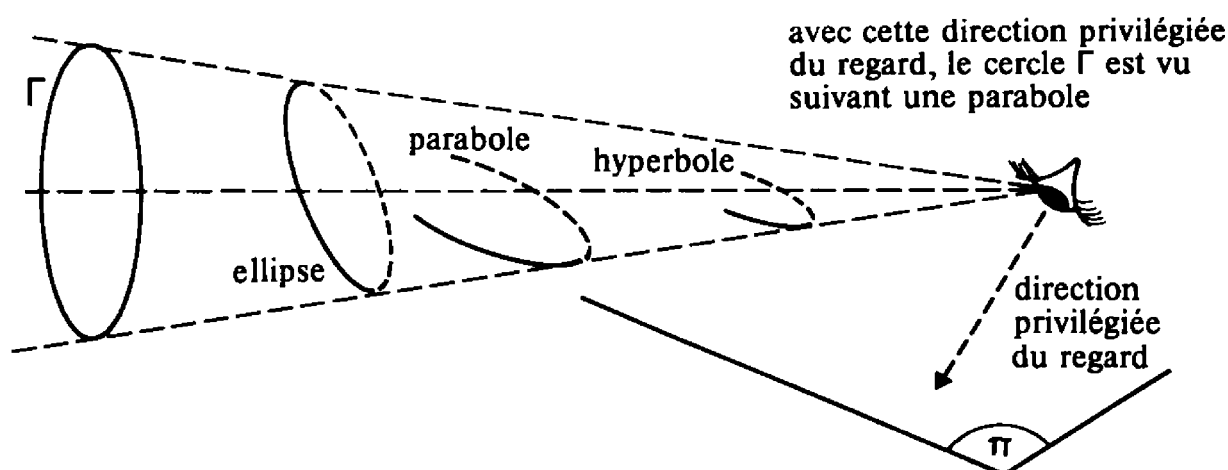
**Remarque importante :** Pour un même sujet et un même point de vue, il faut en plus se donner le *plan du tableau* pour que la forme du dessin soit bien définie. Plus précisément, il suffit de se donner la direction de ce plan, car les perspectives de même point de vue sur deux plans parallèles sont homothétiques, et leurs reproductions par conséquent semblables.

Cette direction du plan du tableau est souvent implicite; c'est par exemple le cas lorsque l'observateur se tourne dans une direction donnée : on suppose alors que le plan du tableau est perpendiculaire à cette *direction privilégiée du regard*, et il revient au même de se donner celle-ci ou la direction du plan du tableau<sup>(5)</sup>.

(<sup>5</sup>) Du moins en perspective conique (cf. exercice 12).



[Si, par exemple, le sujet est un cercle et si l'œil de l'observateur est sur l'axe du cercle, le dessin de ce cercle en perspective sera une ellipse, une parabole ou une (branche d') hyperbole selon l'angle que fera l'axe privilégié du regard avec l'axe du cercle.]

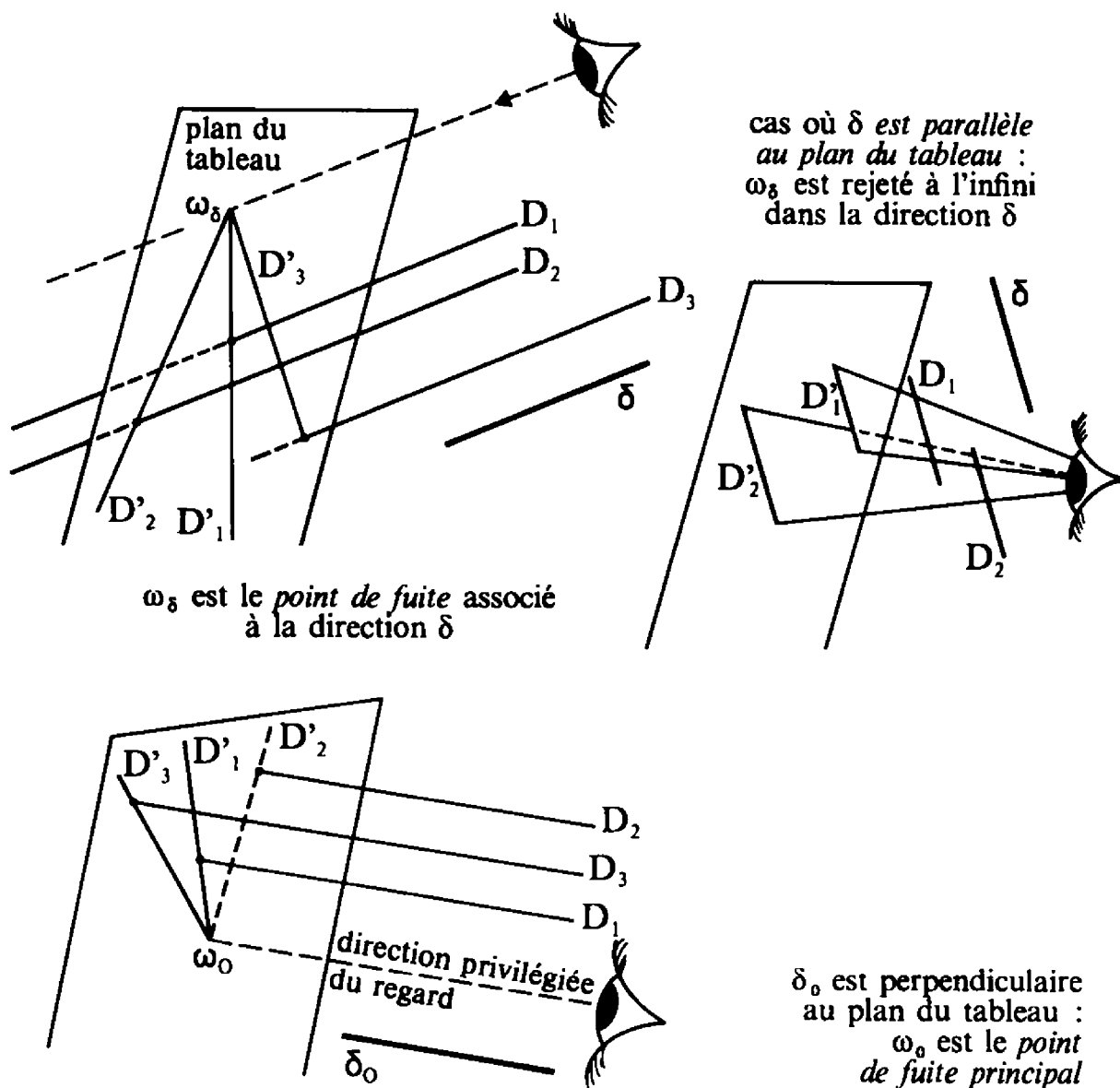


Un autre exemple classique est celui de la prise de vue photographique, où le point de vue est le centre<sup>(6)</sup> de l'objectif, la direction privilégiée du regard l'axe de l'objectif et le plan du tableau celui de la pellicule (les rayons lumineux passant par le centre de l'objectif n'étant pas déviés).

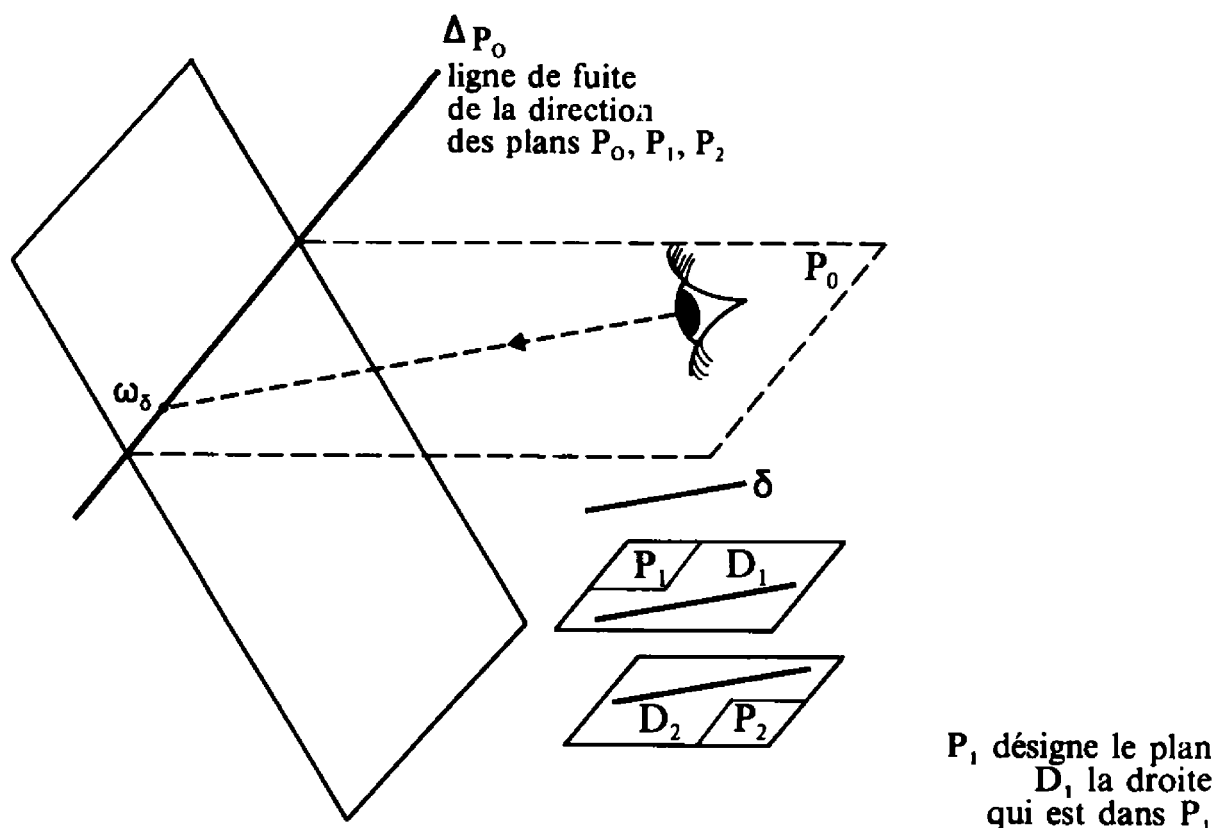
On appelle *point de fuite* associé à une direction  $\delta$  (non parallèle au plan  $\Pi$  du tableau) le point d'intersection  $\omega_\delta$ , avec ce plan  $\Pi$ , de la parallèle à la direction  $\delta$  passant par le point de vue  $O$ . En particulier, si  $\delta_0$  est parallèle à la direction privilégiée du regard,

<sup>(6)</sup> Cette notion est en fait peu précise, et ce n'est qu'en première approximation que la prise de vue peut être interprétée comme une projection conique.

c'est-à-dire perpendiculaire au plan du tableau, le point  $\omega_0 = \omega_{\delta_0}$  correspondant est appelé *point de fuite principal*. Si  $\delta$  est parallèle au plan  $\Pi$ , on conviendra d'appeler encore point de fuite  $\omega_\delta$  le point de  $\hat{\Pi}$  à l'infini dans la direction  $\delta$ .



On appelle *ligne de fuite* d'une direction de plan  $P$  (non parallèle au plan  $\Pi$  du tableau) la droite  $\Delta_P$  d'intersection de  $\Pi$  avec le plan  $P_0$  parallèle à  $P$  passant par le point de vue  $O$ ; c'est aussi le lieu des points de fuite  $\omega_\delta$  des directions  $\delta$  parallèles à  $P$ ; deux plans  $P_1$  et  $P_2$  parallèles ont évidemment même droite de fuite.



[Si  $P$  est parallèle à  $\Pi$ , on conviendra d'appeler droite de fuite de  $P$  la droite à l'infini  $\delta(\Pi)$  de  $\hat{\Pi}$ .] En particulier, lorsque le plan  $\Pi$  du tableau n'est pas horizontal, on appellera *ligne d'horizon* la droite de fuite des plans horizontaux. [Il est équivalent de dire que le point de fuite principal est sur la ligne d'horizon, que le plan  $\Pi$  du tableau est vertical, ou que l'axe privilégié du regard est horizontal.]

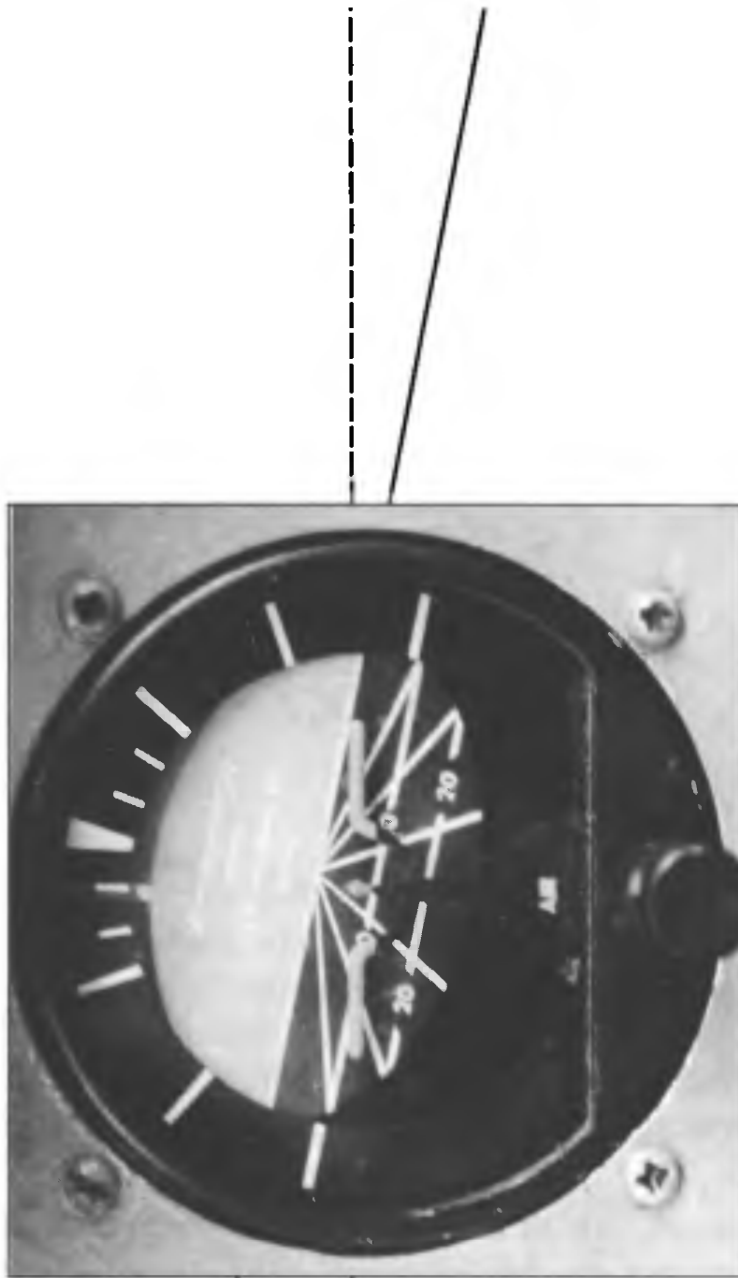
Par *abus de langage*, on utilisera encore la même terminologie pour désigner les images de ces éléments (qui appartiennent tous au plan du tableau) sur le dessin reproduisant le plan du tableau par similitude.

Les théorèmes 5-5 et 5-5' du paragraphe 3 impliquent en particulier les *règles de dessin* suivantes (liste non exhaustive) :

**Règle n° 1.** — Tout sujet (ou portion de sujet) situé dans un plan parallèle au plan du tableau sera dessiné semblable à lui-même (deux droites parallèles au plan du tableau seront dessinées suivant des droites parallèles, tout angle dans un plan parallèle au plan du tableau — en particulier tout angle droit — sera préservé...).



au centre : le point de fuite principal  
sur la ligne de fuite du plan des ailes



*horizon*

ligne de fuite  
du plan des ailes

*horizon artificiel d'un avion*

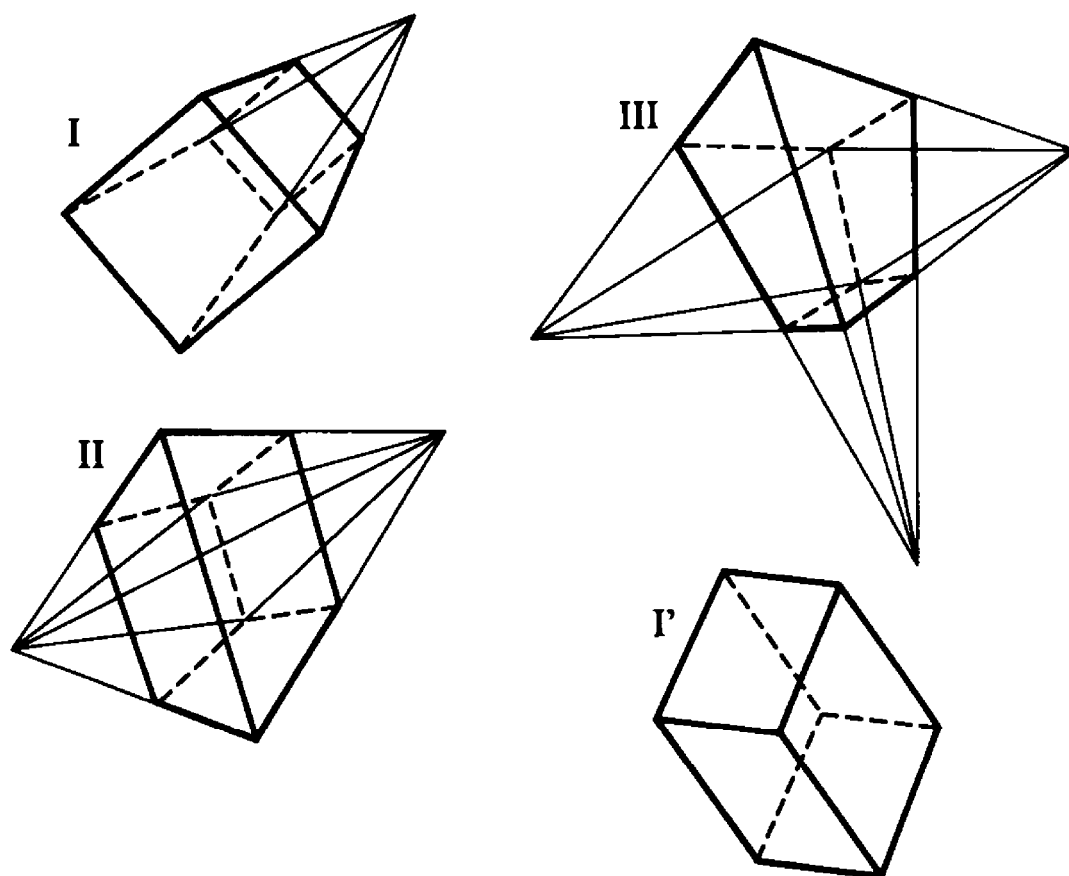
- en descente (le point de fuite principal est en dessous de l'horizon) ;
- en virage à gauche  
(axe privilégié du regard parallèle à l'axe longitudinal de l'avion, dans le plan des ailes).



Mise en évidence du point de fuite principal  
(dessin de Hieronymus Rodler, fin du xv<sup>e</sup> siècle).

**Règle n° 2.** — Toute famille de droites parallèles, non parallèles au plan du tableau, sera dessinée suivant une famille de droites concourant en le point de fuite correspondant à la direction concernée (ou suivant une famille de droites parallèles en perspective cavalière). En particulier, les droites perpendiculaires au plan du tableau seront dessinées suivant des droites passant par le point de fuite principal.

Voici, par exemple, quatre dessins <sup>(1)</sup> d'un cube en perspective, l'œil étant à distance finie pour I, II et III et infiniment éloigné pour I'.



- Pour I, le plan du tableau est parallèle à l'une des faces du cube.
- Pour II, le plan du tableau est parallèle à l'une des arêtes, mais n'est parallèle à aucune face.
- Pour III, le plan du tableau n'est parallèle à aucune arête.
- Pour I', le plan du tableau n'est parallèle à aucune face.

<sup>(1)</sup> Cf. exercice 12 de ce chapitre.



[CD] et [DA], la construction des deux derniers sommets  $E = AD \cap BC$  et  $F = AB \cap CD$  du quadrilatère et du point de rencontre  $P$  des diagonales  $AC$  et  $BD$ , permet le dessin des médianes  $EP$  et  $FP$ , donc aussi celui des milieux  $I, J, K, L$  de chaque côté.

Notons  $U$  et  $V$  les points de fuite (sur  $EF$ ) des diagonales  $BD$  et  $AC$ .

Si l'on suppose, en outre, que  $ABCD$  représente un *carré*, l'œil  $O$  de l'observateur doit nécessairement se trouver sur le cercle  $\gamma$  d'intersection des sphères de diamètre  $[EF]$  et  $[UV]$ , car les droites  $OE$  et  $OF$  doivent être orthogonales, de même que  $OU$  et  $OV$  : le point de fuite principal  $\omega_0$  doit donc se trouver sur celle des perpendiculaires à la ligne de fuite  $H$  du plan du carré qui passe par l'un des points d'intersection  $\alpha$  des cercles de diamètre  $[EF]$  et  $[UV]$  dans le plan du tableau.

En particulier, si le plan du carré est orthogonal à celui du tableau,  $\omega_0$  est sur  $H$ , et l'œil est situé sur la perpendiculaire en  $\omega_0$  au plan du tableau, à la distance  $d = \|\omega_0 \alpha\|$  de  $\omega_0$ .

### Remarques :

1) On a supposé implicitement les quatre points  $EFUV$  à distance finie sur  $H$ . Si l'un d'eux est à l'infini sur  $H$  ( $V$  pour fixer les idées), il faut remplacer dans l'énoncé précédent l'une des sphères (celle de diamètre  $[UV]$  ici) par un plan perpendiculaire à la droite  $H$  (celui passant par  $U$  dans le cas présent).

2) Si  $ABCD$  représente non plus un carré, mais plus généralement un parallélogramme pour lequel on connaît les angles  $(AB, AD)$  et  $(AC, BD)$ , l'énoncé précédent se généralise en remplaçant les cercles de diamètre  $[EF]$  et  $[UV]$  par les cercles du plan tableau qui sont respectivement lieux des points tels que

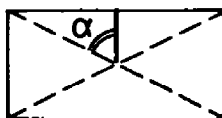
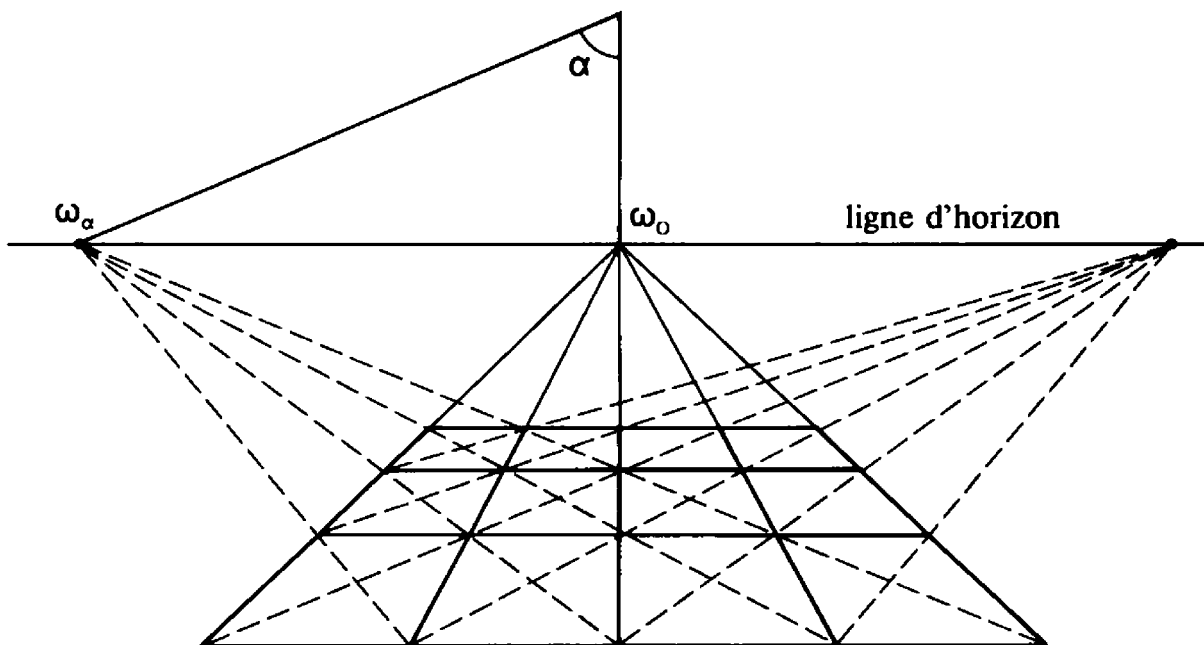
$$(MF, ME) = (AB, AD) \quad \text{et} \quad (MV, MU) = (AC, BD).$$

3) On en déduit aussi comment trouver le meilleur point de vue pour regarder un tableau (lorsque le peintre a respecté les lois de la perspective). Par exemple, si le plan du tableau est vertical, et si on y représente un dallage, dans un plan horizontal, par des rectangles dont les côtés sont parallèles à la ligne d'horizon ou

perpendiculaires, et tels que les perpendiculaires à la ligne d'horizon fassent, avec les diagonales, un angle  $\alpha$ , le meilleur point de vue consiste à se mettre en face du point de fuite principal  $\omega_0$ , à la distance

$$d = \frac{\|\omega_0 \omega_\alpha\|}{\operatorname{tg} \alpha}$$

du tableau ( $\omega_\alpha$  désignant le point de fuite de l'une des directions diagonales).

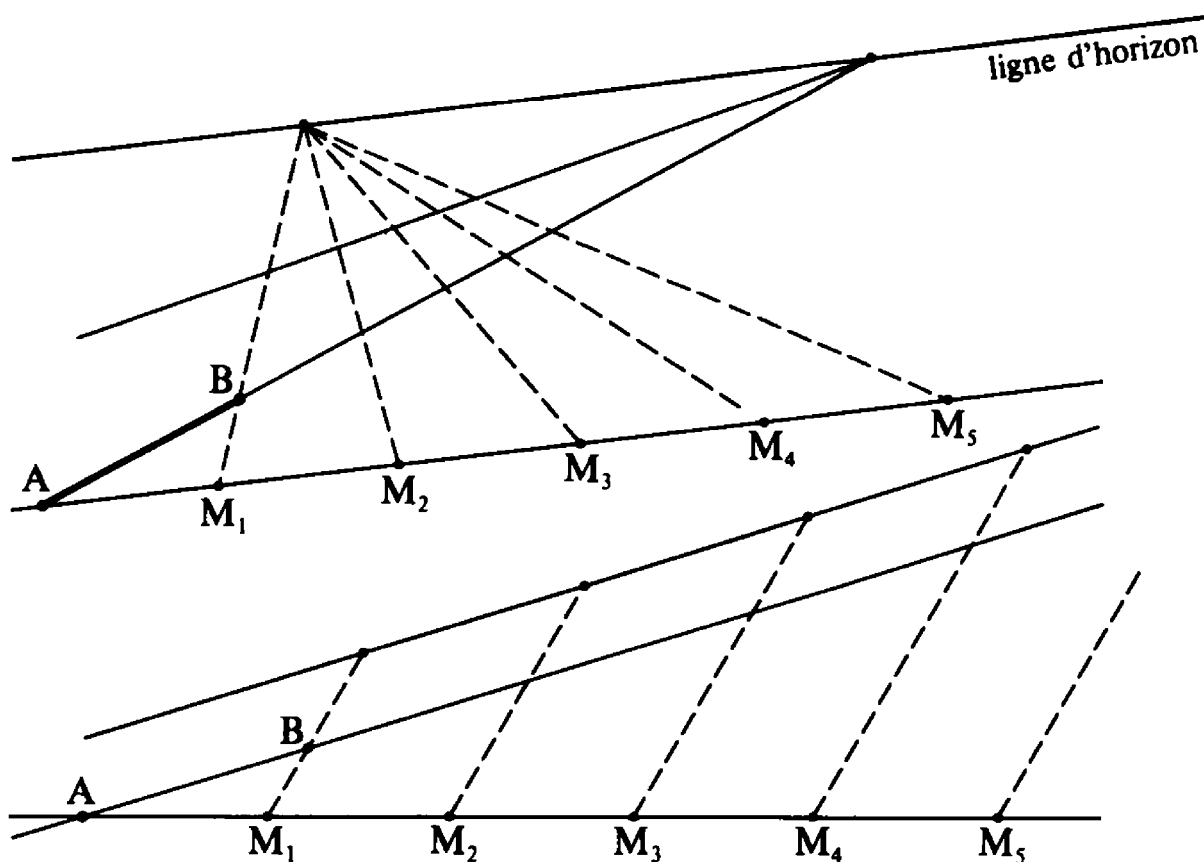


*dallage rectangulaire*

$$d = \frac{\|\omega_0 \omega_\alpha\|}{\operatorname{tg} \alpha}$$

(en particulier  $d = \|\omega_0 \omega_\alpha\|$ , si le dallage est carré)

**Règle n° 4.** — Le dallage rectangulaire précédent fournit un moyen de définir une « échelle de profondeur » sur les droites perpendiculaires au plan du tableau. Supposons plus généralement que l'on veuille dessiner des segments qui, dans la réalité, ont même longueur et sont portés par des droites parallèles. Ils ne seront dessinés suivant des segments de même longueur que si leur direction est parallèle au plan du tableau. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, il suffit de « dessiner en perspective le théorème de Thalès » pour s'y ramener.

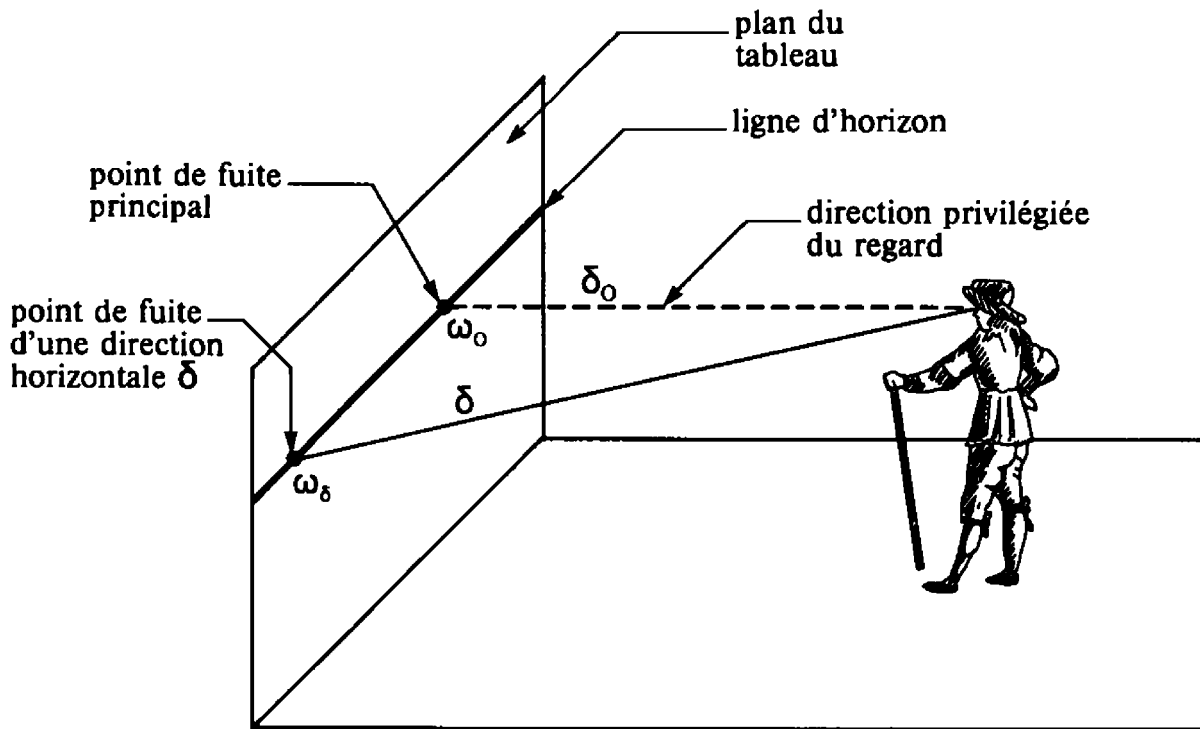


*le théorème de Thalès, vu en perspective :*  
 application au report d'une distance  $\parallel AB \parallel$   
 sur la droite AB ou toute autre droite parallèle

**Règle n° 5.** — Elle concerne le dessin des coniques en perspective, et en particulier des cercles, et sera énoncés au chapitre 12 (paragraphe 2).

Très souvent, en particulier sur beaucoup de tableaux des peintres de la Renaissance et de l'époque classique, le plan du tableau est supposé vertical (ou — ce qui revient au même — la direction privilégiée du regard est supposée horizontale) : le point de fuite principal est alors situé sur la ligne d'horizon, et les droites verticales sont dessinées parallèlement entre elles, perpendiculairement à la ligne d'horizon.

La photographie en plongée ou contre-plongée, et l'horizon artificiel d'un avion en cabré ou piqué, nous fournit des exemples de situations pratiques où il n'en est plus ainsi.



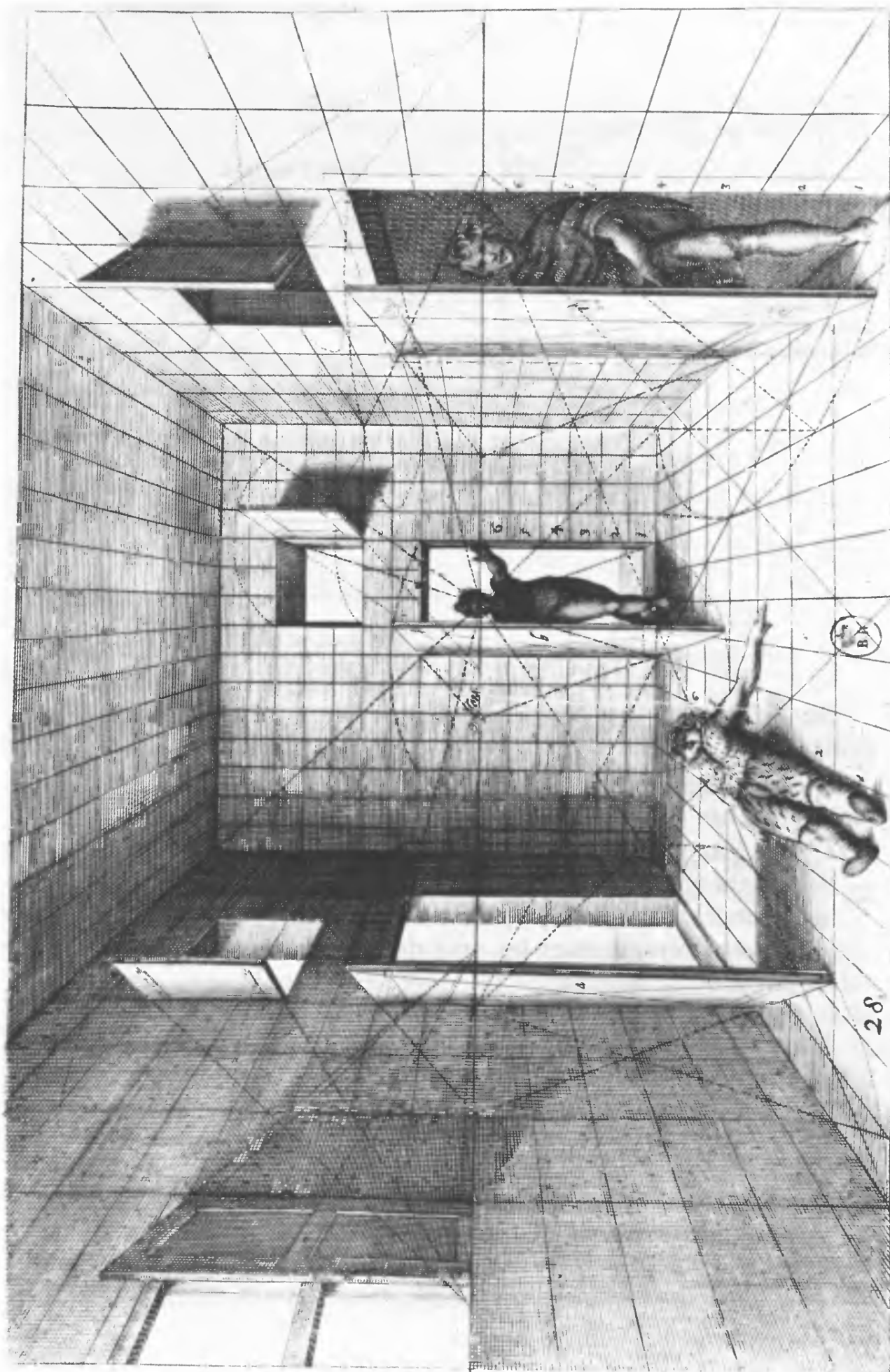
Sur l'étude de Jan Vredeman des Vries (p. 148), sont mis en évidence :

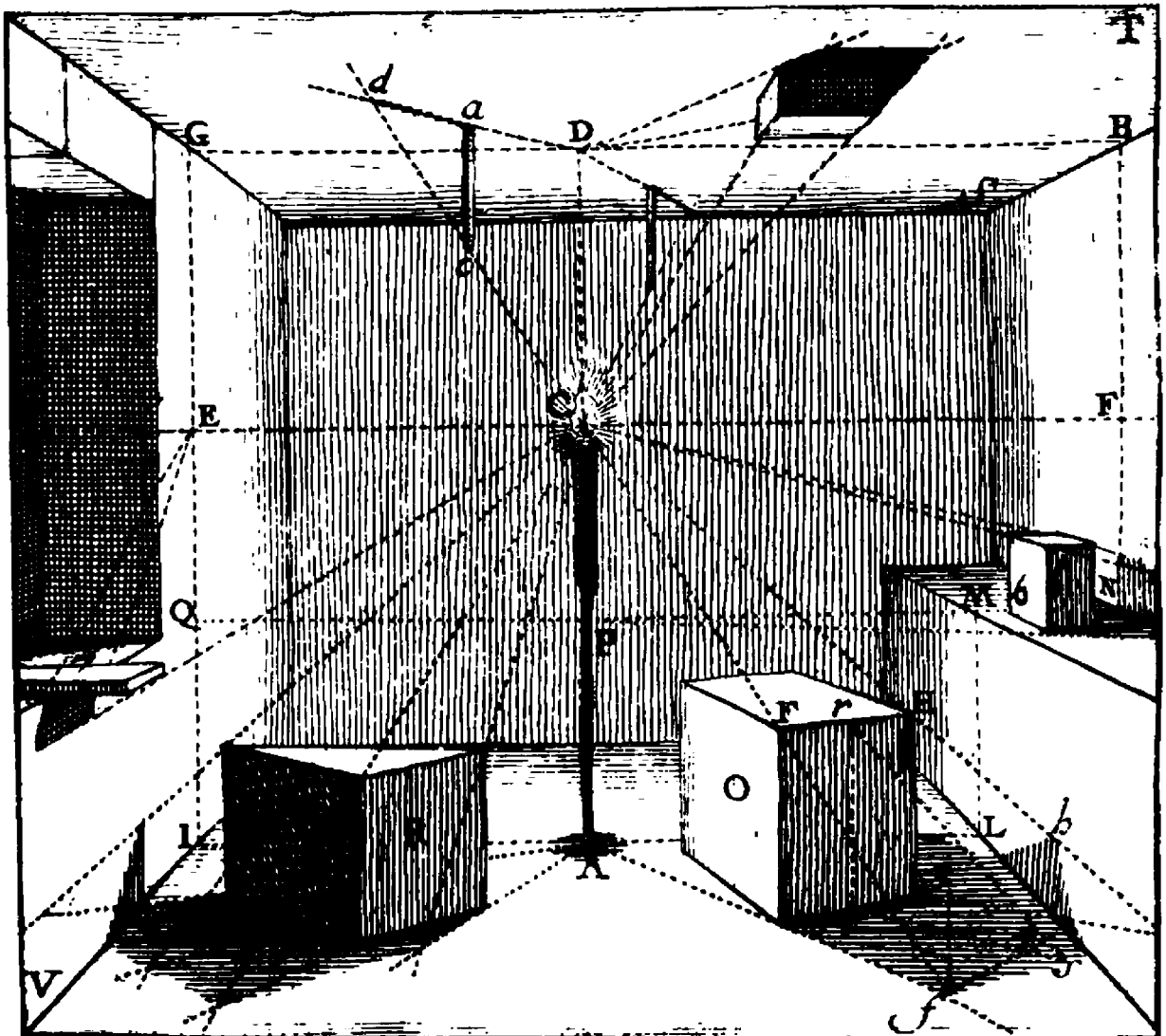
- la ligne d'horizon,
- le point de fuite principal (au centre du visage du personnage entrant par la porte du fond),
- de nombreux points de fuite secondaires correspondant aux horizontales des diverses portes et fenêtres entrouvertes,
- les ellipses représentant les arcs de cercle décrits par des coins de porte ou fenêtre.

Noter aussi que la ligne d'horizon passe par les yeux des deux personnages debout : c'est dire que leurs yeux sont supposés à la même hauteur au-dessus du sol que les yeux de l'observateur.

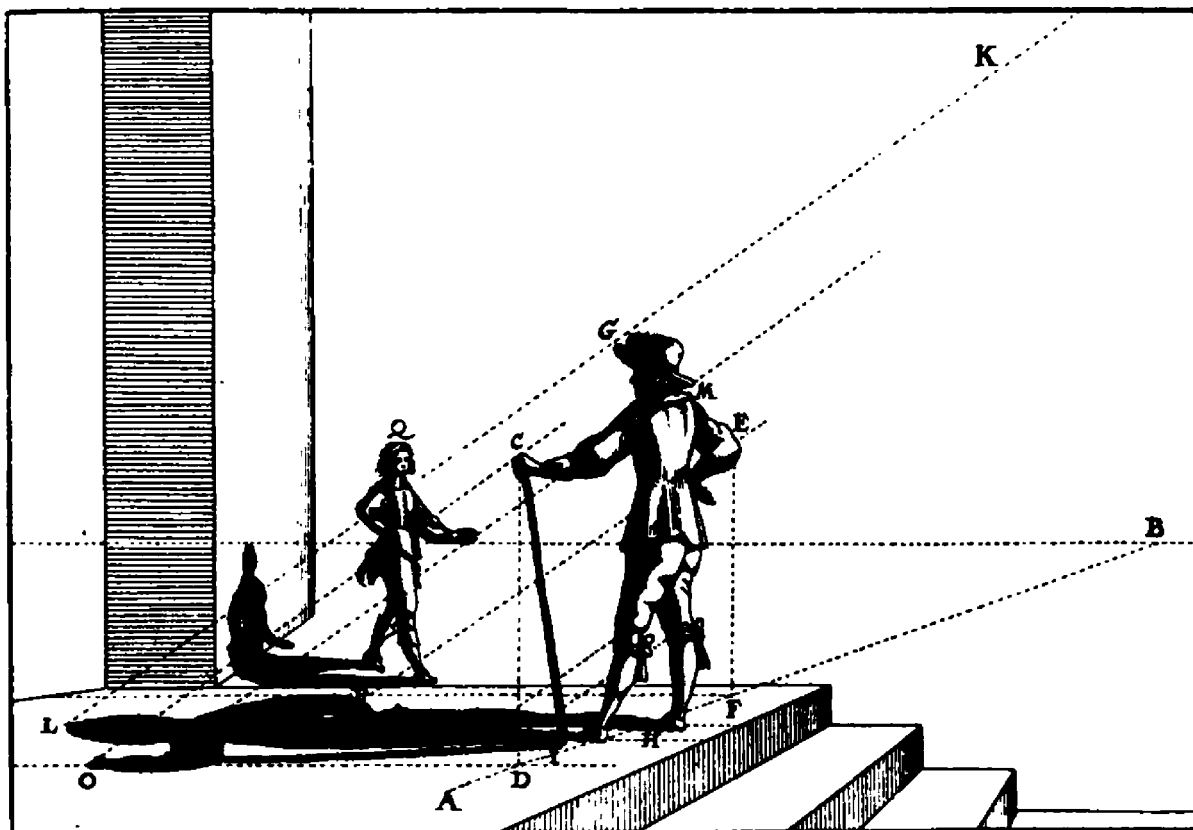
Pour terminer ce chapitre, mentionnons que les problèmes d'ombre portée font également intervenir des projections, coniques ou cylindriques selon que la source lumineuse est proche, ou au contraire très éloignée telle le soleil. C'est ce qu'illustrent les deux reproductions du traité de perspective du R. P. Dubreuil (p. 149).







Extrait du *Traité de perspective*  
du R. P. Dubreuil (1602-1670)



L'absence de pénombre, sur la première reproduction, suppose la source lumineuse du flambeau ponctuelle. Sur le second dessin, cette même absence de pénombre suppose que l'on néglige le « diamètre apparent » du soleil, c'est-à-dire que l'on suppose celui-ci vu de la terre suivant un point et non un « disque ».

## 8 - Exercices sur le chapitre 5

- 1/ On note  $ABCA'B'C'$  les six sommets d'un quadrilatère complet en choisissant les notations de façon que
- les diagonales soient les droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,
  - les points  $ABC$  ne soient pas alignés,
  - les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  soient alignés.

Etant donné un point  $M_1$  de  $AB$ , on définit :

$$M_2 = A'M_1 \cap AC, \quad M_3 = C'M_2 \cap BC, \quad M_4 = B'M_3 \cap AB$$

$$M_5 = A'M_4 \cap AC, \quad M_6 = C'M_5 \cap BC, \quad M_7 = B'M_6 \cap AB.$$

A quel point déjà construit  $M_7$  est-il égal? [On pourra étudier d'abord le cas où  $A'B'C'$  est la droite de l'infini.]

- 2/ Démontrer directement le théorème de Pappus (énoncé au chapitre 8, corollaire 8-11) dans le cas particulier où  $u$  et  $v$  sont à l'infini. En déduire le cas général.
- 3/ En utilisant l'exercice 4 du chapitre 3, démontrer directement le théorème de Pascal (corollaire 8-13) dans le cas d'une conique  $\mathcal{C}$  arbitraire.
- 4/ Etant donnés un quadrangle ABCD dans le plan (c'est-à-dire quatre points, tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés), et une droite  $\Delta$  du plan ne passant par aucun de ces quatre points, on pose :

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cap AB, & y &= \Delta \cap AC, & z &= \Delta \cap AD, \\ t &= \Delta \cap BC, & u &= \Delta \cap BD, & v &= \Delta \cap CD, \end{aligned}$$

et l'on note respectivement  $x', y', z', t', u', v'$  les conjugués harmoniques de  $x, y, z, t, u, v$  par rapport à  $(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D)$  et  $(C, D)$ .

a) En quel point les droites  $x't'$  et  $z'v'$  sont-elles concourantes? Même question pour  $x'z'$  et  $v't'$ ,  $z'y'$  et  $u't'$ ,  $u'z'$  et  $t'y'$ ,  $x'u'$  et  $y'v'$ ,  $u'v'$  et  $x'y'$ . [On pourra étudier d'abord le cas où  $\Delta$  est la droite de l'infini.]

b) Montrer que les trois droites  $x'v'$ ,  $u'y'$  et  $z't'$  sont concourantes. Où se trouve le conjugué harmonique de leur point de concours O, relativement à  $(x', v')$ , à  $(u', y')$ , à  $(z', t')$ ?

- 5/ a) Soit  $\Gamma$  une conique à centre, de foyers  $F$  et  $F'$ , dont les sommets du grand axe sont notés  $A$  et  $A'$ . Montrer que le lieu des sommets des cônes (ou cylindre) de révolution qui passent par  $\Gamma$  est la conique à centre  $\gamma$ , de foyers  $A$  et  $A'$ , de sommets  $F$  et  $F'$ , et qui se trouve dans le plan perpendiculaire à celui de  $\Gamma$  qui passe par la droite  $AA'FF'$ . [Utiliser les deux sphères  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  inscrites dans un tel cône (ou cylindre) qui sont tangentes en  $F$  et  $F'$  au plan de  $\Gamma$ .]

*b)* Enoncer et démontrer un résultat analogue si  $\Gamma$  est une parabole.

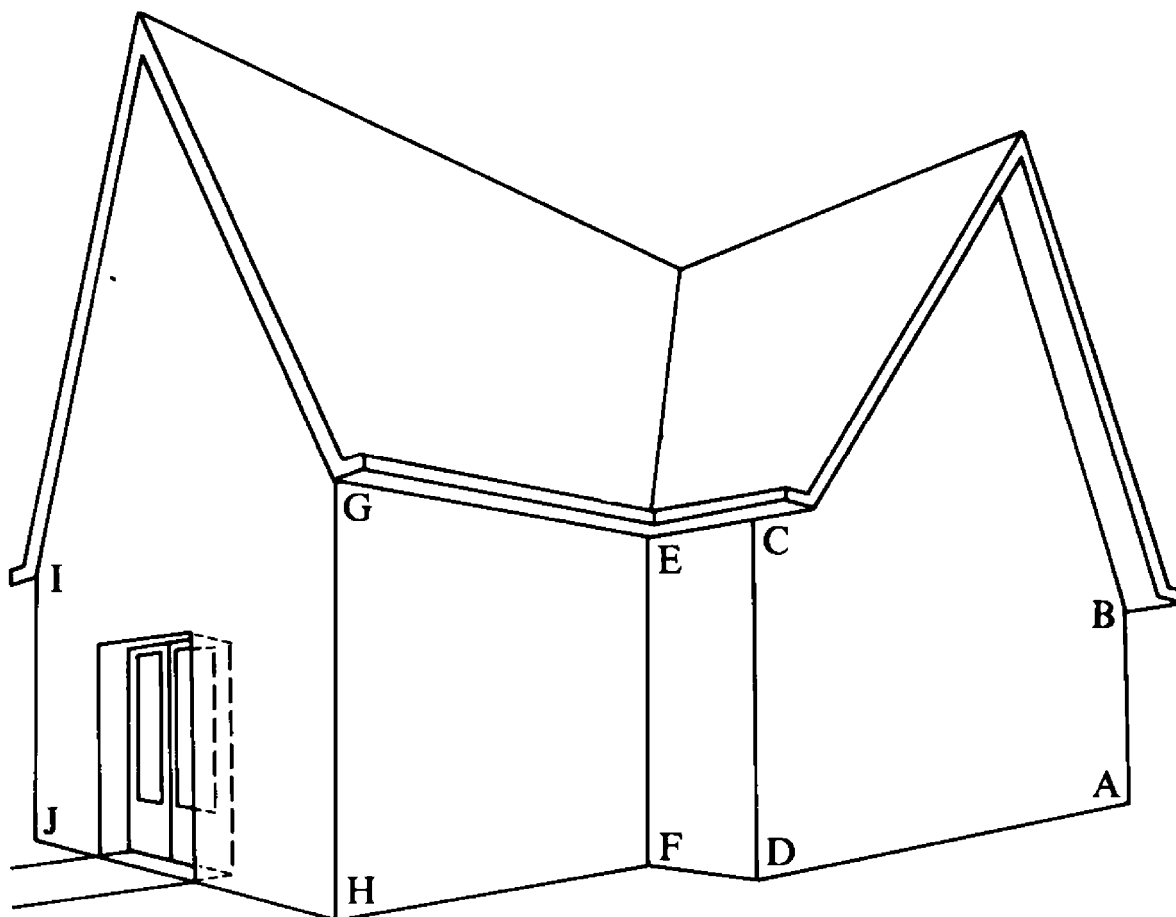
- 6/ Etant donné un quadrilatère complet de sommets  $ABCA'B'C'$ , avec les mêmes conventions de notation qu'à l'exercice 1 de ce chapitre, et trois points  $\alpha$  sur  $BC$ ,  $\beta$  sur  $AC$  et  $\gamma$  sur  $AB$ , on note  $Q$  le produit des trois birapports :

$$Q = (\alpha, A', B, C) \times (\beta, B', C, A) \times (\gamma, C', A, B).$$

Interpréter géométriquement les conditions

$$Q = 1, \quad Q = -1.$$

- 7/ Travail sur la figure ci-dessous.



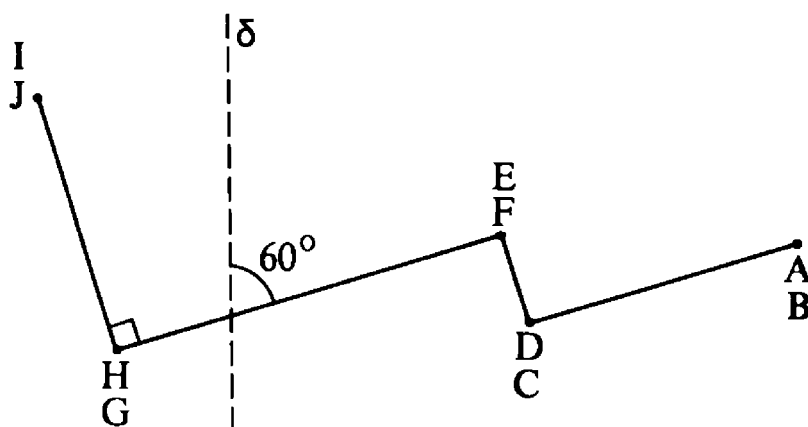
On suppose l'axe privilégié du regard horizontal, et les deux directions de pans de murs verticaux inclinées à  $45^\circ$  par rapport à cet axe.

a) Mettre en place la ligne d'horizon, et le point de fuite principal.

b) Sur le pan de mur ABCD, mettre en place une autre porte, de même hauteur et avec un encastrement de même profondeur que pour la porte déjà en place sur le pan de mur GHIJ, occupant en largeur le tiers médian du pan de mur concerné.

c) Mettre en place une fenêtre sur le pan de mur EFGH vérifiant des hypothèses analogues aux précédentes, en supposant le bas de la fenêtre à mi-hauteur.

- 8/ Reprendre les mêmes problèmes de dessin sur la maison qu'à l'exercice précédent, mais en faisant cette fois-ci les hypothèses suivantes : l'axe privilégié du regard,  $\delta$ , est toujours supposé horizontal; mais on suppose maintenant que les horizontales des pans de mur CDEF et GHIJ font un angle de  $30^\circ$  avec  $\delta$ , tandis que celles des pans de mur ABCD et EFGH font un angle de  $60^\circ$ , selon le schéma :



- 9/ Etant donné un plan  $\Pi$  dans un espace euclidien de dimension 3, et un quadrilatère complet de sommets ABCDEF dans  $\Pi$  (EF étant l'une des diagonales), quels sont tous les carrés  $A_1B_1C_1D_1$  de l'espace admettant une perspective sur ABCD, et quelles sont les projections correspondantes?

10/ Etant donnés un plan  $\Pi$ , un point  $\omega$  de  $\widehat{\Pi}$ , une droite  $\delta$  de  $\widehat{\Pi}$ , et un nombre  $k$  réel non nul, on appelle *homologie* de « centre »  $\omega$ , « d'axe »  $\delta$ , et de « rapport »  $k$  la transformation

$h : \widehat{\Pi} \longrightarrow \widehat{\Pi}$  définie en associant

— à tout point  $M \in \widehat{\Pi} - \delta - \{\omega\}$ , le point  $M'$  de  $\widehat{\Pi}$  sur la droite  $\omega M$  tel que, si  $m$  désigne le point  $\omega M \cap \delta$ , on ait :  $(\omega, m, M', M) = k$ ,

— admettant le point  $\omega$  et les points de  $\delta$  comme points invariants.

[Si  $k = -1$ , l'homologie est dite *harmonique*.]

a) Identifier les homologies et homologies harmoniques,

— lorsque  $\delta$  est la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$ ,

— lorsque  $\omega$  est à l'infini (en particulier dans la direction orthogonale à celle de  $\delta$ ).

b) Préciser quelle est la composée de deux homologies de même axe.

c) Si  $(A, A')$  est un couple de points homologues par  $h$ ,  $A \neq A'$ , on associe, à tout point  $M$  de  $\widehat{\Pi}$  non situé sur la droite  $\omega AA'$ , le point  $x = \delta \cap AM$ , puis le point  $M' = xA' \cap \omega M$ . Montrer que  $M' = h(M)$ .

d) Montrer que  $h$  transforme toute droite  $D$  de  $\widehat{\Pi}$  en une droite de  $\widehat{\Pi}$  [distinguer selon que  $D$  passe ou non par  $\omega$ ].

e) Si  $\Pi$  est plan de l'espace à trois dimensions, et  $h$  une homologie de rapport  $k$  dans  $\Pi$ , montrer qu'il existe un autre plan  $\Pi_1$  et une perspective  $p$  réalisant une bijection de  $\widehat{\Pi}_1$  sur  $\widehat{\Pi}$ , tels que  $p^{-1} \circ h \circ p$  soit une homothétie de rapport  $k$  dans  $\Pi_1$ .

f) Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles vérifiant les conditions équivalentes (I) et (II) du théorème de Desargues 5-8. Montrer que si le point de concours  $\omega$  des droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  n'est pas sur la droite  $\alpha\beta\gamma$ , les deux triangles sont homologues dans une homologie d'axe  $\alpha\beta\gamma$  et de centre  $\omega$ .

g) La composée  $h_1 \circ h_2$  de deux homothéties de rapport  $k$  et  $\frac{1}{k}$  est — on le sait — une translation. Généraliser le résultat à des homologies.

- 11/ Soit  $D_0$  une droite (de référence) dans un plan euclidien  $\Pi$ . A toute droite  $D$  de  $\Pi$ , associons son « angle polaire » :

$$\theta(D) = (D_0, D).$$

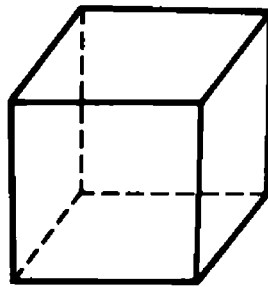
Démontrer que le birapport de quatre droites  $D_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), passant par un même point  $A$  de  $\Pi$ , est égal à

$$\frac{\operatorname{tg}(\theta_1(D)) - \operatorname{tg}(\theta_3(D))}{\operatorname{tg} \theta_2(D) - \operatorname{tg} \theta_3(D)} : \frac{\operatorname{tg} \theta_1(D) - \operatorname{tg} \theta_4(D)}{\operatorname{tg} \theta_2(D) - \operatorname{tg} \theta_4(D)},$$

du moins lorsque tous ces nombres sont définis. Généraliser si l'un des angles polaires  $\theta_i(D)$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$ .

Comment définir le birapport de quatre points sur la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$ ?

- 12/ Le classique schéma du cube, où l'une des faces est dessinée suivant un carré, est-il conforme aux règles de la perspective cavalière?



Comment le justifier?





## CHAPITRE VI

# *Inversions*

### 1 - Introduction

Au chapitre 3, ont été en particulier étudiés les faisceaux de droites et cercles, et les questions d'orthogonalité entre ces courbes. On y a pressenti que droites et cercles y jouaient des rôles la plupart du temps interchangeables, une droite n'étant « qu'un cercle passant par le point à l'infini ». Cette idée intuitive va être entièrement explicitée, grâce à la notion de « projection stéréographique » (perspective sur un plan  $\Pi$  d'une sphère  $\Sigma$  passant par le point de vue  $S$ , et donc le plan tangent en  $S$  est parallèle à  $\Pi$ ); or nous verrons qu'une telle projection stéréographique est la restriction d'une « inversion » dans l'espace.

Bien entendu ces notions de faisceaux de droites ou cercles, et d'orthogonalité, sont préservées par toute similitude. Mais ces dernières préservent en plus la notion de droite et de point à l'infini. Il est donc intéressant d'exhiber d'autres transformations préservant encore globalement cercles et droites, faisceaux, et orthogonalité, mais ne conservant plus la notion de droite ni celle de point à l'infini, et pouvant par conséquent transformer certaines droites en cercles, et certains cercles en droites : tel sera le cas des « inversions », que nous allons étudier.

Revenons à la projection stéréographique. Assimilant la sphère  $\Sigma$  à la « sphère de Riemann »<sup>(1)</sup> qu'on étudie à propos des fonctions

<sup>(1)</sup> La connaissance des fonctions de variable complexe, et en particulier des fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann, n'est pas un prérequis à la lecture de ce chapitre.

méromorphes, et le plan  $\Pi$  au plan complexe  $\mathbb{C}$ , l'étude géométrique des transformations conformes de la sphère de Riemann devient, après projection stéréographique dans  $\mathbb{C}$ , celle des transformations homographiques

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Puisque  $\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2} \times \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$  pour  $c \neq 0$ , ces transformations

se décomposent en produits de

- translations  $z \longrightarrow z + \gamma$ ,
- similitudes  $z \longrightarrow \alpha \cdot z$  ( $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ),
- et en la transformation  $z \longmapsto 1/z$  laquelle se décompose en symétrie par rapport à une droite  $z \longrightarrow \bar{z}$ , et « inversion »  $z \longrightarrow 1/\bar{z}$ .

[Nous engageons le lecteur à utiliser cette remarque pour vérifier analytiquement les propriétés des inversions que nous avons choisi de démontrer plutôt géométriquement, les calculs masquant souvent la géométrie sous-jacente.]

Dans un espace euclidien  $E$ , on appelle *inversion de pôle  $S$  et puissance  $k$*  ( $S$  désignant un point de  $E$ , et  $k$  un nombre réel non nul) l'application

$$J : E - \{S\} \longmapsto E - \{S\}$$

qui, à tout point  $M$  de  $E - \{S\}$ , associe le point  $M'$  de la droite  $SM$  tel que

$$\overline{SM} \cdot \overline{SM'} = k.$$



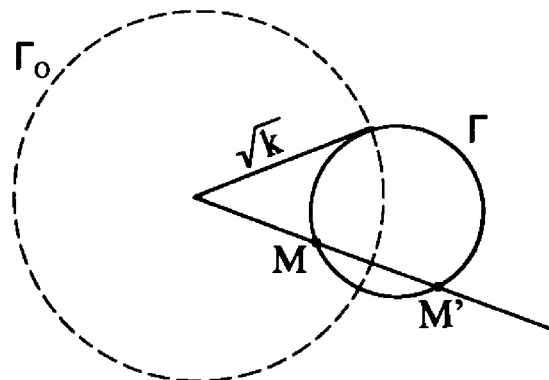
L'application  $J$  est évidemment bijective, et involutive (c'est-à-dire qu'elle vérifie  $J^{-1} = J$ ).

On appelle hypersphère d'inversion (sphère d'inversion si  $\dim E = 3$ , cercle d'inversion si  $\dim E = 2$ ) l'hypersphère  $\Gamma_0$  de centre  $S$  et rayon  $\sqrt{|k|}$ .

De ces définitions, résulte que sont *globalement invariants* par l'inversion :

- tout sous espace affine de  $E$  passant par  $S$  (privé de  $S$ ), en particulier toute droite, et tout plan;
- l'hypersphère d'inversion  $\Gamma_0$ , ainsi que son intersection avec tout espace affine passant par  $S$ ;
- tout cercle  $\Gamma$  dont le plan passe par  $S$  et tel que  $\mathcal{P}_\Gamma(S) = k$ .

En outre, si  $k$  est positif, l'hypersphère  $\Gamma_0$  est invariante point par point. Dans chaque plan  $\Pi$  passant par  $S$ , les cercles  $\Gamma$  de  $\Pi$  vérifiant  $\mathcal{P}_\Gamma(S) = k$  sont alors les cercles orthogonaux au cercle  $\Gamma_0 \cap \Pi$  des points doubles dans  $\Pi$ .

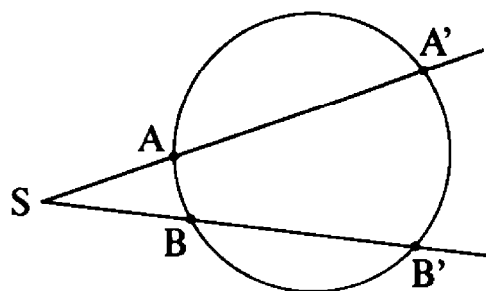
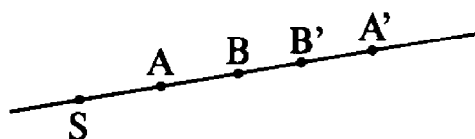


### Proposition 6-1

*Soient  $(A, A')$  et  $(B, B')$  deux couples de points homologues par une inversion de pôle  $S$ . Les quatre points  $A, A', B, B'$  sont alors toujours*

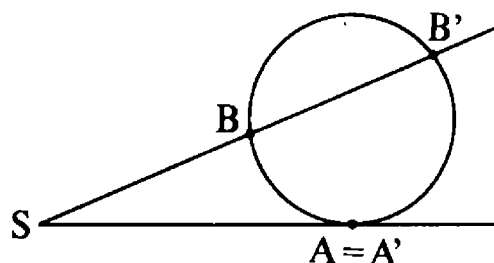
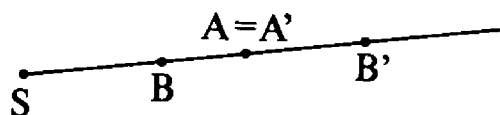
- *ou bien alignés sur une droite passant par  $S$ ,*
- *ou bien cocycliques, sur un cercle  $\Gamma$  invariant par l'inversion et dans un plan passant par  $S$ , vérifiant :  $\mathcal{P}_\Gamma(S) = k$ .*

Supposons  $A$  et  $A'$  distincts. Si  $B$  appartient à la droite  $SAA'$ ,  $B'$  aussi, par définition même de l'inversion.



Si  $B$  n'est pas sur la droite  $AA'$ , notons  $\Gamma$  le cercle circonscrit au triangle  $(BAA')$ . Puisque  $A$  et  $A'$  sont homologues,  $\overline{SA} \cdot \overline{SA'} = k$  : la puissance  $\mathcal{P}_\Gamma(S)$  est donc égale à la puissance d'inversion. L'inverse  $B'$  ne peut donc se trouver que là où la droite  $SB$  recoupe  $\Gamma$  (éventuellement  $B'$  est confondu avec  $B$ , si  $SB$  est tangente à  $\Gamma$ ).

Si  $A$  et  $A'$  sont confondus, on distingue, là encore le cas où  $B$  appartient à la droite  $SA$ , auquel cas  $B'$  y appartient aussi. Sinon, on prend pour  $\Gamma$  le cercle passant par  $B$  et tangent en  $A$  à la droite  $SA$ . La suite de la démonstration ne change pas.



## 2 - Conservation des angles et des contacts. Changement de l'orientation (Cas d'une inversion *plane*)

Supposons  $\dim E = 2$ . Étant donné une inversion  $\mathcal{J} : E - \{S\} \longrightarrow E - \{S\}$  de pôle  $S$  et puissance  $k$ , utilisons les coordonnées polaires relatives à un repère orthonormé d'origine  $S$  dans  $E$  : au point  $M$  dont  $(r, \theta)$  constitue un<sup>(2)</sup> système de

<sup>(2)</sup> Rappelons que si  $(r, \theta)$  est un système de coordonnées polaires de  $M$ ,  $(-r, \theta + \pi)$  en est un autre!

coordonnées polaires,  $J$  associe le point  $M'$  dont un système de coordonnées polaires est donné par  $(r', \theta')$  vérifiant

$$\begin{cases} r' = \frac{k}{r} & \text{dans } \mathbb{R}^*, \\ \theta' = \theta & \text{dans } \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Cette application est différentiable et transforme donc la courbe  $t \longrightarrow \overrightarrow{SM}(t) = r(t) \vec{u}(\theta(t))$ , différentiable dans  $E - \{S\}$ , en la courbe différentiable  $t \longrightarrow \overrightarrow{SM}'(t) = \frac{k}{r(t)} \vec{u}(\theta(t))$  ( $\vec{u}(\theta)$  désignant le vecteur unitaire d'angle polaire  $\theta$ ). Puisque

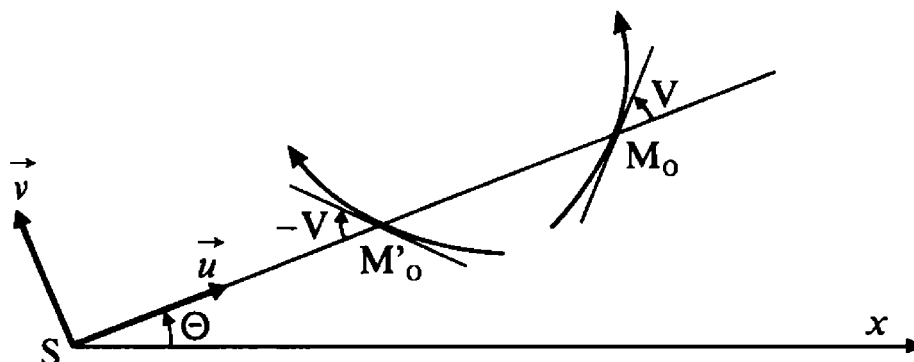
$$\frac{d\overrightarrow{M}(t)}{dt} = r \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \vec{u} + \frac{d\theta}{dt} \vec{v} \right).$$

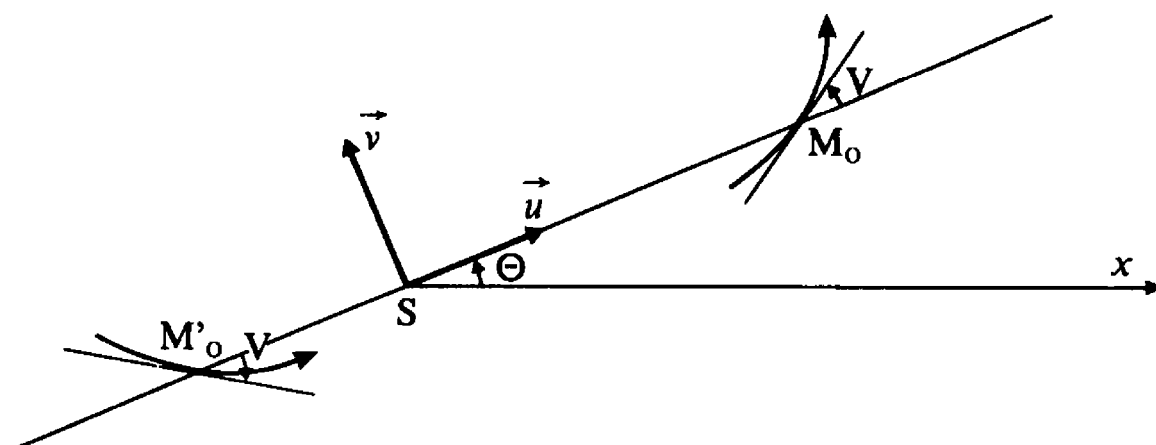
(où l'on a posé  $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$ ), tandis que

$$\frac{d\overrightarrow{M}'(t)}{dt} = \frac{k}{r} \left( -\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \vec{u} + \frac{d\theta}{dt} \vec{v} \right),$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \left( \vec{u}, \frac{d\overrightarrow{M}'}{dt} \right) &= \pi - \left( \vec{u}, \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \right) \quad \text{si } k > 0, \\ &= - \left( \vec{u}, \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \right) \quad \text{si } k < 0. \end{aligned}$$





Dans tous les cas, si  $T$  désigne la droite tangente en  $M_0$  à la courbe  $\gamma$  décrite par  $M(t)$  et  $T'$  celle tangente en  $M'_0 = J(M_0)$  à la courbe inverse  $\gamma'$  décrite par  $M'(t)$ , on a la

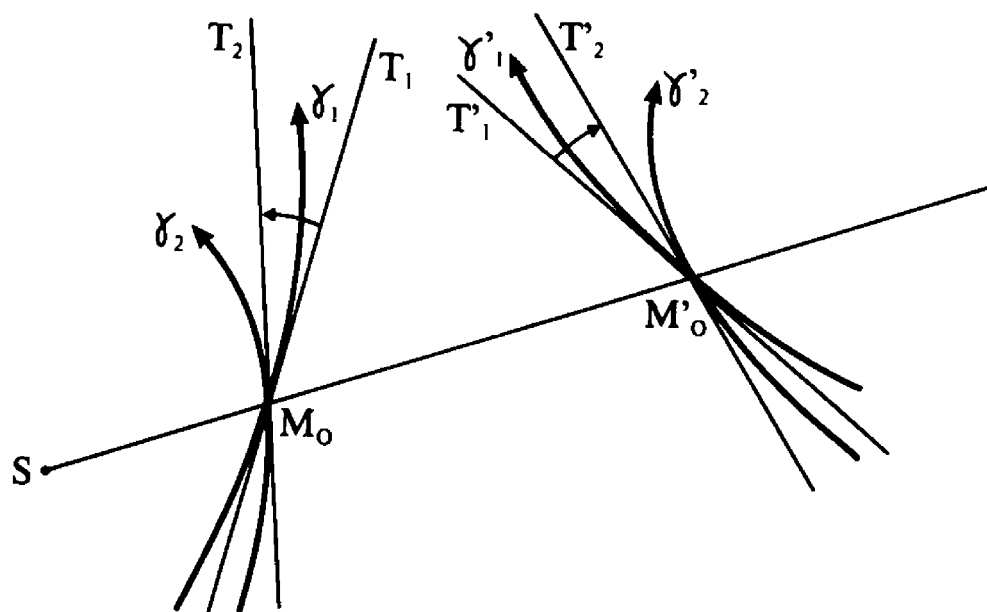
**Proposition 6-2**

$$(SM'_0, T') = -(SM_0, T)$$

(égalité entre angles orientés de droites).

**Corollaire 1**

Si deux courbes différentiables  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $E - \{S\}$  se coupent en  $M_0$ , si  $T_1$  et  $T_2$  désignent leur tangente respective en  $M_0$ ,  $T'_1$  et



$T'_2$  désignant les tangentes respectives en  $M'_0 = J(M_0)$  aux courbes inverses  $\gamma'_1$  et  $\gamma'_2$ , on a :

$$(T'_1, T'_2) = -(T_1, T_2).$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } (T'_1, T'_2) &= (SM'_0, T'_2) - (SM'_0, T'_1) \\ &= -(SM_0, T_2) + (SM_0, T_1) \\ &= -(T_1, T_2). \end{aligned}$$

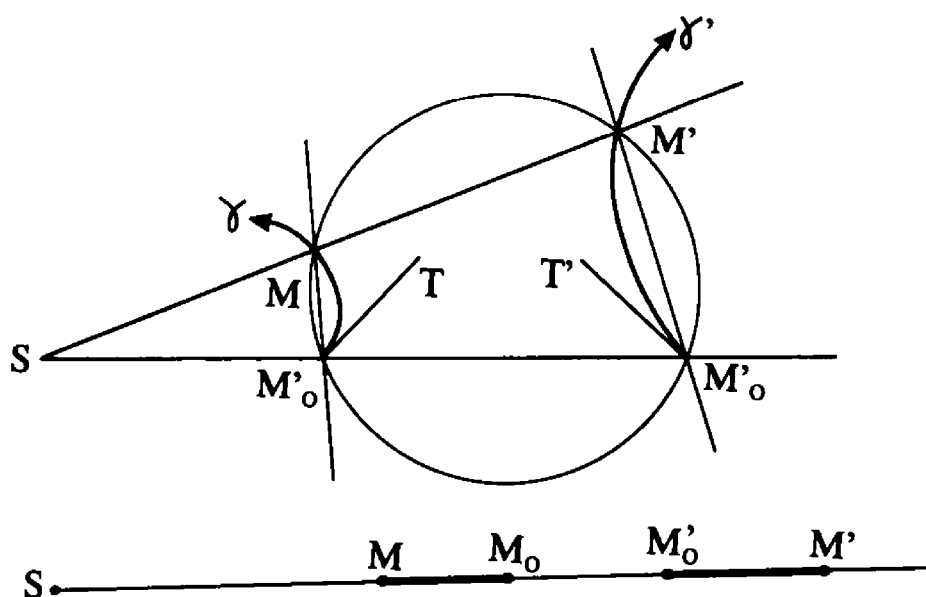
### Corollaire 2

$J$  renverse l'orientation de  $E - \{S\}$ .

*Autre démonstration de la proposition 6-2.* — Notons  $M$  un point de  $\gamma$  et  $M'$  son inverse.

Quand  $M$  tend vers  $M_0$ ,  $MM_0$  tend vers  $T$ ,  $M'_0$  tend vers  $M'_0$  et  $M'M'_0$  tend vers  $T'$ . Les quatre points  $M_0, M'_0, M, M'$  étant cocycliques ou alignés sur une droite passant par  $S$  (proposition 6-1),

$$(SM'_0, M'_0M) = -(SM, M_0M).$$





Quand  $M$  tend vers  $M_0$ , le premier membre de l'égalité tend vers  $(SM'_0, T')$  et le second vers  $-(SM_0, T)$ . c.q.f.d.

### Corollaire 3

*$J$  transforme deux courbes tangentes en  $M_0$  en des courbes tangentes en  $M'_0 = J(M_0)$ , et deux courbes orthogonales en  $M_0$  en des courbes orthogonales en  $M'_0$ .*

[Appliquer le corollaire 1 au cas  $(T_1, T_2) = 0$  ou  $\pi/2$ .]

## 3 - Conservation des cercles et droites (inversion plane)

Supposons toujours  $\dim E = 2$ .

### Théorème 6-3

*Une inversion  $J$  de pôle  $S$*

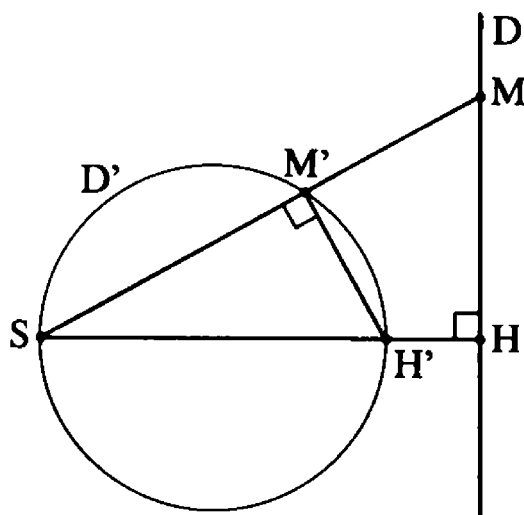
- (i) *conserve globalement toute droite passant par  $S$*
- (ii) *transforme une droite  $D$  ne passant pas par  $S$ , en un cercle passant par  $S$  et ayant en  $S$  une tangente parallèle à  $D$  (et un cercle  $\Gamma$  passant par  $S$  en une droite ne passant pas par  $S$  parallèle à la tangente à  $\Gamma$  en  $S$ ),*
- (iii) *transforme le cercle  $\Gamma$  ne passant pas par  $S$  en le cercle homothétique de  $\Gamma$  dans l'homothétie de centre  $S$  et de rapport  $k/\mathcal{P}_\Gamma(S)$ .*

(i) a déjà été vu.

Si  $D$  est une droite du plan ne passant pas par  $S$ , notons  $H$  le pied de la perpendiculaire à baissée de  $S$  sur  $D$ , et  $H' = J(H)$  son inverse. Si  $M$  est un autre point de  $D$ , et  $M'$  son inverse, les quatre points  $M, M', H$  et  $H'$ , qui ne sont pas alignés (puisque  $D$  ne passe pas par  $S$ ) sont cocycliques d'après la proposition 5-1. On en déduit :

$$(M'S, M'H') = (HH', D).$$

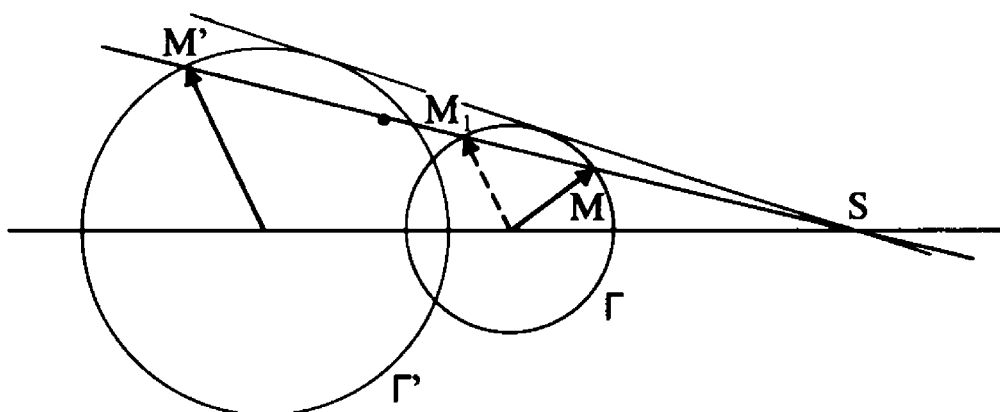
Puisque  $(HH', D) = \frac{\pi}{2}$ ,  $(M'S, M'H') = \frac{\pi}{2}$  :  $M'$  appartient au cercle de diamètre  $[SH']$ . Réciproquement tout point  $M'$  de ce cercle, autre qu  $S$ , est l'image par  $J$  du point  $M$  où  $SM'$  coupe  $D$ , d'où la partie (ii).

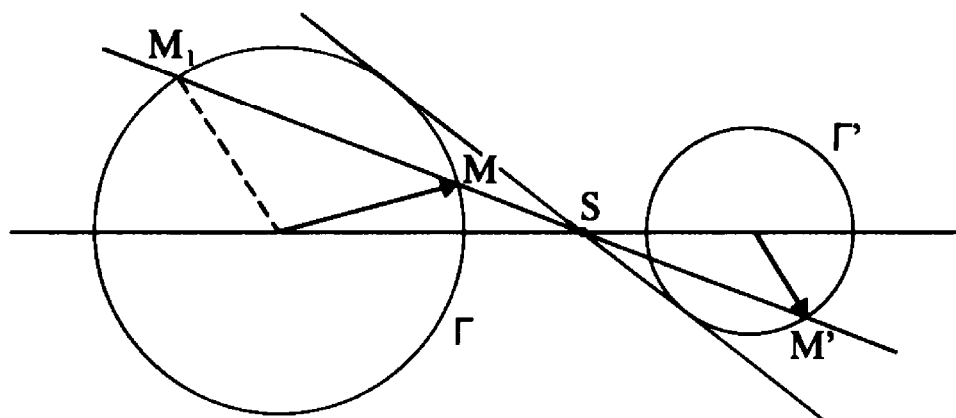


Soit  $\Gamma$  un cercle ne passant pas par  $S$ , et  $M$  un point de  $\Gamma$ . Soit  $J_1$  l'inversion de même pôle  $S$  que  $J$ , mais de puissance  $\mathcal{P}_\Gamma(S)$ . ( $\mathcal{P}_\Gamma(S)$  n'est pas nul puisque  $\Gamma$  ne passe pas par  $S$ .) Si  $M_1$  désigne le point  $J(M)$ ,

$$\overline{SM}_1 = \mathcal{P}_\Gamma(S) \times \frac{1}{\overline{SM}}, \quad \text{et} \quad \overline{SM}' = \frac{k}{\overline{SM}}.$$

On en déduit :  $J = h \circ J_1$ , où  $h$  désigne l'homothétie de centre  $S$  et de rapport  $k/\mathcal{P}_\Gamma(S)$ . Puisque  $J_1$  conserve le cercle  $\Gamma$ , l'image  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  par  $J$  est l'image de  $\Gamma$  par  $h$ , d'où la partie (iii).





Etant donnés quatre points  $A, B, C, D$  de  $E$ , alignés ou cocycliques, on notera  $(A, B, C, D)$  le birapport de ces quatre points sur la droite ou le cercle qui les contient, au sens du chapitre 5 (paragraphe 2).

**Théorème 6-4** (préservation<sup>(1)</sup> du birapport de points alignés ou cocycliques)

Notons  $A, B, C, D$  quatre points distincts de  $E - \{S\}$ , et  $A', B', C', D'$  leur image par une inversion de pôle  $S$ .

- (i) Si  $A, B, C, D$  sont alignés ou cocycliques,  $A', B', C', D'$  aussi et  $(A', B', C', D') = (A, B, C, D)$ .
- (ii) Si  $A, B, C$  sont alignés ou cocycliques avec  $S$ , les points  $A', B', C'$  sont alignés, et

$$(A', B', C') = (A, B, C, S).$$

- (iii) De même, si  $A, B, C$  sont alignés, leurs images  $A', B', C'$  sont alignées ou cocycliques avec  $S$  et

$$(A', B', C', S) = (A, B, C).$$

Notons  $K$  la puissance d'inversion, et supposons d'abord  $A, B, C, D$  alignés avec  $S$  : il en est alors de même pour  $A', B', C', D'$ ,

<sup>(1)</sup> Nous verrons, à l'exercice 1 du chapitre 8, une autre démonstration de ce théorème, beaucoup plus simple et beaucoup plus naturelle.

et

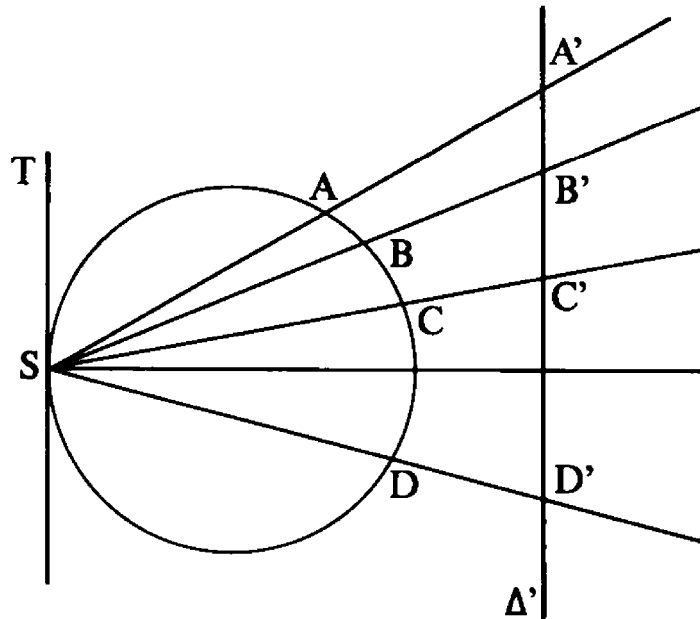
$$\begin{aligned}
 (A', B', C', D') &= \frac{\overline{SC'} - \overline{SA'}}{\overline{SC'} - \overline{SB'}} : \frac{\overline{SD'} - \overline{SA'}}{\overline{SD'} - \overline{SB'}} \\
 &= \frac{\frac{K}{\overline{SC}} - \frac{K}{\overline{SA}}}{\frac{K}{\overline{SC}} - \frac{K}{\overline{SB}}} : \frac{\frac{K}{\overline{SD}} - \frac{K}{\overline{SA}}}{\frac{K}{\overline{SD}} - \frac{K}{\overline{SB}}} \\
 &= \left( \frac{\overline{SA} - \overline{SC}}{\overline{SB} - \overline{SC}} \times \frac{\overline{SB} \cdot \overline{SC}}{\overline{SA} \cdot \overline{SC}} \right) : \left( \frac{\overline{SA} - \overline{SD}}{\overline{SB} - \overline{SD}} \times \frac{\overline{SB} \cdot \overline{SD}}{\overline{SA} \cdot \overline{SD}} \right) \\
 &= \frac{\overline{SA} - \overline{SC}}{\overline{SB} - \overline{SC}} : \frac{\overline{SA} - \overline{SD}}{\overline{SB} - \overline{SD}} = (A, B, C, D);
 \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
 (A', B', C') &= \frac{\overline{SC'} - \overline{SA'}}{\overline{SC'} - \overline{SB'}} = \frac{\frac{K}{\overline{SC}} - \frac{K}{\overline{SA}}}{\frac{K}{\overline{SC}} - \frac{K}{\overline{SB}}} = \frac{\overline{SA} - \overline{SC}}{\overline{SB} - \overline{SC}} : \frac{\overline{SC} \cdot \overline{SA}}{\overline{SC} \cdot \overline{SB}} \\
 &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} = (A, B, C, S)
 \end{aligned}$$

et, de même,  $(A', B', C', S) = (A, B, C)$  puisque  $J = J^{-1}$ .

Supposons maintenant  $A, B, C, D$  cocycliques avec  $S$  :



les quatre points  $A', B', C', D'$  sont alors alignés sur une droite  $\Delta'$  ne passant pas par  $S$ , et

$$\begin{aligned}(A', B', C', D') &= (SA', SB', SC', SD'), \\ &= (SA, SB, SC, SD), \\ &= (A, B, C, D)\end{aligned}$$

puisque  $S$  est cocyclique avec  $A, B, C$  et  $D$ ; tandis que

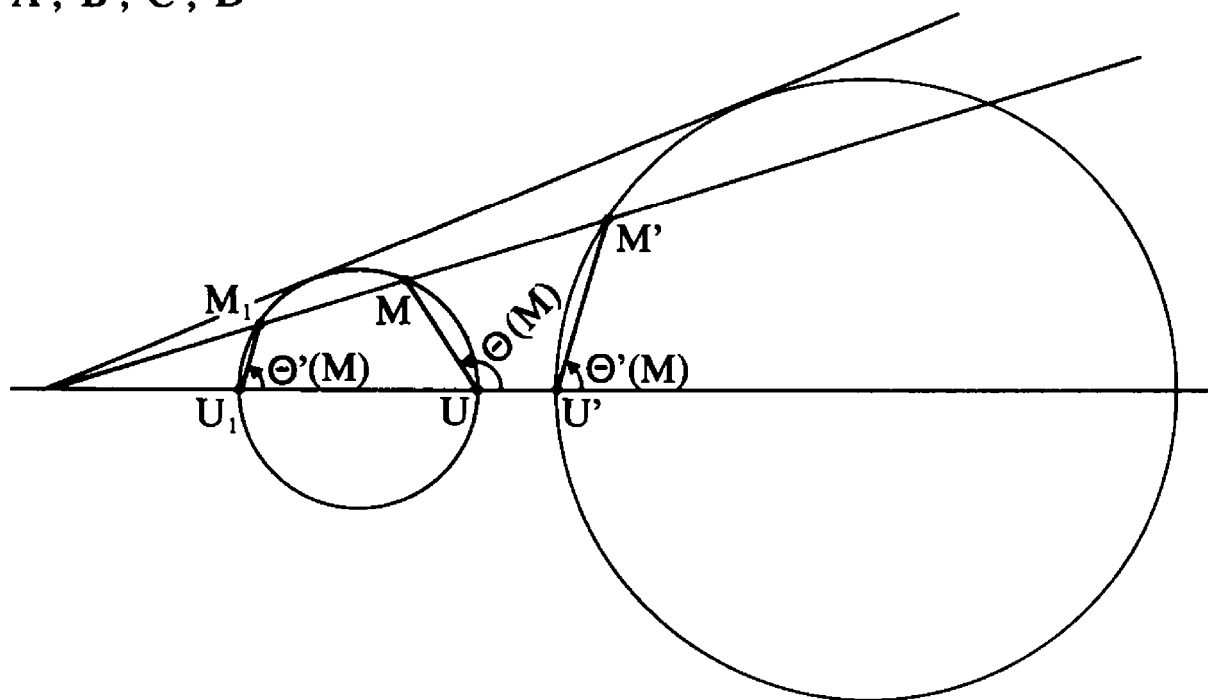
$$\begin{aligned}(A', B', C') &= (A', B', C', \infty_{\Delta'}), \\ &= (SA', SB', SC', T)\end{aligned}$$

( $T$  désignant la tangente en  $S$  au cercle passant par  $A, B, C, D$  et  $S$ ),

$$\begin{aligned}(A', B', C') &= (SA, SB, SC, T), \\ &= (A, B, C, S).\end{aligned}$$

Si  $A, B, C, D$  sont maintenant alignés sur une droite ne passant pas par  $S$ , les points  $A', B', C', D'$  et  $S$  sont cocycliques, et l'on est ramené au cas précédent (car  $J = J^{-1}$ ).

Supposons enfin  $A, B, C, D$  cocycliques, *sur un cercle  $\Gamma$  ne passant pas par  $S$* , et notons  $\Gamma'$  le cercle image auquel appartiennent  $A', B', C', D'$



Notons  $[UU_1]$  un diamètre de  $\Gamma$  passant par  $S$ ,  $M$  un point de  $\Gamma$  distinct de  $U$ ,  $M_1$  le point où la droite  $SM$  recoupe  $\Gamma$  ( $M \neq M_1$ ) si  $SM$  est tangente à  $\Gamma$ ),  $U'$  et  $M'$  les images de  $U$  et  $M$  dans l'inversion  $\mathcal{I}$ . Soit  $(Ux, Uy)$  un repère orthonormé tel que  $Uy$  soit tangent en  $U$  à  $\Gamma$ ; posons  $\overline{UU_1} = 2a$ ,  $\overline{US} = b$ ,

$$\theta(M) = (Ux, UM) \text{ et } \theta'(M) = (Ux, U'M') = (Ux, U_1M_1).$$

**Lemme :**

$$\operatorname{tg} \theta'(M) = \frac{b}{2a - b} \cdot \operatorname{tg} \theta(M).$$

Le fait que  $(Ux, U'M') = (Ux, U_1M_1)$  résulte de ce que  $U'$  et  $M'$  sont les images de  $U_1$  et  $M_1$  dans l'homothétie de centre  $S$  et de rapport  $K/\mathcal{I}_\Gamma(S)$ . On a alors :

$$\theta'(M) = (UU_1, U_1M_1) = (MU, MM_1)$$

puisque les quatre points  $UU_1MM_1$  sont cocycliques

$$\theta'(M) = (SU, SM) - (SU, UM),$$

soit :  $\theta'(M) = (Sx, SM) - \theta(M).$

Posons  $\operatorname{tg} \theta(M) = t$ ; la droite  $UM$  admet pour équation  $y = tx$ , tandis que  $\Gamma$  admet pour équation  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  : les coordonnées du point  $M$  sont donc :

$$x = \frac{2a}{1+t^2}, \quad y = \frac{2at}{1+t^2}$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tg}(Sx, SM) = \frac{\frac{2at}{1+t^2}}{\frac{2a}{1+t^2} - b} = \frac{2at}{(2a - b) - bt^2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \theta'(M) &= \frac{\operatorname{tg}(Sx, SM) - t}{1 + t \cdot \operatorname{tg}(Sx, SM)}, \\
 &= \frac{\frac{2at}{(2a-b) - bt^2} - t}{1 + \frac{2at^2}{(2a-b) - bt^2}}, \\
 &= \frac{b}{2a-b} t, \quad \text{d'où le lemme.}
 \end{aligned}$$

Coupons alors le faisceau des droites issues de  $U$  (resp. de  $U_1$ ) par une droite parallèle à  $Uy$  ne passant pas par  $U$  (resp. par  $U_1$ ). Le birapport des quatre droites  $U'A'$ ,  $U'B'$ ,  $U'C'$ ,  $U'D'$  est alors égal au nombre

$$\frac{\operatorname{tg} \theta'(C) - \operatorname{tg} \theta'(A)}{\operatorname{tg} \theta'(C) - \operatorname{tg} \theta'(B)} : \frac{\operatorname{tg} \theta'(D) - \operatorname{tg} \theta'(A)}{\operatorname{tg} \theta'(D) - \operatorname{tg} \theta'(B)},$$

alors que le birapport des quatre droites  $UA$ ,  $UB$ ,  $UC$ ,  $UD$  est égal à

$$\frac{\operatorname{tg} \theta(C) - \operatorname{tg} \theta(A)}{\operatorname{tg} \theta(C) - \operatorname{tg} \theta(B)} : \frac{\operatorname{tg} \theta(D) - \operatorname{tg} \theta(A)}{\operatorname{tg} \theta(D) - \operatorname{tg} \theta(B)}.$$

Il résulte du lemme que ces deux nombres sont égaux.

Ceci achève la démonstration du théorème [on appelle *quadrangle harmonique* la figure formée par quatre points cocycliques, dont le birapport sur le cercle qui les contient est égal à  $-1$ ].

### **Théorème 6-5**

*Une inversion  $I$  de pôle  $S$*

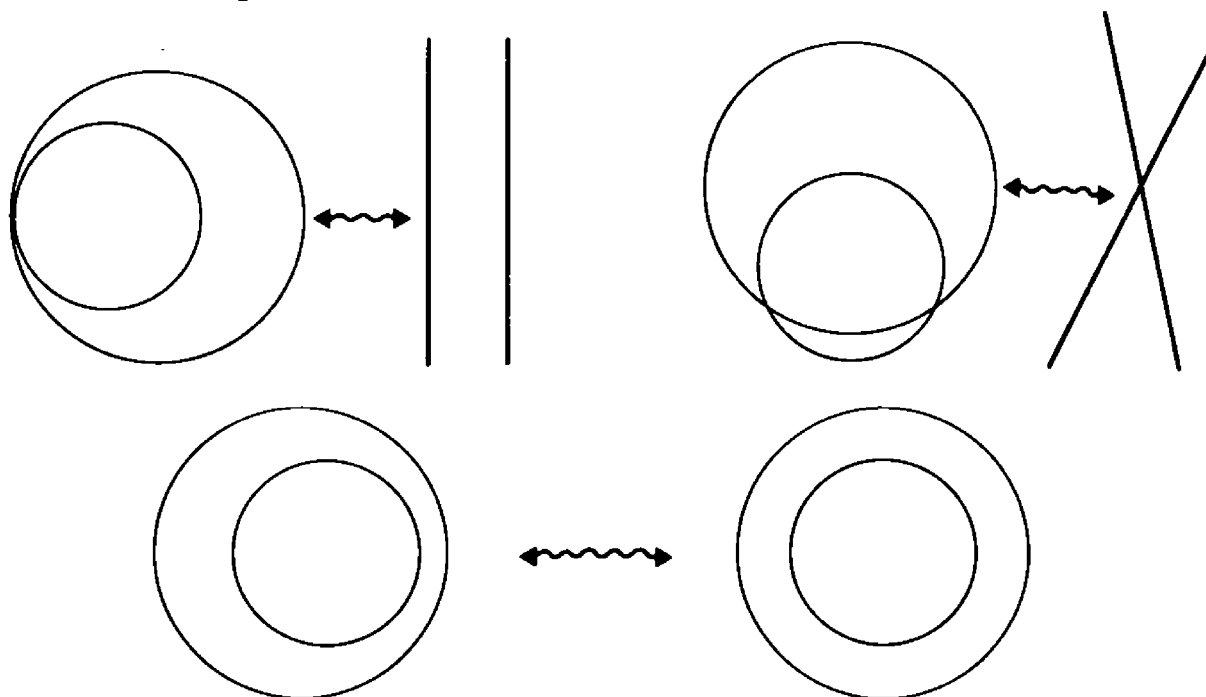
- (i) *préserve le faisceau des droites concourant en  $S$ ,*
- (ii) *préserve le faisceau des cercles concentriques de centre  $S$  (globalement),*

- (iii) *échange les faisceaux de droites parallèles, et les faisceaux de cercles tangents en S,*
  - (iv) *échange les faisceaux de droites concourant en un point autre que S, et les faisceaux de cercles à points de base dont S est l'un des points de base,*
  - (v) *échange entre eux les faisceaux de cercles à points de base distincts de S,*
  - (vi) *échange les faisceaux de cercles concentriques de centre autre que S, et les faisceaux de cercles à points limites dont S est l'un des points limites,*
  - (vii) *échange entre eux les faisceaux à points limites autres que S,*
  - (viii) *transforme deux faisceaux conjugués en deux faisceaux conjugués.*
- (viii) provient de ce que les cercles (ou droites) du faisceau conjugué à un faisceau  $\mathcal{F}$  sont les cercles ou droites qui sont orthogonaux à toutes les courbes de  $\mathcal{F}$ , et de ce que l'orthogonalité est préservée par inversion (corollaire 3 de la proposition 6-3).
- (i) et (ii) sont évidents.
  - (iii) et (iv) résultent immédiatement de la deuxième partie du théorème 6-3.
  - (v) résulte immédiatement de la troisième partie du théorème 6-3.
  - (vi) résulte aussi de cette troisième partie de 6-3, et des parties (viii) et (iv) de 6-4, déjà démontrées.
  - (vii) résulte de cette troisième partie, combinée avec (viii) et (v).

**Application :** Tout problème portant sur des droites et cercles, et s'exprimant en termes de contact ou d'orthogonalité (ou d'angles, plus généralement) sera préservé par n'importe quelle inversion. Si l'on choisit le pôle S de celle-ci de façon que le problème transformé soit plus simple, on résoudra d'abord ce problème transformé puis on retranscrira la solution par inversion pour résoudre le problème initial. Les façons les plus classiques de procéder consistent à utiliser les parties (iii), (iv) et (vi) du théorème 6-4, permettant de transformer :

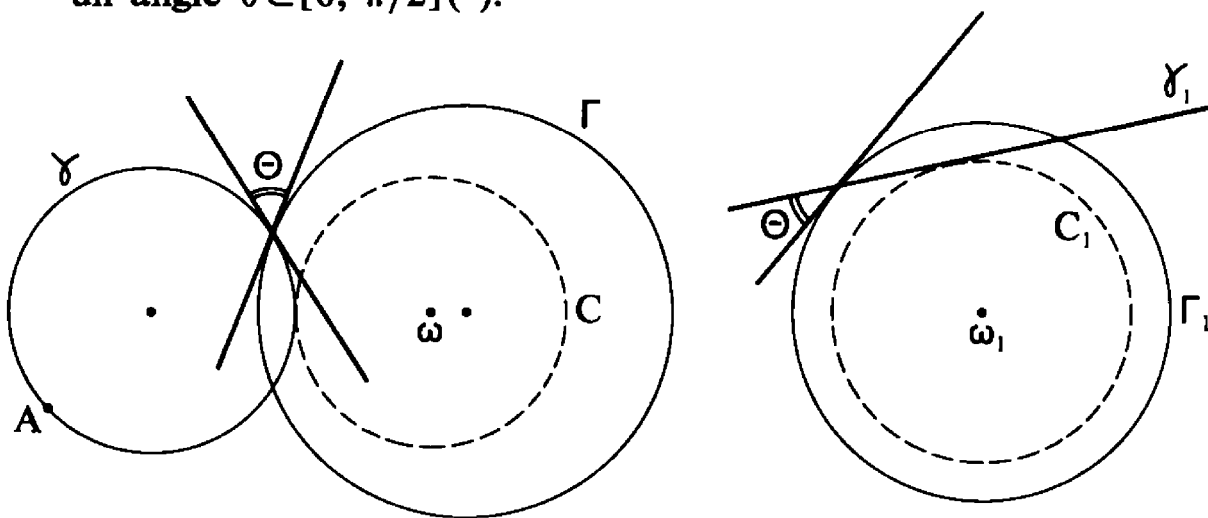


- deux cercles (ou droites) tangents, en deux droites parallèles;
- deux cercles (ou droites) sécants, en deux droites concourantes;
- deux cercles (ou droites) non sécants, en deux cercles concentriques.



*Exemple de problème du type précédents.* — On se donne, dans le plan

- un point  $A$ ;
- un cercle ou une droite  $\Gamma$  ne passant pas par  $A$ ;
- un angle  $\theta \in [0, \pi/2]^{(1)}$ .



<sup>(1)</sup> La notion d'enveloppe est précisée en appendice du chapitre 7.

Quelle est l'enveloppe des cercles  $\gamma$  passant par  $A$ , et coupant  $\Gamma$  sous l'angle  $\theta$ ?

Une inversion  $J$  de pôle  $A$  transforme  $\Gamma$  en un cercle  $\Gamma_1$ , et les cercles  $\gamma$  en les droites  $\gamma_1$  coupant  $\Gamma_1$  sous l'angle  $\theta$ . Selon que  $\theta$  est nul, égal à  $\frac{\pi}{2}$  ou dans l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , l'enveloppe des droites  $\gamma_1$  est alors :

- le cercle  $\Gamma_1$  lui-même;
- le centre  $\omega_1$  de  $\Gamma_1$ ;
- un cercle  $C_1$  concentrique à  $\Gamma_1$ .

Revenant alors au problème initial en retransformant par  $J$  (qui préserve les contacts, donc la notion d'enveloppe), on en déduit que les cercles  $\gamma$  enveloppent :

- le cercle  $\Gamma$  lui-même si  $\theta = 0$ ;
- l'inverse  $\omega$  du point  $\omega_1$ , qui est aussi le second point limite du faisceau  $\mathcal{F}$  de cercles contenant  $\Gamma$  et admettant  $A$  comme un point limite, si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ;
- un cercle  $C$  appartenant au faisceau  $\mathcal{F}$  précédent (à points limites  $A$  et  $\omega$ ), si  $\theta$  appartient à  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

#### 4 - Introduction du point à l'infini

(supposons toujours  $\dim E = 2$ )

Si  $M$  est un point de  $E - \{S\}$  tendant vers  $S$ , son image  $M'$  par une inversion de pôle  $S$  s'éloigne infiniment de  $S$  (sans que ce soit nécessairement dans une direction donnée : il suffit d'imaginer, par exemple, le cas où  $M$  tend vers  $S$  en spiralant le long de la spirale logarithmique admettant  $r = a \cdot e^\theta$  comme équation en coordonnées polaires centrées en  $S$ ,  $a > 0$ ,  $\theta$  tendant vers  $-\infty$ ). Si  $M$ , réciproquement, s'éloigne infiniment de  $S$  (pas nécessairement dans une direction donnée : il suffit d'imaginer par exemple que  $M$  décrit la spirale logarithmique précédente, avec  $\theta$  tendant vers  $+\infty$ ), son image  $M'$  par inversion de pôle  $S$  tend alors vers  $S$ .

Ces remarques justifient de compléter l'espace euclidien  $E$  par un (1) point à l'infini, on notera  $\tilde{E}$  la somme disjointe de  $E$  et d'un point supplémentaire, noté  $\infty$ , appelé *le point à l'infini* :

$$\tilde{E} = E \amalg \{\infty\}.$$

(*Ne pas confondre  $\tilde{E}$  avec le complété projectif*

$$\hat{E} = E \amalg \delta(E),$$

où l'on ajoute à  $E$  *tout une droite*  $\delta(E)$  de points à l'infini.)

Etant donnée une inversion  $J : E - \{S\} \longrightarrow E - \{S\}$  de pôle  $S$  dans  $E$ , on la prolongera alors à tout  $\tilde{E}$  en posant :

$$\begin{cases} J(S) = \infty, \\ J(\infty) = S. \end{cases}$$

[L'application prolongée ainsi obtenue, encore notée  $J$ , sera bijective de  $\tilde{E}$  sur  $\tilde{E}$ , et toujours involutive.] De même, toute similitude  $h : E \longrightarrow E$  (en particulier toute isométrie) sera prolongée à tout  $\tilde{E}$  en posant :  $h(\infty) = \infty$ .

On appellera alors « cercle » de  $\tilde{E}$  (avec guillemets<sup>(2)</sup>)

- ou bien un cercle de  $E$ ,
- ou bien une droite de  $E$  complétée par le point  $\infty$ .

Si  $A, B, C$  sont trois points alignés de  $E$ , on définit alors le birapport  $(A, B, C, \infty)$  comme le rapport  $(A, B, C)$ ; les formules (ii) et (iii) du théorème 6-4 étendent alors la formule (i) au cas où certains points sont  $S$  ou  $\infty$ .

On dira que deux « cercles » de  $\tilde{E}$  passant par  $\infty$  sont *tangents en  $\infty$*  (resp. *orthogonaux*) si les droites de  $E$  qui les définissent sont parallèles (resp. orthogonales).

On appellera *faisceau de « cercles »* dans  $\tilde{E}$  tout faisceau de droites ou cercles dans  $\tilde{E}$ , étant entendu que les droites d'un tel faisceau seront systématiquement complétées par  $\infty$  pour former un « cercle » de  $\tilde{E}$ . En particulier :

(<sup>2</sup>) Cf. la convention énoncée à la fin du chapitre 3.

- un faisceau de droites dans  $E$ , concourant en un point  $A$  de  $E$ , sera dit *faisceau de « cercles » à points de base  $A$  et  $\infty$  dans  $\tilde{E}$* ;
- un faisceau de droites parallèles dans  $E$  sera encore appelé *faisceau de « cercles » tangents en  $\infty$  dans  $\tilde{E}$* ;
- un faisceau de cercles concentriques, de centre  $A$ , dans  $E$  sera dit *faisceau de « cercles » à points limites  $A$  et  $\infty$  dans  $\tilde{E}$* .

Ces définitions permettent de ne plus distinguer droites et cercles, et de ne plus faire de cas particuliers dans les énoncés des théorèmes 6-3 et 6-4 : une inversion conserve les « cercles » de  $\tilde{E}$ , et transforme un faisceau de cercles de  $\tilde{E}$  (à points de base, à points limites, ou tangent) en un faisceau de « cercles » de  $\tilde{E}$  de même nature.

La projection stéréographique d'une sphère sur un plan, que nous étudierons au paragraphe 6, nous permettra de préciser ces idées. Mais, pour cela, nous aurons besoin de certaines propriétés des inversions dans un espace euclidien  $E$  de dimension 3.

## 5 - Inversions dans un espace euclidien $E$ de dimension 3

Exactement comme en géométrie plane, on définit la puissance  $\mathcal{P}_\Sigma(S)$  d'un point  $S$  de  $E$  par rapport à une sphère  $\Sigma$  dans  $E$ , comme étant le nombre  $d^2 - R^2$  où  $d$  désigne la distance de  $S$  au centre de  $\Sigma$  et  $R$  le rayon de  $\Sigma$ . Cette puissance est encore égale à  $\overline{SA} \cdot \overline{SB}$  où  $A$  et  $B$  désignent les points d'intersection avec  $\Sigma$  de n'importe quelle droite passant par  $S$  et coupant  $\Sigma$ .

### Proposition 6-6

*Une inversion  $I$  de pôle  $S$  et puissance  $k$ , dans  $E$*

- (i) *conserve toute droite et tout plan passant par  $S$ ,*
- (ii) *conserve toute sphère  $\Sigma$  telle que  $\mathcal{P}_\Sigma(S) = k$ ,*
- (iii) *échange un plan  $\Pi$  ne passant pas par  $S$  avec une sphère  $\Sigma$  passant par  $S$  et ayant en  $S$  un plan tangent parallèle à  $\Pi$ ,*
- (iv) *échange une sphère ne passant pas par  $S$  avec une autre ayant la même propriété, et qui lui est homothétique dans une homothétie de centre  $S$ .*

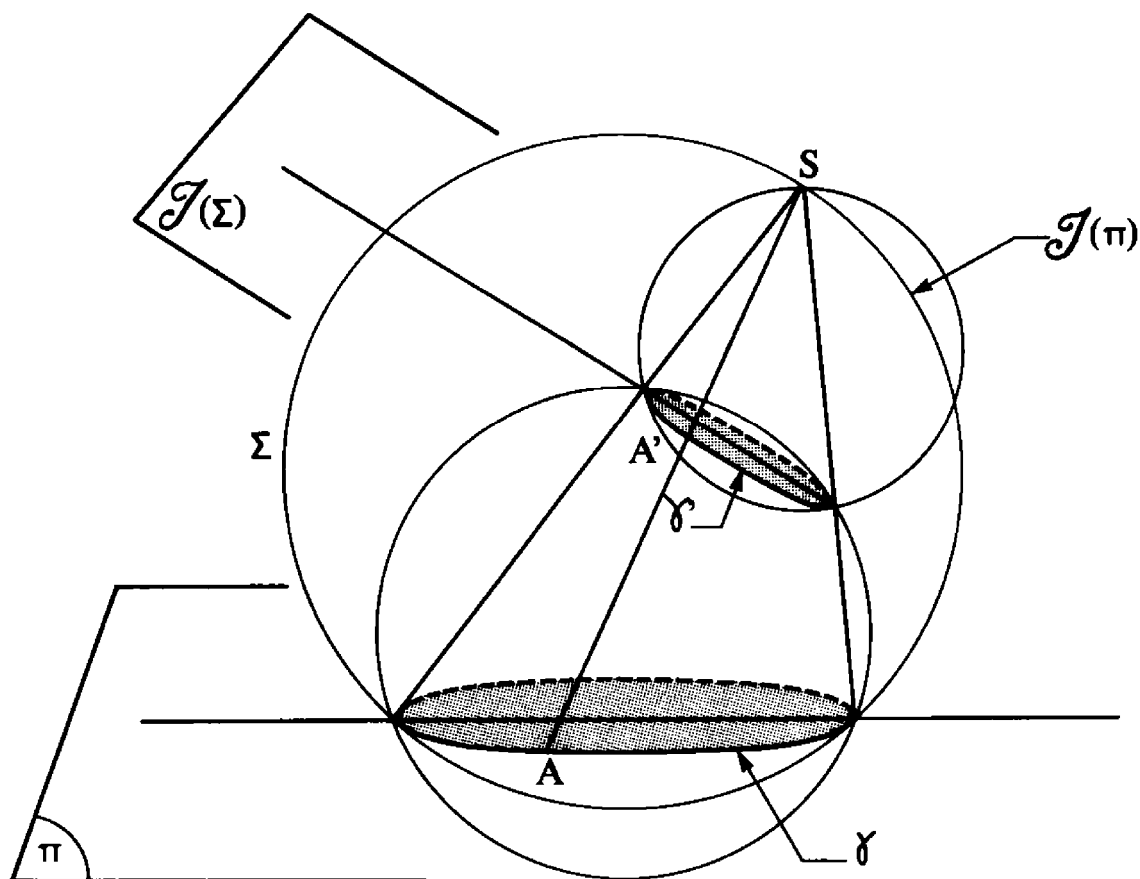
La démonstration est immédiate, à partir du théorème 6-3, une fois remarquée l'existence d'un axe de révolution passant par  $S$  pour chacune des figures observées : on applique le théorème 6-3 dans un plan méridien, et on « fait tourner ».

### Proposition 6-7

*L'inverse  $\gamma'$  d'un cercle  $\gamma$  de  $E$  dont le plan  $\Pi$  ne passe pas par  $S$ , est un cercle de  $E$  ayant cette même propriété.*

*Les deux cercles sont cosphériques.*

Il existe en effet une unique sphère  $\Sigma$  passant par  $S$  et coupant le plan  $\Pi$  de  $\gamma$  suivant  $\gamma$  qui est donc égal à  $\Pi \cap \Sigma$ . L'inverse  $\gamma'$  est donc égal à  $J(\Pi) \cap J(\Sigma)$  qui est l'intersection d'une sphère  $J(\Pi)$  (passant par  $S$ ) avec un plan  $J(\Sigma)$  (ne passant pas par  $S$ ), donc est un cercle dont le plan ne passe pas par  $S$ .

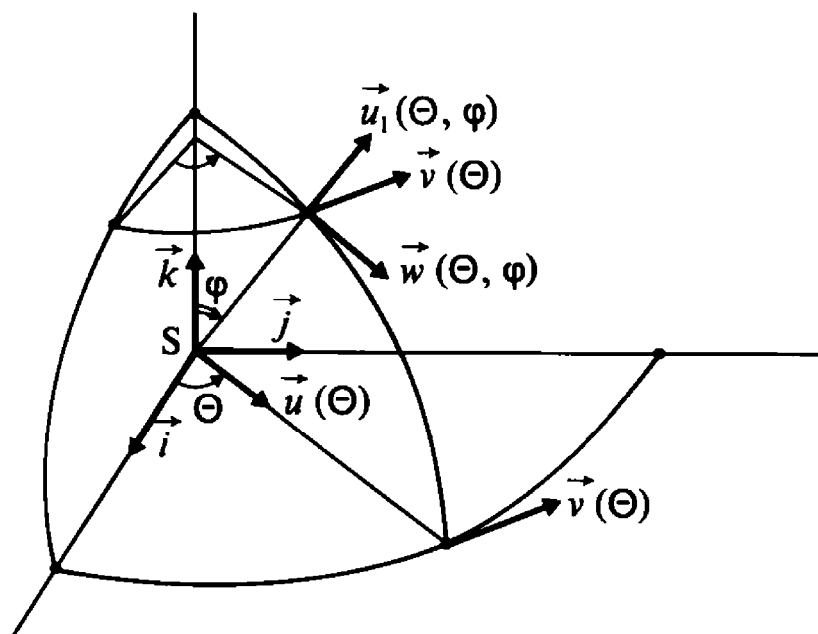


Si  $\gamma = \gamma'$ , il existe une infinité de sphères passant par  $\gamma$  et  $\gamma'$ . Sinon, il existe au moins un point  $A$  de  $\gamma$  tel que le point  $A' = J(A)$  soit distinct de  $A$ , et il existe une unique sphère  $\Sigma_1$  passant par  $A'$  et coupant  $\Pi$  suivant  $\gamma$ . Puisque  $\mathcal{I}_{\Sigma_1}(S) = \overline{SA} \cdot \overline{SA'} = k$ ,  $\Sigma_1$  est invariante par  $J$ ; l'inverse  $\gamma'$  de  $\gamma$  est donc sur  $\Sigma_1$  puisqu'il en est ainsi de  $\gamma$  :  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont donc bien cosphériques.

### Proposition 6-8

*Une inversion, dans l'espace  $E$  de dimension 3, conserve les angles (nécessairement non orientés) entre vecteurs tangents de courbes différentiables se coupant en un point  $M_0$  de  $E - \{S\}$ .*

Utilisons un repère orthonormé  $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  d'origine le pôle  $S$  d'inversion, et tel que  $\overline{SM}_0$  ne soit pas colinéaire à  $\vec{k}$ . Notons  $(\rho, \theta, \varphi)$  les coordonnées sphériques correspondantes en posant :



$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}, & \vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \pi/2), \\ \vec{u}_1(\theta, \varphi) = \cos \varphi \cdot \vec{k} + \sin \varphi \cdot \vec{u}(\theta), \\ \vec{w}(\theta, \varphi) = \vec{u}_1(\theta, \varphi + \pi/2), \\ \overrightarrow{OM}(\rho, \theta, \varphi) = \rho \vec{u}_1(\theta, \varphi). \end{cases}$$

Deux courbes différentiables  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans  $E - S_z$  étant données par

$$t \longrightarrow (\rho_i(t), \theta_i(t), \varphi_i(t))$$

( $i=1,2$ ) au voisinage du point  $M_0$  de coordonnées  $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ ,

$$\overrightarrow{OM_i}(t) = \rho_i(t) \vec{u}_1(\theta_i(t), \varphi_i(t)),$$

et 
$$\frac{d\overrightarrow{M_i}}{dt} = \frac{d\rho_i}{dt} \vec{u}_1 + \rho_i \left( \sin \varphi_i \frac{d\theta_i}{dt} \vec{v} + \frac{d\varphi_i}{dt} \vec{w} \right).$$

Notons  $M'_i(t)$  l'image de  $M_i(t)$  dans l'inversion  $J$  de pôle  $S$  et puissance  $K$ . On a alors :

$$\overrightarrow{OM'_i}(t) = \frac{K}{\rho_i(t)} \vec{u}_1(\theta_i(t), \varphi_i(t)),$$

et 
$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{M'_i}}{dt} &= -\frac{K}{(\rho_i)^2} \frac{d\rho_i}{dt} \vec{u}_1 + \frac{k}{\rho_i} \left[ \sin \varphi_i \frac{d\theta_i}{dt} \vec{v} + \frac{d\varphi_i}{dt} \vec{w} \right] \\ &= \frac{K}{(\rho_i)^2} \left[ -\frac{d\rho_i}{dt} \vec{u}_1 + \rho_i \left( \sin \varphi_i \frac{d\theta_i}{dt} \vec{v} + \frac{d\varphi_i}{dt} \vec{w} \right) \right]. \end{aligned}$$

On en déduit, en  $M'_0 = J(M_0)$  :

$$\left\langle \left( \frac{d\overrightarrow{M'_1}}{dt} \right)_{M'_0}, \left( \frac{d\overrightarrow{M'_2}}{dt} \right)_{M'_0} \right\rangle = \frac{K^2}{\rho^4(M_0)} \left\langle \left( \frac{d\overrightarrow{M_1}}{dt} \right)_{M_0}, \left( \frac{d\overrightarrow{M_2}}{dt} \right)_{M_0} \right\rangle$$

et 
$$\left\| \left( \frac{d\overrightarrow{M'_i}}{dt} \right)_{M'_0} \right\| = \frac{K}{\rho^2(M_0)} \left\| \left( \frac{d\overrightarrow{M_i}}{dt} \right)_{M_0} \right\|,$$

d'où 
$$\cos \left( \left( \frac{d\overrightarrow{M'_1}}{dt} \right)_{M'_0}, \left( \frac{d\overrightarrow{M'_2}}{dt} \right)_{M'_0} \right) = \cos \left( \left( \frac{d\overrightarrow{M_1}}{dt} \right)_{M_0}, \left( \frac{d\overrightarrow{M_2}}{dt} \right)_{M_0} \right),$$

c. q. f. d.

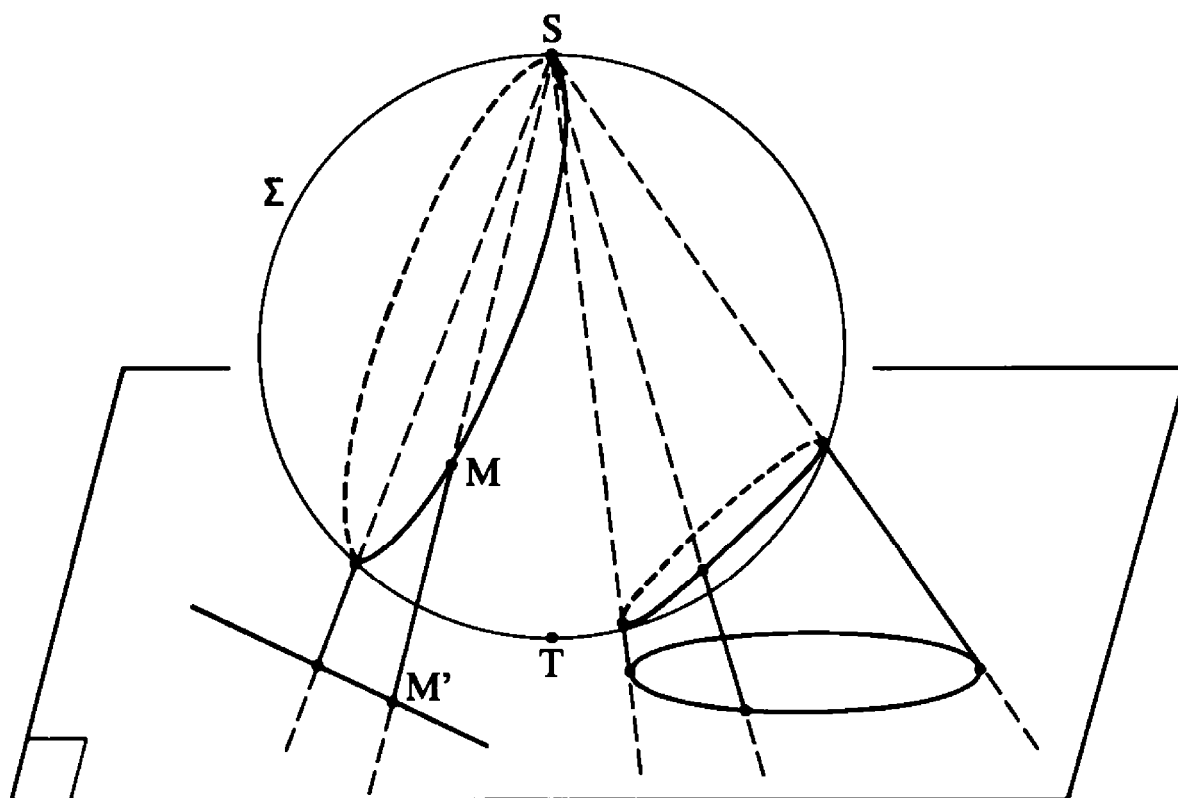
## 6 - Projection stéréographique

Etant donnés un espace euclidien  $E$  de dimension 3, une sphère  $\Sigma$  dans  $E$ , un point  $S$  de  $\Sigma$  et un plan  $\Pi$  ne passant pas par  $S$  mais parallèle au plan tangent à  $\Sigma$  en  $S$ , on appelle projection

*stéréographique de  $\Sigma$  sur  $\Pi$  la restriction à  $\Sigma - \{S\}$  de la perspective conique sur  $\Pi$  de point de vue  $S$ . Supposons, pour fixer les idées, que  $\Pi$  soit le plan tangent à  $\Sigma$  en le point  $T$  diamétralement opposé à  $S$  sur  $\Sigma$ . [Les perspectives de point de vue  $S$  sur deux plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  parallèles différent d'une homothétie de centre  $S$ .]*

### **Théorème 6-9**

- (i) *La projection stéréographique de  $\Sigma$  sur  $\Pi$  est la restriction à  $\Sigma - \{S\}$  de l'inversion  $J$  de pôle  $S$  et de puissance  $\|ST\|^2$ ; elle définit en particulier une bijection de  $\Sigma - \{S\}$  sur  $\Pi$ .*
- (ii) *La projection stéréographique transforme*
  - *les cercles sur  $\Sigma$  ne passant pas par  $S$  en les cercles de  $\Pi$ ,*
  - *les cercles sur  $\Sigma$  passant par  $S$  en les droites de  $\Pi$ .*



projection stéréographique  $M \rightarrow M'$  de  $\Sigma - \{S\}$  sur  $\Pi$

Ce théorème résulte immédiatement de la proposition 6-5 et 6-6.

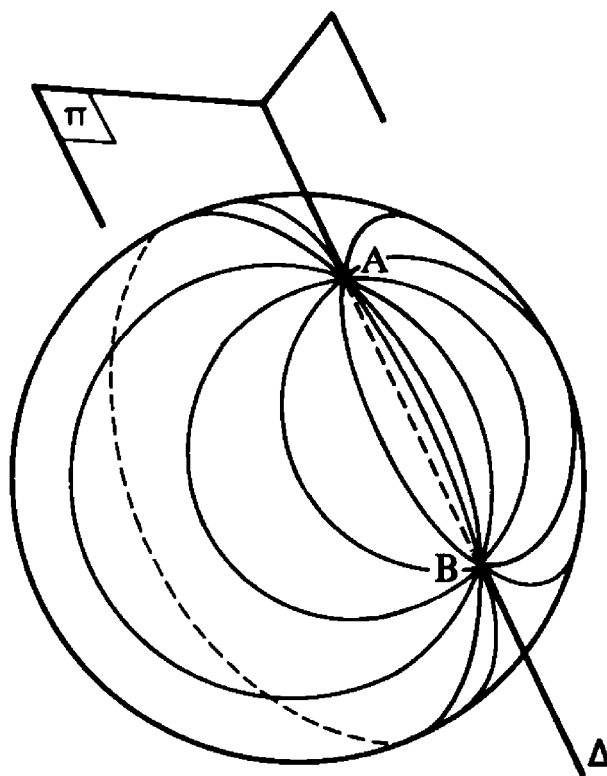
On est amené à prolonger à toute la sphère  $\Sigma$  la projection stéréographique  $J : \Sigma - \{S\} \longrightarrow \Pi$ , en posant  $J(S) = \infty$  (point à



l'infini de  $\tilde{\Pi} = \Pi \cup \{\infty\}$ ) puisque, lorsque  $M$  tend vers  $S$  sur  $\Sigma$ ,  $J(M)$  s'éloigne à l'infini sur  $\tilde{\Pi}$ . L'application  $J : \Sigma \longrightarrow \tilde{\Pi}$  ainsi obtenue est encore bijective et, d'après le théorème 6-8, échange les cercles de  $\Sigma$  et les cercles de  $\tilde{\Pi}$ . Si l'on veut que droites et cercles jouent le même rôle dans  $\tilde{\Pi}$ , donc si l'on veut « oublier » le point  $\infty$  dans  $\tilde{\Pi}$ , cela revient par l'application inverse de la projection stéréographique, à oublier le point  $S$  dans  $\Sigma$ .

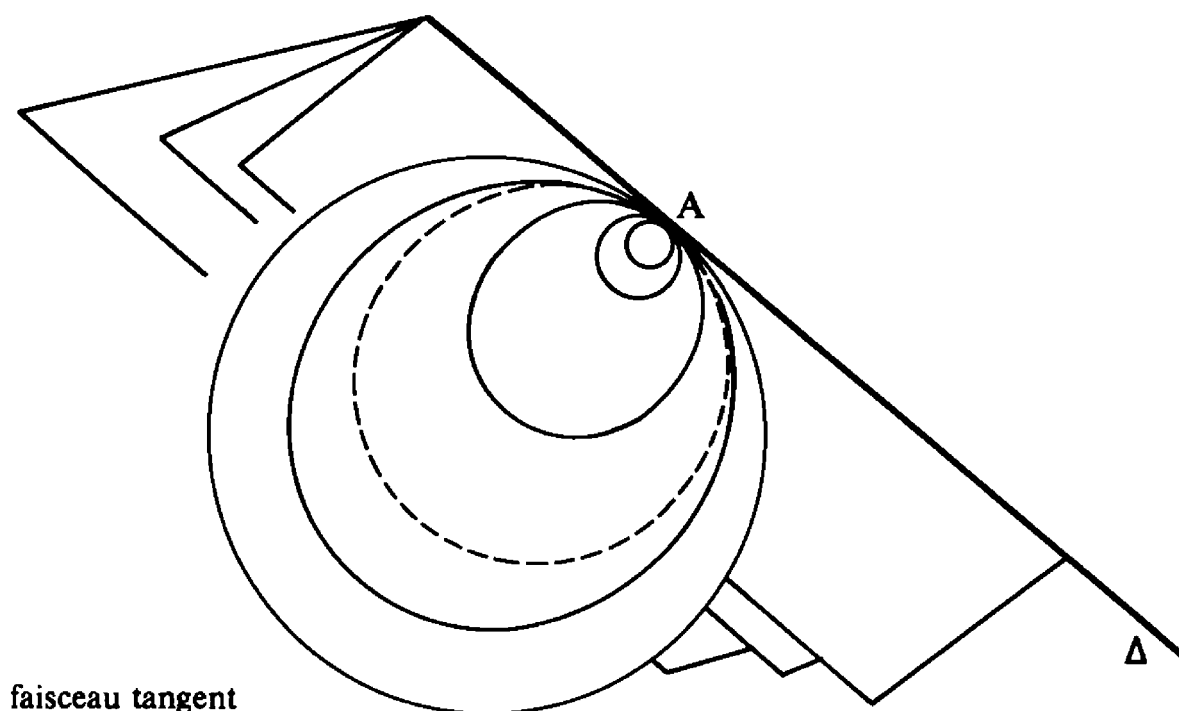
Voici, par exemple, comment définir directement les *faisceaux de cercles* sur  $\Sigma$ . On se donne une droite  $\Delta$  de  $\hat{E}$  (on autorise éventuellement  $\Delta$  à être dans le plan de l'infini  $\delta(E)$  de  $E$ , au sens du chapitre 4), et l'on considère la famille de tous les plans  $P$  de  $E$  passant par  $\Delta$  et coupant  $\Sigma$ . La famille de tous les cercles  $P \cap \Sigma$  ainsi obtenue quand  $P$  pivote autour de  $\Delta$  est appelée faisceau de cercles sur  $\Sigma$  défini par la droite  $\Delta$ . Selon que  $\Delta$

- coupe  $\Sigma$  en deux points distincts  $A$  et  $B$ ,
- est tangente à  $\Sigma$  en un point  $A$ ,



faisceau à points de base  $A, B$

- ou ne coupe pas  $\Sigma$  (ce qui est en particulier le cas si  $\Delta$  est incluse dans le plan de l'infini  $\delta(E)$ ), on obtient un faisceau dit :
- « à points de base » A et B;
- « tangent » en A à  $\Delta$ ;

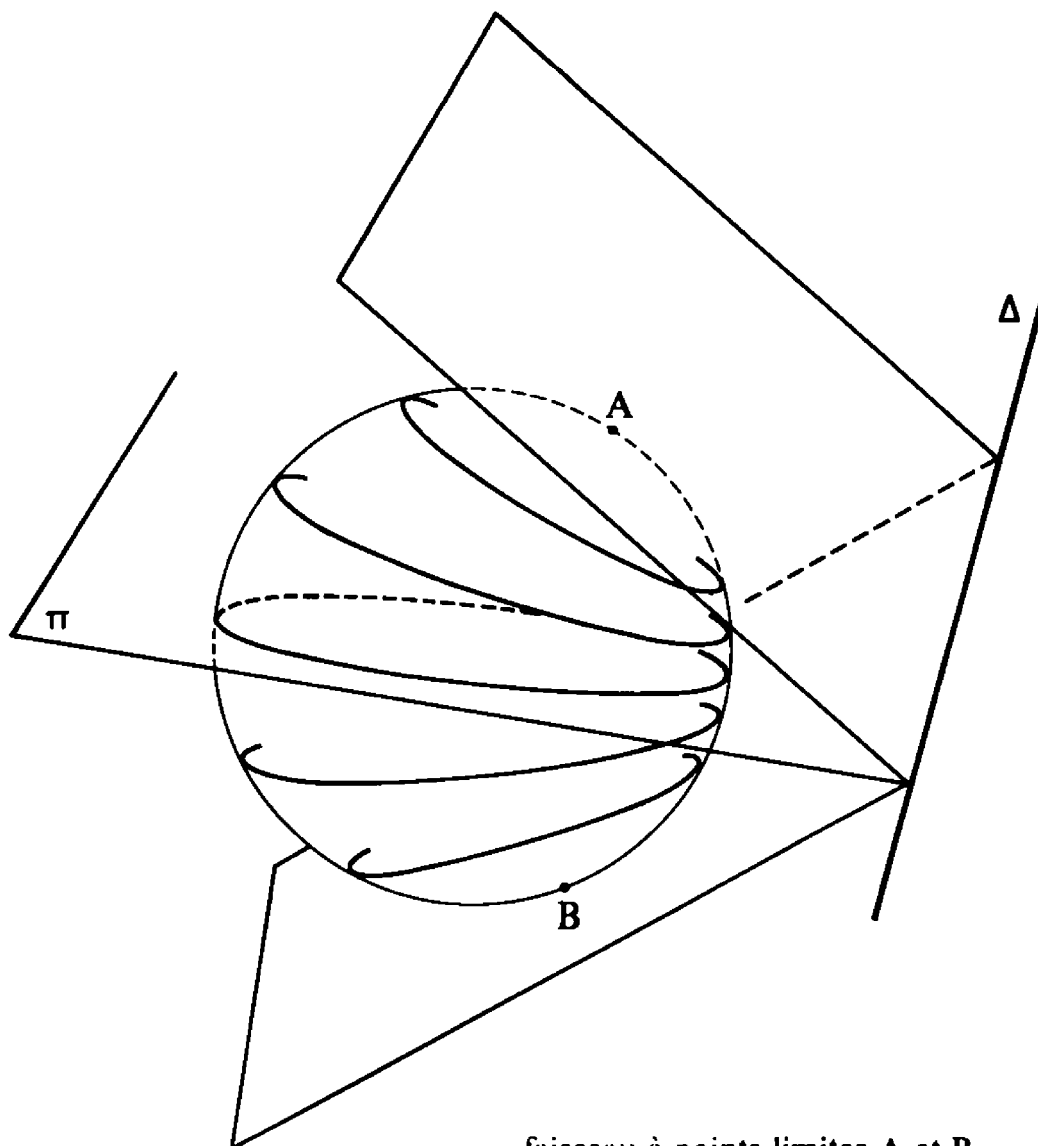


- « à points limites » A et B  
(les points limites en question étant les points de contact des plans tangents à  $\Sigma$  passant par  $\Delta$ ).

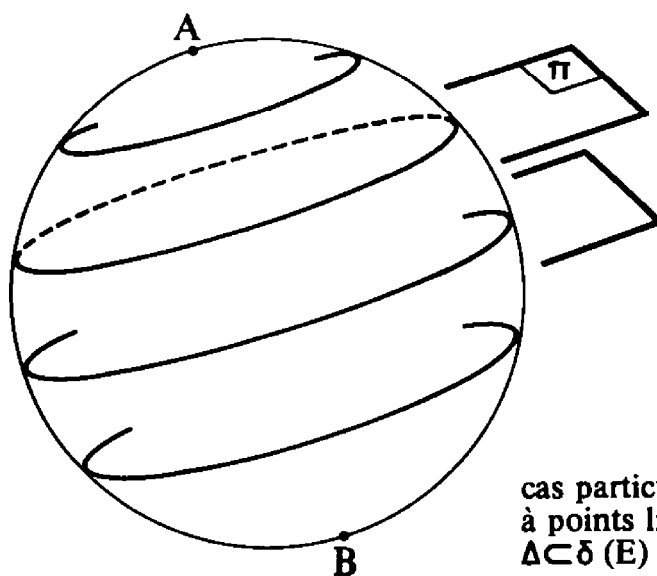
On appellera conjuguées deux droites orthogonales de  $\hat{E}$  qui sont :

- ou bien toutes deux tangentes à  $\Sigma$  en un même point, et orthogonales;
- ou bien dont l'une coupe  $\Sigma$  en deux points A et B distincts, et dont l'autre est l'intersection dans  $\hat{E}$  des plans tangents à  $\Sigma$  en A et B [dans  $\delta(E)$ , si A et B sont diamétralement opposés sur  $\Sigma$ ].

On appellera *faisceaux conjugués sur  $\Sigma$*  les faisceaux de cercles associés à deux droites conjuguées.



faisceau à points limites A et B



cas particulier de faisceau  
à points limites :  
 $\Delta \subset \delta(E)$

**Théorème 6-10**

La projection stéréographique  $J : \Sigma \mapsto \tilde{\Pi}$  de pôle  $S$  :

- fait se correspondre faisceaux de cercles sur  $\Sigma$  et faisceaux de « cercles » sur  $\tilde{\Pi}$ ;
- transforme deux faisceaux conjugués sur  $\Sigma$  en deux faisceaux conjugués sur  $\tilde{\Pi}$ .

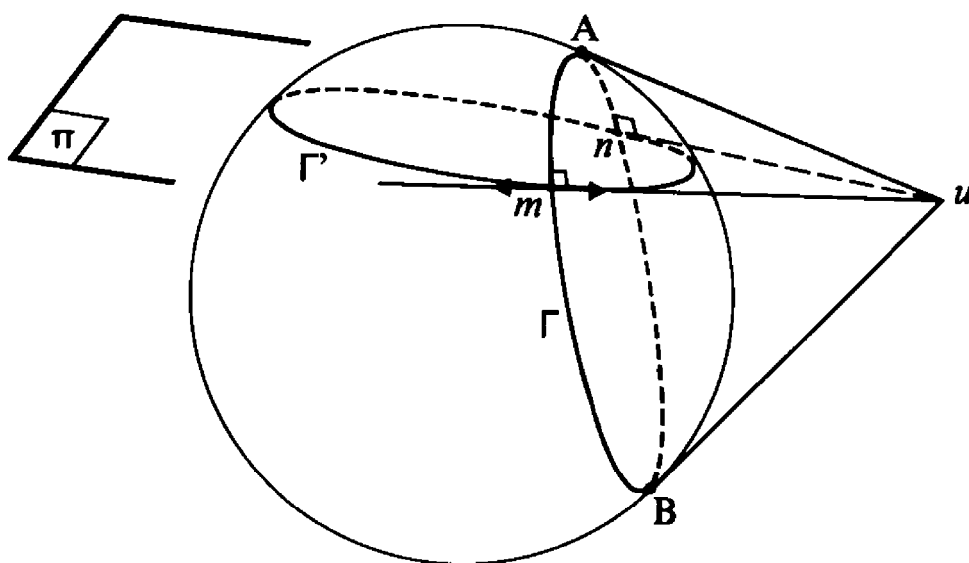
Plus précisément :

- (i) *La projection stéréographique d'un faisceau à points de base  $A$  et  $B$  sur  $\Sigma$  est un faisceau à points de base  $J(A)$  et  $J(B)$  sur  $\tilde{\Pi}$  (en particulier si  $B=S$ ,  $J(B)=\infty$  et le faisceau sur  $\tilde{\Pi}$  est le faisceau de droites de  $\Pi$  concourant en  $J(A)$ ).*
- (ii) *La projection d'un faisceau de cercles tangents en  $A$  sur  $\Sigma$  est un faisceau de « cercles » tangents en  $J(A)$  sur  $\tilde{\Pi}$  (et en particulier un faisceau de droites parallèles dans  $\tilde{\Pi}$ , si  $A=S$ ).*
- (iii) *La projection d'un faisceau de cercles à points limites  $A$  et  $B$  sur  $\Sigma$  est un faisceau de « cercles » à points limites  $J(A)$  et  $J(B)$  sur  $\tilde{\Pi}$  (en particulier un faisceau de cercles concentriques de centre  $J(A)$  dans  $\Pi$ , si  $B=S$ ).*

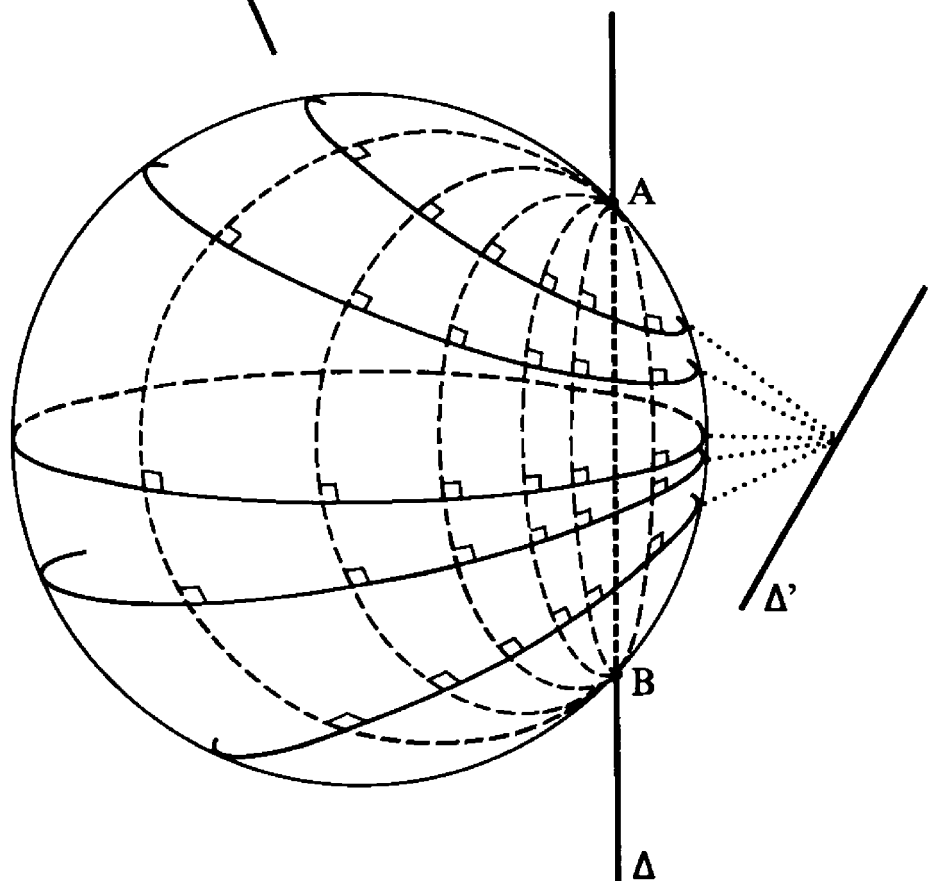
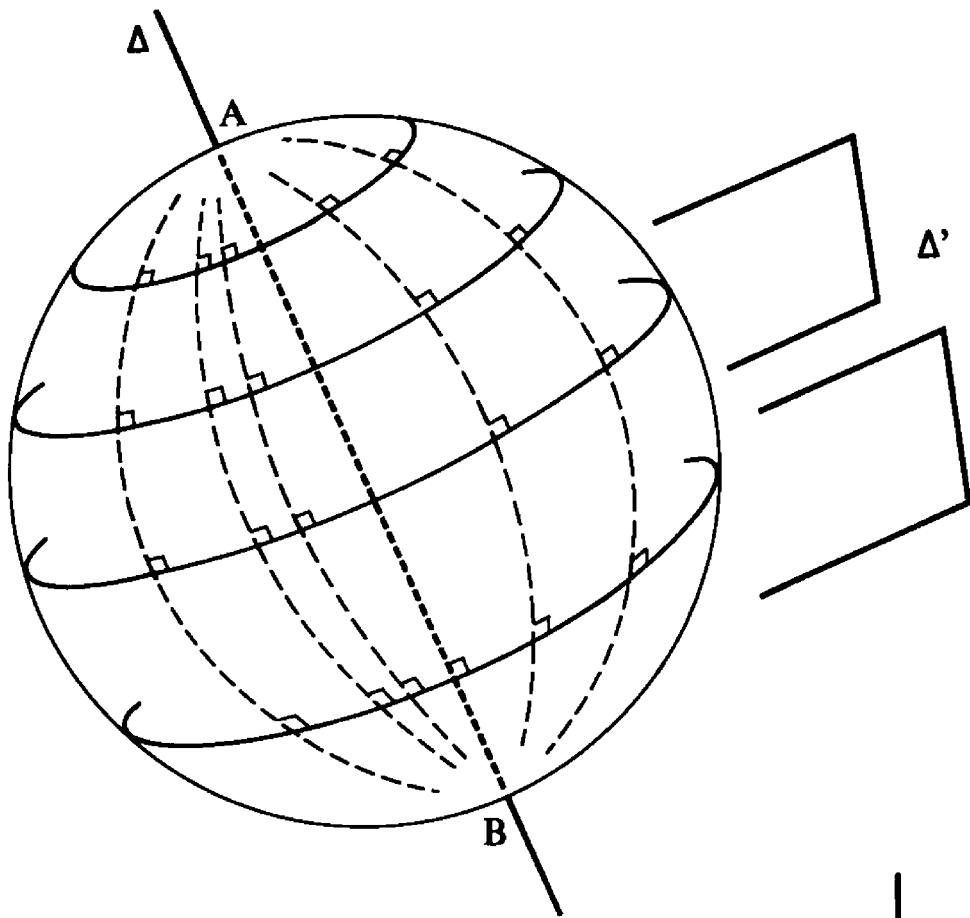
D'après le théorème 6-8,  $J$  fait se correspondre cercles de  $\Sigma$  et « cercles » de  $\tilde{\Pi}$ ; d'après la proposition 6-7,  $J$  préserve les notions de contact et d'orthogonalité : les cas (i) et (ii) des faisceaux à points de base et des faisceaux tangents s'en déduisent immédiatement, ainsi que la préservation de la conjugaison pour les faisceaux tangents à des droites orthogonales en un même point.

Pour démontrer à la fois qu'un faisceau à points limites se projette sur un faisceau à points limites, et la préservation de la conjugaison dans le cas des faisceaux à points de base et points limites, il suffit de prouver que si  $\Delta$  est une droite de  $E$  coupant  $\Sigma$  en deux points  $A$  et  $B$  distincts, les cercles  $\Gamma'$  de  $\Sigma$  orthogonaux à tous les cercles  $\Gamma$  du faisceau à points de base  $A$  et  $B$  sont les cercles du faisceau à points limites  $A$  et  $B$ ; car, sur  $\tilde{\Pi}$ , cette propriété d'orthogonalité est caractéristique du faisceau à points limites  $J(A)$  et  $J(B)$ , et la notion d'orthogonalité est préservée par  $J$ .

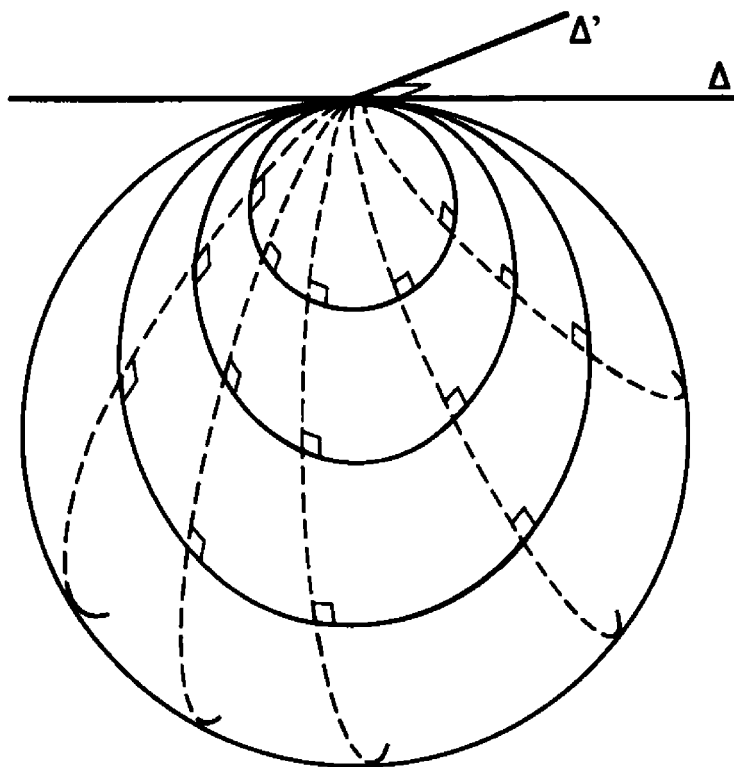
Soit donc  $\Gamma'$  un cercle de  $\Sigma$ , supposé orthogonal à tous les cercles  $\Gamma$  du faisceau à points de base  $A$  et  $B$  sur  $\Sigma$  : on veut démontrer que le plan  $P$  de  $\Gamma'$  passe par la droite  $\Delta'$  conjuguée de la droite  $\Delta = AB$  ( $\Delta'$  est l'intersection des plans tangents à  $\Sigma$  en  $A$  et  $B$ ). Soit  $C$  le cône ou le cylindre de révolution circonscrit à  $\Sigma$  le long de l'un des cercles  $\Gamma$  du faisceau à points de base  $A$  et  $B$ . Notons  $u$  le sommet de ce cône ( $u$  étant éventuellement le point à l'infini dans la direction des génératrices si  $C$  est un cylindre),  $m$  et  $n$  les intersections de  $\Gamma'$  et  $\Gamma$  : les tangentes à  $\Gamma'$  en  $m$  et  $n$  étant orthogonales à  $\Gamma$ , passent nécessairement par  $u$ ; puisque ces tangentes appartiennent au plan  $P$  de  $\Gamma'$ , c'est que  $P$  passe par  $u$ . Or,  $u$  appartient nécessairement à la droite  $\Delta'$ , car les droites  $uA$  et  $uB$  sont incluses respectivement dans les plans tangents à  $\Sigma$  en  $A$  et  $B$ . Lorsque  $\Gamma$  décrit tout le faisceau à points de base  $A$  et  $B$  sur  $\Sigma$ ,  $u$  parcourt toute la droite  $\Delta'$  : ceci prouve que  $P$  passe par  $\Delta'$ .



Inversement, si  $P$  est un plan passant par la droite  $\Delta'$  conjuguée de  $\Delta = AB$ , et si  $P$  coupe  $\Sigma$  suivant un cercle  $\Gamma'$ , celui-ci est nécessairement orthogonal à tous les cercles  $\Gamma$  du faisceau à points de base  $A$  et  $B$  : en effet, le sommet  $u$  du cône  $C$  (ou du cylindre) de révolution circonscrit à  $\Sigma$  le long d'un tel cercle  $\Gamma$  est nécessairement sur  $\Delta'$ , de sorte que  $P$  coupe  $C$  suivant deux génératrices, qui ne peuvent qu'être les tangentes aux points



d'intersection  $m$  et  $n$  de  $\Gamma'$  et  $\Gamma$ ; or ces génératrices sont orthogonales en  $m$  et  $n$  au cercle de base  $\Gamma$  du cône (ou cylindre)  $\mathcal{C}$ .  
c. q. f. d.



Au passage, on a démontré la

### Proposition 6-11

*Si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont deux droites conjuguées dans  $E$  par rapport à  $\Sigma$ , tout cercle  $\Gamma$  de  $\Sigma$  dont le plan passe par  $\Delta$  coupe orthogonalement tout cercle  $\Gamma'$  de  $\Sigma$  dont le plan passe par  $\Delta'$ , et réciproquement.*

*En résumé, la projection stéréographique permet d'identifier :*

- $\Sigma$  et  $\tilde{\Pi}$ ;
- cercles de  $\Sigma$  et « cercles » de  $\tilde{\Pi}$ ;
- l'orthogonalité entre cercles de  $\Sigma$  et celle entre « cercles » de  $\tilde{\Pi}$ ;
- les faisceaux des différents types sur  $\Sigma$  et  $\tilde{\Pi}$ ;
- le pôle  $S$  de la projection stéréographique et le point  $\infty$  de  $\tilde{\Pi}$ .

## 7 - Exercices sur le chapitre 6

- 1 / On considère la figure plane formée par deux cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , de rayons respectifs  $R$  et  $R'$ , et dont la distance des centres est notée  $d$ .

a) Montrer que la quantité

$$I(\Gamma, \Gamma') = \left| \frac{d^2 - R^2 - R'^2}{2RR'} \right|$$

est invariante par toute inversion dont le pôle n'est situé ni sur  $\Gamma$ , ni sur  $\Gamma'$  au sens suivant : si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma'_1$  désignent les cercles homologues de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  par une telle inversion, on a :

$$I(\Gamma_1, \Gamma'_1) = I(\Gamma, \Gamma').$$

b) Interpréter  $I(\Gamma, \Gamma')$  dans le cas où cette expression est plus petite ou égale à 1.

c) Etendre la définition de  $I(\Gamma, \Gamma')$  au cas où  $\Gamma$  est une droite et  $\Gamma'$  un cercle (resp. au cas où  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont deux droites), de façon que  $I(\Gamma, \Gamma')$  reste invariant par toute inversion, sans restriction sur la position du pôle.

- 2 / Refaire les exercices 6, 7, 8 du chapitre 3, en utilisant une inversion.

- 3 / a) Etant donnés deux cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  d'un même plan  $\Pi$ , ne se coupant pas, et un entier  $n \geq 3$ , calculer  $I(\Gamma, \Gamma')$  pour qu'il puisse exister  $n$  cercles  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tous tangents à la fois à  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , et tels que  $\gamma_i$  soit tangent à  $\gamma_{i+1}$  (avec la convention  $\gamma_{n+1} = \gamma_1$ ).

b) Montrer qu'il existe une action naturelle du groupe  $SO(2) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  sur le plan  $\Pi$ , telle que l'image par tout élément de  $SO(2)$  d'une solution  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  au problème précédent soit une autre solution, et telle que chaque solution  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  soit globalement invariante par  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (considéré de façon naturelle comme sous-groupe de  $SO(2)$ ).



c) On suppose que  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  est une telle solution. On note :

$A_i$  le point de contact de  $\gamma_i$  avec  $\Gamma$ ,

$A'_i$  le point de contact de  $\gamma_i$  avec  $\Gamma'$ ,

$B_i$  le point de contact de  $\gamma_i$  avec  $\gamma_{i+1}$ ,

$\mathcal{F}$  le faisceau (à points limites notés P et Q) engendré par  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ ,

$\mathcal{G}$  le faisceau conjugué, à points de base P et Q,

$C_i$  le cercle de  $\mathcal{G}$  passant par  $A_i$ ,

$D_i$  le cercle de  $\mathcal{G}$  passant par  $B_i$ .

Montrer que tous les points  $B_i$  appartiennent à un même cercle  $\Gamma''$  du faisceau  $\mathcal{F}$ , et que  $\Gamma''$  ne dépend pas de la solution  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  choisie.

A quel cercle de  $\mathcal{G}$   $A'_i$  appartient-il?

Montrer que  $C_i$  (resp.  $D_i$ ) est orthogonal (resp. tangent) à  $\gamma_i$ . Quel est l'angle des cercles  $C_i$  et  $D_i$ ?  $C_i$  et  $C_{i+1}$ ?

- 4/ On appelle « anneau orthogonal » la figure formée, dans un espace euclidien de dimension 3, par deux cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  situés respectivement dans des plans  $\Pi$  et  $\Pi'$  orthogonaux, tous deux centrés sur la droite

$$\Delta = \Pi \cap \Pi',$$

et déterminant sur ce diamètre une division harmonique  $ABA'B'$  ( $A, B$  sur  $\Gamma$ ;  $A', B'$  sur  $\Gamma'$ ).

a) Quelle est l'image d'un tel anneau orthogonal par une inversion dans l'espace, de pôle situé sur  $\Gamma$ ?

b) Montrer que toute sphère  $\Sigma$  contenant  $\Gamma$  est « orthogonale » à toute sphère  $\Sigma'$  contenant  $\Gamma'$  (préciser ce que cela veut dire...).

c) Quel est l'image d'un anneau orthogonal par inversion de pôle non situé sur  $\Gamma$  ou sur  $\Gamma'$ ?

- 5/ On considère, dans un plan  $\Pi$ ; un triangle  $A, B, C$ . Soit  $\alpha$  un angle orienté de droites dans ce plan (fixé une fois pour toutes).

Soit  $\gamma$  un cercle passant par A et B (tangente en A notée  $b$ ),  
et  $\delta$  un cercle passant par A et C (tangente en A notée  $c$ ).

Quel est le lieu du point M où les deux cercles se recoupent,  
si l'on suppose que  $(b, c)$  est égal à l'angle fixé  $\alpha$ ?

6/ Quelle relation y a-t-il entre les résultats des exercices 1 et 3  
du chapitre 2?

7/ On se donne quatre cercles  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  dans un plan.

On suppose que :

$\gamma_1$  et  $\gamma_2$  se coupent en A et A';

$\gamma_2$  et  $\gamma_3$  se coupent en B et B';

$\gamma_3$  et  $\gamma_4$  se coupent en C et C';

$\gamma_4$  et  $\gamma_1$  se coupent en D et D'.

Montrer l'équivalence des deux propositions :

(i) AA'CC' sont « cocycliques »;

(ii) BB'DD' sont « cocycliques ».

Ce résultat est-il équivalent au théorème de Miquel (exercice 3 du chapitre 2?)

8/ Dans un plan euclidien, on note :

IRR' un triangle équilatéral et  $\gamma$  son cercle circonscrit,

$\lambda$  (resp.  $\lambda'$ ) le cercle passant par I et le milieu K de [RR'],  
tangent en I à IR' (resp. IR),

P (resp. P') le point d'intersection autre que K de RR' avec  
 $\lambda$  (resp.  $\lambda'$ ),

U (resp. U') le point d'intersection autre que I de  $\gamma$  avec  
 $\lambda$  (resp.  $\lambda'$ ),

V (resp. V') le point d'intersection autre que I de IR (resp. IR')  
avec  $\lambda$  (resp.  $\lambda'$ ),

$\Gamma$  le cercle circonscrit au triangle IPP' et  $\Omega$  son centre,

Q (resp. Q') le point d'intersection autre que I de IR (resp. IR')  
avec  $\Gamma$ .

a) Montrer que les points UU'VV'QQ' sont cocycliques.

*b)* Montrer que les cercles  $\gamma$ ,  $\Gamma$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda'$  ainsi que les droites  $IR$  et  $IR'$  sont toutes tangentes à un même cercle (on notera  $S$ ,  $J$ ,  $W$ ,  $W'$ ,  $T$ ,  $T'$  les points de contact correspondants).

*c)* Montrer que les points  $\Omega IQU'$  (resp.  $\Omega IQ'U$ ) sont cocycliques, de même que  $\Omega IVV'$ ,  $\Omega IPTW'R'$  (resp.  $\Omega IP'T'WR$ ). Quels sont les angles (en  $I$  ou  $\Omega$ ) de ces différents cercles?

*d)* Quels rapports y a-t-il entre une étoile de David, une rosace, et la figure précédente?

## CHAPITRE VII

# *Transformations par polaires réciproques (tppr)*

### 1 - Points conjugués par rapport à un cercle

Etant donnés un cercle  $\Gamma$  dans un plan euclidien  $\Pi$  et deux points  $A$  et  $B$  de  $\Pi$ , la façon la plus immédiate (celle aussi qui se traduit le plus facilement par perspective) de dire que ces deux points sont « conjugués » par rapport à  $\Gamma$ , au moins lorsqu'ils sont distincts, non sur  $\Gamma$ , et que la droite qui les joint coupe  $\Gamma$  en deux points distincts  $U$  et  $V$ , est d'énoncer que la division  $ABUV$  est harmonique.

Il se peut, malheureusement que la droite  $AB$  ne coupe pas  $\Gamma$ , du moins en des points « réels ». On introduira plus tard, au chapitre 10, les points imaginaires, et il se pourra parfaitement que la division  $ABUV$  soit harmonique avec  $A$ ,  $B$  réels, et les points  $U$  et  $V$  « imaginaires conjugués ». Mais, en attendant, on va avoir recours à un *artifice* permettant de définir la conjugaison de deux points réels  $A$  et  $B$ , même si  $AB$  ne coupe pas  $\Gamma$  (en des points réels) sans utiliser les points imaginaires pour autant. Cet artifice repose sur le

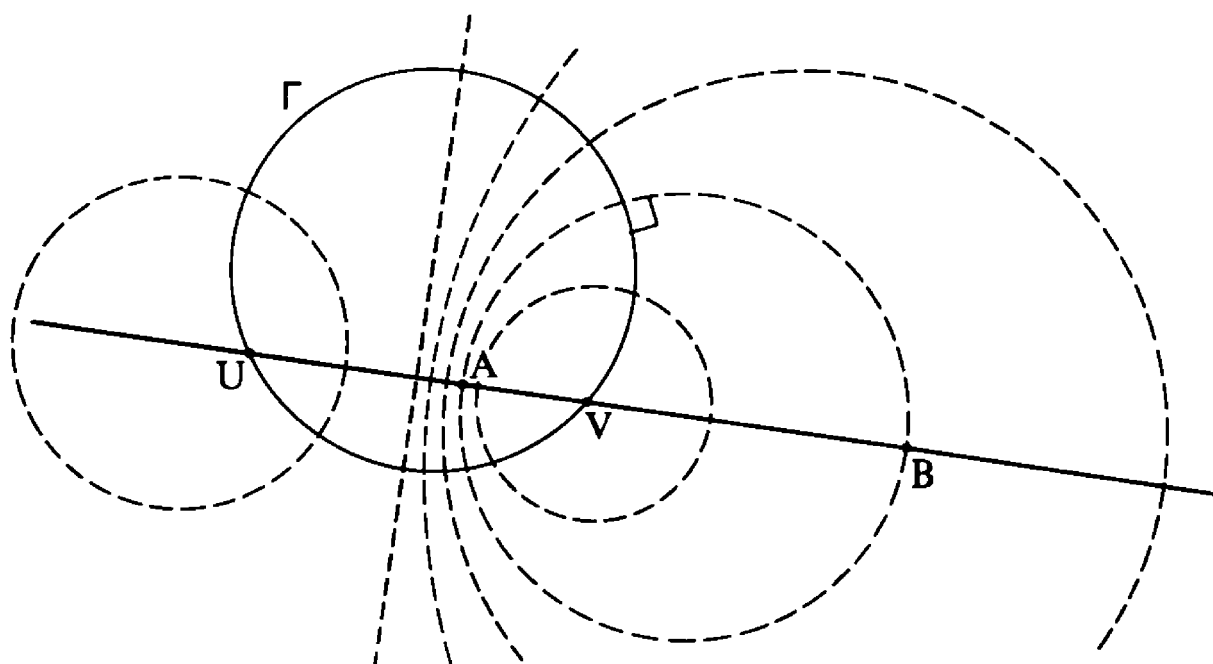
#### **Théorème 7-1**

*Etant donnés deux points distincts  $A$  et  $B$  de  $\Pi$  (à distance finie), non situés sur le cercle  $\Gamma$ , et tels que la droite  $AB$  coupe  $\Gamma$  en deux points  $U$  et  $V$  distincts, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La division  $ABUV$  est harmonique.*
- (ii) *Le cercle de diamètre  $[AB]$  est orthogonal à  $\Gamma$ .*

Soient  $U$  et  $V$  deux points distincts sur  $\Gamma$ . D'après le chapitre 3, les cercles du faisceau à points limites  $U$  et  $V$  sont caractérisés, parmi tous ceux centrés sur la droite  $UV$ , par l'une ou l'autre au choix des deux propriétés suivantes :

- ou bien d'être orthogonaux à  $\Gamma$ ,
- ou bien de couper la droite  $UV$  en deux points  $A$  et  $B$  formant avec  $U$  et  $V$  une division harmonique. c. q. f. d.

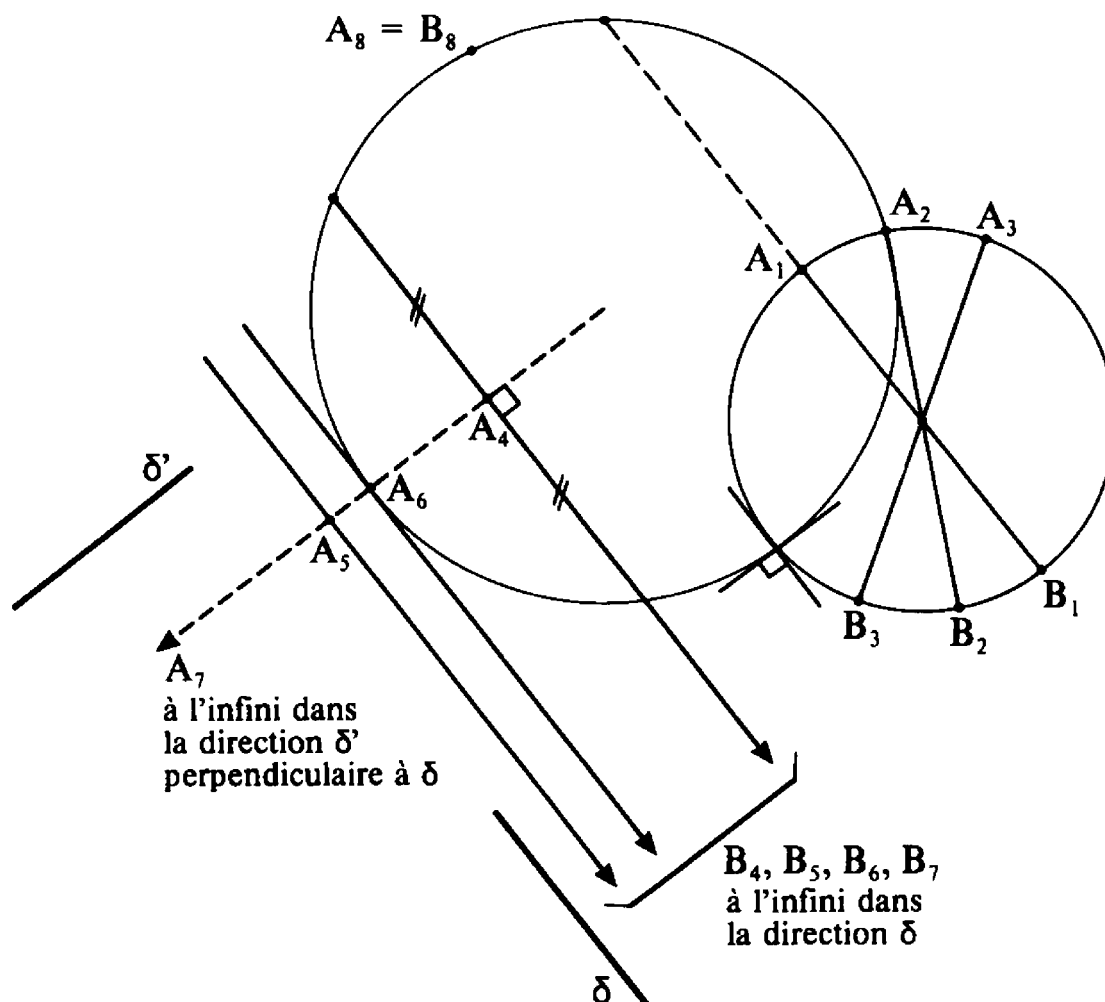


Admettant désormais que la droite  $AB$  puisse ne plus couper le cercle  $\Gamma$  ou lui être tangente, on posera la

**Définition.** — Deux points  $A$  et  $B$  de  $\Pi$  seront dits *conjugués par rapport à  $\Gamma$*

- (i) ou bien lorsqu'ils sont confondus en un même point de  $\Gamma$ ,
- (ii) ou bien, lorsque  $A$  et  $B$  sont deux points distincts de  $\Pi$  (à distance finie), si le cercle de diamètre  $[AB]$  coupe  $\Gamma$  orthogonalement,
- (iii) ou bien si l'un des deux points est à l'infini dans une direction  $\delta$  et l'autre sur le diamètre (droite passant par le centre) perpendiculaire à  $\delta$ ,
- (iv) ou bien quand  $A$  et  $B$  sont tous deux à l'infini dans des directions orthogonales.

Quelques exemples de couples  $(A_i, B_i)$  de points conjugués :



## 2 - Polaire d'un point par rapport à un cercle

Soit  $\Gamma$  un cercle dans le plan  $\Pi$  et  $A$  un point de  $\widehat{\Pi}$ .

### Théorème 7-2

- (i) Le lieu des points  $M$  de  $\widehat{\Pi}$  tels que  $A$  et  $M$  soient conjugués par rapport à  $\Gamma$  est une droite  $a$  de  $\widehat{\Pi}$ .
- (ii) L'application  $A \longrightarrow a$ , de  $\widehat{\Pi}$  dans l'ensemble  $\mathcal{D}(\widehat{\Pi})$  des droites de  $\widehat{\Pi}$ , est bijective.

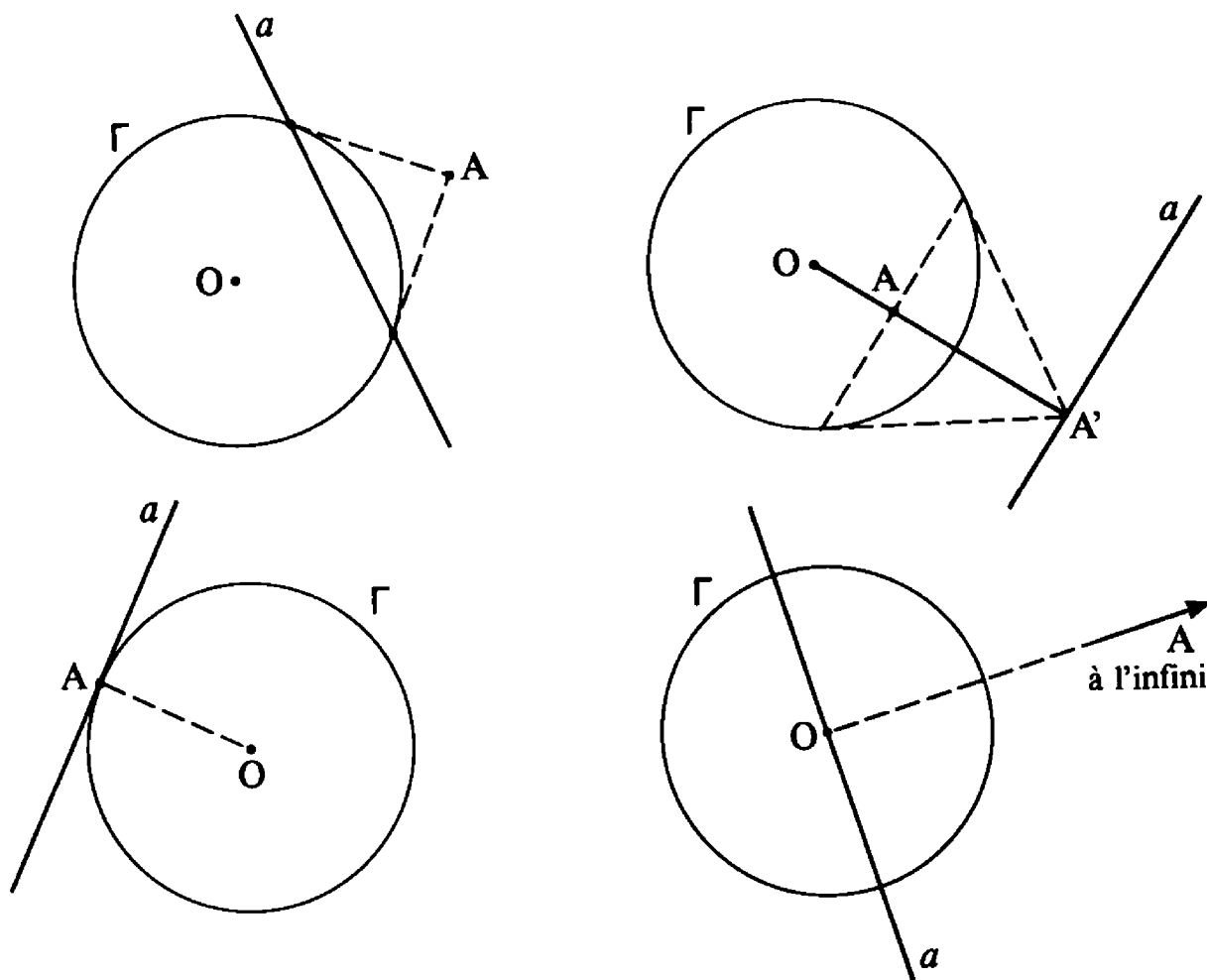


Il est clair, d'autre part, que toute droite  $\Delta$  de  $\widehat{\Pi}$  correspond par ce procédé à un point  $A$  de  $\widehat{\Pi}$  et un seul :

- si  $\Delta = \delta(\Pi)$ ,  $A$  est nécessairement le centre  $O$  de  $\Gamma$ ;
- si  $\Delta$  est un diamètre de  $\Gamma$ ,  $A$  est nécessairement le point à l'infini dans la direction perpendiculaire;
- si  $\Delta$  est une droite de  $\Pi$  ne passant pas par  $O$ ,  $A$  ne peut qu'être l'inverse du pied  $A'$  de la perpendiculaire abaissée de  $O$  sur  $\Delta$ .

La droite  $a$  est appelée la *polaire* du point  $A$ . Le point  $A$  est appelé le *pôle* de la droite  $a$ .

**Constructions.** — Si  $A$  est extérieur à  $\Gamma$ ,  $A$  est nécessairement conjugué aux points de contact des tangentes à  $\Gamma$  issues de  $A$ , et  $a$  passe donc par ces points de contact, d'où une construction de  $a$ .





Si  $A$  est intérieur à  $\Gamma$ , la propriété précédente permet de construire le point  $A'$  extérieur à  $\Gamma$  : ce sera le point d'intersection des tangentes en les points  $U$  et  $V$  où la perpendiculaire à  $OA$  passant par  $A$  coupe  $\Gamma$ .

### 3 - Transformation par polaires réciproques relativement à un cercle

Soit  $\Gamma$  un cercle dans le plan euclidien  $\Pi$ , et  $\varphi : \hat{\Pi} \longrightarrow \mathcal{D}(\hat{\Pi})$  la bijection définie au théorème 7-2, qui associe, à tout point  $A$  de  $\hat{\Pi}$ , sa polaire  $a$  par rapport à  $\Gamma$ . Soit  $\psi = \varphi^{-1}$  la bijection réciproque de  $\mathcal{D}(\hat{\Pi})$  sur  $\hat{\Pi}$ . On appelle *transformation par polaires réciproques* (*tppr* en abrégé) relativement à  $\Gamma$ , le couple  $(\varphi, \psi) : \hat{\Pi} \times \mathcal{D}(\hat{\Pi}) \longrightarrow \mathcal{D}(\hat{\Pi}) \times \hat{\Pi}$  des bijections précédentes.

#### Lemme 7-3

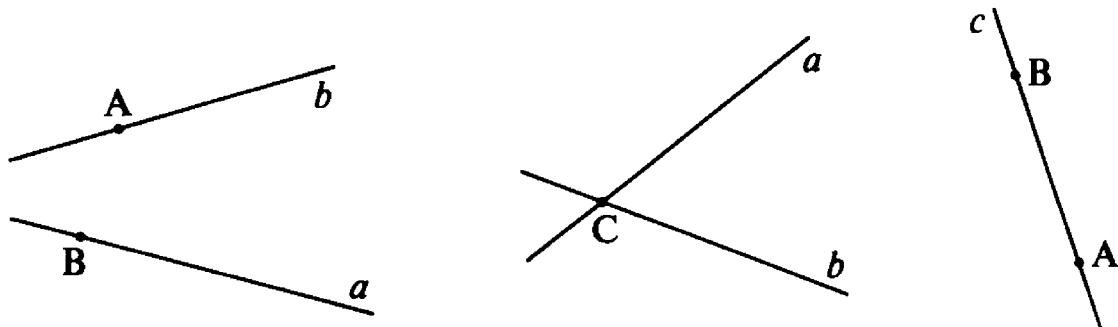
*Etant deux points  $A$  et  $B$  de  $\hat{\Pi}$ , les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Les deux points  $A$  et  $B$  sont conjugués par rapport à  $\Gamma$ .*
- (ii) *La polaire de  $A$ , par rapport à  $\Gamma$ , passe par  $B$ .*
- (iii) *La polaire de  $B$ , par rapport à  $\Gamma$ , passe par  $A$ .*

*Si les deux points  $A$  et  $B$  sont distincts, le pôle  $C$  de la droite  $AB$  est l'intersection  $a \cap b$  des polaires de  $A$  et  $B$ .*

*Si deux droites  $a$  et  $b$  sont distinctes, la polaire  $c$  de leur point d'intersection  $C = a \cap b$  est la droite  $AB$  qui joint les pôles  $A$  et  $B$  de  $a$  et  $b$ .*

La démonstration est évidente.



**Lemme 7-4**

*Si  $A$  et  $B$  sont deux points de  $\Pi$ , distincts de  $O$ , on a l'égalité suivante entre angles de droites*

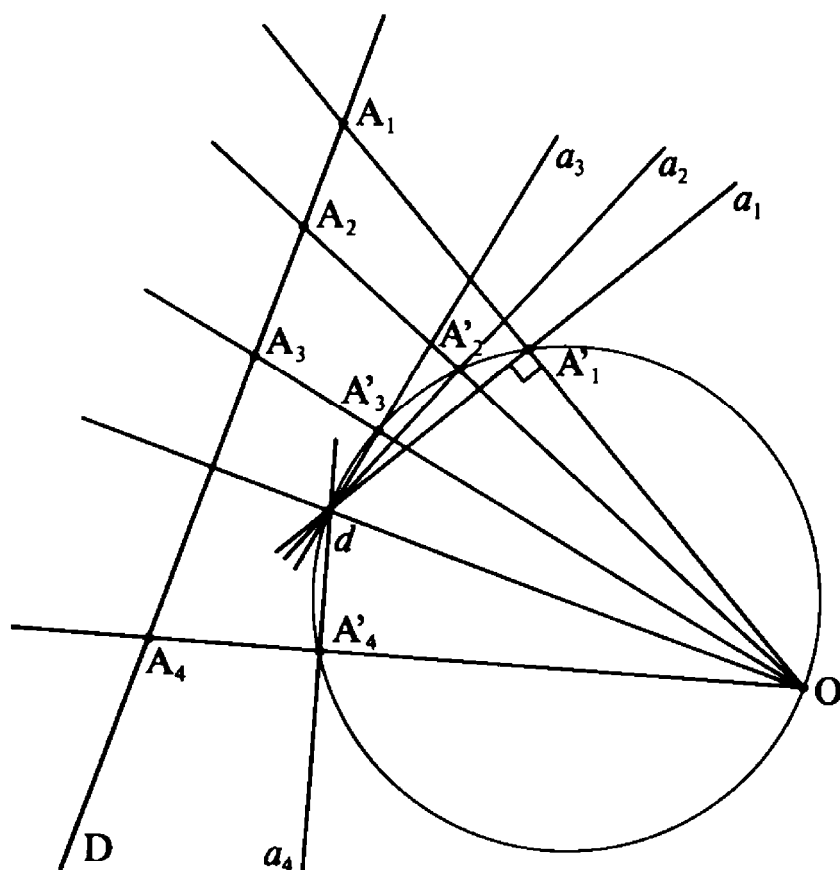
$$(OA, OB) = (a, b).$$

Les droites  $OA$  et  $OB$  sont en effet respectivement perpendiculaires aux droites  $a$  et  $b$ .

**Théorème 7-5**

*Etant donné des points  $A_i$  de  $\Pi$  de polaires respectives  $a_i$  par rapport à  $\Gamma$ .*

- 1) *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
- (i) *les trois points  $A_1, A_2, A_3$  sont alignés,*
  - (ii) *les trois droites  $a_1, a_2, a_3$  sont concourantes.*



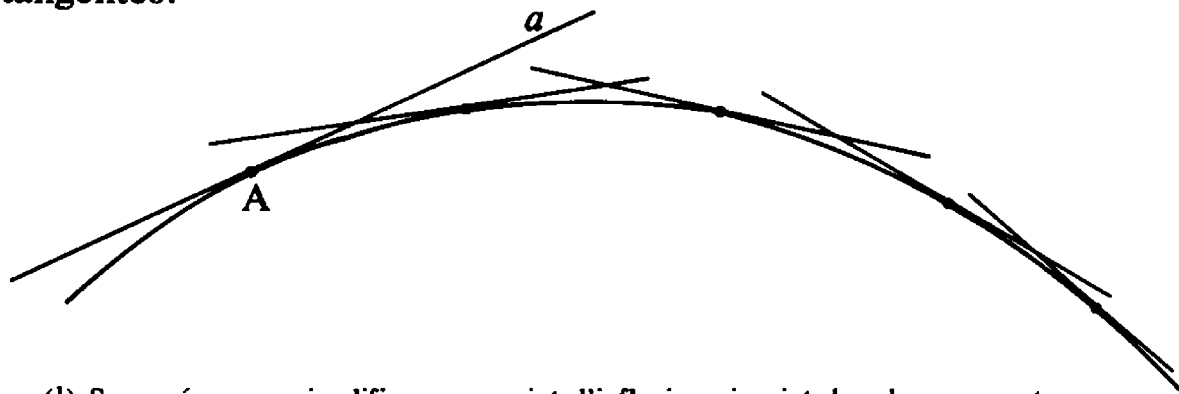
2) *Le birapport de quatre points alignés  $A_1, A_2, A_3, A_4$  est égal au birapport des quatre droites  $a_1, a_2, a_3, a_4$  (concourantes dans  $\hat{\Pi}$  d'après ce qui précède.)*

Etant donnés des points  $A_i$  alignés sur une droite  $D$ , leur polaire  $a_i$  passe par le pôle  $d$  de  $D$ , et les points  $A'_i = a_i \cap OA_i$  appartiennent au cercle de diamètre  $[Od]$ , du moins si  $d$  est à distance finie et distinct de  $O$ , c'est-à-dire si  $D$  n'est ni la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$  ni un diamètre. Le birapport de quatre points  $A_i$  sur  $D$  est égal au birapport des quatre droites  $OA_i$ , donc au birapport des quatre points  $A'_i$  sur le cercle de diamètre  $[Od]$ , donc au birapport des quatre droites  $a_i = dA'_i$ .

Si  $D$  est la droite de l'infini, le birapport des quatre directions  $A_i$  est égal au birapport des quatre diamètres de directions  $A_i$ , donc au birapport des quatre droites  $a_i$  qui sont les diamètres orthogonaux aux précédents (la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi/2$ , étant une isométrie, préserve les birapports de droites concourantes).

Si  $D$  est un diamètre, le birapport de quatre points  $A_i$  de  $D$  est égal au birapport des quatre points  $A'_i$  définis par  $\overline{OA'_i} = \frac{R^2}{\overline{OA_i}}$  (vérification facile; le calcul sera d'ailleurs repris au chapitre 8). Or le birapport des quatre points  $A'_i$  est égal au birapport des quatre perpendiculaires à  $D$  passant par  $A'_i$ , qui sont les droites  $a_i$ . Ceci achève la démonstration du théorème.

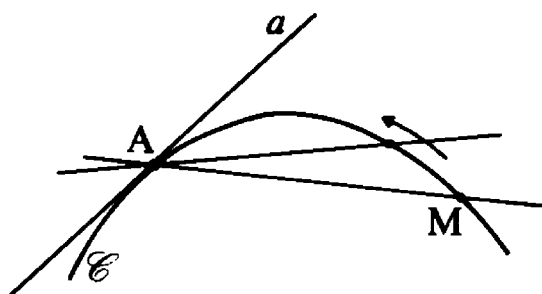
*Transformée par polaires réciproques d'une courbe.* — Une courbe  $C$ , deux fois différentiable<sup>(1)</sup>, dans  $\Pi$ , peut aussi bien être définie comme lieu de ses points que comme enveloppe<sup>(2)</sup> de ses tangentes.



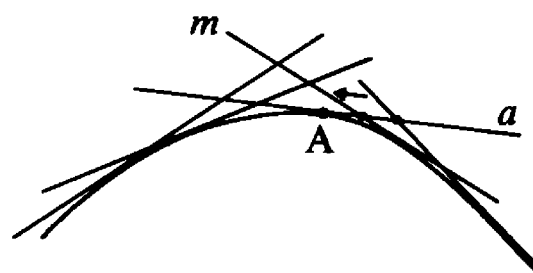
<sup>(1)</sup> Supposée, pour simplifier, sans point d'inflexion ni point de rebroussement.

<sup>(2)</sup> Cf. rappel sur les enveloppes au paragraphe 6 de ce chapitre.

Rappelons que la *tangente*  $a$  en un point  $A$  de  $\mathcal{C}$  peut être définie comme la limite des droites  $AM$  quand  $M$  tend vers  $A$  sur  $\mathcal{C}$ , et que le point caractéristique  $A$  en la tangente  $a$  à  $\mathcal{C}$  peut être défini comme limite sur la droite  $a$  des points d'intersection  $a \cap m$  quand  $m$  est une tangente à  $\mathcal{C}$  tendant vers  $a$ .

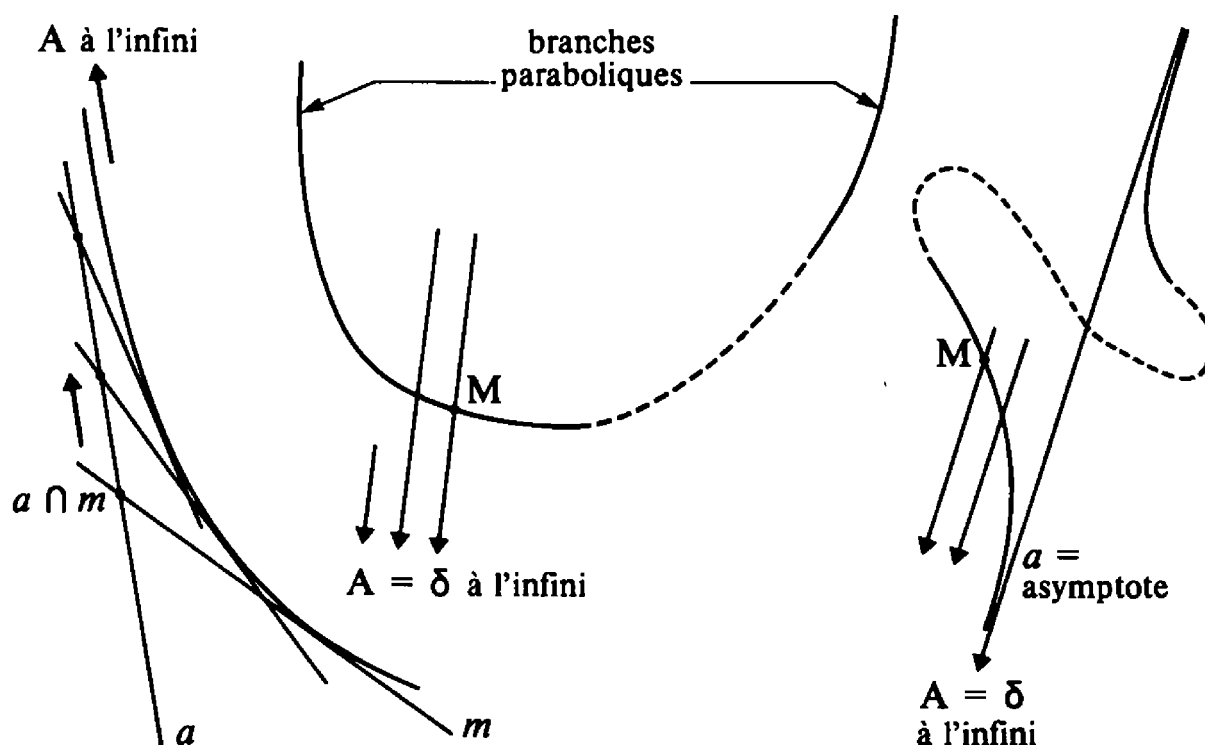


$AM$  tend vers  $a$



$a \cap m$  tend vers  $A$

Ces définitions s'étendent sans difficulté aux courbes dans  $\hat{\Pi}$ , un point à l'infini  $\delta$  sur  $\mathcal{C}$  étant — par définition — une direction asymptotique de  $\mathcal{C} \cap \Pi$  et la tangente en un tel point  $\delta$  n'existant que si cette direction asymptotique correspond — ou bien à une branche asymptotique, auquel cas la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $\delta$  est — par définition — l'asymptote associée;

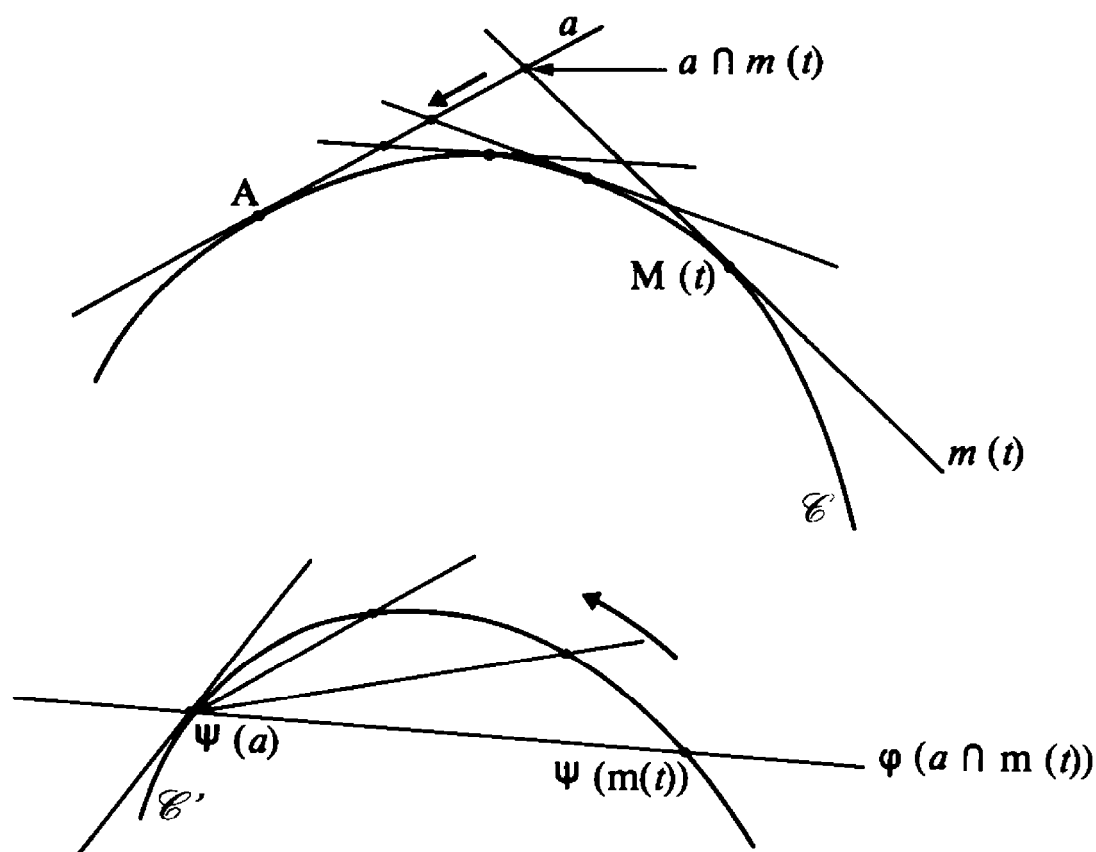


— ou bien à une branche parabolique, auquel cas la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $\delta$  est — par définition — la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$ .

### Théorème 7-6

Etant donnée une courbe  $\mathcal{C}$ , deux fois différentiable dans  $\hat{\Pi}$ , notons  $M$  un point de  $\mathcal{C}$  et  $m$  la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$ .

*Le lieu des points  $\psi(m)$ , quand  $m$  enveloppe  $\mathcal{C}$ , est une courbe  $\mathcal{C}'$  deux fois différentiable dans  $\hat{\Pi}$ , qui est aussi l'enveloppe des droites  $\varphi(M)$  quand  $M$  parcourt  $\mathcal{C}$ . En outre,  $\varphi(M)$  est la tangente à  $\mathcal{C}'$  en  $\psi(m)$  (et  $\psi(m)$  le point caractéristique de la tangente  $\varphi(M)$ ).*



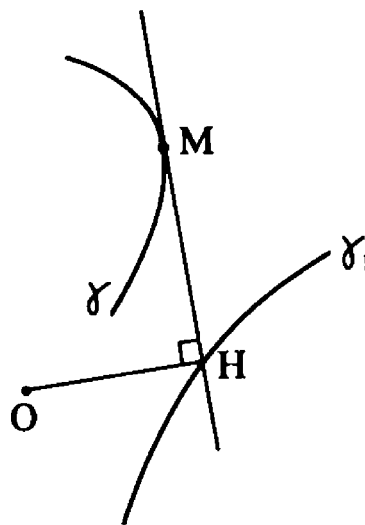
Soit  $t \rightarrow M(t)$  la courbe  $\mathcal{C}$ ,  $A = M(t_0)$ , et  $m(t)$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point de paramètre  $t$ . Soit  $\mathcal{C}'$  la courbe  $t \rightarrow \psi(m(t))$ . La tangente à  $\mathcal{C}'$  au point  $\psi(a)$  (où  $a = m(t_0)$ ) est la limite de la droite joignant  $\psi(a)$  à  $\psi(m(t))$ , quand  $t$  tend vers  $t_0$ . Cette droite est aussi l'image par  $\varphi$  du point  $a \cap m(t)$ . Quand  $t$  tend vers  $t_0$ ,  $a \cap m(t)$  tend vers le point caractéristique  $A$  sur  $a$  de la famille des tangentes

$m(t)$ . Puisque  $\varphi$  est continue<sup>(3)</sup>, la droite  $\varphi(a \cap m(t))$  tend vers  $\varphi(A)$ , qui est donc la tangente en  $\psi(a)$  à  $C'$ . Le fait que  $\psi(a)$  soit point caractéristique de la famille des droites  $\psi(M(t))$  en  $\varphi(A)$ , se démontre de façon analogue.

La courbe  $C'$ , ainsi obtenue indistinctement comme lieu des points  $\psi(m)$  quand  $m$  enveloppe  $C$  ou enveloppe des droites  $\varphi(M)$  quand  $M$  parcourt  $C$ , est appelée transformée par polaires réciproques de  $C$  relativement à  $\Gamma$ . La tppr de  $C'$  est alors  $C$ . On dit que *les deux courbes sont tppr l'une de l'autre*.

[Remarque : Si  $C$  est une droite,  $m$  est constant et la courbe constante  $\psi(m)$  n'est autre que le pôle de la droite  $C$ ; si  $C$  est une courbe constante (un point), toutes les droites  $m$  passent par ce point, et leur pôle  $\psi(m)$  parcourt la polaire de ce point :  $C'$  est une droite.]

Etant donné un point  $O$  et une courbe différentiable  $\gamma$ , on appelle *podaire* de  $\gamma$  relativement à  $O$  le lieu  $\gamma_1$  du pied  $H$  de la perpendiculaire abaissée de  $O$  sur la tangente en  $M$  à  $\gamma$ , quand  $M$  parcourt  $\gamma$ . Inversement, l'enveloppe  $\gamma$  de la perpendiculaire à la droite  $OH$  quand  $H$  parcourt une courbe  $\gamma_1$ , s'appelle l'*antipodaire* de  $\gamma_1$  par rapport à  $O$ .

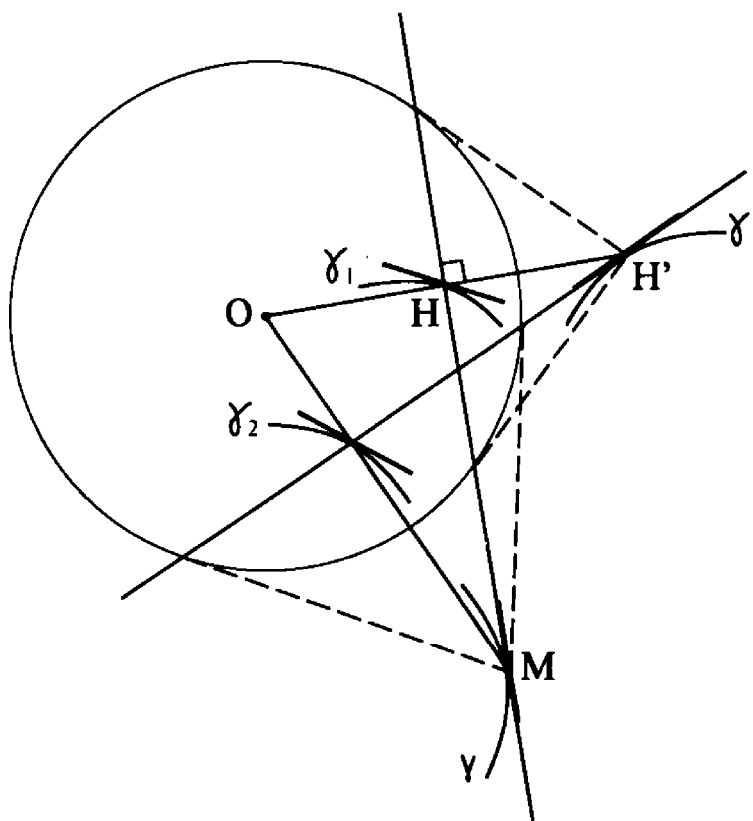


<sup>(3)</sup>  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $\bar{\Pi}$  sur  $\mathcal{D}(\bar{\Pi})$  pour des topologies naturelles que l'on précisera au chapitre 10.

La relation  $\overline{OH} \cdot \overline{OH'} = R^2$ , qui relie le pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en M à  $\gamma$ , et le pôle H' de cette tangente, implique la

**Proposition 7-7**

*La tppr  $\gamma'$  d'une courbe  $\gamma$  relativement à un cercle  $\Gamma$  de centre O et de rayon R est l'inverse de la podaire  $\gamma_1$  de  $\gamma$  par rapport à O dans l'inversion de pôle O et de puissance  $R^2$  (et aussi l'antipodaire de l'inverse  $\gamma_2$ , puisque  $\gamma$  est aussi la tppr de  $\gamma'$ ).*



**Remarque :** Quand la tangente à  $\gamma$  en un point A passe par O, la tppr  $\gamma'$  de  $\gamma$  passe par le point à l'infini  $\delta$  dans la direction perpendiculaire à OA, la polaire de A étant l'asymptote en  $\delta$  à  $\gamma'$  (branche parabolique si A est en O).

**Théorème 7-8**

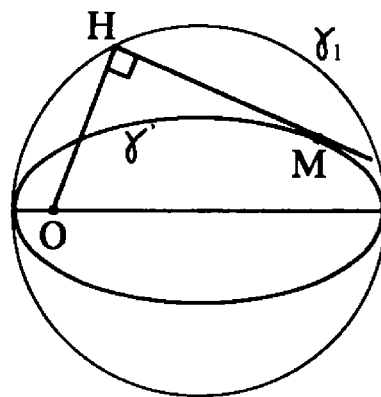
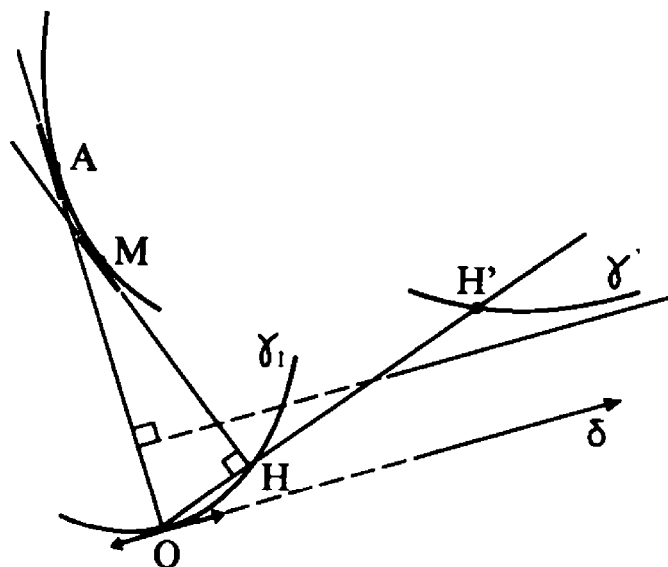
*La tprr d'un cercle  $\gamma$ , par rapport à un cercle  $\Gamma$  de centre  $O$ , est une conique de foyer  $O$*

- ellipse ou hyperbole si  $O$  n'appartient pas à  $\gamma$ ,
- parabole si  $\gamma$  passe par  $O$ .

La courbe cherchée,  $\gamma'$  est en effet l'antipodaire de l'inverse  $\gamma_1$  de  $\gamma$  dans une inversion de pôle  $O$  :  $\gamma_1$  est donc un cercle ou une droite selon que  $\gamma$  passe par  $O$  ou non, et  $\gamma_1$  ne passe pas par  $O$ . On sait que l'antipodaire de  $\gamma_1$  est

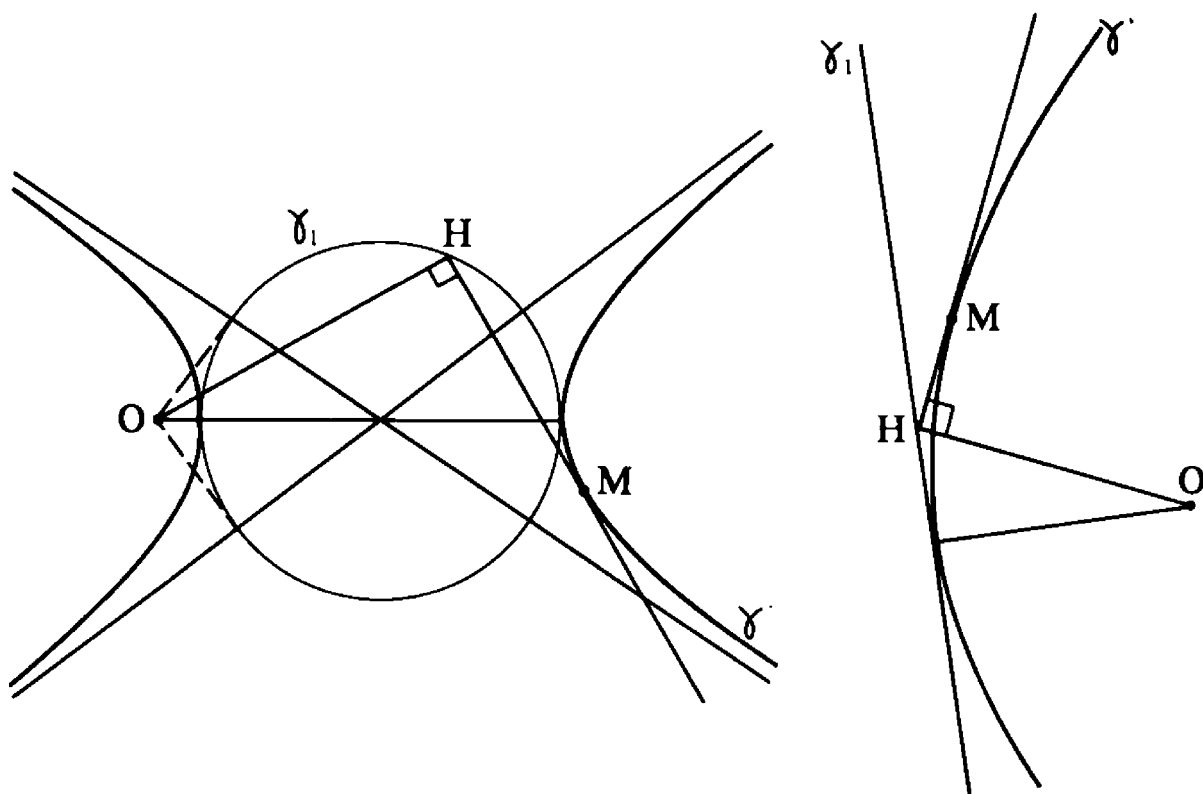
- une ellipse si  $O$  est intérieur à  $\gamma_1$ ,
- une hyperbole si  $O$  est extérieur à  $\gamma_1$ ,
- une parabole si  $\gamma_1$  est une droite,

admettant dans tous les cas  $O$  pour foyer (cf. chapitre 4, paragraphe 4).

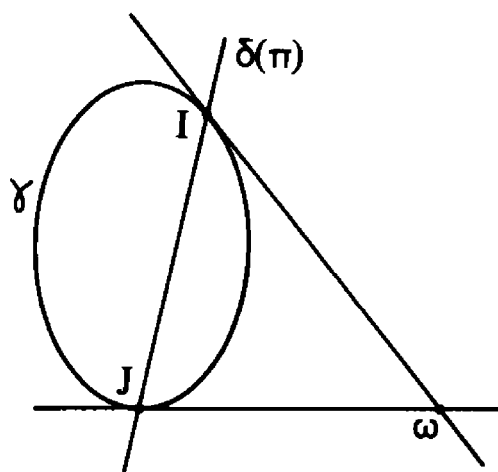


**Remarque :** L'introduction future de « points imaginaires » (chapitre 10) dans  $\hat{\Pi}$  rendra le théorème précédent beaucoup plus naturel : on démontrera en effet l'existence de deux points imaginaires conjugués  $I$  et  $J$  sur la droite de l'infini, appelés les « points cycliques » parce qu'un cercle  $\gamma$  sera caractérisé comme étant une conique passant par  $I$  et  $J$ , le centre du cercle (pôle de  $\delta(\Pi)$ ) étant l'intersection des « tangentes » à  $\gamma$  en  $I$  et  $J$ . On verra

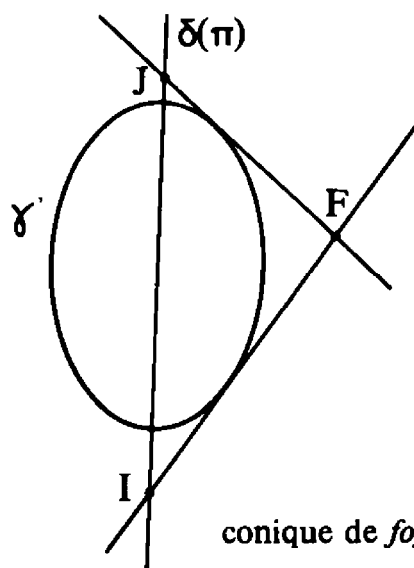




que ces points permettent aussi de définir les foyers d'une conique  $\gamma'$  comme les points  $F$  d'où l'on peut mener à  $\gamma'$  deux tangentes passant respectivement par  $I$  et  $J$ .



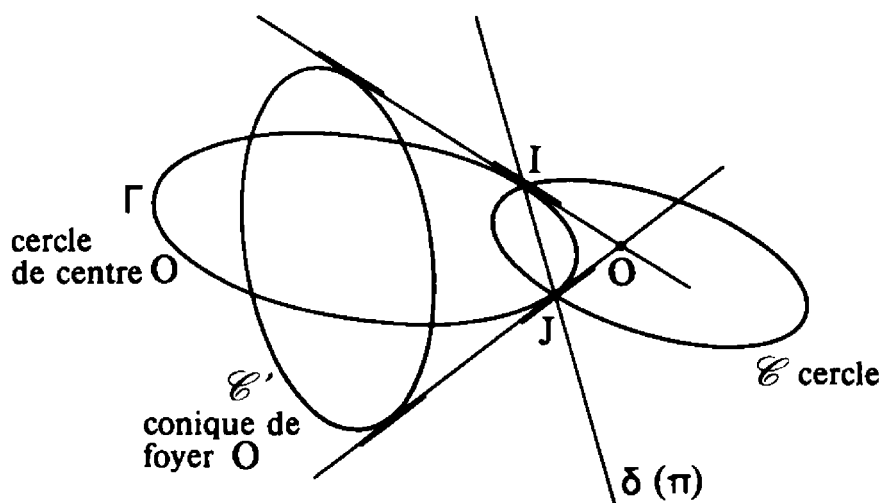
cercle de centre  $\omega$



conique de foyer  $F$

Soit alors  $\Gamma$  un cercle de centre  $O$ . La tppr relative à  $\Gamma$  s'étendra aux points et droites imaginaires, de sorte que  $\varphi(I)$  et  $\varphi(J)$  seront respectivement les droites  $OI$  et  $OJ$ , et la tppr d'un cercle  $\gamma$  relativement à  $\Gamma$  sera donc une courbe  $\gamma'$  tangente à  $OI$  et  $OJ$ .

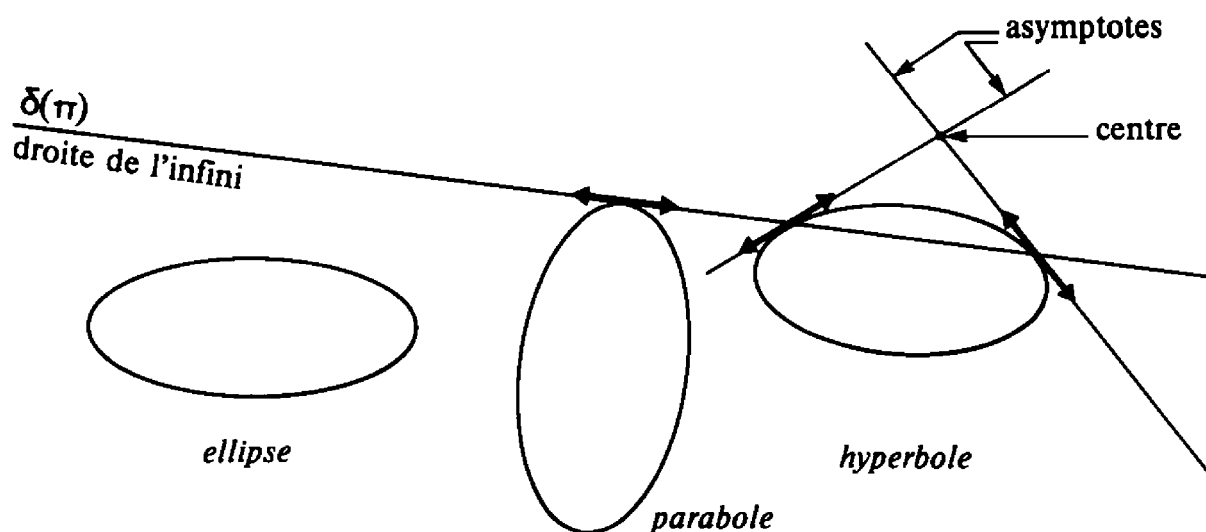
Comme on démontrera que les coniques sont à la fois les courbes de *degré 2* (c'est-à-dire les courbes algébriques coupées en deux points — réels ou imaginaires, distincts ou confondus — par toute droite du plan), et de *classe 2* (c'est-à-dire les courbes algébriques telles que par tout point du plan, on puisse mener deux tangentes — réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues), on en déduira que  $\gamma'$  est une conique de foyer  $O$ .



#### 4 - Extension aux tppr relatives à une conique

Etant donnée une conique  $\Gamma$  dans un plan affine  $\Pi$ , on appelle *complétée de  $\Gamma$*  dans  $\hat{\Pi}$  la somme disjointe  $\hat{\Gamma}$  de  $\Gamma$  et des points à l'infini sur  $\delta(\Pi)$  qui sont direction asymptotique de  $\Gamma$  :

- $\hat{\Gamma} = \Gamma$  si  $\Gamma$  est une ellipse;
- si  $\Gamma$  est une hyperbole, on ajoute à  $\Gamma$  ses deux directions asymptotiques et les asymptotes sont alors dites tangentes à  $\Gamma$  en les directions asymptotiques correspondantes;
- si  $\Gamma$  est une parabole, on lui ajoute son unique direction asymptotique, la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$  étant alors dite tangente à  $\hat{\Gamma}$  en le point à l'infini de la parabole.



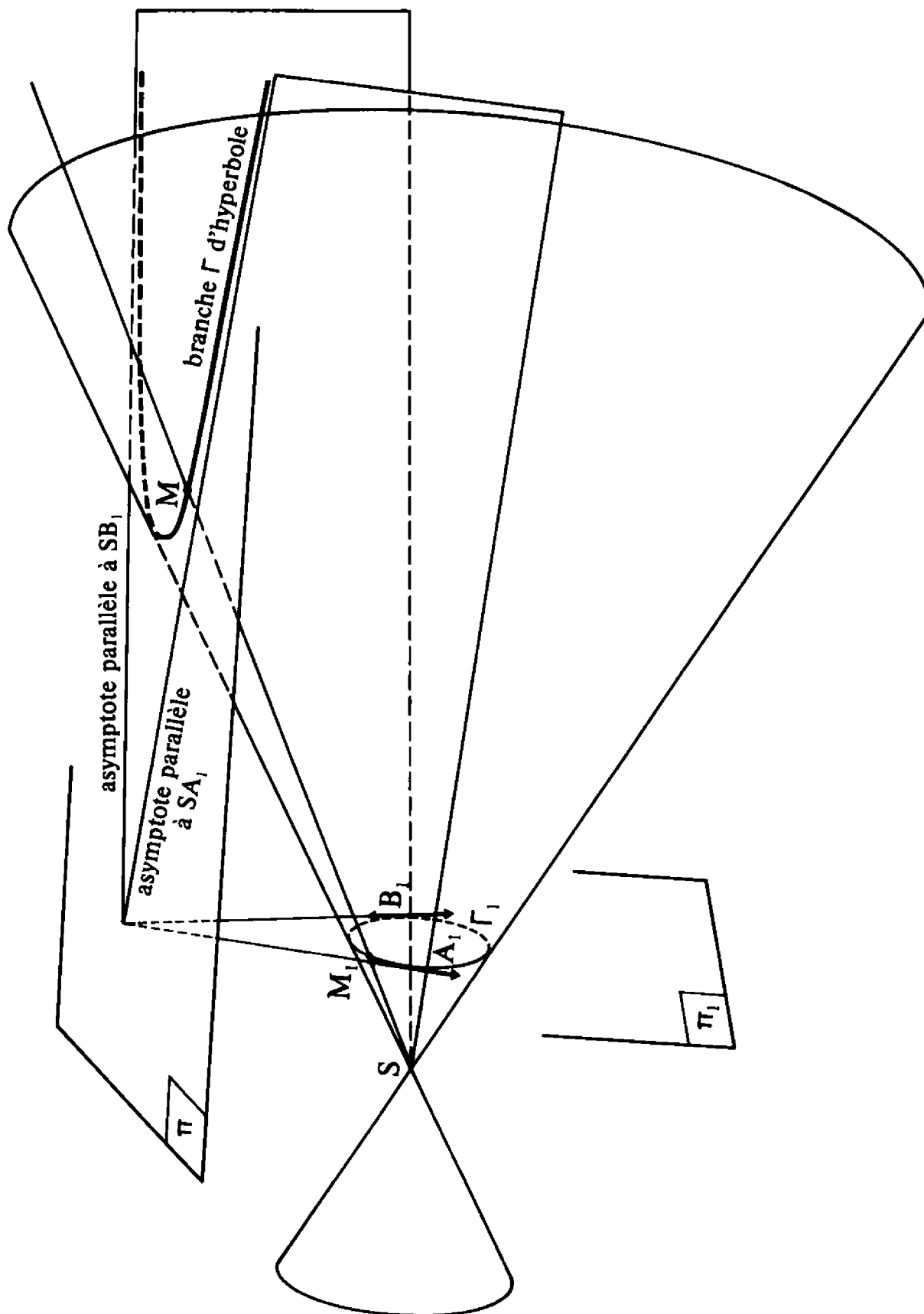
Avec ces définitions, la perspective conique  $p : \hat{\Pi}_1 \longrightarrow \hat{\Pi}$  dont il est question dans l'énoncé du théorème de Dandelin (chapitre 5; paragraphe 6; théorème 5-9) possède une restriction au cercle  $\Gamma_1$  de  $\Pi_1$  qui est une bijection sur  $\hat{\Gamma}$ . [Le plan  $\Pi_0$ , parallèle à  $\Pi$  passant par  $S$ , coupe  $\Gamma_1$  en aucun point, deux points  $A_1$  et  $B_1$ , ou un seul point  $A_1$  selon que  $\Gamma$  est une ellipse, une hyperbole ou une parabole; et les directions asymptotiques de  $\Gamma$  sont les images de ces points dans  $\hat{\Pi}$  par la perspective  $p$ ; en outre les images par perspective des tangentes à  $\Gamma_1$  en ces points sont les asymptotes à  $\Gamma$  dans le cas de l'hyperbole et la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$  pour la parabole.] D'autre part, la perspective  $p$  définit aussi une bijection  $\mathcal{D}(\hat{\Pi}_1) \longrightarrow \mathcal{D}(\hat{\Pi})$ .

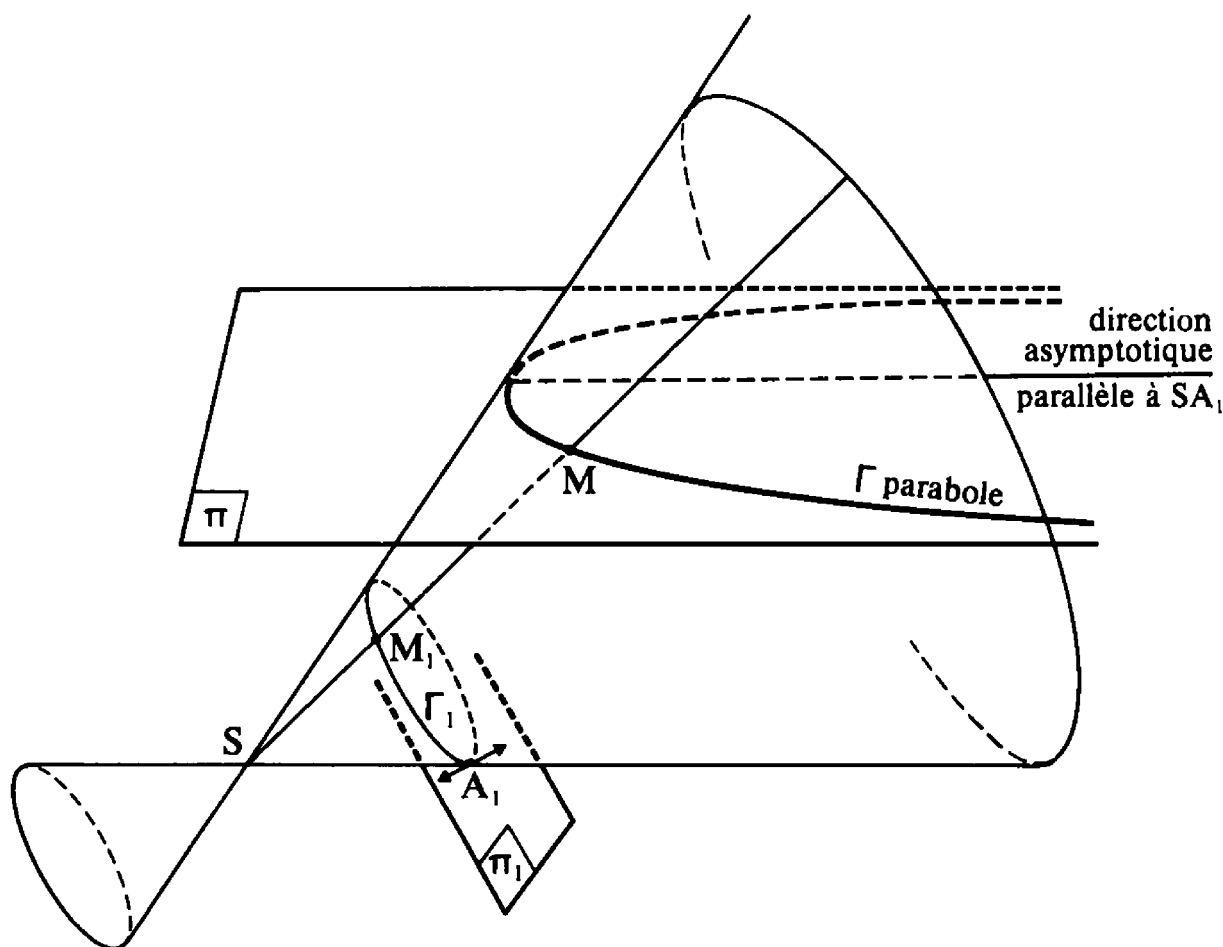
Soit donc  $\Gamma$  une conique dans  $\Pi$ . D'après la proposition 5-10, il est toujours possible de trouver un cercle  $\Gamma_1$  dans un plan  $\Pi_1$  et une perspective  $p : \hat{\Pi}_1 \longrightarrow \hat{\Pi}$  telle que  $\hat{\Gamma}$  soit l'image de  $\Gamma_1$  par  $p$ . Notons alors  $\varphi_1 : \hat{\Pi}_1 \longrightarrow \mathcal{D}(\hat{\Pi}_1)$  la tppr relative au cercle  $\Gamma_1$ , et  $q$  la perspective  $q = p^{-1} : \hat{\Pi} \longrightarrow \hat{\Pi}_1$ .

### Lemme

La bijection  $\varphi = \mathcal{D}(p) \circ \varphi_1 \circ q$  de  $\hat{\Pi}$  sur  $\mathcal{D}(\hat{\Pi})$  est caractérisée par les propriétés suivantes :

- (i) Si  $A$  appartient à  $\hat{\Gamma}$ ,  $\varphi(A)$  est la tangente à  $\hat{\Gamma}$  en  $A$ .





- (ii) Si  $A$  n'appartient pas à  $\widehat{\Gamma}$ , et si  $D$  est une droite de  $\widehat{\Pi}$  passant par  $A$ , coupant  $\widehat{\Gamma}$  en deux points distincts  $U$  et  $V$ , le conjugué harmonique de  $A$  par rapport à  $U$  et  $V$  appartient à la droite  $\varphi(A)$ .

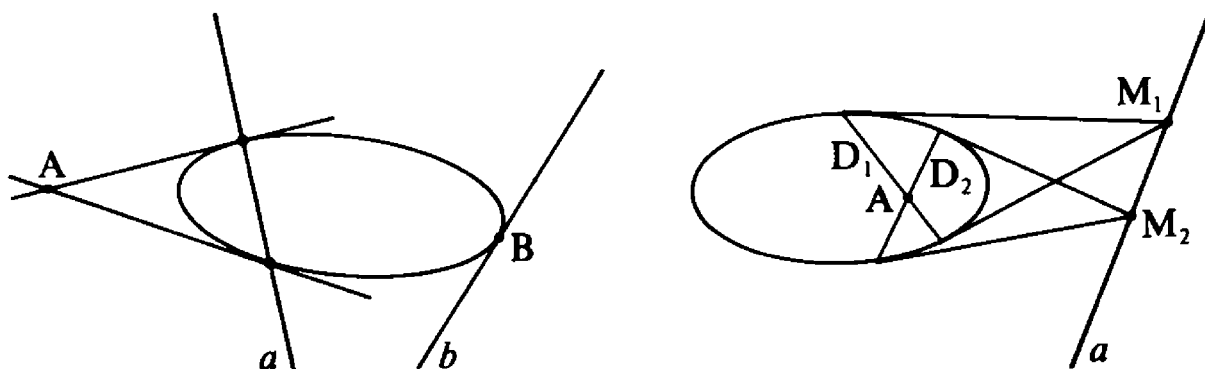
En particulier,  $\varphi$  ne dépend que de la conique  $\Gamma$  dans  $\Pi$ , et non du plan  $\Pi_1$ , du cercle  $\Gamma_1$  et de la perspective  $p : \Gamma_1 \longrightarrow \widehat{\Gamma}$ .

Il est évident que la propriété (i) caractérise  $\varphi(A)$  quand  $A$  appartient à  $\widehat{\Gamma}$ . Le fait que (ii) caractérise  $\varphi(A)$  quand  $A$  n'est pas sur  $\widehat{\Gamma}$  provient de ce qu'il existe toujours une infinité de droites  $D$  passant par  $A$  et coupant  $\widehat{\Gamma}$  en deux points distincts : il y en a donc au moins deux, qui suffisent à déterminer  $\varphi(A)$ .

Puisque la perspective  $p$  préserve les notions de contact et de division harmonique, le fait que  $\varphi$  vérifie (i) et (ii) résulte de ce qu'il en est bien ainsi de  $\varphi_1$ .

Si  $\psi$  désigne la bijection réciproque  $\varphi^{-1}$  de  $\mathcal{D}(\hat{\Pi})$  sur  $\hat{\Pi}$ , le couple  $(\varphi, \psi)$  est appelé *tppr relative à  $\Gamma$* . Si  $A$  est un point de  $\hat{\Pi}$ , la droite  $a = \varphi(A)$  s'appelle la *polaire* de  $A$  relativement à la conique  $\Gamma$ ; tandis que si  $D$  est une droite de  $\hat{\Pi}$ ,  $\psi(D)$  est appelé le *pôle* de  $D$  relativement à  $\Gamma$ .

Pratiquement,  $\varphi$  se construit avec une conique  $\Gamma$  quelconque, comme dans le cas d'un cercle :

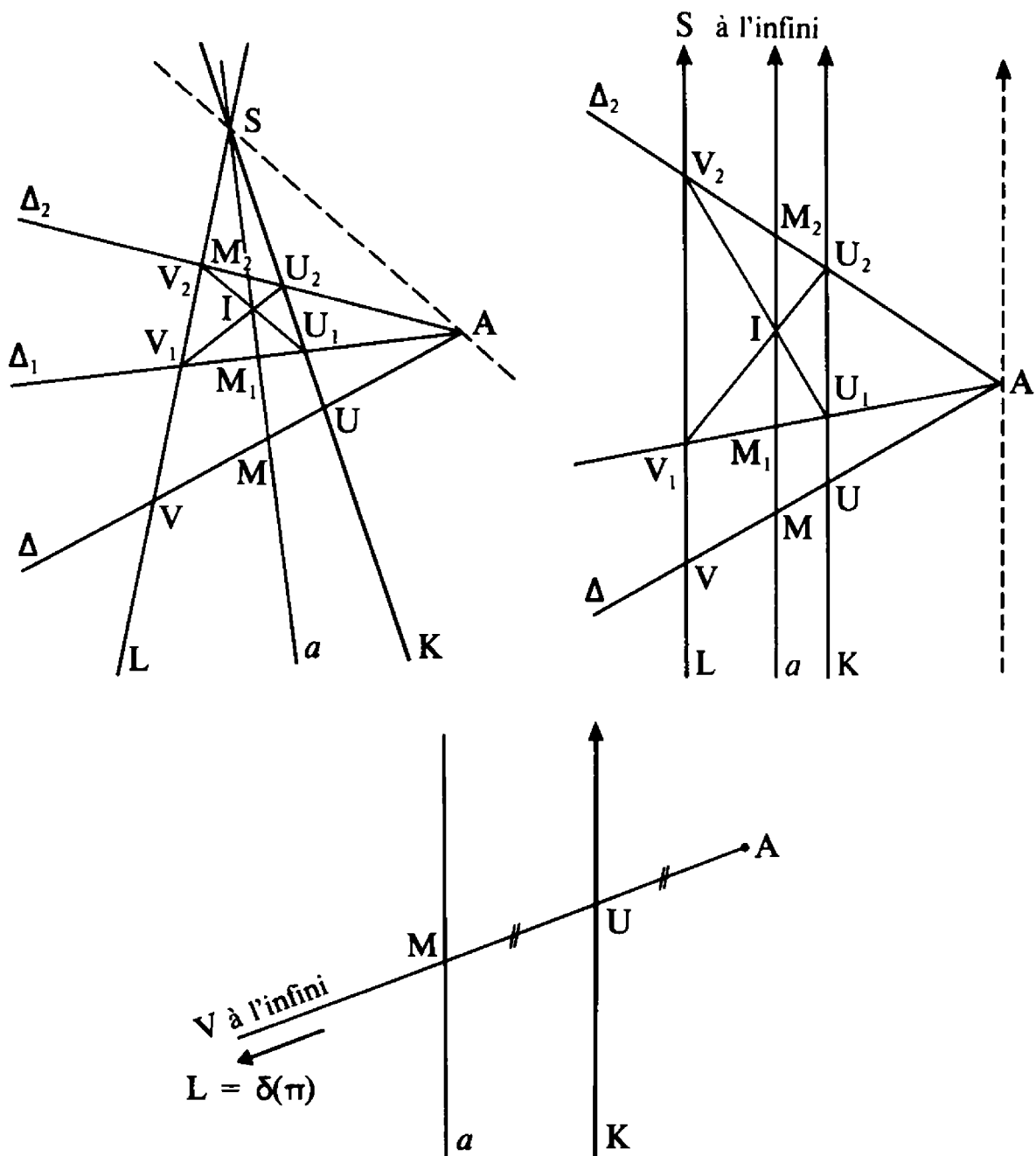


D'autre part, le lemme 7-3 ainsi que les théorèmes 7-5 et 7-6 du paragraphe 3 se généralisent immédiatement au cas d'une tppr relative à une conique  $\Gamma$  quelconque, les propriétés concernées étant préservées par perspective.

Par contre le lemme 7-4, la proposition 7-7 et le théorème 7-8 sont particuliers au cas où  $\Gamma$  est un cercle, et ne se généralisent *pas*. [Ils concernent en effet les notions d'«angle», de «perpendiculaire», de «foyer», qui ne sont pas préservées par perspective.]

*Cas où  $\Gamma$  «dégénère» en deux droites distinctes  $K$  et  $L$  de  $\hat{\Pi}$  :*

Soient  $K$  et  $L$  deux droites distinctes dans  $\hat{\Pi}$  et  $S$  leur point d'intersection (dans  $\hat{\Pi}$ ) : par un point  $A$  de  $\hat{\Pi}$  n'appartenant à aucune des deux droites  $K$  et  $L$ , on peut faire passer des droites  $\Delta$ , coupant  $K$  et  $L$  respectivement en  $U$  et  $V$  ( $\Delta$  est supposée distincte de  $SA$ ). Notons  $M$  le conjugué harmonique de  $A$  sur  $\Delta$  par rapport à  $U$  et  $V$ . Puisque la projection conique de point de vue  $S$  (cylindrique si  $S$  est à l'infini) préserve les birapports, le lieu de  $M$  quand  $\Delta$  pivote autour de  $A$  est une droite  $a$  passant par  $S$  : celle qui rend le faisceau  $(K, L, SA, a)$  harmonique. Cette droite  $a$  est appelée la *polaire de  $A$  relativement à  $K$  et  $L$* .



Bien entendu, deux points  $A_1$  et  $A_2$  alignés avec  $S$  auront même polaire relativement à  $K$  et  $L$ . L'application  $A \longrightarrow a$  n'est donc pas injective. Elle n'est pas non plus surjective puisque toutes les droites  $a$  obtenues par ce procédé passent par  $S$ . Elle n'est d'ailleurs définie *a priori* que si  $A$  n'appartient pas à  $K \cup L$ . [On peut la prolonger sur  $K - \{S\}$  par « continuité » en lui donnant la valeur  $K$ , et sur  $L - \{S\}$  la valeur  $L$ ; mais il n'y a pas de façon « raisonnable » de la prolonger en  $S$ .]

Les propriétés du quadrilatère complet suggèrent une construction de  $a$  :  $A$  étant supposé n'être ni sur  $K$  ni sur  $L$ , choisissons arbitrairement deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  passant par  $A$  et pas par  $S$ , coupant respectivement  $K$  en  $U_1$  et  $U_2$ ,  $L$  en  $V_1$  et  $V_2$ . Le corollaire 5-7' du théorème 5-7 (chapitre 5) permet d'affirmer que le point  $I$ , à l'intersection des diagonales  $U_1V_2$  et  $U_2V_1$  du quadrilatère complet  $K, L, \Delta_1, \Delta_2$  appartient à  $a$ , qui doit donc se confondre avec la droite  $SI$ .

On a ainsi démontré le

### **Théorème 7-9**

*Soient  $K$  et  $L$  deux droites distinctes de  $\hat{\Pi}$ , se coupant en un point  $S$ , et  $A$  un point de  $\hat{\Pi} - (K \cup L)$ .*

*1) Le lieu des points  $M$  de  $\hat{\Pi}$  tels que la droite  $AM$  coupe  $K$  et  $L$  en deux points  $U$  et  $V$ , conjugués harmoniques par rapport à  $A$  et  $M$  est une droite  $a$  passant par  $S$ . [En toute rigueur, si l'on veut que  $U$  et  $V$  soient distincts, il faudrait prendre  $a - \{S\}$ .]*

*2) Etant données deux droites distinctes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , passant par  $A$  et non par  $S$ , coupant respectivement  $K$  en  $U_1$  et  $U_2$ , et  $L$  en  $V_1$  et  $V_2$ , les droites  $U_1V_2$  et  $U_2V_1$  se coupent sur  $a$ .*

## **5 - Premiers exemples de théorèmes duaux**

Les propriétés de la tppr relative à une conique vont nous permettre, après «transcription» de certains théorèmes par tppr, d'obtenir de nouveaux résultats, «duaux» des anciens.

### *Exemple 1*

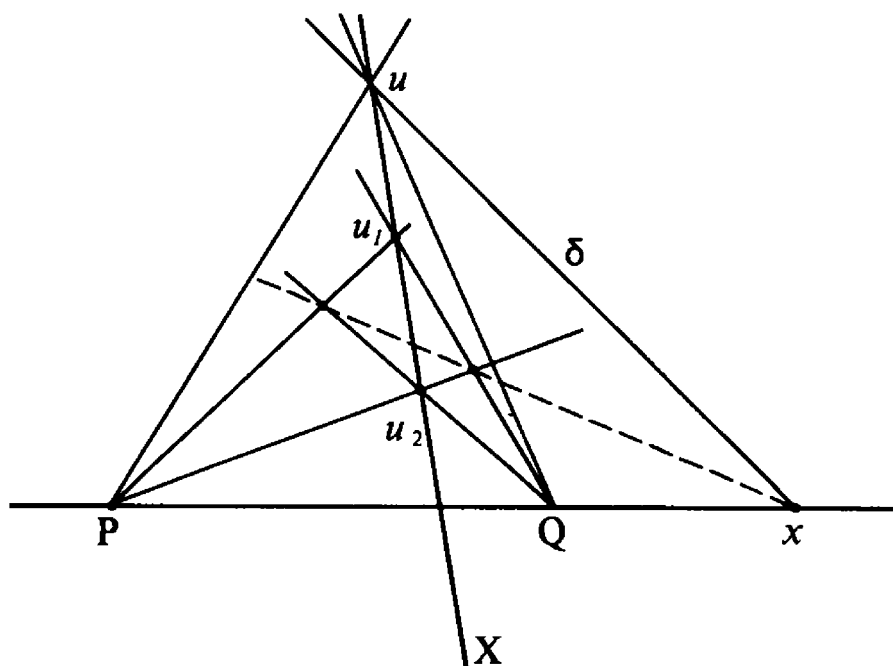
### **Théorème 7-10**

*Donnons-nous deux points  $P$  et  $Q$ , distincts, dans  $\hat{\Pi}$ , et une droite  $X$  de  $\hat{\Pi}$  ne passant ni par  $P$  ni par  $Q$ .*



1) Pour tout point  $u$  de  $X$ , la droite  $\delta$  passant par  $U$ , telle que le faisceau  $X, \delta, uP, uQ$  soit harmonique passe par un point  $x$  de la droite  $PQ$ , indépendant de  $u$  sur  $X$ , qui est le conjugué harmonique relativement à  $P$  et  $Q$  du point d'intersection  $X \cap PQ$ .

2) Deux points distincts  $u_1$  et  $u_2$  de  $X$  étant donnés, la droite qui joint les points  $u_1Q \cap u_2P$  et  $u_1P \cap u_2Q$  passe par  $x$ .



Notons en effet  $(\varphi, \psi)$  la tppr relative à une conique  $\Gamma$ , arbitraire, du plan  $\Pi$ .

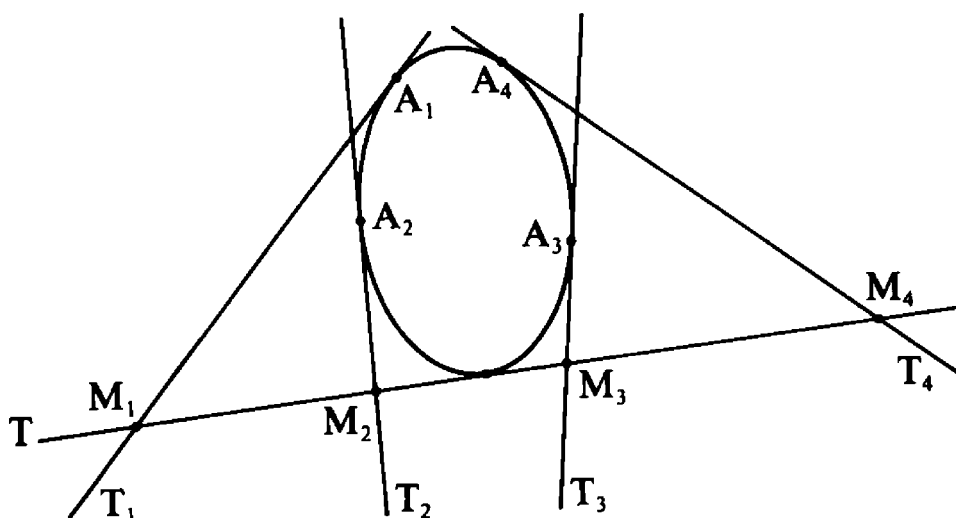
Appliquons le théorème 7-9 à  $K = \varphi(P)$ ,  $L = \varphi(Q)$ ,  $A = \psi(X)$ ,  $\Delta = \varphi(u)$ . Notons  $a$  la polaire de  $\psi(X)$  par rapport à  $\varphi(P)$  et  $\varphi(Q)$ . Le point  $x = \psi(a)$  est le point cherché, et la droite qui joint  $u_1Q \cap u_2P$  et  $u_1P \cap u_2Q$  n'est autre que  $\varphi(I)$  quand  $\Delta_1 = \varphi(u_1)$  et  $\Delta_2 = \varphi(u_2)$ .

[Bien entendu, une démonstration directe de 7-10, n'utilisant pas la tppr, est tout à fait possible. Encore faut-il penser à énoncer le théorème, et de ce point de vue, la tppr par l'utilisation d'un certain automatisme, est l'occasion d'une considérable économie de pensée, et simultanément d'une meilleure compréhension de la géométrie : le fait que les théorèmes 7-9 et 7-10 se correspondent par dualité est un résultat supplémentaire par rapport aux théorèmes eux-mêmes.]

**Exemple 2****Théorème 7-11 (birapport de quatre tangentes à une conique)**

Soit  $\Gamma$  une conique dans  $\hat{\Pi}$ ,  $T_1, T_2, T_3, T_4$  quatre tangentes distinctes à  $\Gamma$  en des points de contact  $A_1A_2A_3A_4$ . Soit  $T$  une cinquième tangente à  $\Gamma$  et  $M_i$  les points  $T_i \cap T$ .

Le birapport  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  des quatre points  $M_i$  sur la droite  $T$  de  $\hat{\Pi}$  ne dépend pas du choix de  $T$  : il est égal au birapport des quatre points  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  de  $\Gamma$ .



La tppr relative à la conique  $\Gamma$  elle-même, échange  $T_i$  et  $A_i$ ,  $M_i$  et  $MA_i$  ( $M$  désignant le point de contact de  $T$ ). Le birapport des quatre droites  $MA_i$  étant indépendant du point  $M$  (d'après le corollaire 5-11 au chapitre 5, paragraphe 6), et le birapport des quatre points  $M_i$  sur  $T$  étant égal au birapport des quatre droites  $AM_i$ , d'après le théorème 7-5 de ce chapitre, le théorème 7-11 en résulte.

**Exemple 3 (théorème de l'angle pivotant<sup>(4)</sup>)**

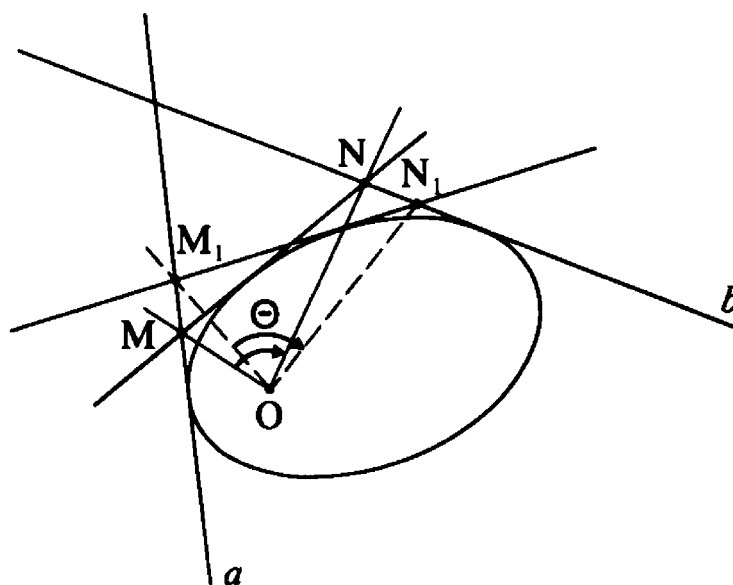
Les exemples 1 et 2 ci-dessus ont fait intervenir des tppr relatives à une conique  $\Gamma$  quelconque. Il va importer, dans cet exemple-ci, que  $\Gamma$  soit un cercle, car on va utiliser les notions d'angle, de cercle et de foyer.

(<sup>4</sup>) Ce théorème a déjà été démontré au chapitre 4 (corollaire 4-6), par une méthode à la fois plus élémentaire et plus artificielle.

**Théorème 7-12**

Donnons un plan euclidien  $\Pi$ , deux droites distinctes  $a$  et  $b$  de  $\hat{\Pi}$ , ainsi qu'un point  $O$  de  $\Pi$  (à distance finie), n'appartenant pas à  $a \cup b$ . Donnons-nous aussi un angle orienté de droites,  $\theta$ , non nul (si  $\Pi$  est orienté,  $\theta$  est identifié à un élément de  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ ). A tout point  $M$  de  $a$ , associons le point  $N$  de  $b$  tel que  $(OM, ON) = \theta$  ( $M$  ou  $N$  pouvant éventuellement être à l'infini sur  $a$  ou  $b$  respectivement; l'une des droites  $a$  ou  $b$  pouvant même être la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$  le cas échéant).

*L'enveloppe des droites  $MN$  lorsque  $M$  parcourt  $a$ ,  $N$  parcourt  $b$ , l'angle  $(OM, ON)$  restant constant égal à  $\theta$ , est une conique de foyer  $O$ , tangente à  $a$  et  $b$ .*



Effectuons en effet une tppr relative à un cercle  $\Gamma$  de centre  $O$ ; notons  $A$  et  $B$  les pôles de  $a$  et  $b$  ( $A$  et  $B$  sont distincts, et à distance finie puisque  $a$  et  $b$  ne passent pas par  $O$ ); notons  $m$  et  $n$  les polaires des points  $M$  et  $N$ . Les hypothèses

$$M \in a \quad N \in b \quad (OM, ON) = \theta$$

deviennent, après tppr :

$$A \in m \quad B \in n \quad (m, n) = \theta.$$

Le théorème de l'arc capable (chapitre 2) implique que le point d'intersection  $m \cap n$  parcourt un cercle passant par A et B. Il résulte donc du théorème 7-8 que MN enveloppe une conique de foyer O, tangente à  $a$  et  $b$ . c. q. f. d.

### Remarques :

1) La tangente  $a$  correspond au cas où N est en  $a \cap b$ , et  $b$  correspond au cas où M est en  $a \cap b$ .

2) Le théorème 7-12 admet comme cas particulier le corollaire du théorème 2-3, la conique enveloppée par MN devenant un cercle de centre O.

3) Les théorèmes de l'arc capable et de l'angle pivotant apparaissent ainsi comme duaux l'un de l'autre.

4) Si  $\theta = 0$ , MN enveloppe le point O ou le point d'intersection de  $a$  et de  $b$ .

## 6 - Appendice : Enveloppe d'une famille de droites dans le plan

Une courbe  $\mathcal{C}$  dans  $\widehat{\Pi}$  est une application continue  $t \mapsto M(t)$  d'un intervalle I dans  $\widehat{\Pi}$ . [On pourra supposer — provisoirement<sup>(5)</sup> — les points considérés dans  $\Pi$  (à distance finie), et les droites distinctes de  $\delta(\Pi)$  : les topologies usuelles bien connues de  $\Pi$  et  $\mathcal{D}(\Pi) - \{\delta(\Pi)\}$  étant celles induites par les topologies sur  $\widehat{\Pi}$  et  $\mathcal{D}(\widehat{\Pi})$  que nous définirons au chapitre 10. Mais les résultats s'étendront sans changement aux points à l'infini.]

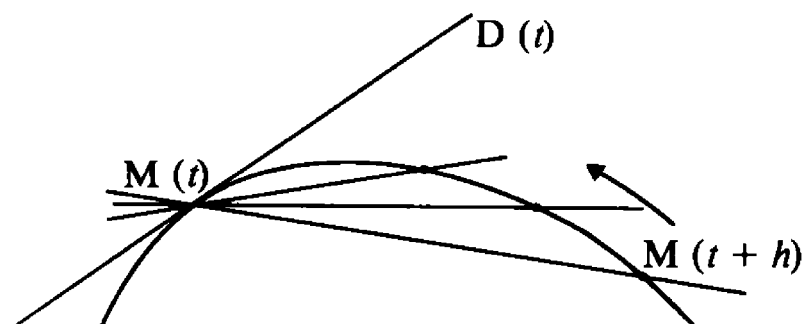
On dit que  $\mathcal{C}$  admet une tangente au point  $M(t)$  si :

1)  $M(t+h)$  est distinct de  $M(t)$  pour tout  $h$  suffisamment petit et non nul.

2) La droite  $M(t)M(t+h)$  admet une limite  $D(t)$  dans  $\mathcal{D}(\widehat{\Pi})$  quand  $h$  tend vers 0.

(<sup>5</sup>) Cf. exercice 10, chapitre 10.

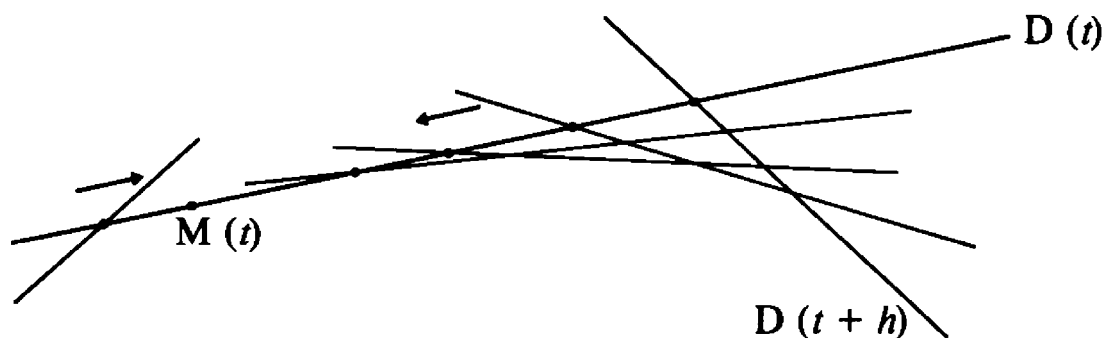
C'est cette limite  $D(t)$  qu'on appelle la *tangente* à  $\mathcal{C}$  au point de paramètre  $t$ .



Par dualité, on appellera enveloppe  $\mathcal{E}$  dans  $\hat{\Pi}$  une application continue  $t \longrightarrow D(t)$  d'un intervalle  $I$  dans  $\mathcal{D}(\hat{\Pi})$ . On dit que cette enveloppe admet un point caractéristique sur  $D(t)$  si

1)  $D(t+h)$  est distinct de  $D(t)$  pour  $h$  non nul et suffisamment petit,

2) le point d'intersection  $D(t) \cap D(t+h)$  admet une limite  $M(t)$  sur  $D(t)$  quand  $h$  tend vers 0. C'est cette limite  $M(t)$  qu'on appelle le *point caractéristique* de  $\mathcal{E}$  sur la droite de paramètre  $t$ .



Soit  $(O, x, y)$  un repère affine de  $\Pi$  et  $t \longrightarrow M(t) = (x(t), y(t))$  une courbe  $\mathcal{C}$  (supposée, pour simplifier, sans point à l'infini). Pour que  $\mathcal{C}$  admette une tangente  $D(t)$  au point de paramètre  $t$ , il suffit — rappelons-le — que les fonctions  $t \longrightarrow x(t)$  et  $t \longrightarrow y(t)$  soient dérivables en  $t$ , à dérivées non simultanément nulles,  $D(t)$  admettant alors pour équation

$$[x - x(t)]y'(t) - [y - y(t)]x'(t) = 0,$$

soit :

$$y'(t) \cdot x - x'(t) \cdot y + (y(t)x'(t) - x(t)y'(t)) = 0.$$

Si l'on se donne maintenant une enveloppe  $\mathcal{E} : t \longrightarrow D(t)$ , de droites d'équation

$$u(t)x + v(t)y + w(t) = 0,$$

nous allons démontrer le

### **Théorème 7-13**

*Si les trois fonctions  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont dérivables en  $t$ , et si la matrice  $\begin{pmatrix} u(t) & v(t) & w(t) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \end{pmatrix}$  est de rang 2,  $\mathcal{E}$  admet un point caractéristique  $M(t)$  sur  $D(t)$ , dont les coordonnées  $x$  et  $y$  sont solution du système*

$$\begin{cases} u(t)x + v(t)y + w(t) = 0 \\ u'(t)x + v'(t)y + w'(t) = 0 \end{cases}$$

*si  $(uv' - u'v)(t)$  est non nul, qui est le point à l'infini dans la direction de  $D(t)$  sinon.*

Le point  $D(t) \cap (D(t+h))$  a en effet ses coordonnées solution du système :

$$\begin{cases} u(t)x + v(t)y + w(t) = 0 \\ u(t+h)x + v(t+h)y + w(t+h) = 0, \end{cases}$$

ou — ce qui revient au même puisque  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{vmatrix}$  est non nul —

solution du système :

$$\begin{aligned} &u(t)x + v(t)y + w(t) = 0 \\ &\frac{u(t+h) - u(t)}{h}x + \frac{v(t+h) - v(t)}{h}y + \frac{w(t+h) - w(t)}{h} = 0, \end{aligned}$$

qui s'écrit encore, puisque  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont dérivables en  $t$  :

$$\begin{cases} u(t)x + v(t)y + w(t) = 0 \\ (u'(t) + \varepsilon_1)x + (v'(t) + \varepsilon_2)y + (w'(t) + \varepsilon_3) = 0 \end{cases}$$

où  $\varepsilon_i(t, h)$  tend vers 0 avec  $h$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Si la matrice  $\begin{pmatrix} u(t) & v(t) & w(t) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \end{pmatrix}$  est de rang 2, le système linéaire ci-dessus est cramérien, par continuité, pour  $h$  suffisamment petit : c'est-à-dire que  $D(t)$  est distinct de  $D(t+h)$  pour  $h$  suffisamment petit, et que le point  $D(t) \cap D(t+h)$  dans  $\hat{\Pi}$  tend vers la solution, dans  $\hat{\Pi}$ , du système

$$\begin{cases} u(t)x + v(t)y + w(t) = 0 \\ u'(t)x + v'(t)y + w'(t) = 0, \end{cases}$$

quand  $h$  tend vers 0, d'où le théorème

#### **Théorème 7-14**

Donnons-nous un repère affine  $(O, x, y)$  de  $\Pi$ .

Si  $t \longrightarrow (x(t), y(t))$  représente une courbe  $\mathcal{C}$  de  $\Pi$ , supposée sans point à l'infini pour simplifier, si les fonctions coordonnées  $t \longrightarrow x(t)$  et  $t \longrightarrow y(t)$  sont deux fois dérivables et vérifient les deux conditions :

- (i)  $x'(t)$  et  $y'(t)$  ne sont pas simultanément nuls,
- (ii)  $(x'y'' - x''y')(t)$  est partout non nul,

$\mathcal{C}$  est alors l'enveloppe de ses tangentes, au sens suivant :

- 1)  $\mathcal{C}$  admet une tangente  $D(t)$  pour toute valeur  $t$  du paramètre.
- 2) La famille des tangentes dépend différentiablement de  $t$ , admet un point caractéristique  $M_1(t)$  pour toute valeur du paramètre.
- 3)  $M_1(t) = M(t)$ .

**Remarque :** Les conditions (i) et (ii) impliquent respectivement, en particulier, que  $\mathcal{C}$  n'admet ni point de rebroussement, ni point d'inflexion.

Puisque les fonctions  $t \longrightarrow x(t)$  et  $t \longrightarrow y(t)$  sont continûment dérivables, et puisque  $x'(t)$  et  $y'(t)$  ne s'annulent pas simultanément,  $\mathcal{C}$  admet, en tout point  $t$ , une tangente  $D(t)$  d'équation

$$u(t)x + v(t)y + w(t) = 0,$$

avec  $u(t) = y'(t)$ ,  $v(t) = -x'(t)$  et  $w(t) = (yx' - xy')(t)$ .

Puisque  $(x'y'' - x''y')(t)$  est non nul, l'enveloppe des droites  $D(t)$  admet un point caractéristique  $M_1(t)$ , d'après le théorème 7-13, dont les coordonnées sont solution du système cramérien

$$\begin{cases} y'(t)x - x'(t)y + (yx' - xy')(t) = 0, \\ y''(t)x - x''(t)y + (yx'' - xy'')(t) = 0. \end{cases}$$

On trouve, en résolvant ce système :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{d'où} \quad M_1(t) = M(t). \quad \text{c. q. f. d.}$$

### **Théorème 7-15**

*Soit  $t \longrightarrow D(t)$  une enveloppe de droites  $D(t)$ , toutes supposées pour simplifier distinctes de  $\delta(\Pi)$ , admettant dans le repère donné l'équation*

$$u(t)x + v(t)y + w(t) = 0.$$

*Notons  $\theta$  et  $p$  les fonctions définies par*

$$\cos \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \sin \theta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad p = \frac{-w}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

*( $u$  et  $v$  ne sont pas simultanément nulles).*

*Supposons  $u, v, w$  (donc aussi  $\theta$  et  $p$ ) deux fois dérivables. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $\theta'$  est partout non nul,*
- (ii)  $p\theta' + \left(\frac{p'}{\theta'}\right)'$  est partout non nul,*

*$\mathcal{E}$  est alors le lieu de ses points caractéristiques au sens suivant :*

*1)  $\mathcal{E}$  admet un point caractéristique  $M(t)$  pour toute valeur  $t$  du paramètre.*

*2) Le point caractéristique  $M(t)$  dépend différentiablement de  $t$ , et la courbe qu'il décrit admet une tangente  $D_1(t)$  pour toute valeur  $t$  du paramètre.*



$$3) D_1(t) = D(t).$$

Puisque  $uv' - u'v = (u^2 + v^2)\theta'$ , la condition  $\theta' \neq 0$  implique que  $uv' - u'v$  est également non nul :  $\mathcal{E}$  admet, sur chaque droite  $D(t)$ , un point caractéristique  $M(t)$  dont les coordonnées sont solution du système cramérien :

$$\begin{cases} u(t)x + v(t)y + w(t) = 0, \\ u'(t)x + v'(t)y + w'(t) = 0. \end{cases}$$

Si  $t \longrightarrow \lambda(t)$  est une fonction deux fois dérivable partout non nulle, on peut remplacer les fonctions  $u, v, w$  par  $\lambda u, \lambda v, \lambda w$  : le point  $M(t)$  a des coordonnées qui sont donc tout autant solution du système

$$\begin{cases} \lambda ux + \lambda vy + \lambda w = 0, \\ (\lambda u' + \lambda' u)x + (\lambda v' + \lambda' v)y + (\lambda w' + \lambda' w) = 0, \end{cases}$$

car  $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda' & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$  est partout non nul, ou — plus géométriquement — parce que la définition de  $M(t)$  est purement géométrique et ne doit donc pas dépendre du choix de l'équation représentant  $D(t)$ . En

particulier, pour  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ , on obtient :

$$\begin{cases} \cos \theta(t)x + \sin \theta(t)y - p(t) = 0, \\ -\theta'(t)\sin \theta(t)x + \theta'(t)\cos \theta(t)y - p'(t) = 0, \end{cases}$$

d'où les coordonnées  $(x(t), y(t))$  de  $M(t)$  (le système est cramérien puisque  $\theta'(t)$  est non nul) :

$$\begin{cases} x(t) = p(t) \cos \theta(t) - \frac{p'(t)}{\theta'(t)} \sin \theta(t), \\ y(t) = p(t) \sin \theta(t) + \frac{p'(t)}{\theta'(t)} \cos \theta(t). \end{cases}$$

Puisque  $p$  et  $\theta$  sont deux fois dérivables, les coordonnées de  $M(t)$  sont dérivables en  $t$  :

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin \theta(t) \left[ p\theta' + \left( \frac{p'}{\theta'} \right)' \right] (t), \\ y'(t) = +\cos \theta(t) \left[ p\theta' + \left( \frac{p'}{\theta'} \right)' \right] (t). \end{cases}$$

Puisque, par hypothèse  $[p\theta' + (p'/\theta')']$  est partout non nul,  $x'$  et  $y'$  ne sont pas simultanément nuls, et par conséquent la courbe décrite par  $M(t)$  admet une tangente  $D_1(t)$  au point  $t$ , admettant l'équation

$$y'(t)x - x'(t)y + [y(t)x'(t) - x(t)y'(t)] = 0.$$

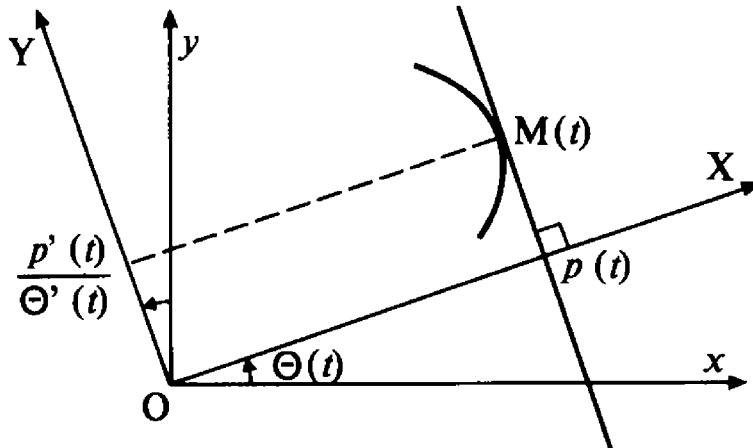
On vérifie sans peine que  $y(t)x'(t) - x(t)y'(t)$  est égal à  $-p \cdot \left[ p\theta' + \left( \frac{p'}{\theta'} \right)' \right]$ , de sorte que  $D_1(t)$  admet aussi comme équation :

$$\cos \theta(t)x + \sin \theta(t)y - p(t) = 0,$$

de sorte que  $D_1(t) = D(t)$ .

c. q. f. d.

**Remarque :** Si le repère affine  $(O, x, y)$  est *orthonormé* pour une structure euclidienne donnée de  $\Pi$ ,  $\theta(t)$  s'interprète comme l'angle polaire de l'une des normales à  $D(t)$  et  $p(t)$  comme l'abscisse sur l'axe  $OX$  d'angle polaire  $\theta(t)$  du point d'intersection  $OX \cap D(t)$ ;



le point  $M(t)$  admet alors  $\left(p, \frac{p'}{\theta'}\right)$  comme coordonnées dans le repère  $(OX, OY)$  déduit de  $(Ox, Oy)$  par rotation  $\theta$ .

En particulier, pour  $t \equiv \theta$ ,  $\theta' \equiv 1$  est toujours non nul, la condition  $p\theta' + \left(\frac{p'}{\theta'}\right)' \neq 0$  devient  $p + p'' \neq 0$ . On en déduit aussi la

### Proposition 7-16

*La tppr de l'enveloppe  $\mathcal{E}$  des droites  $D(\theta)$  d'équation*

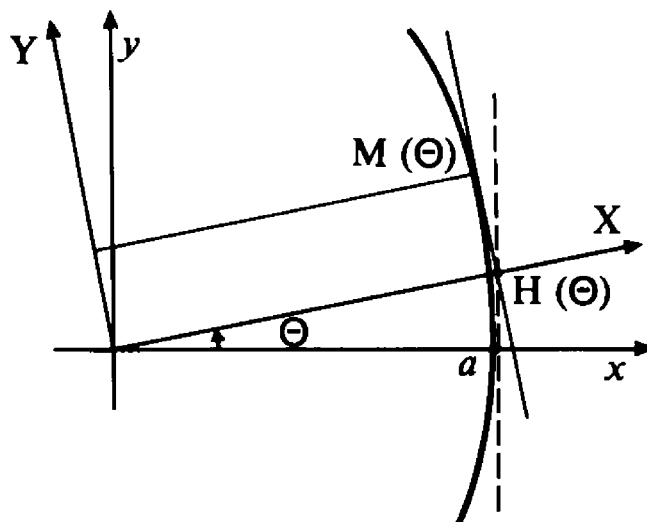
$$\cos \theta x + \sin \theta y - p(\theta) = 0,$$

*relativement au cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ , est la courbe admettant comme équation en coordonnées polaires par rapport au même repère orthonormé :*

$$r = \frac{a^2}{p(\theta)}.$$

**Exemple :** L'antipodaire, par rapport à  $O$ , de la droite d'équation  $x = a$ , relativement à un repère orthonormé  $(O, x, y)$ , est la *parabole* de foyer  $O$ , d'axe  $Ox$  et de tangente au sommet  $x = a$ , d'équation

$$y^2 = 4a(a - x).$$



La droite  $x = a$  admet, en coordonnées polaires, l'équation

$$r = \frac{a}{\cos \theta} \quad \left( \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[ \right).$$

Pour  $p(\theta) = \frac{a}{\cos \theta}$ ,  $p'(\theta) = \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ ,  $(p + p'')(\theta) = \frac{2a}{\cos^3 \theta} \neq 0$ , et le point caractéristique  $M(\theta)$  de la perpendiculaire  $D(\theta)$  à  $OH(\theta)$  ( $H(\theta)$  point de la droite  $x = a$ ) a pour coordonnées :

$$x(\theta) = p(\theta) \cos \theta - p'(\theta) \sin \theta = a(1 - \operatorname{tg}^2 \theta)$$

$$y(\theta) = p(\theta) \sin \theta + p'(\theta) \cos \theta = 2a \operatorname{tg} \theta.$$

Le point  $M(\theta)$  décrit donc la courbe d'équation

$$x = a \left( 1 - \frac{y^2}{4a^2} \right), \quad \text{soit} \quad y^2 = 4a(a - x). \quad \text{c. q. f. d.}$$

**Remarque :** Les propriétés de la tangente à une parabole, vues au chapitre 4 (paragraphe 4) rendent ce résultat évident géométriquement.

## 7 - Exercices sur le chapitre 7

1/ On se donne un quadrangle ABCS dans le plan. Soit  $M_1$  un point de SA. On construit :

$$M_2 = M_1 C \cap SB, \quad M_3 = M_2 A \cap SC, \quad M_4 = M_3 B \cap SA$$

$$M_5 = M_4 C \cap SB, \quad M_6 = M_5 A \cap SC, \quad M_7 = M_6 B \cap SA.$$

A quel point déjà construit  $M_7$  est-il égal?

[Comparer avec l'exercice 1 du chapitre 5.]

- 2 / Montrer qu'une tppr relative à un cercle de centre  $O$  transforme le faisceau des cercles  $\gamma$  de centre  $\omega$  fixé en la famille des coniques  $\bar{\gamma}$  de foyer  $O$  et directrice associée  $\Delta$  fixée. Calculer l'excentricité de  $\bar{\gamma}$  en fonction du rayon de  $\gamma$  et de  $\|O\omega\|$ .
- 3 /
- a) Utiliser une tppr relative à un cercle pour démontrer que le segment de tangente à une conique compris entre le point de contact  $M$  et le point d'intersection avec une directrice  $\Delta$  est vu du foyer  $F$  correspondant à cette directrice sous un angle droit.
  - b) Montrer que les deux points de contact  $M$  et  $M'$  des tangentes à cette conique issues d'un même point de la directrice  $\Delta$  sont alignés avec  $F$ .
  - c) Quel est l'angle de ces tangentes dans le cas d'une parabole?
- 4 / On appelle « développée » d'une courbe plane l'enveloppe des normales à cette courbe.
- a) Montrer que le point caractéristique sur chaque normale est le centre de courbure.
  - b) Déterminer la développée d'une cycloïde, d'une ellipse. Dessiner ces courbes.
- 5 / Dans un plan euclidien, on se donne un angle orienté de vecteurs,  $\alpha$ , fixé une fois pour toutes. Soit  $\Gamma$  une conique du plan, de foyer  $F$ . Pour tout point  $M$  de  $\hat{\Gamma}$ , on note  $m$  la tangente en  $M$  à  $\hat{\Gamma}$ . On note  $h_\alpha(M)$  le point  $M'$  de  $\hat{\Gamma}$  tel que  $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'}) = \alpha$ . [Donner un sens à cette définition si  $M$  ou  $M'$  est l'infini sur  $\hat{\Gamma}$ .] On note  $Q$  le point d'intersection, dans  $\hat{\Pi}$ , des tangentes  $m$  et  $m'$  à  $\hat{\Gamma}$  en  $M$  et  $M'$ , et on note  $\delta$  la droite  $MM'$ .
- a) Quel est le lieu de  $Q$  lorsque  $M$  parcourt  $\hat{\Gamma}$ ?
  - b) Quelle est l'enveloppe de  $\delta$ ?

6 / Sur la parabole  $\Gamma$  d'équation

$$x^2 - 2py = 0 \quad (p \text{ nombre } > 0, \text{ fixé})$$

relativement à un repère orthonormé  $(Ox, Oy)$ , on considère deux points A et B dont les abscisses  $a$  et  $b$  sont liées par la relation

$$ab + p(a - b) = 0.$$

1) Quelle est l'enveloppe de AB?

2) Quel est le lieu du point d'intersection P des tangentes en B et C à  $\Gamma$ ?

7 / Traiter le problème analogue au précédent en remplaçant la relation  $ab + p(a - b) = 0$ , par la relation  $b - a = \text{constante}$ .



## TROISIÈME PARTIE

# Mise en œuvre de nouveaux outils

CHAPITRE VIII. — Droites projectives	229
CHAPITRE IX. — Espaces projectifs	267
CHAPITRE X. — Structures additionnelles sur un espace projectif	295
CHAPITRE XI. — Transformations géométriques	329
CHAPITRE XII. — Formes quadratiques, coniques et quadriques	359
CHAPITRE XIII. — Introduction aux géométries elliptique et hyperbolique	399





## CHAPITRE VIII

# *Droites projectives*

### 1 - Droite projective prototype $\widehat{K}$

Notons  $K$  un corps commutatif, de caractéristique 0 (c'est-à-dire contenant  $\mathbb{Q}$  comme sous-corps, ou — ce qui revient au même — tel que  $n \cdot 1$  soit toujours non nul pour  $n$  dans  $\mathbb{N}_*$ ).

On notera  $\widehat{K} = K \sqcup \{\infty\}$  la réunion (disjointe) de  $K$  et d'un élément supplémentaire, dit «à l'infini» et noté  $\infty$ . [On appellera *nombre* ou *scalaire* un élément de  $\widehat{K}$ . Dans la suite du cours,  $K$  sera souvent égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .]

Cette définition présente l'inconvénient que l'on y distingue le point  $\infty$  dans  $\widehat{K}$ , alors que l'esprit de la géométrie projective est précisément que les points à l'infini n'y jouent plus aucun rôle particulier. Pour y remédier, nous allons introduire les *systèmes de coordonnées homogènes* d'un élément  $x$  de  $\widehat{K}$ . On appellera ainsi :

- tout couple  $(X, Y)$  de  $K^2 - \{0\}$  tel que  $X/Y = x$  si  $x$  est dans  $K$  ( $Y$  étant non nul);
- tout couple  $(X, 0)$  de  $K^2 - \{0\}$  ( $X \neq 0$ ) si  $x$  est le point  $\infty$  de  $\widehat{K}$ .

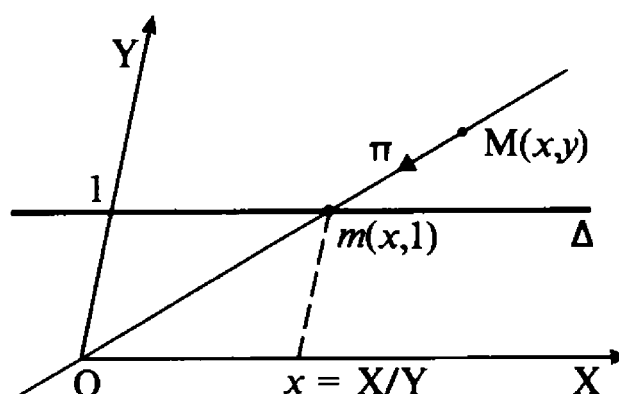
Un élément  $x$  de  $\widehat{K}$  admet donc une infinité de systèmes de coordonnées homogènes : si  $(X_0, Y_0)$  en est un, les autres sont ceux qui sont de la forme  $(\lambda X_0, \lambda Y_0)$  avec  $\lambda$  non nul dans  $K$ .

Identifier un point  $u$  de  $\widehat{K}$  à l'ensemble de ses systèmes de coordonnées homogènes revient à identifier  $\widehat{K}$  à l'ensemble quotient  $(K^2 - \{0\})/K^*$  de  $K^2 - \{0\}$  par la relation d'équivalence :  $(X, Y) \sim (X', Y')$  ssi il existe  $\lambda$  non nul dans  $K$  tel que  $X' = \lambda X$  et

$Y' = \lambda Y$ . L'application de passage aux quotients s'identifie alors à l'application  $\pi : K^2 - \{0\} \longrightarrow \widehat{K}$  définie par :

$$\begin{cases} \pi(X, Y) = X/Y & \text{si } Y \neq 0, \\ \pi(X, 0) = \infty & \text{si } X \neq 0. \end{cases}$$

L'origine géométrique de cette identification est la perspective  $\pi$ , de point de vue  $O$ , du plan épointé  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ , sur la droite  $\Delta$  des points  $(x, 1)$ . *A priori*, cette perspective n'est pas définie sur l'axe des abscisses (ensemble des points  $(X, 0)$ ); mais l'adjonction d'un point à l'infini  $\infty_\Delta$  sur  $\Delta$ , au chapitre 4, a précisément été faite pour prolonger la perspective à *tout*  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ .



Nous identifierons désormais  $\widehat{K}$  à l'ensemble  $K^2 - \{0\}/K^*$  des droites<sup>(1)</sup> de  $K^2$  passant par  $O$  (ou  $K$ -sous espaces vectoriels de dimension 1 dans  $K^2$ ) par le procédé précédent. On notera alors  $[X, Y]$  le nombre  $\pi(X, Y)$  dans  $\widehat{K}$ .

## 2 - Birapport de quatre nombres dans $\widehat{K}$

Si l'on identifie quatre nombres réels distincts  $x_i$  aux abscisses de quatre points  $M_i$  sur une droite  $\Delta$ , relativement à un repère de cette droite, le birapport des quatre points  $M_i$ , tel qu'il a été défini

(<sup>1</sup>) Pour être tout à fait correct, une classe d'équivalence est une telle droite privée de son origine  $O$ .

au chapitre 4, est égal à  $\frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$ . Si  $x_i = [X_i, Y_i]$ , ce nombre est encore égal à

$$\frac{(X_3/Y_3 - X_1/Y_1)(X_4/Y_4 - X_2/Y_2)}{(X_3/Y_3 - X_2/Y_2)(X_4/Y_4 - X_1/Y_1)},$$

soit :

$$\frac{(X_3Y_1 - X_1Y_3)(X_4Y_2 - X_2Y_4)}{(X_3Y_2 - X_2Y_3)(X_4Y_1 - X_1Y_4)}.$$

Remarquons que cette expression a un sens même si l'un des  $Y_i$  est nul, c'est-à-dire si l'un des  $x_i$  est  $\infty$ , et coïncide alors avec la définition géométrique du birapport que nous avons donné lorsque l'un des points est à l'infini sur  $\Delta$ .

Nous appellerons plus généralement *birapport* de quatre nombres distincts  $x_i = [X_i, Y_i]$  dans  $\widehat{K}$  le nombre <sup>(2)</sup>

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(X_3Y_1 - X_1Y_3)(X_4Y_2 - X_2Y_4)}{(X_3Y_2 - X_2Y_3)(X_4Y_1 - X_1Y_4)}.$$

Puisque les quatre nombres  $x_i$  sont tous distincts dans  $\widehat{K}$ , leur birapport est un nombre distinct de 0 et de  $\infty$  dans  $\widehat{K}$ . Mais cette définition s'étend naturellement aux cas suivants :

$$\begin{aligned} x_2 \neq x_3 \text{ et } x_1 \neq x_4 : (x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0 \text{ si } x_1 = x_3 \text{ ou } x_2 = x_4, \\ x_1 \neq x_3 \text{ et } x_2 \neq x_4 : (x_1, x_2, x_3, x_4) &= \infty \text{ si } x_2 = x_3 \text{ ou } x_1 = x_4. \end{aligned}$$

Avec cette extension de la définition du birapport, on voit en particulier qu'il est toujours bien défini si *trois au moins des quatre nombres  $x_i$  de  $\widehat{K}$  sont distincts*, à condition d'admettre qu'il peut prendre la valeur  $\infty$ , ce que nous ferons désormais.

<sup>(2)</sup> Observons que cette expression, homogène de degré 0 en chacun des  $(X_i, Y_i)$ , ne dépend que des nombres  $x_i = [X_i, Y_i]$ .

On vérifie alors, sans difficulté aucune, le

**Lemme 8-1**

$$(i) \quad (x_3, x_4, x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

$$(ii) \quad (x_2, x_1, x_3, x_4) = \frac{1}{(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

$$\left( \text{avec la convention } \frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0 \right).$$

$$(iii) \quad (x, 1, 0, \infty) = x.$$

$$(iv) \quad \text{si } x_1, x_2, x_3 \text{ sont distincts,}$$

$$(x, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = x_2, \\ 0 & \text{pour } x = x_3, \\ \infty & \text{pour } x = x_4, \end{cases}$$

et l'application  $x \longrightarrow (x, x_1, x_2, x_3)$  de  $\widehat{\mathbb{K}}$  sur lui-même est bijective.

On définira aussi le *rapport* de trois nombres  $x_1, x_2, x_3$  en posant, chaque fois que cela a un sens :

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, \infty).$$

On a alors :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1, x_2, x_4)}.$$

Cette notion de rapport fait jouer un rôle particulier au point  $\infty$  : elle relève en effet de la « structure affine » de  $\widehat{\mathbb{K}}$ , plus fine que la seule « structure projective » qui lui est subordonnée. On peut s'en convaincre aussi en observant que l'expression directe du rapport en termes de coordonnées homogènes

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{X_3 Y_1 - X_1 Y_3}{X_3 Y_2 - X_2 Y_3} \times \frac{Y_2}{Y_1}$$

dépend explicitement de la base particulière choisie dans  $K^2$ , par rapport à laquelle le point  $\infty$  doit avoir pour seconde coordonnée homogène 0. On verra au contraire au paragraphe suivant que la définition du birapport resterait inchangée si l'on effectuait un changement de base dans  $K^2$ .

### 3 - Homographies

Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  désigne une matrice inversible ( $ad - bc \neq 0$ ) à coefficients dans  $K$ , c'est-à-dire un isomorphisme d'espace vectoriel  $K^2 \xrightarrow{\cong} K^2$ , tout vecteur  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  non nul de  $K^2$  a pour image un vecteur  $\begin{pmatrix} aX + bY \\ cX + dY \end{pmatrix}$  également non nul, et deux vecteurs colinéaires ont pour image des vecteurs colinéaires :  $A$  définit donc, par passage aux quotients, une bijection  $\hat{A}$  de  $\hat{K} = K^2 - \{0\}/K^*$  sur lui-même, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^2 - \{0\} & \xrightarrow{A} & K^2 - \{0\} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \hat{K} & \xrightarrow{\hat{A}} & \hat{K}. \end{array}$$

On appellera *homographie* de  $\hat{K}$  toute bijection de  $\hat{K}$  sur lui-même de la forme précédente.

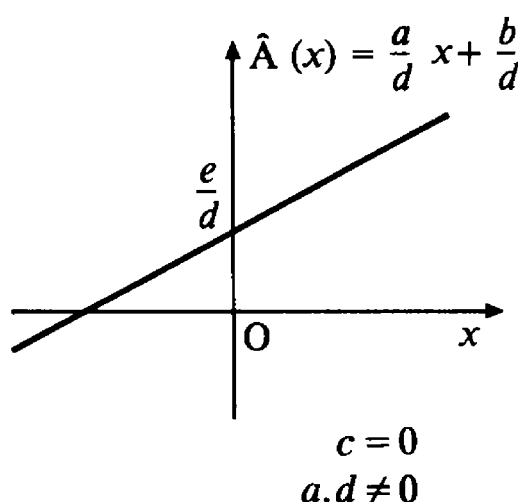
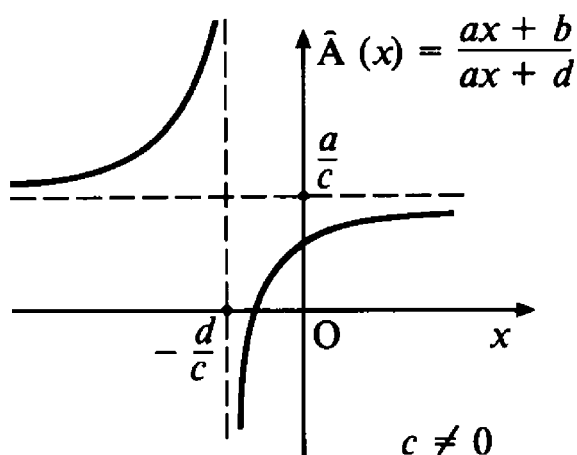
Puisque, par l'identification  $K^2 - \{0\}/K^* \xrightarrow{\cong} K \sqcup \{\infty\}$ ,  $[X, Y]$  s'identifie à

$$\begin{cases} x = X/Y & \text{si } Y \neq 0 \\ \infty & \text{si } Y = 0 \end{cases} \quad (X \neq 0),$$

on peut encore écrire  $\hat{A} : K \sqcup \{\infty\} \longrightarrow K \sqcup \{\infty\}$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } c \neq 0, & \quad \begin{cases} \hat{A}(x) = \frac{ax+b}{cx+d} & \text{pour } x \neq -\frac{d}{c}, \\ \hat{A}(\infty) = \frac{a}{c}; \\ \hat{A}\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty; \end{cases} \\ \text{si } c = 0, d \neq 0 & \quad \begin{cases} \hat{A}(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d} & \text{pour } x \text{ dans } K, \\ \hat{A}(\infty) = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Schémas pour  $K = \mathbb{R}$  :



On reconnaît pour  $c \neq 0$ , les «fonctions homographiques» usuelles, d'où la terminologie. Pour  $c = 0$ , on reconnaît les «fonctions affines», et l'on appellera plus généralement *affinité* toute homographie  $\hat{A}$  définie par une matrice  $A$  de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  ( $ad \neq 0$ ).

Notons  $GL(2, K)$  le groupe des matrices carrées  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  inversibles à coefficients dans  $K$ ,  $T(2, K)$  le sous-groupe des matrices triangulaires  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{H}(K)$  l'ensemble des homographies de  $\hat{K}$ , et  $\mathcal{A}(K)$  le sous-ensemble des affinités.

**Lemme 8-2**

- (i)  $\mathcal{H}(K)$  est un groupe pour la composition des bijections, et  $\mathcal{A}(K)$  en est un sous-groupe.
- (ii) L'application  $A \longrightarrow \widehat{A}$  de  $GL(2, K)$  sur  $\mathcal{H}(K)$  est un homomorphisme de groupes, et sa restriction à  $T(2, K)$  est un homomorphisme sur  $\mathcal{A}(K)$ .
- (iii) Ces deux homomorphismes ont tous deux pour noyau le groupe des homothéties  $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ( $\lambda \in K^*$ ).

La relation  $\pi \circ A = \widehat{A} \circ \pi$  entraîne immédiatement :

$$\begin{cases} \widehat{A \circ B} = \widehat{A} \circ \widehat{B}, \\ \widehat{A^{-1}} = \widehat{A}^{-1}, \end{cases}$$

et implique les parties (i) et (ii) du lemme.

Supposons alors que  $\widehat{A}$  soit l'identité dans  $\widehat{K}$ , avec  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Puisque  $\widehat{A}(\infty) = \infty$ , on doit nécessairement avoir  $c = 0$ , tandis que, pour tout  $x$  dans  $K$ ,  $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$  doit être identiquement égal à  $x$ . Le corps  $K$  ayant une infinité d'éléments (il contient  $\mathbb{Q}$ ), on en déduit :  $\frac{a}{d} = 1$  et  $b = 0$ ; c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda$  non nul dans  $K$  tel que  $A = \lambda \text{Id}$ , d'où la partie (iii) du lemme.

**Théorème 8-3**

1) Les homographies de  $\widehat{K}$  sont les bijections de  $\widehat{K}$  sur lui-même préservant les birapports.

2) Les trois propriétés suivantes d'une homographie  $\widehat{A}$  sont équivalentes :

- (i) elle préserve le point à l'infini ( $\widehat{A}(\infty) = \infty$ ),
- (ii) elle préserve les rapports,
- (iii) elle est une affinité ( $c = 0$ ).



Etant donnés deux vecteurs  $m = (X, Y)$  et  $m' = (X', Y')$  dans  $K^2$ , notons  $m \wedge m'$  l'expression  $XY' - X'Y$  dans  $K$ , et observons que, pour toute matrice carrée  $A$ , on a :

$$A(m) \wedge A(m') = \det A \cdot m \wedge m'.$$

Puisque, pour  $x_i = \pi(m_i)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), le birapport  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  s'écrit :

$$\frac{(m_1 \wedge m_3) \cdot (m_2 \wedge m_4)}{(m_2 \wedge m_3) \cdot (m_1 \wedge m_4)},$$

on en déduit que le birapport  $(\hat{A}(x_1), \hat{A}(x_2), \hat{A}(x_3), \hat{A}(x_4))$  des images est égal à

$$\frac{(\det A)^2 \cdot (m_1 \wedge m_3) \cdot (m_2 \wedge m_4)}{(\det A)^2 \cdot (m_2 \wedge m_3) \cdot (m_1 \wedge m_4)}$$

c'est-à-dire à  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , puisque  $\det A$  est non nul : ceci prouve que toute homographie  $\hat{A}$  préserve les birapports.

Supposons réciproquement que  $h : \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$  soit une bijection préservant les birapports, et choisissons trois nombres distincts  $x_i$ , tous finis ( $x_i \in K$ ), tels que leurs images  $x'_i = h(x_i)$ , nécessairement distinctes puisque  $h$  est bijectif, soit également finies (dans  $K$ ). [Puisque  $K$  possède une infinité d'éléments, il existe toujours de tels triplets  $x_1, x_2, x_3$ .] On en déduit  $x_i = [x_i, 1]$ ,  $x'_i = [x'_i, 1]$ , et pour  $x = [X, Y]$  et  $h(x) = [X', Y']$ , la conservation du birapport

$$(x'_1, x'_2, x'_3, h(x)) = (x_1, x_2, x_3, x)$$

s'écrit :

$$\frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} \cdot \frac{X' - x'_2 Y'}{X' - x'_1 Y'} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{X - x_2 Y}{X - x_1 Y}.$$

$$\text{Posons } A' = \begin{pmatrix} x'_3 - x'_1 & -x'_2 \cdot (x'_3 - x'_1) \\ x'_3 - x'_2 & -x'_1 \cdot (x'_3 - x'_2) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 & -x_2 \cdot (x_3 - x_1) \\ x_3 - x_2 & -x_1 \cdot (x_3 - x_2) \end{pmatrix}.$$

Les déterminants de  $A$  et  $A'$  sont non nuls, puisque les  $x_i$  d'une part, les  $x'_i$  d'autre part, sont tous distincts. La relation de conservation du birapport s'écrit alors :

$$\widehat{A}' \cdot h(x) = \widehat{A}(x),$$

d'où  $h(x) = \widehat{A'}^{-1} \cdot \widehat{A}(x)$  : ceci prouve que  $h$  est bien une homographie.

L'égalité  $\widehat{A}[X, O] = [aX, cX]$  montre l'équivalence des propriétés (i) et (iii).

Si  $\widehat{A}(\infty) = \infty$ , la définition du rapport

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, \infty)$$

et le fait que  $\widehat{A}$  est déjà connu comme préservant les birapports, entraînent que  $\widehat{A}$  préserve aussi les rapports. Supposons réciproquement que  $\widehat{A}$  préserve les rapports. Puisque, si  $x_1, x_2, x_3$  sont distincts, l'application  $x \longrightarrow (x_1, x_2, x_3, x)$  est bijective (lemme 8-1), la relation de conservation du rapport, qui s'écrit

$$(\widehat{A}(x_1), \widehat{A}(x_2), \widehat{A}(x_3), \infty) = (\widehat{A}(x_1), \widehat{A}(x_2), \widehat{A}(x_3), \widehat{A}(\infty)),$$

implique :  $\widehat{A}(\infty) = \infty$ , d'où l'équivalence entre les propriétés (i) et (ii). Ceci achève la démonstration du théorème.

*Détermination d'une homographie par trois couples de points homologues*

#### **Théorème 8-4**

*Etant donnés six éléments  $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$  de  $\widehat{K}$ , tels que  $x_1, x_2, x_3$  soient deux à deux distincts, de même que  $x'_1, x'_2, x'_3$ , il existe toujours une homographie  $\widehat{A}$  et une seule telle que  $\widehat{A}(x_i) = x'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).*

Choisissons en effet (arbitrairement) des vecteurs  $m_i$  et  $m'_i$  dans  $K^2$ , tels que  $x_i = \pi(m_i)$  et  $x'_i = \pi(m'_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Le problème revient à chercher les matrices  $A$  pour lesquelles il existe trois nombres  $\lambda_i$ , non nuls dans  $K$ , tels que  $A(m_i) = \lambda_i m'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Puisque  $x_1$  et

$x_2$  sont distincts dans  $\widehat{K}$ ,  $m_1$  et  $m_2$  constituent une base de  $K^2$ , de même que  $m'_1$  et  $m'_2$ . Il existe donc des nombres  $u_1, u_2, u'_1, u'_2$  dans  $K$ , déterminés de façon unique, tels que  $m_3 = u_1 m_1 + u_2 m_2$  et  $m'_3 = u'_1 m'_1 + u'_2 m'_2$ . En outre, puisque  $x_3$  est à la fois distinct de  $x_1$  et de  $x_2$ , c'est que  $u_1$  et  $u_2$  sont non nuls, et de même pour  $u'_1$  et  $u'_2$ . La relation  $A(m_3) = \lambda_3 m'_3$  s'écrit donc :

$$u_1 \lambda_1 m'_1 + u_2 \lambda_2 m'_2 = \lambda_3 (u'_1 m'_1 + u'_2 m'_2),$$

et fournit les équations  $\begin{cases} u_1 \lambda_1 - u'_1 \lambda_3 = 0, \\ u_2 \lambda_2 - u'_2 \lambda_3 = 0. \end{cases}$  Fixons arbitrairement  $\lambda_3$

dans  $K^*$ . On en déduit  $\lambda_1 = \frac{u'_1}{u_1} \lambda_3$  et  $\lambda_2 = \frac{u'_2}{u_2} \lambda_3$ . Il existe une unique

matrice  $A$  telle que  $A(m_1) = \frac{u'_1}{u_1} \lambda_3 m'_1$  et  $A(m_2) = \frac{u'_2}{u_2} \lambda_3 m'_2$ ; elle est inversible puisque les nombres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont non nuls, et l'homographie  $\widehat{A}$  qui lui est associée ne dépend pas du choix de  $\lambda_3$  : le théorème est démontré.

*Détermination pratique de  $\widehat{A}$ .* — Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $x = [X, Y]$  et  $\widehat{A}(x) = [X', Y']$ , l'égalité  $[X', Y'] = [aX + bY, cX + dY]$  s'écrit encore

$$(*) \quad \boxed{cXX' - aXY' + dX'Y - bYY' \equiv 0}$$

$$(c x x' - a x y' + d x' y - b y y' \equiv 0$$

lorsque  $x = X/Y$  et  $x' = X'/Y'$  sont dans  $K$ ).

### Proposition 8-5

Si  $x_i = [X_i, Y_i]$  et  $x'_i = [X'_i, Y'_i]$  ( $i = 1, 2, 3$ ) la relation (\*) précédente, correspondant aux trois couples de points homologues  $(x_i, x'_i)$  s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} XX' & XY' & X'Y & YY' \\ X_1X'_1 & X_1Y'_1 & X'_1Y_1 & Y_1Y'_1 \\ X_2X'_2 & X_2Y'_2 & X'_2Y_2 & Y_2Y'_2 \\ X_3X'_3 & X_3Y'_3 & X'_3Y_3 & Y_3Y'_3 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Développant en effet le déterminant ci-dessus par rapport à la première ligne, on obtient une relation du type (\*), qui s'annule évidemment lorsque  $[X, Y]$  et  $[X', Y']$  sont simultanément égaux à  $[X_i, Y_i]$  et  $[X'_i, Y'_i]$  ( $i = 1, 2, 3$  respectivement). Le déterminant  $ad - bc$  correspondant ne saurait être nul, puisque les trois nombres  $x_1, x_2, x_3$  sont distincts, de même que  $x'_1, x'_2, x'_3$ .

### *Involutions*

On appelle « involution » ou homographie « involutive » toute homographie  $\hat{A}$  telle que  $\hat{A}^{-1} = \hat{A}$ , ou — ce qui revient au même — telle qu'il existe  $\lambda$  non nul dans  $K$  vérifiant :  $A^{-1} = \lambda A$ .

### **Lemme 8-6**

*Pour que l'homographie  $\hat{A}$  associée à  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  soit involutive, il faut et il suffit que*

$$a = -d.$$

En effet,  $A^{-1} = \frac{-1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  est proportionnel à  $A$  ssi  $a = -d$ . On peut aussi voir que c'est la condition  $a = -d$  qui rend la relation (\*) symétrique en  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$ .

### *Points doubles d'une homographie*

L'égalité  $\hat{A}[\xi, \eta] = [\xi, \eta]$  signifie que  $(\xi, \eta)$  est vecteur propre de  $A$ , ou — ce qui revient au même — solution de l'équation

$$c\xi^2 + (d - a)\xi - b\eta^2 = 0.$$

1) Si  $c = 0$ ,  $\infty$  est point double

— c'est le seul si  $a = d$ , c'est-à-dire si  $\hat{A}$  est une « translation »

$$x \longrightarrow x + \frac{b}{d} \quad (b \neq 0);$$

— il y a aussi  $[b, d - a] = \frac{b}{d - a}$  dans  $K$  si  $a$  et  $d$  sont distincts,

c'est-à-dire si  $\widehat{A} : x \longrightarrow \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$  est une « similitude »  $\left(\frac{a}{d} \neq 1\right)$ ;  
 — tout point de  $\widehat{K}$  est point double si  $\widehat{A}$  est l'identité ( $a = d, b = 0$ ).

2) Si  $c \neq 0, \infty$  n'est pas point double car  $\widehat{A}$  n'est pas une affinité : on peut donc chercher les points doubles sous la forme  $[\xi, 1] = \xi$ , solutions de l'équation du second degré :

$$c\xi^2 + (d - a)\xi - b = 0.$$

Pour  $K = \mathbb{C}$ , cette équation aura toujours

deux racines distinctes, si  $(d + a)^2 + 4(ad - bc) \neq 0$ ,  
 une racine double, sinon.

Pour  $K = \mathbb{R}$ , le signe du discriminant

$$(d + a)^2 + 4(ad - bc)$$

doit être examiné.

### **Théorème 8-7**

(i) *Si une homographie  $\widehat{A}$  de  $\widehat{K}$  admet deux points doubles  $\xi_1$  et  $\xi_2$  distincts, il existe une constante  $k$  dans  $K^*$  telle que, pour tout  $x$  dans  $\widehat{K}$ , le birapport*

$$(x, \widehat{A}(x), \xi_1, \xi_2)$$

*soit constant égal à  $k$ .*

(ii) *Une fois  $\xi_1, \xi_2$  et  $k$  définis, la condition précédente détermine entièrement  $\widehat{A}$ .*

(iii) *Parmi ces homographies, celles qui sont involutives et distinctes de l'identité sont celles pour lesquelles  $k = -1$  : la division  $(x, \widehat{A}(x), \xi_1, \xi_2)$  est toujours harmonique. L'identité, quand à elle, est caractérisée par  $k = 1$ .*

Notons en effet  $x_0$  un point de  $\widehat{K}$ , autre que  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , et  $x'_0 = \widehat{A}(x_0)$  son image. Choisissons des vecteurs  $m_1, m_2, m_0, m'_0$  dans  $K^2$  tels que  $\xi_1 = \pi(m_1)$ ,  $\xi_2 = \pi(m_2)$ ,  $x_0 = \pi(m_0)$ ,  $x'_0 = \pi(m'_0)$ . Soit  $x = \pi(m)$  un élément de  $\widehat{K}$  et  $\widehat{A}(x) = \pi(m')$  son image.

La conservation du birapport par  $\widehat{A}$  implique :

$$(x', x'_0, \xi_1, \xi_2) = (x, x_0, \xi_1, \xi_2),$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{(m' \wedge m_1) \cdot (m'_0 \wedge m_2)}{(m'_0 \wedge m_1) \cdot (m' \wedge m_2)} = \frac{(m \wedge m_1) \cdot (m_0 \wedge m_2)}{(m_0 \wedge m_1) \cdot (m \wedge m_2)}.$$

Pour  $x$  distinct de  $\xi_1, \xi_2, x_0$ , cette relation s'écrit encore :

$$\frac{(m \wedge m_1) \cdot (m' \wedge m_2)}{(m' \wedge m_1) \cdot (m \wedge m_2)} = \frac{(m_0 \wedge m_1) \cdot (m'_0 \wedge m_2)}{(m'_0 \wedge m_1) \cdot (m_0 \wedge m_2)}$$

c'est-à-dire :  $(x, \widehat{A}(x), \xi_1, \xi_2) = (x_0, \widehat{A}(x_0), \xi_1, \xi_2)$ . On en déduit la partie (i) du théorème, le birapport  $k = (x_0, \widehat{A}(x_0), \xi_1, \xi_2)$  étant certainement non nul puisque  $x_0$  est distinct de  $\xi_1$ , et fini puisque  $x_0$  est distinct de  $\xi_2$ . En outre, ce birapport ne peut être égal à 1 que si  $x_0$  est point double de  $\widehat{A}$ , qui, admettant au moins trois points doubles distincts, ne peut alors qu'être égal à l'identité. L'homographie  $\widehat{A}$  est entièrement déterminée par  $\xi_1, \xi_2$  et  $k$  : choisissons en effet n'importe quel  $x_0$  distinct de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  dans  $\widehat{K}$ , et définissons  $x'_0$  en posant :

$$(x_0, x'_0, \xi_1, \xi_2) = k;$$

on sait qu'il n'existe alors qu'une seule homographie admettant les trois couples  $(x_0, x'_0)$   $(\xi_1, \xi_1)$  et  $(\xi_2, \xi_2)$  de points homologues. Enfin, si  $\widehat{A} = \widehat{A}^{-1}$ , on doit avoir  $k = \frac{1}{k}$ . Si  $\widehat{A}$  n'est pas l'identité,  $k$  doit être égal à  $-1$ . Inversement, si  $k = -1$ , il est clair que  $\widehat{A}$  est involutive. Ceci achève la démonstration du théorème.

#### 4 - Droites projectives sur K

Une K-droite projective est essentiellement un ensemble  $\Delta$  sur lequel on sait définir, par « transport de structure » grâce à une bijection  $f$  de  $\widehat{K}$  sur  $\Delta$ , le birapport de quatre éléments, en posant :

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (f^{-1}(M_1), f^{-1}(M_2), f^{-1}(M_3), f^{-1}(M_4)).$$

Bien entendu, si  $\hat{A}$  est une homographie de  $\hat{K}$ , la bijection  $f \circ \hat{A}$  de  $\hat{K}$  sur  $\Delta$  définira la *même* notion de birapport que  $f$ . Réciproquement, si  $f$  et  $g$  sont deux bijections de  $\hat{K}$  sur  $\Delta$  définissant le même birapport sur  $\Delta$  par transport de structure,  $f^{-1} \circ g$  est une bijection de  $\hat{K}$  sur lui-même préservant les birapports, c'est-à-dire une homographie. Comme c'est beaucoup plus le birapport sur  $\Delta$  qui nous intéressera, que le choix d'une bijection particulière  $f$ , on dira que l'on a muni un ensemble  $\Delta$  d'une *structure de K-droite projective*, si l'on s'est donné une famille  $\mathcal{F}$  de bijections  $f: \hat{K} \rightarrow \Delta$  ayant la propriété suivante :

*Si  $f_0$  est l'une de ces bijections,  $\mathcal{F}$  est égale à l'ensemble des bijections  $f = f_0 \circ \hat{A}$ , avec  $\hat{A}$  parcourant  $\mathcal{H}(K)$ .*

On voit en particulier, que la structure est entièrement déterminée par la donnée d'une seule bijection de la famille, et qu'inversement la donnée d'une bijection  $f_0$  définit effectivement une telle structure, ce qui est intéressant du point de vue pratique.



## L'affine enivrante

**E**XTRAIT du projet mitonné, au ministère de l'Education guichardienne, par la commission des programmes de mathématiques pour la classe de 4<sup>e</sup> des lycées et pour le début du cours de géométrie :

« Structure affine sur une droite :

Un ensemble  $D$  est appelé droite affine réelle lorsqu'à tout couple  $R = (0, i)$  de points distincts de  $D$  est associée une bijection unique  $f_R$  de  $D$  sur l'ensemble des points réels vérifiant  $f_R(0) = 0, f_R(i) = 1$ , et cela de telle manière que si  $R'$  est un autre couple de points distincts de  $D$ , il existe deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que l'on ait pour tout point  $M$  de  $D$  :

$$f_{R'}(M) = a f_R(M) + b.$$

Un tel couple  $R$  s'appelle un repère de  $D$  et  $f_R(M)$  l'abscisse de  $M$  dans ce repère. »

*Archimède, alors ! Pour pondre des trucs comme ça, à l'usage de gosses de 4<sup>e</sup>, il faut être rudement fort en maths. Mais peut-être rien qu'en maths...*

**Le Huron.**

Si l'on veut maintenant définir, sur  $\Delta$ , non seulement le birapport, mais aussi un point «à l'infini» ainsi que le «rapport» de trois points non situés à l'infini, on peut le faire encore à partir d'une bijection  $f : \widehat{\mathbb{K}} \longrightarrow \Delta$  et de toutes celles qui s'en déduisent par composition avec une affinité. On appellera donc *structure de K-droite affine*<sup>(3)</sup> sur un ensemble  $\Delta$  la donnée d'une famille  $\mathcal{F}$  de bijections  $f : \widehat{\mathbb{K}} \longrightarrow \Delta$ , ayant la propriété suivante :

si  $f_0$  est l'une de ces bijections,  $\mathcal{F}$  est égale à l'ensemble des bijections  $f = f_0 \circ \widehat{A}$  avec  $\widehat{A}$  parcourant  $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ .

Si  $\mathcal{F}$  est une structure de K-droite affine sur  $\Delta$ , on peut agrandir  $\mathcal{F}$  en composant les bijections appartenant à  $\mathcal{F}$  avec n'importe quelle homographie  $\widehat{A}$  de  $\widehat{\mathbb{K}}$  : on obtient ainsi une famille  $\mathcal{F}'$  de bijections de  $\widehat{\mathbb{K}}$  sur  $\Delta$ , contenant  $\mathcal{F}$ , et qui constitue une structure de K-droite projective sur  $\Delta$  que l'on dira «subordonnée» ou «sous-jacente» à la structure affine donnée au départ.

### Exemples de structures de droites projectives

1) La famille  $\mathcal{H}(\mathbb{K})$  de toutes les homographies de  $\widehat{\mathbb{K}}$  définit, sur  $\widehat{\mathbb{K}}$ , une structure de K-droite projective dite «canonique» ou «naturelle».

2) Si  $\mathcal{F}_1$  est une structure de K-droite projective sur un ensemble  $\Delta_1$ , et si  $\varphi : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$  est une bijection sur un ensemble  $\Delta_2$ , la famille  $\mathcal{F}_2$  des bijections  $\varphi \circ f$  avec  $f$  parcourant  $\mathcal{F}_1$  est une structure de K-droite projective sur  $\Delta_2$  (dite «obtenue à partir de celle de  $\Delta_1$  par *transport de structure*» grâce à  $\varphi$ ).

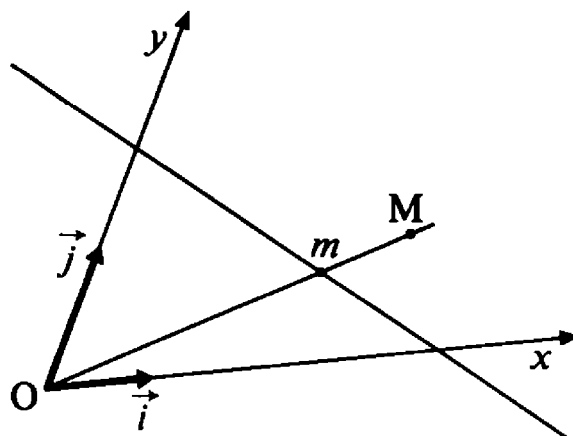
3) Soit  $D$  une droite dans un plan affine réel  $\Pi$ , et

$$\widehat{D} = D \cup \{\infty_D\}$$

la droite de  $\Pi$  obtenue en ajoutant à  $D$  son point à l'infini. Donnons-nous un repère affine  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de  $\Pi$  tel que  $O$  ne soit pas situé sur  $D$ . Soit  $f : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{D}$  la bijection qui, au point  $[X, Y]$  de  $\widehat{\mathbb{R}}$ , associe l'image  $m$  du point  $M$  de  $\Pi$  défini par  $\overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ , dans la perspective de point de vue  $O$  de  $\Pi - \{0\}$  sur  $\widehat{D}$ .

<sup>(3)</sup> Comparer avec la définition de la droite affine (réelle) en classe de Quatrième, extraite des programmes en vigueur dans les années 70.





### Proposition 8-8

*La structure de  $\mathbb{R}$ -droite projective définie sur  $\hat{D}$  par la bijection précédente ne dépend pas du choix du repère affine  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sur  $\Pi$ .*

*Le birapport ainsi défini sur  $\hat{D}$  est le même que celui défini au chapitre 4.*

Soit  $ux + vy - w = 0$  une équation de la droite  $D$  (privée du point à l'infini  $\infty_D$ ) dans le repère affine  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Le coefficient  $w$  n'est pas nul, puisque  $O$  n'est pas sur  $\hat{D}$ , et les coefficients  $u$  et  $v$  ne sont pas simultanément nuls puisque  $\hat{D}$  n'est pas la droite de l'infini.

Supposons  $v$  non nul pour fixer les idées : les coordonnées d'un point  $m$  de  $D$  s'écrivent donc  $\left(x, \frac{w - ux}{v}\right)$  : c'est dire que

$$f^{-1}(m) = [vx, -ux + w].$$

Notons  $\begin{cases} x' = a + \alpha x + \beta y \\ y' = b + \gamma x + \delta y \end{cases}$  ( $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ) un changement de repère affine autorisé ( $au + bv \neq w$ ), et  $f' : \hat{\mathbb{R}} \longrightarrow \hat{D}$  la bijection associée; le même point  $m$  de  $D$  a pour nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} x' = a + \alpha x + \beta \frac{w - ux}{v}, \\ y' = b + \gamma x + \delta \frac{w - ux}{v}. \end{cases}$$

C'est dire que

$$f'^{-1}(m) = [(\alpha v - \beta u)x + (av + \beta w), (\gamma v - \delta u)x + (bv + \delta w)].$$

Ainsi,  $f'^{-1} \circ f$  est égal à  $\widehat{A \circ B}^{-1}$  où

$$A = \begin{pmatrix} \alpha v - \beta u & av + \beta w \\ \gamma v - \delta u & bv + \delta w \end{pmatrix},$$

et 
$$B = \begin{pmatrix} v & 0 \\ -u & w \end{pmatrix}.$$

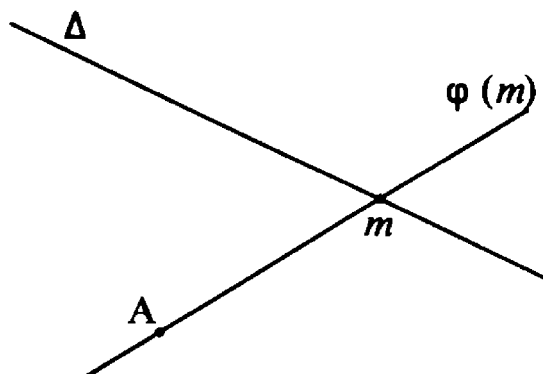
C'est donc bien une fonction homographique :  $f$  et  $f'$  définissent sur  $\widehat{D}$  la même structure de droite projective.

De plus, le birapport associé à  $f$  de quatre points  $m_i$  sur  $\widehat{D}$  est égal au birapport des quatre nombres  $[vx_i, -ux_i + w]$  dans  $\mathbb{R}$ , lui-même égal au birapport des quatre abscisses  $x_i$  des points  $m_i$ . Mais, la projection cylindrique  $(x, y) \longrightarrow x$  de  $D$  sur  $Ox$  préservant le birapport au sens du chapitre 5, le birapport des quatre abscisses  $x_i$  est aussi égal au birapport des quatre points  $m_i$  au sens du chapitre 4.

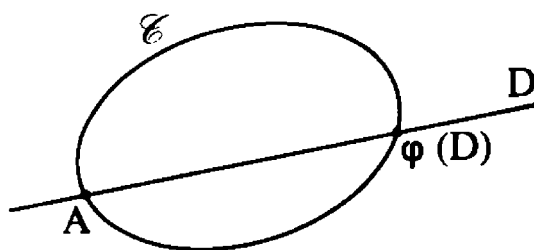
Le cas où l'un des points  $m_i$  serait le point  $\infty_D$  se traite de façon analogue sans difficulté.

On définit aussi, de façon naturelle, une structure de  $\mathbb{R}$ -droite projective sur la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$  : exercice laissé au lecteur.

4) Soit  $A$  un point de  $\widehat{\Pi}$ , et  $\mathcal{D}(A)$  le faisceau des droites de  $\widehat{\Pi}$  passant par  $A$ . A toute droite  $\Delta$  de  $\widehat{\Pi}$  ne passant pas par  $A$ , on associe la bijection  $\varphi : \Delta \longrightarrow \mathcal{D}(A)$  qui, au point  $m$  de  $\Delta$ , fait correspondre la droite  $Am$ . On peut rephraser le théorème 5-4 (conservation du birapport par perspective) en énonçant que la structure de  $\mathbb{R}$ -droite projective sur  $\mathcal{D}(A)$  définie par transport de structure à partir de celle de  $\Delta$ , à l'aide de  $\varphi$ , ne dépend pas du choix de  $\Delta$ .

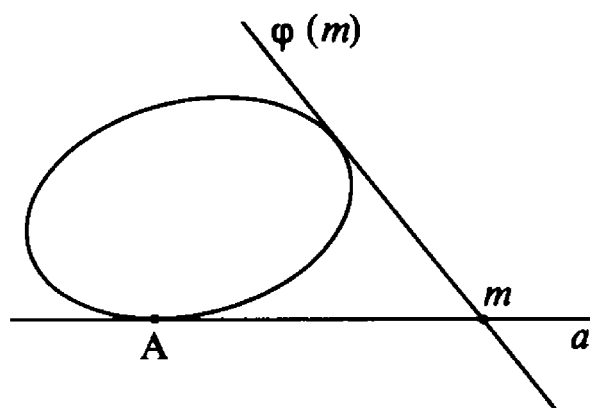


5) Soit  $\mathcal{C}$  une conique dans  $\hat{\Pi}$  (points à l'infini compris, dans le cas d'une hyperbole ou d'une parabole). A tout point  $A$  de  $\mathcal{C}$ , on associe la bijection  $\varphi : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{C}$  qui, à toute droite  $D$  passant par  $A$ , associe le point de  $\mathcal{C}$ , autre que  $A$  en général, où  $D$  recoupe  $\mathcal{C}$  (exceptionnellement le point  $A$  lui-même si  $D$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$ ).



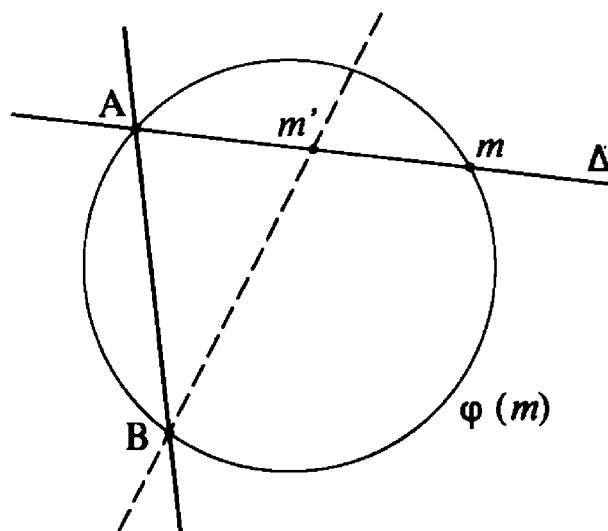
On peut alors reparafraser le corollaire de la proposition 5-10 en énonçant que la structure de  $\mathbb{R}$ -droite projective sur  $\mathcal{C}$  définie par transport de structure à partir de celle de  $\mathcal{D}(A)$ , à l'aide de  $\varphi$ , ne dépend pas du choix de  $A$ .

6) Soit  $T(\mathcal{C})$  l'ensemble des tangentes (droites de  $\hat{\Pi}$ ) à la conique  $\mathcal{C}$  (asymptotes comprises dans le cas d'une hyperbole, droite de l'infini  $\delta(\Pi)$  comprise dans le cas d'une parabole). La bijection  $\mathcal{C} \longrightarrow T(\mathcal{C})$  qui, à tout point  $M$  de  $\mathcal{C}$ , associe la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$ , permet de munir  $T(\mathcal{C})$  d'une structure de  $\mathbb{R}$ -droite projective à partir de celle de  $\mathcal{C}$ . Soit  $(a)$  une tangente à  $\mathcal{C}$ , en un point  $A$ , et  $\varphi : (a) \longrightarrow T(\mathcal{C})$  la bijection qui, à tout point  $m$  de  $(a)$ , associe la seconde tangente à  $\mathcal{C}$ , autre que  $(a)$  en général, que l'on peut mener par  $m$  (exceptionnellement, la tangente  $(a)$  elle-même si  $m$  est en  $A$ ). La structure de  $\mathbb{R}$ -droite projective ainsi définie sur  $T(\mathcal{C})$



par transport de structure, à partir de celle de  $(a)$ , coïncide avec celle définie précédemment, et en particulier *ne dépend pas du choix de  $(a)$*  : c'est ce que permet d'affirmer la généralisation du théorème 7-5 évoquée au paragraphe 7-4. (Voir aussi le théorème 7-11.)

7) Soit  $\Phi$  un faisceau de cercles, à points de base  $A$  et  $B$  (la droite  $AB$  étant elle-même considérée comme un « cercle » appartenant à  $\Phi$  : cf. les considérations du chapitre 6), dans un plan euclidien  $\Pi$ . À toute droite  $\Delta$  de  $\widehat{\Pi}$ , passant par  $A$ , et distincte de l'axe radical  $AB$ , associons la bijection  $\varphi : \Delta \longrightarrow \Phi$  qui, au point  $m$  de  $\Delta$ , associe en général le cercle circonscrit au triangle  $ABm$  (exceptionnellement la droite  $AB$  si  $m$  est le point  $\infty_\Delta$ , le cercle du faisceau tangent en  $A$  à  $\Delta$  si  $m$  est le point  $A$ ).



Notons  $\psi : \mathcal{D}(B) \longrightarrow \Phi$  la bijection définie par l'inversion  $J$  de pôle  $A$  et puissance  $\|AB\|^2$ . Les deux structures de  $\mathbb{R}$ -droite projective sur  $\Phi$  définies respectivement à partir de celle de  $\Delta$  (via  $\varphi$ ) et à partir de celle de  $\mathcal{D}(B)$  (via  $\psi$ ) coïncident. En particulier, la première *ne dépend pas du choix de  $\Delta$* . Le birapport de quatre points  $m$  sur  $\Delta$  est en effet égal au birapport des quatre points  $m'$  de  $\Delta$  inverses de  $m$  (car la fonction  $x \longrightarrow \frac{\|AB\|^2}{x}$  est homographique), donc au birapport des quatre droites  $Bm' = J\varphi(m)$ .

En outre, si on avait permuté les rôles de A et B, on aurait encore obtenu la même structure de droite projective sur  $\Phi$  : une symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de [AB] permet de s'en convaincre aisément.

8) Si  $\Phi$  désigne maintenant le faisceau des cercles tangents en un point A à une droite ( $a$ ) (droite ( $a$ ) comprise), une inversion de pôle A permet de définir une bijection  $J : \mathcal{D}(\infty_{(a)}) \longrightarrow \Phi$ , donc une structure de  $\mathbb{R}$ -droite projective sur  $\Phi$ , à partir de celle du faisceau des droites parallèles à ( $a$ ).

[Bien entendu, cette structure ne dépend pas du choix de la puissance d'inversion.]

9) Si  $\Phi$  est un faisceau à points limites A et B, on définit une bijection  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \Phi$  en associant, à tout nombre  $\lambda > 0$ , l'image du cercle de rayon  $\sqrt{\lambda}$  et de centre B, par l'inversion de pôle A et de puissance  $\|AB\|^2$ . On peut étendre  $\varphi$  en 0 et en le point  $\infty$  de  $\mathbb{R}$  en posant 
$$\begin{cases} \varphi(0) = \text{cercle de rayon nul en B} \\ \varphi(\infty) = \text{cercle de rayon nul en A.} \end{cases}$$

On peut aussi étendre  $\varphi$  aux valeurs négatives de  $\lambda$ , à condition d'agrandir  $\Phi$  à l'aide de cercles de rayon imaginaire (cf. considérations à la fin du paragraphe 5 du chapitre 3) : c'est ce que nous ferons aux chapitres 9 et 10. On obtiendra ainsi une structure de  $\mathbb{R}$ -droite projective sur  $\Phi$ .

Nous verrons d'autres exemples de droites projectives dans la suite, en particulier les faisceaux de coniques.

Etant donné un ensemble  $\Delta$  muni d'une structure de K-droite projective  $\mathcal{F}$ , on appellera *repère projectif de  $\Delta$*  toute bijection  $f : \widehat{K} \longrightarrow \Delta$  appartenant à  $\mathcal{F}$ . D'après le théorème 8-4, il suffit de se donner les images de trois nombres  $x_1, x_2, x_3$  distincts dans  $\widehat{K}$ ; en particulier, il suffit de se donner les points  $f(0), f(\infty)$  et  $f(1)$ . Puisque  $(x, 1, 0, \infty) = x$ , on obtient la

### Proposition 8-9

Se donner un repère projectif  $f : \widehat{K} \longrightarrow \Delta$  sur une droite projective  $\Delta$  équivaut à se donner trois points  $M_1, M_0, M_\infty$  de  $\Delta$ ,  $f(x)$  désignant alors l'unique point M de  $\Delta$  tel que

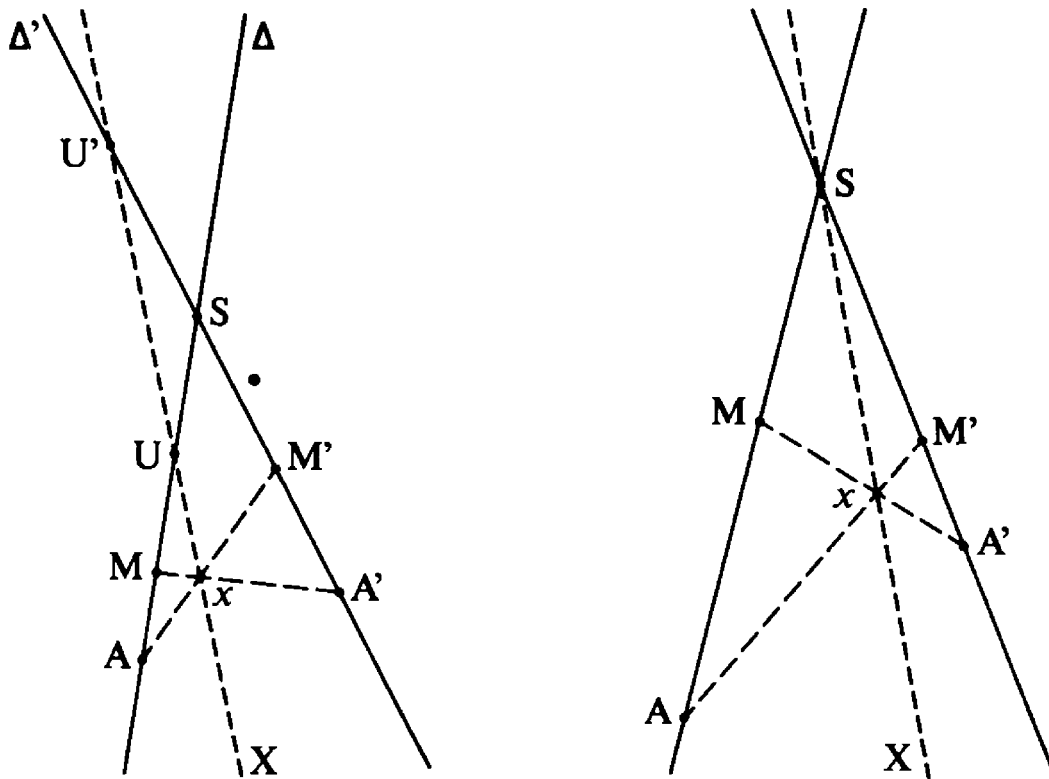
$$(M, M_1, M_0, M_\infty) = x.$$

[Par abus de langage, on appellera encore repère projectif la donnée de ces trois points, pris dans cet ordre  $M_1, M_0, M_\infty$ .]

On appellera de même *homographie* d'une droite projective  $\Delta$  sur une autre  $\Delta'$  toute bijection  $\Delta \longrightarrow \Delta'$  préservant les birapports : *il existe une telle homographie et une seule admettant trois couples donnés de points homologues*, comme il résulte immédiatement du théorème 8-4.

## 5 - Homographies entre deux droites d'un plan

Donnons-nous un plan affine  $\Pi$ , deux droites distinctes  $\Delta$  et  $\Delta'$  de  $\widehat{\Pi}$  dont on notera  $S$  le point d'intersection dans  $\widehat{\Pi}$ , un point  $A$  sur  $\Delta - \{S\}$ , un point  $A'$  sur  $\Delta' - \{S\}$ , et une droite  $X$  de  $\widehat{\Pi}$  ne passant ni par  $A$  ni par  $A'$ .



A tout point  $M$  de  $\Delta$ , associons le point  $M' = h(M)$  de  $\Delta'$  par le procédé suivant : à  $M$ , on fait correspondre d'abord le point  $x$  d'intersection des droites  $A'M$  et  $X$ , et l'on définit  $M'$  comme le

point d'intersection des droites  $Ax$  et  $\Delta'$ . Le birapport de quatre points  $M$  sur  $\Delta$  est égal au birapport des quatre droites  $A'M$ , donc au birapport des quatre points  $x$  d'intersection des droites  $A'M$  avec  $X$ , donc au birapport des quatre droites  $Ax$ , donc au birapport des quatre points  $M$  d'intersection des droites  $Ax$  avec  $\Delta'$  : c'est dire que  $h$  est une homographie de  $\Delta$  sur  $\Delta'$ . Cette homographie vérifie en outre  $h(A)=A'$ . Si  $X$  ne passe pas par  $S$  et admet respectivement les points  $U$  et  $U'$  d'intersection avec  $\Delta$  et  $\Delta'$ , on a aussi  $h(U)=S$ , et  $h(S)=U'$  (le point  $S$  étant considéré comme appartenant à  $\Delta'$  dans la première de ces deux égalités, et à  $\Delta$  dans la seconde); si, au contraire,  $X$  passe par  $S$ , on a alors  $h(S)=S$ .

### **Théorème 8-10**

- (i) *Toute homographie  $h$  de  $\Delta$  sur  $\Delta'$  peut être obtenue par le procédé ci-dessus à partir d'un couple  $(A, A')$  de points homologues (tous deux distincts de  $S$ ) et d'une droite  $X$  qui ne passe ni par  $A$  ni par  $A'$ .*
- (ii) *La droite  $X$  ne dépend que de  $h$ , et non du couple  $(A, A')$  choisi. En particulier, si  $(A, A')$  et  $(B, B')$  sont deux tels couples de points homologues, les droites  $AB'$  et  $BA'$  se coupent nécessairement sur  $X$ .*

[La droite  $X$  sera appelée l'axe d'homographie.]

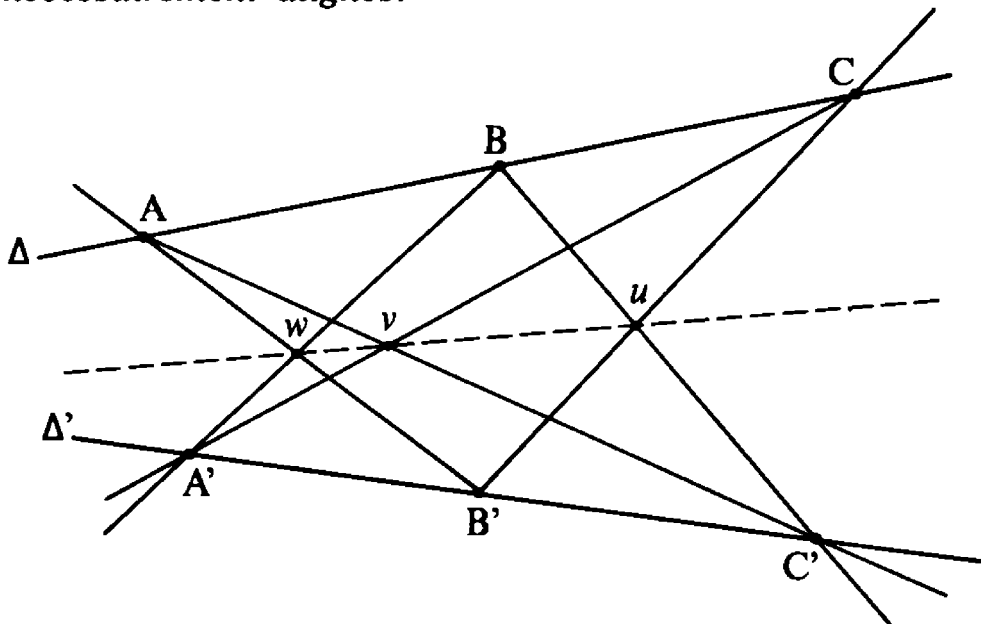
1) Supposons  $h(S) \neq S$ . Posons alors  $U = h^{-1}(S)$ ,  $U' = h(S)$ , et notons  $X$  la droite  $UU'$ . Choisissons alors  $A$  quelconque sur  $\Delta - \{S, U\}$ , et posons :  $A' = h(A)$ . L'homographie  $h_0$  définie par le procédé précédent à partir de  $X$ ,  $A$  et  $A'$  coïncide nécessairement avec  $h$ , car les deux homographies possèdent en commun les trois couples  $(A, A')$ ,  $(U, S)$  et  $(S, U')$  de points homologues. Il est clair, d'autre part, que la droite  $X$  utilisée était la seule possible.

2) Si  $h(S) = S$ , choisissons arbitrairement deux points distincts  $A$  et  $B$  sur  $\Delta - \{S\}$  et notons  $A'$  et  $B'$  leur image par  $h$ . Soit alors  $X$  la droite passant par  $S$  et par le point d'intersection des droites  $AB'$  et  $BA'$ . L'homographie  $h_0$  définie par le procédé précédent à partir de  $X$ ,  $A$  et  $A'$  coïncide encore nécessairement avec  $h$ , puisque

les deux homographies ont en commun les trois couples  $(A, A')$ ,  $(B, B')$  et  $(S, S')$  de points homologues. La droite  $X$  utilisée, là encore, était la seule possible.

**Corollaire 8-11 (théorème de Pappus)**

*Etant données deux droites distinctes  $\Delta$  et  $\Delta'$  de  $\widehat{\Pi}$ , trois points distincts  $A, B, C$  sur  $\Delta$  et trois points distincts  $A', B', C'$  sur  $\Delta'$ , les trois points  $u = BC' \cap B'C$ ,  $v = AC' \cap A'C$  et  $w = AB' \cap A'B$  sont alors nécessairement alignés.*

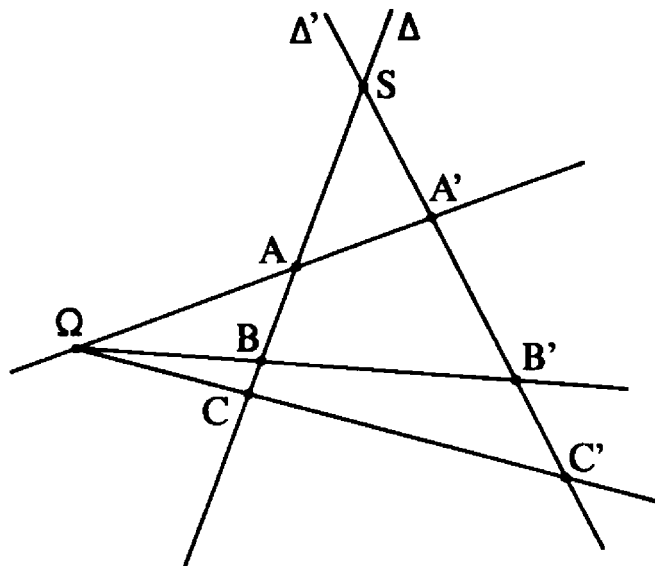


Il existe en effet une homographie et une seule, de  $\Delta$  sur  $\Delta'$ , admettant  $(A, A')$ ,  $(B, B')$  et  $(C, C')$  comme couple de points homologues : les points  $u, v, w$  appartiennent alors nécessairement à l'axe de cette homographie, d'après le théorème 8-10.

**Remarque :** Si  $h(S) = S$ , il existe un point  $\Omega$  de  $\widehat{\Pi} - (\Delta \cup \Delta')$  tel que  $M'$  soit l'image de  $M$  dans la perspective de point de vue  $\Omega$  de  $\Delta$  sur  $\Delta'$ . Le point  $\Omega$  étant en effet nécessairement égal, s'il existe, au point d'intersection des droites  $AA'$  et  $BB'$ , on définit une homographie  $h_1$  de  $\Delta$  sur  $\Delta'$  en faisant ainsi pivoter une droite  $\Omega MM'$  autour de  $\Omega$ , et  $h_1$  coïncide avec  $h$  puisque les deux homographies ont en commun les trois couples  $(A, A')$ ,  $(B, B')$  et  $(S, S')$  de points homologues. Le théorème 7-9 signifie alors que l'axe d'homographie n'est autre que la polaire de  $\Omega$  par rapport aux deux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

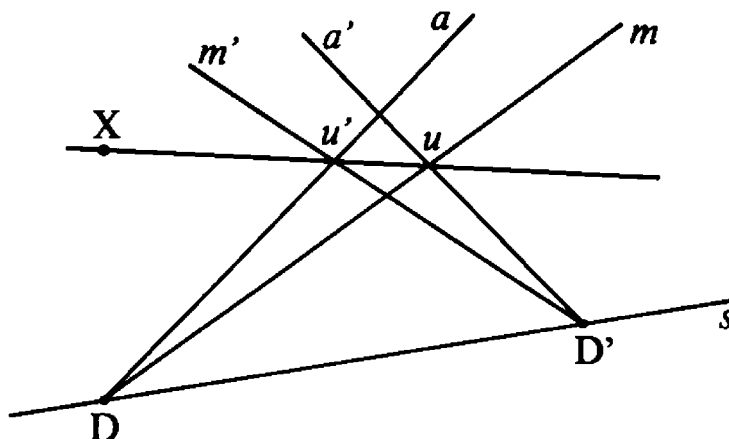


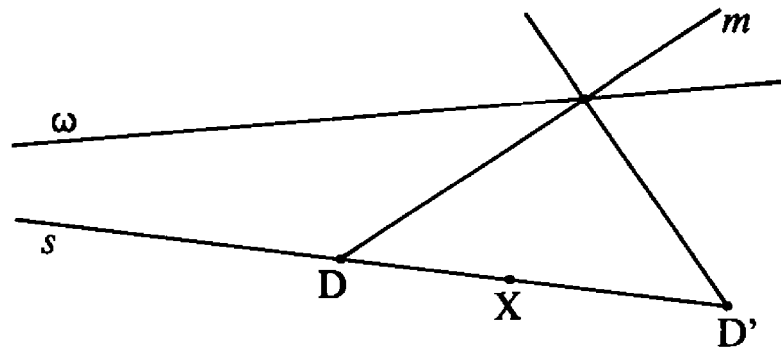
Par dualité, on obtient le



### Théorème 8-10

*Etant donnés deux points distincts  $D$  et  $D'$  de  $\hat{\Pi}$ , toute homographie  $h$ , du faisceau  $\mathcal{D}(D)$  des droites de  $\hat{\Pi}$  passant par  $D$  sur le faisceau  $\mathcal{D}(D')$  des droites passant par  $D'$ , peut s'obtenir par le procédé suivant à partir d'un point  $X$  distinct de  $D$  et  $D'$  et d'un couple  $(a, a')$  de droites homologues dont ni l'une ni l'autre ne passe par  $X$  : à toute droite  $m \in \mathcal{D}(D)$ , associons successivement le point d'intersection  $u$  de  $m$  et  $a'$ , la droite  $Xu$ , le point  $u'$  d'intersection de  $Xu$  avec  $a$ ;  $m' = h(m)$  est alors la droite  $D'u'$ .*





Notons  $s$  la droite  $DD'$ . Si  $h(s) = s$ , le point  $X$  est alors sur  $s$  (et réciproquement). L'homographie peut alors encore être définie par une droite  $\omega$  ne passant ni par  $D$  ni par  $D'$ , en associant, à toute droite  $m \in \mathcal{D}(D)$ , la droite  $m'$  qui joint  $D'$  au point  $m \cap \omega$ ; le point  $X$  est alors conjugué harmonique de  $\omega \cap s$  par rapport à  $D$  et  $D'$ .

### Corollaire 8-11 (théorème de Copappus)

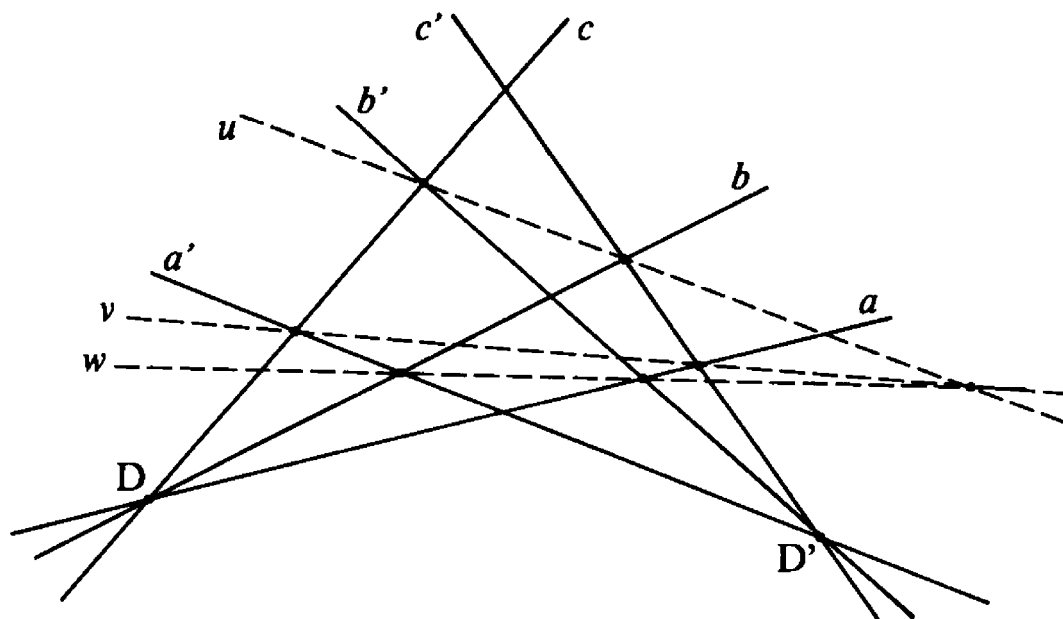
*Etant donnés trois droites distinctes  $a, b, c$  de  $\widehat{\Pi}$  concourant en un point  $D$ , et trois droites distinctes  $a', b', c'$  concourant en un autre point  $D'$  de  $\widehat{\Pi}$  ( $D' \neq D$ ), notons :*

*$u$  la droite qui joint  $b \cap c'$  et  $b' \cap c$ ,*

*$v$  la droite qui joint  $a \cap c'$  et  $a' \cap c$ ,*

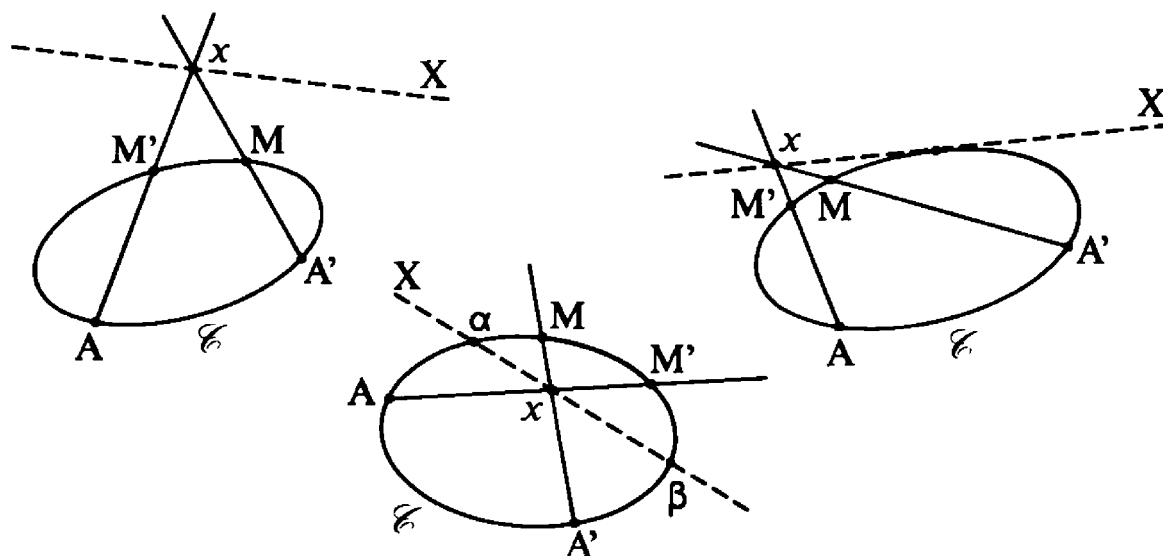
*$w$  la droite qui joint  $a \cap b'$  et  $a' \cap b$ .*

*Les trois droites  $u, v, w$  sont alors concourantes.*



## 6 - Homographies d'une conique sur elle-même

Donnons-nous une conique  $\mathcal{C}$  dans le complété projectif  $\hat{\Pi}$  d'un plan affine  $\Pi$  (points à l'infini compris, si  $\mathcal{C}$  est une hyperbole ou une parabole), une droite  $X$  de  $\hat{\Pi}$ , et deux points distincts  $A$  et  $A'$  sur  $\mathcal{C} - X$ . Définissons alors une application  $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  de la façon suivante : à tout point  $M$  de  $\mathcal{C}$ , associons successivement le point  $x$  d'intersection de  $X$  avec la droite  $A'M$  (avec la tangente en  $A'$  à  $\mathcal{C}$  si  $M$  est en  $A'$ ), puis le point  $M'$  autre que  $A$  en général où la droite  $Ax$  recoupe  $\mathcal{C}$  (exceptionnellement,  $M' = A$  si  $Ax$  est tangente à  $\mathcal{C}$ ). On pose alors  $h(M) = M'$ . Par définition même du birapport sur  $\mathcal{C}$ , le birapport de quatre points  $M$  est égal au birapport des quatre droites  $A'M$ , donc au birapport des quatre points



$x = A'M \cap X$ , donc au birapport des quatre droites  $Ax$ , donc au birapport des quatre points  $M'$  de  $\mathcal{C}$  : c'est-à-dire que  $h$  est une homographie de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{C}$ . En particulier  $h(A) = A'$ , et tout point  $\alpha$  d'intersection de  $X$  avec  $\mathcal{C}$  (il y en a deux au plus) est point double de  $h$  ( $h(\alpha) = \alpha$ ).

### Théorème 8-12

- (i) *Toute homographie  $h$  de  $\mathcal{C}$  sur elle-même peut être obtenue par le procédé ci-dessus à partir d'une droite  $X$  de  $\hat{\Pi}$  et d'un couple  $(A, A')$  de points homologues.*

- (ii) *Les points doubles de  $h$  sont les points d'intersection de  $X$  avec  $C$ . La droite  $X$  ne dépend que de  $h$  et non du couple  $(A, A')$ .*
- (iii) *Si  $(A, A')$  et  $(B, B')$  sont deux couples de points homologues, les droites  $AB'$  et  $BA'$  se coupent sur  $C$ .*

Donnons-nous trois couples  $(A, A')$ ,  $(B, B')$  et  $(C, C')$  de points homologues par  $h$  tels que  $A$  et  $B'$  soient distincts, de même que  $A'$  et  $B$ ,  $A$  et  $C'$ ,  $A'$  et  $C$ . Notons alors  $w$  le point d'intersection des droites  $AB'$  et  $BA'$ , et  $v$  le point d'intersection de  $AC'$  et  $CA'$ . Prenons pour  $X$  la droite  $vw$ , et soit  $h_0$  l'homographie définie sur  $C$  par le procédé précédent à partir de  $X$  et de  $(A, A')$ . Par construction, l'homographie  $h_0$  possède les trois couples de points homologues  $(A, A')$ ,  $(B, B')$  et  $(C, C')$  en commun avec  $h$  : ces deux homographies ne peuvent donc que coïncider.

Si  $h$  admet deux points doubles distincts  $\alpha = \alpha'$  et  $\beta = \beta'$ , les droites  $A'\alpha$  et  $A\alpha'$  se coupent sur  $\alpha$  qui appartient donc à  $X$ ; de même  $\beta$  est sur  $X$ . Ainsi  $X$  est nécessairement la droite  $\alpha\beta$ , qui ne dépend que de  $h$  et non du choix de  $(A, A')$ .

Si  $h$  admet un seul point double  $\alpha$ ,  $X$  passe par  $\alpha$  pour les mêmes raisons que précédemment;  $X$  est nécessairement la tangente à  $C$  en  $\alpha$ ; sinon  $X$  recouperait  $C$  en un autre point  $\beta$ , qui ne pourrait qu'être point double de  $h$  : là encore,  $X$  ne dépend pas de  $(A, A')$ .

Si  $h$  n'a pas de point double, du moins « réels » qui sont les seuls que nous connaissons pour le moment, on verra au chapitre 10 que l'introduction de points « imaginaires » permettra d'affirmer que  $h$  admet en fait deux points doubles « imaginaires conjugués », qui là encore permettront de déterminer directement  $X$ , indépendamment du couple  $(A, A')$ .

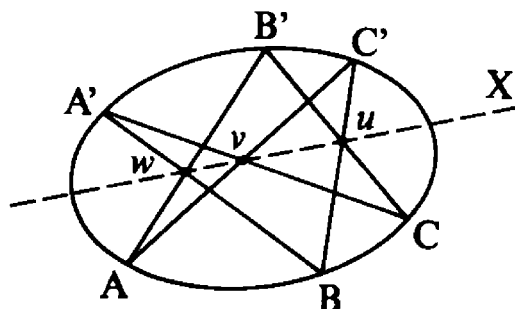
[La droite  $X$  s'appelle *l'axe d'homographie* de  $h$ .]

### Corollaire 8-13 (théorème de Pascal)

*Etant donnés six <sup>(4)</sup> points distincts  $ABCDEF$  sur une conique  $C$  de  $\widehat{\Pi}$ , les trois points d'intersection  $u = AE \cap BD$ ,  $v = AF \cap CD$  et*

<sup>(4)</sup> Voir en exercice les résultats analogues que l'on peut obtenir en supposant certains de ces points confondus.

$w = BF \cap CE$  sont toujours alignés (et de même les familles de trois points construites de façon analogue en permutant ABCDEF).

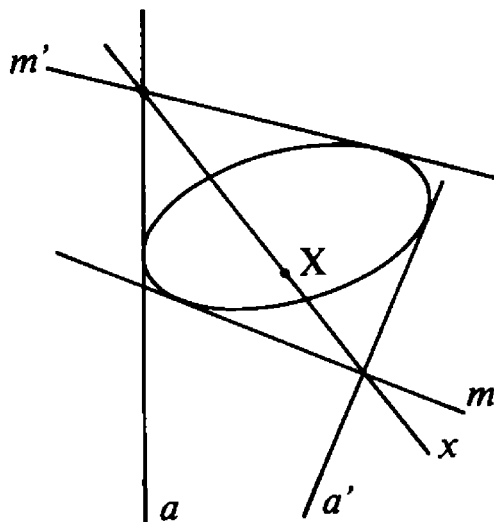


Il suffit en effet d'appliquer le théorème 7-12 au cas de l'homographie admettant les trois couples (A, D), (B, E) et (C, F) de points homologues.

Par tppr, on obtient les résultats duaux

### Théorème 8-12

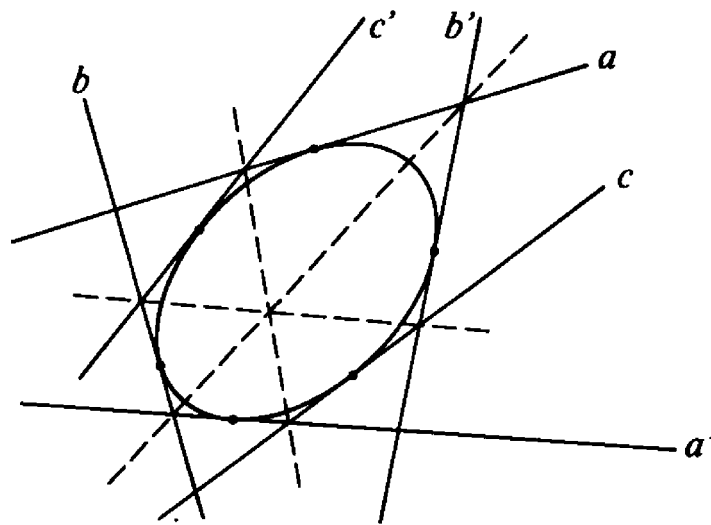
Etant donné une conique  $C$  de  $\hat{\Pi}$ , toute homographie  $h$  de l'ensemble  $T(C)$  des tangentes à  $C$  sur lui-même peut s'obtenir par le procédé suivant à partir d'un couple  $(a, a')$  de tangentes homologues et d'un point  $X$  de  $\hat{\Pi}$  n'appartenant ni à  $(a)$  ni à  $(a')$  : à toute tangente  $(m) \in T(C)$ , associons la droite  $x$  joignant



$X$  au point d'intersection  $(a') \cap (m)$ , puis la tangente  $(m')$  à  $\mathcal{C}$ , autre que  $(a)$  en général (exceptionnellement égal à  $(a)$  si  $x \cap (a)$  est sur  $\mathcal{C}$ ), menée par le point d'intersection  $x \cap (a)$ . Ce point  $X$  ne dépend que de  $h$  et non de  $(a, a')$ .

### Corollaire 8-13' (théorème de Brianchon)

Etant donnés six<sup>(5)</sup> tangentes distinctes  $a, b, c, d, e, f$  à une conique  $\mathcal{C}$ , les trois droites  
 $u$  joignant  $a \cap e$  à  $b \cap d$ ,  
 $v$  joignant  $a \cap f$  à  $c \cap d$ ,  
et  $w$  joignant  $b \cap f$  à  $c \cap e$   
sont toujours concourantes (et de même en permutant les rôles de  $a, b, c, d, e, f$ ).



## 7 - Générations homographiques ponctuelles et tangentielles des coniques

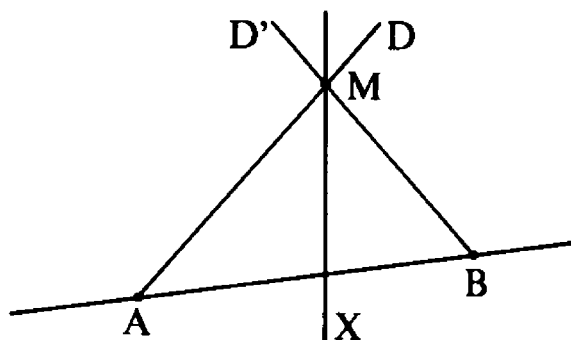
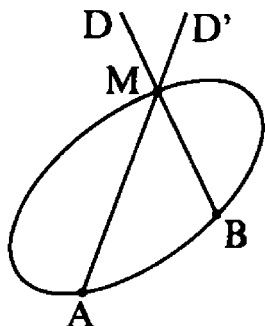
Etant donnés une conique  $\mathcal{C}$  dans  $\widehat{\Pi}$  et deux points distincts  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$ , on définit une bijection  $h$  du faisceau  $\mathcal{D}(A)$  des droites

<sup>(5)</sup> Remarque analogue à celle faite à l'occasion du théorème de Pascal.

de  $\widehat{\Pi}$  passant par A sur celui  $\mathcal{D}(B)$  des droites passant par B, en associant à toute droite  $D \in \mathcal{D}(A)$  la droite  $D' \in \mathcal{D}(B)$  ainsi définie :

- 1) si  $D$  est tangente à  $C$  en A,  $D' = AB$ ;
- 2) si  $D$  est la droite AB,  $D'$  est la tangente à  $C$  en B;
- 3) dans les autres cas,  $D'$  est la droite joignant B' au point M autre que A où  $D$  recoupe  $C$ .

On peut alors reparafraser le corollaire 5-11 du chapitre 5 en énonçant que  $h$  est une homographie de  $\mathcal{D}(A)$  sur  $\mathcal{D}(B)$ .



Une autre situation géométrique d'homographie de  $\mathcal{D}(A)$  sur  $\mathcal{D}(B)$  consiste à se donner une droite  $X$  de  $\widehat{\Pi}$  ne contenant ni A ni B : à toute droite  $D \in \mathcal{D}(A)$ , on associe la droite  $D'$  joignant B au point M d'intersection de  $D$  et  $X$ .

Ces deux exemples se distinguent par le fait que l'image par  $h$  de la droite AB (considérée comme appartenant à  $\mathcal{D}(A)$ ) est la droite AB elle-même (considérée comme appartenant à  $\mathcal{D}(B)$ ) dans le deuxième cas, et pas dans le premier.

Réciproquement, on a le

### **Théorème 8-14**

*Etant donnés deux points distincts A et B de  $\Pi$  et une homographie  $h : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(B)$ , alors :*

- 1) Si  $h(AB)$  est distinct de AB, les droites  $D$  et  $D' = h(D)$  se coupent en un point M qui décrit, lorsque  $D$  parcourt  $\mathcal{D}(A)$ , une conique  $C$  de  $\widehat{\Pi}$  passant par A et B.

2) Si  $h(AB)$  est égal à  $AB$ ,  $D$  et  $D'$  se coupent en un point  $M$  lorsque  $D$  est distinct de  $AB$ , lequel point  $M$  parcourt une droite  $X$  ne contenant ni  $A$  ni  $B$  quand  $D$  décrit  $\mathcal{D}(A)$ . [A priori il faut exclure de  $X$  son point d'intersection avec la droite  $AB$ ; mais si  $D$  est égal à  $AB$ ,  $D'$  est aussi égal à  $AB$ ,  $D \cap D'$  est toute la droite  $AB$ , ce qui permet de reconsidérer en particulier le point qu'on avait à priori exclu.]

**Remarque :** On peut considérer le deuxième cas comme correspondant au cas où la conique «dégénère» en la réunion des deux droites  $X$  et  $AB$ .

Par opposition, la conique  $C$  du premier cas sera dite «*propre*». La démonstration du théorème repose sur le

### Lemme 8-15

- (i) Par cinq points distincts de  $\hat{\Pi}$  tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés passe une conique (propre) de  $\hat{\Pi}$  et une seule.
- (ii) Par cinq points distincts de  $\hat{\Pi}$  tels que trois d'entre eux soient alignés et pas quatre, passe une conique dégénérée en deux droites de  $\hat{\Pi}$  et une seule.

Nous admettrons provisoirement ce lemme, qui sera démontré analytiquement au chapitre 12. [Le principe est très simple : une courbe du second degré, définie par une équation de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

est toujours une conique, propre ou dégénérée selon que le

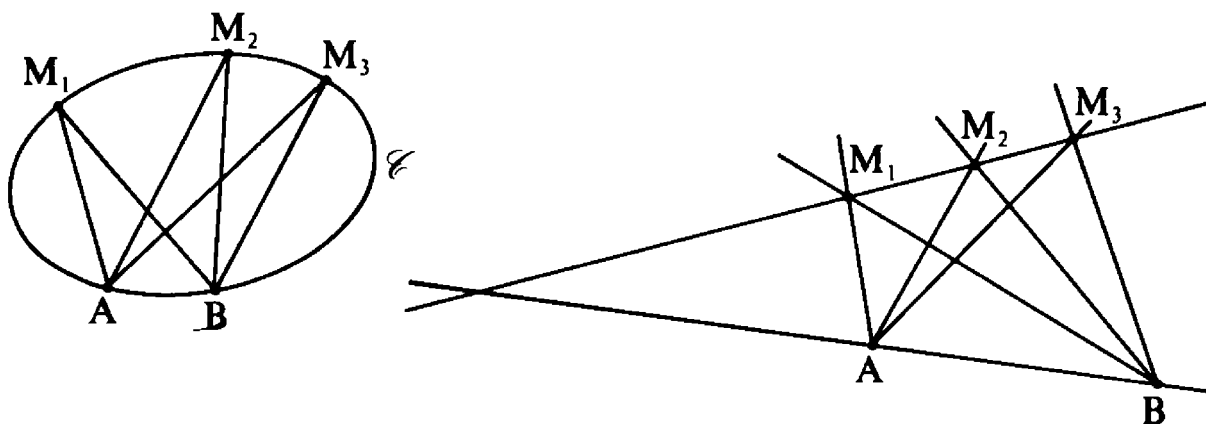
discriminant  $\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$  est non nul ou nul. Si l'on écrit que la

conique passe par cinq points, les six coefficients  $A, B, C, D, E, F$  seront solution d'un système linéaire homogène de cinq équations linéairement indépendantes, et seront donc définis à multiplication près par un même scalaire non nul.]



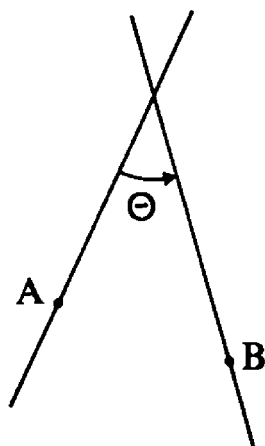
**Démonstration du théorème 8-14**

Une homographie  $h : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(B)$  est définie par la donnée de trois couples  $(D_i, D'_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de droites homologues, que l'on peut choisir de façon qu'aucune d'entre elles, ni  $D_i$  ni  $D'_i$ , ne soit la droite  $AB$ . Notons  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) le point d'intersection de  $D_i$  et  $D'_i$ . Il passe alors, d'après le lemme 8-15, une conique  $\mathcal{C}$  et une seule par les cinq points  $A, B, M_1, M_2, M_3$ , propre ou dégénérée selon que les trois points  $M_i$  sont non alignés ou alignés.



L'homographie  $h_0 : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(B)$ , définie à partir de  $\mathcal{C}$  par le procédé décrit au début de ce paragraphe, coïncide nécessairement avec  $h$  puisque les deux homographies ont en commun les trois couples  $(D_i, D'_i)$  de droites homologues. c. q. f. d.

*Exemple.* — Le théorème de l'arc capable (corollaire 1 du théorème 2-2) est un cas particulier de cette situation : si  $\theta$  est un angle orienté de droites fixé une fois pour toutes, et si  $A$  et  $B$  sont



deux points distincts d'un plan euclidien  $\Pi$ , l'homographie  $h$  de  $\mathcal{D}(A)$  sur  $\mathcal{D}(B)$  qui intervient est celle qui, à une droite  $D \in \mathcal{D}(A)$ , associe la droite  $D' \in \mathcal{D}(B)$  telle que  $(D, D') = \theta$ . [Le cas dégénéré correspond à  $\theta = 0 \bmod \pi$ ; la droite  $X$  est alors la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$ .]

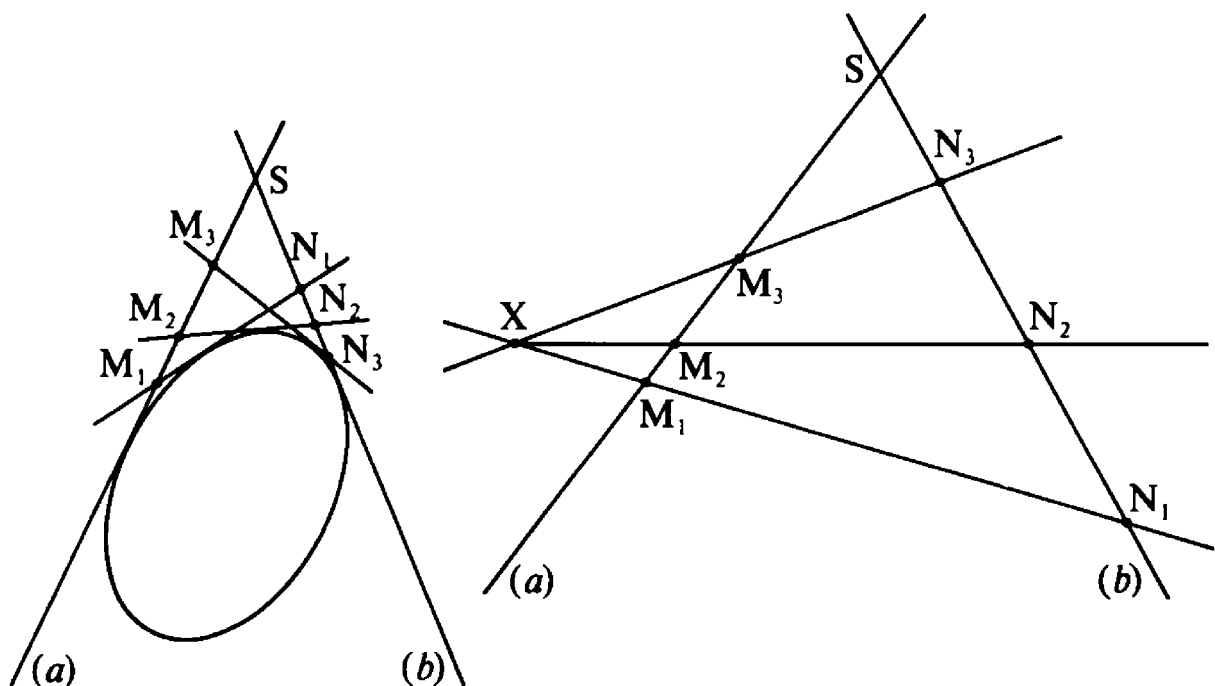
Par dualité et en reparaphrasant le théorème 7-11, on obtient le

### Théorème 8-14'

*Etant données deux droites distinctes  $(a)$  et  $(b)$  de  $\widehat{\Pi}$ , dont on notera  $S$  le point d'intersection, et  $h$  une homographie de  $(a)$  sur  $(b)$ , l'enveloppe des droites  $MM'$  obtenues en faisant varier  $M$  sur  $(a)$  et en posant  $M' = h(m)$  est :*

- 1) *une conique propre de  $\widehat{\Pi}$  tangente à  $(a)$  et  $(b)$  si  $h(S)$  est distinct de  $S$ ,*
- 2) *un point  $X$  n'appartenait pas à  $(a) \cup (b)$  si  $h(S) = S$ , ou le point  $S$  lui-même.*

*Exemple.* — Le théorème de l'angle pivotant (7-12) est un cas particulier de cette situation.



## 8 - Exercices

- 1 / Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4$  quatre éléments (dont trois au moins sont distincts) de  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , d'affixes  $M_1, M_2, M_3, M_4$ .

a) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  soient cocycliques ou alignés est que le birapport  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  soit réel ou infini (c'est-à-dire appartenant à  $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ).

b) Le birapport  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  est-il alors égal au birapport  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  de quatre points alignés ou cocycliques (tel qu'il a été défini au chapitre 5)?

c) En comparant inversion et transformation homographique de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , redémontrer (de façon beaucoup plus simple et naturelle) le théorème 6-4.

- 2 / Soit  $\Delta$  une droite dans un plan euclidien,  $A$  un point de  $\widehat{\Delta}$ , et  $O$  un point du plan n'appartenant pas à  $\widehat{\Delta}$ . A tout point  $M$  de  $\widehat{\Delta}$ , on associe le point  $M'$  de  $\widehat{\Delta}$  tel que

$$(OM, OM') = (OA, OM).$$

La transformation  $M \longrightarrow M'$  est-elle homographique?

- 3 / Etant donné un triangle  $ABC$  dans un plan euclidien, on note  $\Delta_B$  (resp.  $\Delta_C$ ) la bissectrice intérieure de l'angle en  $B$  (resp. en  $C$ ),  $I$  le centre du cercle inscrit, et  $\omega$  le point de contact avec  $BC$  du cercle inscrit. On pose :

$$\alpha = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (AB, AI) = (AI, AC).$$

A tout point  $M$  de  $\widehat{\Delta}_B$ , on associe le point  $M'$  de  $\widehat{\Delta}_C$  tel que  $(AM, AM') = \alpha$ .

a) Montrer que l'angle  $(\omega M, \omega M')$  est égal à une constante (que l'on précisera).

b) Montrer que le cercle de centre  $M$  tangent à  $BA$  et  $BC$ , ainsi que le cercle de centre  $M'$  tangent à  $CA$  et  $CB$ , ont une tangente commune qui passe par  $A$  (dont on notera  $P$  le point d'intersection avec  $BC$ ). Préciser pour quelles positions de  $M$ ,  $M$  est centre du cercle inscrit dans  $ABP$  ou d'un cercle exinscrit (lequel?),  $M'$  est centre du cercle inscrit dans  $ACP$  ou d'un cercle exinscrit.

c) Quelle est l'enveloppe de  $MM'$ ?

d) Énoncer et démontrer des résultats analogues aux précédents en remplaçant  $\Delta_B$  et (ou)  $\Delta_C$  par une bissectrice extérieure en  $B$  (resp.  $C$ ) au triangle  $ABC$ .

4/ On note  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux droites d'un plan affine, et  $h : M \longrightarrow M'$  une transformation affine de  $\Delta$  sur  $\Delta'$ . Quelle est l'enveloppe de  $MM'$ ? Réciproque.

5/ Soit  $\Gamma$  une conique et  $\Omega$  un point du plan de  $\Gamma$ , non situé sur  $\widehat{\Gamma}$ . À tout point  $M$  de  $\widehat{\Gamma}$ , on associe le second point d'intersection  $M'$  de la droite  $\Omega M$  avec  $\widehat{\Gamma}$  si  $\Omega M$  n'est pas tangente à  $\widehat{\Gamma}$ , le point  $M$  lui-même sinon.

a) Montrer que cette application est une involution sur  $\widehat{\Gamma}$ .

b) Montrer, réciproquement, que pour toute involution  $M \longrightarrow M'$  sur une conique, la droite  $MM'$  enveloppe un point fixe (Frégier).

c) Soit  $A$  un point de  $\Gamma$ , à distance finie. À tout point  $M$  de  $\widehat{\Gamma}$ , on associe le second point  $M'$  d'intersection avec  $\widehat{\Gamma}$  de la perpendiculaire  $\Delta'$  en  $A$  à la droite  $\Delta = AM$  ( $AM$  désignant la tangente  $\delta$  à  $\Gamma$  en  $A$  si  $M = A$ , et  $M'$  désignant le point  $A$  si  $\Delta' = \delta$ ). Montrer que la droite  $MM'$  passe par un point fixe  $\Omega_A$ .

d) Quel est le lieu de  $\Omega_A$  quand  $A$  parcourt  $\widehat{\Gamma}$ ?

6/ Montrer que la restriction, à un cercle de centre  $\omega$ , d'une rotation de centre  $\omega$  est une homographie de ce cercle sur lui-même. Quel est l'axe d'homographie?

- 7/ Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $\omega$ , et  $P$  un point du plan de  $\Gamma$  non situé sur  $\Gamma$ . On note  $J$  l'inversion de pôle  $P$  et de puissance  $\mathcal{P}_\Gamma(P)$ , et  $S$  la symétrie de centre  $\omega$ . Montrer que la restriction  $h$  de  $S \circ J$  au cercle  $\Gamma$  est une homographie de  $\Gamma$  sur lui-même.

Quel est l'axe d'homographie? Quels sont les points doubles de  $h$ ? Posant  $M' = h(M)$ , quelle est l'enveloppe de la droite  $MM'$ ?

- 8/ Etant donnée une homographie  $h : M \longrightarrow M'$  d'une conique sur elle-même, quelle est l'enveloppe de la droite  $MM'$ ? Quel est le lieu du point  $P$  d'intersection des tangentes en  $M$  et  $M'$  à la conique?

Distinguer les cas selon que les points doubles de  $h$  sont distincts (réels), confondus, ou imaginaires; distinguer le cas où  $h$  est une involution; montrer que l'on peut toujours ramener le problème par perspective soit à la situation de l'exercice 6 de ce chapitre, soit à celle de l'exercice 7, soit à la situation de l'exercice 6 ou 7 du chapitre précédent.

- 9/ Pour tout point  $M$  d'une conique  $\Gamma$ , on désigne par  $m$  la tangente en  $M$  à  $\Gamma$ .

a) Etant donné un pentagone  $ABCDE$  inscrit dans  $\Gamma$ , montrer que les trois points  $a \cap BD$ ,  $AE \cap CD$  et  $BE \cap AC$  sont alignés.

b) Etant donné un quadrangle  $ABCD$  inscrit dans  $\Gamma$ , montrer que les trois points  $a \cap b$ ,  $AD \cap BC$  et  $BD \cap AC$  sont alignés de même que les trois points  $a \cap BD$ ,  $b \cap AC$  et  $AB \cap CD$ .

c) Etant donné un triangle  $ABC$  inscrit dans  $\Gamma$ , montrer l'alignement des trois points :

$$a \cap BC, \quad c \cap AB, \quad b \cap AC.$$

- 10/ Enoncer les résultats duaux de ceux de l'exercice précédent.

- 11/ Soit  $\Gamma$  la courbe (« cissoïde ») admettant, relativement à un repère orthonormé  $(Ox, Oy)$  d'un plan euclidien  $\Pi$  la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a \frac{t^2}{1+t^2}, \\ y(t) = a \frac{t^3}{1+t^2}, \end{cases}$$

( $a$  désignant une constante  $>0$ ). Cette courbe admettant la droite  $\Delta$  d'équation  $x=a$  comme asymptote ( $t$  tendant vers  $\pm\infty$ ), on conviendra d'ajouter le point  $\infty_\Delta$  de  $\hat{\Pi}$  à  $\Gamma$  (et l'on posera  $\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \{\infty_\Delta\}$ ), de faire varier le paramètre  $t$  dans  $\hat{\mathbb{R}}$ , le point  $\infty_\Delta$  correspondant à la valeur  $\infty$  du paramètre.

a) Dessiner  $\Gamma$ .

b) Montrer que la représentation paramétrique précédente définit une bijection de  $\hat{\mathbb{R}}$  sur  $\hat{\Gamma}$  (que l'on supposera désormais munie de la structure de droite projective correspondante).

c) Montrer que tout cercle  $\gamma$  de  $\Pi$ , passant par  $O$  et par un point  $P$  de  $\Gamma$ , recoupe  $\Gamma$  en un seul point  $Q$  (confondu avec  $P$  si  $\gamma$  est tangent en  $P$  à  $\Gamma$ , confondu avec  $O$  si  $\gamma$  est tangent en  $O$  à  $\Gamma$ , distinct de  $O$  et  $P$  sinon).

d) Montrer que toute droite projective  $\delta$  de  $\hat{\Pi}$  passant par  $O$  recoupe  $\hat{\Gamma}$  en un seul point  $Q$

à distance finie si  $\delta \neq Oy$

distinct de  $O$  si  $\delta \neq Ox$ ,

confondu avec  $O$  si  $\delta = Ox$ ,

en  $\infty_\Delta$  si  $\delta = Oy$ .

e) Soit  $\gamma_0$  un cercle ou une droite passant par  $O$ , et  $(A, A')$  un couple de points distincts sur  $\hat{\Gamma}$ , non situés sur  $\gamma_0$ . A tout point  $M$  de  $\hat{\Gamma}$ , on associe le point  $x$  où le « cercle »  $(OMA')$  recoupe  $\gamma_0$ , puis le point  $M'$  où le « cercle »  $(OxA)$  recoupe  $\hat{\Gamma}$ . Montrer que la transformation  $h_{\gamma_0} : M \longrightarrow M'$  est une homographie de  $\hat{\Gamma}$  sur elle-même, admettant  $(A, A')$  comme couple de points homologues. Quels sont ses points doubles?

Pour quel  $\gamma_0$ ,  $O$  est-il point double de  $h_{\gamma_0}$ ?

Pour quel  $\gamma_0$ ,  $\infty_\Delta$  est-il point double de  $h_{\gamma_0}$ ?

Pour quel  $\gamma_0$ , les points doubles de  $h_{\gamma_0}$  sont-ils confondus?

Pour quel  $\gamma_0$  n'y a-t-il pas de point double (réel)?

f) Montrer que toute homographie  $h : \widehat{\Gamma} \longrightarrow \widehat{\Gamma}$  est de la forme  $h_{\gamma_0}$ , et que  $\gamma_0$  ne dépend que de  $h$  (et non du couple  $(A, A')$ ).

g) Soient ABCDEF six points distincts de  $\widehat{\Gamma}$ . On note  $u$  le point d'intersection (si possible autre que O) des « cercles » (AEO) et (DBO),

$v$  le point d'intersection (si possible autre que O) des « cercles » (BFO) et (ECO),

$w$  le point d'intersection (si possible autre que O) des « cercles » (AFO) et (CDO).

Montrer que les quatre points  $u, v, w, O$  sont « cocycliques ».

- 12/ Démontrer des résultats analogues à ceux de l'exercice précédent, en remplaçant la cissoïde  $\Gamma$  par la « cardioïde » de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \\ y = a \frac{2t}{(1+t^2)^2}. \end{cases} \quad (a \text{ constante } > 0).$$

- 13/ Soient  $\Delta$  une droite d'un plan euclidien  $\Pi$ , A et B deux points distincts de  $\Pi - \Delta$ , et  $\alpha, \beta$  deux angles orientés de droites dans  $\Pi$  fixés une fois pour toutes. A tout M de  $\widehat{\Delta}$ , on associe la droite  $a$  passant par A définie par  $(AM, a) = \alpha$ , la droite  $b$  passant par B vérifiant  $(BM, b) = \beta$ , et le point  $M' = a \cap b$  de  $\widehat{\Pi}$ . Quel est le lieu de  $M'$ ? Etudier divers cas particuliers, selon les positions relatives de A et de B, et les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .
- 14/ Utiliser l'exercice 11 du chapitre 5 pour démontrer directement par le calcul, sans faire référence au fait que toute isométrie préserve les birapports, qu'une rotation d'angle donné est une homographie sur lui-même du faisceau  $\mathcal{D}(A)$  des droites du plan passant par un point A à distance finie dans le plan, ou définit une homographie sur elle-même de la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$ .
- 15/ Reprendre l'exercice 11 du chapitre 5, et vérifier par le calcul que le birapport des quatre nombres  $\operatorname{tg} \theta_i(D)$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) ne dépend, ni de la droite de référence  $D_0$ , ni de la structure euclidienne dont le plan est muni.

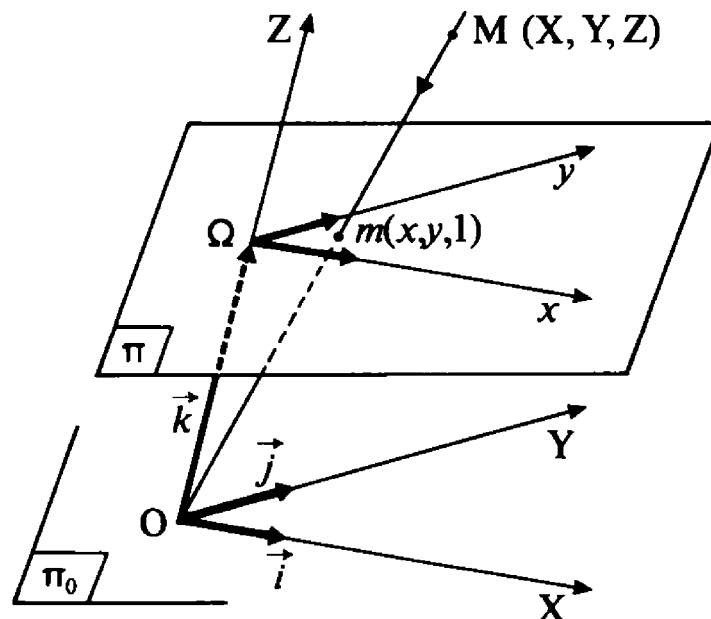
## CHAPITRE IX

# *Espaces projectifs*

### 1 - Espaces $P^n(K)$ , $P(E)$

Commençons par généraliser les considérations faites au début du chapitre 8, en regardant d'abord la complétion projective  $\hat{\Pi}$  d'un plan affine réel  $\Pi$  (dimension 2).

A cet effet, supposons  $\Pi$  plongé dans un espace affine réel  $E$  de dimension 3. Soit  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  un repère affine de  $\Pi$ ,  $O$  un point de  $E - \Pi$ , et  $\vec{k} = \overrightarrow{O\Omega}$ .



Notant  $\Omega x$  et  $\Omega y$  (resp.  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ ) les axes des repères  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  (resp.  $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ),  $\Pi$  admet alors l'équation

$$Z = 1$$



et la perspective  $p : E - \Pi_0 \longrightarrow \Pi$ , de point de vue  $O$ , où  $\Pi_0$  désigne le plan d'équation  $Z=0$ , associe au point  $M$  de coordonnées  $(X, Y, Z)$  le point  $m$  de coordonnées  $\begin{cases} x = X/Z, \\ y = Y/Z. \end{cases}$

Mais, au chapitre 5, la complétion projective  $\hat{\Pi}$  de  $\Pi$  a précisément été introduite pour que la perspective  $p$  s'étende à tout  $E - \{0\}$ , en une application  $p : E - \{0\} \longrightarrow \hat{\Pi}$ , définie, pour  $M$  dans  $\Pi_0 - \{0\}$ , par la formule :  $p(X, Y, 0) = \infty_{OM}$  (point à l'infini dans la direction de  $OM$ ). Tout point de  $\hat{\Pi}$  peut ainsi être obtenu comme image par perspective  $p$  d'un point  $M$  de  $E - \{0\}$ , deux points  $M$  et  $M'$  de  $E - \{0\}$  ayant même image s'ils sont alignés avec  $O$ , et réciproquement (c'est-à-dire s'il existe un nombre réel  $\lambda \neq 0$  tel que  $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ ). On pourra donc identifier  $\hat{\Pi}$  à l'ensemble des droites de  $E$  passant par  $O$ . En outre, une telle droite n'est rien d'autre qu'un sous-espace vectoriel de dimension 1, lorsqu'on munit l'espace affine  $E$  de la structure d'espace vectoriel d'origine  $O$ .

Plus généralement, soient  $K$  un corps commutatif de caractéristique 0, et  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n+1$  ( $n$  entier  $\geq 1$ ). On appellera *K-espace projectif associé à  $E$* , et l'on notera  $P(E)$ , l'ensemble des droites de  $E$  passant par l'origine  $O$  de  $E$ . L'entier  $n$  (égal à  $\dim E - 1$ ) s'appelle la *dimension* de l'espace projectif. Si  $M$  est un vecteur non nul dans  $E$ , on notera  $[M]$  le point de  $P(E)$  qu'il définit, c'est-à-dire la droite  $OM$ . En particulier, on notera  $P^n(K)$  l'espace projectif  $P(K^{n+1})$ .

Avec ces notations et celles du chapitre 8,  $\hat{K} = P^1(K)$ .

Si  $p : K^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P^n(K)$  désigne l'application qui, au point  $(X_1, \dots, X_{n+1})$  de  $K^{n+1} - \{0\}$ , associe le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par ce point, on notera  $[X_1, \dots, X_{n+1}]$  le point  $p(X_1, \dots, X_{n+1})$ , et on dira que  $(X_1, \dots, X_{n+1})$  est un système de *coordonnées homogènes* de  $[X_1, \dots, X_{n+1}]$ , les autres systèmes de coordonnées homogènes du même point étant les  $(n+1)$ -uples  $(X'_1, \dots, X'_{n+1})$  dans  $K^{n+1} - \{0\}$  pour lesquels il existe un nombre  $\lambda$  non nul dans  $K$  tel que  $X'_1 = \lambda X_1, X'_2 = \lambda X_2, \dots, X'_{n+1} = \lambda X_{n+1}$ .

Si  $E'$  désigne un  $K$ -sous-espace vectoriel de  $E$ , de dimension  $\geq 1$ , les droites de  $E'$  passant par  $O$  sont en particulier des droites de  $E$  passant par  $O$ . On en déduit une inclusion naturelle  $P(E') \longrightarrow P(E)$  rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E' - \{0\} & \longrightarrow & E - \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(E') & \longrightarrow & P(E) \end{array}$$

On dira que  $P(E')$  est un *sous-espace projectif* de  $P(E)$ . En particulier, si la dimension de  $E'$  est 2, c'est-à-dire celle de  $P(E')$  est 1, on dira que  $P(E')$  est une *droite projective* ou *faisceau* dans  $P(E)$ .

## 2 - Transformations projectives. Repères projectifs

Un isomorphisme  $f : E_1 \longrightarrow E_2$  de  $K$ -espaces vectoriels, de même dimension, transforme toute droite de  $E_1$  passant par l'origine de  $E_1$  en une droite de  $E_2$  passant par l'origine de  $E_2$ , et définit donc une application  $\widehat{f} : P(E_1) \longrightarrow P(E_2)$ , nécessairement bijective. On dit alors que  $\widehat{f}$  est une *transformation projective* ( $\widehat{f}^{-1}$  en est alors une autre, induite par  $f^{-1}$ ). Si  $E_1 = E_2$ ,  $\widehat{f}$  est appelé un *automorphisme projectif*. [Bien entendu,

$$\widehat{f \circ g} = \widehat{f} \circ \widehat{g}, \text{ et } \widehat{\text{Id}_E} = \text{Id}_{P(E)}.]$$

Notant en particulier  $GL(n+1, K)$  le groupe des automorphismes du  $K$ -espace vectoriel  $K^{n+1}$  (groupe des matrices carrées  $(n+1) \times (n+1)$ , inversibles, à coefficients dans  $K$ ), l'application  $A \longrightarrow \widehat{A}$  est un homomorphisme surjectif du groupe  $GL(n+1, K)$  sur le groupe, noté  $PG_n(K)$ , des automorphismes de  $P^n(K)$ .

### Lemme 9-1

*Le noyau de l'homomorphisme surjectif  $A \longrightarrow \widehat{A}$ , de  $GL(n+1, K)$  sur  $PG_n(K)$ , est égal au groupe  $\{\lambda \cdot \text{Id}_{K^{n+1}}\}_{\lambda \in K^*}$  des homothéties de  $K^{n+1}$ .*

Notons en effet  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  la base naturelle de  $K^{n+1}$ ; dire que  $\widehat{A}$  est l'identité dans  $P^n(K)$  signifie que, pour tout  $(n+1)$ -uple

$(X_1, \dots, X_{n+1})$  de  $K^{n+1} - \{0\}$ ,  $A\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i e_i\right)$  doit être colinéaire à  $\sum_{i=1}^{n+1} X_i e_i$ . En particulier, il doit exister  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  dans  $K^*$  tels que  $A(e_i) = \lambda_i e_i$ . Soient  $i$  et  $j$  deux indices distincts. Le vecteur  $A(X_i e_i + X_j e_j)$ , qui est égal à  $\lambda_i X_i e_i + \lambda_j X_j e_j$ , doit être colinéaire à  $X_i e_i + X_j e_j$ , et ceci quels que soient  $X_i$  et  $X_j$  : ce n'est possible que pour  $\lambda_i = \lambda_j$ , et par conséquent les nombres  $\lambda_i$  doivent être tous égaux. Réciproquement, il est clair que toute homothétie appartient au noyau de l'homomorphisme  $A \mapsto \hat{A}$ .

### *Première définition d'un repère projectif*

On appellera repère projectif d'un espace projectif  $P(E)$  de dimension  $n$ , toute transformation projective (ou « isomorphisme »)  $\hat{f} : P^n(K) \longrightarrow P(E)$ .

La donnée d'une base  $(m_1, m_2, \dots, m_{n+1})$  de l'espace vectoriel  $E$  équivaut à celle d'un isomorphisme d'espaces vectoriels  $f : K^{n+1} \longrightarrow E$  (caractérisé par  $f(e_i) = m_i$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ ), et définit donc un repère  $\hat{f} : P^n(K) \longmapsto P(E)$ . Mais si  $\lambda$  désigne un élément non nul de  $K$ , la base  $(\lambda m_1, \dots, \lambda m_{n+1})$  de  $E$  définit évidemment le même repère projectif. Réciproquement, si deux bases  $(m'_1, \dots, m'_{n+1})$  et  $(m_1, \dots, m_{n+1})$  définissent le même repère projectif,  $\hat{f}' = \hat{f}$ , c'est que  $\widehat{f'^{-1} \circ f} = \text{Id}_{P^n(K)}$ ; d'après le lemme 9-1,  $f'^{-1} \circ f$  doit être une homothétie de  $K^{n+1}$  : c'est dire qu'il existe  $\lambda$  dans  $K^*$  tel que  $f' = \lambda f$ , ou  $m'_i = \lambda m_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n+1$ . On en déduit une

### *Deuxième définition d'un repère projectif*

La donnée d'un repère projectif au sens précédent équivaut à la donnée d'une classe d'équivalence formée de bases de l'espace vectoriel  $E$ , deux bases  $(m_1, \dots, m_{n+1})$  et  $(m'_1, \dots, m'_{n+1})$  étant équivalentes s'il existe  $\lambda$  dans  $K^*$  tel que, pour tout  $i = 1, \dots, n+1$ ,  $m'_i = \lambda m_i$ .

On appellera encore repère projectif la donnée d'une telle classe d'équivalence.

Avant d'énoncer une troisième définition, démontrons le

### Lemme 9-2

Soient  $(m_1, \dots, m_{n+1})$  et  $(m'_1, \dots, m'_{n+1})$  deux bases de  $E$ . Posons  $m_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} m_i$  et  $m'_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} m'_i$ . Pour que les deux bases ci-dessus soient équivalentes au sens de la définition ci-dessus, il faut et il suffit que, dans  $P(E)$ , on ait :  
pour tout  $i = 1, \dots, n+1, n+2$   $[m'_i] = [m_i]$ .

Il est clair, si les deux bases sont équivalentes, que, pour tout  $i = 1, \dots, n+2$   $[m'_i] = [m_i]$ . Supposons, réciproquement, cette condition vérifiée. En particulier, pour tout  $i = 1, \dots, n+1$  il doit exister un membre  $\lambda_i$  dans  $K^*$  tel que  $m'_i = \lambda_i m_i$ . La condition supplémentaire  $[m'_{n+2}] = [m_{n+2}]$  signifie qu'il existe aussi  $\lambda$  dans  $K^*$  tel que  $m'_{n+2} = \lambda m_{n+2}$ , soit

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i = \lambda \sum_{i=1}^{n+1} m_i.$$

Puisque  $(m_1, \dots, m_{n+1})$  est une base de  $E$ , il faut nécessairement que tous les  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) soient égaux à  $\lambda$  : c'est dire que les deux bases sont équivalentes.

Etant donné  $r$  vecteurs non nuls  $m_1, \dots, m_r$  dans  $E$ , le fait qu'ils soient ou non linéairement indépendants ne dépend que de  $[m_1], \dots, [m_r]$ . On dira que  $r$  points  $[m_1], \dots, [m_r]$  de  $P(E)$  sont *projectivement indépendants* si les vecteurs  $m_1, \dots, m_r$  sont linéairement indépendants. (On dit encore que la famille  $([m_1], \dots, [m_r])$  est projectivement indépendante.)

Observons alors que si  $m_1, \dots, m_{n+1}$  est une base de  $E$ , et si l'on pose  $m_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} m_i$ , les  $n+2$  points  $[m_1], \dots, [m_{n+2}]$  de  $P(E)$  ont la propriété que

*toute sous famille de  $n+1$  points (extraite de ces  $n+2$  points) est projectivement indépendante.*

Réciproquement, soient  $x_n, \dots, x_{n+2}$ ,  $n+2$  points de  $P(E)$  vérifiant la propriété précédente : il existe alors une base  $m_1, \dots, m_{n+1}$  de  $E$  telle que :

pour tout  $i = 1, \dots, n+1$   $[m_i] = x_i$ ,

et  $\left[ \sum_{i=1}^{n+1} m_i \right] = x_{n+2}$ .

[Puisque  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  est une famille projectivement indépendante, il existe en effet une base  $(m'_1, \dots, m'_{n+1})$  de  $E$  telle que, pour  $i = 1, \dots, n+1$   $[m'_i] = x_i$ ; choisissons alors  $m_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m'_i$  dans  $E - \{0\}$ , tel que  $[m_{n+2}] = x_{n+2}$ . Puisque, pour tout  $i = 1, \dots, n+1$  la famille  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}, x_{n+2})$  est projectivement indépendante, tous les nombres  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) doivent être non nuls; posant  $m_i = \lambda_i m'_i$ ,  $(m_1, \dots, m_{n+1})$  constitue encore une base de  $E$ , et  $m_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} m_i$ ].

On en déduit une

### *Troisième définition d'un repère projectif*

*On appellera encore repère projectif de  $P(E)$  toute famille  $(x_1, \dots, x_{n+2})$  de  $n+2$  points dans  $P(E)$  telle que toute sous famille de  $n+1$  points qui en est extraite soit projectivement indépendante.*

Il ressort des considérations précédentes que ces trois définitions sont équivalentes : chaque fois que l'on se donne un repère projectif au sens de l'une d'elles, on a un repère projectif au sens des deux autres, et — désormais on appellera indistinctement repère projectif les données de l'une quelconque des trois définitions.

### **Théorème 9-3**

*Si  $P(E)$  et  $P(E')$  sont deux  $K$ -espaces projectifs de même dimension  $n$ , et si  $([m_1], \dots, [m_{n+2}])$  et  $([m'_1], \dots, [m'_{n+2}])$  désignent des repères projectifs respectivement de l'un et de l'autre,*

*il existe alors une unique transformation projective*

$$\widehat{f} : P(E) \xrightarrow{\cong} P(E')$$

*telle que, pour tout  $i = 1, \dots, n + 2$ ,  $\widehat{f}([m_i]) = [m'_i]$ .*

[On résume parfois ce corollaire en énonçant qu'une transformation projective, entre espaces projectifs de dimension  $n$ , est définie par la donnée de  $n + 2$  couples de points homologues. Cependant, il faut bien prendre garde que les points  $([m_i])$  doivent constituer un repère, et les points  $([m'_i])$  aussi.]

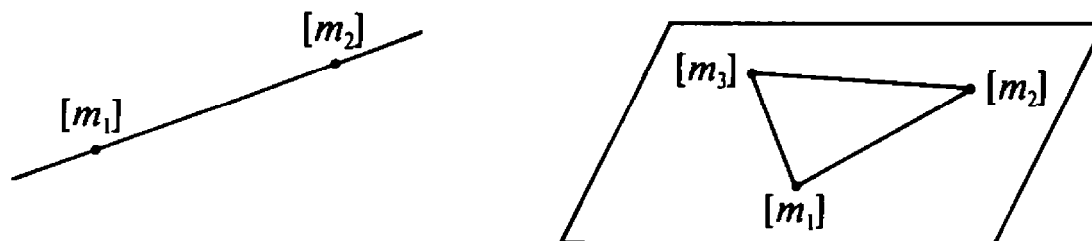
Démonstration du théorème : Si  $\varphi : P^n(K) \xrightarrow{\cong} P(E)$  et  $\varphi' : P^n(K) \xrightarrow{\cong} P(E')$  désignent les isomorphismes associés respectivement aux  $([m_i])$  et aux  $([m'_i])$ , il est clair que  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  vérifie la condition cherchée, et que c'est la seule transformation projective possible.

Pour  $n = 1$ , on retrouve le théorème du chapitre 8, selon lequel une homographie est déterminée par la donnée de trois couples de points homologues.

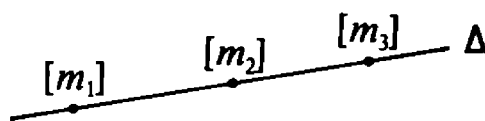
Pour  $n = 2$ , on dispose, pour définir une transformation projective, de quatre couples de points homologues; choisissant en particulier deux points  $A$  et  $B$  distincts sur une droite  $\Delta$  du premier espace, supposant que le second est le complété projectif  $\widehat{\Pi}$ , d'un plan affine  $\Pi'$ , et choisissant  $A'$  et  $B'$  sur la droite de l'infini  $\delta(\Pi')$  de  $\Pi'$ , on voit

*qu'il existe toujours des isomorphismes projectifs  $\widehat{f} : P(E) \longrightarrow \widehat{\Pi}'$  tel que  $\widehat{f}(\Delta)$  soit la droite de l'infini de  $\Pi'$ .*

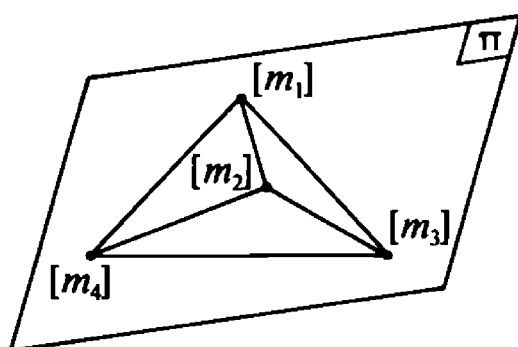
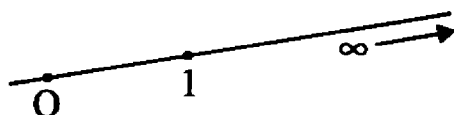
*Exemples de points projectivement indépendants.* — Dire que les points  $[m_1], \dots, [m_r]$  sont projectivement indépendants signifie que le plus petit sous espace projectif les contenant est de dimension  $r - 1$  : une droite projective est ainsi engendrée par deux points distincts de  $P(E)$ , et un plan projectif par trois points non alignés.



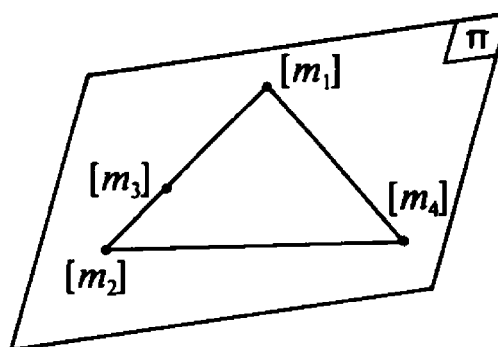
### Exemples de repères projectifs



repère de  $\hat{\Delta}$  une fois  
0, 1 et  $\infty$  ordonnés :  
ce repère est affine



repère de  $\hat{\pi}$



ceci n'est pas un repère de  $\hat{\pi}$

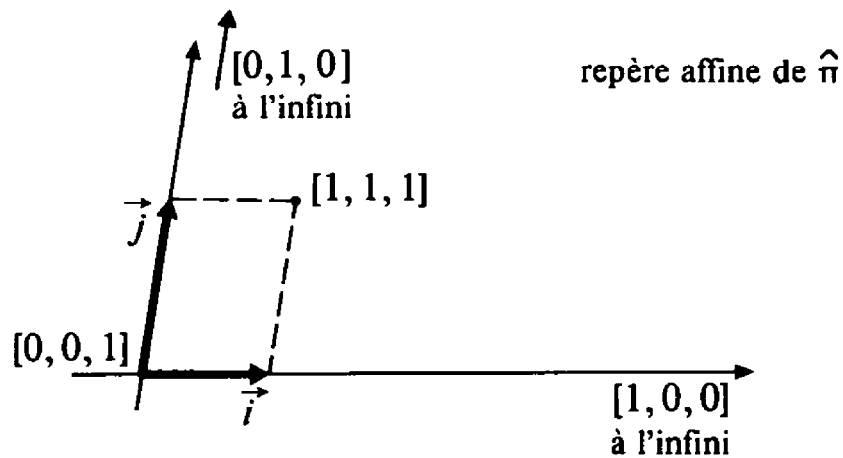
Puisque  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1)$  est un repère de  $K^{n+1}$ ,

$[1, 0, \dots, 0], [0, 1, 0, \dots, 0], \dots, [0, 0, \dots, 0, 1], [1, 1, \dots, 1]$  est un repère projectif de  $P^n(K)$ .

Par exemple, dans l'identification  $P^1(K) = \hat{K}$ ,  $[1, 0] = \infty$ ,  $[0, 1] = 0$  et  $[1, 1] = 1$ , de sorte que le repère ci-dessus s'identifie, pour  $n = 1$ , au repère  $(\infty, 0, 1)$  de  $\hat{K}$ .

Si  $P^2(\mathbb{R})$  est identifié au complété projectif  $\hat{\Pi}$  d'un plan affine réel au moyen du repère affine  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  par l'application  $[X, Y, Z] \rightarrow M$  définie par

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M} = X/Z \vec{i} + Y/Z \vec{j} & \text{si } Z \neq 0, \\ M = \text{point à l'infini dans la direction } X\vec{i} + Y\vec{j} & \text{si } Z = 0. \end{cases}$$



$[1, 0, 0]$  est alors le point à l'infini sur  $\Omega x$ ,  
 $[0, 1, 0]$  est alors le point à l'infini sur  $\Omega y$ ,  
 $[0, 0, 1] = \Omega$ , et  $[1, 1, 1]$  est le point  $I$  tel que  $\overline{\Omega I} = \vec{i} + \vec{j}$ .

### 3 - Structures d'espace projectif de dimension $n$

L'espace vectoriel  $E$  permettant de définir  $P(E)$  n'a pas toujours une signification géométrique. Par exemple, la structure d'espace projectif sur le complété projectif  $\hat{\Pi} = \Pi \sqcup \delta(\Pi)$  d'un plan affine (réel)  $\Pi$ , tel qu'il a été défini au chapitre 5, ne doit pas dépendre de la façon de plonger  $\Pi$  dans un espace affine  $E$  de dimension 3, ni du choix d'une origine  $O$  dans  $E - \Pi$  permettant de munir  $E$  d'une structure d'espace vectoriel. Il est donc utile de savoir définir une structure d'espace projectif directement, sans se servir de  $E$  : c'est ce que permet la définition suivante, qui généralise celle d'une structure de droite projective au paragraphe 4 du chapitre 8.

*On appellera structure de  $K$ -espace projectif de dimension  $n$  sur un ensemble  $\mathcal{X}$  la donnée d'une famille  $\mathcal{F}$  de bijections*

$$f : P^n(K) \xrightarrow{\cong} \mathcal{X}$$

*telles que, si  $f_0$  appartient à cette famille,  $\mathcal{F}$  soit égal à l'ensemble  $\{f_0 \cdot u\}_{u \in PG_n(K)}$  obtenu en faisant parcourir à  $u$  le groupe des automorphismes projectifs de  $P^n(K)$ .*



Les bijections  $f$  qui sont dans  $\mathcal{F}$  s'appellent les *repères projectifs* de l'espace  $\mathcal{X}$ ; et, si  $\mathcal{F}'$  est une structure de  $K$ -espace projectif de même dimension sur un ensemble  $\mathcal{X}'$  (qui peut être égal à  $\mathcal{X}$ , mais pas nécessairement), on appelle *transformation projective* (ou « isomorphisme » projectif) toute bijection  $\varphi : \mathcal{X} \xrightarrow{\cong} \mathcal{X}'$  telle que  $\mathcal{F}'$  soit l'ensemble des bijections  $\{\varphi \circ f\}_{f \in \mathcal{F}}$ . Inversement, si  $\mathcal{F}$  est une structure de  $K$ -espace projectif sur un ensemble  $\mathcal{X}$ , et si  $\varphi$  est une bijection de  $\mathcal{X}$  sur un ensemble  $\mathcal{X}'$ , l'ensemble  $\mathcal{F}' = \{\varphi \circ f\}_{f \in \mathcal{F}}$  est une structure de  $K$ -espace projectif sur  $\mathcal{X}'$ , pour laquelle  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{X}'$ .

On appellera sous-espace projectif de dimension  $r$  ( $r \leq n$ ) d'un  $K$ -espace projectif  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  la donnée d'une partie  $\mathcal{X}'$  de  $\mathcal{X}$  telle que, pour tout  $f$  dans  $\mathcal{F}$ ,  $f^{-1}(\mathcal{X}')$  soit un sous-espace projectif de dimension  $r$  dans  $P^n(K)$ .

[Il suffit d'ailleurs que cette propriété soit vérifiée par une seule bijection  $f$  appartenant à  $\mathcal{F}$  : elle l'est alors automatiquement par toutes!]. Soit  $[X_1, \dots, X_r, X_{r+1}] \longrightarrow [X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, 0, \dots, 0]$  l'inclusion naturelle de  $P^r(K)$  dans  $P^n(K)$ , et  $\mathcal{F}_1$  le sous-ensemble (nécessairement non vide) des bijections  $f$  appartenant à  $\mathcal{F}$  telles que  $f^{-1}(\mathcal{X}') = P^r(K)$ . Si  $f'$  et  $f$  sont deux éléments de  $\mathcal{F}_1$ , l'automorphisme  $f'^{-1} \circ f = \widehat{A}$  de  $P^n(K)$  doit laisser le sous-espace  $P^r(K)$  invariant, et la matrice  $A$  doit donc être de la forme

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & \text{diagonale} \\ \hline 0 & \text{diagonale} \\ \hline \end{array}$$

le bloc  $A_1$  devant appartenir à  $GL(r+1, K)$ .

Si  $f$  et  $f'$  appartiennent à  $\mathcal{F}_1$ , et si  $f_1$  et  $f'_1$  désignent leur restriction à  $P^r(K)$ ,  $f_1'^{-1} \circ f_1 = \widehat{A}_1$  : l'ensemble  $\mathcal{F}' = \{f_1\}_{f \in \mathcal{F}_1}$  est une structure de  $K$ -espace projectif de dimension  $r$  sur  $\mathcal{X}'$ .

*Exemples :*

1) Si  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel, l'ensemble  $\mathcal{F}$  des repères projectifs de  $P(E)$ , au sens de la première définition du paragraphe 2 de ce chapitre, est une structure de  $K$ -espace projectif au sens ci-dessus, de sorte que l'utilisation de la même expression «repère projectif» pour désigner une bijection  $f$  appartenant à  $\mathcal{F}$  ne présente aucun risque d'ambiguïté. De même, si  $P(E')$  est un autre espace projectif, les notions de transformation projective  $\varphi : P(E) \longrightarrow P(E')$  au sens du paragraphe 2, ou au sens de ce paragraphe, coïncident!

2) Si  $E^*$  désigne le  $K$ -espace vectoriel dual d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$ , l'espace projectif  $P(E^*)$  s'identifie naturellement à *l'ensemble des hyperplans projectifs de  $P(E)$* , (c'est-à-dire à l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension  $\dim P(E) - 1$ ). En effet, si  $u : E \longrightarrow K$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$ , son noyau  $\text{Ker } u$  a pour dimension  $\dim E - 1$ , et  $P(\text{Ker } u)$  est un hyperplan projectif de  $P(E)$ . Si  $[u'] = [u]$  dans  $P(E^*)$ , il existe  $\lambda$  non nul dans  $K$  tel que  $u' = \lambda u$  et  $\text{Ker } u' = \text{Ker } u$ . Réciproquement, tout hyperplan projectif est de la forme  $P(\text{Ker } u)$  pour une certaine forme  $u : E \longrightarrow K$ , ( $u \neq 0$ ) s'appelle une «équation» de l'hyperplan et cette forme  $u$  est bien définie à multiplication près par un scalaire : l'application  $[u] \longmapsto P(\text{Ker } u)$  de  $P(E^*)$  dans l'ensemble des hyperplans projectifs de  $P(E)$  est donc bijective, et nous identifierons désormais ces deux ensembles. L'espace  $P(E^*)$  s'appelle l'espace projectif dual de  $P(E)$ , et inversement ( $E^{**} = E$ , car la dimension de  $E$  est finie). On appelle *dualité* tout isomorphisme projectif  $P(E) \longrightarrow P(E^*)$  induit par un isomorphisme d'espace vectoriel de  $E$  sur  $E^*$ , c'est-à-dire par une forme bilinéaire  $\Phi : E \times E \longrightarrow K$  *non dégénérée*. En particulier, la *transformation par polaires réciproques* (tppr) relative à une «hyperquadrique»  $\Gamma$  de  $P(E)$  (quadrique si  $\dim P(E) = 3$ , conique si  $\dim P(E) = 2$ ) correspond au cas où  $\Phi$  est la forme polaire (forme bilinéaire symétrique) associée à la forme quadratique  $F$ , si  $\Gamma$  est définie par l'équation  $F = 0$  ( $F$ , donc  $\Phi$  sont définis à multiplication près par un scalaire non nul, et la dualité associée  $P(E) \longrightarrow P(E^*)$  ne dépend que de  $\Gamma$ ). La tppr relative à une conique, telle que nous

l'avons définie au chapitre 7, est un cas particulier de cette situation, avec  $K = \mathbb{R}$ ,  $P(E) = \widehat{\Pi}$ ,  $P(E^*) = \mathcal{D}(\widehat{\Pi})$ . Nous reviendrons sur ces questions au chapitre 12.

3) Précisons, en la généralisant à une dimension quelconque, et sur un corps  $K$  plus nécessairement égal à  $\mathbb{R}$ , la structure d'espace projectif sur  $\widehat{\Pi}$ . Soit donc  $\Pi$  un  $K$ -espace affine de dimension  $n$ ,  $\delta(\Pi)$  l'ensemble des directions de droites dans  $\Pi$ , et

$$\widehat{\Pi} = \Pi \sqcup \delta(\Pi).$$

Choisissons un repère affine  $(\Omega, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  dans  $\Pi$  : il permet de définir une bijection  $\varphi : [X_1, \dots, X_n, X_{n+1}] \longrightarrow M$  de  $P^n(K)$  sur  $\widehat{\Pi}$  en posant :

$$\overrightarrow{\Omega M} = X_1/X_{n+1} \vec{e}_1 + X_2/X_{n+1} \vec{e}_2 + \dots + X_n/X_{n+1} \vec{e}_n$$

si  $X_{n+1}$  est non nul,

et  $M$  = point à l'infini dans la direction de

$$X_1 \vec{e}_1 + \dots + X_n \vec{e}_n \quad \text{si} \quad X_{n+1} = 0.$$

Cette bijection, qui généralise celle introduite en début de chapitre, nous permet de définir par « transport de structure », la structure d'espace projectif  $\mathcal{F} = \{\varphi \circ u\}_{u \in \text{PG}_n(K)}$  sur  $\widehat{\Pi}$ , et — comme on le souhaitait — sans faire intervenir cette fois-ci l'espace vectoriel  $E$ .

#### **Théorème 9-4**

*La structure d'espace projectif  $\mathcal{F}$  sur  $\widehat{\Pi}$  ne dépend pas du choix du repère affine  $(\Omega, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $\Pi$ .*

Soit  $(\Omega', e'_1, \dots, e'_n)$  un autre repère affine de  $\Pi$  défini par :

$$\overrightarrow{\Omega \Omega'} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}'_i, \quad \vec{e}'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_j^i \vec{e}_i.$$

On a alors :

$$(\varphi'^{-1} \circ \varphi)[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}] = [X'_1, \dots, X'_{n+1}],$$

avec 
$$\begin{cases} X'_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i X_j - a_i X_{n+1} & (i = 1, \dots, n), \\ X'_{n+1} = X_{n+1}. \end{cases}$$

La matrice  $A = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_i^j & \alpha_1 \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right)$  étant inversible

$(\det A = \det((\alpha_i^j)) \neq 0),$

on en déduit que  $\widehat{A}$  est dans  $\text{PG}_n(K)$ , d'où le théorème.

La bijection  $\varphi$  sera appelée *le repère projectif* de  $\widehat{\Pi}$  associé au repère affine  $(\Omega, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $\Pi$ .

4) A l'aide de ce même repère affine, on définit une bijection

$$\varphi^* : P_n(K) \longrightarrow \mathcal{H}(\widehat{\Pi})$$

sur l'ensemble des *hyperplans projectifs* de  $\widehat{\Pi}$  en associant, à  $[u_1, \dots, u_n, u_{n+1}]$ ,

- l'hyperplan affine d'équation  $\sum_{i=1}^n u_i x_i + u_{n+1} = 0$  si les coordonnées  $u_i$  ne sont pas toutes nulles (hyperplan affine complété par ses points à l'infini),
- l'hyperplan de l'infini  $\delta(\Pi)$  si

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0 \quad (u_{n+1} \neq 0).$$

L'ensemble  $\mathcal{F}^* = \{\varphi^* \circ \sigma\}_{\sigma \in \text{PG}_n(K)}$  est une structure d'espace projectif sur  $\mathcal{H}(\widehat{\Pi})$ , et — de façon absolument analogue à la démonstration du théorème 9-4 — on démontre aussi que la structure  $\mathcal{F}^*$  sur  $\mathcal{H}(\widehat{\Pi})$  ne dépend pas du repère affine  $(\Omega, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  utilisé.

5) Les polynômes à  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ , de degré  $\leq p$ , à coefficients dans  $K$ , forment un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, que nous noterons  $K_p[x_1, \dots, x_n]$ , et nous appellerons *hypersurface algébrique de degré  $\leq p$  dans  $K^n$*  tout élément de l'espace projectif  $P(K_p[x_1, \dots, x_n])$  (on dira « surface » au lieu de hypersurface si  $n=3$ , et « courbe » si  $n=2$ ). Cette terminologie

provient de ce que, pour  $K = \mathbb{R}$ , on appelle classiquement hypersurface algébrique l'ensemble des points  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant une équation de la forme

$$u(x_1, \dots, x_n) = 0$$

avec  $u \in \mathbb{R}_p[x_1, \dots, x_n] - \{0\}$ . Bien entendu, si  $\lambda$  est un nombre réel non nul,  $\lambda u = 0$  est une autre équation de la même hypersurface et — réciproquement — toutes les équations possibles sont de cette forme : identifiant alors l'hypersurface à l'ensemble de ses équations (qui est donc une droite — privée de l'origine — dans  $\mathbb{R}_p[x_1, \dots, x_n]$ ), l'ensemble des hypersurfaces s'identifie ainsi à une partie de  $P(\mathbb{R}_p[x_1, \dots, x_n])$ . On conviendra donc d'élargir cette définition, en appelant hypersurface *tout* élément de

$$P(\mathbb{R}_p[x_1, \dots, x_n]).$$

**Exemple :** Notant  $a$  un nombre réel  $> 0$ , on conviendra que  $x^2 + y^2 + a^2 = 0$ , et  $2x^2 + 2y^2 + 2a^2 = 0$ , sont deux équation de *la même* courbe algébrique de degré 2 dans  $\mathbb{R}^2$ , tandis que  $x^2 + y^2 + 2a^2 = 0$  en représente *une autre*, bien que l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant ces équations soient les mêmes dans tous les cas, à savoir l'ensemble vide.

L'intérêt de cette convention tient évidemment à ce que, dans  $\mathbb{C}^2$ , l'ensemble des points vérifiant la première ou la deuxième équation d'une part, la troisième d'autre part, n'est plus du tout le même.

6) Soit  $\Pi$  un  $K$ -espace affine de dimension  $n$ . Soit  $(\Omega, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  un repère affine  $\varphi$  de  $\Pi$ ,  $\omega$  un polynôme appartenant à  $K_p[x_1, \dots, x_n] - \{0\}$ , et  $\Sigma$  l'ensemble des points de  $\Pi$  dont les coordonnées, relativement au repère affine précédent, vérifient :  $u(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

Si  $x_i = a_i + \sum_{j=1}^n a_i^j x_j'$  ( $1 \leq i \leq n$ ) représente un changement de repère affine ( $a_i, a_i^j \in K, \det((a_i^j)) \neq 0$ ),

posons :

$$u'(x'_1, \dots, x'_n) = u \left( a_1 + \sum_{j=1}^n a_1^j x'_j, \dots, a_n + \sum_{j=1}^n a_n^j x'_j \right)$$

$$u'(x_1, \dots, x_n) = 0$$

est alors une équation du même ensemble  $\Sigma$  relativement au nouveau repère  $\varphi'$ , et l'application  $\rho_{\varphi', \varphi} : u \longrightarrow u'$  ainsi définie passe aux quotients, définissant une application

$$\sigma_{\varphi', \varphi} : P(K_p[x_1, \dots, x_n]) \longrightarrow P(K_p[x_1, \dots, x_n]).$$

On peut donc définir  $\Sigma$  dans  $\Pi$ , aussi bien par le couple  $(\varphi, [u])$  que par  $(\varphi', [u'])$ . Notant  $\mathcal{R}(\Pi)$  l'ensemble des repères affines de  $\Pi$ , on est ainsi amené à définir l'ensemble

$$\mathcal{H}_p(\Pi) = \frac{\mathcal{R}(\Pi) \times P(K_p[x_1, \dots, x_n])}{R}$$

où  $R$  désigne la relation d'équivalence :

$$(\varphi, [u]) \sim (\varphi', [u']) \quad \text{si} \quad [u'] = \sigma_{\varphi', \varphi}([u]).$$

L'ensemble  $\Sigma$  précédent s'identifie à un point de  $\mathcal{H}_p(\Pi)$ , et l'on appellera plus généralement hypersurface algébrique de degré  $\leq p$  dans  $\Pi$  (« surface » si  $\dim \Pi = 3$ , « courbe » si  $\dim \Pi = 2$ ) tout élément de  $\mathcal{H}_p(\Pi)$ . Notons  $\overline{(\varphi, [u])}$  la classe d'équivalence dans  $\mathcal{H}_p(\Pi)$  du couple  $(\varphi, [u])$ .

### Proposition 9-5

*La structure d'espace projectif définie sur  $\mathcal{H}_p(\Pi)$ , par transport de structure à partir de  $P(K_p[x_1, \dots, x_n])$ , à l'aide de la bijection  $[u] \longrightarrow \overline{(\varphi, [u])}$  de  $P(K_p[x_1, \dots, x_n])$  sur  $\mathcal{H}_p(\Pi)$  associée à  $\varphi$ , ne dépend pas du choix de  $\varphi$ .*

Il revient au même de démontrer que  $\sigma_{\varphi', \varphi}$  est un automorphisme projectif de  $P(K_p[x_1, \dots, x_n])$ . Nous allons nous contenter ici d'étudier le cas  $n=2$ ,  $p \leq 2$ , le cas général apparaissant comme corollaire de la proposition 9-7 qu'on verra un peu plus loin.

Pour  $p = 1$   $\mathcal{H}_1(\Pi) = \mathcal{H}(\widehat{\Pi})$  est l'espace des hyperplans projectifs de  $\widehat{\Pi}$  déjà évoqué ci-dessus.

Pour  $p = 2$ , écrivons  $u \in K_2[x, y]$  sous la forme :

$$u(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

$$(A, B, C, D, E, F \in K).$$

Notons  $\begin{cases} x = a + \alpha x' + \beta y' \\ y = b + \gamma x' + \delta y' \end{cases}$  ( $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ) un changement de repère affine, de sorte que

$$u'(x', y') = A(a + \alpha x' + \beta y')^2 + 2B(a + \alpha x' + \beta y')(b + \gamma x' + \delta y') \\ + C(b + \gamma x' + \delta y')^2 + 2D(a + \alpha x' + \beta y') \\ + 2E(b + \gamma x' + \delta y') + F$$

est encore égal à

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F',$$

avec :

$$\begin{cases} A' = \alpha^2 A + 2\alpha\gamma B + \gamma^2 C, \\ B' = \alpha\beta A + (\alpha\delta + \beta\gamma)B + \gamma\delta C, \\ C' = \beta^2 A + 2\beta\delta B + \delta^2 C, \\ D' = \alpha a A + (\alpha b + \gamma a)B + \gamma b C + \alpha D + \gamma E, \\ E' = \beta a A + (\beta b + \delta a)B + \delta b C + \beta D + \delta E, \\ F' = a^2 A + 2abB + b^2 C + 2aD + 2bE + F. \end{cases}$$

Les six coefficients  $A', B', C', D', E', F'$  sont donc fonctions linéaires de  $A, B, C, D, E, F$ . En outre la matrice correspondante, qui est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\gamma & \gamma^2 & & & \\ \alpha\beta & \alpha\delta + \beta\gamma & \gamma\delta & & & \\ \beta^2 & 2\beta\delta & \delta^2 & & & \\ \hline & & & \alpha & \gamma & 0 \\ & & & \beta & \delta & 0 \\ & & & \hline & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant  $(\alpha\delta - \beta\gamma)^4$ , qui est un nombre non nul : cette matrice appartient donc à  $GL(6, K)$  et définit un automorphisme dans  $PG_5(K)$ . c. q. f. d.

**Remarque :** Au passage, on a démontré que  $\mathcal{K}_2(\Pi)$  est de dimension 5, lorsque  $\Pi$  est de dimension 2, résultat qui n'est évidemment pas sans rapport avec le lemme 8-15 du chapitre précédent.

7) Si  $\Pi$  désigne un *plan euclidien*, qui est en particulier un plan affine réel, on peut appliquer ce qui précède à la définition de l'espace projectif  $\mathcal{K}_2(\Pi)$  des courbes algébriques de degré  $\leq 2$  dans  $\Pi$  ( $\dim \mathcal{K}_2(\Pi) = 5$ ). On va définir un sous-espace projectif de dimension 3 dans  $\mathcal{K}_2(\Pi)$ , celui des *droites ou cercles*, en utilisant comme repères affines particuliers des repères orthonormés.

### Proposition 9-6

(i) Si  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont deux repères orthonormés de  $\Pi$ , et si  $u(x, y)$  est un polynôme de la forme

$$A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F$$

dans  $\mathbb{R}_2[x, y]$  avec  $A, D, E, F$  réels, le polynôme  $u' = \rho_{\varphi', \varphi}(u)$  est encore de la même forme.

(ii) L'ensemble des éléments  $(\varphi, [u])$  de  $\mathcal{K}_2(\Pi)$ , obtenu en faisant varier  $\varphi$  dans l'ensemble  $\mathcal{O}(\Pi)$  des repères orthonormés, et  $u$  dans le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_2[x, y]$  formé des polynômes

$$u(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

qui vérifient  $A = C$  et  $B = 0$ , constitue un sous-espace projectif  $\mathcal{C}(\Pi)$  de dimension 3 dans l'espace  $\mathcal{K}_2(\Pi)$  de dimension 5 (l'espace  $\mathcal{K}_1(\Pi) = \mathcal{K}(\hat{\Pi})$  étant lui-même un sous-espace de dimension 2 dans  $\mathcal{C}(\Pi)$ , obtenu par restrictions aux polynômes  $u$  vérifiant  $A = B = C = 0$ ).



Les changements de repères orthonormés sont en effet des compositions de :

- translations  $\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- rotations  $\begin{cases} x = \cos \theta x' + \sin \theta y' \\ y = -\sin \theta x' + \cos \theta y' \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R});$
- symétries  $\begin{cases} x = -x' \\ y = y'. \end{cases}$

Soit  $u(x, y) = A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} u(a + x', b + y') &= A(x'^2 + y'^2) + 2(D + Aa)x' \\ &\quad + 2(E + Ab)y' + F + A(a^2 + b^2), \\ u(\cos \theta x' + \sin \theta y', -\sin \theta x' + \cos \theta y') &= A(x'^2 + y'^2) \\ &\quad + 2(D \cos \theta - E \sin \theta)x' + 2(D \sin \theta + E \cos \theta)y' + F, \\ u(-x', y') &= A(x'^2 + y'^2) - 2Dx' + 2Ey' + F. \end{aligned}$$

Dans les trois cas, le nouveau polynôme  $u'(x', y')$  obtenu est de la forme voulue, et le coefficient  $A$  s'annule simultanément pour  $u$  et  $u'$ . La proposition 9-6 en découle immédiatement. On appelle *faisceaux de droites ou cercles* les droites projectives dans  $\mathcal{C}(\Pi)$  : cette définition est presque équivalente à celle du chapitre 3, à cette nuance près qu'on admet désormais, dans le cas d'un faisceau à points limites (ou d'un faisceau de cercles concentriques), des cercles de « rayon imaginaire pur » (cf. chapitre 3, paragraphe 4).

8) Supposons ici l'espace affine  $\Pi$ , de dimension  $n$  sur  $K$ , égal à  $K^n$  (espace affine sous-jacent à l'espace vectoriel : on « oublie » l'origine de  $K^n$ ). L'inclusion naturelle de  $K^n$  dans  $\widehat{K}^n = P^n(K)$  s'écrit alors;

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow [x_1, x_2, \dots, x_n, 1].$$

L'espace affine  $K^n$  s'identifie, par cette inclusion, à l'ensemble des points  $[X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}]$  de  $P^n(K)$  tels que  $X_{n+1} \neq 0$ , la bijection réciproque s'écrivant alors

$$[X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}] \longrightarrow (X_1/X_{n+1}, X_2/X_{n+1}, \dots, X_n/X_{n+1})$$

Si  $u$  désigne un polynôme de degré  $p$  en  $x_1, \dots, x_n$ , à coefficients dans  $K$ , l'équation

$$u(x_1, \dots, x_n) = 0$$

s'écrit encore

$$u(X_1/X_{n+1}, \dots, X_n/X_{n+1}) = 0,$$

ou — ce qui revient au même,

$$(X_{n+1})^p \cdot u(X_1/X_{n+1}, \dots, X_n/X_{n+1}) = 0.$$

Posons :

$$U(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) = (X_{n+1})^p \cdot u(X_1/X_{n+1}, \dots, X_n/X_{n+1}).$$

L'avantage de  $U(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$  par rapport à  $u(X_1/X_{n+1}, \dots, X_n/X_{n+1})$  est de ne plus contenir  $X_{n+1}$  en dénominateur, et d'être par conséquent définie même si  $X_{n+1}$  est nul. L'expression  $U$  est un polynôme *homogène de même degré* ( $\leq p$ ) que  $u$ , mais en  $n+1$  variables, qu'on appelle le polynôme homogène associé à  $u$ .

Les points  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $K^n$ , qui appartiennent à l'hypersurface algébrique  $\Sigma$  d'équation  $u=0$ , sont alors les points  $[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$  de  $P^n(K)$  qui vérifient

$$\begin{cases} U(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}) = 0 \\ X_{n+1} \neq 0. \end{cases}$$

Si l'on supprime la seconde condition, on ajoute à  $\Sigma$  des points à l'infini : l'ensemble des points  $[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$  de  $P^n(K)$  vérifiant

$$U(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) = 0$$

est appelé *complétion projective* de  $\Sigma$  (et sera noté  $\widehat{\Sigma}$ ).

Réciproquement, si  $U$  désigne un polynôme homogène, de degré  $\leq p$ , en  $n+1$  variables  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ , on lui associe un polynôme  $u \in K_p[x_1, \dots, x_n]$  en posant :

$$u(x_1, \dots, x_n) = U(x_1, \dots, x_n, 1)$$

et l'ensemble des points  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $K^n$  vérifiant  $u=0$  est égal à l'ensemble des points  $[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$  de  $P^n(K)$  vérifiant simultanément  $U=0$  et  $X_{n+1}=0$  :

$$\Sigma = \widehat{\Sigma} \cap K^n.$$

*Exemple.* — Pour  $u(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ ,

$$U(X, Y, Z) = AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DXZ + 2EYZ + FZ^2,$$

$\widehat{\Gamma}$  est alors la réunion de  $\Gamma$  et de ses points à l'infini, qui sont solution du système

$$\begin{cases} AX^2 + 2BXY + CY^2 = 0, \\ Z = 0. \end{cases}$$

[Cf. chapitre 7, paragraphe 4.]

Notons  $K_p^0[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$  le sous-espace vectoriel des polynômes homogènes dans  $K_p[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$ . L'application  $u \longrightarrow U$  définie ci-dessus est un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $K_p[x_1, \dots, x_n]$  sur  $K_p^0[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$ , et induit un isomorphisme d'espaces projectifs

$$P(K_p[x_1, \dots, x_n]) \xrightarrow{\cong} P(K_p^0[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}])$$

prolongeant l'application  $\Sigma \longrightarrow \widehat{\Sigma}$ .

On appellera *hypersurface algébrique*, de degré  $\leq p$ , dans  $P^n(K)$  tout élément de  $P(K_p^0[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}])$  (« surface » pour  $n=3$ , « courbe » pour  $n=2$ ).

9) De même, si  $\mathcal{F}$  est une famille de bijections

$$f : P^n(K) \longrightarrow \mathcal{X}$$

définissant une structure de  $K$ -espace projectif de dimension  $n$  sur un ensemble  $\mathcal{X}$ , on appellera hypersurface algébrique (resp. surface pour  $n=3$ , courbe pour  $n=2$ ) tout élément de l'ensemble.

$$\mathcal{H}_p(\mathcal{X}) = \frac{\mathcal{F} \times PK_p^0[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]}{S},$$

$S$  désignant la relation d'équivalence  $(f, [U]) \sim (f', [U'])$  définie par :

$$U'(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) = U\left(\sum_{j=1}^{n+1} A_1^j X_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} A_{n+1}^j X_j\right),$$

$A = ((A_i^j))$  désignant la matrice dans  $GL(n+1, K)$  telle que

$$f^{-1} \circ f' = \widehat{A}.$$

De façon analogue à la proposition 9-5, on a la

### Proposition 9-7

*La structure d'espace projectif sur  $\mathcal{H}_p(\mathcal{X})$  définie par transport de structure à partir de celle de  $P(K_p^0[X_1, \dots, X_{n+1}])$  à l'aide de la bijection  $[U] \longrightarrow (\overline{f}, [\overline{U}])$  associée au repère projectif  $f$ , ne dépend pas du choix de  $f$  dans  $\mathcal{F}$ .*

Cette proposition résulte immédiatement du

### Lemme 9-8

(i) *L'application  $U \longrightarrow U'$  définie par*

$$U'(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) = U\left(\sum_{j=1}^{n+1} A_1^j X_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} A_{n+1}^j X_j\right),$$

à l'aide d'une matrice  $A = ((A_i^j))$  inversible, est un automorphisme de l'espace vectoriel  $K_p^0[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$ .

- (ii) L'automorphisme projectif de  $P(K_p^0[X_1, \dots, X_{n+1}])$   $[U] \mapsto [U']$ , associé à l'application  $U \rightarrow U'$  précédente, ne dépend que de  $\hat{A} \in PG_n(K)$ , et non de  $A$  à proprement parler.

L'automorphisme  $A$  de l'espace vectoriel  $K^{n+1}$  induit en effet un automorphisme  $S^p(A)$  de la puissance symétrique  $p$ -ième  $S^p(K^{n+1})$ , donc — par transposition — un automorphisme  $(S^p(A))^*$  du dual de  $S^p(K^{n+1})$ , qui s'identifie<sup>(1)</sup> naturellement à

$$K_p^0[X_1, \dots, X_{n+1}].$$

L'automorphisme de  $K_p^0[X_1, \dots, X_{n+1}]$ , correspondant à  $(S^p(A))^*$  par cette identification, n'est autre que l'application  $U \mapsto U'$  de l'énoncé d'où (i).

La partie (ii) du lemme résulte alors de l'égalité :

$$(S^p(\lambda A))^* = \lambda^p \cdot (S^p(A))^*, \text{ pour } \lambda \in K^*.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 9-7.

Supposons maintenant  $\mathcal{X} = \hat{\Pi}$  où  $\Pi$  est un espace affine de dimension  $n$  sur  $K$ ; tout repère affine  $\varphi \in \mathcal{R}(\Pi)$  définit de façon naturelle un repère projectif  $f_\varphi$  de  $\hat{\Pi}$ , comme nous l'avons expliqué ci-dessus en 3), de sorte que l'on peut identifier l'ensemble  $\mathcal{R}(\Pi)$  des repères affines de  $\Pi$  à une partie de l'ensemble  $\mathcal{F}$  des repères projectifs de  $\hat{\Pi}$ , par l'inclusion  $\varphi \rightarrow f_\varphi$ . Notant  $j$  l'isomorphisme d'espaces projectifs  $j$  :

$$P(K_p[x_1, \dots, x_n]) \xrightarrow{\cong} P(K_p^0[X_1, \dots, X_{n+1}])$$

défini ci-dessus, on identifie alors les ensembles  $\mathcal{K}_p(\Pi)$  et  $\mathcal{K}_p(\hat{\Pi})$  par l'application  $(\varphi, [u]) \rightarrow (f_\varphi, j([u]))$  (si  $[u'] = \sigma_{\varphi', \varphi}([u])$ ),

<sup>(1)</sup> Cette identification, classique, entre polynômes homogènes de degré  $p$  et formes multilinéaires symétriques à  $p$  arguments, sera reprécisée au chapitre 12 pour  $p=2$  (correspondance entre les formes quadratiques et leur forme polaire).

$U'$  est l'image de  $U$  par l'application associée à la matrice

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_i^j & \alpha_1 \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right) \text{ définie par le changement de repère affine}$$

$\varphi^{-1} \circ \varphi'$  : on en déduit que si  $(\varphi, [u])$  et  $(\varphi', [u'])$  sont  $R$  équivalents,  $(f_\varphi, [U])$  et  $(f_{\varphi'}, [U'])$  sont  $S$  équivalents). La proposition 9-5, que nous n'avons démontré que pour  $n=2$   $p \geq 2$ , n'est donc qu'un cas particulier de la proposition 9-7, et se trouve maintenant démontrée en toute généralité.

La bijection naturelle  $\mathcal{K}_p(\Pi) \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}_p(\widehat{\Pi})$  que nous venons de définir, et qui permet d'identifier désormais ces deux espaces projectifs, ne fait que généraliser la complétion des coniques  $\Gamma \longrightarrow \widehat{\Gamma}$  décrite au chapitre 7, paragraphe 4.

#### 4 - Exemple de calcul en géométrie projective

##### 1) Génération homographique ponctuelle des coniques.

Soit  $\mathcal{X}$  un  $K$ -plan projectif ( $\dim \mathcal{X} = 2$ ). Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $\mathcal{X}$ , et

$$h : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(B)$$

une homographie du faisceau des droites projectives de  $\mathcal{X}$  passant par  $A$  sur celui des droites passant par  $B$ . Choisissons deux points supplémentaires  $C$  et  $D$  dans  $\mathcal{X}$  tels que  $A, B, C, D$  constituent un repère projectif de  $\mathcal{X}$ , dont on notera  $X, Y, Z$  les coordonnées homogènes associées :

$(1, 0, 0)$  est alors un système de coordonnées homogènes de  $A$ ,

$(0, 1, 0)$  est alors un système de coordonnées homogènes de  $B$ ,

$(0, 0, 1)$  est alors un système de coordonnées homogènes de  $C$ ,

et

$X=0$  est une équation de la droite  $BC$ ,

$Y=0$  est une équation de la droite  $AC$ ,

$Z=0$  est une équation de la droite  $AB$ .

Relativement à ce repère, les droites du faisceau  $\mathcal{D}(A)$  (resp.  $\mathcal{D}(B)$ ) ont une équation de la forme

$$\lambda Y + \lambda' Z = 0, \quad \text{avec } [\lambda, \lambda'] \text{ dans } P^1(K)$$

$$(\text{resp. } \mu X + \mu' Z = 0, \quad \text{avec } [\mu, \mu'] \text{ dans } P^1(K)).$$

Autrement dit, on a choisi  $(AC, AB)$  comme repère projectif de la droite projective  $\mathcal{D}(A)$ , et  $(BC, BA)$  comme repère de  $\mathcal{D}(B)$ . Relativement à ces repères  $h : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(B)$  se représente par une matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

$$\begin{cases} \mu = \alpha\lambda + \beta\lambda' \\ \mu' = \gamma\lambda + \delta\lambda' \end{cases}$$

L'image par  $h$  de la droite  $\Delta$  d'équation

$$\lambda Y + \lambda' Z = 0$$

est donc la droite  $h(\Delta)$  d'équation

$$(\alpha\lambda + \beta\lambda')X + (\gamma\lambda + \delta\lambda')Z = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda(\alpha X + \gamma Z) + \lambda'(\beta X + \delta Z) = 0.$$

Le point d'intersection  $M$  des droites  $\Delta$  et  $h(\Delta)$ , dont les coordonnées sont solution du système

$$\begin{cases} \lambda Y + \lambda' Z = 0 \\ \lambda(\alpha X + \gamma Z) + \lambda'(\beta X + \delta Z) = 0, \end{cases}$$

avec  $\lambda$  et  $\lambda'$  non simultanément nuls, vérifie donc l'équation

$$\begin{vmatrix} Y & Z \\ \alpha X + \gamma Z & \beta X + \delta Z \end{vmatrix} = 0,$$

et réciproquement, soit :

$$Y(\beta X + \delta Z) - Z(\alpha X + \gamma Z) = 0.$$

C'est l'équation d'une « conique »  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{X}$  (on appelle ainsi tout élément de l'espace  $\mathcal{K}_2(\mathcal{X})$  des courbes algébriques de degré 2 dans  $\mathcal{X}$ ; le lien avec les coniques habituelles sera vu au chapitre 12). Les points  $A(Y=Z=0)$  et  $B(X=Z=0)$  vérifient l'équation, et appartiennent donc à  $\mathcal{C}$ . La forme quadratique

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) &= Y(\beta X + \delta Z) - Z(\alpha X + \gamma Z) \\ &= \beta XY + \delta YZ - \alpha XZ - \gamma Z^2 \end{aligned}$$

admet pour discriminant

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ \beta & 0 & \delta \\ -\alpha & \delta & -2\gamma \end{vmatrix} = -2\beta(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Puisque  $\alpha\delta - \beta\gamma$  est non nul, ce discriminant s'annule seulement lorsque  $\beta=0$ , c'est-à-dire lorsque l'image par  $h$  de la droite  $AB$  ( $Z=0$ ) considérée comme appartenant à  $\mathcal{D}(A)$ , est elle-même considérée comme appartenant à  $\mathcal{D}(B)$ . Pour  $\beta=0$ ,

$$F(X, Y, Z) = -Z(\alpha X - \delta Y + \gamma Z)$$

et la « conique »  $\mathcal{C}$  « dégénère » en la droite  $AB$  (d'équation  $Z=0$ ) et la droite

$$\alpha X - \delta Y + \gamma Z = 0.$$

Comparer ces résultats avec le théorème 8-14 (particulier au cas où  $K=\mathbb{R}$ , et où  $\mathcal{X}$  est le complété projectif  $\hat{\Pi}$  d'un plan affine réel).

2) *Les projections coniques et cylindriques de plan sur plan sont des transformations projectives (et même affines dans le cas cylindrique).*

Au chapitre 5, paragraphe 1, nous avons vu que si  $(Oxyz)$  désigne un repère affine d'un espace affine réel  $E$  de dimension 3, par rapport auquel

— le plan affine  $\Pi'$  admet l'équation

$$z = 0$$



— l'axe  $Oz$  passe par le point de vue  $S$  ( $\overline{OS} = z_0 \neq 0$ ) dans le cas d'une projection conique, et est parallèle à la direction  $\delta$  de projection pour une perspective cylindrique,

$(Oxy)$  est alors un repère affine de  $\Pi'$  et la projection conique (resp. cylindrique) associe, au point de coordonnées  $(x, y, z)$ , le point de coordonnées

$$\left( \frac{xz_0}{z_0 - z}, \frac{yz_0}{z_0 - z} \right) \quad (\text{resp. } x, y).$$

Dans le cas d'une perspective conique, restreignons-la à un plan  $\Pi$ , ne passant pas par  $S$ . Si  $\Pi$  n'est pas parallèle à  $\Pi'$ , on peut toujours supposer le repère affine  $(Oxyz)$  choisi de façon que  $\Pi'$  admette l'équation  $y = c$  ( $c \neq 0$ ), auquel cas  $x$  et  $z$  constituent un système de coordonnées affines. Si  $(X, Z, T)$  (resp.  $X', Y', T'$ ) sont les coordonnées homogènes dans  $\hat{\Pi}$  (resp.  $\Pi'$ ) associées respectivement aux coordonnées affines  $(x, z)$  et  $(x, y)$ , on obtient pour  $T$  et  $T'$  non nuls :

$$\frac{X'}{T'} = \frac{\frac{X}{T}}{z_0 - \frac{Z}{T}} = \frac{X}{-Z + z_0 T} \quad , \quad \frac{Y'}{T'} = \frac{cz_0}{z_0 - \frac{Z}{T}} = \frac{cz_0 T}{-Z + z_0 T}$$

d'où, à multiplication près par un scalaire non nul,

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = cz_0 T \\ T' = -Z + z_0 T \end{cases}$$

lesquelles formules, qui ont un sens même lorsque  $T$  ou  $T'$  s'annulent, représentent encore la perspective dans ces cas. La

matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cz_0 \\ 0 & -1 & z_0 \end{pmatrix}$ , de déterminant  $cz_0$  non nul, représente bien

une transformation projective de  $\hat{\Pi}$  sur  $\hat{\Pi}'$ . Les cas où  $\Pi$  est parallèle à  $\Pi'$ , et l'étude analogue des projections cylindriques, sont laissés au lecteur.

### 5. - Exercices sur le chapitre 9

1/ Soit  $G$  le centre de gravité d'un triangle  $ABC$  dans un plan affine  $\Pi$ . Montrer que les coordonnées barycentriques d'un point  $M$  de  $\Pi$  relatives à  $ABC$  sont les coordonnées homogènes de  $M$  relatives au repère projectif  $A, B, C, G$  de  $\hat{\Pi}$ .

2/ Soit  $A \in GL(n+1, K)$  et  $\hat{A} \in PG_n(K)$  l'automorphisme projectif de  $P^n(K)$  correspondant.

a) Montrer que les vecteurs propres  $\xi$  de  $A$  dans  $K^{n+1} - \{0\}$  correspondent par passage aux quotients sur  $P^n(K)$  aux points invariants  $\bar{\xi}$  de  $\hat{A}$ .

b) Montrer que la droite projective  $\Delta$  joignant deux points invariants  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$  distincts est globalement invariante. Quelles conditions doivent vérifier les valeurs propres correspondantes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  pour que tous les points  $\Delta$  soient invariants?

c) Généraliser aux sous-espaces projectifs engendrés par un nombre fini de points invariants.

3/ Soit  $h$  une homologie  $\hat{\Pi} \rightarrow \hat{\Pi}$ , de centre  $\omega$ , d'axe  $\delta$ , de rapport  $k$  (cf. exercice 10 du chapitre 5).

Montrer que  $h$  est une transformation projective de  $\hat{\Pi}$ , représentée plus précisément par la matrice  $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  dans

$GL(3, \mathbb{R})$  relativement à tout repère projectif  $([m_1], [m_2], [m_3], [m_4])$  de  $\hat{\Pi}$  avec  $[m_1]$  et  $[m_2]$  sur  $\delta$  et  $[m_3] = \omega$ .

[On appellera plus généralement *homologie* dans un  $K$ -plan projectif  $\mathcal{X}$  tout automorphisme projectif de  $\mathcal{X}$  qui peut se représenter par une matrice diagonale ayant 2 valeurs propres égales, relativement à un repère projectif convenable de  $\mathcal{X}$ .]

4/ On suppose qu'un automorphisme projectif d'un  $K$ -plan projectif  $\mathcal{X}$  peut se représenter par une matrice de la forme

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , relativement à un repère projectif de  $\mathcal{X}$  convenable-

ment choisi. Montrer qu'un tel automorphisme est la composée de deux homologies de même axe et de rapports inverses ( $k$  et  $1/k$ ). Préciser le lien avec les translations.

- 5/ Calculer la dimension de l'espace  $\mathcal{H}_p(\mathcal{X})$  des courbes algébriques de degré  $\leq p$  dans un plan projectif  $\mathcal{X}$ .
- 6/ Soit  $(A, B, C, D)$  un repère projectif d'un plan projectif  $\mathcal{X}$ . On note  $X, Y, Z$  les coordonnées homogènes associées. Soit

$$uX + vY + wZ = 0$$

l'équation d'une droite  $\Delta$  de  $\mathcal{X}$ , relativement à ce repère. Préciser par rapport à quel repère projectif  $(a, b, c, d)$  de l'espace projectif  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$  des droites de  $\mathcal{X}$ ,  $(u, v, w)$  constitue un système de coordonnées homogènes de  $\Delta$ . Quelle relation y a-t-il en particulier avec l'exercice 3 du chapitre 3? En particulier, si  $(A, B, C, D)$  est le repère projectif associé à un repère affine  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'un plan affine, quelles sont les droites  $a, b, c, d$ ?

- 7/ Soit  $\Gamma$  une conique propre dans  $\mathcal{X}$ , d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (\text{resp. } y^2 - 2px = 0)$$

relativement à un repère affine. Montrer que l'ensemble  $T(\Gamma)$  des tangentes à  $\Gamma$  est une conique dans  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ , dont on précisera l'équation relativement au repère  $(a, b, c, d)$  associé à  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  dans l'exercice précédent [«équation tangentielle» de  $\Gamma$ , dans le repère considéré].

## CHAPITRE X

# *Structures additionnelles sur un espace projectif*

### 1 - Structures affines sur un espace projectif

On a déjà vu, dès le chapitre 5 pour un plan affine réel, au chapitre 9 dans le cas général, comment compléter un espace affine  $\Pi$  pour en faire un espace projectif

$$\hat{\Pi} = \Pi \sqcup \delta(\Pi)$$

en lui ajoutant un hyperplan de l'infini  $\delta(\Pi)$  (plan si  $\dim \Pi = 3$ , droite si  $\dim \Pi = 2$ , point si  $\dim \Pi = 1$ ), formé des directions de droites dans  $\Pi$  (ou classes d'équivalence pour le parallélisme des droites de  $\Pi$ ).

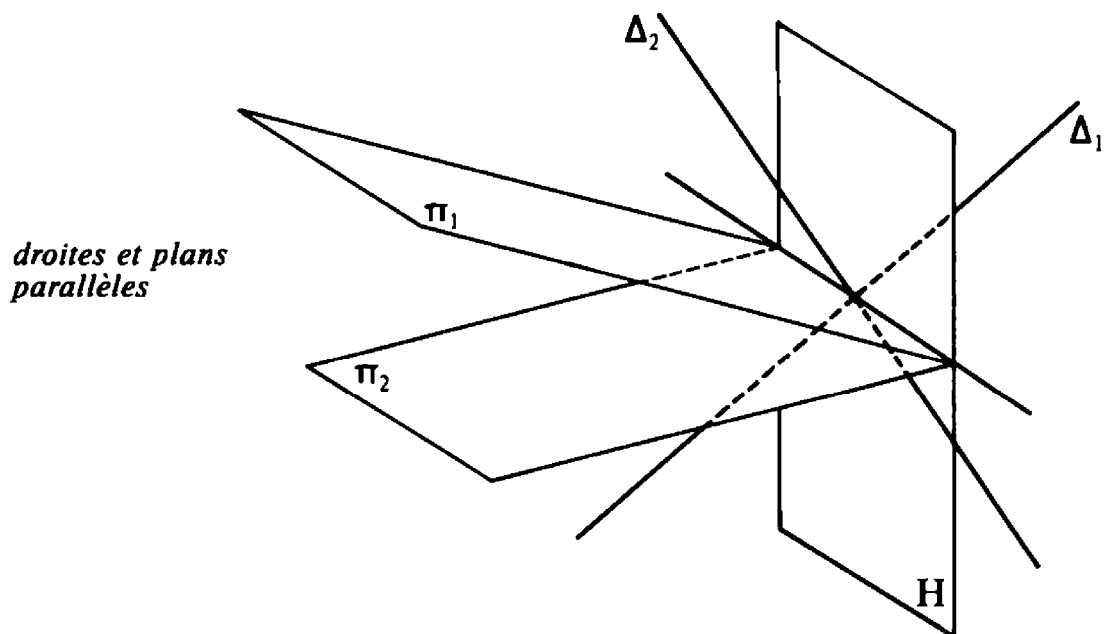
Les notions que l'on peut définir et les théorèmes que l'on peut démontrer sur  $\hat{\Pi}$  relèvent alors de la géométrie affine ou de la géométrie projective, selon que  $\delta(\Pi)$  joue ou non, dans ces énoncés, un rôle particulier. [Il faut bien prendre garde qu'il ne suffit pas, pour faire de la géométrie projective, d'introduire des points à l'infini. On dira, par exemple, que deux droites projectives de  $\hat{\Pi}$  sont « parallèles » si elles ne sont pas incluses dans  $\delta(\Pi)$ , et si elles se coupent sur  $\delta(\Pi)$  : quand bien même ces droites de  $\Pi$  ont dû être complétées par leur point à l'infini, il s'agit là de géométrie affine, puisque  $\delta(\Pi)$  intervient de façon essentielle dans cette définition.]

Réciproquement, on appellera *structure affine* sur un espace projectif  $\mathcal{X}$ , de dimension  $n$ , la donnée d'un hyperplan projectif  $H$  de  $\mathcal{X}$  (c'est-à-dire d'un sous-espace projectif de dimension  $n - 1$ ; plan pour  $n = 3$ , droite pour  $n = 2$ , point pour  $n = 1$ ).

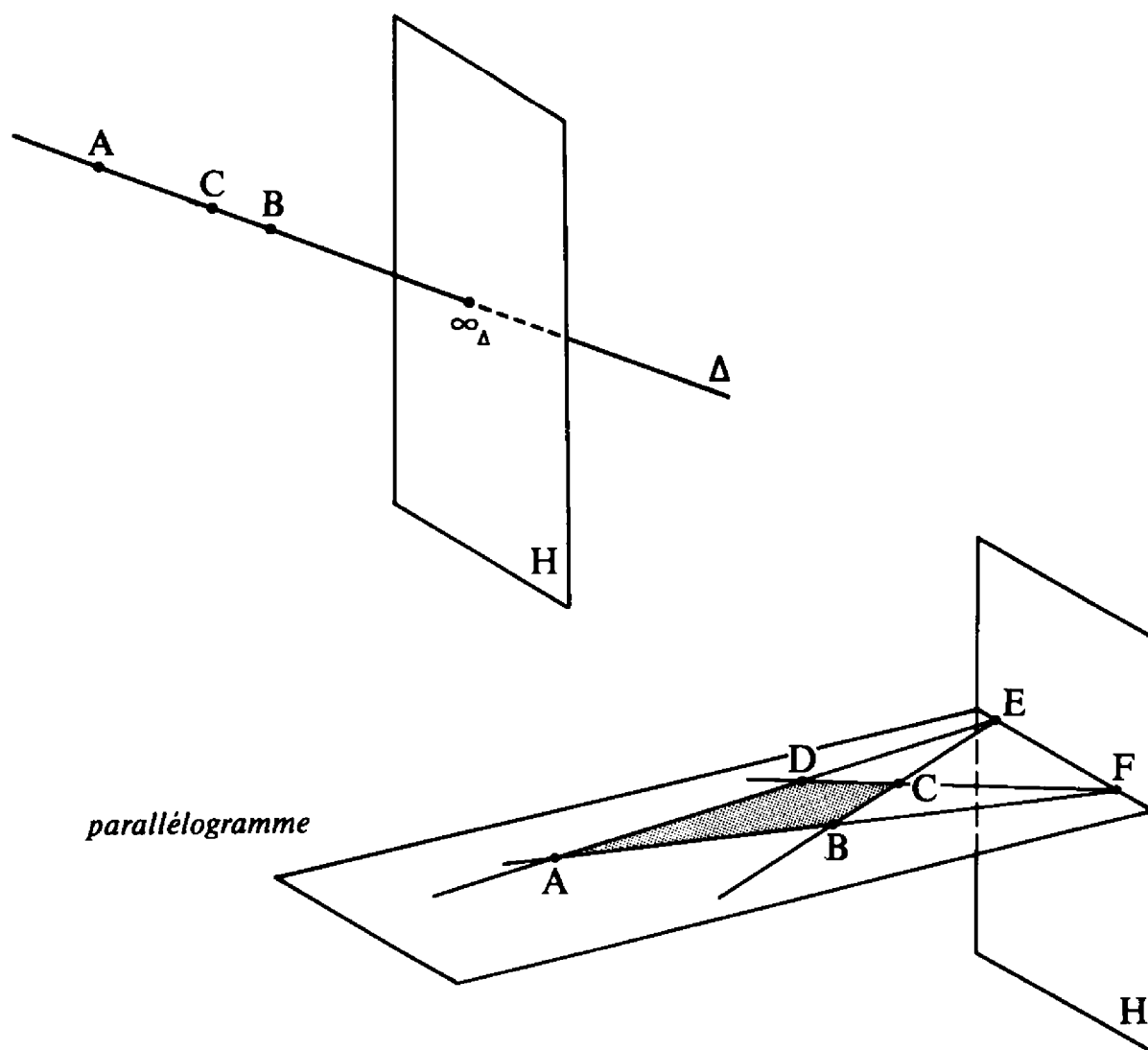
- Les éléments de  $H$  seront appelés les *points à l'infini* et  $H$  l'*hyperplan de l'infini*, les éléments de  $\mathcal{X} - H$  seront dits « à distance finie ».
- Deux sous-espaces projectifs distincts de même dimension  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$ , non inclus dans  $H$ , seront dits *parallèles* si

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 \subset H.$$

- On appellera *rapport* de trois points  $A, B, C$  à distance finie, et alignés sur une droite projective  $\Delta$ , et l'on notera  $(A, B, C)$  le birapport  $(A, B, C, \infty_\Delta)$  où  $\infty_\Delta = \Delta \cap H$  désigne le point à l'infini de  $\Delta$ .
- En particulier, si  $(A, B, C) = -1$ , on dira que  $C$  est le *milieu* de  $[AB]$ .
- On appellera *parallélogramme* dans un plan projectif  $\Pi$  non inclus dans  $H$  la donnée de quatre droites projectives dans  $\Pi$ , non incluses dans  $H$ , telles que trois d'entre elles ne soient pas concourantes, et ayant deux « sommets » dans  $H$  (donc une « diagonale »).

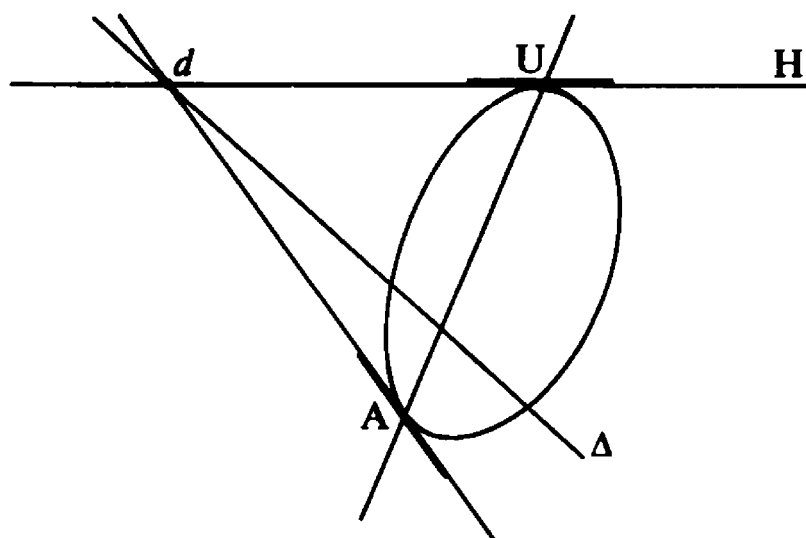


- Soit  $\Gamma$  une conique dans le complété projectif  $\widehat{\Pi}$  d'un plan affine réel  $\Pi$ , et  $H$  une structure affine sur  $\widehat{\Pi}$ , c'est-à-dire une droite projective de  $\widehat{\Pi}$  (non nécessairement égale à  $\delta(\Pi)$ ), on dira que *relativement à cette structure affine  $H$ ,*



$\Gamma$  est une *ellipse* si  $\Gamma \cap H$  est vide, une *parabole* si  $H$  est tangente à  $\Gamma$ , une *hyperbole* si  $\Gamma \cap H$  a deux points.

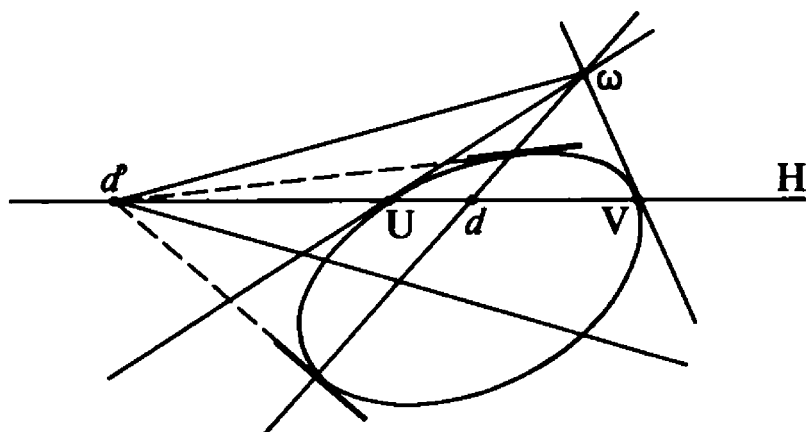
- Les éléments de  $\Gamma \cap H$  s'appelleront les *directions asymptotiques* de  $\Gamma$ , et — dans le cas d'une hyperbole — les tangentes en chacun des deux points de  $\Gamma \cap H$  s'appelleront les *asymptotes* de  $\Gamma$ .
- Pour une ellipse ou une hyperbole, on appellera *centre* le pôle de  $H$ , et *diamètre* toute droite projective passant par le centre. On appellera *directions conjuguées* deux points de  $H$  conjugués par rapport à  $\Gamma$  et *diamètres conjugués* des diamètres passant par deux points conjugués (ou — ce qui revient au même — les polaires de deux points conjugués).



*parabole*

$U$  : direction asymptotique

$\Delta$  : diamètre



*hyperbole*

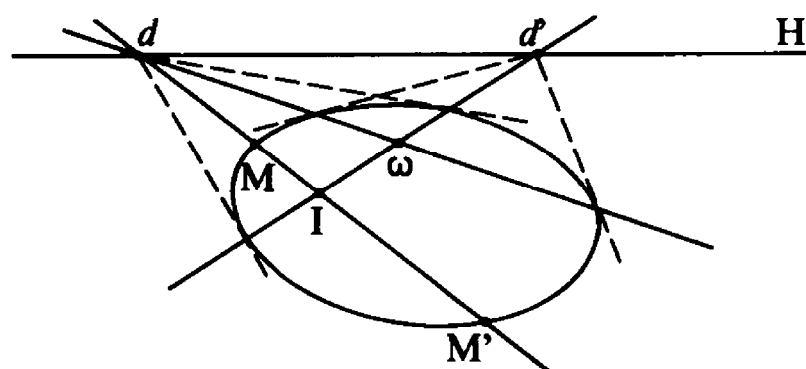
$\omega$  : centre

$U, V$  : directions asymptotiques

$\omega U, \omega V$  : asymptotes

$d, d'$  : directions conjuguées

$\omega d, \omega d'$  : diamètres conjugués



*ellipse*

$\omega$  : centre

$d, d'$  : directions conjuguées

$\omega d, \omega d'$  : diamètres conjugués

$I$  : milieu de  $[MM']$

**Remarque.** — C'est pour éviter de donner dès maintenant des définitions générales (par exemple celle concernant la conjugaison) que nous nous sommes — provisoirement — limités au cas d'un plan projectif  $\mathcal{X}$  de la forme  $\hat{\Pi}$ , mais il est clair que c'est  $H$  et non  $\delta(\Pi)$  qui importe. Nous reviendrons sur ces questions au chapitre 12.

- Etant donnés deux espaces affines  $(\mathcal{X}, H)$  et  $(\mathcal{X}', H')$  de même dimension, on appellera *transformation affine* de l'un dans l'autre toute transformation projective  $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$  telle que

$$\varphi(H) = H'.$$

[Remarque : Une telle transformation affine est entièrement déterminée par sa restriction  $\mathcal{X} - H \longmapsto \mathcal{X}' - H'$  à  $\mathcal{X} - H$ , car si  $\delta$  est un point de  $H$ , il existe toujours une droite projective  $\Delta$  admettant  $\delta$  comme point à l'infini; l'image de  $\delta$  par  $\varphi$  sera alors nécessairement le point à l'infini de la droite projective  $\varphi(\Delta)$ , qui est entièrement déterminée par les images de deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{X} - H$ .]

*Principe d'extension projective des théorèmes de géométrie affine*

Si  $\Pi$  désigne un  $K$ -espace affine de dimension  $n$ , et  $H$  une structure affine sur un  $K$ -espace projectif  $\mathcal{X}$  de même dimension  $n$ , il existe toujours des transformations projectives  $\varphi : \widehat{\Pi} \longrightarrow \mathcal{X}$  telles que  $\varphi(\delta(\Pi)) = H$ , c'est-à-dire des transformations affines de  $(\widehat{\Pi}, \delta(\Pi))$  sur  $(\mathcal{X}, H)$  : choisissons en effet  $n+1$  points  $m_i$  projectivement indépendants dans  $\delta(\Pi)$ , c'est-à-dire un repère projectif de  $\delta(\Pi)$ , et de même un repère projectif  $m'_i$  ( $1 \leq i \leq n+1$ ) de  $H$ . Complétons le premier repère en un repère projectif  $m_i$  ( $1 \leq i \leq n+2$ ) de  $\widehat{\Pi}$  en ajoutant un  $n+2$ -ième point  $m_{n+2}$  dans  $\Pi = \widehat{\Pi} - \delta(\Pi)$ , et de même, choisissons  $m'_{n+2}$  dans  $\mathcal{X} - H$  : il existe, d'après le chapitre 9, une transformation projective transformant le repère projectif donné de  $\widehat{\Pi}$  sur celui de  $\mathcal{X}$ . On peut alors « transporter » par une telle transformation affine *n'importe quel* théorème de géométrie affine sur  $\Pi$ . [On peut aussi jouer sur la marge dont on dispose, tant en ce qui concerne  $H$ , que le choix des points  $m_i$  et  $m'_i$ , pour reparticulariser le résultat général obtenu.] C'est ainsi qu'au chapitre 5, on a déjà implicitement utilisé cette technique en partant du théorème de Thalès (on en a déduit le théorème de Desargues), et en partant du parallélogramme (on en a déduit les propriétés de divisions harmoniques du quadrilatère complet).

On aura l'occasion, au chapitre 11, de traiter en détail le théorème de géométrie affine concernant l'existence du centre de gravité d'un triangle.



**Espace affine  $\mathcal{X}-H$ .** — On peut en fait munir  $\mathcal{X}-H$  d'une structure d'espace affine isomorphe à celle de  $K^n$ , comme nous allons le voir maintenant.

Rappelons que  $P^n(K)$  s'identifie naturellement à  $\widehat{K}^n = \widehat{K}^n \amalg P^{n-1}(K)$ , l'inclusion de  $K^n$  dans  $P^n(K)$  s'écrivant

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow [x_1, \dots, x_n, 1],$$

et l'identification de  $P^{n-1}(K)$  aux points à l'infini de  $\widehat{K}^n$  s'écrivant

$$[X_1, \dots, X_{n-1}, X_n] \longrightarrow [X_1, \dots, X_{n-1}, X_n, 0].$$

On appellera *repère affine* de  $(\mathcal{X}, H)$  tout repère projectif  $f : P^n(K) \longrightarrow \mathcal{X}$  tel que  $f^{-1}(H)$  soit égal à  $P^{n-1}(K)$ , c'est-à-dire toute transformation affine de  $(P^n(K), P^{n-1}(K))$  sur  $(\mathcal{X}, H)$ ; et l'on notera  $\mathcal{F}_H(\mathcal{X})$  l'ensemble des repères affines de  $\mathcal{X}$ . Si  $f$  et  $f'$  sont deux tels repères affines,  $f'^{-1} \circ f$  est de la forme  $\widehat{A}$ , avec  $A$  de la

forme 

$A_1$	
$0 \dots 0$	$a$

 puisqu'elle doit préserver  $K^n$  considéré comme

sous-espace de  $K^{n+1}$  par l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n, 0).$$

Puisque  $\det A = \det A_1 \times a$  doit être non nul,  $A_1$  doit appartenir à  $GL(n, K)$ , et  $a$  doit être non nul : quitte à diviser par  $a$  la matrice  $A$ , qui n'est *a priori* déterminée qu'à multiplication près par un scalaire non nul, on peut la « normaliser » en imposant au coefficient  $a$  d'être égal à 1, ce que nous supposons désormais.

### **Théorème 10-1**

(i) *L'ensemble des matrices  $A$  de  $GL(n+1, K)$  qui sont de la forme*

$$\left( \begin{array}{c|c} \alpha_j^i & a_1 \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right)$$

*constituent un sous-groupe  $A_n(K)$  de  $PG_n(K)$ .*

- (ii)  $A_n(K)$  est canoniquement isomorphe au groupe  $\text{Aff}_n(K)$  des automorphismes affines de  $K^n$ , le sous-groupe des matrices

$$\left( \begin{array}{c|c} \alpha_{ij} & 0 \\ \hline 0 \dots \dots \dots 0 & 1 \end{array} \right)$$

s'identifiant au groupe  $\text{GL}(n, K)$  des transformations linéaires de  $K^n$ , et le sous-groupe des matrices

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ \hline 0 \dots \dots \dots 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right)$$

s'identifiant au groupe des translations de  $K^n$ .

- (iii) En opérant sur  $P^n(K)$ ,  $A_n(K)$  conserve les sous-ensembles  $K^n$  et  $P^{n-1}(K)$  de  $P^n(K)$ , et les deux actions suivantes de  $A_n(K)$  sur  $K^n$  coïncident :

— celle obtenue par restriction à  $K^n$  de son action sur  $P^n(K)$ ,  
— celle correspondant à l'action naturelle de  $\text{Aff}_n(K)$  par l'identification  $A_n(K) \cong \text{Aff}_n(K)$ .

- (iv) Il existe une structure naturelle de  $K$ -espace affine de dimension  $n$  sur  $\mathcal{X} - H$ , pour laquelle les repères affines

$$f : (P^n(K), P^{n-1}(K)) \longrightarrow (\mathcal{X}, H)$$

ont une restriction à  $K^n = P^n(K) - P^{n-1}(K)$  qui est un isomorphisme d'espace affine

$$K^n \longrightarrow \mathcal{X} - H.$$

Ecrivons en abrégé la matrice

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_{ij} & a_i \\ \hline 0 \dots \dots \dots 0 & 1 \end{array} \right)$$

sous la forme 

$A_1$	$V$
$0$	$1$

 ou  $(A_1, V)$ , avec

$$A_1 = (\alpha_i^j) \in GL(n, K) \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

Calculons le produit de deux matrices de cette forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A'_1 & V' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A'_1 & V + A_1 V' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc une matrice de la même forme, et l'ensemble  $A_n(K)$  de ces matrices s'identifie par conséquent au produit semi-direct de groupes

$$GL(n, K) \times K^n$$

avec la loi de groupe

$$(A_1, V)(A'_1, V') = (A_1 A'_1, V + A_1 V')$$

c'est précisément la loi de composition du groupe  $\text{Aff}_n(K)$  des transformations affines de  $K^n$ , produit semi-direct du groupe  $GL(n, K)$  des automorphismes linéaires de  $K^n$  et du groupe (isomorphe à  $K^n$ ) des translations de  $K^n$ , d'où la partie (ii) du théorème.

*A priori*, on a ainsi identifié  $A_n(K)$  à un sous-groupe de  $GL(n+1, K)$ . Mais toutes les matrices de ce sous-groupe étant « normalisées » par le dernier coefficient égal à 1, la restriction à  $A_n(K)$  de la projection  $A \longrightarrow \widehat{A}$  de  $GL(n+1, K)$  sur  $PG_n(K)$  est injective, ce qui permet d'identifier  $A_n(K)$  à un sous-groupe de  $PG_n(K)$ , d'où la partie (i) du théorème.

Puisque l'inclusion de  $K^n$  dans  $P^n(K)$  s'écrit

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow [x_1, \dots, x_n, 1]$$

et que

$$\begin{pmatrix} A_1 & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(m) + V \\ 1 \end{pmatrix},$$

$A_n(K)$  laisse invariants globalement les sous-ensembles  $K^n$  et  $P^{n-1}(K)$  en opérant sur  $P^n(K)$  en tant que sous-groupe de  $PG_n(K)$ . Puisque l'action naturelle sur  $K^n$  du groupe  $\text{Aff}_n(K) = GL(n, K) \times K^n$  de ses transformations affines s'écrit

$$((A_1, V), m) \longrightarrow A_1(m) + V,$$

on constate que les deux actions de  $A_n(K)$  sur  $K^n$  coïncident, d'où la partie (iii) du théorème.

Soit alors  $f : (P^n(K), P^{n-1}(K)) \longrightarrow (\mathcal{X}, H)$  un repère affine de  $(\mathcal{X}, H)$ . Par transport de structure de la structure affine de  $K^n = P^n(K) - P^{n-1}(K)$  sur  $\mathcal{X} - H$ , à l'aide de la restriction de  $f$  à  $K^n$ , on déduit une structure affine sur  $\mathcal{X} - H$ . Si  $f'$  est un autre repère affine de  $(\mathcal{X}, H)$ , on vient de voir que  $f'^{-1} \circ f$ , en tant qu'automorphisme de  $P^n(K)$ , a une restriction à  $K^n$  qui est un automorphisme affine de  $K^n$  : c'est dire que  $f$  et  $f'$  définissent, par transport de structure, la même structure affine de dimension  $n$  sur  $\mathcal{X} - H$ , d'où la partie (iv) du théorème.

## 2 - Structures réelles sur un espace projectif complexe

On peut identifier naturellement  $P^n(\mathbb{R})$  à un sous-ensemble de  $P^n(\mathbb{C})$  par l'application  $[X_1, \dots, X_{n+1}] \longrightarrow [X_1, \dots, X_{n+1}]$  induite par l'inclusion de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Mais la situation est en fait plus riche, en ce sens qu'il existe sur  $P^n(\mathbb{C})$  une « conjugaison » naturelle, c'est-à-dire une bijection  $\sigma_0$  de  $P^n(\mathbb{C})$  sur lui-même

*vérifiant  $\sigma_0 = (\sigma_0)^{-1}$  (ou  $(\sigma_0)^2 = \text{Id}$ ), et telle que  $P^n(\mathbb{R})$  s'identifie aux points  $[m]$  de  $P^n(\mathbb{C})$  invariants par  $\sigma_0$ .*

Considérons en effet l'application

$$(z_1, \dots, z_{n+1}) \longrightarrow (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n+1}),$$

de  $\mathbb{C}^{n+1}$  sur lui-même (notée en abrégé  $m \longrightarrow \bar{m}$ ), où  $\bar{z}$  désigne le nombre imaginaire conjugué du nombre complexe  $z$ . De la formule

$$\overline{\lambda m} = \bar{\lambda} \cdot \bar{m},$$

on déduit que les images, par cette bijection, de deux vecteurs colinéaires non nuls du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^{n+1}$  sont encore des vecteurs colinéaires non nuls : la bijection  $m \longrightarrow \bar{m}$  passe donc aux quotients et définit l'application cherchée  $\sigma_0$  de  $P^n(\mathbb{C})$  sur lui-même, qui vérifie toutes les propriétés désirées.

**Remarque :** Puisque  $\overline{\lambda \cdot m} = \bar{\lambda} \cdot \bar{m}$ , l'application  $m \longrightarrow \bar{m}$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -linéaire, et  $\sigma_0$  n'est pas un automorphisme projectif de  $P^n(\mathbb{C})$ .

Plus généralement, sur un espace projectif complexe  $\mathcal{X}$  de dimension  $n$ , dont la structure est définie par une famille  $\mathcal{F}$  de repères  $f : P^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{X}$ , on appellera *structure réelle* la donnée d'une bijection  $\sigma : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$  de l'ensemble  $\mathcal{X}$  sur lui-même, et vérifiant la propriété suivante :

il existe un repère projectif  $f$  de  $\mathcal{X}$  tel que

$$\sigma = f \cdot \sigma_0 \cdot f^{-1}.$$

On appellera alors *repère réel* de  $(\mathcal{X}, \sigma)$  l'ensemble des repères projectifs  $f$  de  $\mathcal{X}$  vérifiant la propriété précédente. De la formule  $(\sigma_0)^2 = \text{Id}_{P^n(\mathbb{C})}$ , on déduit immédiatement que  $\sigma^2 = \text{Id}_{\mathcal{X}}$ . Deux points  $x$  et  $x'$  de  $P^n(\mathbb{C})$  tels que  $\sigma(x) = x'$  seront dits *imaginaires conjugués*. Un point  $x$  de  $P^n(\mathbb{C})$  sera dit *réel* si  $\sigma(x) = x$ , sinon il est dit *imaginaire*.

Notons  $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}$  l'ensemble des points réels de  $\mathcal{X}$ .

*Exemples.* — Pour  $\mathcal{X} = P^n(\mathbb{C})$ ,

$$\sigma_0[X_1, \dots, X_{n+1}] = [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{n+1}], \text{ et } \mathcal{X}_{\mathbb{R}} = P^n(\mathbb{R}).$$

Soit  $(f, [U]) \in \mathcal{H}_p(\mathcal{X})$  une hypersurface algébrique de degré  $p$  dans  $\mathcal{X}$  (une surface si  $n=3$ , une courbe si  $n=2$ ). Notons  $\Sigma$  l'ensemble des points de cette hypersurface, c'est-à-dire le sous-ensemble  $f(U^{-1}(0))$  de  $\mathcal{X}$  (qui ne dépend que de  $(f, [U])$ ). On dira que cette hypersurface est *réelle* si, pour tout  $x$  de  $\Sigma$ ,  $\sigma(x)$  appartient encore à  $\Sigma$ . Il faut prendre garde qu'une hypersurface algébrique réelle dans  $\mathcal{X}$  contient bien d'autres points que ses points

réels, et peut même n'en avoir aucun de réels : par exemple, dans  $P^2(\mathbb{C})$  muni de sa structure réelle  $\sigma_0$ , les coniques d'équation

$$X^2 + Y^2 - a^2 Z^2 = 0$$

et  $X^2 + Y^2 + a^2 Z^2 = 0$

( $a$  désignant un nombre réel positif) sont toutes deux réelles, bien que la seconde — contrairement à la première — n'ait que des points imaginaires.

### **Théorème 10-2**

- (i) *Le groupe  $PG_n(\mathbb{R})$  s'identifie naturellement au sous-groupe des éléments  $\hat{A}$  ou  $PG_n(\mathbb{C})$  qui commutent avec  $\sigma_0$ .*
- (ii) *En opérant sur  $P^n(\mathbb{C})$  en tant que sous-groupe de  $PG_n(\mathbb{C})$ ,  $PG_n(\mathbb{R})$ , laisse  $P^n(\mathbb{R})$  invariant, et la restriction à  $P^n(\mathbb{R})$  de son action sur  $P^n(\mathbb{C})$  coïncide avec l'action naturelle de  $PG_n(\mathbb{R})$  sur  $P^n(\mathbb{R})$ .*
- (iii) *Il existe une structure naturelle de  $\mathbb{R}$ -espace projectif de dimension  $n$  sur  $\mathcal{X}_R$ , pour laquelle les repères réels  $(P^n(\mathbb{C}), \sigma_0) \longrightarrow (\mathcal{X}, \sigma)$  ont une restriction  $f_R$  à  $P^n(\mathbb{R})$  qui est un repère projectif  $P^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{X}_R$  de  $\mathcal{X}_R$ .*

L'inclusion de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  induit un monomorphisme du groupe  $GL(n+1, \mathbb{R})$  dans le groupe  $GL(n+1, \mathbb{C})$ , qui passe évidemment aux quotients, et induit un monomorphisme de  $PG_n(\mathbb{R})$  dans  $PG_n(\mathbb{C})$ . Il est alors clair que si  $\hat{A}$  appartient à  $PG_n(\mathbb{R})$ ,  $\hat{A}$  commute avec  $\sigma_0$ .

Supposons, réciproquement, que  $\hat{A}$  soit un élément de  $PG_n(\mathbb{C})$  tel que  $\hat{A} \cdot \sigma_0 = \sigma_0 \cdot \hat{A}$ . Notons  $\bar{A}$  la matrice dont les coefficients sont les nombres imaginaires conjugués de ceux de  $A$ , on doit donc avoir, pour tout vecteur  $m$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$  :

$$[A(\bar{m})] = [\overline{A(m)}] = [\bar{A}(\bar{m})].$$

En particulier pour  $m = e_i = (0 \dots 0 1 0 \dots 0)$ , où le 1 est à la  $i^{\text{ième}}$  place, il doit exister un nombre complexe  $\lambda_i$  de module 1 tel que

$$A(e_i) = \lambda_i \bar{A}(e_i) \quad (\text{car } \bar{e}_i = e_i).$$

De même, pour  $m = e_i + e_j$  ( $i \neq j$ ), il doit exister un nombre complexe  $\lambda_{ij}$  de module 1, tel que  $A(e_i + e_j) = \lambda_{ij} \bar{A}(e_i + e_j)$ , c'est-à-dire

$$\lambda_i \bar{A}(e_i) + \lambda_j \bar{A}(e_j) = \lambda_{ij} (\bar{A}(e_i) + \bar{A}(e_j)).$$

Puisque les vecteurs  $(\bar{A}(e_i))$  ( $1 \leq i \leq n+1$ ) sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ , on a nécessairement  $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_{ij}$  : il existe donc un nombre complexe  $e^{i\theta}$  tel que, pour tout  $i$ ,  $A(e_i) = e^{i\theta} \bar{A}(e_i)$ . S'il l'on pose alors  $A_1 = e^{-i\frac{\theta}{2}} A$ ,  $\bar{A}_1(e_i) = A_1(e_i)$  pour tout  $i$  : c'est dire que  $A_1$  a tous ses coefficients réels, et appartient donc à  $GL(n+1, \mathbb{R})$ , d'où l'on déduit que  $\hat{A}$ , qui est égal à  $\hat{A}_1$ , appartient au sous-groupe  $PG_n(\mathbb{R})$  de  $PG_n(\mathbb{C})$ , d'où la partie (i) du théorème.

La partie (ii) est évidente.

Soit alors  $f : (P^n(\mathbb{C}), \sigma_0) \longrightarrow (\mathcal{X}, \sigma)$  un repère réel; l'image par  $f$  de l'ensemble  $P^n(\mathbb{R})$  des points de  $P^n(\mathbb{C})$  invariants par  $\sigma_0$  est égal à l'ensemble  $\mathcal{X}_R$  des points de  $\mathcal{X}$  invariants par  $\sigma$  :  $f$  induit donc par restriction une bijection  $f_R : P^n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{X}_R$  d'où une structure d'espace projectif réel sur  $\mathcal{X}_R$ , par transport de structure. Si  $f'$  est un autre repère réel, on vient de voir que  $f'^{-1} \circ f$ , qui commute nécessairement avec  $\sigma_0$ , a une restriction à  $P^n(\mathbb{R})$  qui appartient à  $PG_n(\mathbb{R})$  et est donc un automorphisme de  $P^n(\mathbb{R})$  : c'est dire que  $f_R$  et  $f'_R$  définissent par transport de structure la même structure d'espace projectif réel sur  $\mathcal{X}_R$ . Ceci achève la démonstration du théorème.

D'une transformation projective  $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$  entre deux  $\mathbb{C}$ -espace projectifs complexes  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{X}'$ , de même dimension  $n$ , et munis chacun d'une structure réelle  $\sigma$  (resp.  $\sigma'$ ), on dira qu'elle est *réelle*, si  $\sigma' \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$ . [En particulier, un repère projectif réel est une transformation projective réelle de  $(P^n(\mathbb{C}), \sigma_0)$  sur  $(\mathcal{X}, \sigma)$ ]. Si  $f$  (resp.  $f'$ ) est un repère réel ou  $\mathcal{X}$  (resp.  $\mathcal{X}'$ ),  $f'^{-1} \circ \varphi \circ f$  est un automorphisme projectif  $\hat{A}$  de  $P^n(\mathbb{C})$ , et dire que  $\varphi$  est réel équivaut à affirmer que la matrice  $A$  (qui n'est déterminée qu'à multiplication près par un nombre complexe non nul) peut être choisie à coefficients réels :  $\hat{A} \in PG_n(\mathbb{R})$ .

*Complexification d'un espace projectif réel.* — Inversement, on a déjà eu l'occasion de pressentir qu'il pouvait être commode d'ajouter des points imaginaires aux points d'un espace projectif réel, de façon par exemple que toute droite réelle coupe une conique réelle

en deux points distincts (réels, ou imaginaires conjugués) si elle n'est pas tangente à la conique, et confondus au point de contact si elle est tangente.

Soit  $\mathcal{F}$  une structure de  $\mathbb{R}$ -espace projectif de dimension  $n$  sur un ensemble  $\mathcal{X}$ . On se propose de définir de façon canonique un  $\mathbb{C}$ -espace projectif  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$  et une structure réelle  $\sigma$  sur  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$  tels que

- (i)  $\mathcal{X}$  s'identifie aux points de  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$  qui sont réels pour la structure  $\sigma$ ,
- (ii) tout repère  $f$  de  $\mathcal{X}$  s'étend naturellement en un repère projectif de  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ , réel pour la structure  $\sigma$ .

Or, il s'agit là d'une opération qu'on sait déjà faire pour  $P^n(\mathbb{R})$ , qui s'identifie naturellement à l'ensemble des points de  $P^n(\mathbb{C})$  invariants par  $\sigma_0$ , ainsi qu'on l'a déjà vu en début de paragraphe. L'idée, une fois de plus, va être de « transporter » cette situation de  $P^n(\mathbb{R})$  à  $\mathcal{X}$  à l'aide des repères  $f$  de  $\mathcal{X}$ .

Posons à cet effet :

$$\mathcal{X}_{\mathbb{C}} = \frac{(\mathcal{F} \times P^n(\mathbb{C}))}{T},$$

où  $T$  désigne la relation d'équivalence

$$(f, [m]) \sim (f \cdot \hat{A}, \hat{A}^{-1}([m])) \text{ pour } \hat{A} \in \text{PG}_n(\mathbb{R}),$$

dans  $\mathcal{F} \times P^n(\mathbb{C})$ . Notant  $\overline{(f, [m])}$  la classe d'équivalence modulo  $T$  de  $(f, [m])$ , on définit alors  $\sigma(\overline{(f, [m])}) = \overline{(f, \sigma_0([m]))}$ , et  $\mathcal{X}$  s'identifie aux points de  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$  invariants par  $\sigma$ , grâce à l'inclusion

$$x \longrightarrow \overline{(f, f^{-1}(x))}.$$

Soit  $f_{\mathbb{C}} : P^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{C}}$  l'application bijective

$$[m] \longrightarrow \overline{(f, [m])}.$$

Puisque  $(f'_{\mathbb{C}})^{-1} \circ f_{\mathbb{C}} = \hat{A}$ , que  $\hat{A}$  est un élément de  $\text{PG}_n(\mathbb{R})$  donc à fortiori de  $\text{PG}_n(\mathbb{C})$ ,  $f_{\mathbb{C}}$  et  $f'_{\mathbb{C}}$  définissent par transport de structure la même structure d'espace projectif sur  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ . Enfin, puisque  $\text{PG}_n(\mathbb{R})$  s'identifie précisément aux éléments  $\hat{A}$  de  $\text{PG}_n(\mathbb{C})$  qui commutent avec  $\sigma_0$ ,  $f_{\mathbb{C}} \circ \sigma_0 = \sigma \circ f_{\mathbb{C}}$  : c'est dire que  $f_{\mathbb{C}}$  est un repère réel de  $(\mathcal{X}_{\mathbb{C}}, \sigma)$ ; et sa restriction à  $P^n(\mathbb{R})$  coïncide avec  $f$ , une fois  $\mathcal{X}$  identifié comme indiqué à une partie de  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ .



Dans la pratique, peu importe la construction effective de  $\mathcal{X}_\mathbb{C}$  à partir de  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  : seules importent les propriétés (i) et (ii) ci-dessus, dont on pourrait montrer qu'elles « caractérisent axiomatiquement »  $\mathcal{X}_\mathbb{C}$ .

L'inclusion naturelle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  induit des inclusions de  $\mathbb{R}_p^0[X_1, \dots, X_{n+1}]$  dans  $\mathbb{C}_p^0[X_1, \dots, X_{n+1}]$ , de  $\mathcal{F} \times P(\mathbb{R}_p^0[X_1, \dots, X_{n+1}])$  dans  $\mathcal{F}_\mathbb{C} \times P(\mathbb{C}_p^0[X_1, \dots, X_{n+1}])$  (où  $\mathcal{F}$  a été identifié par l'application  $f \longrightarrow f_\mathbb{C}$  définie ci-dessus à une partie de l'ensemble  $\mathcal{F}_\mathbb{C}$  des repères projectifs de  $\mathcal{X}_\mathbb{C}$ ), et finalement de l'espace projectif réel  $\mathcal{H}_p(\mathcal{X})$  dans l'espace complexe  $\mathcal{H}_p(\mathcal{X}_\mathbb{C})$ . Si  $\Sigma$  est une hypersurface algébrique réelle dans  $\mathcal{X}$ , on notera  $\Sigma_\mathbb{C}$  son image dans  $\mathcal{H}_p(\mathcal{X}_\mathbb{C})$  par l'application précédente :  $\Sigma_\mathbb{C}$  est alors une hypersurface algébrique réelle dans  $\mathcal{X}_\mathbb{C}$ , dont  $\Sigma$  est l'ensemble des points réels. [On peut aussi définir une structure réelle dans l'espace projectif complexe  $\mathcal{H}_p(\mathcal{X}_\mathbb{C})$ , telle que les points réels soient précisément ceux de la forme  $\Sigma_\mathbb{C}$ , mais peu importe pour la suite.] L'hypersurface  $\Sigma_\mathbb{C}$  est appelée l'*hypersurface complexifiée* de  $\Sigma$ .

Notons encore, de même que la géométrie affine consiste désormais pour nous, non pas à ne considérer que des points à distance finie, mais à faire jouer un rôle particulier aux points d'un « hyperplan de l'infini » dans l'espace projectif, la géométrie réelle consistera, non pas à ne considérer que des points réels, mais à faire jouer un rôle particulier à une « conjugaison » dans l'espace projectif complexe.

### 3 - Structures angulaires (ou « semblables »)

Supposons que  $\Pi$  soit un espace affine réel de dimension  $n$ ,  $\widehat{\Pi}$  son complété projectif, et  $\widehat{\Pi}_\mathbb{C}$  l'espace projectif complexifié de  $\widehat{\Pi}$ . L'hyperplan de l'infini  $\delta(\Pi)$  est un sous-espace projectif de  $\widehat{\Pi}$ , dont le complexifié  $(\delta(\Pi))_\mathbb{C}$  est une structure affine sur l'espace projectif complexe  $\widehat{\Pi}_\mathbb{C}$ , qui est ainsi muni

- d'une structure affine  $(\delta(\Pi))_\mathbb{C}$ ,
- et d'une structure réelle  $\sigma$ ,

ces deux structures étant *compatibles* en ce sens que  $(\delta(\Pi))_\mathbb{C}$  est un hyperplan réel de  $\widehat{\Pi}_\mathbb{C}$ , c'est-à-dire stable par  $\sigma$ .

Supposons alors que  $\Pi$  soit muni d'une structure euclidienne, c'est-à-dire d'un produit scalaire permettant de définir angles et distances. Appelant *hypersphère* (resp. *sphère* si  $n=3$ , resp. *cercle* si  $n=2$ ) de centre  $\omega$  et rayon  $R$  l'ensemble des points de  $\Pi$  situés à la distance  $R$  de  $\omega$ , une telle hypersphère  $\Sigma$  admet, relativement à un repère orthonormé de  $\Pi$ , l'équation

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 - R^2 = 0$$

( $a_i$  désignant les coordonnées du centre  $\omega$ ), qui peut encore s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^n (x_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i x_i + c = 0.$$

Un repère orthonormé, en tant que repère affine, s'identifie comme précisé au paragraphe 1 de ce chapitre à un repère projectif de  $\hat{\Pi}$ , lequel se prolonge en un repère projectif de  $\hat{\Pi}_C$ , comme expliqué au paragraphe 2. Par rapport aux coordonnées homogènes associées,  $\Sigma_C$  admet alors pour équation

$$\sum_{i=1}^n (X_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i X_i X_{n+1} + c (X_{n+1})^2 = 0.$$

L'ensemble  $\Sigma_C \cap \delta(\Pi)_C$  des points à l'infini de  $\Sigma_C$  admet alors pour équations :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 0 \\ \sum_{i=1}^n (X_i)^2 = 0. \end{cases}$$

On constate que cette équation ne dépend :

- *ni de l'hypersphère*  $\Sigma$  (c'est-à-dire ni des coefficients  $a_i$ , ni de  $c$ );
- *ni du repère choisi* au départ, pourvu qu'il soit orthonormé.

On définit ainsi une hypersurface algébrique  $\Omega$  dans  $\delta(\Pi)_C$ , réelle, sans point réel, de degré 2, qu'on appelle *l'ombilicale*, et qui ne dépend que de la structure euclidienne de  $\Pi$  :

$$\Omega = \Sigma_C \cap \delta(\Pi)_C \text{ pour toute hypersphère } \Sigma \text{ de } \Pi.$$

[Une direction de droite  $\delta$  appartenant à  $\Omega$  est dite *isotrope*.]

### *Cas particuliers*

Pour  $n=3$ ,  $\delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$  est un plan, les hypersphères sont des sphères, et  $\Omega$  est une conique non dégénérée, réelle, sans point réel, dans  $\delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$ .

Pour  $n=2$ ,  $\delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$  est une droite, les hypersphères sont des droites, et  $\Omega$  est constituée par deux points I et J, imaginaires conjugués sur  $\delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$ , et qu'on appelle les *points cycliques*, pour rappeler que ce sont les points à l'infini par lesquels passe le complexifié  $\Gamma_{\mathbb{C}}$  de n'importe quel cercle  $\Gamma$ .

Réciproquement, si  $S$  est une hypersurface (resp. une surface si  $n=3$ , resp. une courbe si  $n=2$ ), algébrique de degré 2, dans  $\hat{\Pi}_{\mathbb{C}}$ , telle que  $S \cap \delta(\Pi)_{\mathbb{C}} = \Omega$ ,  $S$  est une hypersphère (resp. une sphère, resp. un cercle), au sens habituel, du moins  $S$  est réelle et a des points réels. En effet, relativement à un repère orthonormé,  $S$ , de degré 2 a nécessairement une équation qu'on peut mettre sous la forme :

$$U_2(X_1, \dots, X_n) - 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i X_i \right) X_{n+1} + c(X_{n+1})^2 = 0$$

où  $U_2 \in \mathbb{C}_2^0[X_1, \dots, X_n]$ .

L'intersection  $S \cap \delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$  a donc pour équations :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 0 \\ U_2(X_1, \dots, X_n) = 0. \end{cases}$$

Cette intersection ne peut être l'ombilicale que s'il existe une constante  $k$  non nulle dans  $\mathbb{C}$  telle que  $U_2(X_1, \dots, X_n) = k \cdot \sum_{i=1}^n (X_i)^2$ , de sorte que l'équation de  $S$  peut s'écrire sous la forme

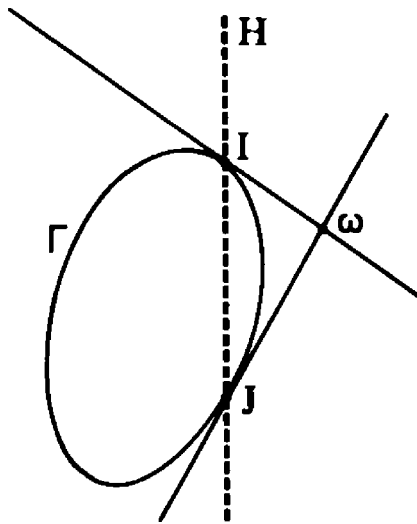
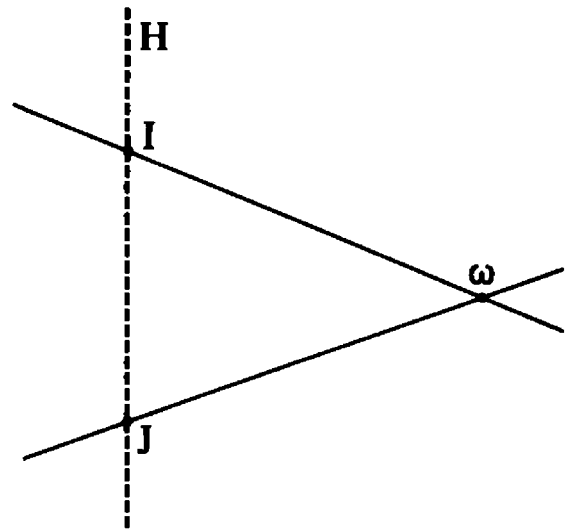
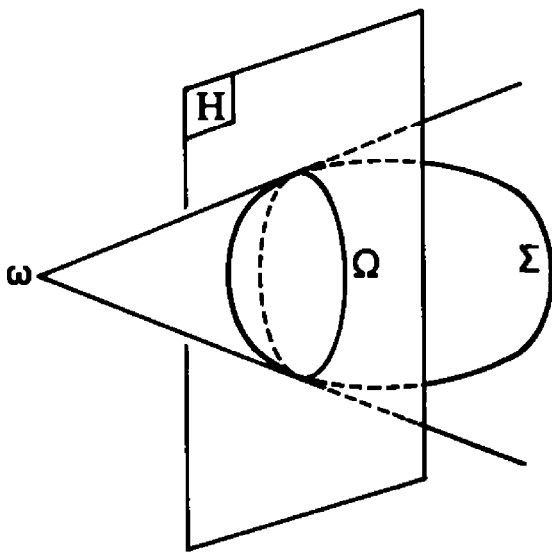
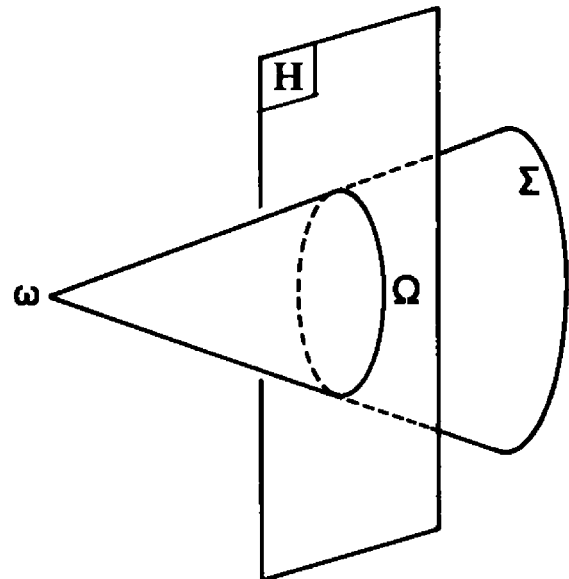
$$\sum_{i=1}^n (X_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{k} X_i + \frac{c}{k} (X_{n+1})^2 = 0$$

c'est-à-dire, dans  $\hat{\Pi}_{\mathbb{C}} - \delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$  :

$$\sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{a_i}{k} \right)^2 + \left[ \frac{c}{k} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{k} \right)^2 \right] = 0;$$

on reconnaît, du moins si les nombres  $\frac{a_i}{k}$  et  $\frac{c}{k}$  sont tous réels, et si  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{k}\right)^2 > \frac{c}{k}$ , l'équation de l'hypersphère de centre le point  $\omega$  de coordonnées  $\left(\frac{a_1}{k}, \dots, \frac{a_n}{k}\right)$ , et de rayon  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{k}\right)^2 - \frac{c}{k}}$ . Ceci justifie la convention suivante.

*Plus généralement, on appellera hypersphère (resp. sphère si  $n=3$ , resp. cercle si  $n=2$ ) tout élément  $S \in \mathcal{H}_2(\hat{\Pi}_C)$  tel que  $S \cap \delta(\Pi)_C = \Omega$ .*

cercle de rayon non nul et centre  $\omega$ cercle de rayon nul et centre  $\omega$  $\Sigma$  sphère de rayon non nul et centre  $\omega$  $\Sigma$  sphère de rayon nul et centre  $\omega$

**Remarque :** Si  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{k}\right)^2 = \frac{c}{k}$ , l'hypersphère (resp. la sphère, resp. le cercle) a un rayon nul, et « dégénère » alors en le cône de sommet  $\omega$  s'appuyant sur l'ombilicale  $\Omega$ . Pour  $n=2$ , ce cône n'a que deux génératrices et est donc formé de la réunion des deux droites isotropes  $\omega I$  et  $\omega J$  ( $I$  et  $J$  désignant toujours les points cycliques).

Nous avons déjà dit que l'ombilicale  $\Omega$ , définie par

$$\Sigma_C \cap \delta(\Pi)_C = \Omega$$

pour toute hypersphère  $\Sigma$  de  $\Pi$ , ne dépend que de la structure euclidienne de  $\Pi$ . En fait, si le produit scalaire sur  $\Pi$ , définissant cette structure euclidienne, est multiplié par une constante  $k > 0$  [toutes les distances sont multipliées par  $\sqrt{k}$ , mais les angles ne changent pas], les hypersphères pour le nouveau produit scalaire  $k \cdot \langle, \rangle$ , et l'ombilicale reste la même. On appellera donc *structure angulaire* (on dira aussi<sup>(1)</sup> *structure semblable*) la donnée, sur un espace affine réel  $\Pi$ , d'une classe d'équivalence de produits scalaires, deux produits scalaires  $\langle, \rangle_1$  et  $\langle, \rangle_2$  étant équivalents s'il existe un nombre  $k > 0$  tel que  $\langle, \rangle_2 = k \cdot \langle, \rangle_1$ .

*Nous allons montrer qu'en fait, ces trois notions*

- *celle de structure semblable,*
- *celle d'ombilicale,*
- *celle d'angle,*

*sont équivalentes.*

La seule chose non évidente, c'est de voir comment la connaissance de la seule ombilicale permet de définir l'angle  $\theta$  de deux directions de droite dans  $\Pi$ , en précisant qu'il s'agira :

- d'angles de droites orientés lorsque  $n=2$  (définis par  $\text{tg } \theta$  une fois le plan  $\Pi$  orienté);
- d'angles de droites non orientés définis par  $|\text{tg } \theta|$  dans le cas général.

<sup>(1)</sup> On trouve encore, dans la littérature, la terminologie « structure conforme ». Mais nous préférons éviter cette expression, dans la mesure où l'on appelle souvent « transformations conformes » des transformations holomorphes non nécessairement affines.

Supposons d'abord que  $\Pi$  soit un plan ( $n=2$ ), que nous supposerons orienté. Choisissons un repère orthonormé direct  $(Ox, Oy)$ , dont nous noterons  $X, Y, Z$  les coordonnées homogènes associées. L'ombilicale :

$$\begin{cases} Z=0 \\ X^2 + Y^2 = 0, \end{cases}$$

se réduit alors, puisque  $X^2 + Y^2 = (Y - iX)(Y + iX)$  aux deux *points cycliques*  $I$  et  $J$ , de coordonnées homogènes respectives  $(1, i, 0)$  et  $(1, -i, 0)$ , qui sont les points à l'infini des droites isotropes d'équation  $Y - iX = 0$  et  $Y + iX = 0$ . Soient alors  $D$  et  $D'$  deux droites de  $\Pi$  passant par  $O$ , d'équations respectives  $Y = mX = 0$  et  $Y - m'X = 0$  (que nous supposerons pour le moment distinctes de  $Oy$ ). Puisque le repère  $(Ox, Oy)$  est orthonormé,  $m$  et  $m'$  sont respectivement égaux à  $\text{tg}(Ox, D)$  et  $\text{tg}(Ox, D')$ , et

$$\text{tg}(D, D') = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

Posons  $(D, D') = \theta \pmod{\pi}$ .

Calculons d'autre part le birapport  $(d, d', I, J)$  sur la droite  $\delta(\Pi)_C$ ,  $d$  et  $d'$  désignant les points à l'infini des droites  $D$  et  $D'$ . Il est égal au birapport  $(m, m', i, -i)$  des ordonnées des points d'intersection avec la droite  $x=1$  des quatre droites  $D, D', OI, OJ$  passant par  $O$  :

$$\begin{aligned} (d, d', I, J) &= \frac{m - i}{m + i} : \frac{(1 + mm') - i(m' - m)}{(1 + mm') + i(m' - m)} \\ &= \frac{1 - i \text{tg } \theta}{1 + i \text{tg } \theta} = e^{-2i\theta}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose maintenant  $D$  égale à  $Oy$ ,

$$(D, D') = -\frac{\pi}{2} + (Ox, D') \text{ et } \text{tg } \theta = -\frac{1}{m'}.$$

Le birapport  $(d, d', I, J)$  est alors égal au birapport  $(\infty, m', i, -i)$  dans  $\widehat{\mathbb{C}}$ , c'est-à-dire

$$(d, d', I, J) = \frac{m' + i}{m' - i} = \frac{1 + \frac{i}{m'}}{1 - \frac{i}{m'}} = \frac{1 - i \operatorname{tg} \theta}{1 + i \operatorname{tg} \theta} = e^{-2i\theta}.$$

De même, si c'est  $D'$  qui est égale à  $Oy$ ,  $(D, D') = \frac{\pi}{2} - (Ox, D)$  et  $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{m}$ . On a alors :

$$(d, d', I, J) = (m, \infty, i, -i) = \frac{m - i}{m + i} = \frac{1 - i \operatorname{tg} \theta}{1 + i \operatorname{tg} \theta} = e^{-2i\theta}.$$

Si  $D$  et  $D'$  sont confondus,  $(d, d', I, J) = +1$ , et

$$\operatorname{Log}(d, d', I, J) = 0.$$

On en déduit le

### **Théorème 10-3 (formule de Laguerre)**

*Si  $D$  et  $D'$  sont deux droites dans un plan euclidien orienté, dont on note  $d$  et  $d'$  les points à l'infini, posons  $(D, D') = \theta \pmod{\pi}$ .*

- (i) Le birapport  $(d, d', I, J)$  est alors un nombre complexe de module 1 (et par conséquent son Logarithme est un nombre imaginaire pur défini modulo  $2i\pi$ ).*
- (ii)  $\theta \pmod{\pi} = \frac{i}{2} \operatorname{Log}(d, d', I, J)$ .*

### **Corollaire 10-4**

*Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) les droites  $D$  et  $D'$  sont orthogonales,*
- (ii) la division  $d, d', I, J$  est harmonique.*

$\text{Log}(-1)$  est en effet égal à  $i\pi \pmod{2i\pi}$ , et par conséquent  $\frac{i}{2} \text{Log}(-1) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ .

Supposons que l'on change l'orientation du plan  $\Pi$  : les points cycliques  $I$  et  $J$ , points à l'infini des droites de « pentes » respectives  $i$  et  $-i$  relativement à un repère orthonormé direct, sont alors permutés. De la formule

$$(d, d', J, I) = (d, d', I, J)^{-1}$$

on déduit que  $\text{Log}(d, d', J, I) = -\text{Log}(d, d', I, J)$ , et l'on retrouve par conséquent le fait que  $\theta \pmod{\pi}$  est changé en  $-\theta \pmod{\pi}$ . En particulier, *l'orientation du plan  $\Pi$  équivaut à la donnée d'un ordre sur l'ensemble des deux points cycliques.*

Remarquons aussi que la formule

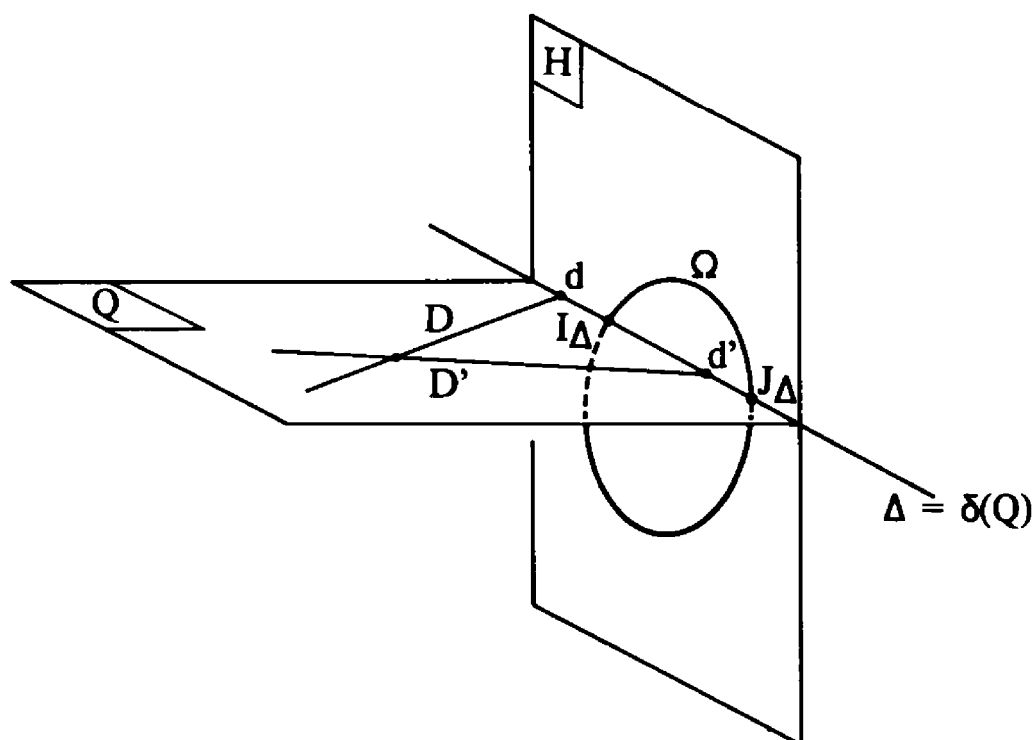
$$\theta \pmod{\pi} = \frac{i}{2} \text{Log}(d, d', I, J)$$

permet de définir des angles de directions  $d$  et  $d'$  éventuellement imaginaires, dès lors que trois au moins des quatre points  $d, d', I, J$  sont distincts : ces angles seront des nombres en général complexes, dont la partie réelle sera définie modulo  $\pi$ ; deux directions  $d$  et  $d'$ , éventuellement imaginaires, seront encore dites *orthogonales* dès qu'elles seront conjuguées harmoniques par rapport à  $I$  et  $J$ .

Supposons maintenant la dimension de  $\Pi$  quelconque, et soient  $d$  et  $d'$  deux points distincts dans  $\delta(\Pi)$ . Notons  $\Delta$  la droite dans  $\delta(\Pi)$  joignant  $d$  et  $d'$ . Etant réelle, cette droite coupe l'ombilicale  $\Omega$  (qui, rappelons-le, est réelle et sans point réel) en deux points distincts  $I_\Delta$  et  $J_\Delta$ , nécessairement imaginaires conjugués. Ces points sont en fait les points cycliques de n'importe quel plan affine  $Q$  dans  $\Pi$ , muni de la structure euclidienne induite par celle de  $\Pi$ , et admettant  $\Delta$  comme droite de l'infini  $\delta(Q)$  (tous ces plans sont parallèles entre eux). On est donc ramené à la situation plane du théorème 10-3, et l'angle  $\theta$  de ces deux directions de droite est donné par la formule :

$$\theta = \pm \frac{i}{2} \text{Log}(d, d', I_\Delta, J_\Delta) \pmod{\pi}$$





[Il n'existe aucun ordre naturel sur  $\{I_\Delta, J_\Delta\}$ , excepté si  $\Pi$  est un plan et que ce plan est orienté. C'est pourquoi  $\theta$  n'est en général défini qu'au signe près.]

Si  $d$  et  $d'$  sont maintenant deux directions éventuellement imaginaires, la formule conserve un sens, à condition toutefois que la droite  $\Delta = dd'$  ne soit *pas* tangente à l'ombilicale  $\Omega$  (auquel cas les points cycliques  $I_\Delta$  et  $J_\Delta$  seraient confondus; les plans affines complexes de  $\widehat{\Pi}_C$  qui ont une droite de l'infini tangente à  $\Omega$  sont dits *isotropes*).

### *Foyers et tangentes isotropes à une conique*

Soit  $\Gamma$  une conique (propre) dans un plan euclidien  $\Pi$ . Nous nous proposons de montrer le

#### **Théorème 10-5**

*Les foyers (au sens usuel) de la conique  $\Gamma$  sont les points (réels) à distance finie, d'où l'on peut mener à  $\Gamma$  deux tangentes isotropes.*

1/ *Cas d'une conique à centre.* — On sait qu'il existe toujours un repère orthonormé  $(Ox, Oy)$ , par rapport auquel la conique a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

(avec  $\varepsilon = +1$  pour une ellipse,  $-1$  pour une hyperbole). Par rapport à un tel repère, puisqu'il est orthonormé, les droites isotropes (c'est-à-dire les droites, distinctes de  $(\delta(\Pi))_C$ , passant par l'un des points cycliques I ou J) sont celles qui ont une équation de la forme

$$y - \varepsilon' i(x - \alpha) = 0$$

( $\alpha$  étant l'abscisse du point où la droite isotrope considérée coupe  $(Ox)_C$ ). Les points d'intersection d'une telle droite avec  $\Gamma_C$  sont solutions du système

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \\ y - \varepsilon' i(x - \alpha) = 0. \end{cases}$$

Reportant  $y^2 = -(x - \alpha)^2$  dans la première équation, l'abscisse de ces points est racine de l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{a^2} - \varepsilon \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\varepsilon}{b^2}\right)x^2 + \frac{2\varepsilon\alpha}{b^2}x - \left(\varepsilon \frac{\alpha^2}{b^2} + 1\right) = 0.$$

Cette équation admet une racine double pour  $\alpha^2 = a^2 - \varepsilon b^2$ . Rappelons que les foyers d'une ellipse (resp. d'une hyperbole) sont à la distance  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  du centre pour une ellipse (on suppose  $a^2 \geq b^2$  quitte à permuter  $Ox$  et  $Oy$ ),  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  pour une hyperbole. Ainsi, dans un cas comme dans l'autre,  $\alpha = \pm c$ , et il existe, pour  $c \neq 0$ , quatre tangentes isotropes à  $\Gamma$  qui sont les quatre droites

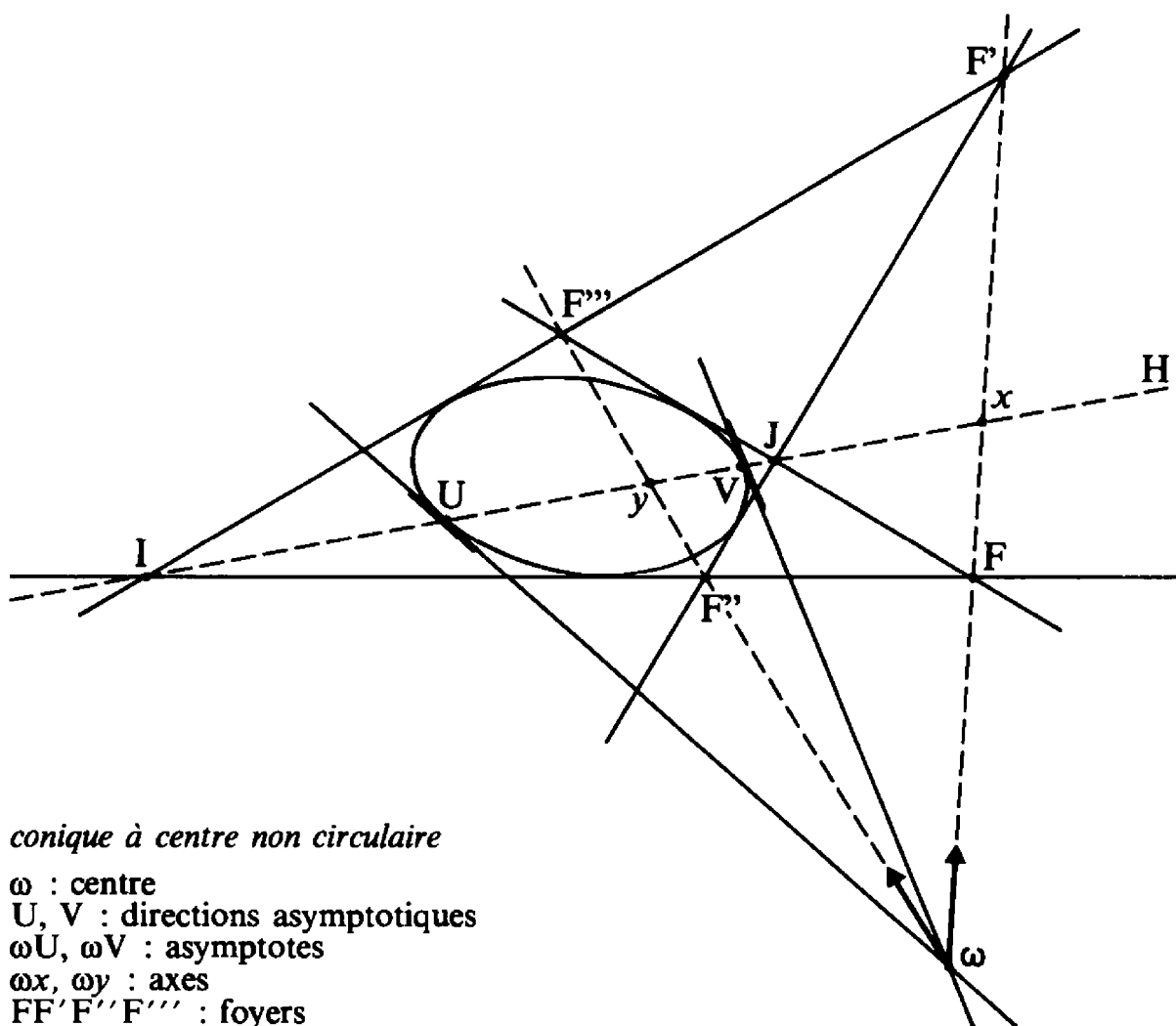
$$y - \varepsilon' i(x - \varepsilon'' c) = 0$$

(avec  $\varepsilon' = \pm 1$ ,  $\varepsilon'' = \pm 1$ ).

Pour  $c \neq 0$ , il existe, à distance finie, quatre points d'intersection distincts d'une tangente  $y - i(x - \varepsilon_1''c) = 0$  passant par I, avec une tangente  $y + i(x - \varepsilon_2''c) = 0$  passant par J : ce sont les points de coordonnées

$$(c, 0), \quad (-c, 0), \quad (0, ic) \quad \text{et} \quad (0, -ic).$$

Les deux premiers sont les foyers F et F' usuels (réels) sur l'axe des abscisses. Les deux derniers sont des points imaginaires conjugués, F'' et F''', sur l'axe des ordonnées. Pour  $c = 0$ ,  $\Gamma$  est un cercle, il n'existe que deux tangentes isotropes, dont les points de contact avec  $\Gamma$  sont les points cycliques : ces tangentes sont donc les « asymptotes » (imaginaires conjuguées) du cercle. Elles se coupent en le centre du cercle, qui est aussi l'unique foyer.



2/ *Cas d'une parabole.* — Il existe un repère orthonormé  $(Ox, Oy)$ , par rapport auquel la parabole admet pour équation  $y^2 - 2px = 0$ . Les solutions doubles du système

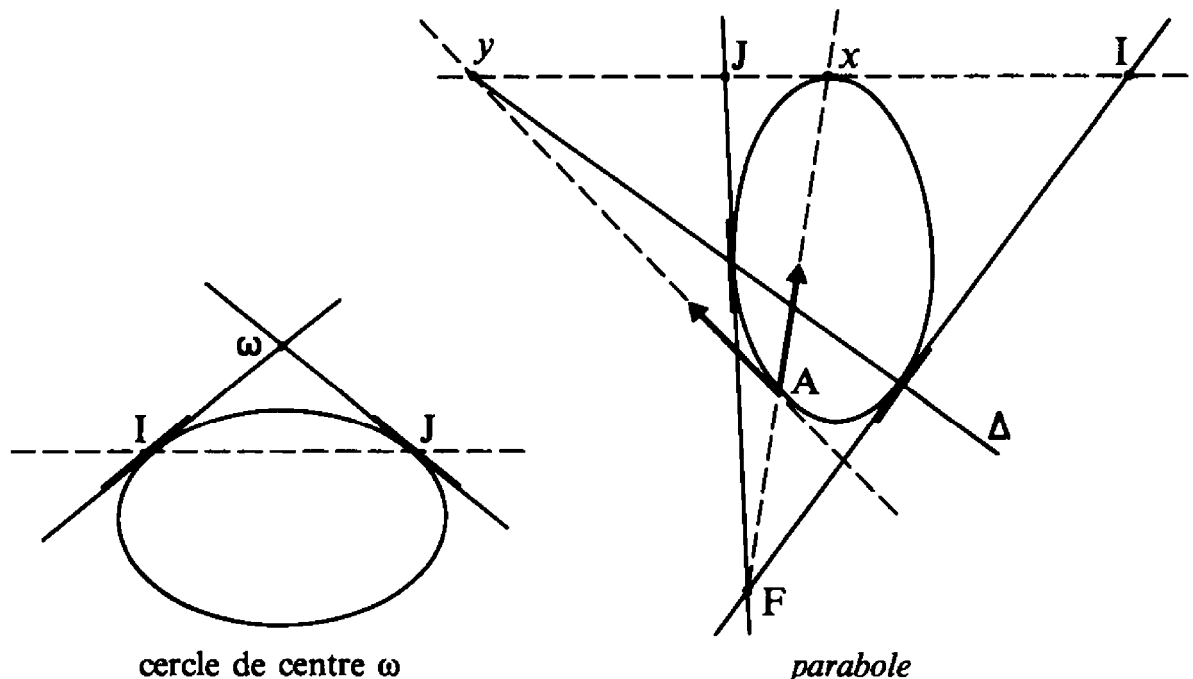
$$\begin{cases} y^2 - 2px = 0 \\ y - \varepsilon' i(x - \alpha) = 0 \end{cases}$$

correspondent, cette fois-ci, aux racines doubles de l'équation  $(x - \alpha)^2 + 2px = 0$  qui s'écrit encore  $x^2 + 2(p - \alpha)x + \alpha^2 = 0$ . C'est pour  $\alpha = p/2$  que l'équation du second degré ci-dessus admet une racine double. Il existe donc deux tangentes isotropes à la parabole, qui sont les droites d'équation

$$y - i(x - p/2) = 0,$$

et  $y + i(x - p/2) = 0.$

Elles se coupent en le point de coordonnées  $(p/2, 0)$  : on reconnaît le foyer E de la parabole, ce qui achève la démonstration du théorème.



cercle de centre  $\omega$

parabole

F : foyer  
 $x$  : direction asymptotique  
 A : sommet  
 $Ax$  : axe  
 $Ay$  : tangente au sommet  
 $\Delta$  : directrice

Ceci nous amène à généraliser la définition d'un foyer : on appellera désormais *foyer* d'une conique propre  $\Gamma$  dans  $\widehat{\Pi}_C$  tout point  $\Phi$  à distance finie (c.-à-d. dans  $\widehat{\Pi}_C - \delta(\Pi)_C$ ) tel que les droites isotropes  $\Phi I$  et  $\Phi J$  soient tangentes à  $\Gamma$  (une tangente étant une droite de  $\widehat{\Pi}_C$  coupant  $\Gamma$  en deux points confondus). Avec cette définition une conique à centre (ellipse ou hyperbole), non circulaire, aura désormais pour nous *quatre foyers* répartis deux à deux sur les axes de la conique. Ces quatre foyers se confondront, dans le cas d'un cercle, en le centre de ce cercle. Une parabole (tangente à la droite de l'infini) n'admet qu'un seul foyer. [On ne se limite plus à la seule considération des foyers réels; la conique  $\Gamma$  elle-même n'est plus nécessairement réelle.]

Depuis le début du paragraphe, nous n'avons considéré que l'espace projectif complexe  $\widehat{\Pi}_C$ , lorsque  $\Pi$  était un espace affine réel, muni d'une structure euclidienne ou semblable. Réciproquement, on appellera *structure angulaire* ou *structure semblable* sur un espace projectif complexe  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  les *données*

- d'un hyperplan projectif  $H$  définissant une structure affine sur  $\mathcal{X}$ ,
- d'une hypersurface algébrique  $\Omega$  de  $H$ , de degré 2, non dégénérée,
- d'une structure réelle  $\sigma$ .

On supposera que ces données vérifient les *axiomes* suivants :

- (i) l'hyperplan  $H$  est réel (c'est-à-dire stable par  $\sigma$ );
- (ii) l'hypersurface algébrique  $\Omega$  de  $H$  est réelle (stable par  $\sigma$ ), sans point réel.

*En particulier, si la dimension de  $\mathcal{X}$  est 2, une structure angulaire est la donnée*

- d'une structure réelle  $\sigma$  sur  $\mathcal{X}$ ,
- de deux points distincts  $I$  et  $J$  sur  $\mathcal{X}$ , conjugués relativement à  $\sigma$  (et par conséquent non réels).

Ces deux points seront appelés les points cycliques de la structure. Etant conjugués, ils engendrent une droite réelle  $\Delta$ , qui définit donc, dans le plan projectif complexe  $\mathcal{X}$ , une structure affine réelle.

Négligeant les questions de réalité, on appellera plus généralement *structure pseudo-angulaire* (ou pseudo-semblable) sur un *K-plan* projectif  $\mathcal{X}$  la donnée de *deux points distincts*  $I$  et  $J$  dans  $\mathcal{X}$ , qu'on appellera les *points cycliques* de la structure. Relativement à cette structure, on définira les *cercles* comme les éléments  $\Gamma$  de  $\mathcal{K}_2(\mathcal{X})$  passant par  $I$  et  $J$ . On appellera structure affine sous-jacente la structure affine engendrée par la droite  $\Delta$  joignant  $I$  et  $J$ . On dira que deux couples de directions  $d_1, d'_1$  et  $d_2, d'_2$  sur  $\Delta$  font le même *angle* si les deux birapports  $(d_1, d'_1, I, J)$  et  $(d_2, d'_2, I, J)$  sont égaux.

En particulier, on dira que deux directions  $d$  et  $d'$  sont *orthogonales* si elles forment avec  $I$  et  $J$  une division harmonique sur  $\Delta$  ( $d$  et  $d'$  étant supposées distinctes de  $I$  et  $J$ ).

On appellera *orientation* du plan  $\mathcal{X}$ , muni de la structure pseudo-angulaire considérée, le choix d'un ordre sur l'ensemble  $\{I, J\}$ . Appelant tangente à un élément  $\Gamma$  de  $\mathcal{K}_2(\mathcal{X})$  toute droite projective coupant  $\Gamma$  en deux points confondus, on appellera *foyer* d'une conique  $\Gamma$  (ou élément non dégénéré de  $\mathcal{K}_2(\mathcal{X})$ ) tout point  $F$  de  $\mathcal{X}_\Gamma - \Delta$  tel que les droites  $FI$  et  $FJ$  soient tangentes à  $\Gamma$ .

On appellera *similitude* d'un espace projectif complexe  $\mathcal{X}$ , muni d'une structure angulaire  $(H, \Omega, \sigma)$  sur un autre  $\mathcal{X}'$  muni d'une structure angulaire  $(H', \Omega', \sigma')$  toute transformation projective complexe  $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$  qui est affine ( $\varphi(H) = H'$ ), réelle

$$(\varphi \circ \sigma = \sigma' \circ \varphi),$$

et telle que  $\varphi(\Omega) = \Omega'$ .

On laisse au lecteur le soin de montrer que, si  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{X}'$  sont définis à partir d'espaces euclidiens  $\Pi$  et  $\Pi'$  comme expliqué au début de ce paragraphe, les *similitudes au sens ci-dessus* sont les *similitudes au sens usuel*.

Réciproquement, si  $\mathcal{X} - H$  et  $\mathcal{X}' - H'$  sont munis des structures d'espaces affines réels par les procédés évoqués aux théorèmes 10-1 et 10-2 de ce chapitre, on peut munir les espaces réels sous-jacents  $(\mathcal{X} - H)_\mathbb{R}$  et  $(\mathcal{X}' - H')_\mathbb{R}$  de structures euclidiennes pour lesquelles les ombilicales seront respectivement  $\Omega$  et  $\Omega'$  : toute similitude au sens ci-dessus induit alors une similitude (au sens naïf) sur ces espaces euclidiens, et inversement.

On appellera de même *similitude* d'un K-plan projectif  $\mathcal{X}$  (muni d'une structure pseudo-angulaire  $\{I, J\}$ ) sur un autre  $\mathcal{X}'$  (structure pseudo-angulaire  $\{I', J'\}$ ), toute transformation projective  $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$  telle que  $\varphi(\{I, J\}) = \{I', J'\}$ .

L'intérêt qu'il peut y avoir à négliger ainsi les questions de réalité sera illustré au chapitre 11, où l'on verra que quatre situations, *à priori* aussi différentes que celles correspondant :

- au losange circonscrit à un cercle,
- au parallélogramme circonscrit à une hyperbole équilatère,
- aux quatre foyers d'une conique à centre non circulaire,
- aux deux tangentes à une parabole en des points alignés avec le foyer,

ne sont en fait qu'une seule et même figure, correspondant seulement à des choix différents d'une structure pseudo-angulaire dans un plan projectif complexe. Ceci résultera d'un *principe d'extension projective des théorèmes de géométrie angulaire*, analogue à celui déjà énoncé en géométrie affine au paragraphe 1.

#### 4 - Topologie sur un espace projectif réel ou complexe

Soit  $p : E \longrightarrow X$  l'application de passage aux quotients d'un ensemble  $E$ , pourvu d'une relation d'équivalence  $\sim$ , sur l'ensemble quotient  $X = E/\sim$ . Si  $E$  est muni d'une topologie, rappelons qu'on appelle *topologie quotient* la topologie sur  $X$ , dont les ouverts  $\Omega$  sont les parties de  $X$  telles que  $p^{-1}(\Omega)$  soit un ouvert de  $E$  : c'est aussi la plus fine des topologies sur  $X$  rendant  $p$  continue; et les applications  $f : X \longrightarrow Z$  de  $X$ , muni de cette topologie quotient, sur un espace topologique  $Z$ , qui sont continues, sont celles telles que  $f \circ p$  soit continue.

Nous munirons les espaces projectifs  $P^n(\mathbb{R})$  et  $P^n(\mathbb{C})$  des topologies quotients associées respectivement aux applications naturelles de passages aux quotients  $\pi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$  et  $\pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P^n(\mathbb{C})$  ( $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  ou  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  étant munis de leur topologie usuelle).

Notons  $a$  une constante  $>0$ , et  $S^n$  (resp.  $S^{2n+1}$ ) la sphère d'équation  $\sum_{i=1}^{n+1} (X_i)^2 - a^2 = 0$  dans  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  (resp.  $\sum_{i=1}^{n+1} X_i \bar{X}_i - a^2 = 0$  dans  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ ), et  $\iota_{\mathbb{R}} : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  (resp.  $\iota_{\mathbb{C}} : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ ) les inclusions naturelles.

### Proposition 10-6

(i) *La topologie quotient sur  $P^n(\mathbb{R})$  (resp.  $P^n(\mathbb{C})$ ) associée à la restriction*

$$\pi_{\mathbb{R} \circ \iota_{\mathbb{R}}} : S^n \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$$

*(resp.  $\pi_{\mathbb{C} \circ \iota_{\mathbb{C}}} : S^{2n+1} \longrightarrow P^n(\mathbb{C})$ ) est la même que la précédente.*

(ii) *Les espaces projectifs  $P^n(\mathbb{R})$  et  $P^n(\mathbb{C})$  sont compacts.*

La partie (i) résulte immédiatement de ce que  $\pi_{\mathbb{R} \circ \iota_{\mathbb{R}}}$  (resp.  $\pi_{\mathbb{C} \circ \iota_{\mathbb{C}}}$ ) reste surjectif, et de ce que la topologie naturelle de  $S^n$  (resp.  $S^{2n+1}$ ) est induite par  $\iota_{\mathbb{R}}$  (resp.  $\iota_{\mathbb{C}}$ ) à partir de celle de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  (resp.  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ ).

Puisque  $S^n$  (resp.  $S^{2n+1}$ ) est compact, il suffit de montrer que  $P^n(\mathbb{R})$  (resp.  $P^n(\mathbb{C})$ ) est séparé, pour démontrer (ii), l'image continue d'un compact dans un espace séparé étant compact. Or, si les deux droites  $D_0 = [X_1^0, \dots, X_{n+1}^0]$  et  $D'_0 = [X_1'^0, \dots, X_{n+1}'^0]$  sont distinctes dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  (resp.  $\mathbb{C}^{n+1}$ ), elles forment, pour le produit scalaire  $\sum_{i=1}^{n+1} X_i X'_i$  (resp.  $\operatorname{Re} \left( \sum_{i=1}^{n+1} X_i \bar{X}'_i \right)$ ) un angle  $\theta_0 \in ]0, \pi/2]$ , et l'ensemble des droites  $D$  telles que  $|\operatorname{tg}(D, D_0)| < \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}$  est un voisinage de  $D_0$  dans  $P^n(\mathbb{R})$  (resp.  $P^n(\mathbb{C})$ ), qui ne rencontre pas le voisinage de  $D'_0$  des droites  $D$  vérifiant  $|\operatorname{tg}(D, D'_0)| < \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}$ .

**Remarque :** Deux points distincts de  $S^n$  définissant la même droite dans  $P^n(\mathbb{R})$  sont nécessairement antipodaux (diamétralement opposés) sur  $S^n$  : la restriction de  $\pi_{\mathbb{R} \circ \iota_{\mathbb{R}}}$  à un ouvert de  $S^n$  ne contenant jamais deux points antipodaux est donc un homéomorphisme sur un ouvert de  $P^n(\mathbb{R})$ .



Si  $(X_1, \dots, X_{n+1})$  est un point de  $S^{2n+1}$  dans  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ , l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  définissant le même point  $[X_1, \dots, X_{n+1}]$  dans  $P^n(\mathbb{C})$  est l'ensemble des points  $(e^{i\theta} \cdot X_1, \dots, e^{i\theta} \cdot X_{n+1})$  ( $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ) : ils forment un cercle sur  $S^{2n+1}$ .

### Proposition 10-7

Notons  $U_i$  l'ensemble des points  $[X_1, \dots, X_{n+1}]$  de  $P^n(\mathbb{R})$  (resp.  $P^n(\mathbb{C})$ ) tels que  $X_i \neq 0$ .

- (i) *L'ensemble  $(U_1, U_2, \dots, U_{n+1})$  constitue un recouvrement de  $P^n(\mathbb{R})$  (resp.  $P^n(\mathbb{C})$ ) par des ouverts.*
- (ii) *L'application*

$$\varphi_i : [X_1, \dots, X_{n+1}] \longrightarrow \left( \frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_{n+1}}{X_i} \right)$$

*est un homéomorphisme de  $U_i$  sur  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ).*

Puisque l'ensemble  $\tilde{U}_i$  des points  $(X_1, \dots, X_{n+1})$  de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  (resp.  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ ) tels que  $X_i$  soit non nul est ouvert,  $U_i$  l'est aussi. Enfin, si  $(X_1, \dots, X_{n+1})$  est non nul dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  (resp.  $\mathbb{C}^{n+1}$ ), l'une au moins des composantes  $X_i$  est non nulle : les ouverts  $U_i (1 \leq i \leq n+1)$  constituent donc un recouvrement, d'où (i).

L'application  $\varphi_i$  est évidemment bijective. Elle est continue, car  $\varphi_i \circ \pi_{\mathbb{R}} : \tilde{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$  (resp.  $\varphi_i \circ \pi_{\mathbb{C}} : \tilde{U}_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ) est continue. Puisque l'inverse  $\varphi_{i^{-1}}$  est égale à l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow [x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n]$$

qui est continue (car composée de l'application continue  $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n)$  avec l'application de passage aux quotients),  $\varphi_i$  est un homéomorphisme, d'où (ii).

### Corollaire

*L'espace affine  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ), identifié à l'ensemble des points  $[X_1, \dots, X_{n+1}]$  de  $P^n(\mathbb{R})$  (resp.  $P^n(\mathbb{C})$ ) tels que  $X_{n+1}$  soit non nul,*

*est un ouvert de  $P^n(\mathbb{R})$  (resp.  $P^n(\mathbb{C})$ ), et par conséquent, l'hyperplan de l'infini*

$$P^{n-1}(\mathbb{R}) = P^n(\mathbb{R}) - \mathbb{R}^n \quad (\text{resp. } P^{n-1}(\mathbb{C}) = P^n(\mathbb{C}) - \mathbb{C}^n)$$

*est fermé dans  $P^n(\mathbb{R})$  (resp.  $P^n(\mathbb{C})$ ).*

En particulier, l'espace affine réel  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert de l'espace compact  $P^2(\mathbb{R})$ . Identifié à  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}^2$  est aussi un ouvert de cet autre espace compact qu'est  $P_1(\mathbb{C})$  : on prendra garde à ne pas confondre ces deux « compactifications » du plan

- par une droite de points à l'infini dans  $P^2(\mathbb{R})$ ,
- par un point à l'infini dans  $P^1(\mathbb{C})$ .

Lorsqu'il en est besoin, on choisit en pratique, celle des deux compactifications convenant le mieux au problème étudié : les transformations projectives de  $P^2(\mathbb{R})$  préservent l'alignement sur des droites réelles, tandis que les homographies de  $P^1(\mathbb{C})$  préservent la cocyclicité.

L'espace compact  $P^1(\mathbb{C})$  n'est en fait rien d'autre que la « sphère de Riemann ».

### Proposition 10-8

*La projection stéréographique  $S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$ , de la sphère  $S^2$  (d'équation  $X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2$ ) privée du pôle  $N(0, 0, a)$ , sur le plan complexe  $\mathbb{C}$  (identifié à  $Z=0$ ), se prolonge en un homéomorphisme*

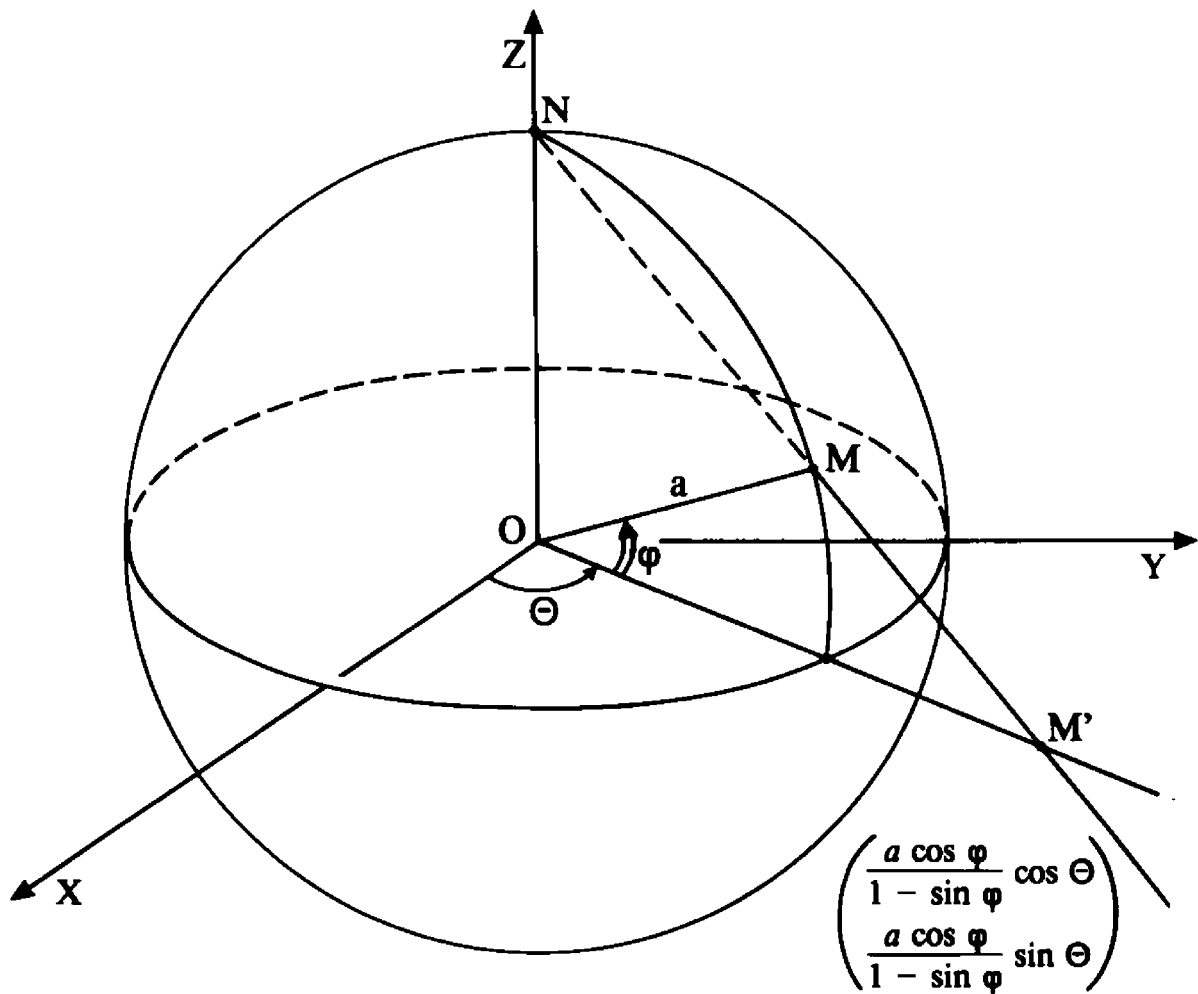
$$S^2 \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} = P^1(\mathbb{C}).$$

Notons en effet  $(\theta, \varphi)$  un système de coordonnées sphériques sur  $S^2$  :

$$X = a \cos \varphi \cos \theta, \quad Y = a \cos \varphi \sin \theta, \quad Z = a \sin \varphi.$$

La projection stéréographique de pôle  $N$  est l'application

$$(\theta, \varphi) \longrightarrow a \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{i\theta} \in \mathbb{C} \quad \left( \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right] \right).$$



Plongeant  $\mathbb{C}$  dans  $P^1(\mathbb{C})$  par l'application usuelle,

$$z \longrightarrow [z, 1]$$

la projection stéréographique s'écrit encore

$$(\theta, \varphi) \longrightarrow [a \cos \varphi e^{i\theta}, 1 - \sin \varphi] \in P^1(\mathbb{C}).$$

Puisque l'application

$$(\theta, \varphi) \longrightarrow (a \cos \varphi e^{i\theta}, 1 - \sin \varphi) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$$

se prolonge en une application continue à tout  $S^2$  (pôle N correspondant à  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ), la proposition en résulte.

Notons enfin qu'un automorphisme  $s$  de l'espace vectoriel  $K^{n+1}$  induit un homéomorphisme de  $K^{n+1} - \{0\}$  sur lui-même, pour  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La transformation projective  $\widehat{s}$  est donc un homéomorphisme

de  $P^n(K)$  sur lui-même. Si  $\mathcal{F}$  est une famille de bijections  $f : P^n(K) \longrightarrow X$  définissant une structure de  $K$  espace projectif de dimension  $n$  sur un ensemble  $X$ , la topologie sur  $X$  déduite de celle de  $P^n(K)$  par transport de structure à l'aide de la bijection  $f$  ne dépend pas du choix de  $f$  dans  $\mathcal{F}$  (si  $f'$  est une autre bijection de  $\mathcal{F}$ ,  $f'^{-1} \circ f$  est un homéomorphisme de  $P^n(K)$  sur lui-même!).

Plus généralement, toute transformation projective d'un  $K$ -espace projectif de dimension  $n$  sur un autre (la tppr relative à une conique, par exemple, toute perspective  $\widehat{\Pi} \longrightarrow \widehat{\Pi}'$ , ou toute homographie entre droites projectives) est un homéomorphisme. Et, si  $H$  est un hyperplan d'un  $K$ -espace projectif  $X$  définissant une structure affine, l'espace affine  $X - H$  (homéomorphe à  $K^n$ ) est un ouvert de  $X$  (par exemple  $\Pi$  est ouvert dans  $\widehat{\Pi}$  et  $\Pi_{\mathbb{C}}$  dans  $\widehat{\Pi}_{\mathbb{C}}$ , où  $\Pi$  désigne un plan affine réel).

## 5 - Exercices sur le chapitre 10

- 1 / Exhiber des structures affines sur le plan projectif, par rapport auxquelles les résultats suivants de géométrie projective deviennent des résultats de géométrie affine : le théorème de Pappus, le théorème de Pascal, les résultats des exercices 1, 4, 6 du chapitre 5.
- 2 / On se donne deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  dans un plan projectif. Quelles sont les structures sur ce plan par rapport auxquelles le théorème de Desargues devient le théorème de Thalès?
- 3 / Quelles sont toutes les structures affines dans un plan projectif pour lesquelles un quadrilatère complet donné est un parallélogramme? Supposant ce plan réel, quelles sont toutes les structures angulaires par rapport auxquelles ce quadrilatère complet est un rectangle? un losange? un carré?
- 4 / Soit  $\mathcal{X}$  un plan projectif, et  $\mathcal{K}(\mathcal{X})$  le plan projectif des droites de  $\mathcal{X}$ .

Qu'est-ce qu'une droite dans  $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ ? une structure affine? un parallélogramme? une conique non dégénérée (cf. exercice 6 du chapitre 9)? une conique dégénérée? une parabole?

Si  $K = \mathbb{R}$ , qu'est-ce qu'une ellipse? une hyperbole? le centre d'une conique à centre non dégénérée? Qu'est-ce qu'une structure angulaire? les axes d'une conique? les foyers?

- 5/ Montrer que le groupe des similitudes de centre  $O$ , dans un plan euclidien  $\Pi$ , s'identifie naturellement au sous-groupe des transformations projectives réelles de  $\Pi_{\mathbb{C}}$  admettant  $O$ ,  $I$  et  $J$  comme points invariants ( $I$  et  $J$  désignent les points cycliques).
- 6/ Utiliser la formule de Laguerre pour redémontrer qu'une rotation du plan euclidien définit une homographie de sa droite de l'infini sur elle-même (cf. chapitre 8, exercice 14). Quels sont les points doubles d'une telle homographie? Quand est-elle involutive?
- 7/ Pour quelle structure affine sur un plan projectif  $\mathcal{X}$  une homologie (resp. homologie harmonique de  $\mathcal{X}$ ) est-elle une homothétie (resp. une symétrie centrale)? Supposant  $\mathcal{X}$  réel, pour quelle structure angulaire sur  $\mathcal{X}$  l'homologie est-elle une affinité orthogonale (resp. une symétrie orthogonale par rapport à une droite)?
- 8/ Quelles sont les transformations affines préservant
  - une conique à centre donnée?
  - une parabole donnée?
- 9/ Reprendre la rédaction du § 6 du chapitre 7, et l'adapter au cadre de la géométrie projective, sans plus distinguer points à l'infini et à distance finie. (Montrer, en particulier, que  $\varphi$  et  $\psi = \varphi^{-1}$  sont des homéomorphismes entre  $\widehat{\Pi}$  et  $\mathcal{D}(\widehat{\Pi})$ .)

## CHAPITRE XI

# *Transformations géométriques*

### 1 - Quelques « traductions »

Pour simplifier, nous limiterons à la dimension 2 les exemples exhibés.

Rappelons d'abord les principes d'extension projective, énoncés au chapitre 10, des résultats de géométries affine et angulaire.

Dans un plan projectif  $\mathcal{X}$ , la donnée d'une droite  $H$  (jouant le rôle de « droite de l'infini ») nous a permis de définir, relativement à  $H$ , les notions de :

- directions de droite et droites parallèles;
- rapport de trois points alignés et milieu;
- parallélogramme;
- parabole;
- conique à centre (avec distinction entre ellipse et hyperbole en géométrie réelle uniquement), directions asymptotiques, asymptotes, diamètres;
- transformations affines.

De même, la donnée de deux points distincts  $I$  et  $J$  sur  $H$  a permis de définir, relativement à  $I$  et  $J$ , les notions (pseudo)-angulaires de :

- cercles;
- angles de droites, et directions orthogonales;
- hyperboles équilatères;
- foyers;
- similitudes.

Les notions affines vont aussi se laisser interpréter en géométrie de la sphère, puisque d'après le chapitre 6, une inversion de pôle  $S$  permet de faire jouer le rôle de « point à l'infini » à n'importe quel point  $S$  donné à l'avance, et de définir, relativement à  $S$ , les notions de :

- droites (cercles ou droites passant par  $S$ ),
- droites parallèles (cercles ou droites tangents en  $S$ ),
- rapport de trois points alignés  $A, B, C$  (birapport  $(A, B, C, S)$  sur le cercle ou la droite), ...

En outre l'angle des tangentes est préservé (au signe près) par inversion, et en particulier la notion d'orthogonalité. De même, est préservée la notion d'égalité du rapport des distances<sup>(1)</sup> (puisque l'inversion transforme faisceau de cercles à points limites en faisceau de cercles à points limites).

Les tppr, enfin, nous ont permis de définir au chapitre 7 un autre type de « lexique »  $\mathcal{X} \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightleftharpoons}} \mathcal{D}(\mathcal{X})$ , échangeant en particulier les notions de :

- point, et droite;
- droite passant par deux points, et point d'intersection de deux droites;
- points alignés et droites concourantes (avec préservation du birapport);
- courbe lieu de points, et courbe enveloppe de droites;
- droite tangente, et point de contact (ou point caractéristique).

Si  $\mathcal{X}$  a été muni d'une structure de plan affine, par la donnée d'une droite de l'infini  $H$ , le point  $\Omega = \psi(H)$  va jouer un rôle particulier dans la traduction de tout théorème de géométrie affine. Si  $\mathcal{X}$  a en outre été muni d'une structure (pseudo)-angulaire  $\{I, J\}$ , la tppr relative à un cercle de centre  $\Omega$  échange aussi cercles et coniques de foyer  $\Omega$ , et vérifie l'égalité suivante entre angles orientés de droites (où  $A, B$  appartiennent à  $\mathcal{X} - H - \{\Omega\}$ ,  $a = \varphi(A)$ ,  $b = \varphi(B)$ ) :

$$(\Omega A, \Omega B) = (a, b).$$

(<sup>1</sup>) C'est-à-dire que l'égalité  $\|M_1A\|/\|M_1B\| = \|M_2A\|/\|M_2B\|$  est préservée par inversion.

Ces « dictionnaires » étant rappelés, voyons comment on peut les utiliser à « traduire » certains résultats déjà connus; et nous analyserons avec plus de précision la démarche effectuée dans les paragraphes suivants.

Nous allons partir d'un résultat très élémentaire de géométrie affine, tel celui concernant le centre de gravité d'un triangle. Cependant, afin de mieux distinguer dans ce théorème, ce qui s'exprime uniquement en termes *d'incidence* (droite passant par deux points, intersection de deux droites) et se dessine facilement, de ce qui s'exprime en termes de *rapports ou birapports* (moins facile à visualiser), nous allons le réénoncer sous la forme suivante :

### **Théorème 1-1'**

*Dans un plan affine  $\Pi$ , à partir d'un triangle  $A, B, C$ , on construit un nouveau triangle  $A'B'C'$  en menant respectivement*

*par  $A$ , la parallèle à  $BC$  (notée  $D_A$ ),*

*par  $B$ , la parallèle à  $AC$  (notée  $D_B$ ),*

*par  $C$ , la parallèle à  $AB$  (notée  $D_C$ ).*

*On pose*

$$\begin{aligned} A' &= D_B \cap D_C, & B' &= D_A \cap D_C, & C' &= D_A \cap D_B, \\ a &= AA' \cap BC, & b &= BB' \cap AC, & c &= CC' \cap AB. \end{aligned}$$

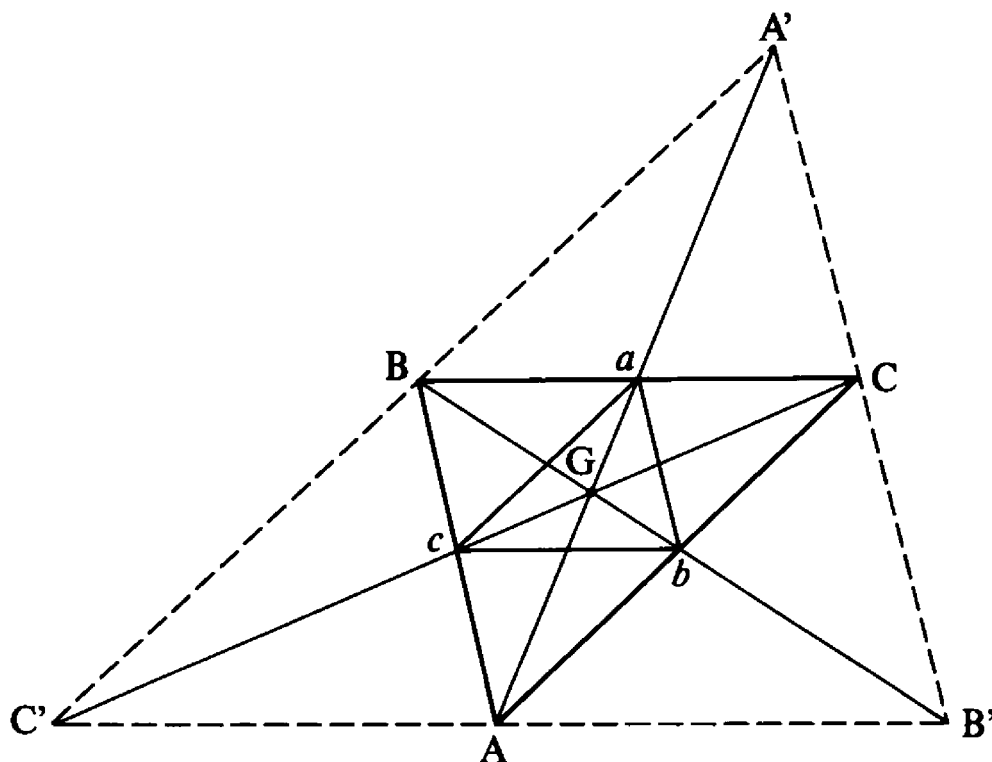
**Conclusions :**

- (i) *Les trois droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sont concourantes.*
- (ii) *Les droites  $bc$  et  $BC$  sont parallèles, de même que  $ac$  et  $AC$ , ainsi que  $ab$  et  $AB$ .*
- (iii) *Les points  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont respectivement les milieux des segments  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ .*
- (iv) *Si  $G$  désigne le point de concours des droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$ , on a :  $\frac{\overline{GA}}{\overline{Ga}} = -2$  (et de même,  $\frac{\overline{GB}}{\overline{Gb}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{Gc}} = -2$ ).*

[Bien entendu, cet énoncé est rigoureusement équivalent, du moins si  $\Pi$  est réel, à celui du théorème 1-1 du chapitre 1. Mais ici,



les diverses données et constructions préliminaires, ainsi que les deux premières conclusions, s'expriment uniquement en termes d'incidence.]



La traduction du théorème 1-1' en géométrie projective nous permet d'énoncer le

### **Théorème 11-1**

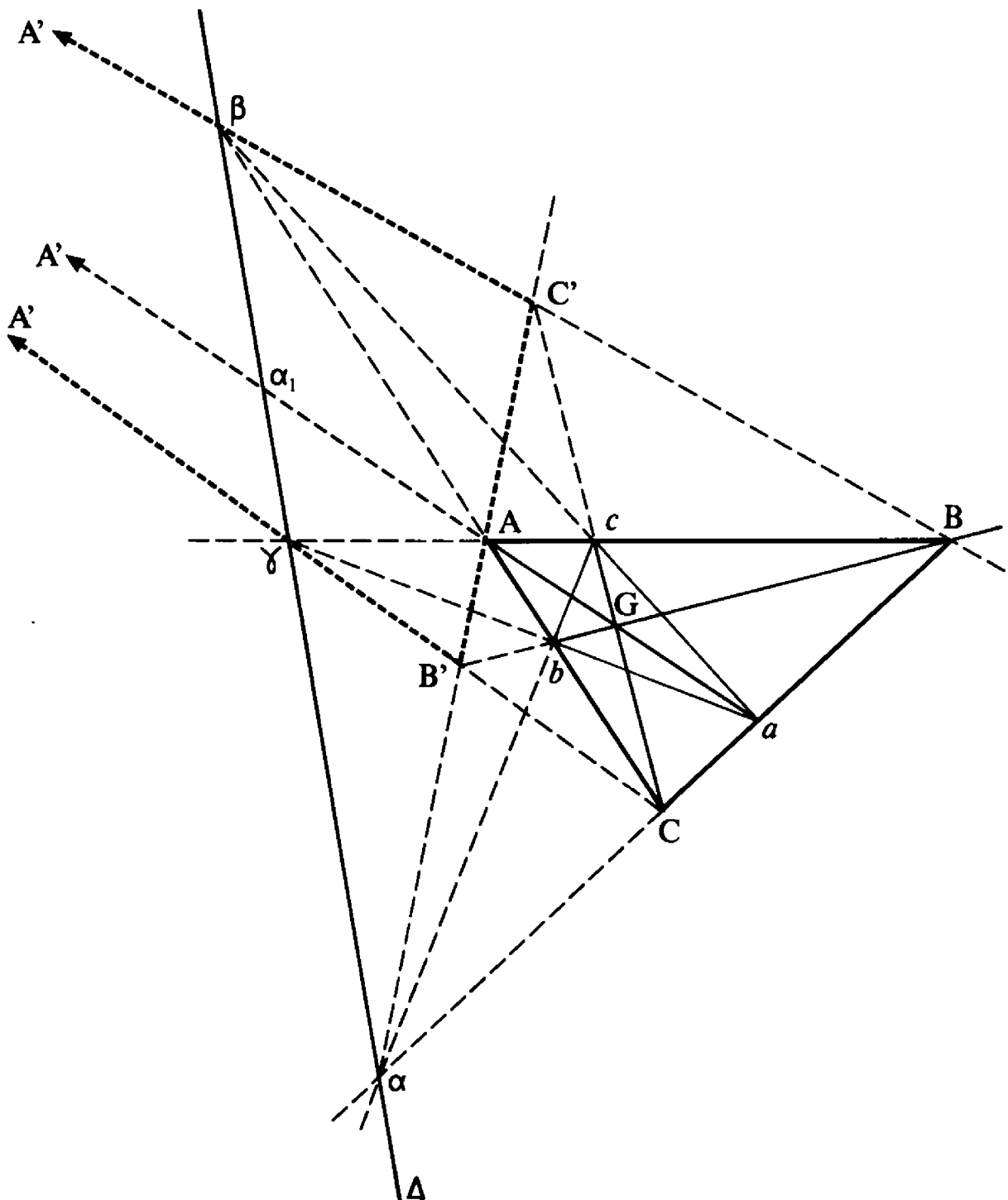
*Etant donnés, dans un plan projectif  $\mathcal{X}$ , trois points  $A, B$  et  $C$  non alignés, et une droite  $\Delta$  ne passant par aucun des trois points  $A, B, C$ , posons :*

$$\begin{aligned} \alpha &= BC \cap \Delta, & \beta &= AC \cap \Delta, & \gamma &= AB \cap \Delta, \\ A' &= \beta B \cap \gamma C, & B' &= \alpha A \cap \gamma C, & C' &= \alpha A \cap \beta B, \\ a &= AA' \cap BC, & b &= BB' \cap AC, & c &= CC' \cap AB. \end{aligned}$$

Conclusions :

- (i) *Les droites  $AA', BB'$  et  $CC'$  sont concourantes.*
- (ii) *Les points  $\alpha, b$  et  $c$  sont alignés, de même que  $\beta, a, c$  et  $\gamma, a, b$ .*
- (iii) *La division  $B, C, a, \alpha$  est harmonique, de même que  $A, C, b, \beta$  et  $A, B, c, \gamma$ .*

- (iv) Si  $G$  désigne le point de concours des droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , et si  $\alpha_1 = AA' \cap \Delta$ , le birapport  $(A, a, G, \alpha_1)$  est égal à  $-2$ , et de même pour  $(B, b, G, \beta_1)$  et  $(C, c, G, \gamma_1)$  avec  $\beta_1 = BB' \cap \Delta$ , et  $\gamma_1 = CC' \cap \Delta$ .



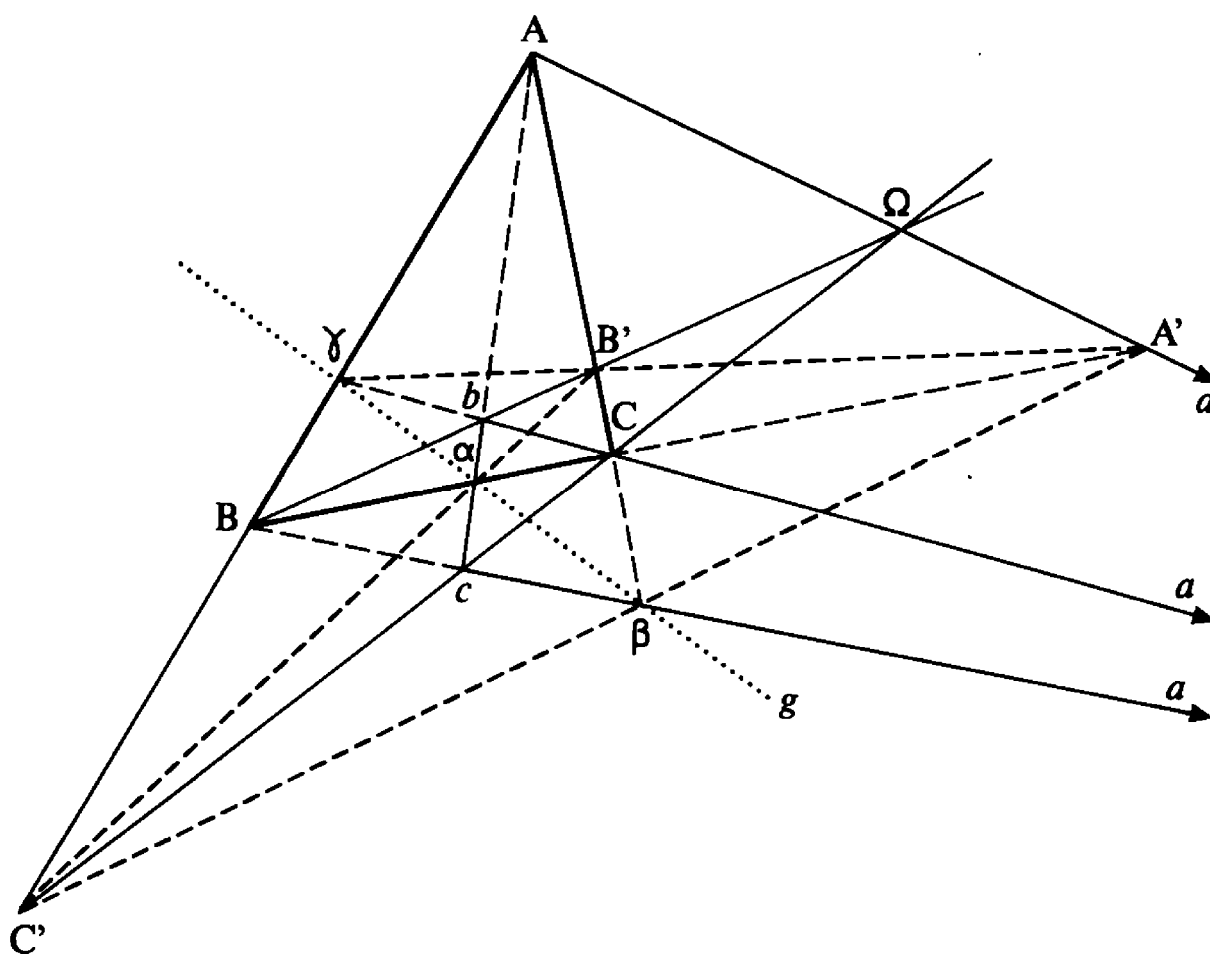
Une démonstration consiste évidemment à munir  $\mathcal{X}$  de la structure affine définie par  $\Delta$ , et à appliquer le théorème 1-1' dans le plan affine  $\mathcal{X} - \Delta$ .

La traduction du théorème 1-1' par tppr nous donne maintenant le

### **Théorème 11-2**

*Etant donnés, dans un plan projectif  $\mathcal{X}$ , un triangle  $ABC$  et un point  $\Delta$  n'appartenant à aucun des côtés du triangle, on pose :*

$$\begin{aligned} A' &= A\Omega \cap BC, & B' &= B\Omega \cap AC, & C' &= C\Omega \cap AB, \\ \alpha &= B'C' \cap BC, & \beta &= A'C' \cap AC, & \gamma &= A'B' \cap AB, \\ a &= \beta B \cap \gamma C, & b &= \alpha A \cap \gamma C, & c &= \alpha A \cap \beta B. \end{aligned}$$



Conclusions :

- (i) Les points  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont alignés.
- (ii) Les points  $a$ ,  $A$ , et  $\Omega$  sont alignés (de même que  $b$ ,  $B$ ,  $\Omega$  et  $c$ ,  $C$ ,  $\Omega$ ).
- (iii) Le faisceau  $AB$ ,  $AC$ ,  $A\alpha$ ,  $A\Omega$  est harmonique, de même que  $BC$ ,  $BA$ ,  $B\beta$ ,  $B\Omega$  et  $CA$ ,  $CB$ ,  $C\gamma$ ,  $C\Omega$ .
- (iv) Notant  $g$  la droite  $\alpha\beta\gamma$ , le birapport  $(B'C', BC, g, \alpha\Omega)$  est égal à  $-2$ , de même que  $(C'A', CA, g, \beta\Omega)$  et  $(A'B', AB, g, \gamma\Omega)$ .

Interprétant le triangle de sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dans  $\mathcal{X}$  comme un triangle de sommets  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  dans l'espace  $\mathcal{D}(\mathcal{X})$  des droites projectives de  $\mathcal{X}$ , et le point  $\Omega$  de  $\mathcal{X}$  comme une droite dans  $\mathcal{D}(\mathcal{X})$  (en l'occurrence, le faisceau des droites de  $\mathcal{X}$  passant par  $\Omega$ ), le théorème 11-2 n'est rien d'autre que le théorème 11-1 appliqué à ce triangle et à cette droite dans l'espace  $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ , ou encore le théorème 1-1' dans l'espace affine  $\mathcal{D}(\mathcal{X})$  (structure affine définie par la « droite »  $\Omega$ ). Mais, plutôt de nous contenter d'une affirmation aussi brutale, nous allons effectuer une tppr et traduire une à une les constructions :

$$\begin{aligned}
 A, B, C &\longleftrightarrow B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 \\
 BC, CA, AB &\longleftrightarrow A_1, B_1, C_1 \\
 \Omega &\longleftrightarrow \Delta_1 \\
 A\Omega, B\Omega, C\Omega &\longleftrightarrow \alpha_1 = \Delta_1 \cap B_1C_1, \beta_1, \gamma_1 \\
 A' = A\Omega \cap BC, B', C' &\longleftrightarrow \alpha_1A_1, \beta_1B_1, \gamma_1C_1 \\
 B'C', A'C', A'B' &\longleftrightarrow A'_1 = \beta_1B_1 \cap \gamma_1C_1, B'_1, C'_1 \\
 \alpha = B'C' \cap BC, \beta, \gamma &\longleftrightarrow A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1 \\
 \alpha A, \beta B, \gamma C &\longleftrightarrow a_1 = A_1A'_1 \cap B_1C_1, b_1, c_1 \\
 a = \beta B \cap \gamma C, b, c &\longleftrightarrow b_1c_1, a_1c_1, a_1b_1.
 \end{aligned}$$

Appliquant le théorème 11-1 au triangle  $A_1B_1C_1$  avec la droite  $\Delta_1$ , les conclusions du théorème 11-1 se retraduisent en celles de 11-2 (par exemple : les droites  $A_1A'_1$ ,  $B_1B'_1$  et  $C_1C'_1$  sont concourantes en un point  $G$ ; donc les points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont alignés sur une droite  $g$ ; etc.), d'où le théorème.

La traduction du théorème 1-1' par inversion nous donne, cette fois-ci, le

### **Théorème 11-3**

*On se donne quatre points  $A, B, C, S$  dans un plan euclidien. On les suppose ni alignés, ni cocycliques.*

*On conviendra que le mot «cercle» signifiera cercle ou droite selon les cas. Notons :*

$\Gamma_A$  le «cercle» passant par  $A$  et  $S$ , tangent en  $S$  au «cercle» (SBC),

$\Gamma_B$  le «cercle» passant par  $B$  et  $S$ , tangent en  $S$  au «cercle» (SAC).

$\Gamma_C$  le «cercle» passant par  $C$  et  $S$ , tangent en  $S$  au «cercle» (SAB),

$A'$  le point d'intersection, autre que  $S$ , des «cercles»  $\Gamma_B$  et  $\Gamma_C$ ,

$B'$  le point d'intersection, autre que  $S$ , des «cercles»  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_C$ ,

$C'$  le point d'intersection, autre que  $S$ , des «cercles»  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$ ,

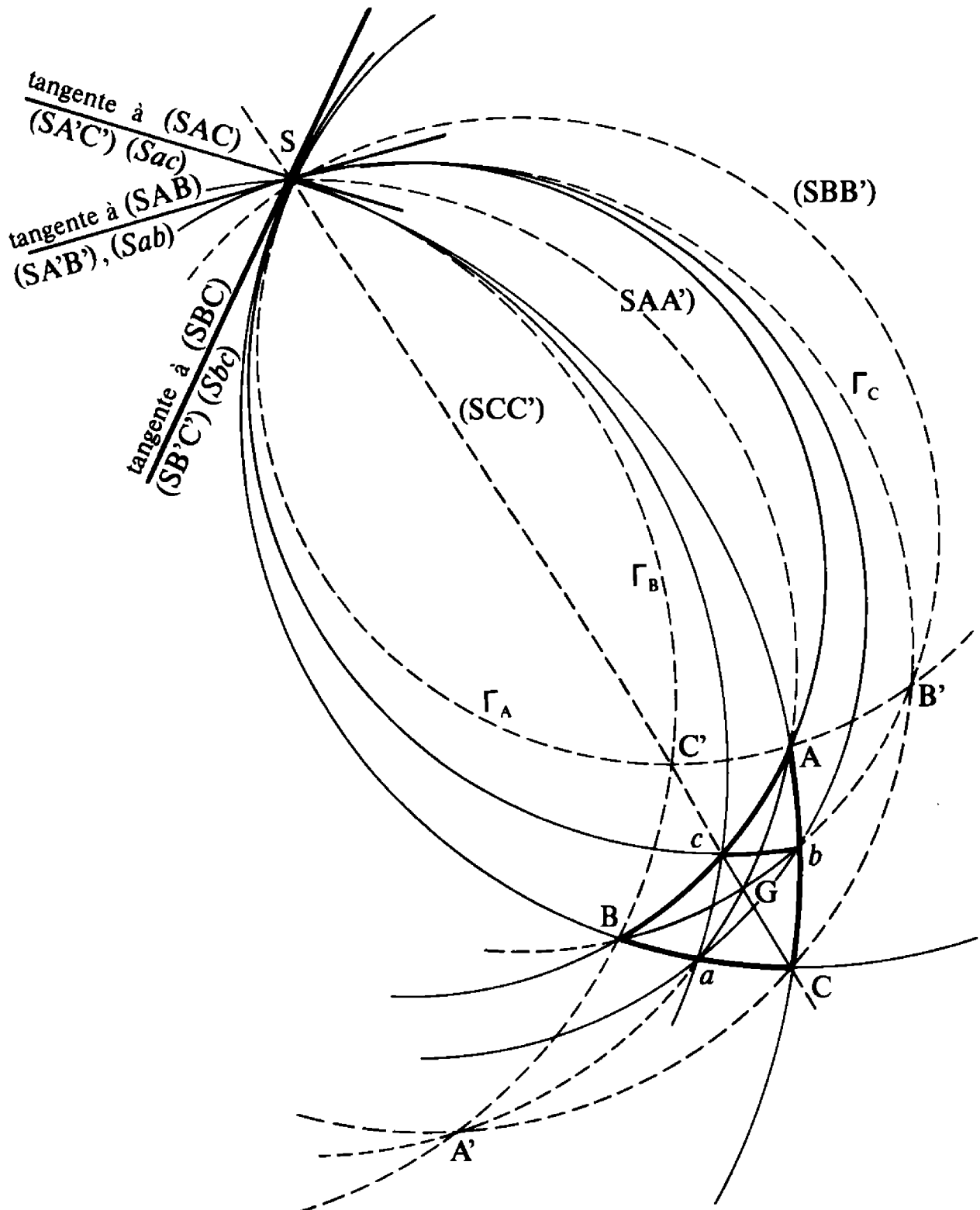
$a$  le point d'intersection, autre que  $S$ , des «cercles» (SBC) et (SAA'),

$b$  le point d'intersection, autre que  $S$ , des «cercles» (SAC) et (SBB'),

$c$  le point d'intersection, autre que  $S$ , des «cercles» (SAB) et (SCC').

**Conclusions :**

- (i) Les «cercles» (SAA'), (SBB') et (SCC') appartiennent à un même faisceau à points de base.
- (ii) Les «cercles» (SBC) et (Sbc) sont tangents en  $S$ , et, de même (SAB) et (Sab), ainsi que (SAC) et (Sac).
- (iii) Les quadrangles BCaS, ACbS et ABcS sont harmoniques.
- (iv) Si  $G'$  désigne le point de base autre que  $S$  du faisceau de cercles défini en (i), le birapport  $(A, a, G', S)$  est égal à  $-2$  sur le «cercle» contenant ces points (de même que  $(B, b, G', S)$  et  $(C, c, G', S)$ ).



La démonstration est évidente : on effectue une inversion de pôle  $S$ , et l'on est ramené au théorème 1-1'.

Les théorèmes 1-2 et 1-3, respectivement relatifs au centre du cercle circonscrit et à l'orthocentre d'un triangle se laissent tout

aussi bien traduire projectivement, une fois le plan projectif  $\mathcal{X}$  muni d'une structure pseudo-angulaire  $\{K, L\}$ . Au lieu d'énoncer la forme la plus générale de cette traduction, choisissons une structure pseudo-angulaire particulière : nous prendrons pour  $K$  et  $L$  des points à l'infini dans des directions orthogonales réelles d'un plan euclidien  $\Pi$ .

### Remarques :

1) Puisque  $K$  et  $L$  ne sont pas imaginaires conjugués, il s'agit d'une structure pseudo-angulaire, non angulaire.

2) La structure affine sous-jacente est la structure affine naturelle, puisque  $K$  et  $L$  sont à l'infini.

3) Dire que des directions  $d$  et  $d'$  sont « orthogonales » relativement à  $K$  et  $L$  signifie que  $K$  et  $L$  sont les directions des bissectrices (au sens de la structure euclidienne ordinaire de  $\Pi$ ) de  $d$  et  $d'$ .

Les théorèmes 1-2 et 1-3 deviennent alors le

### **Théorème 11-4**

Donnons-nous un triangle  $ABC$  dans un plan euclidien  $\Pi$ , ainsi que deux directions orthogonales  $K$  et  $L$ . Notons  $a, b, c$  les milieux des côtés  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ . Notons  $G$  le centre de gravité du triangle. Supposons que les côtés du triangle  $ABC$  ne sont parallèles à aucune des deux directions  $K$  et  $L$ .

### Conclusions :

- (i) *Il existe une unique hyperbole équilatère  $\Gamma_1$  de directions asymptotiques  $K$  et  $L$ , passant par  $A, B$  et  $C$ .*
- (ii) *Notons  $O_1$  le centre de  $\Gamma_1$ . Les droites  $aO_1$  et  $BC$  ont des bissectrices parallèles aux asymptotes de  $\Gamma_1$ ; et de même pour  $bO_1$  et  $AC$ , ainsi que pour  $cO_1$  et  $AB$ .*
- (iii) *Les parallèles à  $aO_1$  passant par  $A$ , à  $bO_1$  passant par  $B$ , et à  $cO_1$  passant par  $C$  sont concourantes, et leur point de concours  $H_1$  vérifie  $\overrightarrow{GH_1} = -2\overrightarrow{GO_1}$  (il est en particulier aligné avec  $G$  et  $O_1$ ).*





et n'est évidemment qu'un cas particulier; mais en contrepartie de cet inconvénient, on bénéficie des propriétés supplémentaires d'une tppr relative à un cercle, ce qui rend souvent le théorème obtenu plus facile à interpréter, et visualiser.

A titre d'exemple, utilisons la seconde méthode pour transformer par polaires réciproques relativement à un cercle de centre  $\Omega$  les théorèmes 1-2 et 1-3. A cet effet, réutilisons les notations du théorème 11-2, en supposant de plus que  $\Pi$  est un plan euclidien et  $\mathcal{X} = \widehat{\Pi}_C$ . Soit donc  $A, B, C$  un triangle dans  $\Pi$ . Supposons que le centre  $\Omega$  du cercle n'est sur aucun des côtés du triangle, et notons respectivement

$a'$  le point d'intersection avec  $BC$  de la perpendiculaire à  $\Omega A$  en  $\Omega$

$b'$  le point d'intersection avec  $AC$  de la perpendiculaire à  $\Omega B$  en  $\Omega$

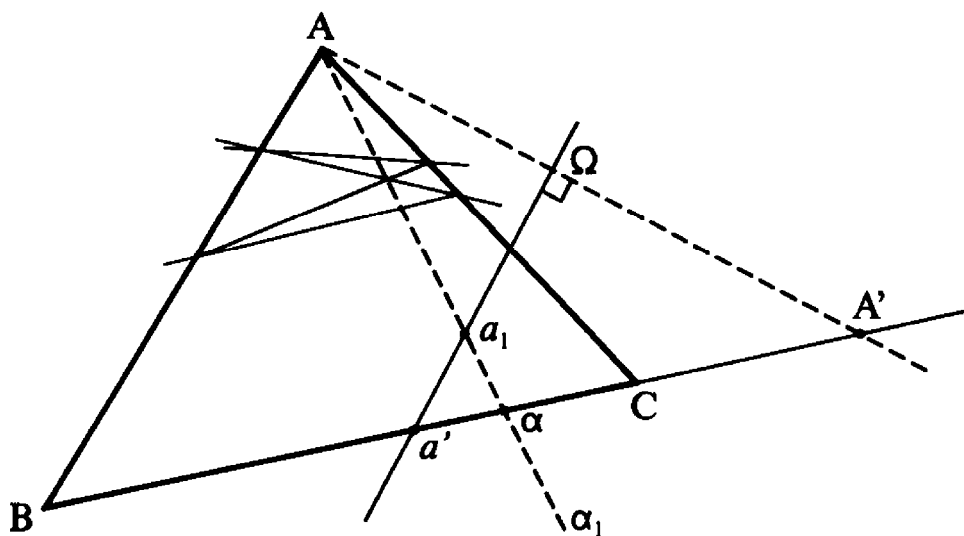
$c'$  le point d'intersection avec  $AB$  de la perpendiculaire à  $\Omega C$  en  $\Omega$

$a_1$  le point d'intersection avec  $\alpha_1$  de la perpendiculaire à  $\Omega A$  en  $\Omega$

$b_1$  le point d'intersection avec  $\beta_1$  de la perpendiculaire à  $\Omega B$  en  $\Omega$

$c_1$  le point d'intersection avec  $\gamma_1$  de la perpendiculaire à  $\Omega C$  en  $\Omega$

où  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  désignent respectivement les polaires du point  $\Omega$  par rapport aux droites  $(AB, AC), (BA, BC), (CA, CB)$ .



[Remarque :  $\alpha_1 \cap BC$  est le point  $\alpha$  du théorème 11-2, et de même pour  $\beta$  et  $\gamma$ .]



- (i) *Il existe une unique conique  $C$ , de foyer  $\Omega$ , tangente aux trois côtés  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$  du triangle.*
- (ii) *Les trois points  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  sont alignés; (soit  $\omega$  la droite qui les contient).*
- (iii) *La droite  $\omega$  est la directrice de  $C$  relative au foyer  $\Omega$ .*
- (iv) *Les trois points  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  sont alignés; (soit  $h$  la droite qui les contient).*
- (v) *Les trois droites  $g$ ,  $h$  et  $\omega$  sont concourantes, et — si  $\delta$  désigne leur point de concours — le birapport  $(h, \omega, g, \delta\Omega)$  est égal à  $-2$ .*

Le soin de vérifier qu'il s'agit bien là de la transcription des théorèmes 1-2 et 1-3 par tppr relative à un cercle de centre  $\Omega$ , en complétant le dictionnaire entamé au cours de la démonstration de 11-2, est laissé au lecteur.

En remplaçant, dans les définitions de  $a'$  et  $a_1$  la perpendiculaire à  $\Omega A$  en  $\Omega$  par la droite symétrique de  $\Omega A$  relativement à deux droites orthogonales  $\Omega x$  et  $\Omega y$  (de directions respectives  $K$  et  $L$ ), on aurait obtenu un résultat absolument analogue, à condition de remplacer dans la conclusion (i) l'expression «de foyer  $\Omega$ » par «tangente aux deux droites  $\Omega x$  et  $\Omega y$ », et dans la conclusion (iii) l'expression «directrice relative au foyer  $\Omega$ » par «polaire de  $\Omega$  relativement à  $C$ ».

Pour démontrer ce nouveau résultat, on pourrait au choix :

- transformer 1-1, 1-2 et 1-3 par une tppr relative à une hyperbole équilatère de centre  $\Omega$  et d'asymptotes  $\Omega x$ ,  $\Omega y$ ;
- transformer 11-1 et 11-4 par une tppr relative à un cercle centré en  $\Omega$ ;
- transformer 11-2 et 11-5 par une transformation projective  $\varphi : \widehat{\Pi}_C \longrightarrow \widehat{\Pi}_C$  vérifiant  $\varphi(K)=I$  et  $\varphi(L)=J$ .

La traduction par inversion des théorèmes 1-2 et 1-3 fournit de même le

### **Théorème 11-6**

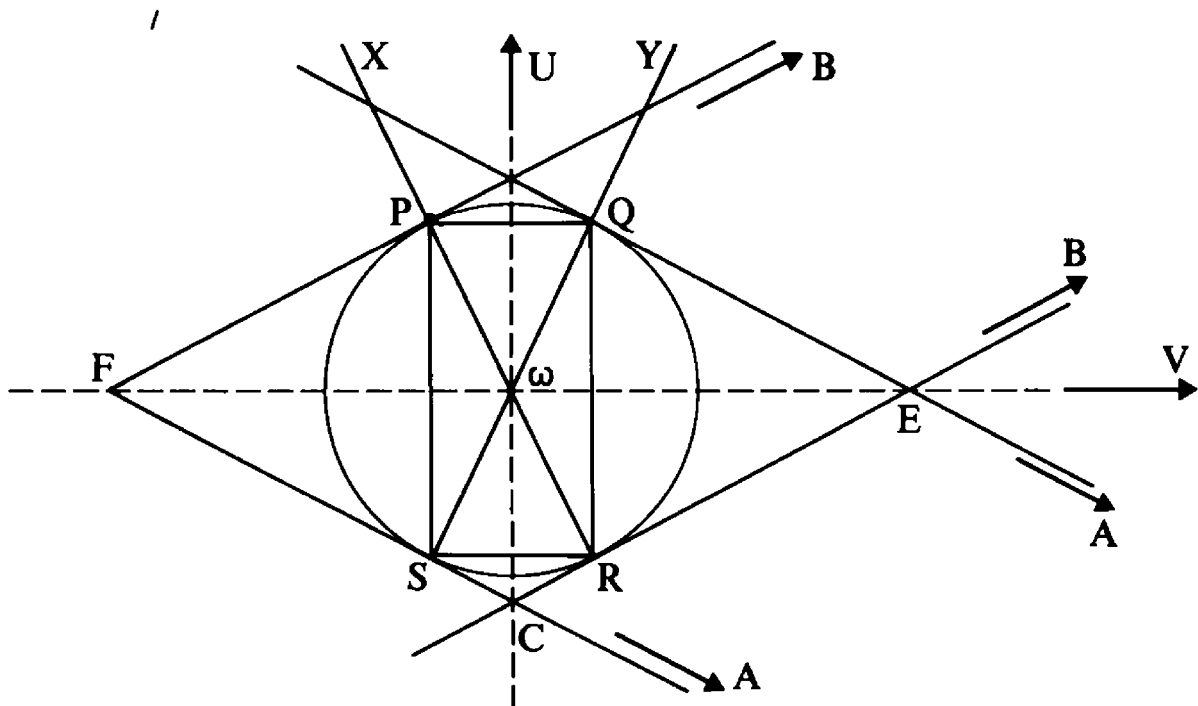
Reprenons les données et les notations du théorème 11-3.

Notons, de plus :

- $\Gamma_A^1$  le « cercle » du faisceau à points limites B et C passant par S,
- $\Gamma_B^1$  le « cercle » du faisceau à points limites A et C passant par S,
- $\Gamma_C^1$  le « cercle » du faisceau à points limites A et B passant par S,
- $\Gamma_A^2$  le « cercle » orthogonal à (SBC) passant par A et S,
- $\Gamma_B^2$  le « cercle » orthogonal à (SAC) passant par B et S,
- $\Gamma_C^2$  le « cercle » orthogonal à (SAB) passant par C et S.

Conclusions :

- (i) Les trois « cercles »  $\Gamma_A^1$ ,  $\Gamma_B^1$ ,  $\Gamma_C^1$  appartiennent à un même faisceau à points de base.
- (ii) Les trois « cercles »  $\Gamma_A^2$ ,  $\Gamma_B^2$ ,  $\Gamma_C^2$  appartiennent aussi à un même faisceau à points de base.
- (iii) Si  $O'$  désigne le point de base autre que S du premier de ces deux faisceaux, et  $H'$  le point de base autre que S du second, les points S,  $O'$ ,  $H'$  et  $G'$  sont cocycliques (ou alignés).
- (iv) Les cercles du faisceau à points de base S et  $O'$  sont tous orthogonaux au cercle circonscrit (ABC).



Une inversion de pôle  $S$  nous ramène immédiatement, en effet, aux théorèmes 1-2 et 1-3.

On peut, bien entendu, multiplier ce genre de résultats en partant d'autres figures de base que, celles liées aux théorèmes du chapitre 1, en composant plusieurs transformations (éventuellement de types différents), etc.

Avant de terminer ce paragraphe, nous voudrions montrer qu'il n'est pas nécessaire de partir de résultats savants pour obtenir, par transformation, des situations très diverses. Partons d'une figure manipulable dès l'école primaire, constituée par un losange circonscrit à un cercle (ou un rectangle inscrit dans un cercle).

### « Théorème »

Tout parallélogramme circonscrit (resp. inscrit) dans un cercle est un losange (resp. un rectangle). Si  $FD$ ,  $DE$ ,  $EC$  et  $CF$  sont les côtés du losange (points de contacts respectifs avec le cercle notés  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ), alors :

- (i) les diagonales  $FE$  et  $CD$  du losange, ainsi que les diagonales  $PR$  et  $QS$  du rectangle passent par le centre  $\omega$  du cercle;
- (ii)  $PQ$  et  $RS$  sont parallèles à  $EF$ ;  
 $RQ$  et  $PS$  sont parallèles à  $CD$ ;
- (iii)  $CD$  et  $EF$  sont orthogonales et sont les bissectrices de  $PR$  et  $QS$ ;
- (iv)  $PR$  est orthogonale à  $FD$  et  $CE$ ,  
 $QS$  est orthogonale à  $FC$  et  $DE$ .

Notons  $A$  et  $B$  les directions respectives de  $DE$  et  $CF$  d'une part,  $FD$  et  $CE$  d'autre part.

Notons  $U$  et  $V$  les directions des diagonales  $CD$  et  $EF$ .

Transcrivons projectivement ce résultat, dans un plan projectif complexe  $\mathcal{X}$ , en appelant  $K$  et  $L$  les points de  $\mathcal{X}$  destinés à jouer le rôle des points cycliques de la situation de départ. On obtient le

### Lemme 11-7

*Etant données une conique propre  $\Gamma$  dans un plan projectif complexe et quatre tangentes  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$  à  $\Gamma$  (points de contacts  $PQRS$ ), formant un quadrilatère complet de sommets  $BDF$  sur  $p$ ,*

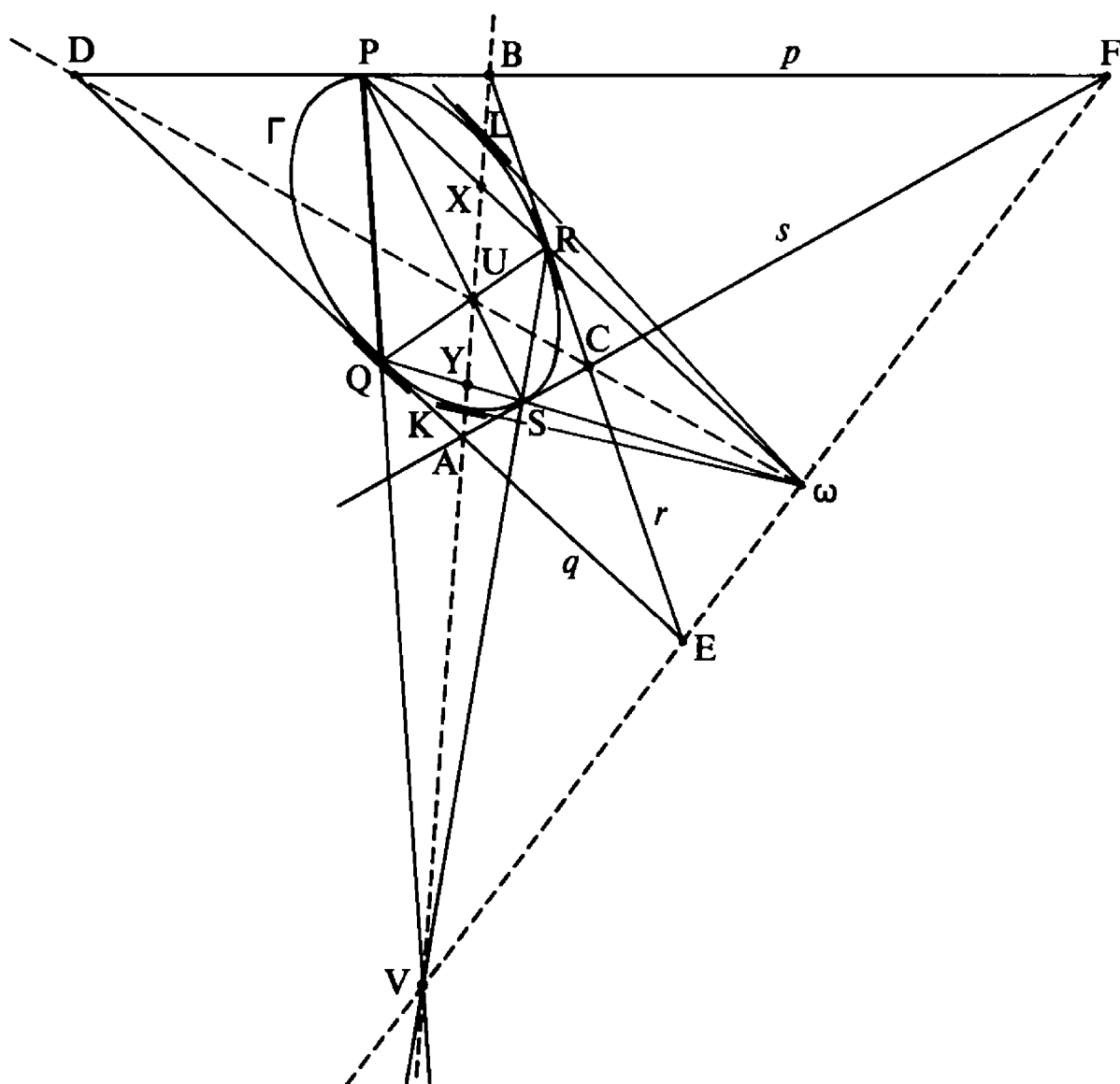
ADE sur  $q$ , BEC sur  $r$  et ACF sur  $s$ , de diagonales AB, CD et EF. Notons  $\omega$  le pôle de AB par rapport à  $\Gamma$ ,

$$U = CD \cap AB, \quad V = EF \cap AB, \quad X = PR \cap AB, \quad Y = QS \cap AB.$$

Notons K et L les intersections de  $\Gamma$  avec AB.

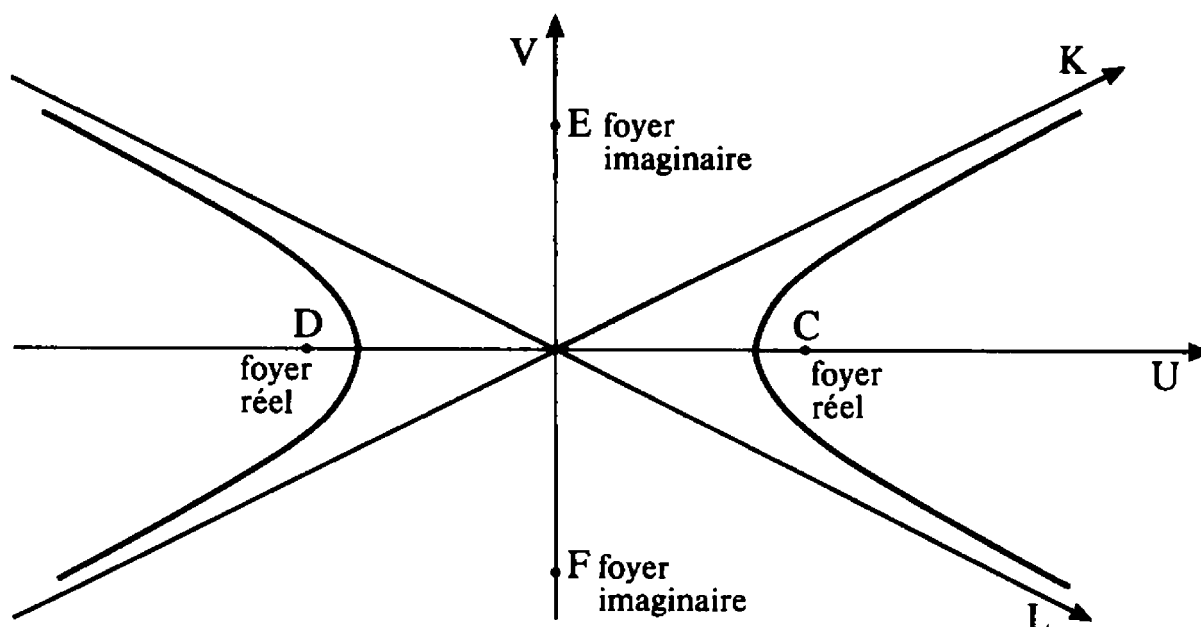
Conclusions :

- (i) Les droites CD, EF, PR et QS passent par  $\omega$ .
- (ii) Les points P, S, U sont alignés, de même que QRU, PQV et RSV.
- (iii) Les divisions UVAB, UVKL, UVXY, KLXB, KLYA,  $PR\omega X$ ,  $QS\omega Y$ ,  $CD\omega U$ ,  $EF\omega V$ , sont harmoniques.



Une transformation projective  $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{\Pi}_C$  telle que  $\varphi(K)=I$  et  $\varphi(L)=J$  (où  $\Pi$  désigne un plan euclidien de points cycliques  $I$  et  $J$ ) permet en effet de se ramener à la situation de départ.

Appliquons maintenant le lemme 11-7 dans le cas d'un espace  $\mathcal{X} = \widehat{\Pi}_C$  où  $\Pi$  est euclidien, mais en supposant que ce sont les points  $A$  et  $B$  qui sont les points cycliques, et non plus les points  $K$  et  $L$  comme au départ : les points  $C, D, E$  et  $F$  deviennent alors les quatre foyers de la conique  $\Gamma$  : on retrouve le fait qu'ils se répartissent deux par deux sur les axes  $\omega U$  et  $\omega V$  de  $\Gamma$  ( $K$  et  $L$  deviennent les directions asymptotiques).



Supposons maintenant que les points cycliques soient les points  $C$  et  $F$ . On obtient le

### **Théorème 11-8**

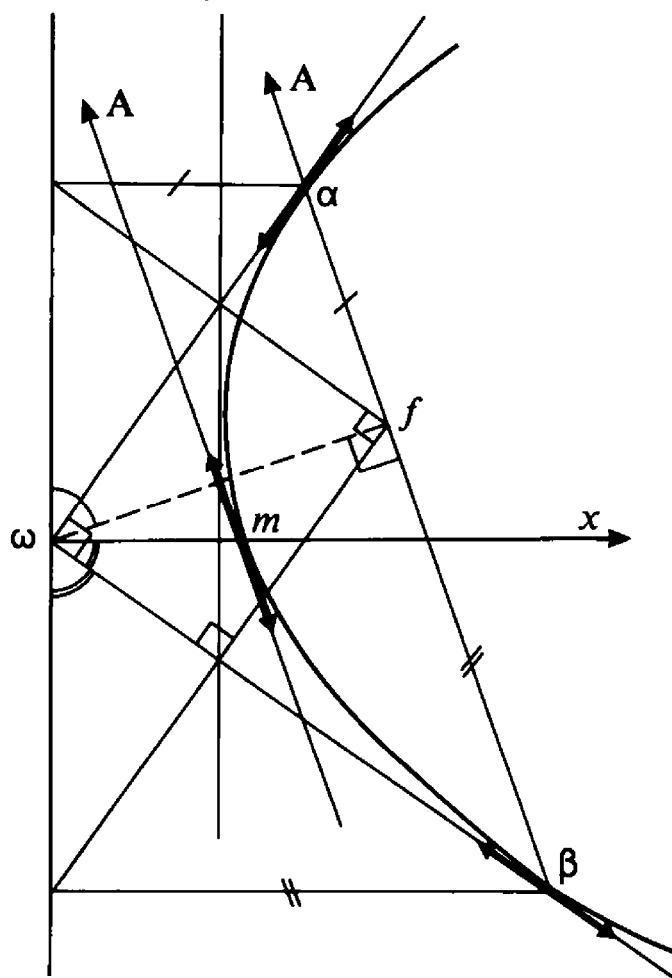
*Soit  $\Gamma$  une parabole, de foyer  $f$ , direction asymptotique  $x$ , directrice  $\Delta$ . Notons  $m$  un point arbitraire de la parabole,  $\alpha$  et  $\beta$  les points d'intersection avec la parabole, de la droite passant par  $f$  parallèle à la tangente en  $m$ ,  $\omega$  le point d'intersection des tangentes à  $\Gamma$  en  $\alpha$  et  $\beta$ .*

Conclusions :

- (i) Les tangentes à  $\Gamma$  en  $\alpha$  et  $\beta$  sont orthogonales.
- (ii) Le point  $\omega$  appartient à la directrice  $\Delta$ .
- (iii) La droite  $\omega m$  est parallèle à l'axe  $fx$  de  $\Gamma$ .
- (iv) Les droites  $\alpha\beta$  et  $f\omega$  sont orthogonales.

*Démonstration.* — On applique le lemme 11-7, avec pour

- $\Gamma$  la parabole,
- A le point à l'infini dans la direction de la tangente en  $m$ ,
- B le foyer  $f$ ,
- C et F les points cycliques I et J,
- E et D les intersections avec la tangente en  $m$  des droites isotropes  $fI$  et  $fJ$  (tangentes à  $\Gamma$ ),
- P et R les points de contact de ces tangentes isotropes,
- Q le point  $m$ ,
- S le point à l'infini  $x$ , direction asymptotique de  $\Gamma$ .
- K et L les points  $\alpha$  et  $\beta$ .





La conclusion (i) exprime que  $(U, V, K, L) = -1$ .

La conclusion (ii) signifie que  $\omega$  et  $f$  sont conjugués par rapport à  $\Gamma$ , ce qui est clair puisque  $\omega$  est le pôle de la droite  $\alpha\beta$  qui passe par  $f$ .

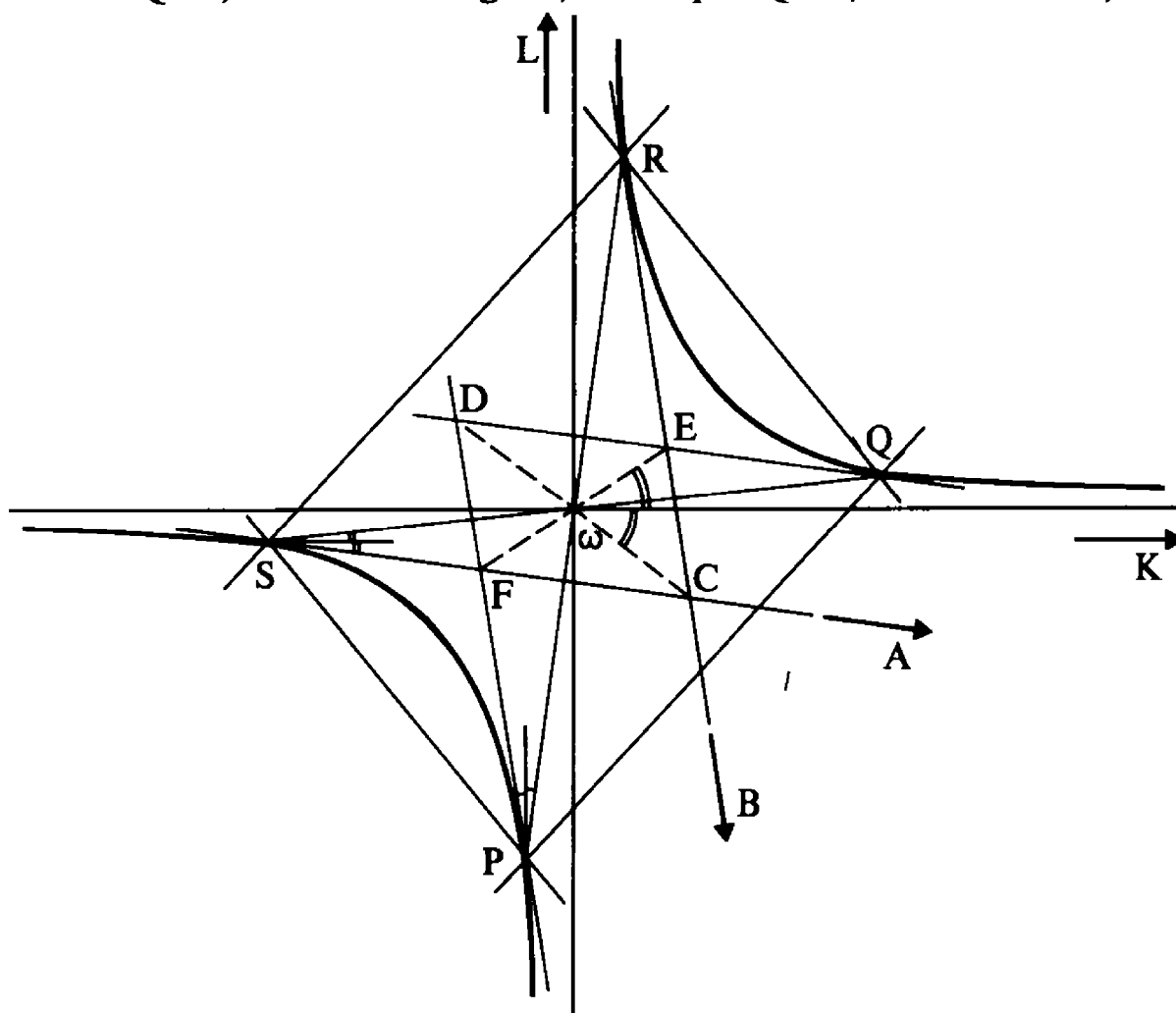
La conclusion (iii) exprime que  $\omega Q$  et  $S$  sont alignés.

La conclusion (iv) exprime que les droites  $f\omega$ ,  $f\alpha\beta$ ,  $fI$  et  $fJ$  forment un faisceau harmonique, ce qui traduit le fait que  $QSwY$  ou  $CD\omega U$  sont des divisions harmoniques.

Si l'on suppose, enfin, les points  $K$  et  $L$  à l'infini dans des directions orthogonales,  $\Gamma$  est une hyperbole équilatère de centre  $\omega$ , et l'on obtient le

### Théorème 11-9

Supposons une hyperbole équilatère  $\Gamma$  circonscrite à un parallélogramme CEDF (diagonales CD et EF; points de contact des côtés notés PQRS, avec PFD alignés, ainsi que QED, RED et SFC).



Conclusions :

- (i) *Les diagonales CD, et EF admettent les asymptotes de l'hyperbole pour bissectrices.*
- (ii) *Les points de contact forment un autre parallélogramme, avec PS et QR parallèles à CD d'une part, PQ et RS parallèles à EF d'autre part.*
- (iii) *Les directions de PR et EC sont symétriques par rapport aux directions asymptotiques, de même que celles de QS et FC.*
- (iv) *Les deux parallélogrammes ont pour centre le centre  $\omega$  de l'hyperbole.*

Arrêtons là ce petit jeu, pour analyser d'un peu plus près ce que nous avons fait.

## 2 - Groupes et géométries

On sait, depuis F. Klein et son fameux programme d'Erlangen, l'avantage qu'il peut y avoir à classer les notions géométriques et les énoncés qui s'y rattachent, selon le groupe des transformations qui les *préservent*. [Que ces transformations forment un groupe est évident : si  $f$  et  $g$  sont deux bijections d'un ensemble sur lui-même, préservant toutes deux un même « quelque chose »,  $g \circ f$  et  $f^{-1}$  le préservent aussi, tandis que l'identité préserve n'importe quoi!] Inversement, à tout groupe de transformations sur un ensemble, est associé une « géométrie » : celle relative aux définitions et aux théorèmes pouvant s'exprimer uniquement à l'aide des *invariants* du groupe considéré.

Ainsi, par exemple, le théorème 1-1' relève de la géométrie *affine*, car les mots clés figurant dans son énoncé (« parallélisme », « rapport » entre points alignés, « milieu », « centre de gravité », « parabole ») désignent des notions invariantes par toute transformation affine, ainsi d'ailleurs que les notions d'« alignement de points »

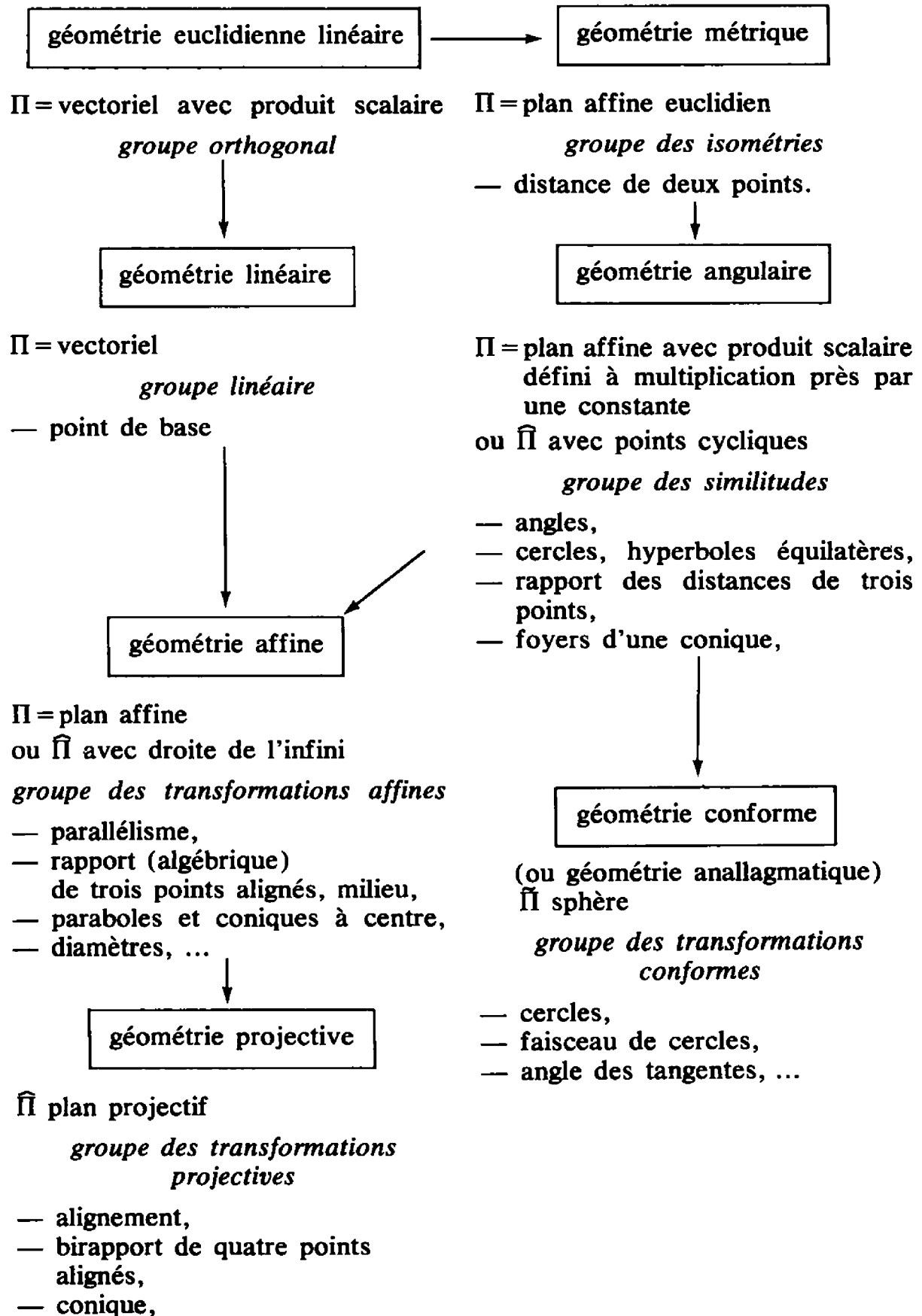
et de « droites concourantes », même si ces dernières sont aussi invariantes par d'autres transformations. Les théorèmes 11-1 et 11-2, par contre, relèvent de la géométrie *projective* (mots clés : « alignement », « concours », « birapport », ...), tandis que les théorèmes 11-4, 11-5, 11-8 et 11-9 relèvent de la géométrie *angulaire* (mots clés : « angle », « orthogonal », « cercle », « hyperbole équilatère », « bissectrices », « médiatrices », avec en plus « alignement », « concours », « rapport », et « parallèles », le groupe angulaire étant inclus dans le groupe affine), tandis que les théorèmes 11-3 et 11-6 relèvent enfin de la géométrie *conforme* (on appelle ainsi la géométrie associée au groupe engendré par les inversions et les similitudes — ou *groupe « conforme »*), dont les mots clés essentiels sont « cercles », « faisceaux de cercles », « orthogonalité » et plus généralement « angle » des tangentes, ...

Bien entendu, l'inclusion entre groupes de transformations opérant sur un même ensemble induit une relation d'ordre entre géométries, qui sont dites d'autant plus « fines » que leur groupe de transformations est plus petit (l'ensemble des invariants étant alors grand). Une petite difficulté, toutefois, provient de ce qu'un même groupe peut être considéré comme opérant sur un ensemble et aussi — lorsqu'il la préserve — sur une partie de cet ensemble.

Par exemple, si  $\Pi$  est un plan affine, l'action sur  $\Pi$  du groupe affine s'étend au plan projectif  $\hat{\Pi}$ , une transformation affine s'identifiant à une transformation projective préservant la droite de l'infini  $\delta(\Pi)$ . De même, si  $\Pi$  est un plan euclidien, l'action sur  $\Pi$  du groupe des similitudes s'étend à la sphère  $\hat{\Pi}$ , une similitude s'identifiant à une transformation conforme de la sphère préservant le point à l'infini sur  $\hat{\Pi}$ . (Le groupe des similitudes, en tant que sous-groupe du groupe affine, opère aussi sur  $\hat{\Pi}$ .)

Voici un schéma de quelques géométries en dimension 2, dans un plan  $\Pi$  (réel pour fixer les idées), avec :

- le nom de la géométrie, et le nom du groupe correspondant,
- les données sur l'espace concerné,
- les invariants fondamentaux nouveaux à partir desquels les autres se construisent (étant entendu qu'aux invariants nouveaux doivent être ajoutés tous ceux des structures moins fines).



**Remarques :**

1) On commet très souvent l'abus de langage consistant à appeler géométrie métrique ce qui relève en fait de la géométrie angulaire et est invariant par toute similitude : ainsi, par exemple, non seulement les notions d'« angle » (donc d'« orthogonalité », de « hauteur », de « bissectrice », ...) sont des invariants du groupe des similitudes, mais toute relation métrique, dès lors qu'elle est *homogène par rapport aux longueurs* : c'est le cas par exemple du

« rapport des distances »  $\frac{\|AB\|}{\|CD\|}$  (homogène de degré 0), en particulier

de la notion de médiatrice  $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} - 1 = 0$  (homogène de degré 0) ou  $\|MA\| - \|MB\| = 0$  (homogène de degré 1); c'est aussi le cas de la notion de « cercle » (à ne pas confondre avec celle de « cercle de rayon fixé » qui relève, elle de la géométrie métrique), etc.

2) Nous appellerons aussi « géométrie anallagmatique » la géométrie conforme, engendrée par les inversions et les similitudes. Il faut cependant prendre garde au fait que certains auteurs appellent « géométrie conforme » ce que nous avons appelé « géométrie angulaire ».

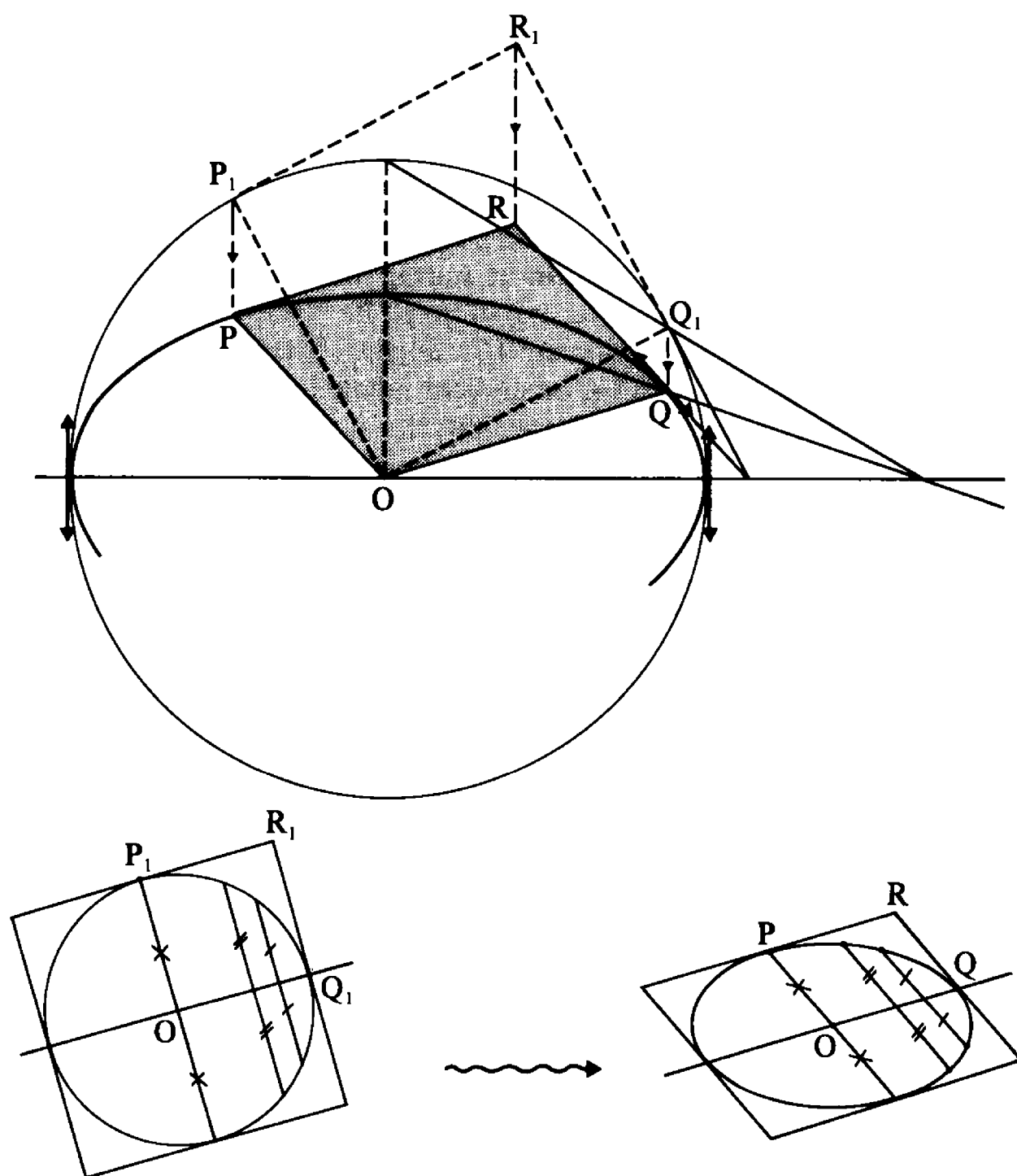
**3 - Géométrie dont relève un théorème : pourquoi en sortir?**

Les théorèmes du paragraphe 1 ont tous été obtenus de la façon la plus bête qui soit, c'est-à-dire la plus automatique, par simple transposition de résultats tout à fait élémentaires [tels le théorème 1-1' — concernant le centre de gravité — ou celui selon lequel tout parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange], au moyen de perspectives coniques, de tppr et d'inversions.

Si, au lieu d'une perspective conique, on avait cherché à transposer le théorème 1-1' au moyen d'une projection cylindrique (perspective cavalière), on n'aurait évidemment rien obtenu de nouveau : la raison en est que le théorème 1-1' relève de la géométrie affine, et qu'une perspective cavalière — qui est une transformation affine — préserve les notions de parallèles et de centre de gravité.

C'est ici la transposition du théorème affine 1-1' par des transformations non affines qui s'est révélée efficace.

Plus généralement, on appellera « *vraies transformations* » d'un théorème les transformations qui n'appartiennent *pas* au groupe de la géométrie dont relève ce théorème (et « fausses » transformations les autres).



On peut alors pressentir l'une des raisons pour lesquelles il est si difficile de faire sentir toute la fécondité de la notion de transformation géométrique dans l'enseignement secondaire : les nombreuses définitions et les rares théorèmes qui figurent dans les programmes relèvent presque tous des géométries métrique, angulaire ou affine, et par conséquent les principales transformations au programme (essentiellement des isométries et des similitudes) seront généralement de fausses transformations de ces théorèmes. En outre, les similitudes conservent la *forme* des figures (c'est-à-dire les rapports de distances et les angles). Seules certaines transformations affines (telles des symétries obliques, des affinités, des perspectives cavalières), qui sont à la lisière des programmes, pourraient être de vraies transformations pour les figures et les résultats de géométrie angulaire, et fournir des résultats nouveaux. Encore faudrait-il pour cela qu'on exploite cette possibilité, en n'interprétant pas le programme d'Erlangen en termes d'interdits : on a parfaitement le « droit », et souvent même le « devoir » de sortir de la géométrie dont relève un résultat; il n'y a sinon aucune chance d'expliquer aux élèves les propriétés classiques de l'ellipse que l'on peut obtenir trivialement par affinité à partir du cercle.

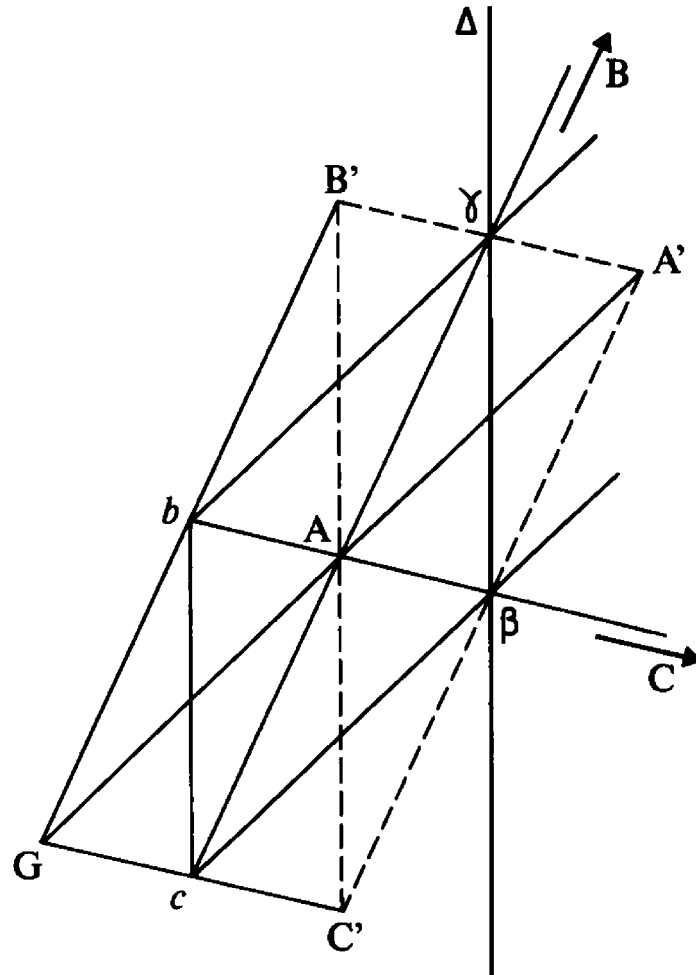
#### 4 - Géométrie dont relève un problème. Pourquoi y rester?

Supposons que l'on ait un problème à résoudre, consistant par exemple à démontrer les conclusions de l'énoncé du théorème 11-1, en ignorant bien évidemment le lien avec 1-1' et la méthode par laquelle 11-1 a été obtenu au paragraphe 1. Peut-on, en quelque sorte, reconstituer cette méthode?

Analysant les mots-clés de l'énoncé du problème, on commence par observer qu'il relève de la *géométrie projective*. Si le plan projectif  $\mathcal{X}$  est de la forme  $\widehat{\Pi}$ , on constate que le résultat est très facile à démontrer dans l'un ou l'autre des deux *cas particuliers* suivants qu'il est tout à fait naturel de tester, compte tenu de la nature des données A, B, C et  $\Delta$  :

*1<sup>er</sup> cas particulier* :  $\Delta = \delta(\Pi)$ ; (le problème se ramène à l'étude du centre de gravité d'un triangle, cf. 1-1').

**2<sup>e</sup> cas particulier :** L'un des côtés du triangle (BC pour fixer les idées) est égal à  $\delta(\Pi)$ ; (le problème se ramène alors à la manipulation de propriétés plus ou moins évidentes d'un parallélogramme).



On étudie alors l'éventualité que l'un ou l'autre de ces cas particuliers soit *générique*. Profitant de la conservation du problème par toute transformation projective, cela signifierait qu'il existe toujours une transformation projective permettant de ramener le cas général au cas particulier en question. Un critère essentiel pour en décider est le degré de liberté dont on dispose, une transformation projective étant définie par la donnée de quatre couples de points homologues  $(A_i, A'_i)_{1 \leq i \leq 4}$  en position générale (c'est-à-dire tels que  $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$  et  $(A'_i)_{1 \leq i \leq 4}$  soient des repères projectifs de  $\mathcal{X}$  et de  $\widehat{\Pi}$  respectivement). Or, pour se ramener à l'un ou l'autre des deux cas particuliers considérés, il suffit de se donner seulement deux couples de points homologues (avec d'ailleurs en plus un certain



degré de liberté supplémentaire dans ces données) :  $A_1$  et  $A_2$  sur  $\Delta$ ,  $A'_1$  et  $A'_2$  sur  $\delta(\Pi)$  dans le premier cas;  $A_1 = B$ ,  $A_2 = C$ ,  $A'_1$  et  $A'_2$  sur  $\delta(\Pi)$  dans le second cas. Ainsi, sur l'exemple choisi, chacun des deux cas particuliers est générique, d'où la démonstration de 11-1 dans le cas général.

La méthode s'applique aussi aux autres résultats énoncés dans le paragraphe précédent (avec un peu plus de subtilité pour ceux faisant intervenir une tppr), et plus généralement à tous les problèmes de ce type.

Résumons-la :

- 1) *Analyser de quelle géométrie relève un problème.*
- 2) *Essayer de traiter des cas particuliers où la solution se simplifie.*
- 3) *Estimer le caractère générique de ces cas particuliers en comparant le degré de liberté dont on dispose (par exemple le nombre de couples de points homologues définissant une transformation du groupe de la géométrie dont relève le problème), et le degré de contrainte de chaque cas particulier (par exemple le nombre de points à fixer pour s'y ramener).*

## 5 - Exercices sur le chapitre 11

- 1 / On réutilise les notations du théorème 11-1. Soit  $\Gamma$  une conique propre passant par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et coupant  $\Delta$  en deux points distincts  $U$  et  $V$ .

Soit  $\Omega$  le pôle de  $\Delta$  relativement à  $\Gamma$ . Notons  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  les conjugués harmoniques respectifs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  relativement à  $U$  et  $V$ , sur la droite  $\Delta$ .

- (i) Montrer que les droites  $a\alpha'$ ,  $b\beta'$  et  $c\gamma'$  sont concourantes. En quel point?
- (ii) Montrer que les droites  $A\alpha'$ ,  $B\beta'$  et  $C\gamma'$  sont également concourantes, et que leur point de concours est aligné avec  $\Omega$  et  $G$ .
- (iii) Énoncer d'autres propriétés de cette figure, par exemple concernant la conique  $\gamma$  passant par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $U$ ,  $V$ .

- 2/ Etant donnés deux points  $A$  et  $B$  d'un plan euclidien  $\Pi$ , on note  $\mathcal{B}(A, B)$  (resp.  $\mathcal{L}(A, B)$ ) l'ensemble des « cercles » du faisceau à points de base  $A$  et  $B$  (resp. à points limites  $A$  et  $B$ ). Soit  $\Gamma \in \mathcal{L}(A, B)$ . A tout point  $M$  de  $\Gamma$ , on associe le « cercle »  $\gamma_M$  de  $\mathcal{L}(M, A)$  qui passe par  $B$ .

a) Quelle est l'enveloppe des « cercles »  $\gamma_M$  quand  $M$  parcourt  $\Gamma$ ?

b) Exhiber une action  $\rho$  sur  $\tilde{\Pi}$  du groupe  $SO(2) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , laissant fixes les points  $A$  et  $B$ , préservant globalement  $\Gamma$ , ainsi que l'ensemble des « cercles »  $\gamma_M$ . Soit  $M_0 \in \Gamma$ , et  $\gamma_0 = \gamma_{M_0}$ . On pose :  $\gamma_{i+1} = \rho\left(\frac{2\pi}{6}\right)\gamma_i$  ( $i \geq 0$ ). On note  $N_i$  le point d'intersection autre que  $B$  des « cercles »  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i+1}$ . Combien y a-t-il de cercles  $\gamma_i$  distincts? Montrer que les points  $N_i$  sont « cocycliques ». Quel est le faisceau engendré par  $\Gamma$  et le « cercle » qui les contient?

c) Enoncer d'autres propriétés de cette figure (cf. exercice 8 du chapitre 6).

- 3/ Enoncer le théorème que l'on obtient en transformant par inversion le théorème d'existence du centre radical de trois cercles.

- 4/ Soient  $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$  trois coniques propres du plan projectif  $\mathcal{X}$ , passant toutes trois par deux points distincts  $P$  et  $Q$ . On suppose que  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  se recoupent en  $A$  et  $B$ , que  $\Gamma$  et  $\Gamma''$  se recoupent en  $A'$  et  $B'$ , que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  se recoupent en  $A''$  et  $B''$ .

a) Montrer que les trois droites  $AB, A'B'$  et  $A''B''$  sont concourantes.

b) Montrer l'équivalence des deux propositions :

- (i) le point de concours de ces trois droites appartient à la droite  $PQ$ ,
- (ii) les pôles de  $PQ$  relativement à chacune de ces trois coniques sont alignés.

- 5/ a) Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau de cercles non concentriques dans le plan, et  $P$  un point fixé sur l'axe radical de ce faisceau. On sait (chapitre 3) que le lieu des points de contact des tangentes

menées par  $P$  aux cercles du faisceau  $\mathcal{F}$  est un cercle  $\gamma_P$  appartenant au faisceau conjugué. Quelle est la forme projective la plus générale de ce résultat? Exhiber divers cas particuliers de cette situation, autres que celui de départ.

*b)* Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau de cercles dans le plan. Quel est le lieu des points  $M$  du plan en lesquels la tangente au cercle  $\gamma_M$  de  $\mathcal{F}$  passant par  $M$  a une direction fixe  $\delta$  donnée à l'avance? Discuter.

- 6/ Analyser tous les résultats du cours, dans les chapitres 5, 6 et 7, qui se laissent ramener, par transformation, à des résultats déjà connus.
- 7/ Compléter le théorème 11-4 en énonçant les propriétés d'une « hyperbole équilatère des 9 points » analogue au cercle des 9 points de l'exercice 4 du chapitre 1.
- 8/ Compléter de même le théorème 11-5 en exhibant une « conique des 9 tangentes », de foyer  $\Omega$ .
- 9/ Si, d'un point  $P$ , on mène deux tangentes  $PM$  et  $PM'$  à un cercle  $\Gamma$ , le triangle  $PMM'$  est isocèle, et

$$(PM, MM') = (MM', PM').$$

Quel théorème du cours redémontre-t-on, en transformant ce résultat banal à l'aide d'une tppr relative à un cercle?

- 10/ Rappelons (chapitre 3) qu'une tangente commune à deux cercles du plan non concentriques est coupée par leur axe radical en un point qui se trouve être le milieu du segment déterminé par les points de contact.

*a)* Quelle est la forme projective la plus générale de ce résultat? Quelle est la forme duale?

*b)* On considère deux coniques à centres homofocales (c'est-à-dire ayant les mêmes foyers). Montrer que leurs tangentes en un point d'intersection sont orthogonales.

*c)* Montrer un résultat analogue pour deux paraboles homofocales (c.-à-d. ayant le même foyer et le même axe).

## CHAPITRE XII

# *Formes quadratiques, coniques, et quadriques*

### 1 - Classification des courbes algébriques du second degré

Nous nous proposons essentiellement de démontrer qu'en un certain sens, que nous allons préciser, toutes ces courbes sont des *coniques* (éventuellement dégénérées). Nous en déduirons en particulier que *toute perspective de conique est une conique* (généralisation du théorème de Dandelin vu au chapitre 5).

Soit  $\mathcal{X}$  un plan projectif complexe, et

$$\Gamma = (\overline{f}, \overline{[U]}) \in \mathcal{K}_2(\mathcal{X})$$

une courbe algébrique du second degré : si  $f$  est un repère projectif de  $\mathcal{X}$ ,  $U=0$  est l'équation de  $\Gamma$  par rapport au repère  $f$ ,

$$U(X, Y, Z) = AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DXZ + 2EYZ + FZ^2$$

désignant une forme quadratique à trois variables, bien définie à multiplication près par un scalaire non nul. Avec

$$\begin{cases} \frac{1}{2} U'_x = AX + BY + DZ \\ \frac{1}{2} U'_y = BX + CY + EZ \\ \frac{1}{2} U'_z = DX + EY + FZ \end{cases}$$

on notera

$$\tilde{U} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

la matrice symétrique associée, et  $\text{rg } U$  le rang de cette matrice, qui est aussi égal, rappelons-le, au nombre de carrés dans l'écriture de  $U(X, Y, Z)$  sous forme d'une somme  $\sum_{i=1}^r (P_i(X, Y, Z))^2$  de carrés de formes linéaires  $P_i(X, Y, Z)$  linéairement indépendantes ( $r = \text{rg } U$  est égal à 1, 2 ou 3).

[Plus précisément, une matrice symétrique est toujours diagonalisable, et les vecteurs propres de  $\tilde{U}$  n'appartenant pas au noyau — c'est-à-dire correspondant à des valeurs propres non nulles — engendrent un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^3$  dont les formes  $(P_i)_i$  constituent une base duale].

### 1 / Classification projective complexe par le rang

Si  $\lambda$  est un scalaire non nul, il est clair que  $\text{rg } U = \text{rg } \lambda U$  : ce rang ne dépend que de  $[U]$  dans  $P(K_2^0[X, Y, Z])$ . D'autre part, si  $(f', [U']) = (f, [U])$ , notons  $\sigma \in GL(3, \mathbb{C})$  une matrice telle que  $f'^{-1} \circ f = \hat{s}$  : on peut alors choisir  $U'$  de telle façon que

$$\tilde{U}' = {}^t s \circ \tilde{U} \circ s$$

on en déduit que  $\text{rg } U' = \text{rg } U$ . Ainsi le rang de  $U$  ne dépend que de  $\Gamma$ . On définira le *rang de*  $\Gamma$ , et l'on notera  $\text{rg } \Gamma$ , le rang de la forme quadratique  $U$ . Posons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

• Si le rang de  $\Gamma$  est 3, c'est-à-dire si  $\Delta$  est non nul, on dira alors que la courbe algébrique du second degré  $\Gamma$  est *non dégénérée* ou *propre*.

• Si le rang de  $\Gamma$  est 2, il existe deux formes linéaires indépendantes  $P_1$  et  $P_2$  telles que

$$U(X, Y, Z) = (P_1(X, Y, Z))^2 + (P_2(X, Y, Z))^2.$$

Posons  $P(X, Y, Z) = P_1 + iP_2$ , ( $i^2 = -1$ ) et  $Q(X, Y, Z) = P_1 - iP_2$ .  
On a encore

$$U(X, Y, Z) = P(X, Y, Z) \cdot Q(X, Y, Z).$$

C'est dire que  $\Gamma$  se décompose alors en les deux droites de  $\mathcal{X}$ , d'équations respectives relativement à  $f$  :

$$P(X, Y, Z) = 0 \quad \text{et} \quad Q(X, Y, Z) = 0.$$

• Si le rang de  $\Gamma$  est 1, il existe une forme linéaire  $P(X, Y, Z)$  telle que  $U(X, Y, Z) = (P(X, Y, Z))^2$ . On dit alors que  $\Gamma$  consiste en « la droite, d'équation  $P = 0$  relativement à  $f$ , comptée deux fois ».

## 2 / Classification projective réelle par la signature

Si  $\mathcal{X}$  possède une structure réelle  $\sigma$  par rapport à laquelle  $\Gamma$  est réelle (c'est-à-dire stable par  $\sigma$ ), l'équation  $U = 0$  de  $\Gamma$  par rapport à un repère  $f$  réel de  $\mathcal{X}$  peut être supposée à coefficients  $A, B, C, D, E, F$  tous réels (quitte à diviser tous ces coefficients par un même nombre complexe non nul). La matrice symétrique  $U$ , à coefficients réels, admet alors des valeurs propres toutes réelles : supposons que  $k$  d'entre elles soient strictement positives, et  $l$  strictement négatives (avec  $l + k = \text{rg } \Gamma = r$ ) : il revient au même de dire que  $U(X, Y, Z)$  peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^k (P_i(X, Y, Z))^2 - \sum_{i=k+1}^{k+l} (P_i(X, Y, Z))^2$$

où les formes linéaires  $P_i$  sont toutes à coefficients réels relativement à la base réelle  $f$ .

Si  $U$  est changée en  $-U$ ,  $k$  et  $l$  sont permutés, de sorte que seule ne peut avoir une signification intrinsèque que la paire  $\{k, l\}$  (non ordonnée), telle que  $k+l=r$ . La loi d'inertie de Sylvester permet de démontrer qu'elle en admet effectivement un (c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix du repère réel  $f$ ). Cette paire  $\{k, l\}$  sera appelée la *signature* de la courbe algébrique du second degré  $\Gamma$ .

- Pour  $r=3$ , sont alors possibles les signatures  $\{3, 0\}$  (la courbe  $\Gamma$ , qui admet alors, par rapport à certains repères réels, l'équation  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ , n'admet aucun point réel) et  $\{2, 1\}$  (la courbe  $\Gamma$  admet alors, par rapport à certains repères réels, l'équation  $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ ; elle a des points réels).
- Pour  $r=2$ , sont possibles les signatures  $\{2, 0\}$  (les deux droites constituant  $\Gamma$  sont alors imaginaires conjuguées; seul, leur point d'intersection est réel) et  $\{1, 1\}$  ( $X^2 - Y^2 = 0$  s'écrit encore  $(X+Y)(X-Y)=0$ ; les deux droites constituant  $\Gamma$  sont réelles).
- Pour  $r=1$ , enfin, la seule signature possible est  $\{1, 0\}$  et la droite double constituant  $\Gamma$  est réelle.

### 3 / Classification affine complexe, par l'existence ou non d'un centre

Supposons le plan projectif complexe  $\mathcal{X}$  muni d'une structure affine, définie par une droite de l'infini  $H$ , et supposons l'équation  $U=0$  de  $\Gamma$  relative à un repère projectif  $f$  de  $\mathcal{X}$  provenant d'un repère affine  $(O, x, y)$  :  $x = \frac{X}{Z}$ ,  $y = \frac{Y}{Z}$ ;  $Z=0$  étant une équation de la droite de l'infini. Les points de  $\Gamma \cap H$  (ou *directions asymptotiques* de  $\Gamma$ ) sont les points vérifiant  $U(X, Y, 0)=0$  c'est-à-dire  $AX^2 + 2BXY + CY^2 = 0$ . (On suppose cette quantité non identiquement nulle.)

Posons  $\Delta_0 = AC - B^2$ .

a) Si  $\Delta_0 = 0$ , il n'existe qu'une seule direction asymptotique  $(X, Y, 0)$ , racine double de l'équation  $AX^2 + 2BXY + CY^2$ . On dira alors que  $\Gamma$  est de *type parabolique*. Plus précisément, il existe une

forme linéaire  $uX + vY$  telle que  $(uX + vY)^2 = AX^2 + 2BXY + CY^2$  ( $u^2 = A$ ,  $uv = B$ ,  $v^2 = C$ ).

Supposons le rang  $r$  de  $\Gamma$  égale à 3. Puisque le déterminant  $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$  est alors égal à  $-AE^2 + 2BED - CD^2$ , le déterminant

$\begin{vmatrix} u & u \\ D & E \end{vmatrix}$  est non nul (car son carré est égal à  $-\Delta$ ) : c'est dire que

les formes linéaires  $uX + vY$  et  $DX + EY + \frac{F}{2}Z$  sont linéairement indépendantes. Effectuons le changement de repère affine

$$\begin{cases} x' = ux + vy \\ y' = Dx + Ey + \frac{F}{2}, \end{cases}$$

et le changement de repère projectif correspondant

$$\begin{cases} X' = uX + vY \\ Y' = DX + EY + \frac{F}{2}Z \\ Z' = Z. \end{cases}$$

La courbe  $\Gamma$  admet alors pour équation dans ce nouveau repère :

$$X'^2 + 2Y'Z' = 0,$$

et les points de  $\Gamma$  à distance finie vérifient l'équation :

$$x'^2 + 2y' = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une *parabole* en coordonnées affines (rapportée à un repère affine  $O'x'y'$  avec  $O'$  sur  $\Gamma$ ,  $O'x'$  parallèle à l'axe,  $O'y'$  tangente en  $O'$ ).

Si le rang de  $\Gamma$  est 1 ou 2,  $\Delta$  est nul, et il existe un scalaire  $\lambda$  (éventuellement nul) tel que

$$DX + EY \equiv \lambda(uX + vY),$$



de sorte que l'équation de  $\Gamma$  devient

$$(uX + vY)^2 + 2\lambda(uX + vY)Z + FZ^2 = 0.$$

Lorsque le rang est 2,  $F$  est différent de  $\lambda^2$ , l'équation  $t^2 + 2\lambda t + F = 0$  admet deux racines distinctes  $t_1$  et  $t_2$ , de sorte que  $\Gamma$  se décompose en les *deux droites parallèles distinctes* d'équations respectives

$$uX + vY - t_1Z = 0 \quad \text{et,}$$

$$uX + vY - t_2Z = 0.$$

Lorsque le rang est 1, il existe une racine double  $t_1$  à l'équation précédente, et  $\Gamma$  devient la droite d'équation  $uX + vY - t_1Z = 0$ , comptée deux fois.

*b) Si  $\Delta_0$  est non nul*, il existe deux directions asymptotiques distinctes,  $(X, Y, 0)$ , solutions de l'équation

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = 0.$$

On dit alors que  $\Gamma$  a un *centre*, et on appelle centre *le* point  $(x_0, y_0)$  tel que, si l'on pose

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

l'équation

$$U(x_0 + x', y_0 + y', 1)$$

n'ait pas de terme du premier degré en  $x'$  et  $y'$ , et vérifie par conséquent

$$U(x_0 + x', y_0 + y', 1) = U(x_0 - x', y_0 - y', 1)$$

ce qui traduit le fait que le point  $O'$  de coordonnées  $(x_0, y_0)$  dans le repère affine  $(O, x, y)$  est centre de symétrie de  $\Gamma$ . Nous allons voir que sous l'hypothèse  $\Delta_0 \neq 0$ , un tel point  $O'$  existe et est unique. En effet, l'expression

$$\begin{aligned} A(x_0 + x')^2 + 2B(x_0 + x')(y_0 + y') + C(y_0 + y')^2 + 2D(x_0 + x') \\ + 2E(y_0 + y') + F \end{aligned}$$

et est encore égale à

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F$$

avec  $D' = D + Ax_0 + By_0$  et  $E' = E + Bx_0 + Cy_0$ .

Le point de coordonnées  $(x_0, y_0)$  sera donc centre si

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 = -D, \\ Bx_0 + Cy_0 = -E. \end{cases}$$

Puisque, par hypothèse,  $AC - B^2$  est non nul, ce système est cramérien, et il existe un point  $O'$  solution et un seul.

L'expression  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  peut se mettre sous la forme

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$$

avec  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$  puisque  $\Delta_0$  est non nul, de sorte que si l'on pose

$$\begin{cases} x'' = \alpha x + \beta y - x_0 \\ y'' = \gamma x + \delta y - y_0 \end{cases}$$

(coordonnées relatives à un nouveau repère affine  $(O'x''y'')$  d'origine le centre  $O'$ ),  $\Gamma$  a pour équation

$$x''y'' + F' = 0,$$

qui s'écrit encore

$$\left(\frac{x'' + y''}{2}\right)^2 + \left(i \frac{x'' - y''}{2}\right)^2 + F' = 0,$$

ou 
$$\left(\frac{x'' + y''}{2}\right)^2 - \left(\frac{x'' - y''}{2}\right)^2 + F' = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une conique à centre si  $F' \neq 0$  ( $r=3$ ), ou de deux droites concourant en un point à distance finie si :  $F' = 0$  ( $r=2$ ). [Puisque  $\Delta_0 \neq 0$ , le cas  $r=1$  ne peut se présenter.]

#### 4 / Classification affine réelle

Supposons le plan projectif complexe  $\mathcal{X}$  muni d'une structure affine réelle, et supposons  $\Gamma$  réelle. Si  $(O, x, y)$  est un repère affine

réel, l'équation  $U(x, y, 1)=0$  de  $\Gamma$  peut être choisie à coefficients tous réels.

Le changement de repère affine

$$\begin{cases} x' = ux + vy \\ y' = Dx + Ey + \frac{F}{2} \end{cases}$$

avec  $(ux + vy)^2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  utilisé lorsque  $\Delta_0 = 0$  ( $\Delta \neq 0$ ) [quitte à changer  $U$  en  $-U$ , on peut supposer  $A$  et  $C > 0$  donc  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \geq 0$  pour  $x$  et  $y$  réels] a tous ses coefficients réels : c'est donc par rapport à un *repère affine réel* que l'équation de  $\Gamma$  peut s'écrire sous la forme

$$y'^2 + 2y' = 0.$$

Le nombre  $\Delta_0 = AC - B^2$  est réel. S'il est *strictement positif*, les deux directions asymptotiques de  $\Gamma$  sont imaginaires conjuguées : on dit que  $\Gamma$  est de *type elliptique*; les coordonnées

$$x'' + y'' \quad \text{et} \quad i(x'' - y'')$$

sont alors les coordonnées affines relatives à un repère affine réel, par rapport auquel  $\Gamma$  a donc pour équation

$$x^2 + y^2 + F' = 0$$

(ellipse avec points réels si  $F' < 0$ , sans point réel si  $F' > 0$ ), réunion de deux droites imaginaires conjuguées avec leur intersection comme seul point réel si  $F' = 0$  ( $r = 2$ ).

Si  $\Delta_0$  est *strictement négatif*, les coordonnées  $x''$  et  $y''$  sont alors relatives à un repère affine réelle; les deux directions asymptotiques de  $\Gamma$  sont réelles, et  $\Gamma$  est dite de *type hyperbolique*, avec pour équation

$$x^2 - y^2 + F' = 0$$

ou 
$$x''y'' + F' = 0$$

relativement à des repères affines réels : on reconnaît des équations d'hyperbole si  $F' \neq 0$ , et de deux droites réelles se coupant en un point à distance finie, si  $F' = 0$  ( $r = 2$ ). On a ainsi démontré le

**Théorème 12-1**

La classification affine réelle des courbes algébriques réelles du second degré est donnée par le tableau suivant, dans lequel on a posé :

$$\Delta_0 = AC - B^2, \text{ et } \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

$\begin{matrix} \text{type} \\ \Delta_0 \\ \text{rang} \\ r \end{matrix}$	$\Delta_0 < 0$ type hyperbolique	$\Delta_0 = 0$ type parabolique	$\Delta_0 > 0$ type elliptique
$\Delta \neq 0$ ( $r = 3$ )	hyperbole (signature $\{2, 1\}$ ).	parabole (signature $\{2, 1\}$ ).	ellipse — avec points réels signature $\{2, 1\}$ , — sans point réel signature $\{3, 0\}$ .
$\Delta = 0$ $r = 2$	2 droites réelles concourantes (signature $\{1, 1\}$ ).	2 droites réelles parallèles distinctes (signature $\{1, 1\}$ ).	2 droites imaginaires conjuguées (seul point réel : leur intersection) (signature $\{2, 0\}$ ).
$\Delta = 0$ $r = 1$		1 droite réelle comptée 2 fois (signature $\{1, 0\}$ ).	

Ainsi, à condition d'y inclure les coniques dégénérées en deux droites (éventuellement confondues), ainsi que les ellipses sans point réel (dont les prototypes sont les cercles de rayon imaginaire pur), on voit que les coniques usuelles sont les seules courbes algébriques réelles du second degré en géométrie affine réelle. Ceci justifie d'appeler plus généralement *conique* sur un  $K$ -plan projectif  $\mathcal{X}$  tout élément de  $\mathcal{K}_2(\mathcal{X})$ .

### 5 / Détermination des éléments métriques et angulaires d'une conique

Supposons le plan projectif  $\mathcal{X}$  muni non seulement d'une structure affine réelle, mais supposons que celle-ci provienne d'une structure euclidienne :  $\mathcal{X} = \widehat{\Pi}_C$  où  $\Pi$  est un plan euclidien, et supposons la conique  $\Gamma$  réelle, et définie par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

relativement à un repère *orthonormé*  $(O, x, y)$  de  $\Pi$ , tous les coefficients  $A, B, C, D, E, F$  étant réels.

*a) Cas  $\Delta_0 = 0, \Delta \neq 0$  (parabole) :*

On suppose toujours, quitte à changer  $U$  en  $-U$  que la forme quadratique  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  est positive : il existe  $u$  et  $v$  réels tels que

$$(ux + vy)^2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Puisque  $\Delta$  est non nul,  $\begin{vmatrix} u & v \\ D & E \end{vmatrix}$  est non nul, et on détermine le nombre réel  $\lambda \left( = -\frac{Du + Ev}{u^2 + v^2} \right)$  tel que

$$\begin{cases} (D + \lambda u)u + (E + \lambda v)v = 0, \\ \begin{vmatrix} u & v \\ D + \lambda u & E + \lambda v \end{vmatrix} \neq 0. \end{cases}$$

Définissons alors l'angle  $\theta$ , et les nombres  $k > 0, l$  réel  $\neq 0$  tels que

$$\begin{aligned} u &= k \cos \theta, & v &= k \sin \theta, \\ D + \lambda u &= -l \sin \theta, & E + \lambda v &= l \cos \theta. \end{aligned}$$

L'équation de la parabole s'écrit alors :

$$\left( \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y - \frac{\lambda}{k} \right) + \frac{2l}{k^2} \left( -\sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y + \frac{F}{2l} \right) = 0.$$

Puisque le changement de repère affine

$$\begin{cases} x' = -\sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y + \frac{F}{2l} \\ y' = \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y - \frac{\lambda}{k} \end{cases}$$

est associé à un déplacement,  $x'$  et  $y'$  sont les coordonnées par rapport à un repère encore *orthonormé*, par rapport auquel la parabole admet l'équation

$$y'^2 + 2 \frac{l}{k^2} x' = 0.$$

On en déduit :

- l'axe de la parabole  $y' = 0$ ,
- la tangente au sommet  $x' = 0$ ,
- le foyer d'abscisse  $x' = -\frac{l}{2k^2}$ .

*b) Cas  $\Delta_0 \neq 0$ ,  $\Delta \neq 0$  (conique à centre) :*

Les coordonnées  $x_0$ ,  $y_0$  du centre, solution du système cramérien

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 = -D \\ Bx_0 + Cy_0 = -E \end{cases}$$

sont, nous l'avons déjà dit, réelles.

La forme quadratique  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  peut se mettre sous forme ou différence de carrés par changement de repère orthonormé, ou — de façon équivalente — la matrice symétrique  $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$  qui représente un opérateur symétrique relativement à une base orthonormée est diagonalisable relativement à une base orthonormée de vecteurs propres. On peut calculer, pas à pas, une telle base. Il est plus simple de chercher directement

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta + x_0, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta + y_0, \end{cases}$$

de façon que  $A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2$  puisse s'écrire sous la forme

$$A'x'^2 + C'y'^2 \quad (B' = 0).$$

Or  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2$  avec

$$\begin{cases} A' = A \cos^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta, \\ B' = \frac{C - A}{2} \sin 2\theta + B \cos 2\theta, \\ C' = A \sin^2 \theta - 2B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta. \end{cases}$$

On définit donc  $\lambda > 0$  et  $\theta \pmod{\pi}$  de façon que

$$B = -\lambda \sin 2\theta, \quad \frac{C - A}{2} = \lambda \cos 2\theta.$$

On en déduit, pour un tel choix de  $\theta$  :

$$\begin{cases} A' = \frac{A + C}{2} - \lambda, \\ B' = 0, \\ C' = \frac{A + C}{2} + \lambda, \end{cases}$$

et dans le repère, encore *orthonormé*, défini par

$$\begin{cases} x' = \cos \theta \cdot (x - x_0) + \sin \theta \cdot (y - y_0) \\ y' = -\sin \theta \cdot (x - x_0) + \cos \theta \cdot (y - y_0), \end{cases}$$

la conique  $\Gamma$  admet pour équation :

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0$$

d'où les axes de la conique, d'équations respectives  $x' = 0$  et  $y' = 0$ ,

et les nombres  $a = \sqrt{\left|\frac{F'}{A'}\right|}$ ,  $b = \sqrt{\left|\frac{F'}{C'}\right|}$  tels que l'équation s'écrive encore

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} = \pm 1,}$$

permettant d'en déduire la longueur des axes et la position des foyers (distinguer le cas elliptique  $A'C' > 0$ , du cas hyperbolique  $A'C' < 0$ ).

## 2 - Quelques conséquences de ce que toute courbe algébrique du second degré est une conique

### 1 / Démonstration du lemme 8-15

Le lemme résultera immédiatement du résultat suivant, un peu plus général.

### Théorème 12-2

*Par cinq points distincts  $M_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) d'un  $K$ -plan projectif  $\mathcal{X}$ , tel que quatre d'entre eux ne soient pas alignés, passe une conique  $\Gamma \in \mathcal{K}_2(\mathcal{X})$  et une seule*

- *propre si trois d'entre eux ne sont jamais alignés,*
- *dégénérée en deux droites distinctes sinon.*

L'hypothèse permet d'affirmer que parmi ces cinq points, il en existe toujours au moins deux (disons  $M_4, M_5$  pour fixer les idées) tels que les trois droites  $M_4M_1, M_4M_2, M_4M_3$  soient distinctes, de même que les trois droites  $M_5M_1, M_5M_2$  et  $M_5M_3$ . Il existe donc une unique homographie

$$h : \mathcal{D}(M_4) \longrightarrow \mathcal{D}(M_5)$$

du faisceau des droites projectives de  $\mathcal{X}$  passant par  $M_4$  sur celui des droites de  $\mathcal{X}$  passant par  $M_5$  admettant les trois couples  $(M_4M_i, M_5M_i)_{1 \leq i \leq 3}$  de droites homologues. D'après le chapitre 9, paragraphe 4, le lieu des points  $M$  d'intersection d'une droite  $D \in \mathcal{D}(M_4)$  avec son homologue  $h(D) \in \mathcal{D}(M_5)$  est une courbe algébrique du second degré, passant par les cinq points  $M_i$ , c'est-à-dire une conique  $\Gamma \in \mathcal{K}_2(\mathcal{X})$ .



[Si  $\mathcal{X} = \hat{\Pi}$  est le complété projectif d'un plan affine réel, nous avons vu au paragraphe précédent que  $\Gamma$  est une conique au sens usuel (éventuellement dégénérée); si les points  $M_i$  sont réels, elle ne peut être du type ellipse sans point réel ni formée de deux droites imaginaires conjuguées!]. L'unicité de  $\Gamma$  est évidente, car deux coniques  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  passant par les cinq points  $M_i$  définiront chacune la même homographie

$$\mathcal{D}(M_4) \longrightarrow \mathcal{D}(M_5),$$

puisque une telle homographie est déterminée entièrement par les trois couples  $(M_4M_i, M_5M_i)$  de droites homologues. Les cas d'une conique propre (rang 3) ou dégénérée en deux droites distinctes (rang 2) seront évidemment distingués par le fait que  $M_1, M_2, M_3$  seront non alignés ou alignés. [Si  $M_1, M_2, M_3$  sont alignés sur une droite  $D$ ,  $\Gamma$  dégénère en la réunion de cette droite et de la droite  $M_4M_5$ .]

### *Détermination pratique de l'équation de $\Gamma$*

Si  $(X_i, Y_i, Z_i)$  est un système de coordonnées homogènes de  $M_i$  relativement à un repère projectif donné de  $\mathcal{X}$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , la conique  $\Gamma$  cherchée a nécessairement pour équation relativement à ce repère :

$$\begin{vmatrix} X^2 & XY & Y^2 & XZ & YZ & Z^2 \\ (X_1)^2 & X_1Y_1 & (Y_1)^2 & X_1Z_1 & Y_1Z_1 & (Z_1)^2 \\ (X_2)^2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (X_5)^2 & X_5Y_5 & (Y_5)^2 & X_5Z_5 & Y_5Z_5 & (Z_5)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, en développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on trouve une forme quadratique  $U(X, Y, Z)$ , qui s'annule bien évidemment chaque fois que

$$(X, Y, Z) = (X_i, Y_i, Z_i),$$

pour  $1 \leq i \leq 5$ . En outre, cette forme quadratique n'est pas identiquement nulle, car la matrice formée par les cinq dernières lignes est précisément celle du système linéaire par rapport aux

inconnues  $A, 2B, C, 2D, 2E, F$  que l'on obtiendrait en écrivant que la conique  $\Gamma$  d'équation

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$$

passé par les cinq points  $M_i$  : puisqu'il existe, sous les hypothèses du théorème, une seule telle conique, la matrice en question est nécessairement de rang 5, et l'un au moins des déterminants d'ordre 5 que l'on peut en extraire est non nul.

**Remarque :** Géométriquement, la détermination point par point de  $\Gamma$  peut se faire en utilisant l'axe d'homographie.

## 2 / Perspectives de coniques

Soit  $p : \hat{\Pi} \longrightarrow \hat{\Pi}'$  une perspective<sup>(1)</sup> (conique ou cylindrique) d'un plan affine réel  $\Pi$ , complété projectivement, sur un autre  $\Pi'$ . On a vu, au paragraphe 4 du chapitre 9, que  $p$  est une transformation projective. Par conséquent, si  $f : P^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \hat{\Pi}$  est un repère projectif de  $\hat{\Pi}$ ,  $p \circ f$  est un repère de  $\hat{\Pi}'$ , et si  $\Gamma$  est une conique de  $\hat{\Pi}$  admettant relativement à  $f$  l'équation  $U=0$ , l'image  $p(\Gamma)$  de  $\Gamma$  par perspective vérifiera la même équation  $U=0$  relativement à  $p \circ f$  :  $p(\Gamma)$  est donc une courbe algébrique du second degré sur  $\hat{\Pi}'$ , c'est-à-dire une conique, d'après le théorème 12-1, de même rang et de même signature que  $\Gamma$ . Si, en outre, la perspective est cylindrique, elle préserve les structures affines, et par conséquent  $p(\Gamma)$  aura le même type, elliptique, parabolique, ou hyperbolique, que  $\Gamma$ . D'où le

### **Théorème 12-2**

*Toute perspective (conique ou cylindrique) d'une conique réelle  $\Gamma$  sera une conique de même rang et de même signature.*

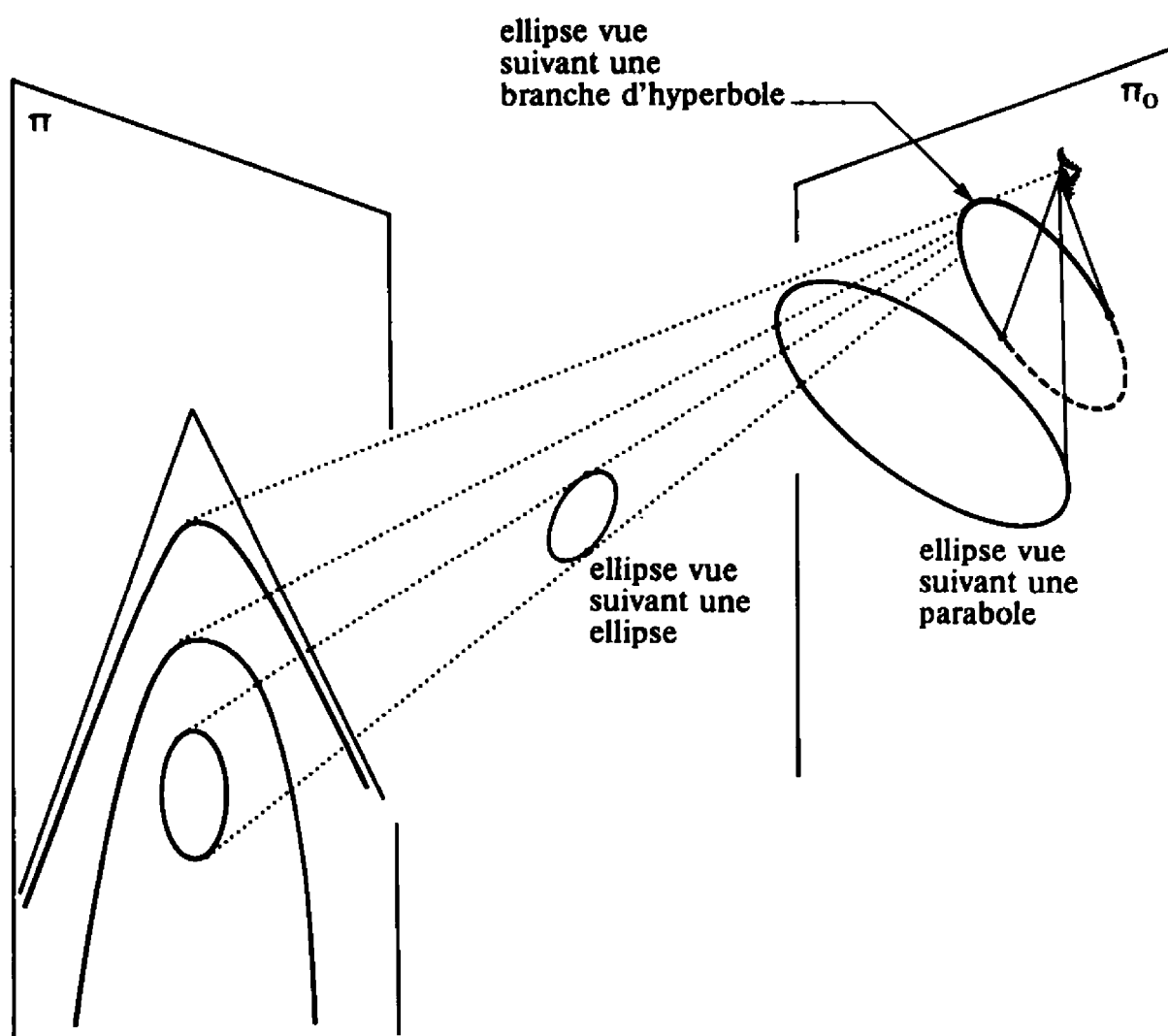
*Elle sera aussi de même type si la perspective est cylindrique.*

<sup>(1)</sup> On suppose que ni  $\Pi$  ni  $\Pi'$  ne passe par le point de vue (ou est parallèle à la direction de projection dans le cas cylindrique).

En corollaire, nous en déduisons la

*Règle n° 5 du dessin en perspective*

- Toute conique  $\Gamma$  est dessinée, en perspective cavalière, suivant une conique de même type (on suppose que le plan  $\Gamma$  n'est pas parallèle à la direction de la perspective).
- Si le point de vue  $S$  de la perspective est à distance finie, notons  $\Pi$  le plan du tableau et  $\Pi_0$  le plan parallèle à  $\Pi$  passant par  $S$ . Si  $\Gamma$  est une conique dont le plan ne passe pas par  $S$ , elle se dessine en perspective suivant
  - une ellipse si  $\hat{\Gamma}$  ne rencontre pas  $\hat{\Pi}_0$  ( $\Gamma$  est alors nécessairement elle-même une ellipse),
  - une parabole si  $\hat{\Gamma}$  est tangente à  $\hat{\Pi}_0$ ,
  - une hyperbole si  $\hat{\Gamma}$  coupe  $\hat{\Pi}_0$  en deux points distincts.



### 3 - Classification des quadriques

La méthode de classification précédente se généralise aux (hyper) quadriques  $\Sigma \in \mathcal{K}_2(\mathcal{X})$  d'un espace projectif complexe  $\mathcal{X}$  de dimension  $n$ . Supposons que  $\Sigma$  ait pour équation  $U=0$  relativement à un repère projectif  $f$  de  $\mathcal{X}$ . On obtient alors une

- classification projective complexe par le rang  $r$  de  $U$  ( $1 \leq r \leq n$ )
- classification projective réelle par la signature  $\sigma = \{k, l\}$  de  $U$  ( $k, l \geq 0, k + l = r$ ) [ $\Sigma$  étant supposée réelle relativement à une structure réelle donnée de  $\mathcal{X}$ , et le repère  $f$  étant réel]
- classification affine complexe supplémentaire par le rang  $r_0$  de  $\Sigma \cap H$  ( $0 \leq r_0 \leq n - 1$ ) ( $H$  désignant l'hyperplan de l'infini pour une structure affine donnée de  $\mathcal{X}$ )
- classification affine réelle supplémentaire par la signature  $\sigma_0$  de  $U_0 = \{k_0, l_0\}$  de  $U_0$  ( $k_0, l_0 \geq 0, k_0 + l_0 = r_0$ ) [ $\Sigma$  étant réelle, et la structure affine  $H$  de  $\mathcal{X}$  étant réelle, le repère  $f$  étant affine réel, et  $U_0=0$  désignant l'équation de  $\Sigma \cap H$  dans le repère projectif réel  $f_0$  de  $H$  induit par  $f$ ].

*Terminologie associée à cette classification pour  $n=3$  (quadriques)*

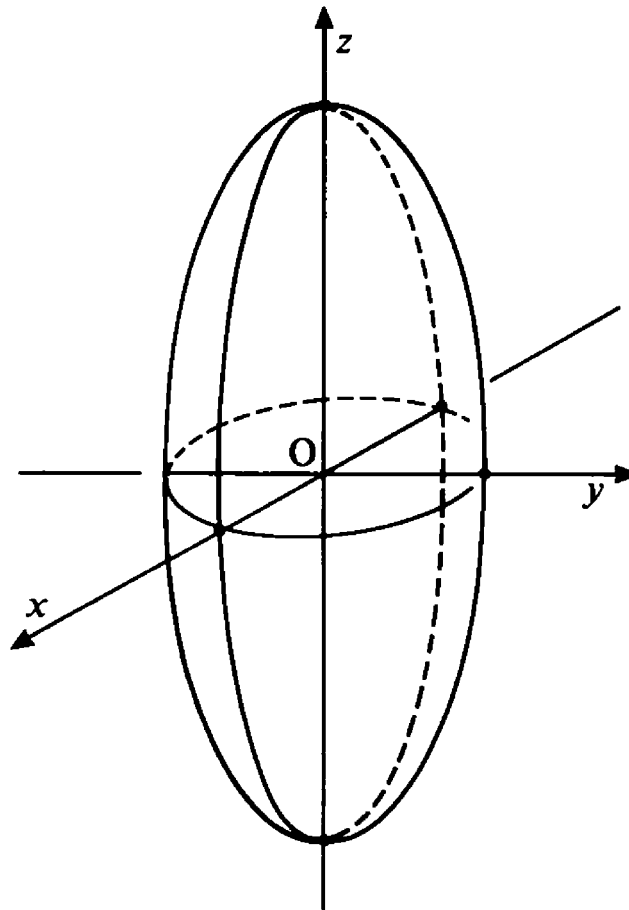
- $r=4$  quadrique propre,
- 3 quadrique dégénérée en un cône ou cylindre,
- 2 quadrique dégénérée en 2 plans distincts,
- 1 quadrique dégénérée en 1 plan compté 2 fois.
- $r_0=3$  quadrique à centre (conique propre à l'infini),
- 2 type paraboloïde (2 droites distinctes à l'infini),
- 1 type cylindre parabolique (1 droite double à l'infini).

*Classification affine complète des quadriques par  $\sigma$  et  $\sigma_0$  (équations relatives à un repère affine<sup>(1)</sup> réel convenable, dont on notera  $X, Y, Z, T$  les coordonnées homogènes associées,  $x = \frac{X}{T}$ ,  $y = \frac{Y}{T}$ ,  $z = \frac{Z}{T}$  avec l'hyperplan de l'infini  $H$  d'équation  $T=0$  : il est*

même possible de choisir le repère orthonormé pour une structure euclidienne donnée de  $\mathcal{X}$ ) :

1)  $\sigma_0 = \{3, 0\}$  type *ellipsoïde* :

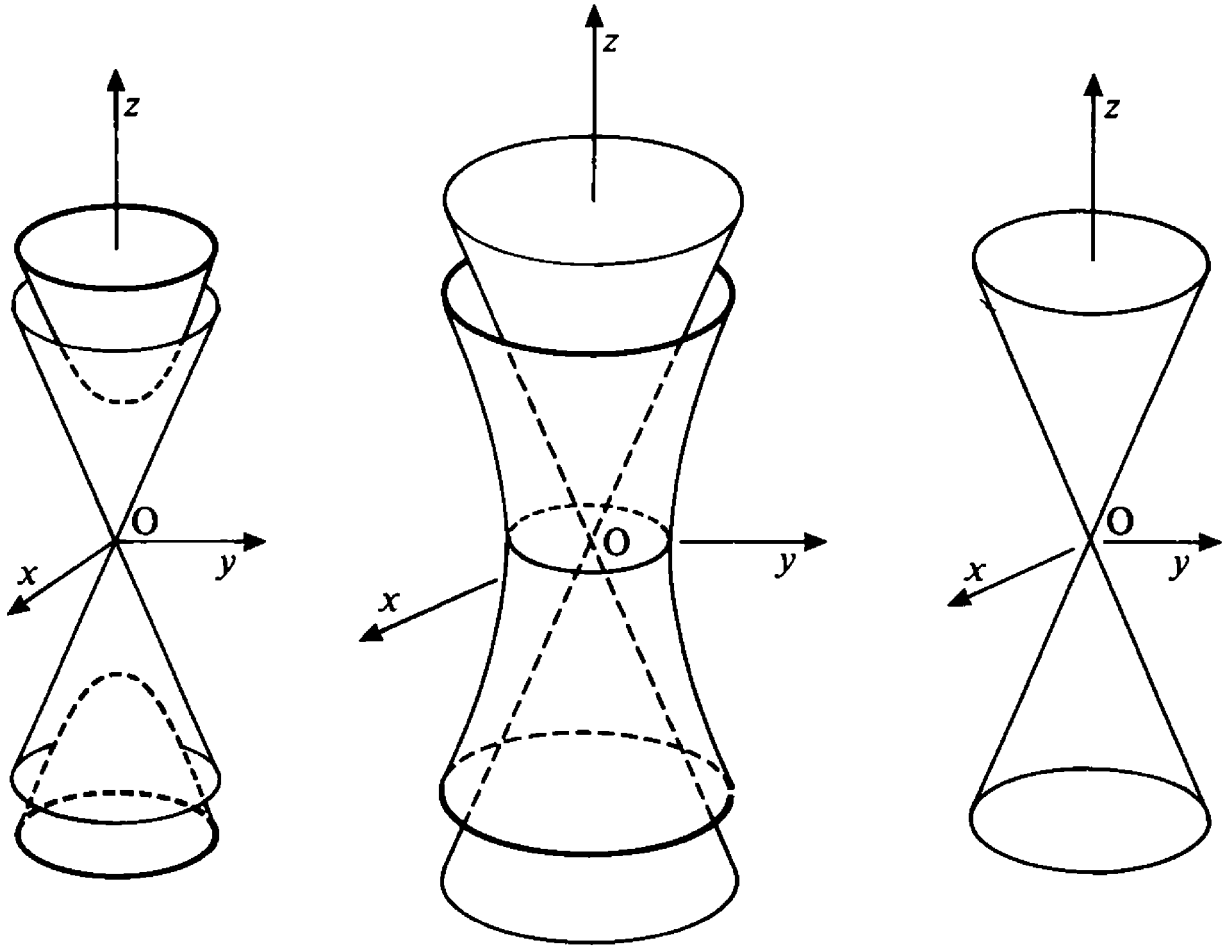
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \{4, 0\}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \text{ ellipsoïde sans point réel,} \\ \{3, 1\}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \text{ ellipsoïde avec points réels,} \\ \{3, 0\}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ cône sans point réel,} \end{array} \right.$$



2)  $\sigma_0 = \{2, 1\}$ , type *hyperboloïde* :

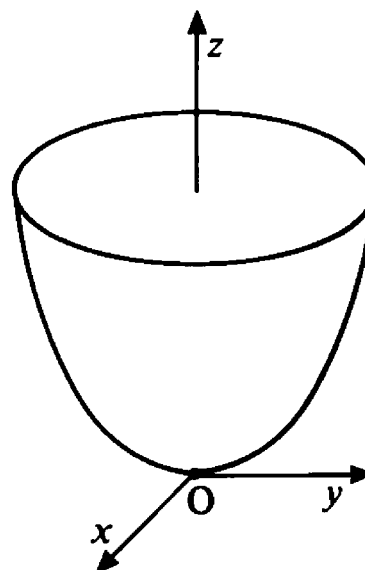
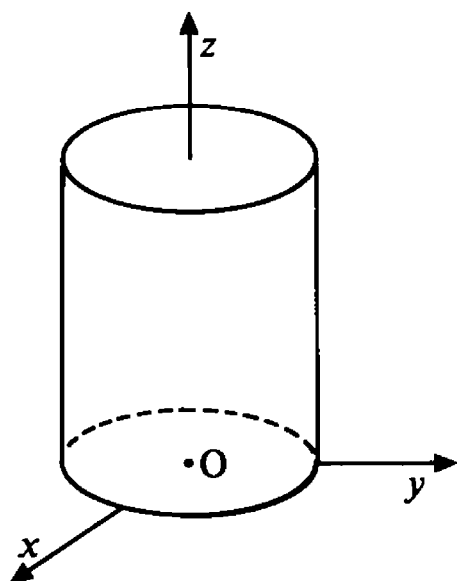
$$\sigma = \{3, 1\}, \frac{z^2}{c^2} - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) - 1 = 0, \text{ hyperboloïde à 2 nappes,}$$

$$\begin{aligned} \sigma = \{2, 2\}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, & \quad \text{hyperboloïde à 1 nappe,} \\ \{2, 1\}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, & \quad \text{cône ayant pour} \\ & \quad \text{base une conique} \\ & \quad \text{propre à points réels.} \end{aligned}$$



3)  $\sigma_0 = \{2, 0\}$ , type *paraboloïde elliptique* :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma = \{3, 1\}, \quad z - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = 0, & \quad \text{paraboloïde elliptique,} \\ \{3, 0\}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, & \quad \text{cylindre sans point réel,} \\ \{2, 1\}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, & \quad \text{cylindre à base elliptique} \\ & \quad \text{avec points réels.} \end{aligned} \right.$$

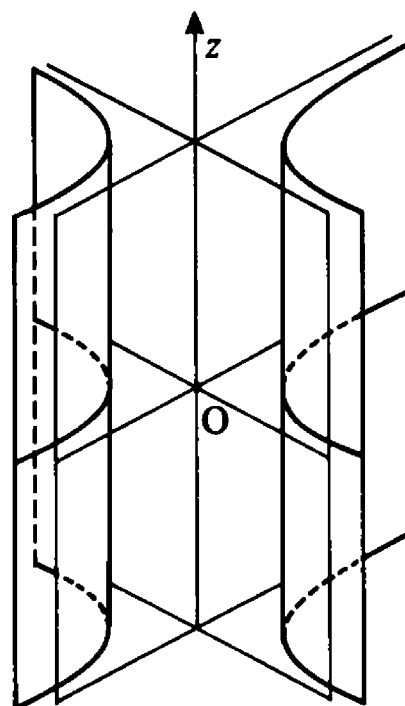
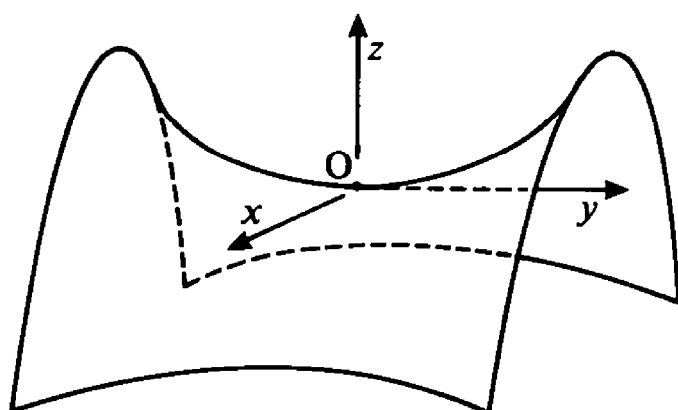


4)  $\sigma_0 = \{1, 1\}$ , type *paraboloïde hyperbolique* :

$$\begin{cases} \sigma = \{2, 2\}, & z + \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = 0, \\ \{2, 1\}, & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \end{cases}$$

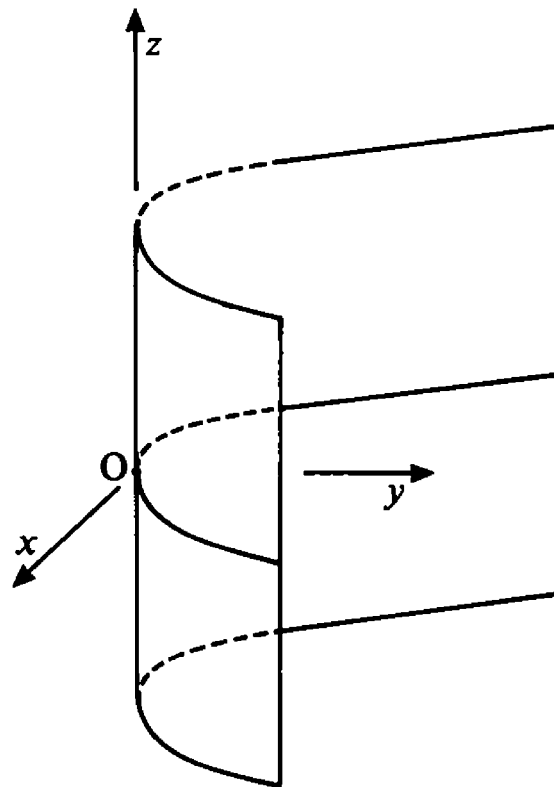
paraboloïde hyperbolique,

cylindre à base hyperbolique.



5)  $\sigma_0 = \{1, 0\}$ , type *cylindre parabolique* :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = \{2, 1\}, & y + kx^2 = 0, \\ & \text{cylindre à base} \\ & \text{parabolique,} \\ & \{1, 1\}, \quad x^2 - a^2 = 0, \\ & \text{2 plans parallèles} \\ & \text{réels distincts,} \\ & \{2, 0\}, \quad x^2 + a^2 = 0, \\ & \text{2 plans parallèles} \\ & \text{imaginaires conjugués,} \\ & \{1, 0\}, \quad x^2 = 0, \\ & \text{1 plan affine réel} \\ & \text{compté 2 fois.} \end{array} \right.$$



6)  $\sigma_0 = \{0, 0\}$ , *quadrique contenant le plan de l'infini*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = \{1, 1\}, & XT = 0, \\ & \text{plan de l'infini} \\ & \text{+ plan distinct,} \\ & \{1, 0\}, \quad T^2 = 0, \\ & \text{plan de l'infini} \\ & \text{compté 2 fois.} \end{array} \right.$$



#### 4 - Dualité

Soit  $\mathcal{X}$  un  $K$ -espace projectif de dimension  $n$ , ( $n \geq 2$ ), et  $\Sigma$  une hyperquadrique (quadrique si  $n=3$ , conique si  $n=2$ ) qu'on supposera *propre* ( $\text{rg } \Sigma = n+1$ ). Soit  $U=0$  l'équation de  $\Sigma$  relative à un repère projectif  $f: P^n(K) \longrightarrow \mathcal{X}$  (c'est-à-dire que  $\Sigma = \overline{(f, [U])}$ ). On a :

$$U(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_i \alpha_{ii}(X_i)^2 + 2 \sum_{i < j} \alpha_{ij} X_i X_j,$$

c'est une forme quadratique sur  $K^{n+1}$ , que l'on peut noter en abrégé  $x \longrightarrow U(x)$ , où  $x = (X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$  est un vecteur de  $K^{n+1}$ . [Cette application  $U$  est *homogène de degré 2*, rappelons-le, c'est-à-dire vérifie :  $U(\lambda x) = \lambda^2 U(x)$ ; et l'application

$$(x, y) \longrightarrow U_1(x, y) = \frac{U(x+y) - U(x) - U(y)}{2},$$

appelée *forme polaire associée*, telle que  $U(x) = U_1(x, x)$ , est *bilinéaire et symétrique*]; en termes de coordonnées,

$$\begin{aligned} U_1(X_1, \dots, X_{n+1}; Y_1, \dots, Y_{n+1}) \\ = \sum_i \alpha_{ii} X_i Y_i + \sum_{i < j} \alpha_{ij} (X_i Y_j + X_j Y_i). \end{aligned}$$

Dire que  $\Sigma$  est *propre*, ou que  $U$  est non dégénéré signifie : si, pour tout  $x \in K^{n+1}$ ,  $U_1(x, y) = 0$ , alors  $y = 0$ .

Il revient au même de dire que l'application

$$y \longrightarrow (U_1(\cdot, y) : x \longrightarrow U_1(x, y))$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel  $K^n$  sur son dual  $(K^n)^*$ , induisant, ainsi que nous l'avons déjà dit au chapitre 9, un isomorphisme projectif

$$P(K^n) \longrightarrow P((K^n)^*) = \mathcal{H}_1(P(K^n)).$$

Si l'équation de  $\Sigma$  par rapport à un autre repère projectif  $f'$  de  $\mathcal{X}$  s'écrit  $U'=0$ , et si  $s$  est une matrice ( $s \in GL(n+1, K)$ ) telle que  $f'^{-1} \circ f = \widehat{s}$ , on peut s'arranger, quitte à multiplier  $U'$  par un scalaire non nul, pour que  $U'(x) = U(s^{-1}(x))$  et

$$U'_1(x, y) = U_1(s^{-1}(x), s^{-1}(y)).$$

On en déduit que l'isomorphisme  $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{H}_1(\mathcal{X})$ , déduit par transport de structure à l'aide de  $f$  de la dualité

$$P(K^n) \longrightarrow \mathcal{H}_1(P(K^n))$$

associée à  $U_1$ , ne dépend que de  $\Sigma$ . On notera  $\varphi_\Sigma : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{H}_1(\mathcal{X})$  cet isomorphisme, qu'on appelle transformation par polaires réciproques relative à  $\Sigma$ .

On dira que deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{X}$  sont *conjugués relativement à  $\Sigma$*  si  $U_1(\alpha, \beta) = 0$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  désignant des vecteurs non nuls de  $K^{n+1}$  tels que  $f([\alpha]) = A$  et  $f([\beta]) = B$ .

[Cette condition ne dépend évidemment pas du choix de  $f$ .] Elle équivaut à l'une quelconque des deux propriétés suivantes (qui sont donc équivalentes) :

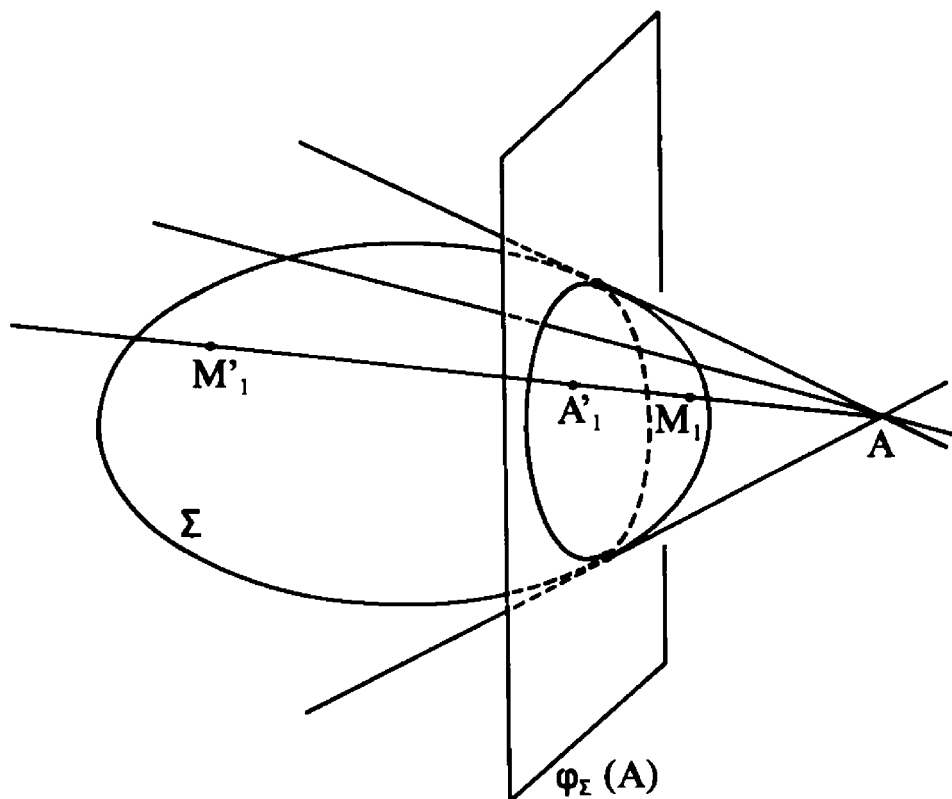
$$A \in \varphi_\Sigma(B); \quad B \in \varphi_\Sigma(A).$$

En particulier,  $A$  est conjugué à lui-même si  $U(\alpha) = 0$ , c'est-à-dire si  $A$  appartient à  $\Sigma$ .

**Théorème 12-3** (comparer avec les résultats du chapitre 7)

*Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $\mathcal{X}$ .*

- (i) *Si la droite  $AB$  coupe  $\Sigma$  en deux points distincts  $M$  et  $M'$ , distincts de  $A$  et  $B$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
  - *$A$  et  $B$  sont conjugués relativement à  $\Sigma$ ,*
  - *la division  $MM'AB$  est harmonique.*
- (ii) *Si  $AB$  coupe  $\Sigma$  en deux points confondus  $M = M'$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
  - *$A$  et  $B$  sont conjugués relativement à  $\Sigma$ ,*
  - *$A$  ou  $B$  est sur  $\Sigma$ , confondu avec  $M = M'$ .*



Supposons donc  $A=f([\alpha])$  et  $B=f([\beta])$ . Les points de la droite  $AB$  sont les points  $f([\lambda\alpha+\mu\beta])$ , ou encore  $f([\alpha+t\beta])$  avec  $t=\mu/\lambda$  dans  $K$  (auxquels il faut ajouter  $B$  correspondant à  $t=\infty$  dans  $\widehat{K}$ ). Les points de cette droite qui sont sur  $\Sigma$  correspondent donc aux valeurs de  $t$  telles que  $U(\alpha+t\beta)=0$ , c'est-à-dire aux racines de l'équation du second degré

$$U(\alpha) + 2tU_1(\alpha, \beta) + t^2U(\beta) = 0.$$

La condition  $U_1(\alpha, \beta)=0$  signifie à la fois

- que  $A$  et  $B$  sont conjugués relativement à  $\Sigma$ ,
- que la somme  $t_1+t_2$  des racines de l'équation du second degré ci-dessus est nulle, ce qui équivaut à  $(t_1, t_2, 0, \infty)=-1$ ,

d'où (i). Si  $M=M'$ , c'est que  $(U_1(\alpha, \beta))^2 - U(\alpha) \cdot U(\beta) = 0$ . La condition de conjugaison  $U_1(\alpha, \beta)=0$  équivaut alors à  $U(\alpha)=0$  ou  $U(\beta)=0$ ; si  $U(\alpha)=0$ , l'unique solution de l'équation est  $t=0$  et correspond au point  $A$ ; si  $U(\beta)=0$ , l'unique solution est  $t=\infty$ , correspondant à  $B$ , d'où (ii).

### Proposition 12-4

Si  $f^{-1}(A) = [X_1^0, \dots, X_{n+1}^0]$ , l'hyperplan  $\varphi_\Sigma(A)$  admet pour équation <sup>(2)</sup> dans le repère  $f$  :

$$\sum_{i=1}^{n+1} U'_{X_i}(X_1^0, \dots, X_{n+1}^0) \cdot X_i = 0.$$

On a en effet :

$$\begin{aligned} U'_{X_i}(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \frac{\partial}{\partial X_i} \left[ \sum_j \alpha_{jj} (X_j)^2 + 2 \sum_{j < k} \alpha_{jk} X_j X_k \right] \\ &= 2 \sum_j \alpha_{ij} X_j. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'expression

$$\frac{1}{2} \sum_i U'_{X_i}(X_1^0, \dots, X_{n+1}^0) \cdot X_i$$

est égale à  $U_1(X_1^0, \dots, X_{n+1}^0; X_1, \dots, X_{n+1})$  et sa nullité exprime que les points  $A = f([X_1^0, \dots, X_{n+1}^0])$  et  $f([X_1, \dots, X_{n+1}])$  sont conjugués relativement à  $\Sigma$ , c'est-à-dire que  $f([x_1, \dots, x_{n+1}])$  appartient à  $\varphi_\Sigma(A)$  c. q. f. d.

## 5 - Faisceaux de coniques

Soit  $\mathcal{X}$  un plan projectif complexe. Un faisceau de coniques dans  $\mathcal{X}$  est, par définition, une droite de l'espace projectif  $\mathcal{K}_2(\mathcal{X})$ . Comme toute droite projective, celle-ci est déterminée par la donnée de deux éléments distincts, c'est-à-dire de deux coniques distinctes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . Si  $\Gamma = (\overline{f}, [\overline{U}])$  et  $\Gamma' = (\overline{f}, [\overline{U'}])$ , les coniques du faisceau sont celles qui ont pour équation dans le repère  $f$  :

$$\lambda U + \mu U' = 0.$$

<sup>(2)</sup> La dérivée partielle qui figure dans la formule est «formelle».

Observons que si un point  $A$  de  $\mathcal{X}$  appartient à deux coniques distinctes du faisceau, il appartient à toutes<sup>(3)</sup>. Cette remarque est à la base d'une classification des faisceaux suivant l'ordre des points d'intersection de deux des coniques du faisceau. On supposera tout d'abord que le faisceau admet au moins une conique non dégénérée, et que  $\Gamma$  est une telle conique. [Si toutes les coniques du faisceau sont dégénérées, elles ont toutes en commun soit une droite toute entière, soit un point double; et réciproquement.] C'est ce qu'on appellera un « vrai » faisceau de coniques<sup>(4)</sup>.

Choisissons un point  $A_0$  de  $\Gamma$  ainsi qu'un repère  $f$  de  $\mathcal{X}$  par rapport auquel  $A_0$  admet  $(0, 0, 1)$  comme système de coordonnées homogènes : l'équation de  $\Gamma$  dans ce repère est donc de la forme

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2(DX + EY)Z = 0.$$

La droite d'équation  $\lambda Y - \mu X = 0$ , qui engendre le faisceau  $\mathcal{D}(A_0)$ , recoupe  $\Gamma$  en le point  $M([\lambda, \mu])$

$$\begin{cases} X = -2\lambda(\lambda D + \mu E), \\ Y = -2\mu(\lambda D + \mu E), \\ Z = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2. \end{cases}$$

(Puisque  $\Gamma$  a été supposée non dégénérée,  $D$  et  $E$  ne sont pas simultanément nuls.)

Si  $\Gamma'$  admet pour équation, par rapport au même repère  $f$ ,

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2 + 2(D'X + E'Y)Z + F'Z^2 = 0,$$

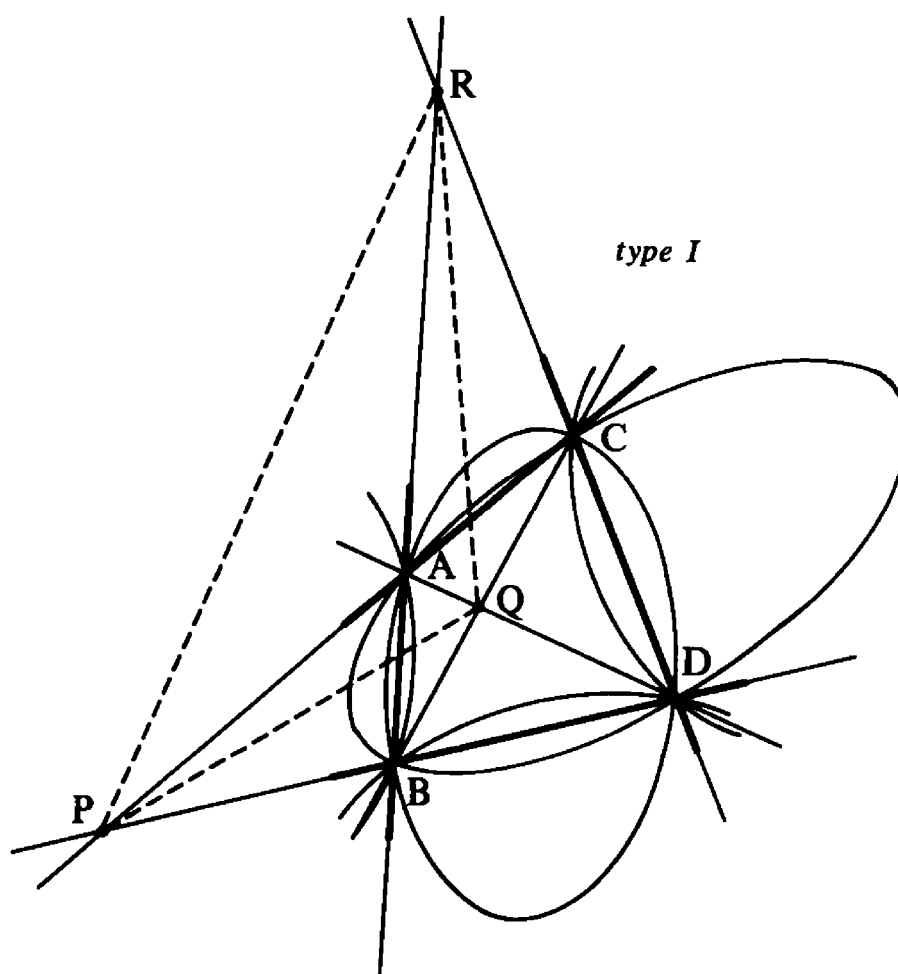
les points d'intersection de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont les points  $M([\lambda, \mu])$  correspondant aux valeurs  $t = \mu/\lambda$  du paramètre qui sont racines de l'équation

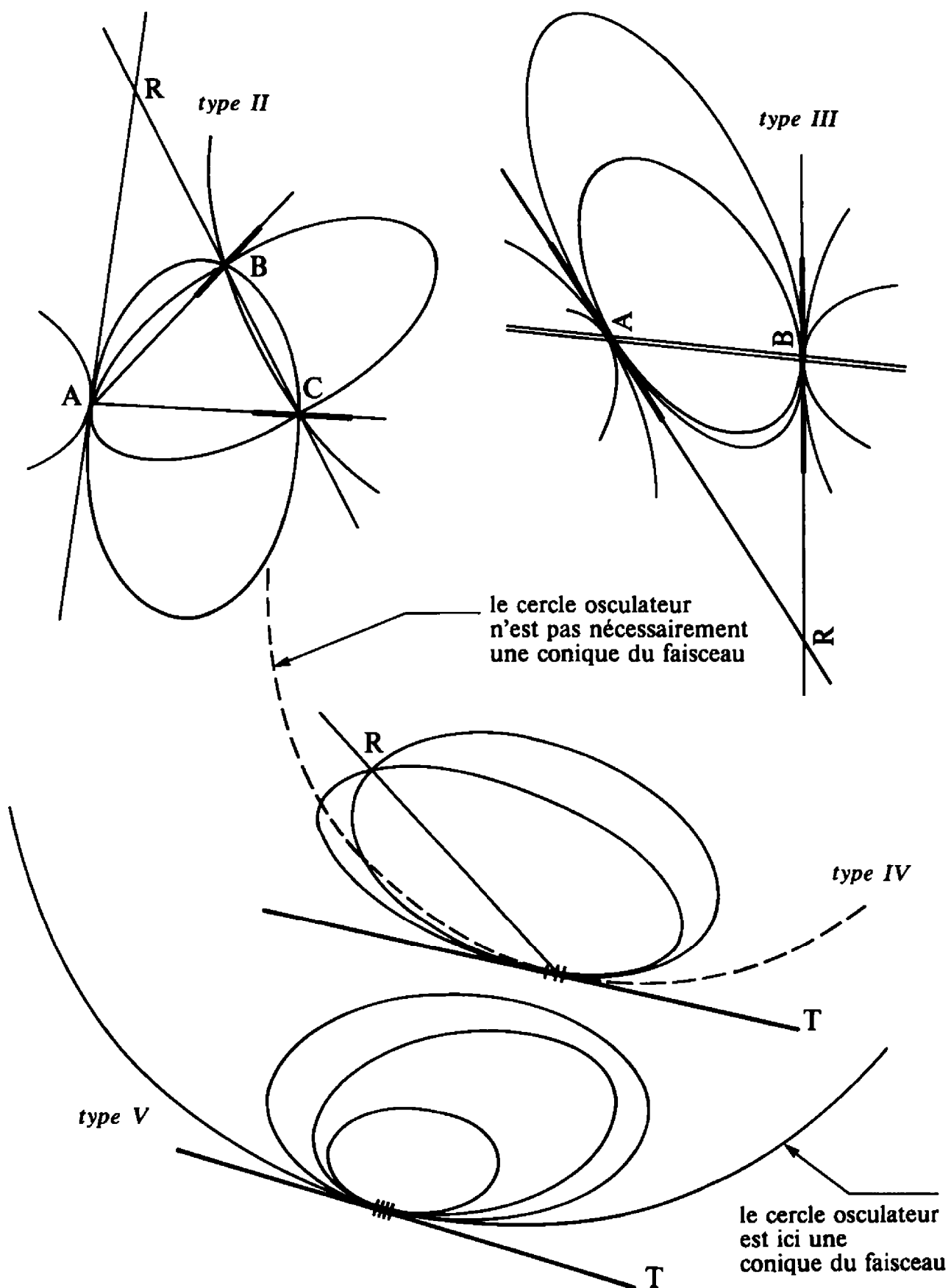
$$4(D + tE)^2(A' + 2B't + C't^2) - 2(D + tE)(D' + tE')(A + 2Bt + Ct^2) + F'(A + 2Bt + Ct^2)^2 = 0$$

<sup>(3)</sup> Un tel point sera appelé un « point de base » du faisceau.

<sup>(4)</sup> Dans la suite, l'expression « faisceau de coniques » désignera un vrai faisceau.

pour  $\lambda \neq 0$ , auxquelles il faut ajouter  $\infty = [1, 0]$  à l'ordre  $k$  ( $k \leq 4$ ), si cette équation en  $t$ , *a priori* du quatrième degré, dégénère en une équation de degré  $4 - k$ . Si  $t$  est racine d'ordre  $k$  de l'équation ( $t \in \widehat{\mathbb{C}}$ ), on dit que  $M(t)$  est un point d'intersection d'ordre  $k$  de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . Cette définition ne dépend pas du choix de  $A_0$  et de  $f$ . Les deux coniques  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont dites *tangentes* en un point d'intersection d'ordre 2, *osculatrices* en un point d'ordre 3 et *surosculatrices* en un point d'ordre 4. [Si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont réelles, relativement à une structure réelle de  $\mathcal{X}$ , et si un tel point d'intersection est réel, des coniques tangentes au sens ci-dessus en un tel point ont même tangente au sens usuel, et des coniques osculatrices au sens ci-dessus sont tangentes en le point concerné et y ont même centre de courbure.]





Cinq cas sont alors possibles, correspondant à cinq types de vrais faisceaux de coniques, selon que deux quelconques des coniques du faisceau ont :

- quatre points d'intersection simples, distincts (type I),
- trois points d'intersection, dont deux simples et un d'ordre 2 (type II),
- deux points d'intersection, chacun d'ordre deux (type III),
- deux points d'intersection, l'un d'ordre trois, et l'autre simple (type IV),
- un seul point d'intersection, d'ordre quatre (type V).

Par exemple, un faisceau de cercles à points de base  $A, B$  est un faisceau de coniques du type I, avec pour  $C$  et  $D$  les points cycliques. Un faisceau de cercles à points limites est du même type (la seule différence est que les points de base sont réels dans le premier cas, et imaginaires conjugués dans le second; mais ces deux types de faisceau sont indiscernables en géométrie complexe; les points limites sont les points  $Q$  d'intersection de  $BC$  et  $AD$  et  $P$  de  $AC$  et  $BD$ ). Un faisceau de cercles tangents en  $A$  est un faisceau du type II, avec pour  $B$  et  $C$  les points cycliques. Un faisceau de cercles concentriques est un faisceau du type III, avec pour  $A$  et  $B$  les points cycliques.

### *Coniques dégénérées du faisceau*

L'équation

$$\begin{vmatrix} \lambda A + \mu A' & \lambda B + \mu B' & \lambda D + \mu D' \\ \lambda B + \mu B' & \lambda C + \mu C' & \lambda E + \mu E' \\ \lambda D + \mu D' & \lambda E + \mu E' & \lambda F + \mu F' \end{vmatrix} = 0$$

qui est une équation, en général du troisième degré en  $[\lambda, \mu]$ , fournit alors trois coniques dégénérées :

- Pour le type I, ce sont les trois couples de droites distinctes  $(AB, CD)$ ,  $(AC, BD)$  et  $(AD, BC)$ .
- Pour le type II,  $(AB, AC)$  et  $(AR, RBC)$  sont deux telles coniques dégénérées; la première correspond à une racine double de l'équation du troisième degré précédente; en effet, relativement



à un repère projectif par rapport auquel les droites AB, AC, BC et AR ont respectivement pour équation

$$X=0, Y=0, Z=0 \text{ et } aX+bY=0 \ (ab \neq 0),$$

les coniques du faisceau sont celles qui ont une équation de la forme

$$2\lambda XY + 2\mu(aX+bY)Z=0 \ ([\lambda, \mu] \in P^1(\mathbb{C})).$$

L'équation de dégénérescence s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & \mu a \\ \lambda & 0 & \mu b \\ \mu a & \mu b & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ soit } 2ab\lambda\mu^2 = 0.$$

La racine simple  $\lambda=0$  correspond à (AR, RBC) et la racine double  $\mu=0$  correspond à (AB, AC).

- Pour le type III, (RA, RB) est une conique dégénérée, la droite AB comptée deux fois en est une autre correspondant à une racine double de l'équation du troisième degré; en effet, si RA, RB et AB admettent respectivement pour équation  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=0$  relativement à un repère projectif convenablement choisi de  $\mathcal{X}$ , les coniques du faisceau sont celles qui ont une équation de la forme

$$2\lambda XY + \mu Z^2 = 0 \ ([\lambda, \mu] \in P^1(\mathbb{C})).$$

L'équation de dégénérescence s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{vmatrix} = 0, \text{ soit } \lambda^2\mu = 0.$$

La racine simple  $\mu=0$  correspond à (RA, RB) et la racine double  $\lambda=0$  correspond à la droite double AB.

- Pour les faisceaux du type IV, (T, AB) est une conique dégénérée correspondant à une racine triple de l'équation de dégénérescence.
- Pour les faisceaux du type V, c'est la droite T comptée deux fois, qui correspond à une racine triple.

*Étude particulière des faisceaux de type I. Transformations quadratiques*

Notons respectivement  $P$ ,  $Q$  et  $R$  les points doubles  $P = AC \cap BD$ ,  $Q = BC \cap AD$  et  $R = AB \cap CD$  des coniques dégénérées d'un faisceau de type I. La droite  $QR$ , polaire de  $P$  par rapport à  $RAB$  et  $RCD$  ou à  $QBC$  et  $QAD$ , est aussi la polaire de  $P$  par rapport à toutes les coniques du faisceau. De même,  $PR$  (respectivement  $PQ$ ) est la polaire de  $Q$  (resp.  $R$ ) par rapport à toutes les coniques du faisceau. Le triangle  $PQR$  est donc *autopolaire* par rapport à toutes les coniques du faisceau (on dit qu'un triangle est « autopolaire » par rapport à une conique si chacun de ses côtés est la polaire du sommet opposé par rapport à la conique).

Supposons maintenant que  $M$  soit un point du plan projectif, distinct de  $P$ ,  $Q$  ou  $R$ .

**Théorème 11-5**

*Les polaires d'un point  $M$ , distinct de  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , par rapport aux différentes coniques du faisceau de type I considéré, enveloppent un point  $M'$ .*

Supposons en effet, le faisceau défini par deux coniques  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , d'équations respectives  $U=0$  et  $U'=0$  relativement à un même repère  $f$  de  $\mathcal{X}$  : les coniques du faisceau sont alors celles qui ont une équation de la forme  $\lambda U + \mu U' = 0$  ( $[\lambda, \mu] \in P^1(\mathbb{C})$ ); et si  $M$  a pour coordonnées  $(X_0, Y_0, Z_0)$ , la polaire de  $M$  par rapport à ces coniques sont les droites d'équation

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda \frac{\partial U}{\partial X}(X_0, Y_0, Z_0) + \mu \frac{\partial U'}{\partial X}(X_0, Y_0, Z_0) \right] \cdot X + \\ & \left[ \lambda \frac{\partial U}{\partial Y}(X_0, Y_0, Z_0) + \mu \frac{\partial U'}{\partial Y}(X_0, Y_0, Z_0) \right] \cdot Y + \\ & \left[ \lambda \frac{\partial U}{\partial Z}(X_0, Y_0, Z_0) + \mu \frac{\partial U'}{\partial Z}(X_0, Y_0, Z_0) \right] \cdot Z = 0. \end{aligned}$$

Si  $M$  est distinct de  $P, Q, R$ , les polaires de  $M$  relativement à  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont distinctes, et définissent un faisceau de droites, d'où le théorème, en appelant  $M'$  le point commun aux droites de ce faisceau.

**Remarque :** Si  $M$  (distinct de  $Q$  ou  $R$ ), appartient à la droite  $QR$ ,  $M'$  est en  $P$ ; et, de même, si  $M$  appartient à  $PQ$  (resp.  $PR$ ),  $M'$  est en  $R$  (resp. en  $Q$ ).

**Définition.** — La transformation  $M \longrightarrow M'$  définie ci-dessus de  $\mathcal{X} - \{P, Q, R\}$  dans  $\mathcal{X}$  est appelée *transformation quadratique* associée au faisceau de coniques de type I donné. Notons  $\mathcal{X}(P, Q, R)$  le complémentaire dans  $\mathcal{X}$  de la réunion des trois droites  $PQ, PR$  et  $QR$  : la restriction à  $\mathcal{X}(P, Q, R)$  de la transformation quadratique précédente est une bijection de  $\mathcal{X}(P, Q, R)$  sur lui-même, involutive (c'est-à-dire égale à sa propre inverse). Si  $M$  est en  $A, B, C$  ou  $D$ ,  $M'$  est égal à  $M$ , et ces quatre points sont les seuls points invariants de la transformation.

**Exemple :** Supposons le plan  $\mathcal{X}$  affine réel, et muni d'une structure euclidienne. Les coniques qui, relativement à un repère orthonormé  $(O, x, y)$  ont pour équation

$$\lambda(x^2 - y^2 - a^2) + 2\mu xy = 0 \quad (a^2 = \text{constante donnée}),$$

constituent, lorsque  $[\lambda, \mu]$  parcourt  $P^1(\mathbb{C})$ , un faisceau d'hyperboles équilatères concentriques, de centre  $O$  : elles passent toutes par les quatre points de coordonnées cartésiennes respectives  $(a, 0), (-a, 0), (0, ia)$  et  $(0, -ia)$ . Le triangle autopolaire associé est le triangle  $OIJ$  ( $I$  et  $J$  désignant les points cycliques de la structure angulaire associée). La polaire du point  $M$  de coordonnées  $(x_0, y_0)$  relativement à la conique d'équation  $x^2 - y^2 - a^2 = 0$  a une équation qui s'écrit :

$$xx_0 - yy_0 - a^2 = 0.$$

La polaire du même point  $M$  par rapport à la conique (dégénérée) d'équation  $xy = 0$  a une équation qui s'écrit

$$xx_0 + yy_0 = 0.$$

L'image de  $M$  dans la transformation quadratique associée est donc le point dont les coordonnées  $x$  et  $y$  sont solution du système

$$\begin{cases} xx_0 - yy_0 - a^2 = 0, \\ xx_0 + yy_0 = 0, \end{cases}$$

soit : 
$$x = \frac{a^2 x_0}{(x_0)^2 + (y_0)^2}, \quad y = \frac{-a^2 y_0}{(x_0)^2 + (y_0)^2}.$$

En d'autres termes, si  $M$  représente le nombre complexe  $z = x_0 + iy_0$ , son image  $M'$  par la transformation quadratique précédente représente le nombre complexe

$$z' = \frac{a^2}{z}.$$

*C'est dire que la transformation quadratique en question consiste à composer l'inversion de pôle  $O$  et de puissance  $a^2$  avec la symétrie orthogonale par rapport à  $Ox$ .*

Dans le cas général, il existe toujours une transformation projective complexe  $h$  transformant les quatre points  $A, B, C, D$  associés à un faisceau de type I en les quatre points de coordonnées  $(a, 0), (-a, 0), (0, ia), (0, -ia)$  [car ces deux familles de quatre points constituent chacune un repère projectif du plan projectif complexe].

Les points  $P, Q, R$  ont alors respectivement pour image  $J, I$  et  $O$ . Si  $q$  (resp.  $q_0$ ) désigne la transformation quadratique associée à  $(A, B, C, D)$  (resp. au faisceau d'hyperboles équilatères concentriques étudié ci-dessus), on a alors :

$$q = h \cdot q_0 \cdot h^{-1}.$$

On en déduit le

### **Théorème 12-6**

- (i) *L'image par  $q$  d'une droite  $\Delta$  passant par  $R$ , et ne passant ni par  $P$  ni par  $Q$ , est la droite  $\Delta'$  conjuguée harmonique de  $\Delta$  par rapport aux deux droites  $(RAB, RCD)$  de la conique*

dégénérée du faisceau de point double R [et, de même, en permutant les rôles de P, Q et R].

- (ii) La transformation quadratique  $q$  échange les droites  $\Delta$  qui ne passent ni par P, ni par Q ni par R, avec les coniques propres  $\Gamma$  passant à la fois par P, Q et R.
- (iii) La transformation quadratique  $q$  échange entre elles les coniques propres passant par P et Q et ne passant pas par R [et, de même, par permutation des rôles de P, Q, R].

**Remarque :** En coordonnées homogènes,  $q_0$  associe au point M de coordonnées (X, Y, Z) le point M' de coordonnées

$$(a^2XZ, -a^2YZ, X^2 + Y^2).$$

En particulier, si M parcourt une courbe algébrique  $\Gamma$  de degré  $p$ , M' parcourt une courbe algébrique  $\Gamma'$ , en général de degré  $2p$  (sauf si  $\Gamma$  passe par O ou un point cyclique, auquel cas le degré de  $\Gamma'$  dégénère). Il en est donc de même pour  $q$ , et c'est de là que vient l'expression de transformation « quadratique ».

## 6 - Exercices sur le chapitre 12

- 1 / Etant donné un repère affine réel, et un nombre réel  $\varepsilon$ , on considère le faisceau  $\mathcal{F}_\varepsilon$  des coniques ayant pour équation relativement à ce repère :

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2ax) + \mu[(x - \varepsilon)^2 - y^2] = 0$$

avec  $[\lambda, \mu] \in P^1(\mathbb{R})$ ,  $a$  désignant une constante  $> 0$ .

a) Etudier la nature des coniques de  $\mathcal{F}_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$  et de  $[\lambda, \mu]$ . Quelles sont les coniques dégénérées de  $\mathcal{F}_\varepsilon$ ?

b) Quel est le type du faisceau  $\mathcal{F}_\varepsilon$ , selon  $\varepsilon$ ?

- 2 / Mêmes questions pour

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2ax) + 2\mu(x + \varepsilon y) \cdot y = 0.$$

- 3 / Mêmes questions pour

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2ax) + \mu(x - \varepsilon)^2 = 0.$$

- 4/ a) Montrer que les points d'une conique en lesquels le cercle osculateur est surosculateur sont les sommets.

b) Etant donnée une conique à centre, d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

relativement à un repère orthonormé  $(Ox, Oy)$ , on note respectivement A, B et C les points de coordonnées  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(a, b)$  ( $a, b > 0$ ).

Montrer que le centre de courbure de la conique en A est le point d'intersection avec  $Ox$  de la perpendiculaire en C à AB (resp. à OC) pour  $\varepsilon = +1$  (resp.  $\varepsilon = -1$ ); tandis que, pour l'ellipse, le centre de courbure en B est le point d'intersection avec  $Oy$  de la perpendiculaire en C à AB.

Appliquer au tracé approximatif d'une conique à l'aide de la règle et du compas.

- 5/ Soit  $h$  une homographie sur une conique  $\Gamma$ , ayant ses deux points doubles confondus en un point  $\xi$ . Soit  $M' = h(M)$ , et P le pôle de la droite  $MM'$  relativement à  $\Gamma$ . Montrer que  $MM'$  enveloppe une conique  $\Gamma_1$  et P décrit une conique  $\Gamma_2$ , qui appartiennent toutes deux au faisceau des coniques surosculatrices en  $\xi$  à  $\Gamma$  (cf. exercices 6 et 7 du chapitre 7, et exercice 8 du chapitre 8).

- 6/ Montrer que, si toutes les coniques d'un faisceau sont dégénérées (« faux » faisceau de coniques), il existe un repère projectif par rapport auquel les « coniques » du faisceau ont une équation :

- soit de la forme  $2(\lambda X + \mu Y) \cdot Z = 0$  ( $[\lambda, \mu] \in P^1(\mathbb{R})$ );
- soit de la forme  $F(X, Y) = 0$  ( $Z$  n'intervient pas).

Interpréter.

- 7/ a) Etant donnés quatre points A, B, C, D dans un plan projectif complexe  $\mathcal{X}$ , dont trois ne sont pas alignés, quel est le lieu des points M de  $\mathcal{X}$  tel que le birapport  $(MA, MB, MC, MD)$  soit égal à une constante complexe fixée  $\lambda$  (distincte de 0 et 1)?

b) En déduire une bijection de l'ensemble des coniques du faisceau  $\mathcal{F}$  de type I défini par ABCD sur

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \amalg \{\infty\}.$$

Quelles sont les coniques correspondant à 0, 1,  $\infty$ ?

c) Etudier le cas particulier d'un faisceau de cercles à points de base. La structure de droite projective définie par la bijection ci-dessus coïncide-t-elle avec celle définie au paragraphe 4 du chapitre 8?

8/ Soit  $\Gamma$  une conique propre dans un plan projectif  $\mathcal{X}$ , et  $h : \Gamma \longrightarrow \Gamma$  une homographie sur  $\Gamma$ . On se propose de démontrer d'abord l'existence et l'unicité d'une transformation projective  $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$  dont la restriction à  $\Gamma$  soit égale à  $h$  (questions a et b).

a) Etant donnés quatre points distincts A, B, C, D de  $\Gamma$ , montrer qu'il existe une unique transformation projective  $\varphi$  de  $\mathcal{X}$  telle que

$$\varphi(A)=h(A), \quad \varphi(B)=h(B), \quad \varphi(C)=h(C) \quad \text{et} \quad \varphi(D)=h(D).$$

b) Soit M un cinquième point de  $\Gamma$  (distinct de A, B, C, D). Posons :

$$M' = h(M) \in \Gamma \quad \text{et} \quad M'' = \varphi(M) \in \mathcal{X}.$$

Montrer que le birapport des quatre droites MA, MB, MC, MD est aussi bien égal à celui des quatre droites M'A', M'B', M'C', M'D' qu'à celui des droites M''A', M''B', M''C', M''D' (où l'on a posé :  $A' = h(A)$ ,  $B' = h(B)$ ,  $C' = h(C)$  et  $D' = h(D)$ ). En déduire que M'' est aligné avec A' et M', et — de même — avec B' et M', C' et M', D' et M'. Conclure.

c) Généraliser le résultat au cas d'une homographie  $h : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$  d'une conique  $\Gamma$  (dans un plan projectif  $\mathcal{X}$ ) sur une autre conique  $\Gamma'$  (dans un plan  $\mathcal{X}'$ ).

d) Revenant au cas  $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ ,  $\Gamma = \Gamma'$ , montrer que l'axe d'homographie X de  $h$ , ainsi que son pôle  $\omega$  relatif à  $\Gamma$ , sont toujours préservés par  $\varphi$ .

e) Montrer que  $\varphi$  est une homologie ssi  $h$  est une involution, et que cette homologie  $\varphi$  est alors nécessairement harmonique.

f) Si l'axe d'homographie  $X$  de  $h$  coupe  $\Gamma$  en deux points distincts  $\alpha$  et  $\beta$  et si  $h$  n'est pas une involution, quels sont les points invariants de  $\varphi$ ?

9/ a) Montrer que les transformations projectives d'un plan  $\mathcal{X}$  qui préservent une conique propre donnée  $\Gamma$  et une droite donnée  $X$  dépendent

- de 1 paramètre si  $X$  n'est pas tangente à  $\Gamma$ ,
- de 2 paramètres si  $X$  est tangente à  $\Gamma$ .

(Voir en particulier le cas où  $X$  est la droite de l'infini,  $\Gamma$  étant tantôt un cercle et tantôt une parabole.)

b) Quelles sont les coniques  $\Gamma$  de  $\mathcal{X}$  laissées invariantes globalement par une homologie harmonique donnée? Quel est le point de Frégier de l'involution induite sur  $\Gamma$  par une telle homologie? (Cf. exercice 5 du chapitre 8).

10/ On réutilise les notations de l'exercice 3 du chapitre 3. Au point de concours  $P$  des droites  $A\alpha'$ ,  $B\beta'$  et  $C\gamma'$  ( $P$  n'appartenant à aucun des sommets du triangle  $ABC$ ) on associe la droite  $\Delta$  qui contient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  (et qui ne passe par aucun des sommets du triangle). Montrer que la transformation  $P \longrightarrow \Delta$  est la composée d'une tppr et d'une transformation quadratique.

11/ Soit  $\phi(u, v, w) = 0$  l'équation tangentielle de la conique propre  $\Gamma$ , trouvée à l'exercice 7 du chapitre 9. Si une autre conique propre  $\gamma$  admet pour équation relativement au même repère affine :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

montrer que l'image  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  par la tppr relative à  $\gamma$  a pour équation ponctuelle dans le même repère:

$$\phi(Ax + By + D, Bx + Cy + E, Dx + Ey + F) = 0.$$

Vérifier en particulier que  $\Gamma'$  est une conique propre.



- 12/ Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux coniques propres dans un plan projectif  $\mathcal{X}$ . On note  $H(\mathcal{X})$  l'espace projectif des droites de  $\mathcal{X}$ , et  $\varphi_i : \mathcal{X} \longrightarrow H(\mathcal{X})$  la tppr relative à  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ).
- a) Montrer que  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  est un automorphisme projectif de  $\mathcal{X}$ .
  - b) Etudier les points invariants de l'automorphisme projectif ci-dessus, en fonction du faisceau de coniques engendré par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Pour quel type de faisceau  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  est-il en particulier une homologie?
  - c) On prend pour  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les hyperboles d'équation  $xy = \lambda$  et  $xy = \mu$  relativement à un même repère affine. De quel type est le faisceau engendré? Quelle relation doit-il y avoir entre  $\lambda$  et  $\mu$  pour que  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  soit une homologie harmonique?
- 13/ a) Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau de coniques dans un plan projectif, et  $\Delta$  une droite du plan ne passant par aucun des points de base du faisceau. Montrer que les intersections  $M$  et  $M'$  d'une conique  $\Gamma$  de  $\mathcal{F}$  avec  $\Delta$  sont liées involutivement sur  $\Delta$  (Desargues). Combien de coniques du faisceau sont-elles tangentes à  $\Delta$ ? (Cf. les exercices 7 et 8 du chapitre 3.)
- b) Enoncer le résultat dual.
  - c) Quelle relation y a-t-il avec l'exercice 10 du chapitre 11?
- 14/ a) Montrer qu'un faisceau de coniques réelles, dans un plan euclidien, qui contient au moins deux hyperboles équilatères, n'a que des hyperboles équilatères.
- b) Montrer que si les quatre points de base d'un faisceau de type I forment un quadrangle orthocentrique, toutes les coniques du faisceau sont des hyperboles équilatères. Quelle réciproque énoncer?
- 15/ a) Montrer qu'un faisceau de coniques réelles, dans un plan euclidien, qui contient au moins deux coniques ayant les mêmes directions d'axes, a toutes ses coniques avec les mêmes directions d'axes. Que dire en particulier des coniques dégénérées d'un tel faisceau?
- b) Enoncer et démontrer des résultats analogues si le faisceau contient un cercle.

- 16/ a) Soit  $\Sigma$  une hyperquadrique propre d'un espace projectif  $\mathcal{X}$  de dimension  $n$ .

Montrer que la tppr, relativement à  $\Sigma$ , d'une sous-variété projective de dimension  $k$  dans  $\mathcal{X}$ , est une sous-variété projective de dimension  $n - 1 - k$  (ou de «codimension»  $k + 1$ ) dans  $\mathcal{X}$ , transverse à la précédente. [Préciser tout ce que cela veut dire.]

b) Montrer que les «droites conjuguées»  $\Delta$  et  $\Delta'$ , au paragraphe 6 du chapitre 6, sont chacune la tppr de l'autre relativement à la sphère  $\Sigma$  considérée (sphère de l'espace euclidien de dimension 3).

c) Soit  $\mathcal{P}$  un polyèdre régulier inscrit dans une sphère  $\Sigma$  de l'espace euclidien de dimension 3, polyèdre de type  $(p, q)$  (c.-à-d. chaque face a un même nombre  $p$  d'arêtes; à chaque sommet, aboutissent un même nombre  $q$  d'arêtes). Montrer que l'image de  $\mathcal{P}$  dans la tppr relative à  $\Sigma$  est un polyèdre  $\mathcal{P}'$  circonscrit à  $\Sigma$ , régulier de type  $(q, p)$ . Préciser en particulier ce qu'est  $\mathcal{P}'$  lorsque  $\mathcal{P}$  est l'un des cinq polyèdres de Platon (tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre).

- 17/ On appellera «faisceau tangentiel» de coniques la notion duale de celle définie au paragraphe 5 de ce chapitre.

a) Qu'est-ce qu'une «conique dégénérée» d'un tel faisceau?

b) Définir une structure de faisceau tangentiel sur l'ensemble des coniques de foyer 0 tangentes à  $a$  et  $b$  du théorème de l'angle pivotant (théorème 7-12).

c) Définir une structure de faisceau tangentiel sur l'ensemble des coniques à centre homofocales (resp. sur l'ensemble des paraboles homofocales) de l'exercice 10 du chapitre 11.

d) Donner une classification des «vrais» faisceaux tangentiels de conique, analogue à celle du paragraphe 5 de ce chapitre. Montrer que les faisceaux «bitangents» (type III) peuvent aussi bien être considérés du point de vue tangentiel que ponctuel.

e) De quels types sont les faisceaux des exemples b) et c) ci-dessus?



## CHAPITRE XIII

# *Introduction aux géométries elliptique et hyperbolique*

### 1 - Quelques généralités sur la géométrie des espaces métriques

Etant donné un espace métrique  $X$ , dont on note  $d$  la distance, rappelons qu'on appelle

- *courbe paramétrée*, d'origine  $A$  et d'extrémité  $B$  dans  $X$ , toute application continue  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  d'un intervalle compact  $[a, b]$  dans  $X$ , telle que  $\gamma(a) = A$  et  $\gamma(b) = B$ ,
- *changement de paramétrage* (resp. *changement de paramétrage préservant l'orientation*) tout homéomorphisme (resp. tout homéomorphisme croissant)  $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$  d'un intervalle compact sur un autre,
- *support*<sup>(1)</sup> (resp. *support orienté*) d'une courbe paramétrée  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  la classe d'équivalence de  $\gamma$  pour la relation d'équivalence  $\gamma \sim \gamma \circ \varphi$  où  $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$  désigne un changement de paramétrage (resp. préservant l'orientation).

Rappelons qu'une subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$  :

$$\sigma = (a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m = b)$$

est dite *plus fine* qu'une autre  $\tau = (a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b)$  si l'ensemble des nombres  $\{t_i\}_{0 \leq i \leq n}$  est inclus dans l'ensemble des nombres  $\{s_\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq m}$  (ce qui implique en particulier  $n \leq m$ ).

<sup>(1)</sup> Cette notion est plus fine que celle définie par la seule donnée de l'ensemble  $\gamma([a, b])$ .

Rappelons aussi que pour toute courbe paramétrée

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow X,$$

l'application

$$\tau \longrightarrow L_\tau(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

est croissante ( $L_\sigma(\gamma) \geq L_\tau(\gamma)$  si  $\sigma$  est plus fine que  $\tau$ ). On dit que  $\gamma$  est *rectifiable* si cette application est bornée supérieurement, et on appelle *longueur* de  $\gamma$  sa borne supérieure :

$$L(\gamma) = \sup_\sigma L_\sigma(\gamma).$$

[Si  $\gamma$  n'est pas rectifiable<sup>(2)</sup>, on pose  $L(\gamma) = +\infty$ .]

Rappelons enfin :

- que la longueur  $L(\gamma)$  d'une courbe  $\gamma$  ne dépend que de son *support non orienté* (c'est-à-dire :  $L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi)$  si

$$\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

est un homéomorphisme, que celui-ci soit croissant ou décroissant; en particulier,  $L(\gamma) = L(\gamma^{-1})$ ),

- que la composée  $\gamma_2 \star \gamma_1$  de deux courbes, dont la seconde,  $\gamma_2$ , a pour origine l'extrémité de la seconde, a pour longueur :

$$L(\gamma_2 \star \gamma_1) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

De la définition de la longueur, résulte que la restriction  $\gamma|_{[t, t']}$  de  $\gamma$  à un intervalle  $[t, t']$  inclus dans le domaine  $[a, b]$  d'une courbe rectifiable  $\gamma$  est aussi rectifiable. L'application

$$s : t \longrightarrow s(t) = L(\gamma)_{[a, t]}$$

de  $[a, b]$  dans  $[0, L(\gamma)]$  est alors un homéomorphisme et définit un changement de paramétrage. Soit  $\varphi = s^{-1} : [0, L(\gamma)] \longrightarrow [a, b]$  l'homéomorphisme inverse : la courbe  $\gamma \circ \varphi$  est dite *paramétrée par son abscisse curviligne*. [Deux courbes rectifiables  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , de même support orienté, admettent la même courbe paramétrée par son abscisse curviligne, et réciproquement.]

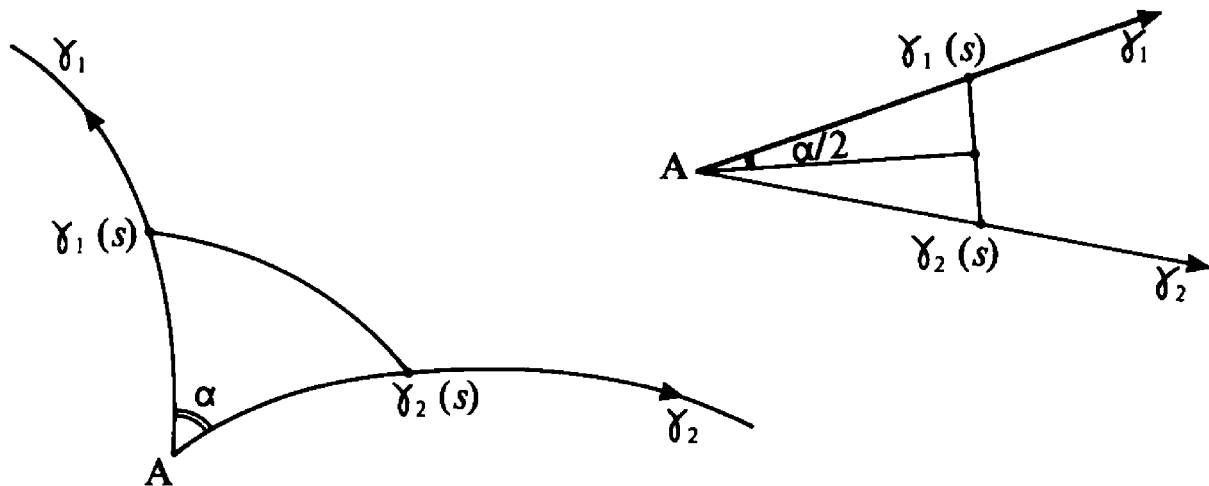
<sup>(2)</sup> Voir (exercice 1) la courbe de Van Koch, comme exemple de courbe non rectifiable.

Deux courbes rectifiables,

$$\gamma_1 : [0, L_1] \longrightarrow X \text{ et } \gamma_2 : [0, L_2] \longrightarrow X,$$

paramétrées toutes deux par leur abscisse curviligne, et de même origine  $A = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ , seront dites former en  $A$  un *angle*  $\alpha$  ( $\alpha \in [0, \pi]$ ) si

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\gamma_1(s), \gamma_2(s))}{2s}.$$



[Comparer cette définition avec la situation d'un triangle isocèle en  $A$ , dans le plan euclidien, d'angle  $\widehat{A} = \alpha$ .]

De la définition de la longueur d'une courbe  $\gamma$  d'extrémités  $A$  et  $B$ , résulte que l'on a toujours l'inégalité

$$d(A, B) \leq L(\gamma).$$

Lorsque l'on a l'égalité, on dit que  $\gamma$  est une *géodésique minimale*.

### Lemme 13-1

- (i) Pour que  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  soit une *géodésique minimale*, il faut et il suffit que, pour tous  $t, t', t''$  dans  $[a, b]$  avec  $t'$  dans  $[t, t'']$ , on ait l'égalité :

$$d(\gamma(t), \gamma(t'')) = d(\gamma(t), \gamma(t')) + d(\gamma(t'), \gamma(t'')).$$

(ii) Si  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  est une géodésique minimale, la restriction  $\gamma|_{[c, d]}$  de  $\gamma$  à un sous-intervalle  $[c, d]$  de  $[a, b]$  l'est aussi.

La partie (ii) du lemme résulte naturellement de la partie (i).

Supposons maintenant que l'on ait, pour tous  $t, t', t''$  dans  $[a, b]$  avec  $t' \in [t, t'']$ , l'égalité

$$d(\gamma(t), \gamma(t'')) = d(\gamma(t), \gamma(t')) + d(\gamma(t'), \gamma(t'')).$$

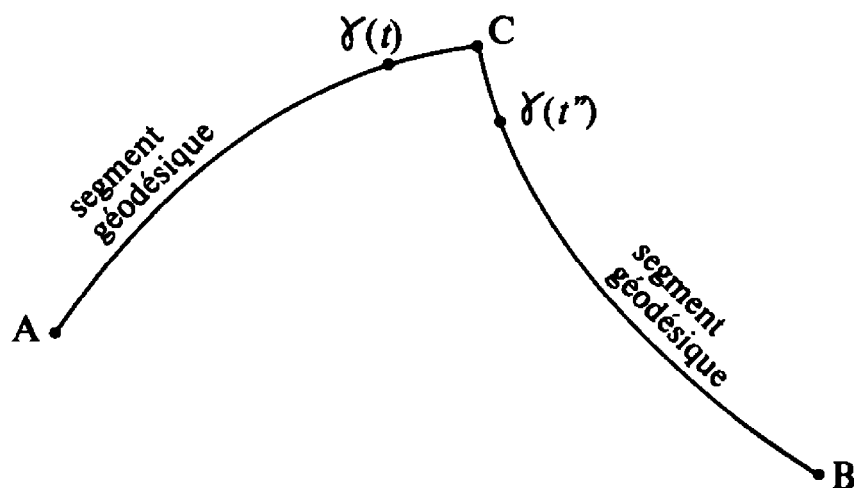
Il en résulte que  $L_\sigma(\gamma)$  est égale à  $d(\gamma(a), \gamma(b))$  pour toute subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$  : la fonction  $\sigma \longrightarrow L_\sigma(\gamma)$  est constante et donc égale à sa borne supérieure :  $\gamma$  est une géodésique minimale.

Supposons réciproquement qu'il existe  $t, t', t''$  dans  $[a, b]$  ( $t < t' < t''$ ) tels que

$$d(\gamma(t), \gamma(t'')) < d(\gamma(t), \gamma(t')) + d(\gamma(t'), \gamma(t'')).$$

On a alors la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned} d(\gamma(a), \gamma(b)) &\leq d(\gamma(a), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(t'')) + d(\gamma(t''), \gamma(b)) \\ &< d(\gamma(a), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(t')) + d(\gamma(t'), \gamma(t'')) + d(\gamma(t''), \gamma(b)). \end{aligned}$$



On en déduit :  $d(\gamma(a), \gamma(b)) < L(\gamma)$ ; c'est dire que  $\gamma$  n'est pas une géodésique minimale. Ceci achève la démonstration du lemme.

La propriété, pour une courbe  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ , d'être une géodésique minimale, ne dépend que de son support non orienté : on appellera *segment géodésique* le support non orienté d'une telle

courbe. On appellera aussi *demi-géodésique issue de A dans X* toute géodésique minimale  $\gamma : [0, L] \longrightarrow X$ , d'origine  $\gamma(0) = A$ , paramétrée par son abscisse curviligne. On appellera *géodésique* une courbe  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  qui est « localement » une géodésique minimale, c'est-à-dire telle que, pour tout  $t$  dans  $[a, b]$ , il existe un nombre  $h > 0$  pour lequel la restriction de  $\gamma$  à  $[t-h, t+h] \cap [a, b]$  soit une géodésique minimale. On appellera enfin *droite* le support de toute géodésique maximale, c'est-à-dire d'une géodésique qui n'est pas la restriction à un sous-intervalle  $J$  de l'intervalle<sup>(3)</sup>  $I$  d'une géodésique  $\gamma : I \longrightarrow X$  avec  $I$  strictement plus grand que  $J$ .

Il n'existe évidemment pas toujours de géodésique minimale joignant deux points  $A$  et  $B$  de  $X$ . (Pour  $X = \mathbb{R} - \{0\}$ , par exemple, et quelque soit la métrique, il n'existe certainement pas de géodésique minimale entre  $t$  et  $t'$  si  $t < 0$  et  $t' > 0$ .) Mais les espaces métriques  $X$  étudiés dans la suite de ce chapitre (sphère, plan projectif elliptique, espace hyperbolique) vérifieront tous l'

### axiome 1

*Pour tout couple  $A, B$  de points distincts dans  $X$ , il existe un segment géodésique d'extrémités  $A$  et  $B$ .*

### Lemme 13-2

*Si  $X$  est un espace métrique vérifiant l'axiome 1, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ .
- (ii)  $C$  appartient à un segment géodésique d'extrémités  $A$  et  $B$ .

Le fait que (ii) entraîne (i) résulte trivialement de la définition d'une géodésique minimale, et n'a rien à voir avec l'axiome 1.

Supposons, réciproquement, que  $C$  n'appartienne à aucun segment géodésique d'extrémités  $A$  et  $B$ . D'après l'axiome 1, il existe une géodésique minimale  $\gamma_1$  d'origine  $A$  et d'extrémité  $C$ , ainsi qu'une géodésique minimale  $\gamma_2$  d'origine  $C$  et d'extrémité  $B$ .

<sup>(3)</sup> Le mot « intervalle » est pris au sens de : partie connexe de  $\mathbb{R}$  (ce peut être  $\mathbb{R}$  tout entier).



Par hypothèse, la courbe  $\gamma = \gamma_2 \star \gamma_1$  n'est pas une géodésique minimale : c'est dire,  $[a, b]$  désignant l'intervalle des paramètres de  $\gamma$  ( $\gamma(a) = A$ ,  $\gamma(b) = B$ ), qu'il existe  $t, t', t''$  dans  $[a, b]$  tels que  $t' \in [t, t'']$ , et

$$d(\gamma(t), \gamma(t'')) < d(\gamma(t), \gamma(t')) + d(\gamma(t'), \gamma(t'')).$$

Puisque  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des géodésiques minimales, il faut nécessairement que  $\gamma(t)$  appartienne au support de  $\gamma_1$ , et  $\gamma(t'')$  au support de  $\gamma_2$ . On a alors :

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq d(A, \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(t'')) + d(\gamma(t''), B) \\ &\dots < d(A, \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(t')) + d(\gamma(t'), \gamma(t'')) + d(\gamma(t''), B) \\ &\dots \leq L(\gamma) = d(A, C) + d(C, B) \end{aligned}$$

d'où  $d(A, B) < d(A, C) + d(C, B)$  : c'est dire que (i) implique (ii).

Les deux derniers exemples que nous allons étudier dans la suite (espace projectif elliptique, et espace hyperbolique) vérifieront aussi l'

## axiome 2

*Il n'existe qu'un seul segment géodésique d'extrémités A, B fixées.*

## 2 - Géométrie sphérique

Dans ce paragraphe, on prendra pour X une sphère  $\Sigma$  de centre O et de rayon R, dans un espace euclidien E de dimension 3 (produit scalaire noté  $\langle, \rangle$ ).

Pour deux points A, B de  $\Sigma$ , posons :

$$d(A, B) = R \cdot \widehat{AOB} \quad (\in [0, \pi R]),$$

où

$$\widehat{AOB} = \text{Arccos} \left( \frac{1}{R^2} \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle \right).$$



Notons en effet  $B_0$  et  $C_0$  les points de  $\Sigma$  où les demi-plans  $(OA, B)$  et  $(OA, C)$  coupent le cercle  $\Gamma_A$  obtenu comme intersection de  $\Sigma$  avec le plan diamétral de  $\Sigma$  perpendiculaire à  $OA$ . Posons

$$c = \widehat{AOB} \quad \text{et} \quad b = \widehat{AOC}.$$

On a alors :

$$\overrightarrow{OB} = \cos c \overrightarrow{OA} + \sin c \overrightarrow{OB_0},$$

et 
$$\overrightarrow{OC} = \cos b \overrightarrow{OA} + \sin b \overrightarrow{OC_0}.$$

On en déduit :

$$\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle = R^2 (\cos b \cos c + \cos \alpha \sin b \sin c),$$

d'où la proposition.

### Corollaire 13-4

*$d$  est une métrique; la topologie associée est la topologie naturelle de  $\Sigma$ .*

La seconde partie du corollaire résulte immédiatement de ce que les intersections avec  $\Sigma$  des demi-cônes de révolution de sommet  $O$  et d'angle au sommet  $\omega < \frac{\pi}{2}$  constituent des systèmes fondamentaux d'ouverts pour les deux topologies.

La première partie provient de ce que  $|\cos \alpha| \leq 1$  :

$$\cos(\widehat{AOB} + \widehat{AOC}) \leq \cos \widehat{BOC} \leq \cos(\widehat{AOB} - \widehat{AOC}),$$

d'où 
$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} \geq \widehat{BOC} \geq |\widehat{AOB} - \widehat{AOC}|;$$

l'inégalité triangulaire est donc vérifiée.

De la définition de  $d$  résulte immédiatement la

### Proposition 13-5

*Les segments géodésiques de  $\Sigma$  sont les arcs de grand cercle<sup>(4)</sup> de longueur  $\leq \pi \cdot R$ . Les droites sont les grands cercles.*

(<sup>4</sup>) On appelle *grand cercle* de  $\Sigma$  l'intersection de  $\Sigma$  avec un plan diamétral (c.-à-d. passant par  $O$ ). Ce sont ici les supports des géodésiques.

*En particulier, étant donnés deux points distincts A et B de  $\Sigma$ , il existe toujours*

- *un et un seul segment géodésique d'extrémité A et B, si A et B ne sont pas diamétralement opposés,*
- *une infinité de tels segments géodésiques, si A et B sont antipodaux.*

C'est dire que  $\Sigma$  vérifie l'axiome 1, mais pas l'axiome 2.

### Proposition 13-6

Reprenons les données, hypothèses, et notations de la proposition 13-3.

*L'angle  $\hat{A}$  en A induit par le plongement dans l'espace euclidien E des demi-droites tangentes en A aux demi-géodésiques issues de A et d'extrémités respectives B et C (c'est-à-dire l'angle  $\alpha = \widehat{B_0 O C_0}$ ), est aussi égal à l'angle en A des deux demi-géodésiques en question, au sens du paragraphe 1 de ce chapitre.*

Notons en effet  $\beta$  ce dernier, posant

$$\overrightarrow{OB}(s) = \left( \cos \frac{s}{R} \right) \overrightarrow{OA} + \left( \sin \frac{s}{R} \right) \overrightarrow{OB}_0$$

$$\overrightarrow{OC}(s) = \left( \cos \frac{s}{R} \right) \overrightarrow{OA} + \left( \sin \frac{s}{R} \right) \overrightarrow{OC}_0,$$

$$d(s) = R \cdot \widehat{B(s) O C(s)} = d(B(s), C(s)),$$

$$\sin \beta/2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(s)}{2s},$$

$$\text{d'où} \quad \cos \beta = \lim_{s \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{d^2(s)}{2s^2} \right),$$

en supposant que ces limites existent; tandis que, d'après la proposition 13-3, on a :

$$\cos \frac{d(s)}{R} = \cos^2 \frac{s}{R} + \cos \alpha \cdot \sin^2 \frac{s}{R};$$

on en déduit :

$$1 - \frac{d^2(s)}{2R^2} (1 + \varepsilon(d(s))) = 1 - \frac{s^2}{R^2} (1 - \cos \alpha) (1 + \varepsilon'(s)),$$

où  $\varepsilon(d(s))$  et  $\varepsilon'(s)$  tendent vers 0 avec  $s$  :

$$\frac{d^2(s)}{2s^2} = (1 - \cos \alpha) \frac{1 + \varepsilon'(s)}{1 + \varepsilon(d(s))}$$

tend donc vers  $1 - \cos \alpha$ , d'où  $\cos \beta = \cos \alpha$ , c. q. f. d.

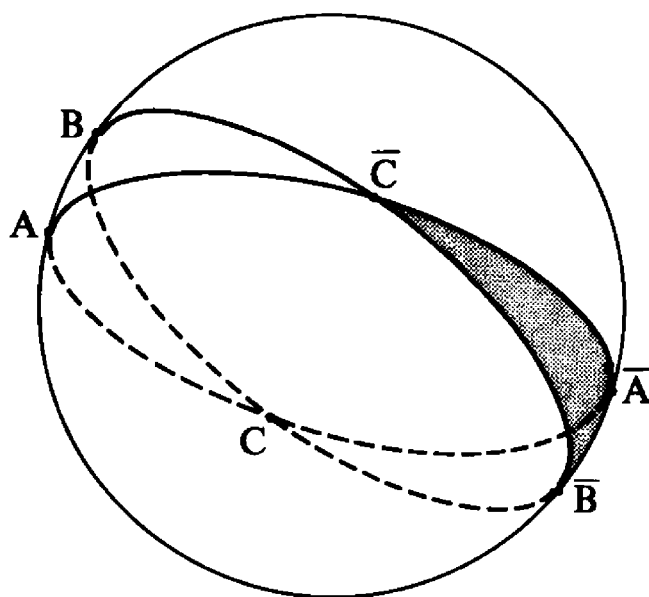
Dans cette géométrie sphérique, où segments géodésiques remplacent les segments de droite, la somme des angles d'un triangle n'est plus égale à  $\pi$  : on a en effet le

### **Théorème 13-7**

*Etant donnés trois points A, B, C sur la sphère  $\Sigma$ , deux d'entre eux n'étant pas antipodaux, on a :*

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi + \frac{\mathcal{A}(T)}{R^2},$$

où  $\mathcal{A}(T)$  désigne l'aire du triangle sphérique inclus dans un hémisphère formé par les segments géodésiques  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  et  $\widehat{CA}$ , tandis que  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$  désignent les angles de ce triangle.



Notons respectivement  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  les points de  $\Sigma$  diamétralement opposés à  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $\mathcal{A}(\Sigma) = 4\pi R^2$  l'aire de  $\Sigma$ . Si  $\mathcal{A}(P, Q, R)$  désigne l'aire du triangle formé par les trois segments géodésiques joignant trois points donnés  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  de  $\Sigma$ , l'aire  $\frac{\hat{A}}{2\pi} \cdot \mathcal{A}(\Sigma)$  du fuseau intercepté par  $\hat{A}$  est égale à la somme  $\mathcal{A}(A, B, C) + \mathcal{A}(A, C, \bar{B})$ ; de même :

$$\frac{\hat{B}}{2\pi} \cdot \mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{A}(A, B, C) + \mathcal{A}(B, C, \bar{A}),$$

et 
$$\frac{\hat{C}}{2\pi} \cdot \mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{A}(A, B, C) + \mathcal{A}(C, \bar{B}, \bar{A}).$$

Sommant ces trois égalités termes à termes, on obtient :

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) \times \frac{\mathcal{A}(\Sigma)}{2\pi} = 2\mathcal{A}(T) + \frac{1}{2} \mathcal{A}(\Sigma),$$

puisque

$$\mathcal{A}(A, B, C) + \mathcal{A}(A, C, \bar{B}) + \mathcal{A}(B, C, \bar{A}) + \mathcal{A}(C, \bar{B}, \bar{A}) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\Sigma),$$

d'où 
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi + \frac{4\pi \mathcal{A}(T)}{\mathcal{A}(\Sigma)}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

**Remarque :** Si l'aire  $\mathcal{A}(T)$  est négligeable devant  $R^2$ ,  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$  est « presque » égal à  $\pi$  : la géométrie euclidienne fournit une approximation de la géométrie d'un « morceau de sphère », d'autant meilleure que l'aire de ce dernier est plus petite par rapport à l'aire de toute la sphère.

### 3 - Le plan projectif elliptique

Nous allons remédier au fait que la sphère  $(\Sigma, d)$  du paragraphe précédent, qui vérifie l'axiome 1 (proposition 13-5), ne vérifie pas l'axiome 2 (puisque, par deux points aux antipodes, passent une

infinité de géodésiques) en identifiant, sur la sphère, deux points antipodaux : les classes d'équivalence correspondent alors bijectivement de façon naturelle aux droites de  $E$  passant par  $O$ , c'est-à-dire à un plan projectif réel  $\mathbb{P}$ . Si  $\Gamma$  désigne l'application antipodale sur  $\Sigma$ , notons  $\bar{a}$  la classe d'équivalence  $\{a, \sigma(a)\}$  de  $a$ , et  $\bar{d}$  la métrique quotient

$$\bar{d}(\bar{a}, \bar{b}) = \inf(d(a, b), d(a, \sigma(b))).$$

[Puisque  $\sigma$  est une isométrie de  $(\Sigma, d)$ ,

$$d(a, b) = d(\sigma(a), \sigma(b)) \quad \text{et} \quad d(a, \sigma(b)) = d(\sigma(a), b).$$

Vérifier l'inégalité triangulaire ne présente alors aucune difficulté.]

Par passage aux quotients, les grands cercles de  $\Sigma$  deviennent les droites projectives de  $\mathbb{P}$ , d'où la

### Proposition 13-8

- (i) *Les géodésiques de  $(\mathbb{P}, \bar{d})$  sont les droites projectives de  $\mathbb{P}$ , et les segments géodésiques sont les segments de droite projective de longueur  $\leq \frac{\pi}{2} R$ .*
- (ii) *Par deux points distincts de  $\mathbb{P}$ , passe une géodésique et une seule, et il existe un segment géodésique et un seul ayant pour extrémités ces deux points (c'est dire que les axiomes 1 et 2 sont vérifiés par  $(\mathbb{P}, \bar{d})$ ).*
- (iii) *Deux géodésiques de  $(\mathbb{P}, \bar{d})$  se coupent toujours en un point, et un seul lorsqu'elles sont distinctes. (Il n'existe donc pas, dans cet espace, de géodésiques « parallèles » qui ne soient confondues.)*
- (iv) *La somme  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$  des angles d'un triangle  $ABC$  de  $(\mathbb{P}, \bar{d})$  est toujours strictement plus grande que  $\pi$ .*

Les isométries de  $E$ , qui laissent fixe le centre  $O$  de la sphère  $\Sigma$ , préservent  $\Sigma$ , et induisent une isométrie de  $(\Sigma, d)$ . Elles forment

un groupe  $O(E)$  qui est en fait<sup>(5)</sup> le groupe de toutes les isométries de  $(\Sigma, d)$ .

Soit  $O_\sigma(E)$  le sous-groupe de  $O(E)$  formé des isométries  $s \in O(E)$  qui commutent avec l'application antipodale  $\sigma$ , et  $PO(E)$  le groupe quotient  $O_\sigma(E)/\{1, \sigma\}$  de  $O_\sigma(E)$  par le sous-groupe normal à deux éléments engendré par  $\sigma$ . On démontre<sup>(6)</sup> que  $PO(E)$  s'identifie au groupe des isométries du plan projectif elliptique  $(\mathbb{P}, \bar{d})$ .

#### 4 - L'espace hyperbolique

Notons toujours  $E$  un espace affine réel de dimension 3, et munissons-le d'un repère  $(O; X, Y, Z)$ . Munissons l'espace vectoriel associé à  $E$  de la forme quadratique

$$U(X, Y, Z) = -(X^2 + Y^2) + Z^2$$

(forme polaire associée  $U_1(X, Y, Z; X', Y', Z') = -XX' - YY' + ZZ'$ ). On écrira encore :

$$U(X, Y, Z) = U(\overrightarrow{OA}),$$

et  $U_1(X, Y, Z; X', Y', Z') = U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ , si  $A$  et  $A'$  ont respectivement pour coordonnées  $X, Y, Z$  et  $X', Y', Z'$  dans le repère  $(O; X, Y, Z)$ .

[Cette forme quadratique va jouer le même rôle vis-à-vis de l'espace hyperbolique, que le produit scalaire euclidien  $<, >$  vis-à-vis de la sphère  $\Sigma$  ou du plan projectif elliptique au paragraphe précédent.]

Nous allons prendre pour espace métrique l'ensemble des points  $A$  de  $E$  tels que  $Z > 0$  et  $U(\overrightarrow{OA}) = R^2$  ( $R$  désignant une constante positive donnée), c'est-à-dire la nappe  $Z > 0$  de l'hyperboloïde à deux nappes

$$-(X^2 + Y^2) + Z^2 = R^2,$$

<sup>(5)</sup> Cf. exercice 2 de ce chapitre.

<sup>(6)</sup> Cf. exercice 3 de ce chapitre.



avec la métrique

$$d(A, B) = R \cdot \text{Argch} \left( \frac{1}{R^2} U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \right)$$

(comparer avec  $R \cdot \text{Arccos} \left( \frac{1}{R^2} \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle \right)$  au paragraphe 2).

Avant de vérifier que  $d$  est une métrique, démontrons une formule analogue à celle de la proposition 13-3. Soit  $A$  un point de  $H$ , et  $\Pi_A$  l'ensemble des points  $M$  de  $E$  tels que

$$U_1(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = 0,$$

qui est aussi le plan passant par  $O$  parallèle au plan tangent à  $H$  en  $A$ . Soit  $K$  l'hyperboloïde à une nappe d'équation

$$-(X^2 + Y^2) + Z^2 = -R^2,$$

et  $\mathcal{E}(A)$  l'ellipse intersection  $K \cap \Pi_A$ .

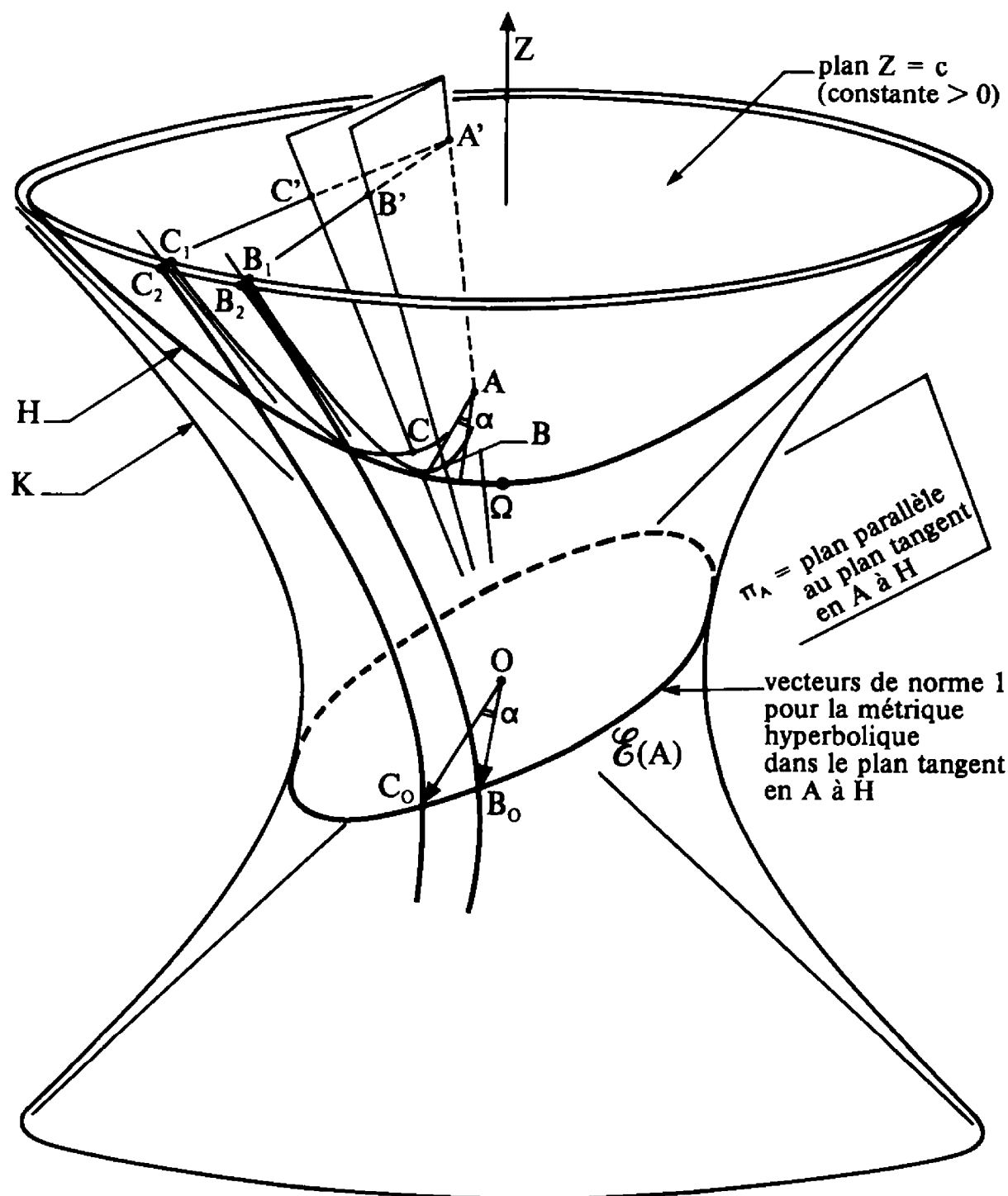
Soient  $B$  et  $C$  deux autres points de  $H$ . Notons  $B_0$  (resp.  $C_0$ ) le point où le demi-plan passant par  $OA$  et contenant  $B$  (resp.  $C$ ) coupe  $\mathcal{E}(A)$ . Il existe tout d'abord un nombre  $c$  (resp.  $b$ ) et un seul tel que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \text{ch } c \cdot \overrightarrow{OA} + \text{sh } c \cdot \overrightarrow{OB_0} \\ (\text{resp. } \overrightarrow{OC} &= \text{ch } b \cdot \overrightarrow{OA} + \text{sh } b \cdot \overrightarrow{OC_0}). \end{aligned}$$

[En effet, notons  $\beta$  et  $\beta'$  les composantes de  $\overrightarrow{OB}$  dans la base  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB_0})$  :  $\overrightarrow{OB} = \beta \overrightarrow{OA} + \beta' \overrightarrow{OB_0}$ ; puisque  $A$  et  $B$  appartiennent à  $H$ ,  $U(\overrightarrow{OA}) = U(\overrightarrow{OB}) = R^2$ ; puisque  $B_0$  est dans  $K$ ,  $U(\overrightarrow{OB_0}) = -R^2$ ; et puisque  $B_0$  est dans  $\Pi_A$ ,  $U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB_0}) = 0$ ; la formule

$$U(\overrightarrow{OB}) = \beta^2 U(\overrightarrow{OA}) - 2\beta\beta' U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB_0}) + \beta'^2 U(\overrightarrow{OB_0})$$

implique alors la relation  $\beta^2 - \beta'^2 = 1$  : c'est dire qu'il existe un unique nombre  $c$  tel que  $\beta = \text{ch } c$  et  $\beta' = \text{sh } c$ ; le calcul pour  $\overrightarrow{OC}$



est analogue.] On en déduit  $d(A, B) = R \cdot c$  et  $d(A, C) = R \cdot b$ . On en déduit aussi, en calculant

$$\begin{aligned} U_1(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) &= U_1(\operatorname{ch} c \cdot \overrightarrow{OA} + \operatorname{sh} c \cdot \overrightarrow{OB}_0, \operatorname{ch} b \cdot \overrightarrow{OA} + \operatorname{sh} b \cdot \overrightarrow{OC}_0) \\ &= R^2 \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c + U_1(\overrightarrow{OB}_0, \overrightarrow{OC}_0) \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c. \end{aligned}$$

**Lemme 13-9**

*La restriction à  $\Pi_A$  de  $-U_1$  est un produit scalaire.*

La forme quadratique  $U$  est en effet définie négative sur tout plan passant par  $O$  ne rencontrant pas le cône isotrope  $Z^2 = X^2 + Y^2$ , sinon en  $O$ ; or tel est bien le cas de  $\Pi_A$ . On appellera *angle hyperbolique* dans  $\Pi_A$  (ainsi que dans le plan tangent en  $A$  à  $H$ , qui lui est parallèle) l'angle, appartenant à  $[0, \pi]$ , associé au produit scalaire  $-U_1$  dans  $\Pi_A$ .

**Proposition 13-10**

*Avec les notations précédentes, on a toujours :*

$$\operatorname{ch} \frac{d(B, C)}{R} = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c - \cos \alpha \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c.$$

où  $\alpha$  désigne l'angle hyperbolique de  $\overrightarrow{OB_0}$  et  $\overrightarrow{OC_0}$  dans  $\Pi_A$ .

La proposition résulte immédiatement de la formule

$$U_1(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = R^2 \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c + U_1(\overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OC_0}) \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c.$$

**Corollaire 13-11**

*$d$  est une métrique sur  $H$ .*

Seule, l'inégalité triangulaire demande démonstration. Or, de la proposition 13-10, on déduit :

$$\operatorname{ch} \frac{d(B, C)}{R} \leq \operatorname{ch}(b + c),$$

d'où  $d(B, C) \leq d(B, A) + d(A, C)$ .

**Corollaire 13-12**

(i) *Les demi-géodésiques issues de A sont les courbes*

$$s \longrightarrow \operatorname{ch} \frac{s}{R} \cdot \overrightarrow{OA} + \operatorname{sh} \frac{s}{R} \cdot \overrightarrow{OB_0},$$

*où  $B_0 \in \mathcal{E}(A)$  (c'est-à-dire les « grandes hyperboles » intersections avec l'hyperboloïde H d'un plan de E passant par O).*

(ii) *L'angle en A de deux telles demi-géodésiques, correspondant respectivement aux points  $B_0$  et  $C_0$  de  $\mathcal{E}(A)$ , au sens du paragraphe 1, est égal à l'angle hyperbolique  $\alpha$  de  $\overrightarrow{OB_0}$  et  $\overrightarrow{OC_0}$  dans  $\Pi_A$  (ou, ce qui revient au même, l'angle hyperbolique des demi-tangentes en A aux deux courbes en question).*

La formule de la proposition 13-10 montre en effet que

$$B_0 = C_0 \quad \text{équivaut à :} \quad d(B, C) = |d(A, B) - d(A, C)|,$$

tandis que

$$\overrightarrow{OB_0} = -\overrightarrow{OC_0} \quad \text{équivaut à :} \quad d(B, C) = d(B, A) + d(A, C).$$

La partie (i) du corollaire en résulte.

La démonstration de la partie (ii) est en tout point analogue à celle de la proposition 13-6 : paramétrées par leur abscisse curviligne, les deux demi-géodésiques sont définies par

$$\overrightarrow{OB}(s) = \operatorname{ch} \frac{s}{R} \overrightarrow{OA} + \operatorname{sh} \frac{s}{R} \overrightarrow{OB_0},$$

et 
$$\overrightarrow{OC}(s) = \operatorname{ch} \frac{s}{R} \overrightarrow{OA} + \operatorname{sh} \frac{s}{R} \overrightarrow{OC_0}.$$

Notons  $d(s)$  la distance  $d(B(s), C(s))$ . Si  $\beta$  désigne l'angle en A de ces deux demi-géodésiques au sens du paragraphe 1,

$$\sin \beta/2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(s)}{2s}, \quad \text{d'où} \quad \cos \beta = \lim_{s \rightarrow 0} \left(1 - \frac{d^2(s)}{2s^2}\right)$$

en supposant que ces limites existent. De la proposition 12-9, on déduit :

$$\operatorname{ch} \frac{d(s)}{R} = \operatorname{ch}^2 \frac{s}{R} - \cos \alpha \operatorname{sh}^2 \frac{s}{R},$$

$$\text{d'où} \quad 1 + \frac{d^2(s)}{2R^2} (1 + \varepsilon(d(s))) = 1 + \frac{s^2}{R^2} (1 - \cos \alpha) (1 + \varepsilon'(s))$$

$$\text{avec} \quad \lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon(d) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon'(s) = 0.$$

Il en résulte que  $\frac{d^2(s)}{2s^2}$  tend vers  $1 - \cos \alpha$  quand  $s$  tend vers 0, d'où  $\cos \alpha = \cos \beta$  c. q. f. d.

### Proposition 13-13

*L'espace H, muni de la métrique d ci-dessus, vérifie les axiomes 1 et 2.*

Quelque soit B, distinct de A dans H, il existe un unique segment géodésique de A vers B, obtenu en prenant l'intersection, avec H, de la droite  $D_t$  joignant O au point  $M_t$  parcourant le segment [AB] dans E ( $\overrightarrow{OM_t} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}$ ,  $t \in [0, 1]$ ), c'est-à-dire l'arc de grande hyperbole.

*Isométrie de H.* — Notons  $O(2, 1)$  le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel E (origine O du repère (O, XYZ) fixé au début du paragraphe), qui préserve la forme quadratique

$$U(X, Y, Z) = -(X^2 + Y^2) + Z^2$$

(et qui préserve aussi par conséquent la forme polaire associée  $U_1$ ). En opérant sur E,  $O(2, 1)$  préserve

- le cône d'équation  $-(X^2 + Y^2) + Z^2 = 0$ ,
- l'hyperboloïde à deux nappes ( $H$  et  $H_-$ ), d'équation

$$-(X^2 + Y^2) + Z^2 = R^2,$$

— l'hyperboloïde  $K$  à une nappe, d'équation

$$-(X^2 + Y^2) + Z^2 = -R^2.$$

Nous noterons  $O_+(2, 1)$  le sous-groupe d'indice 2 du précédent préservant  $H$  (éliminant ainsi par exemple la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ qui échange } H \text{ et } H_-, \text{ (application antipodale).}$$

### Proposition 13-14

*Le groupe  $O_+(2, 1)$ , en opérant sur  $H$  par restriction de son action sur  $E$ , opère transitivement, et est un groupe d'isométries.*

Puisque la métrique  $d$  est définie entièrement en termes de  $U$ , et que  $U$  est préservée par l'action de  $O_+(2, 1)$ , il est clair que ce groupe opère isométriquement sur  $H$ .

Pour montrer qu'il opère transitivement, c'est-à-dire qu'il existe toujours, étant donnés deux points  $A$  et  $B$  de  $H$ , un opérateur  $M \in O_+(2, 1)$  tel que  $M(A) = B$ , il suffit de le démontrer lorsque  $B$  est le point  $\Omega$  de coordonnées  $(0, 0, R)$ .

### Lemme 13-15

Les matrices  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et

$$M(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} t & 0 & +\operatorname{sh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sh} t & 0 & +\operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

appartiennent au groupe  $O_+(2, 1)$ .

En ce qui concerne la première de ces deux matrices, il suffit d'observer que

—  $(X^2 + Y^2) + Z^2 = -[(X \cos \theta + Y \sin \theta)^2 + (-X \sin \theta + Y \cos \theta)^2] + Z^2$   
et que  $R(\theta)$  préserve les demi-espaces  $Z > 0$  et  $Z < 0$ . Pour la matrice  $M(t)$ , on observe de même que

—  $(X^2 + Y^2) + Z^2 = -[(-\operatorname{ch} t \cdot X + \operatorname{sh} t \cdot Z)^2 + Y^2] + (-\operatorname{sh} t \cdot X + \operatorname{ch} t \cdot Z)^2.$

D'autre part, l'image par  $M(t)$  du point  $\Omega = (0, 0, R)$  de  $H$  est le point  $(R \operatorname{sh} t, 0, R \operatorname{ch} t)$ , dont la troisième coordonnée est positive et qui appartient donc à  $H$ ; puisque  $H$  est connexe et que  $M(t)$  est continue, l'image de  $H$  par  $M(t)$  est incluse dans  $H$  (et est en fait  $H$  tout entier).

La démonstration de la proposition 13-14 en résulte immédiatement, car, pour tout point  $A = (X_0, Y_0, Z_0)$  de  $H$ , il existe un nombre  $t \geq 0$  et un angle  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (d'ailleurs uniques) tels que

$$X_0 = R \operatorname{sh} t \cos \theta, \quad Y_0 = R \operatorname{sh} t \sin \theta, \quad Z_0 = R \operatorname{ch} t.$$

La matrice  $R(\theta)$  transforme alors  $A$  en  $A_1 = (R \operatorname{sh} t, 0, R \operatorname{ch} t)$  et  $M(t)$  transforme  $A_1$  en  $\Omega = (0, 0, R)$ . c. q. f. d.

### Remarques :

1) On peut démontrer<sup>(5)</sup> que le groupe  $O_+(2, 1)$  est en fait le groupe de *toutes* les isométries de  $H$ , et qu'il est engendré par les matrices de la forme précédente.

2) Les matrices  $M$  de la forme  $M = R(-\theta) \circ M(t) \circ R(\theta)$  vérifient  $M^2 = \operatorname{Id}$ , c'est-à-dire  $M = M^{-1}$ . L'ensemble des points doubles de  $M$  est l'ensemble des points d'une géodésique, et  $M$  joue — vis-à-vis de cette géodésique — le même rôle que la symétrie orthogonale par rapport à une droite dans le cas euclidien.

*Modèle de Cayley  $\mathcal{U}$ . Disque de Cayley  $\mathcal{C}$ .* — La nappe  $H$  de l'hyperboloïde à deux nappes  $H \cup H_-$  d'équation  $-(X^2 + Y^2) + Z^2 = R^2$  s'identifie aussi au quotient de cet hyperboloïde par l'application

antipodale  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  dans  $O(2, 1)$ , ou — ce qui revient au

même — à l'ouvert  $\mathcal{U}$  du plan projectif  $P(E)$  défini en coordonnées homogènes  $X, Y, Z$  par l'inéquation

$$-(X^2 + Y^2) + Z^2 > 0.$$

<sup>(5)</sup> Cf. exercice 4 de ce chapitre.

Le sous-groupe  $O_+(2, 1)$  de  $O(2, 1)$  devient alors le groupe  $PO(2, 1)$ , quotient de  $O(2, 1)$  par le sous-groupe d'ordre 2 qu'engendre l'application antipodale : c'est le groupe des automorphismes projectifs de  $P(E)$  qui préservent la conique d'équation

$$-(X^2 + Y^2) + Z^2 = 0$$

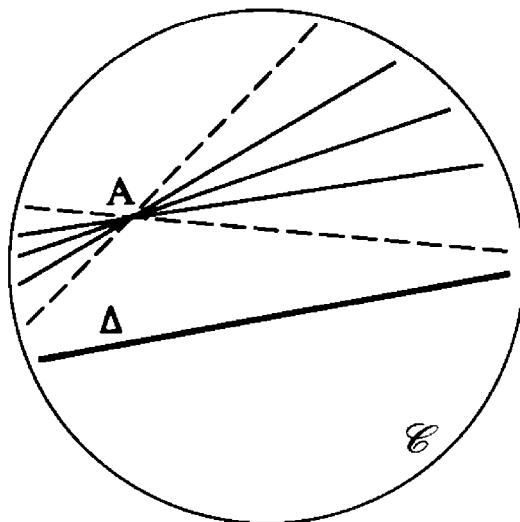
et son « intérieur »  $\mathcal{U}$ . Les géodésiques de  $H$  deviennent alors les intersections avec  $\mathcal{U}$  des droites projectives de  $P(E)$ , les segments géodésiques étant les segments de droites inclus dans  $\mathcal{U}$ .

On visualisera l'ouvert  $\mathcal{U}$  de  $P(E)$  en l'identifiant au disque  $C$  d'inéquation  $X^2 + Y^2 < R^2$  dans le plan  $\Pi$  d'équation  $Z = R$  à l'aide de l'application usuelle

$$[X, Y, Z] \longrightarrow \left( \frac{X}{Z} R, \frac{Y}{Z} R, R \right).$$

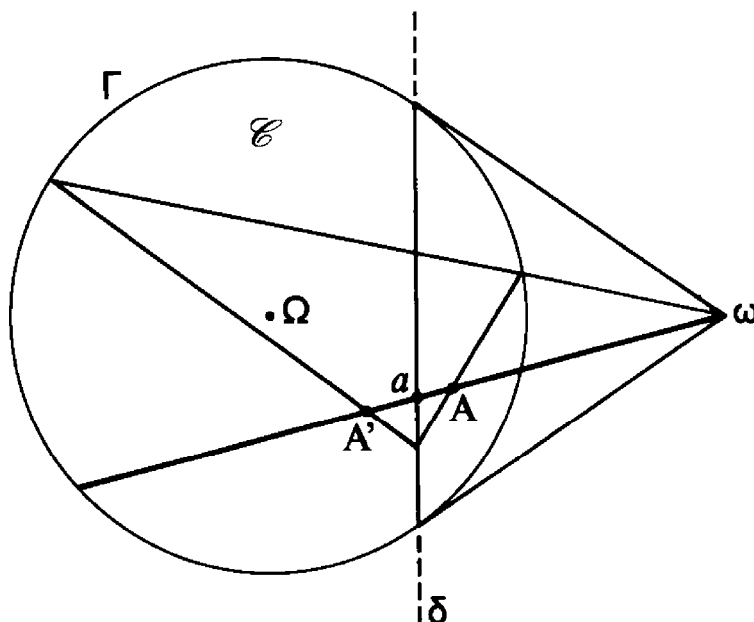
Les segments géodésiques de  $\mathcal{U}$  deviennent alors les segments de droite intérieurs au cercle d'équation  $x^2 + y^2 = R^2$  dans le plan  $\Pi$ .

Alors que, sur l'espace elliptique du paragraphe précédent, il n'existe pas de « parallèles » (deux grands cercles de  $\Sigma$  se coupant toujours), il existe maintenant des géodésiques *parallèles* (ce mot signifiant qu'elles ne se rencontrent pas). Mais la figure ci-dessous montre que le *postulat d'Euclide n'est pas vérifié* : par un point  $A$  n'appartenant pas à une géodésique  $\Delta$ , passe une infinité de géodésiques parallèles à  $\Delta$ .





Toute matrice  $M$  appartenant à  $GL(E)$  définissant un automorphisme du plan projectif  $\widehat{\Pi}$  (complété projectif du plan  $\Pi$  d'équation  $Z=R$ ), les isométries de  $\mathcal{U}$  engendrées par  $PO(2, 1)$  deviennent les transformations projectives de  $\widehat{\Pi}$  qui préservent le disque  $\mathcal{C}$  (ou plutôt leur restriction à  $\mathcal{C}$ ). En particulier, les matrices  $R(\theta)$  induisent dans  $\mathcal{C}$  les rotations de centre  $\Omega$  et angle  $\theta$  (au sens euclidien). Les transformations induites par les matrices  $M(t)$  sont des homologies harmoniques de  $\widehat{\Pi}$ , dont l'axe  $\delta$  coupe le cercle  $\Gamma$  bord de  $\mathcal{C}$ , et dont le centre  $\omega$  est le pôle de  $\delta$  par rapport à  $\Gamma$ . [Rappelons<sup>(6)</sup> qu'on appelle *homologie* d'axe  $\delta$  et centre  $\omega$ , dans un plan projectif, toute transformation projective de ce plan sur lui-même, admettant  $\delta \cup \{\omega\}$  comme ensemble de points invariants. Toute droite du plan passant par  $\omega$  est alors invariante globalement, et il existe un nombre  $k \neq 0$  tel que, pour tout point  $A$  du plan distinct de  $\omega$  et n'appartenant pas à  $\delta$ , l'image  $A'$  de  $A$  soit le point de la droite  $\omega A$  pour lequel le birapport  $(A', A, a, \omega)$  est égal à  $k$  ( $a$  désignant le point d'intersection de  $\omega A$  avec  $\delta$ ).



On dit que l'homologie est *harmonique* si  $k = -1$ , ce qui revient, lorsqu'elle n'est pas l'identité, à dire que l'homologie est égale à sa propre inverse.] Pour vérifier notre assertion, il suffit d'observer

<sup>(6)</sup> Cf. exercice 10 du chapitre 5. Cf. aussi l'exercice 3, paragraphe 5 et 9.

que la matrice  $M(t)$  admet  $+1$  comme valeur propre double et  $-1$  comme valeur propre simple, puisque

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} t - \xi & 0 & -\operatorname{sh} t \\ 0 & 1 - \xi & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & -\operatorname{ch} t - \xi \end{vmatrix} = -(\xi - 1)^2(\xi + 1).$$

Les vecteurs propres correspondant à la valeur propre  $1$  engendrent le plan d'équation

$$X \operatorname{sh} t - Z(\operatorname{ch} t + 1) = 0,$$

dont l'intersection avec  $\Pi$  définit  $\delta$ , tandis que les vecteurs propres correspondant à  $-1$  engendrent la droite

$$\begin{cases} X(\operatorname{ch} t + 1) - Z \operatorname{sh} t = 0 \\ Y = 0, \end{cases}$$

qui coupe  $\hat{\Pi}$  en un point  $\omega$ . Puisque  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \operatorname{Id}$ ,  $(M(t))^2 = \operatorname{Id}$ .

Puisque la transformation induite par  $M(t)$  sur  $\hat{\Pi}$  préserve  $\mathcal{C}$ ,  $\delta$  coupe nécessairement  $\Gamma$  en deux points distincts, et  $\omega$  est nécessairement le pôle de  $\delta$  par rapport à  $\Gamma$ . Bien entendu, les matrices  $M = R(-\theta) \cdot M(t) \cdot R(\theta)$  induisent aussi des homologues harmoniques ayant les mêmes propriétés.

La métrique de  $\mathcal{C}$  peut se définir uniquement au moyen de la structure projective de  $\hat{\Pi}$  et du cercle  $\Gamma$  par la formule suivante (on pourrait remplacer  $\Gamma$  par n'importe quelle autre conique réelle de  $\hat{\Pi}$ , avec points réels, après avoir défini convenablement son « intérieur », ce qui ne présente aucune difficulté) :

### Proposition 13-16

Notons  $I_1$  et  $J_1$  les points où la droite  $A_1B_1$ , qui joint deux points distincts  $A_1$  et  $B_1$  de  $\mathcal{C}$ , coupe  $\Gamma$ . On a alors :

$$d_{\mathcal{C}}(A_1, B_1) = \frac{R}{2} \cdot |\operatorname{Log}(A_1, B_1, I_1, J_1)|.$$

Posons en effet  $A_1 = \varphi(A)$ ,  $B_1 = \varphi(B)$ ; et notons I et J les points où la droite AB coupe le cône asymptote  $-(X^2 + Y^2) + Z^2 = 0$  : les birapports  $(A_1, B_1, I_1, J_1)$  et  $(A, B, I, J)$  sont égaux. Les points P de la droite AB sont ceux qui vérifient  $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$  ( $\lambda + \mu = 1$ ). Puisque

$$U(\overrightarrow{OP}) = \lambda^2 U(\overrightarrow{OA}) + 2\lambda\mu U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + \mu^2 U(\overrightarrow{OB}),$$

les points I et J correspondent aux racines  $\xi = [\lambda, \mu]$  ( $= \mu/\lambda$ ) de l'équation

$$-\lambda^2 R^2 + 2\lambda\mu U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) - \mu^2 R^2 = 0,$$

soit  $\xi_1 = U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + \sqrt{(U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))^2 - R^4},$

et  $\xi_2 = U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) - \sqrt{(U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))^2 - R^4}.$

Le birapport  $(A, B, I, J) = (0, \infty, \xi_1, \xi_2)$  est donc égal à  $\xi_1/\xi_2$ , soit :

$$\begin{aligned} (A_1, B_1, I_1, J_1) &= \frac{U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + \sqrt{(U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))^2 - R^4}}{U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) - \sqrt{(U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))^2 - R^4}} \\ &= \frac{1}{R^4} \left[ U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + \sqrt{(U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))^2 - R^4} \right]^2. \end{aligned}$$

De la formule  $\text{Argch } x = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 - 1})$ , on déduit :

$$\frac{1}{2} \text{Log}(A_1, B_1, I_1, J_1) = \text{Argch} \left[ \frac{1}{R^2} U_1(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \right],$$

d'où la proposition ( $I_1$  et  $J_1$  sont indiscernables, d'où la valeur absolue).

**Remarque :** La formule de Laguerre (chapitre 10, paragraphe 3) exprime que la métrique du plan projectif elliptique est donnée par une formule analogue à celle de la proposition 13-16, quand on remplace le cercle  $\Gamma$  dans  $\widehat{\Pi}$  par la conique sans point réel

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \\ Z = R \end{cases}$$

et  $\mathcal{C}$  par tout le plan projectif  $\widehat{\Pi}$ .

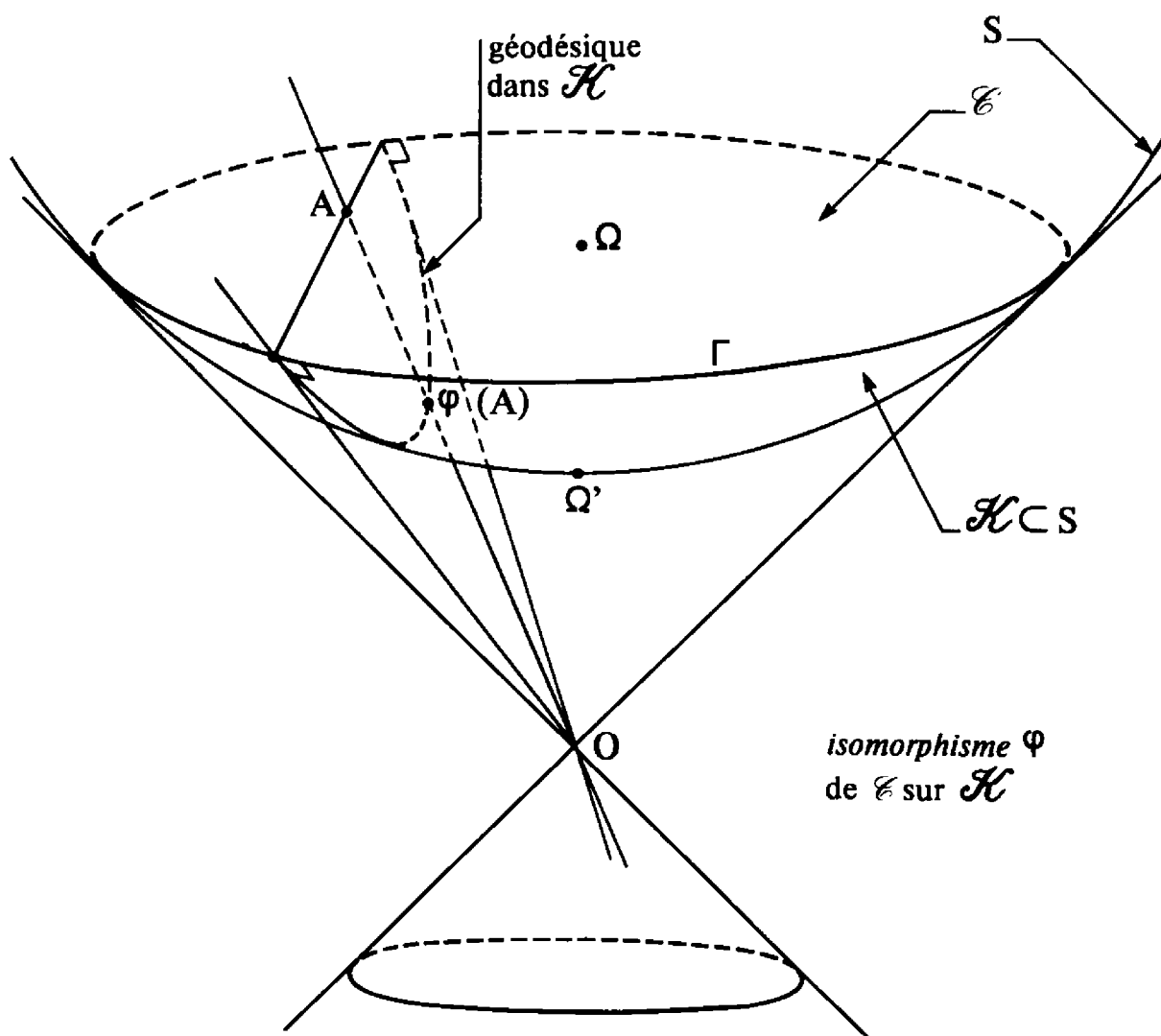
*Modèle de Klein.* — soit  $\mathcal{K}$  l'ouvert défini par  $Z < R$  sur la sphère  $S$  d'équation

$$X^2 + Y^2 + (Z - 2R)^2 = 2R^2$$

inscrite, le long du cercle  $\Gamma$  qui borde  $\mathcal{C}$ , dans le cône d'équation

$$-(X^2 + Y^2) + Z^2 = 0.$$

Notons  $\varphi$  la bijection  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}$  dont l'inverse est la restriction à  $\mathcal{K}$  de la projection conique, de point de vue  $O$ , sur  $\Pi$ .



On appellera « modèle de Klein » l'ensemble  $\mathcal{K}$ , muni de la métrique  $d_{\mathcal{K}}$  déduite de  $d_{\mathcal{C}}$  par la bijection  $\varphi$ . Les géodésiques de ce modèle sont les arcs de cercle dans  $\mathcal{K}$  dont le plan passe par l'origine  $O$

de  $E$  : les cercles complets coupent le bord  $\Gamma$  commun à  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{C}$  en des points dont les tangentes sont des génératrices du cône de révolution d'équation

$$-(X^2 + Y^2) + Z^2 = 0$$

et sont donc orthogonales (au sens euclidien) à  $\Gamma$ .

### Proposition 13-17

*Le modèle de Klein est conforme : l'angle hyperbolique de deux demi-géodésiques de  $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{K}})$  issues d'un même point  $A$  est égal à l'angle euclidien dans  $E$  que font les demi-tangentes en  $A$  à ces courbes.*

Tout d'abord, si  $A$  est le point  $\Omega'$  de  $\mathcal{K}$  qui se trouve sur  $OZ$ , le résultat est évident :  $\mathcal{E}(\Omega)$  étant un cercle, où — rappelons-le —  $\Omega$  désigne le sommet  $(0, 0, R)$  de  $H$ , angles euclidiens et hyperboliques coïncident en  $\Omega$  sur le disque de Cayley, donc aussi en  $\Omega'$  sur le modèle de Klein, puisque la différentielle de  $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}$  est une translation (donc une isométrie euclidienne) du plan tangent  $\Pi$  à  $H$  en  $\Omega$  sur le plan tangent à  $\mathcal{K}$  en  $\Omega'$ .

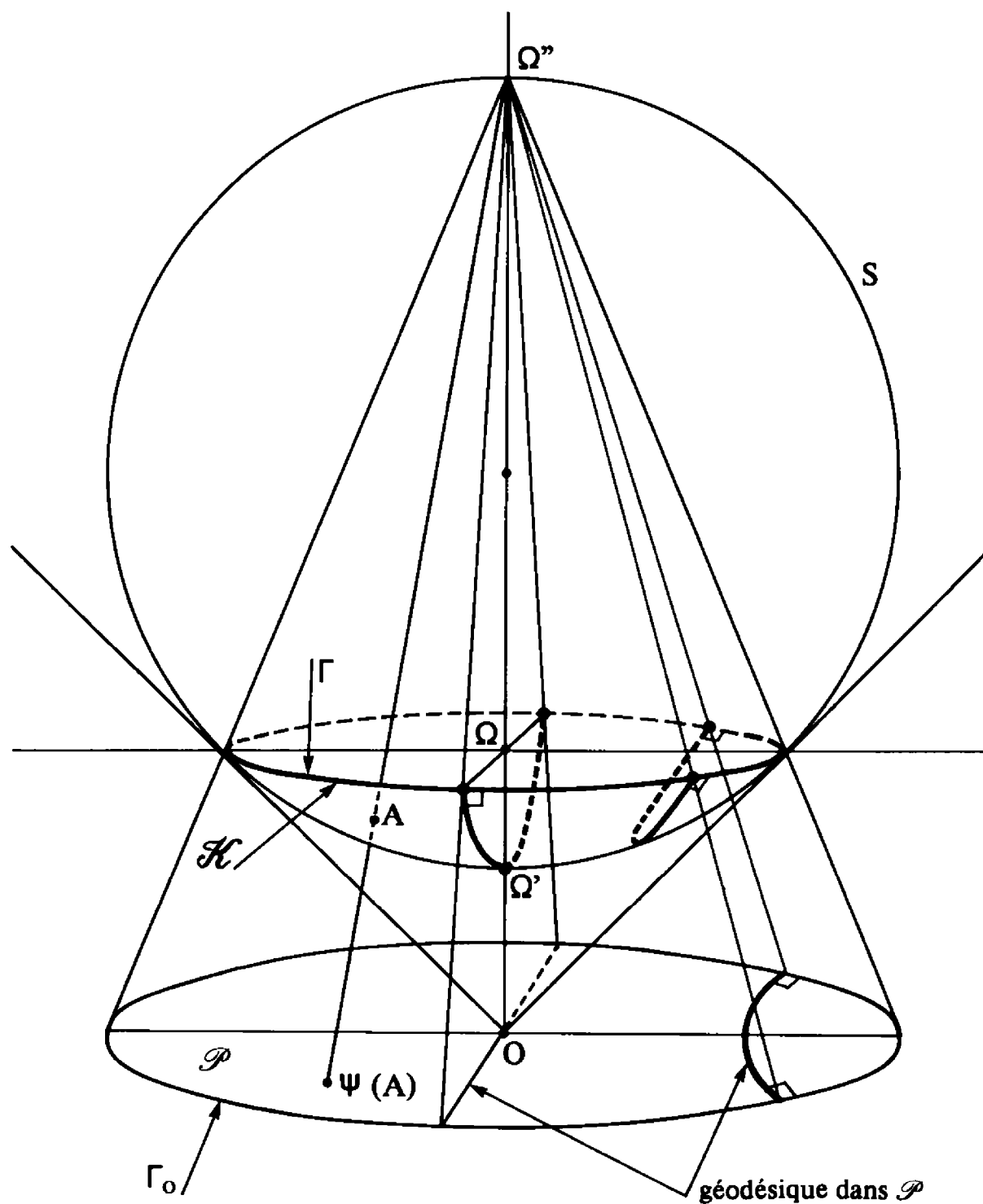
Pour démontrer la proposition dans le cas général, il suffit de prouver que le groupe des isométries de  $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{K}})$  qui sont conformes pour les angles euclidiens dans  $\mathcal{K}$  opère transitivement sur  $\mathcal{K}$  (ces isométries sont en effet aussi conformes pour les angles hyperboliques, puisque ceux-ci peuvent se définir uniquement à partir de  $d_{\mathcal{K}}$ ). Soit donc  $A$  un point de  $\mathcal{K}$  autre que  $\Omega'$ ,  $t > 0$  et  $\theta$  dans  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  tels que  $\varphi^{-1}(A)$  soit égal à  $(R \operatorname{th} t \cos \theta, R \operatorname{th} t \sin \theta, R)$  dans  $\mathcal{C}$  : l'isométrie

$$\rho = \varphi \circ R(-\theta) \circ M(t) \circ R(\theta) \circ \varphi^{-1}$$

de  $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{K}})$  vérifie alors  $\rho(A) = \Omega'$ . La démonstration sera donc achevée si l'on prouve que  $\rho$  est conforme pour les angles euclidiens. Posons  $\sigma = R(\theta) \circ M(t) \circ R(-\theta)$  : c'est la restriction à  $\mathcal{C}$  d'une homologie harmonique de  $\widehat{\Pi}$  dont nous noterons  $\omega$  le centre et  $\delta$  l'axe. Soit  $a$  le point d'intersection de  $\delta$  et de la droite qui joint  $\omega$



cohérente avec la structure projective de  $\mathcal{C}$ , que celle de l'hémisphère  $\mathcal{K}_0$  de disque diamétral  $\mathcal{C}$  avec projection cylindrique  $\varphi_0$  de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{K}_0$  habituellement utilisée. [Le fait que  $\mathcal{K}_0$  soit aussi



isomorphisme  $\psi$   
de  $\mathcal{K}$  sur  $\mathcal{P}$

un modèle conforme pour la métrique  $d_{\mathcal{K}_0}$  déduite de  $d_{\mathcal{C}}$  par  $\varphi_0$ , se démontre de façon absolument analogue, en remplaçant  $\varphi$  par  $\varphi_0$ .]

*Modèle de Poincaré.* — Le modèle de Klein ci-dessus présente l'intérêt d'être conforme, mais l'inconvénient d'être non plan. On va y remédier par projection stéréographique de  $\mathcal{K}$  sur le plan (XOY). Soit  $\Omega''$  le point diamétralement opposé à  $\Omega'$  sur la sphère  $S$  qui contient  $\mathcal{K}$ . L'image  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{K}$ , par la projection stéréographique  $\psi$  de pôle  $\Omega''$  de  $S - \{\Omega''\}$  sur le plan XOY, est un disque de centre  $O$ , qu'on appellera « disque de Poincaré », une fois muni de la métrique  $d_{\mathcal{J}}$  déduite de  $d_{\mathcal{K}}$  par la bijection  $\psi$ .

Les géodésiques de  $(\mathcal{J}, d_{\mathcal{J}})$ , qui sont les projections stéréographiques des arcs de cercle dans  $\mathcal{K}$  orthogonaux à  $\Gamma$ , sont les arcs de cercle intérieurs à  $\mathcal{J}$  qui sont orthogonaux au bord  $\Gamma_0$  de  $\mathcal{J}$ .

### Proposition 12-18

*Le disque de Poincaré est un modèle conforme (au sens analogue à celui de l'énoncé de la proposition 13-17).*

Puisque la projection stéréographique  $\psi$  préserve les angles euclidiens (cf. chapitre 6), la proposition 13-18 est un corollaire immédiat de 13-17.

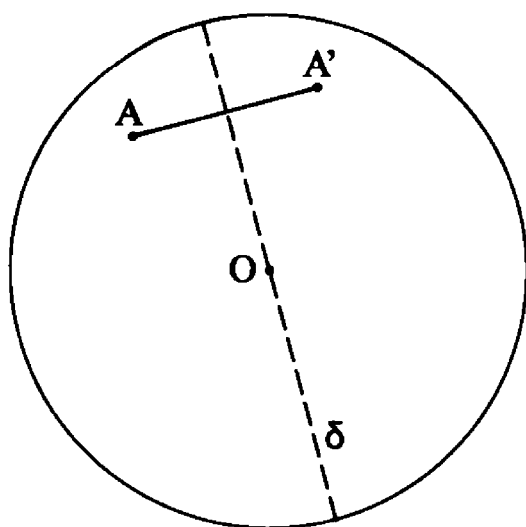
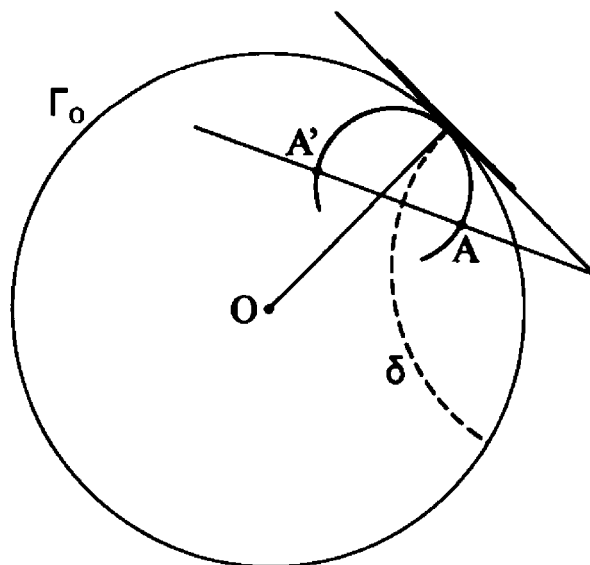
**Remarque.** — Si  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$  sont deux inversions dans  $E$  (l'une ou l'autre de ces transformations pouvant éventuellement être remplacée par une symétrie orthogonale relativement à un plan, on peut démontrer<sup>(7)</sup> que  $\mathcal{J} \circ \mathcal{J}' \circ \mathcal{J}$  est encore une inversion (ou une symétrie orthogonale)). Les isométries

$$\psi \circ \varphi \circ R(\theta) \circ M(t) \circ R(-\theta) \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$$

sont donc les restrictions à  $\mathcal{J}$  d'*inversions* dans le plan XOY qui préservent  $\mathcal{J}$  et  $\Gamma_0$  (exceptionnellement de *symétries orthogonales* par rapport à un diamètre de  $\Gamma_0$ ); les points doubles de ces isométries sont des géodésiques; ces isométries, qui sont involutives, jouent le rôle des symétries orthogonales dans un plan euclidien.

(<sup>7</sup>) Cf. exercice 9 du chapitre 6.



 $\delta$  passe par O $\delta$  ne passe pas par O

*Symétrie orthogonale* relativement à  $\delta$  dans le disque de Poincaré  $\mathcal{P}$

### Théorème 13-19

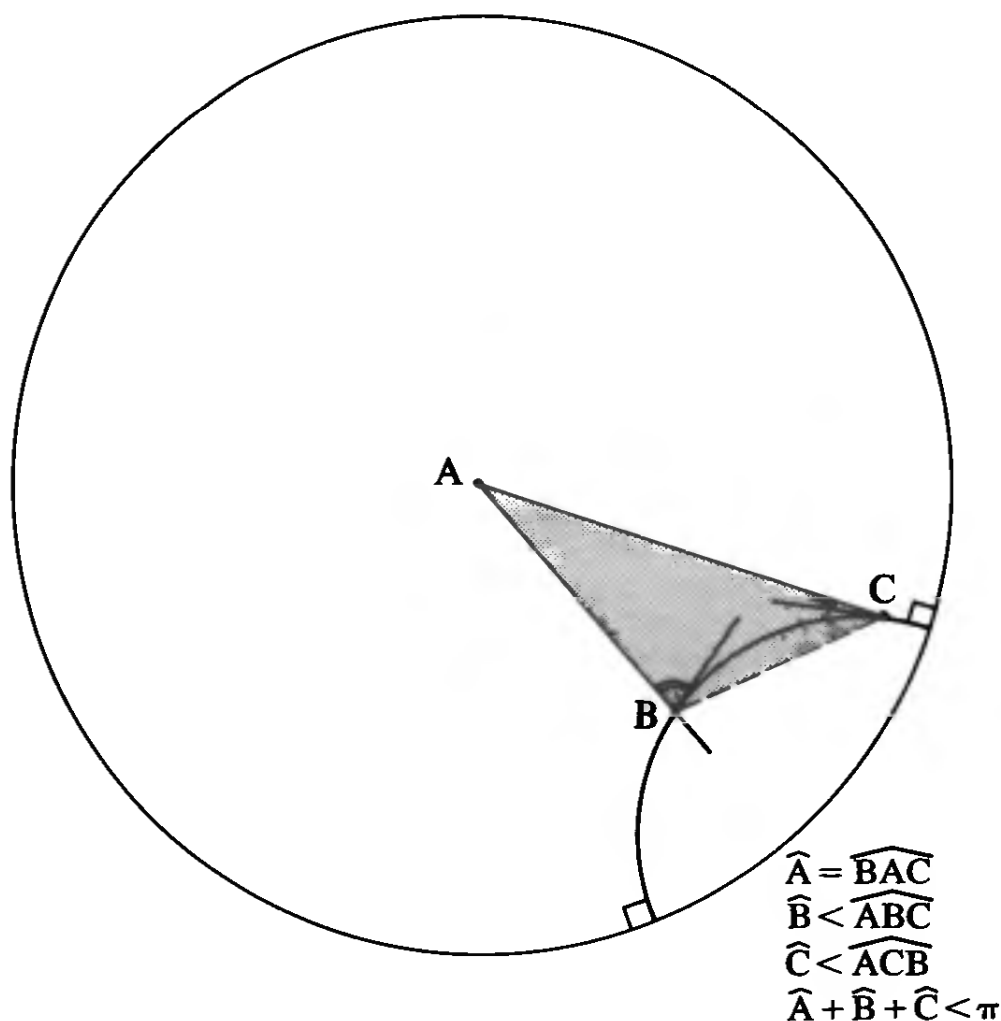
Soient  $A, B, C$  trois points de l'espace hyperbolique, non situés sur une même géodésique. Notons  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ , les angles (hyperboliques) des segments géodésiques  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{BA}$  et  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CA}$  et  $\widehat{CB}$ . On a alors :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < \pi.$$

Utilisons, pour faire la démonstration, le modèle  $\mathcal{I}$  de Poincaré. Puisque les isométries de  $\mathcal{I}$  opèrent transitivement, on peut toujours se ramener au cas où  $A$  est en  $O$ , et les segments géodésiques  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{AC}$  des segments de droites, tandis que le troisième côté  $\widehat{BC}$  est un arc de cercle orthogonal à  $\Gamma_0$ , et situé à l'intérieur du triangle rectiligne  $ABC$ . On en déduit que  $\widehat{B}$  est strictement inférieur à l'angle euclidien  $\widehat{ABC}$  et, de même,  $\widehat{C} < \widehat{BCA}$ , tandis que  $\widehat{A} = \widehat{BAC}$ .

Il en résulte :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = \pi \quad \text{c. q. f. d.}$$



**Remarque.** — Identifions le disque  $\mathcal{D}$  à un ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$ . Le théorème de la représentation conforme affirme l'existence d'un homéomorphisme holomorphe (donc conforme) de  $\mathcal{D}$  sur n'importe quel autre ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{C}$ , pourvu que celui-ci soit simplement connexe et ne soit pas  $\mathbb{C}$  tout entier. Par transport de structure, on en déduit une métrique  $d_{\mathcal{O}}$  sur  $\mathcal{O}$  fournissant un autre modèle conforme de l'espace hyperbolique. En particulier, on utilise souvent le *demi-plan de Poincaré*  $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ , dont le bord est l'axe des réels et les géodésiques les demi-cercles centrés sur cet axe, la métrique étant celle déduite de  $d_{\mathcal{D}}$  à l'aide de la transformation conforme

$$z \longrightarrow 2R \cdot \frac{z-i}{z+i} \text{ de } P \text{ sur } \mathcal{D}.$$

## 5 - Exercices sur le chapitre 13

- 1 / Soit  $x = 0 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$  ( $\alpha_i = 0, 1, 2$  ou  $3$ ) l'écriture en base 4 d'un nombre  $x \in [0, 1]$ . On notera  $E_n$  le sous-ensemble des nombres dans  $[0, 1]$  que l'on peut écrire avec au plus  $n$  chiffres après la « virgule » (on notera la « virgule » avec un point, pour éviter certaines ambiguïtés) :

$$\begin{aligned} E_0 &= \{0, 1\}, & E_1 &= E_0 \cup \{0.1, 0.2, 0.3\} \\ E_2 &= E_1 \cup \{0.01, 0.02, 0.03, 0.11, 0.12, 0.13, 0.21, \\ &\quad 0.22, 0.23, 0.31, 0.32, 0.33\} \end{aligned}$$

etc.

On va définir une application  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ , en définissant d'abord, par récurrence sur  $n$ , la restriction  $f/E_n$  de  $f$  à chaque  $E_n$ . On pose :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f(1) = 1, \quad f(0.1) = \frac{1}{3}, \\ f(0.2) &= \frac{1}{3} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \\ f(0.3) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Supposons avoir déjà fini  $f_{n-1} = f/E_{n-1}$ , et soit  $x_n$  un nombre dans  $E_n$  : il se décompose, de façon unique, sous la forme  $x_n = x_{n-1} + 10^{-n} \cdot \alpha_n$  (attention :  $10^{-n}$  est une écriture en base 4). On pose :

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f_{n-1}(x_{n-1}) \\ &\quad + f_1(0 \cdot \alpha_n) [f_{n-1}(x_{n-1}(x_{n-1} + 10^{-(n-1)}) - f_{n-1}(x_{n-1})]. \end{aligned}$$

a) Montrer que si  $(x_n)_{n \geq 1}$  est la suite des approximations de  $x$  avec  $n$  chiffres après la « virgule » ( $x_n = 0 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 000$ ), la suite  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{C}$ . On posera alors :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

- b)* Dessiner  $f(E_n)$  pour  $n \leq 3$ .
- c)* Montrer que l'application  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$  est continue (courbe de Van Koch).
- d)* Munissant  $\mathbb{C}$  de sa métrique usuelle, dire si l'arc de courbe  $f$  est rectifiable.
- 2 / On veut montrer que  $O(E)$  est le groupe de *toutes* les isométries de  $(\Sigma, d)$ .
- a)* Montrer que  $O(E)$  opère *transitivement* sur  $\Sigma$  (c.-à-d. : quels que soient  $A$  et  $B$  sur  $\Sigma$ , il existe  $s \in O(E)$  tel que  $s(A) = B$ ).
- b)* Montrer, en utilisant la préservation des angles et des géodésiques par toute isométrie de  $(\Sigma, d)$ , que le sous-groupe des isométries  $f$  de  $(\Sigma, d)$  qui laissent invariant un point fixé  $A$  de  $\Sigma$  ( $f(A) = A$ ) est isomorphe à un sous-groupe de  $O(E)$ , et que ce sous-groupe est isomorphe au groupe orthogonal de  $\mathbb{R}^2$ .
- c)* Conclure.
- 3 / On veut montrer que  $PO(E)$  s'identifie au groupe des isométries de  $(\mathbb{P}, \bar{d})$ .
- a)* Préciser comment tout élément de  $PO(E)$  s'identifie à une isométrie de  $(\mathbb{P}, \bar{d})$ .
- b)* Soit  $\bar{s}$  une isométrie de  $(\mathbb{P}, \bar{d})$ . Montrer qu'il existe exactement deux isométries  $s_1$  et  $s_2$  (et deux seulement) de  $(\Sigma, d)$ , telles que, pour tout  $x$  de  $\Sigma$ ,  $\bar{s}(\bar{x}) = \overline{s_i(x)}$  ( $i = 1, 2$ ) (où  $\bar{x} \in \mathbb{P}$  désigne la classe d'équivalence de  $x \in \Sigma$ ).
- c)* Soit  $s$  l'une des deux isométries  $s_i$  ci-dessus. Montrer que  $s$  commute nécessairement avec l'application antipodale  $\sigma$  ( $s \circ \sigma = \sigma \circ s$ ).
- [On pourra montrer que l'ensemble  $\Sigma_0$  des points  $x$  de  $\Sigma$  tels que  $(s \circ \sigma)(x) = (\sigma \circ s)(x)$  est à la fois ouvert, fermé, et non vide dans  $\Sigma$ . Pour établir que  $\Sigma_0$  est non vide, on pourra

démontrer que si  $\Sigma_0$  était vide, il existerait une application continue  $t \longrightarrow s_t$  de  $[0, 1]$  dans  $O(E)$  telle que  $s_0 = s$  et  $s_1 = s \circ \sigma$ , et que ceci est absurde pour des raisons d'orientation.]

d) Conclure.

- 4/ a) Montrer que le groupe des isométries de l'espace hyperbolique  $H$  qui préservent le point  $\Omega = (0, 0, R)$  s'identifie au sous-groupe (isomorphe à  $O(2)$ ) des matrices  $M$  de  $O_+(2, 1)$  qui sont de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{M_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (M_0 \in O(2)).$$

b) En déduire, à l'aide de la proposition 13-14, que  $O_+(2, 1)$  s'identifie au groupe de toutes les isométries de  $H$ .

c) Montrer que  $O_+(2, 1)$  est engendré par l'ensemble des isométries qui sont de la forme  $R(\theta)$  ou  $M(t)$ .

- 5/ a) Montrer que, chacun des trois espaces métriques  $X = \Sigma$ ,  $\mathbb{P}$  et  $H$  vérifie la propriété suivante : pour tout couple de points distincts  $A$  et  $B$  dans  $X$ , il existe une unique isométrie  $\sigma_{A,B}$  vérifiant :

- (i)  $\sigma_{AB}(A) = B$ ,  $\sigma_{AB}(B) = A$ .
- (ii)  $\sigma_{AB} \circ \sigma_{AB} = \text{Id}_X$ ,  $\sigma_{BA} = \sigma_{AB}$ .
- (iii) L'ensemble des points de l'espace  $X$  qui sont invariants par  $\sigma_{AB}$  est une droite  $\Delta_{AB}$  de  $X$ .

[Utiliser les (restrictions à  $\Sigma$  des) symétries orthogonales dans  $E$  relativement à un plan diamétral de  $\Sigma$ ; pour  $\mathbb{P}$ , utiliser les isométries induites par les symétries orthogonales; pour  $H$  (identifié au disque de Cayley  $\mathcal{C}$  de bord  $\Gamma$ ), utiliser les (restrictions à  $\mathcal{C}$  des) homologies harmoniques qui préservent  $\Gamma$  et dont l'axe  $\delta$  coupe  $\Gamma$  en deux points (réels).] (Cf. exercices 7 et 8 du chapitre 12.)

b) Montrer que, dans chacun des trois cas,  $\Delta_{AB}$  est égal à l'ensemble des points de  $X$  qui sont à égale distance de  $A$  et de  $B$ . [Utiliser le fait que deux droites se coupent toujours pour

$X = \mathbb{P}$ , que toute droite sépare  $H$  en deux composantes connexes pour  $X = H$ .) On appellera  $\Delta_{AB}$  la « médiatrice » de  $A$  et  $B$ .

c) Est-ce que, dans chacun des trois cas,  $\Delta_{AB}$  est perpendiculaire à tout segment géodésique joignant  $A$  et  $B$  en son milieu? (Préciser ce que cela veut dire.) Cette propriété est-elle caractéristique?

- 6/ Soient  $b$  et  $c$  deux droites du disque  $\mathcal{C}$  de Cayley, se coupant en un point  $A$  de  $\mathcal{C}$ , et coupant respectivement le bord  $\Gamma$  de  $\mathcal{C}$  en  $\beta$  et  $\beta'$  (resp.  $\gamma$  et  $\gamma'$ ). On note  $\theta \in [0, \pi]$  l'angle (hyperbolique) des demi-droites  $A\beta$  et  $A\gamma$ . Démontrer la formule

$$\cos \theta = \frac{1 + \mathcal{B}}{1 - \mathcal{B}},$$

où  $\mathcal{B}$  désigne le birapport  $(\beta, \beta', \gamma, \gamma')$  des quatre points  $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$  de  $\Gamma$ .

[Démontrer d'abord la formule lorsque  $A$  est le centre  $\Omega$  du disque de Cayley, et expliquer pourquoi on peut toujours se ramener à ce cas.]

Montrer en particulier que deux droites  $D_1$  et  $D_2$  de  $\mathcal{C}$ , se coupant dans  $\mathcal{C}$ , sont orthogonales (au sens hyperbolique) ssi elles sont conjuguées (i.e. ssi le pôle de chacune d'elles par rapport à  $\Gamma$  est sur l'autre).

- 7/ a) Etant donnés deux points  $A$  et  $B$  distincts du disque  $\mathcal{C}$  de Cayley, construire — à la règle et au compas — la médiatrice  $\Delta_{AB}$  de  $[AB]$  (au sens hyperbolique).

b) Etant donnés une droite  $D$  de  $\mathcal{C}$  et un point  $A$  de  $\mathcal{C}$ , montrer qu'il existe une perpendiculaire à  $D$  (au sens hyperbolique) et une seule passant par  $A$ . A-t-on une propriété analogue quand on remplace  $\mathcal{C}$  par  $\Sigma$ ? par  $\mathbb{P}$ ?

c) Construire cette perpendiculaire, dans le cas de  $\mathcal{C}$ , à la règle et au compas.

- 8/ Les trois médiatrices  $\Delta_{AB}$ ,  $\Delta_{AC}$ ,  $\Delta_{BC}$  d'un triangle  $A, B, C$  de  $X$  sont-elles nécessairement concourantes, lorsque  $X = \Sigma$ ?  $X = \mathbb{P}$ ?  $X = H$ ? (Que signifie le mot « triangle »?)
- 9/ a) Etant donnés deux droites ou demi-droites issues, dans  $X$ , d'un même point  $A$  ( $X = \Sigma, \mathbb{P}, H$  ou  $\mathcal{C}$ ) existe-t-il une notion de « bissectrice »? (Pour  $\mathcal{C}$ , étudier d'abord le cas où  $A$  est le centre  $\Omega$  de  $\mathcal{C}$ .) Les différentes définitions possibles de la bissectrice (partage l'angle en deux, lieu des points à égale distance, médiatrice ou hauteur de tout triangle isocèle de sommet  $A$  construit sur les deux droites ou demi-droites, ...) coïncident-elles?
- b) Etant données deux droites  $b$  et  $c$  de  $\mathcal{C}$ , se coupant en  $A$  ( $A \in \mathcal{C}$ ) et coupant  $\Gamma$  en  $\beta$  et  $\beta'$  (resp.  $\gamma$  et  $\gamma'$ ), on note  $u, u', v, w$  les pôles respectifs, relativement à  $\Gamma$ , des droites  $\beta\gamma, \beta'\gamma', \beta\gamma', \beta'\gamma$ . Montrer que les bissectrices de  $b$  et  $c$  sont les (intersections avec  $\mathcal{C}$  des) droites  $uu'$  et  $vw$ .
- c) Dans le cas  $X = \mathcal{C}$ , interpréter le théorème de Brianchon (chapitre 8, corollaire 8-13') en termes de point de concours des bissectrices d'un triangle. (Montrer l'existence de ce point de concours.)
- 10/ Etant donnée une droite  $D$  du disque  $\mathcal{C}$  de Cayley, coupant le bord  $\Gamma$  de  $\mathcal{C}$  en deux points notés  $\alpha$  et  $\beta$ , montrer que les courbes de niveau de la fonction  $d(\cdot, D) : M \longrightarrow$  distance hyperbolique de  $M$  à  $D$ , de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^+$ , sont les ellipses intérieures à  $\mathcal{C}$  qui sont bitangentes à  $\Gamma$  en  $\alpha$  et  $\beta$  (ellipses évidemment privées des points  $\alpha$  et  $\beta$  qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{C}$ ). [On pourra démontrer d'abord le résultat lorsque  $D$  est un diamètre de  $\Gamma$ , et expliquer ensuite comment ramener le cas général à ce cas particulier.]
- 11/ Etant donnés trois points  $A, B, C$  de  $\mathcal{C}$  situés sur une même ellipse bitangente à  $\Gamma$ , vérifier que les médiatrices (au sens hyperbolique) du triangle  $ABC$  ne se coupent pas dans  $\mathcal{C}$ .  
[Montrer que les droites projectives qui les prolongent en dehors de  $\mathcal{C}$  sont concourantes en dehors de  $\mathcal{C}$ . En quel point?]

## APPENDICE

### Un peu d'histoire

*L'histoire n'est pas autre chose qu'une constante interrogation des temps révolus au nom des problèmes et curiosités et même des inquiétudes et des angoisses du temps présent qui nous entoure et nous assiège... Avoir été est une condition pour être.*

F. Braudel, *La Méditerranée*.

*La méthode des Géomètres n'est pas l'unique cause de la certitude de leurs résultats, cette certitude est principalement due à la nature même des idées qu'ils ont eu à combiner.*

S. F. Lacroix, *Eléments de Géométrie*.





La pratique géométrique est peut-être l'une des plus anciennes pratiques humaines en ce sens qu'elle concerne les rapports de l'homme avec son environnement spatial. On connaît les légendes qui règnent autour de la naissance de la géométrie, le rôle de l'agriculture (les nécessités de l'arpentage et du partage des champs), le rôle de la navigation guidée par la régularité des étoiles dans le ciel, sans oublier les figures répétitives qui apparaissent sur les objets fabriqués par l'homme (de la symétrie des silex taillés aux motifs ornementaux des premières poteries).

Mais la géométrie en tant que science commence lorsque, dépassant le stade d'une connaissance purement empirique, l'homme réorganise cette connaissance, se donnant les moyens de prévoir certaines situations (c'est-à-dire de les connaître avant de les voir) ou de les construire; c'est là le rôle du raisonnement dont la démonstration déductive est l'un des aspects les plus importants (mais non le seul). La légende veut que ce travail de réorganisation ait commencé avec les Grecs (le fameux miracle!) mais ce que nous savons de la science chaldéenne et de la science égyptienne peut laisser penser que celles-ci n'étaient pas purement empiriques et qu'elles étaient sous-tendues par quelque conception théorique [E. Picard] même si le manque de documents nous laisse dans l'ignorance des conditions dans lesquelles science égyptienne et science chaldéenne se sont constituées. Et n'oublions pas l'influence d'icelles sur les débuts de la géométrie grecque [Neugebauer], [Rey].

C'est seulement par les Grecs que nous connaissons les premiers textes qui définissent non seulement la connaissance, mais les raisons et les conditions de la connaissance. La science géométrique naissante apparaît ainsi comme une réorganisation du donné empirique (donné qui comprend autant le monde *naturel* que le monde remodelé par l'homme), réorganisation qui s'appuie sur les premières réflexions de l'homme sur le monde.

Ce n'est pas ici le lieu de raconter une histoire exhaustive de la géométrie, nous voulons seulement dire comment la science géométrique se constitue à partir de quelques grandes problématiques et expliciter le mouvement qui va des premières réorganisations rationnelles du donné empirique (dont les *Eléments* d'Euclide représentent le premier achèvement en même temps qu'ils marquent les conditions de leur dépassement) aux grands traités qui jalonnent l'histoire de la géométrie depuis Euclide jusqu'à nos jours. Cela nous le ferons à travers deux grandes problématiques qui sont d'une part la mesure des grandeurs, d'autre part la représentation de l'espace. Si nous mettons en avant ces deux grandes problématiques, c'est parce qu'elles sous-tendent ces deux grandes constructions rationnelles que constituent d'une part la géométrie grecque qui conduira à la géométrie élémentaire (telle que nous la connaissons aujourd'hui), d'autre part la perspective des peintres et architectes de la Renaissance qui conduira à la géométrie projective. Ce sont encore ces deux grandes problématiques qui donnent un sens à un enseignement de la géométrie fondé sur le rapport de l'homme à son environnement spatial (et ce malgré les errements de la modernité). C'est seulement à travers la signification de cette géométrie qui est essentiellement rationalisation d'un donné empirique que l'on peut comprendre les grandes synthèses mathématiques d'aujourd'hui, en particulier les reconstructions à la Klein et à la Hilbert.

# I. LA MESURE DES GRANDEURS ET LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

*La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.*

A.-M. Legendre, *Eléments de géométrie*.

## 1. *Mesure et comptage*

Mesurer c'est comparer une grandeur d'un type donné avec une grandeur du même type que l'on convient être l'unité de mesure, et déterminer le rapport (le nombre!) qui exprime combien de fois la grandeur que l'on mesure contient la grandeur unité. Ainsi l'opération de mesure est une forme de comptage, soit que la grandeur mesurée contienne un nombre entier de fois la grandeur unité, soit que la grandeur mesurée et la grandeur unité contiennent chacune un nombre entier de fois une partie de l'unité.

Cette conception de l'opération de mesure comme forme de comptage permet de réduire la grandeur au nombre, conception qui fut systématisée par Pythagore et son école, constituant ce qu'on pourrait appeler une *physique arithmétique* [A. Rey], les propriétés des corps (et en particulier les propriétés géométriques) étant définies en termes de rapports numériques, et en contrepoint les nombres pouvant être représentés par des figures géométriques (les nombres figurés des néo-pythagoriciens de l'époque hellénistique [Nicomaque de Gérase]).

Cette conception qui, d'une certaine manière, exprimait l'unité du monde *via* le nombre, et en ce sens était porteuse de rationalité, va se heurter à la découverte des irrationnelles (la diagonale du carré, mais aussi le côté du pentagone régulier). C'est alors pour les géomètres grecs la notion même de mesure qu'il faut redéfinir et ce, indépendamment de l'arithmétique; ce sera l'objet de la théorie des grandeurs géométriques qui est l'un des objectifs des *Eléments* d'Euclide.

## 2. *Les Eléments d'Euclide*

L'œuvre d'Euclide est à la fois achèvement et point de départ. C'est le premier exposé systématique connu d'une géométrie rationnelle fondée sur la méthode déductive. Celle-ci (sous la forme de la démonstration) a pour objet d'établir les propositions géométriques qui sont autant de *vérités géométriques* que l'on peut connaître ainsi par le moyen du raisonnement.

Ceci nécessite d'une part l'explicitation des principes premiers, principes dont la vérité est impossible à démontrer mais qui s'imposent à nous à travers l'intuition et dont la connaissance est nécessaire pour la découverte de nouvelles vérités, d'autre part l'utilisation de méthodes de raisonnement permettant non seulement d'établir de nouvelles vérités mais aussi de montrer leur nécessité, c'est-à-dire que non seulement elles sont, mais qu'elles ne peuvent pas ne pas être. C'est le sens de la méthode déductive telle que Aristote l'explique dans les *Seconds Analytiques* [Aristote], ce texte qui d'une certaine façon a exprimé (et exprime encore aujourd'hui) l'essence de la pensée scientifique.

C'est ainsi qu'Euclide explicite au début des *Eléments* les définitions, postulats et axiomes qui vont permettre le développement déductif et l'établissement des vérités géométriques. Ce n'est point ici le lieu d'analyser ces types d'énoncés et leur intervention dans le déroulement de l'exposé euclidien; nous renvoyons à la bibliographie [Bkouche] [Heath 1] [Hoüel]. Nous insisterons par contre sur trois points de la démarche euclidienne que l'on retrouve tout au long de l'histoire de la géométrie et en particulier dans les grands traités de géométrie élémentaire jusqu'à nos jours (cf. n° 7), savoir, le critère de l'égalité par superposition, le caractère instrumental de la géométrie et la méthode des aires.

Le critère de l'égalité par superposition est énoncé par l'axiome suivant (axiome 4 ou 8 suivant les éditions) que nous citons dans la traduction de J. Hoüel :

*Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles.*

Cet axiome qui relie la théorie des grandeurs (édifiée par Eudoxe peu avant l'œuvre d'Euclide) à la géométrie s'appuie essentiellement sur le mouvement. La géométrie est ainsi fondée empiriquement sur le lien entre corps solides et mouvement et c'est la coïncidence par transport d'un corps sur un autre qui permet de conclure à l'égalité des deux corps. Le problème de la géométrie est alors d'énoncer *a priori* des conditions d'égalité, ce qui permettra par cela même d'éliminer le mouvement, remplacé par un raisonnement s'appuyant sur les critères d'égalité ainsi définis. C'est le rôle des fameux cas d'égalité des triangles; si leur démonstration s'appuie sur l'utilisation effective de la superposition (et par-là même du mouvement) leur intervention dans le raisonnement permet *d'oublier* le mouvement, exemple significatif d'une démarche s'appuyant sur un donné empirique (ici le mouvement) pour fabriquer de la connaissance rationnelle (c'est-à-dire construite sur le seul raisonnement). Mais ce développement rationnel de la géométrie que nous proposent les *Eléments* s'appuie sur cette représentation qu'est la figure géométrique *via* ce qu'on a appelé *l'intuition*

*géométrique*, terme ambigu qui se situe au carrefour de l'évidence visuelle et du raisonnement, et qui constitue en quelque sorte le lien entre un arrière-plan empirique toujours présent et le raisonnement discursif.

C'est dans ce contexte, mélange de connaissance empirique et de rationalité, que se situe le second point de la méthode euclidienne, son caractère instrumental, à travers les deux instruments fondamentaux que sont la règle et le compas, instruments qui ont à la fois un rôle technique (dessiner et construire) et un rôle théorique en ce sens qu'ils sont les *symboles des idées claires et distinctes de la droite et du cercle* pour reprendre une expression d'Abel Rey [A. Rey].

Et les trois postulats qui demandent la possibilité de :

- 1) *mener une ligne droite d'un point quelconque à un autre point quelconque;*
- 2) *prolonger indéfiniment, suivant sa direction, une ligne droite finie;*
- 3) *décrire un cercle d'un point quelconque comme centre, et avec une distance quelconque (comme rayon)*

sont-ils autre chose que l'énoncé de la possibilité des constructions de la droite et du cercle même si celles-ci ne sont plus possibles matériellement, prolongeant ainsi l'usage des instruments et leur donnant une valeur universelle?

Il ne faut pas oublier que les Grecs savaient utiliser d'autres instruments pour construire les courbes qui interviennent dans la résolution des grands problèmes [Eutocius], [Pappus], mais ces constructions *mécaniques* n'ont pas la signification théorique des constructions *à la règle et au compas*, elles ne participent pas de la définition des courbes qu'elles permettent de construire comme la règle et le compas participent de la définition de la droite et du cercle via les postulats. C'est en ce sens qu'il faut comprendre le problème des constructions à la règle et au compas, problème essentiellement théorique qui ne sera résolu qu'au XIX<sup>e</sup> siècle avec les travaux de Gauss, Galois et Wantzel [Carrera], [Klein 2], [Lebesgue 2].

Parmi les grands problèmes de la géométrie grecque, la détermination des aires joue un rôle important, il s'agit de comparer l'aire d'une surface donnée à l'aire d'un carré, ce qui revient à construire le carré ayant même aire que la surface donnée (c'est là l'origine du mot *quadrature*). Les méthodes ainsi mises en œuvre vont devenir chez Euclide l'un des points essentiels du raisonnement, et vont permettre d'établir les diverses relations entre grandeurs géométriques (celles qu'on appelle aujourd'hui les relations métriques). C'est la méthode des aires qui s'appuie essentiellement sur la comparaison des aires et qui repose sur la proposition suivante :

*Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux* (c'est-à-dire : ont même aire)

et celle qui en découle lorsqu'on a remarqué qu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme :

*Des triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux*

propositions qui seront complétées, une fois la théorie des proportions mises en place, par la proposition suivante :

*Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

### 3. Les grands problèmes de la géométrie grecque

Les *Eléments* n'abordent pas les grands problèmes que se posaient les géomètres grecs : quadrature des surfaces (et en particulier du cercle), duplication du cube, trisection de l'angle. Leur objet est moins d'être la somme des connaissances mathématiques de leur époque que d'exposer de façon systématique les règles et les résultats permettant d'aborder ces grands problèmes.

C'est à travers les tentatives de résolution de ces problèmes que se précisent les méthodes et que sont mises en place les théories élaborées par les géomètres grecs; c'est nous l'avons vu, avec les problèmes de quadrature que s'est mise en place la méthode des aires; ce sont les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle que les géomètres grecs réduisent à la détermination des points d'intersection de courbes qui vont conduire à l'étude de ces courbes parmi lesquelles les coniques, définies comme intersections d'un cône à base circulaire et d'un plan.

Ainsi le problème de la duplication du cube, savoir, construire un cube dont le volume est double d'un cube donné. Si  $l$  désigne la longueur du cube donné,  $x$  la longueur du cube de volume double, tout revient à construire deux longueurs  $x$  et  $y$  telles que  $2l$  soit à  $y$  comme  $y$  est à  $x$  et comme  $x$  est à  $l$ , autrement dit, en écriture moderne

$$2l/y = y/x = x/l.$$

Ceci conduira les géomètres grecs à chercher à construire la double moyenne proportionnelle entre deux longueurs données, savoir, deux longueurs  $a$  et  $b$  étant données, construire deux longueurs  $x$  et  $y$  telles que  $a$  soit à  $y$  comme  $y$  est à  $x$  et comme  $x$  est à  $b$ , soit en écriture moderne.

$$a/y = y/x = x/b$$

problème qui se ramène à l'intersection de deux paraboles; c'est la solution donnée par Ménechme [Eutocius].

Outre les coniques, les géomètres grecs ont introduit de nombreuses courbes décrites par des procédés mécaniques dont nous ne pouvons parler ici. Nous renvoyons aux deux ouvrages de Pappus et Eutocius cités en bibliographie, ainsi qu'à l'étude historique de Heath [Heath 2].

Nous remarquerons cependant que la méthode de résolution des problèmes par intersection de courbes a permis une classification de ces problèmes à partir des courbes qui y interviennent, classification que Pappus a explicitée de la façon suivante : les problèmes *plans* sont ceux dans lesquels interviennent des droites et des cercles (et qui sont par conséquent résolubles à la règle et au compas), les problèmes *solides* sont ceux dans lesquels interviennent les coniques (celles-ci étant définies comme intersections d'un cône à base circulaire et d'un plan), les problèmes *linéaires* sont ceux dans lesquels interviennent des courbes mécaniques (c'est-à-dire décrites par des procédés mécaniques). Cette classification sera adoptée jusqu'à ce que la méthode des coordonnées permette à Descartes et Fermat de définir de nouveaux critères de classification dont nous parlerons ci-dessous.

#### 4. Les coniques

Les coniques, nous l'avons vu ci-dessus, ont été introduites à propos de la résolution des grands problèmes. Une première étude systématique a été faite par Euclide dans un ouvrage aujourd'hui perdu que Pappus signale dans sa *Collection Mathématique*, mais le grand ouvrage classique est celui d'Apollonius. Dans cet ouvrage, Apollonius définit les coniques comme intersection d'un plan et d'un cône à base circulaire (avant lui on ne considère que des cônes de révolution) et annonce le premier que les deux branches de l'hyperbole font partie de la même courbe. Il y définit les diamètres ce qui lui permet de caractériser les coniques par des relations qui sont équivalentes aux équations des coniques rapportées à un repère défini par la tangente en un point et le diamètre passant par ce point, ces relations obtenues par la méthode des aires s'expriment comme égalité d'aires; la lourdeur des énoncés et des démonstrations montre les limites de la méthode des aires, il faudra attendre la méthode des coordonnées s'appuyant sur le calcul algébrique pour permettre une simplification des méthodes d'Apollonius et par là même en explorer toutes les possibilités [Coolidge 2]. Cependant les lourds raisonnements de la méthode des aires vont permettre à Apollonius de développer une théorie des coniques abordant des points aussi importants que les axes des coniques, les asymptotes de l'hyperbole, certains problèmes d'intersection de coniques (qui interviennent dans les grands problèmes) et la détermination des



normales menées d'un point à une conique (liée au problème de la plus courte distance d'un point à une conique) [Apollonius], [Heath 2].

L'ouvrage d'Apollonius restera la référence sur les coniques jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle; il sera au XVII<sup>e</sup> siècle le point d'appui du développement des deux grandes problématiques de la géométrie moderne, l'une qui s'appuie sur la méthode des coordonnées avec Descartes et Fermat et qui, sous le nom de géométrie analytique, permettra l'utilisation du calcul algébrique puis de l'analyse infinitésimale dans l'étude des problèmes géométriques, l'autre qui, avec Desargues, s'appuie sur la méthode des projections et donnera naissance à la géométrie projective.

### 5. *Du calcul géométrique au calcul algébrique*

En un certain sens, la méthode des aires constitue un *calcul géométrique* mais ce calcul s'appuie explicitement sur la nature des grandeurs sur lesquelles il opère, et en cela il est différent du calcul algébrique moderne. Cette méthode que l'on retrouve tout au long de l'histoire de la géométrie a permis, malgré sa lourdeur, de découvrir et de démontrer de nombreuses propriétés géométriques, et l'ouvrage d'Apollonius en est l'un des monuments les plus convaincants.

Ce *calcul géométrique* permettra quelques siècles après Apollonius aux mathématiciens arabes de *géométriser* des problèmes d'algèbre : c'est ainsi que Al Khwarizmi utilise la méthode des aires pour justifier la méthode de résolution des équations du second ordre (s'appuyant ainsi sur le livre II des *Eléments* d'Euclide), et Omar Al Khayyam ramène la résolution des équations du troisième degré à la détermination de l'intersection de deux coniques, conception qui est proche de celle de la géométrie algébrique moderne dont on peut dire qu'elle est l'étude géométrique des systèmes d'équations algébriques.

Mais il manquait la souplesse d'un formalisme convenable pour permettre le développement d'un calcul algébrique-géométrique au sens moderne du terme, c'est-à-dire une représentation symbolique des grandeurs étudiées et un calcul sur ces symboles indépendant de toute signification de ceux-ci, ce que nous appelons aujourd'hui un calcul formel.

Ce sera l'œuvre de François Viète qui dans son *Introduction à l'art Analytique* (1591) définit deux types de calcul : le calcul numérique (calcul sur les nombres) et le calcul spécieux (calcul sur les espèces, c'est-à-dire les grandeurs) et, en explicitant ce qu'il y a de commun à ces deux types de calcul, fabrique un calcul littéral où les lettres représentent les objets sur lesquels on calcule; le calcul devient ainsi indépendant de la nature des objets représentés par les lettres.

## 6. La méthode des coordonnées

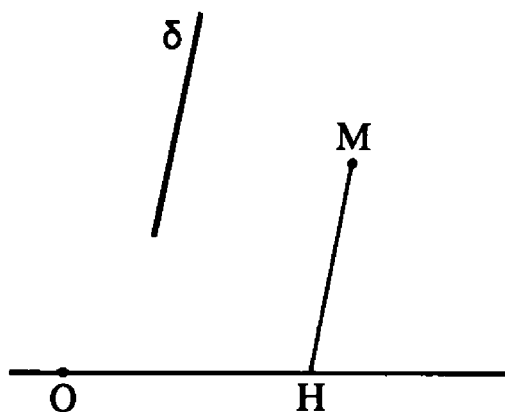
Le calcul littéral mis en place, Descartes et Fermat vont développer une méthode de résolution des problèmes de géométrie : la réduction au calcul via l'utilisation des coordonnées, c'est la *géométrie analytique*.

La réduction au calcul est d'abord d'ordre méthodologique (même si, comme toute transformation méthodologique, elle a une portée plus vaste); elle est un moyen de résoudre des problèmes portant sur les mêmes objets que la géométrie grecque dont Descartes et Fermat se considèrent les continuateurs.

Ainsi Descartes écrit au début de *La Géométrie* (1637) qui paraît comme appendice au *Discours de la Méthode*.

*Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.*

Pour Descartes, comme pour Fermat, un point du plan est déterminé de la façon suivante, une droite  $D$  étant donnée avec une origine donnée  $O$ , et une direction  $\delta$  étant donnée, on mène par  $M$  la droite de direction  $\delta$  qui coupe  $D$  en  $H$ ,  $M$  est déterminée par les longueurs  $OH$  et  $HM$  (les nombres négatifs n'apparaissent pas) (fig. 1), une courbe est alors définie



par une relation entre les deux coordonnées d'un point parcourant cette courbe (l'équation de la courbe) et la détermination d'un point comme intersection de courbes se ramène à la résolution d'équations. Ainsi les grands problèmes de la géométrie grecque se ramènent à un calcul algébrique. C'est ainsi que Descartes dans *La Géométrie* résout un vieux problème posé par Pappus dans sa *Collection Mathématique*, savoir, quel est le lieu des points dont le produit des distances à une première famille de droites est dans un rapport donné avec le produit des distances à une seconde famille de droites. Quant à Fermat qui développe la méthode des

coordonnées dans son *Introduction aux lieux plans et solides* (publié après sa mort mais qui aurait été écrit avant l'ouvrage Descartes), il indique comment retrouver des résultats d'Apollonius qu'il complète par les deux propositions suivantes.

*Soient, en nombre quelconque, des droites données de position, auxquelles on mène d'un même point des droites sous des angles données; si la somme des produits des droites ainsi menées par des données est égale à une aire donnée, le point d'où on les mène sera une droite donnée de position.*

*Etant données des droites de position en nombre quelconque, si d'un même point on mène à chacune d'elles une droite sous un angle donné, et que la somme des carrés des droites menés soit égale à une aire donnée, le point est sur un lieu solide donné de position.*

La représentation des courbes par des équations va permettre de classer les courbes à partir de leur équation, renouvelant ainsi la classification des problèmes. Cette nouvelle classification est explicitée par Descartes qui s'intéresse aux courbes définies par une équation de la forme  $p(x, y) = 0$ ,  $p$  étant un polynôme en  $x$  et  $y$ , courbes qu'il appelle géométriques (et que depuis Leibniz on appelle courbes algébriques), une telle courbe est caractérisée par son degré (le degré de  $p$ ) qui est aussi le nombre de points d'intersection de la courbe avec une droite (à condition de compter les points imaginaires, les points à l'infini, et les multiplicités d'intersection, notions qui seront explicitées dans le cadre de la géométrie analytique). Descartes rejette hors du champ de la géométrie les courbes non représentables par une équation polynomiale, courbes qu'il appelle mécaniques (et que depuis Leibniz on appelle transcendantes); il faut remarquer ici que ces courbes mécaniques telles la cycloïde ou les spirales ont joué à la même époque un rôle important dans le problème des tangentes et la naissance du calcul infinitésimal.

En contrepoint, la méthode des coordonnées a conduit les fondateurs à ramener la résolution des équations algébriques à des problèmes d'intersection de courbes; et Fermat, plus systématique que Descartes, et qui a peut-être mieux compris la portée de la réduction au calcul malgré des notations plus lourdes, se proposera de chercher les courbes de plus petit degré intervenant dans la résolution d'une équation donnée.

Nous ne pouvons faire ici l'histoire de la méthode des coordonnées, celle-ci se mettra lentement en place; si Wallis introduit les axes de coordonnées (admettant les valeurs négatives pour les coordonnées) et étudie les coniques comme courbes du second ordre dans son traité *De sectionibus conicis* (1655), Newton, étudiant ces mêmes coniques pour les besoins de la théorie du mouvement des planètes dans les *Principes*

*Mathématiques de la Philosophie Naturelle* (1686), s'appuie sur les méthodes d'Apollonius. Newton utilisera cependant la méthode des coordonnées dans un traité sur la classification des courbes du troisième degré, ramenant l'équation d'une telle courbe à une forme canonique en choisissant un repère convenable; pour ce faire il remarque que si une droite variable reste parallèle à une direction donnée, le centre de gravité des trois points d'intersection de cette droite avec la cubique décrit une droite qu'il appelle diamètre par analogie avec les courbes du second ordre; il distingue aussi parmi les branches infinies, les branches asymptotiques, l'asymptote étant considérée comme tangente au point à l'infini correspondant, et les branches paraboliques, la tangente au point à l'infini correspondant étant elle-même à l'infini.

Au cours des XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles se mettent en place les principaux outils de la géométrie analytique : coordonnées dans l'espace, changements de repère, coordonnées polaires, calcul d'angles et de distances... à travers divers problèmes de géométrie et de mécanique; la méthode des coordonnées accompagnera ainsi la mise en place et le développement de l'algèbre et du calcul infinitésimal permettant à la fois l'utilisation des méthodes de l'algèbre et de l'analyse dans la résolution des problèmes de géométrie et l'interprétation géométrique (la *géométrisation*!) des problèmes de l'algèbre et de l'analyse. Pour plus de détails nous renvoyons à la bibliographie [Coolidge 1 et 2], [Kline].

## 7. Les grands traités d'enseignement

Nous avons déjà dit que la méthode des coordonnées s'inscrivait dans le prolongement de la tradition grecque; si elle amène de nouvelles méthodes avec la réduction au calcul algébrique, elle étudie les mêmes types d'objets et les mêmes types de problèmes que la géométrie grecque, issues de ce que nous avons appelé les situations spatiales, les *faits de l'espace* pour reprendre une expression de Charles Meray. Dans ces conditions géométrie élémentaire à la grecque et géométrie analytique se rattachent au même domaine de la connaissance dont elles constituent deux modes d'approche complémentaires. En ce qui concerne l'enseignement, la géométrie élémentaire reste la première étape de l'accès à la connaissance géométrique, c'est elle qui définit la signification des objets de la géométrie et leurs premières propriétés que les méthodes de la géométrie supérieure (la géométrie analytique et plus tard la géométrie projective) vont permettre d'approfondir. Même si les développements de la géométrie supérieure vont conduire au renouvellement de la pensée géométrique à travers les synthèses de Félix Klein et David Hilbert, c'est la géométrie élémentaire qui reste la base de la connaissance géométrique. C'est la raison pour laquelle les grands

traités d'enseignement marquent les grandes étapes de l'histoire de la géométrie redéfinissant le lien entre la tradition grecque et les développements contemporains.

Nous ne pouvons analyser ici tous les grands traités (dont une liste nécessairement partielle, voire partielle, est donnée en bibliographie), nous citerons seulement ceux qui nous paraissent marquer une étape de la pensée géométrique et qui ont joué un rôle dans l'évolution de l'enseignement de la géométrie, tout au moins en France.

Evidemment, le premier traité d'enseignement de la géométrie élémentaire est celui d'Euclide, les *Eléments*, ouvrage qui est resté depuis son introduction et sa diffusion en Europe jusqu'au milieu de ce siècle la référence première, et qui jusqu'à l'apparition des méthodes axiomatiques modernes, a représenté le modèle d'une (re)construction rationnelle d'un domaine de la connaissance.

De l'époque classique nous citerons d'abord les *Eléments de Géométrie* de Clairaut dont la première édition fut publiée en 1741, ouvrage qui représente une tentative originale de construire un enseignement de la géométrie qui se veut naturel et conforme à la démarche historique (même si le naturel relève de l'idéologie de l'époque et le caractère historique est plus proche des conceptions de Clairaut que du développement historique réel). Dans le contexte de l'empirisme du XVIII<sup>e</sup> siècle, Clairaut se propose de définir les conditions qui permettent au *commençant* d'acquérir une connaissance de la géométrie à partir de l'observation et de l'expérience et de mettre en place à travers une problématique bien définie les méthodes de raisonnement lui permettant d'avancer dans cette connaissance. La problématique est ici la mesure des terrains parce qu'elle lui semble la plus proche des idées géométriques. La priorité accordée à la définition d'une problématique conduit Clairaut à remettre en question l'exposé euclidien et le rôle de la logique dans l'apprentissage de la géométrie et à mettre en avant le rôle de l'évidence dans l'élaboration de la connaissance; c'est ainsi qu'il écrit :

*Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité et à dégoûter les lecteurs.*

Ceci le conduit à s'appuyer sur l'expérience visuelle et sur la pratique instrumentale (en ceci il n'est pas aussi éloigné d'Euclide qu'il le dit) et montrer la voie d'une construction progressive du raisonnement géométrique, mêlant le logique et l'intuitif, l'argumentation discursive et le recours au sensible, menant ainsi à la découverte des vérités géométriques. Ainsi prennent une forme beaucoup plus expérimentale d'une part le principe de l'égalité par superposition dont la relation avec le mouvement

est explicite, d'autre part la méthode des aires, évidemment liée aux opérations de mesure des terrains, via le découpage des surfaces.

A côté de l'ouvrage de Clairaut, nous citerons les *Eléments de Géométrie* de Camus publié en 1764, s'appuyant sur les principes énoncés par Clairaut mais rédigés d'une façon plus systématique, ouvrage d'enseignement s'adressant à de futurs ingénieurs.

Autre ouvrage important pour le rôle qu'il a joué non seulement à son époque mais parce qu'il fut en France la référence dans l'enseignement de la géométrie jusqu'au milieu de ce siècle, les *Eléments de Géométrie* de Legendre dont les éditions successives s'échelonnent de 1793 à la mort de leur auteur, sans parler des éditions posthumes souvent remaniées pour les besoins de l'enseignement.

Ici il s'agit d'un style plus proche de celui d'Euclide, mais au début de l'ouvrage, Legendre précise le rôle des premiers principes (axiomes) et du raisonnement géométrique dans l'élaboration de la connaissance géométrique; c'est ainsi qu'il écrit :

*Axiome est une proposition évidente par elle-même.*

*Théorème est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé démonstration.*

Legendre s'appuie encore sur une conception empiriste qui considère la connaissance rationnelle comme un prolongement de la connaissance empirique, d'un empirisme tempéré cependant par le souci de justification rationnelle de ce qui ne participe pas directement de l'évidence. C'est ainsi que les éditions successives de son ouvrage s'articulent autour de la démonstration du postulat des parallèles ou plutôt de l'énoncé équivalent qui affirme que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, vérité non immédiate et dont, par conséquent, l'évidence ne peut être légitimée que par une démonstration, vérité dont il donnera de multiples démonstrations s'appuyant chaque fois sur une vérité que Legendre estime plus proche de notre expérience. Nous reviendrons sur ce point dans la partie de cet appendice historique consacrée à la géométrie non-euclidienne (cf. IV, n° 4).

Parmi les ouvrages contemporains de celui de Legendre, nous citerons les *Eléments de Géométrie* de Lacroix; dans un discours préliminaire (dont nous avons donné un extrait au début de cet appendice), Lacroix explicite les principes de la connaissance géométrique en s'appuyant sur le sensualisme de Condillac. Cela le conduit à définir un ordre des propositions géométriques qu'il veut *conforme à celui des abstractions*, ce qui, en un certain sens, le rapproche de Clairaut (bien qu'il critique ce dernier pour son manque de rigueur). Il remettra ainsi en question la place de la méthode des aires dans l'établissement des relations entre longueurs et angles, reprenant des idées développées un siècle et demi plus tôt par Arnauld

dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie* (publiés en 1667); ainsi Lacroix démontre directement (c'est-à-dire sans utiliser la méthode des aires comme l'ont fait Euclide et Legendre) la propriété aujourd'hui appelée *théorème de Thalès* en remarquant que si des parallèles découpent sur une sécante des segments égaux, elles découpent des segments égaux sur toute autre sécante, et utilise systématiquement les relations de similitude qui s'en déduisent. C'est cette méthode que l'on retrouvera dans la plupart des ouvrages ultérieurs.

Malgré leur diversité, tous ces ouvrages (et ceux qui les suivront) se rattachent à la tradition euclidienne plus ou moins tempérée par l'intuition sensible, s'articulant autour du principe de l'égalité par superposition qui reste au centre de la connaissance géométrique, principe qui tout en s'appuyant sur le mouvement permet de ne pas l'expliciter, voire de l'occulter dans le déroulement déductif (cf. ci-dessus).

Cette tradition sera remise en question, en ce qui concerne l'enseignement, avec Charles Meray qui publie en 1874 ses *Nouveaux Eléments de Géométrie*, avec d'une part la non-séparation de l'étude du plan et de l'étude de l'espace, et d'autre part l'introduction explicite du mouvement (translations, rotations) dans la mise en place des propriétés géométriques, renforçant ainsi le caractère expérimental de la géométrie, le parallélisme étant défini par le mouvement de translation (ce qui évacue le problème des parallèles), la notion d'angle étant reliée au mouvement de rotation. Cette conception que l'on peut relier aux travaux sur la géométrie du mouvement [Schoenflies] ainsi qu'aux idées exprimées par Hoüel (sous une forme plus proche de la tradition euclidienne) dans son *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie Élémentaire* (1867), va se développer en France avec les programmes de 1905 et nous citerons la série d'ouvrages scolaires de Carlo Bourlet, ainsi que la *Géométrie* de Borel (1910).

Par la suite les programmes reviendront au point de vue de Legendre avec cependant une place accordée à l'étude des déplacements dans le plan et dans l'espace, ouvrant la voie à la théorie des transformations.

Il nous faut ici citer deux grands traités, le *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse, dont les éditions successives se situent dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle et les *Leçons de Géométrie* de Hadamard dont les éditions successives se situent de la fin du siècle dernier jusqu'au milieu de notre siècle. Dans la tradition de Legendre et Lacroix (mais utilisant la similitude plutôt que la méthode des aires), les auteurs de ces deux traités font le point des connaissances de la géométrie élémentaire, y ajoutant des compléments relatifs à la géométrie supérieure (dont certains interviendront dans l'enseignement secondaire): étude des coniques,

notions de géométrie projective et de géométrie anallagmatique (géométrie de l'inversion, ou, comme on disait, la transformation par rayons vecteurs réciproques) : Hadamard y ajoute l'étude des déplacements du plan et de l'espace introduisant au point de vue des groupes et des invariants.

A ces traités nous ajouterons deux ouvrages de Lebesgue. Le premier ouvrage, *les Coniques* est un recueil de textes publiés en 1942 après la mort de l'auteur; Lebesgue se propose de donner pour l'enseignement une présentation unifiée des coniques; celles-ci étaient introduites séparément, la réforme de 1905 ayant ajouté à cette présentation séparée une définition unifiée par *foyer-directrice* d'une part, par la méthode de Dandelin d'autre part; Lebesgue s'appuyant sur la définition spatiale (celle d'Apollonius) montre comment reconstruire une définition plane permettant d'établir de façon générale et dans le cadre de la géométrie élémentaire, les propriétés communes aux coniques. Le second ouvrage, *Leçons sur les Constructions géométriques* lui aussi posthume (publié en 1950), est consacré à l'étude des divers modes de constructions géométriques, constructions à la règle et au compas, constructions au compas seul, dont on sait depuis la *Géométrie du compas* de Mascheroni (1797) que toute construction à la règle et au compas peut s'y ramener, construction à la règle liée à la géométrie projective, utilisation de systèmes articulés; une partie de l'ouvrage est consacré à l'étude *algébrique* des constructions à la règle et au compas. On peut citer aussi sur ce sujet les ouvrages de Klein et de Carrega [Klein 2] [Carrega].

Autre grand traité, celui de Deltheil et Caire constitué d'un *Cours de Géométrie* (1939) à l'usage des classes de mathématiques élémentaires et des *Compléments de Géométrie* (1951), ouvrage qui se situe dans l'optique du programme d'Erlangen (cf. II, n° 12).

A côté de ces grands ouvrages, il nous faudrait citer les ouvrages scolaires qui reprennent ces grands traités en les découpant par classes conformément aux programmes; parmi ceux-ci la série d'ouvrages de Lebossé-Hémery qui a marqué l'enseignement au milieu de ce siècle.

Après le mouvement des mathématiques modernes qui renouvelle l'enseignement des mathématiques réduisant la géométrie élémentaire à un simple chapitre de l'algèbre linéaire [Bourbaki 2, 3], [Dieudonné 1] et sur lequel nous reviendrons dans la dernière partie de cet appendice, peu d'ouvrages de langue française se sont intéressés à l'enseignement de la géométrie élémentaire; parmi ces rares ouvrages nous citerons ceux de Brigitte Sénéchal *Géométrie classique et Mathématiques modernes et Groupes et Géométries* (publiés en 1979) qui à travers quelques problèmes classiques de la géométrie élémentaire montre comment celle-ci se situe



dans le paysage mathématique d'aujourd'hui, ainsi que l'ouvrage collectif du GEM (Groupe d'Enseignement Mathématique) *l'Archipel des Isométries* (1982) qui montre comment se construit la connaissance géométrique à partir d'une étude expérimentale des isométries du plan.

Quittons le domaine de langue française pour aborder deux ouvrages fondamentaux sur la géométrie élémentaire et sa place dans les mathématiques d'aujourd'hui.

Nous citerons d'abord l'ouvrage de Hilbert *Anschauliche Geometrie* (1932) (traduction anglaise *Geometry and Imagination* (1952)) dans lequel Hilbert insiste sur les deux tendances des mathématiques, la tendance vers *l'abstraction* et la tendance vers la *compréhension intuitive*; en contrepoint (mais aussi en complémentarité) du travail de Hilbert sur les fondements de la géométrie, l'ouvrage présente un certain nombre de situations géométriques d'un point de vue intuitif ce qui ne l'empêche pas d'en étudier les diverses propriétés mêlant, dans une optique proche de celle de Clairaut, logique et intuition, argumentation discursive et recours au sensible.

Nous citerons ensuite l'ouvrage de Coxeter *Introduction to Geometry* (première édition 1961) qui, à partir des problématiques de la géométrie élémentaire, montre comment celle-ci s'inscrit dans les conceptions actuelles via le programme d'Erlangen et la méthode axiomatique, apportant ainsi une nouvelle efficacité dans l'étude des problèmes classiques.

Deux autres ouvrages récents replacent la géométrie élémentaire dans son cadre conceptuel d'aujourd'hui et montrent l'efficacité de ce cadre dans les problématiques classiques, il s'agit de la *Géométrie* (1979) de Berger, véritable somme des connaissances géométriques d'aujourd'hui, et de l'ouvrage de Tisseron *Géométrie affine, projective et euclidienne* (1983). Mais la géométrie élémentaire est abordée via les constructions générales de la théorie des groupes et de l'algèbre linéaire, il s'agit bien plus de montrer comment les concepts et les outils d'aujourd'hui renouvellent et fécondent la connaissance géométrique jusque dans les problématiques les plus classiques, que d'élaborer la construction de la géométrie à partir du donné empirique; en ce sens ils participent plus de l'autre face de la rationalité scientifique dont nous parlerons dans la dernière partie de cet appendice : la reconstruction du réel à partir du rationnel.

## II. LA REPRÉSENTATION DE L'ESPACE ET LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

*A travers les images l'homme découvre à la fois l'Univers et son besoin de l'organiser.*

P. Francastel *Art et Technique.*

### 1. *L'espace comme représentation*

*Ce que nous voyons est dans l'espace, mais nous ne voyons pas l'espace* écrit Léon Brunschvicg dans les *Etapas de la Philosophie Mathématique* (1912), qui ajoute : *l'espace a sa racine dans l'expérience, il a son achèvement dans la raison.* Ainsi si la notion d'espace tire son origine de la confrontation de l'homme avec le monde, elle est essentiellement construction de l'esprit humain, construction rationnelle dont l'objet est la coordination et la structuration des situations spatiales.

Il n'y a pas d'espace dans la géométrie grecque, seulement des situations spatiales que le géomètre étudie à travers les représentations qu'il en donne (les figures de la géométrie), mais ces situations spatiales sont étudiées chacune isolément. La notion d'espace naît lorsqu'il s'agit de coordonner ces diverses situations, c'est-à-dire expliciter les relations mutuelles entre les corps, que ce soit à travers le mouvement (et ce sera la mécanique), que ce soit à travers la représentation plane des situations spatiales, et c'est ce problème de la représentation plane que nous étudions ici.

Pourquoi la représentation plane? Depuis qu'il s'exprime et donc qu'il exprime son rapport au monde, l'homme a utilisé des configurations planes pour représenter les situations spatiales depuis le dessin préhistorique jusqu'à la peinture classique et la photographie, voire l'écran de télévision pour qui utilise les techniques nouvelles de l'audiovisuel et de l'informatique. Cela l'a conduit à définir les règles qui régissent la conception, la réalisation effective et la lecture de ces représentations, et ce à travers une double problématique que l'on pourrait définir comme celle du peintre d'une part, et d'autre part celle de l'architecte, la représentation plane d'un objet réel ou imaginaire d'une part, et d'autre part la construction d'un objet (par exemple une machine ou un édifice) à partir de sa représentation plane, le *plan* de l'objet.

Ceci explique le rôle joué par les peintres et les architectes dans la mise en place de ces règles et les liens étroits qu'ils entretiennent avec la géométrie autant dans l'élaboration pratique de ces règles que dans les constructions théoriques qui les accompagnent, leur assurant validité et cohérence. Et c'est le cas de la perspective mise au point par les peintres

et architectes de la Renaissance dont le développement a conduit à une branche nouvelle de la géométrie, savoir la géométrie projective telle que nous la connaissons aujourd'hui.

## 2. *La perspective*

Nous ne parlerons pas ici des raisons qui ont amené les peintres italiens du *Quattrocento* à mettre en place la perspective linéaire, des raisons qui ont amené le passage d'une peinture médiévale essentiellement symbolique à une peinture qui se voulait représentation *exacte* du monde et qui a cherché à définir les règles garantissant cette exactitude, nous renvoyons pour cela à la bibliographie [Damish], [Flocon-Taton], [Francastel], [Panofsky]. Nous nous proposons seulement de montrer comment les problèmes posés par la mise en place de la perspective ont conduit à l'élaboration de la géométrie projective.

Pour les peintres de la Renaissance, le tableau est défini comme la *fenêtre ouverte* à travers laquelle on regarde ce qui est représenté par le tableau, comme l'exprime l'architecte Alberti dans son *Trattato della Pittura* (1435), ou comme la *paroi de verre* à travers laquelle on regarde les objets comme l'explique Leonardo da Vinci dans ses *Cahiers*. Autrement dit le tableau est défini comme l'intersection de la pyramide visuelle déterminée par les rayons lumineux joignant les objets à l'œil, avec le plan du tableau. Le problème est alors de construire effectivement cette intersection.

Le premier procédé qui sera utilisé est celui de la *construction légitime*.

On connaissait depuis l'Antiquité les procédés de représentation par projection orthogonale sur un plan horizontal (le *plan*) et sur un plan vertical (*l'élévation*) que Vitruve (I<sup>er</sup> siècle avant J.-C.) appelle respectivement *ichnographia* et *ortographia* au livre I de ses *Dix livres d'Architecture*; la construction légitime consiste à construire l'image perspective à partir de deux projections orthogonales (fig. 2); la construction légitime définie par les architectes Brunelleschi et Alberti est explicitée par Piero Della Francesca dans son traité *De prospectiva pingendi* (qui ne sera publié qu'en 1899) et par Durer dans son *Uderweyssung der Messung Dem Zirckel und Rychtscheyd* (Instructions pour la mesure à la règle et au compas) publiée en 1525; Durer y étudie systématiquement la méthode de la double projection orthogonale, l'utilisant pour les constructions géométriques comme par exemple l'intersection d'un plan avec un cône de révolution. La complexité de la construction légitime conduit les praticiens à inventer des procédés abrégés, qui sont décrits dans les ouvrages cités de Piero Della Francesca et Durer ainsi que dans plusieurs traités qui paraissent tout au long du XVI<sup>e</sup> siècle. Ces procédés seront systématiquement étudiés avec la représentation d'un pavage carré sur un plan horizontal; ceci conduira

LA « COSTRUZIONE LEGITTIMA »

Figure B : *Élévation*

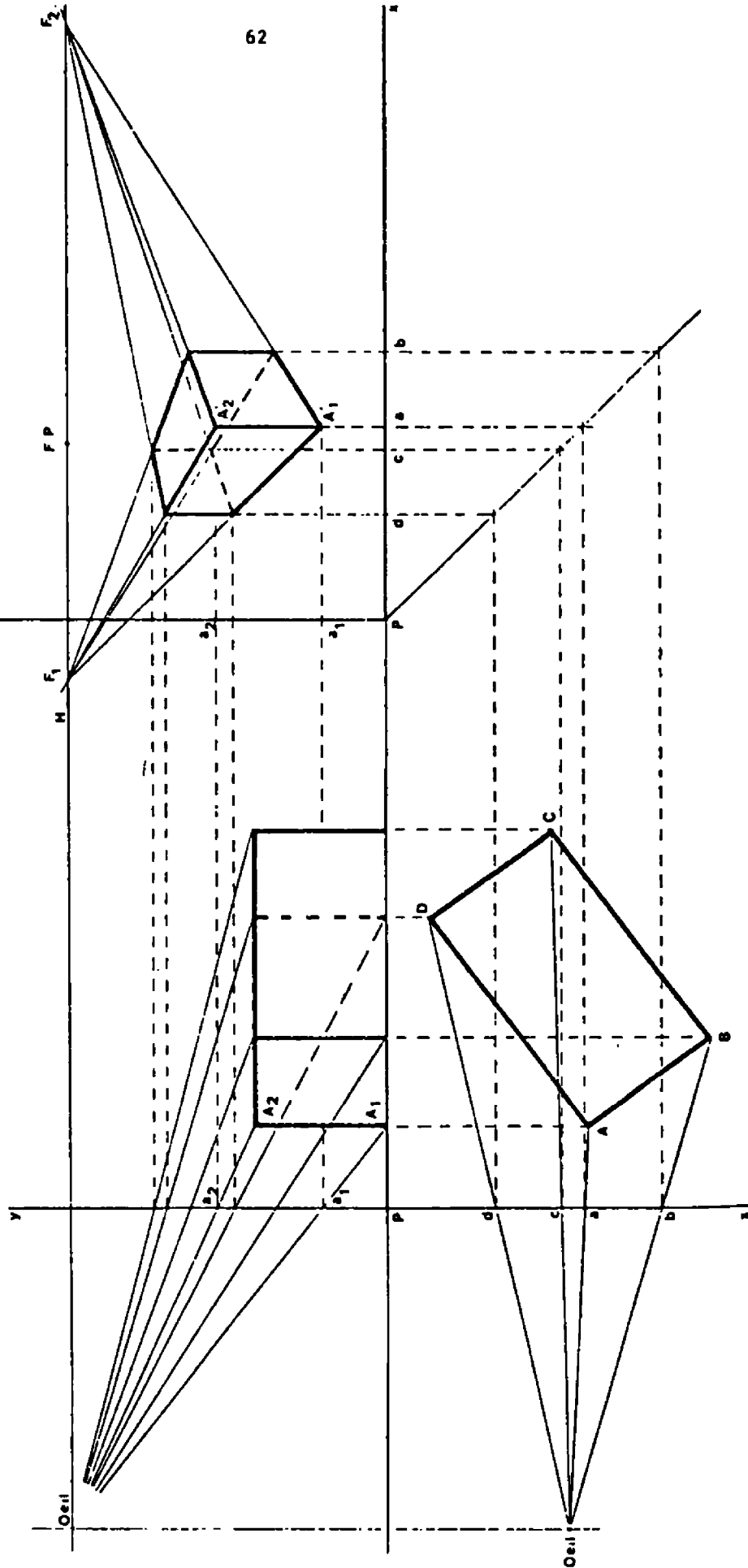


Figure C : *Dessin perspectif*

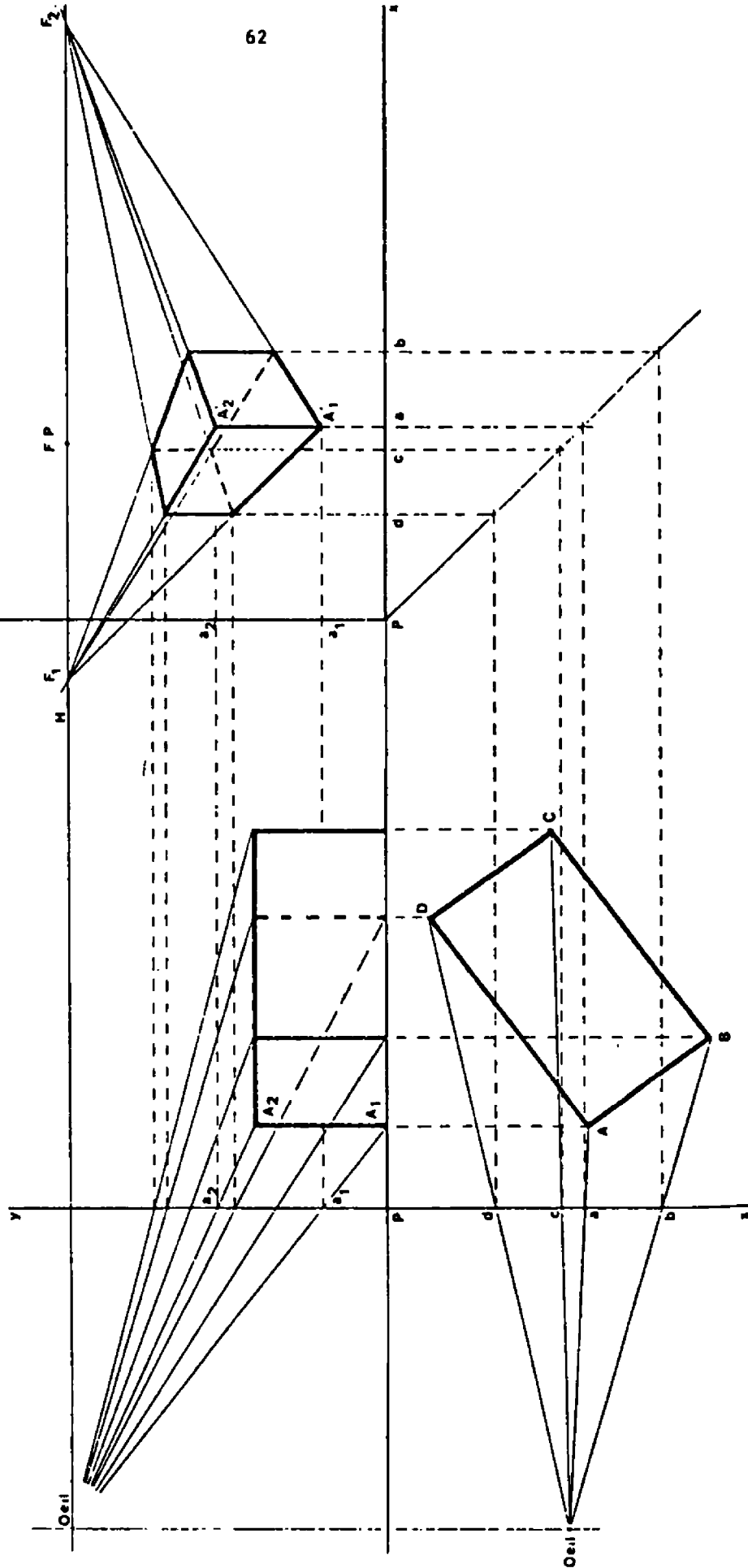
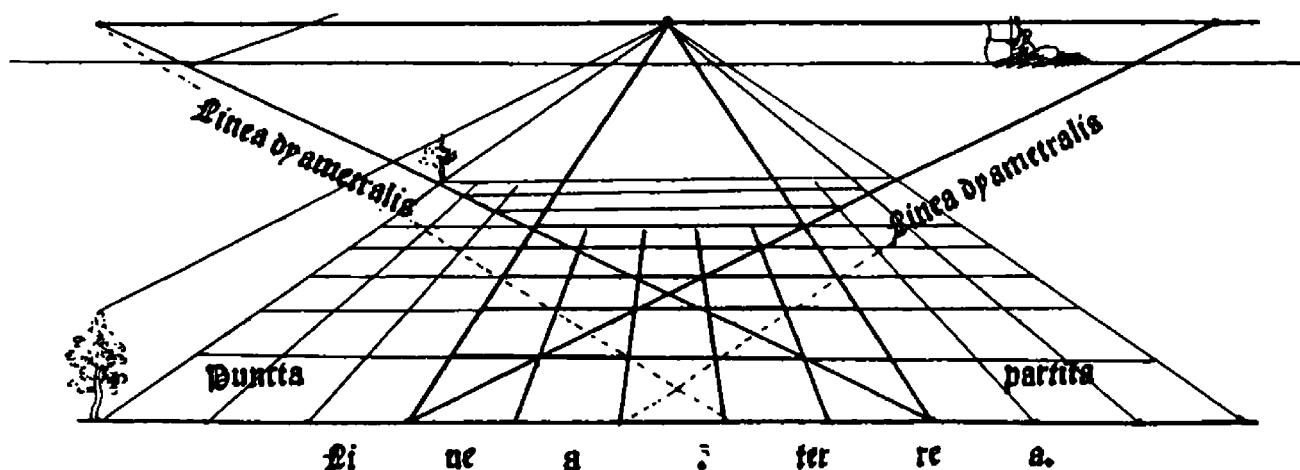


Figure A : *Plan au sol ou géométral*

à préciser divers éléments géométriques liés à la construction; à côté du *point de fuite principal* qui est la projection orthogonale de l'œil sur le plan du tableau, point par lequel passent les perspectives des droites orthogonales au plan du tableau, et de la *ligne d'horizon*, ligne horizontale du plan du tableau passant par le point de fuite principal, la construction d'un pavage carré amène à considérer les *points de distance*, points situés sur la ligne d'horizon à une distance du point de fuite principal égale à sa distance à l'œil, points par lesquels passent les diagonales des carrés du pavage (ce qui a constitué d'abord une vérification de l'exactitude de la construction avant de devenir procédé de construction).

Ceci nous amène au second procédé de la construction perspectiviste, la *méthode des points de distance* qui apparaît dans les dessins de Jean Pèlerin dit Viator dans son ouvrage *De Artificiali Perspectiva* (publié en 1505) (fig. 3).



Durer de son côté s'est préoccupé de fabriquer des instruments à dessiner en perspective, les portillons, qu'il a représentés dans certaines de ses gravures (fig. 5-35), portillons dont on ne sait s'il les a réalisés mais qui montrent comment s'entremêlent ici les divers aspects théoriques, techniques et instrumentaux.

L'étude de ces divers procédés et de leur compatibilité va conduire à expliciter les éléments géométriques de la pratique perspectiviste, mais c'est seulement au début du XVII<sup>e</sup> siècle que la notion générale de point de fuite sera définie. Ce sera l'œuvre de Guido Ubaldo del Monte qui publie en 1600 les *Perspectivae Libri Sex* (Les Six Livres de Perspective), le premier ouvrage *purement géométrique* s'appuyant sur la tradition euclidienne quant à l'ordre de l'exposé et à la mise en œuvre des démonstrations. Un autre ouvrage sera publié peu après en 1605, la *Scénographie* de Stevin, premier livre d'un traité d'optique, qui définit la notion générale de point de fuite.

Ces deux ouvrages ouvrent la voie au point de vue projectif qui sera étudié systématiquement quelques années plus tard par Desargues.

### 3. Desargues et la naissance de la géométrie projective

Dans les *Perspectivae Libri Sex*, Guido Ubaldo après avoir mis en place les éléments géométriques de la perspective proposait plusieurs problèmes qu'il résolvait chacun séparément sans qu'apparaisse une méthode générale. Ce sera l'œuvre de Desargues, ingénieur et architecte, cherchant à unifier les procédés des praticiens : peintres, architectes, tailleurs de pierres, de construire une méthode générale, méthode qui relève à la fois du tracé géométrique et de la géométrie rationnelle : la méthode des transformations. Cette démarche vers la construction d'une méthode géométrique qui se veut universelle est analogue à celle des contemporains Descartes et Fermat construisant cette méthode autour du calcul algébrique; elle témoigne de ce principe unificateur que l'on retrouve tout au long de l'histoire des mathématiques et sur lequel nous reviendrons dans la dernière partie de cet appendice.

De l'œuvre de Desargues qui se développe autour de cette construction de la méthode, nous citerons le *Brouillon Project d'une Atteinte aux Événements des Rencontres d'un Cône avec un Plan* (1639) dans lequel l'auteur, s'appuyant sur Apollonius, construit une théorie des coniques définies comme perspectives d'un cercle. Desargues remarque que dans ce contexte les points à l'infini (considérés comme point d'intersection de droites parallèles) se comportent comme les points usuels (points à distance finie), ce qui permet d'unifier définitions et démonstrations renforçant l'unité de la théorie des coniques : ainsi un *rouleau*, figure engendrée par une droite passant par un point fixe (sommet) et s'appuyant sur un cercle est un cône ou un cylindre selon que le sommet est à distance finie ou à l'infini. Desargues montre alors l'invariance par perspective de certaines configurations, ce qui lui permet de *projeter* les propriétés du cercle pour obtenir les propriétés des coniques, c'est la *méthode des transformations* qui sera l'un des principes directeurs des géomètres projectifs du XIX<sup>e</sup> siècle.

Si la démarche de Desargues, dans la traduction grecque, s'appuie sur la théorie des proportions et la comparaison des rapports, le point de vue projectif y est explicite et on y trouve cette remarque fondamentale (via le théorème de Menelaüs) que certaines relations métriques sont invariantes par projection.

C'est encore l'utilisation de la perspective et du théorème de Menelaüs qui permet à Desargues de démontrer le théorème sur les triangles homologues (appelé aujourd'hui *théorème de Desargues*) qui paraît en

1648 dans un traité de perspective : *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective...* de Abraham Bosse, graveur et ami de Desargues, traité dont une partie a certainement été rédigée par Desargues.

Pour diverses raisons, le point de vue projectif de Desargues sera occulté par la méthode des coordonnées plus proche du calcul infinitésimal naissant; toutefois ce point de vue ne sera pas complètement effacé. Pascal disciple de Desargues publie en 1640 un *Essay pour les Coniques* dans lequel il démontre le théorème qui porte aujourd'hui son nom (condition pour que six points soient sur une même conique) et il développe le point de vue projectif dans un *Traité des Coniques* dont il ne nous reste que le premier chapitre mais dont nous connaissons le plan général par une lettre de Leibniz qui l'avait lu et en avait compris l'importance. Un autre disciple de Desargues, La Hire a publié plusieurs ouvrages sur les coniques : dans un ouvrage intitulé *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections et les superficies coniques* (1673), il définit les coniques à partir du cercle en utilisant la transformation qu'on appelle aujourd'hui homologie, obtenue en coupant un cône à base circulaire par un plan et rabattant le plan de la base sur le plan de section; un second ouvrage *Des sections coniques* (1685) représente une somme sur les coniques qu'on peut comparer à l'ouvrage d'Apollonius que La Hire reprend d'un point de vue projectif, il introduit au début de l'ouvrage les propriétés harmoniques du quadrilatère complet et les notions de pôles et polaires, ce qui lui fournit l'outil essentiel d'étude des coniques. Enfin signalons que La Hire a énoncé la définition bifocale des coniques à centre dans ses *Nouveaux Eléments des Sections Coniques* (1679).

#### 4. De la perspective à la géométrie

Plusieurs traités de perspective vont paraître aux XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles qui précisent et complètent les constructions perspectivistes, s'attachant en particulier aux déformations d'images que l'on peut obtenir par perspective comme *La Perspective curieuse* (1651) de Nicéron, mais ce n'est pas ici le lieu de développer l'histoire de la perspective, nous renvoyons à la bibliographie [Damish], [Flocon-Taton], [Poudra], [Cahiers de la perspective].

Parmi les traités de perspective du XVIII<sup>e</sup> siècle, nous citerons ceux de Taylor (celui de la formule) et Lambert qui, en un sens, achèvent la théorie géométrique de la perspective, leur objet étant de déduire les constructions d'un petit nombre de principes élémentaires.

Dans un court traité, les *Nouveaux Principes de la Perspective* (1715), Taylor, après avoir énoncé définitions et axiomes (ces derniers n'étant

autres que les classiques relations d'incidence), démontre les propriétés générales de la perspective (point de fuite d'une direction de droite, ligne de fuite d'une direction de plan) qu'il utilise pour résoudre divers problèmes de construction. Sa construction de la perspective équivaut alors à une homologie, après rabattement du plan du tableau sur le plan horizontal en tournant autour de la ligne de terre.

Lambert, philosophe, mathématicien, physicien, esprit universel tel qu'il en fut dans le XVIII<sup>e</sup> siècle des Lumières, a publié deux ouvrages sur la perspective qu'il se propose de réduire, comme le firent avant lui Desargues et Taylor, à un petit nombre de principes géométriques, mais en même temps il s'intéresse aux procédés effectifs de construction, mettant au point un instrument à dessiner en perspective, le *perspectographe* qu'il décrira dans son *Essai sur la Perspective* (1752). Dans son second ouvrage, *la Perspective affranchie de l'embarras du Plan géométral* (1759), il explique au début de sa préface :

*Des règles universelles présupposent des principes également universels, qu'il vaut la peine d'approfondir, quand on n'a trouvé que les premières. Avec une attention médiocre on découvrira beaucoup au-delà de ce qu'on attendait, dès qu'on a soin de combiner les rapports, qui se trouvent entre les parties de l'objet.*

C'est que pour Lambert les règles ont à la fois une fonction pratique : déterminer les procédures de constructions effectives, et une fonction théorique en ce que leur effectivité même légitime les principes qui les sous-tendent; ainsi l'aspect instrumental de la géométrie, que ce soit avec la règle et le compas des géomètres grecs ou avec les instruments plus sophistiqués inventés (sinon réalisés) par les géomètres ultérieurs, est inséparable de son aspect théorique. Ce que précise Roger Laurent présentant en 1981 une réédition de *l'Essai sur la Perspective*.

*La construction du perspectographe est en même temps la démonstration d'une suite de propositions soigneusement établies et qui en justifient la construction.*

Pour établir les règles de construction, Lambert s'appuie sur la distribution des points de fuite sur la ligne d'horizon, sur laquelle il construit une graduation définie par la mesure des angles des directions horizontales avec la direction perpendiculaire au plan du tableau (le *transporteur perspectif*); ceci l'amène à définir la *géométrie perspective*, c'est-à-dire la géométrie des objets représentés sur le plan du tableau (en langage moderne, la transformée de la géométrie usuelle par la perspective).

Dans les *Notes et Additions* qui accompagnent la réédition en 1774 de *la Perspective affranchie de l'embarras du Plan géométral*, Lambert utilisera la géométrie perspective pour résoudre divers problèmes de construction à



la règle seule dont nous citerons l'un des plus significatifs : *un parallélogramme étant donné dans le plan, construire à l'aide de la règle seulement une droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.*

Avec la géométrie perspective, et la géométrie de la règle qui s'y relie, Lambert marque une étape de la construction de la géométrie projective telle qu'elle s'élaborera au siècle suivant à partir de l'œuvre de Monge [Laurent-Peiffer].

### 5. De la géométrie descriptive à la géométrie projective

Ce sont encore des raisons d'ordre technique qui vont mener à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle vers la géométrie projective telle que nous la connaissons aujourd'hui. Gaspard Monge, comme d'autres mathématiciens français de la seconde moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle, est professeur dans une école militaire et il est amené à s'intéresser à la construction des fortifications, il rencontre ainsi le problème de la représentation ce qui le conduit à une étude systématique du procédé de la double projection orthogonale, ce sera la géométrie descriptive qu'il a exposé dans ses cours de l'an III (1795) à l'Ecole Normale et dans son *Traité de Géométrie Descriptive* publié en 1799.

Mais le mathématicien Monge, mettant en place la géométrie descriptive, a compris que cette technique de représentation est aussi méthode de recherche de la géométrie rationnelle; c'est ce qu'il écrit au début de son traité de 1799 :

*La Géométrie descriptive a deux objets : le premier, de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement.*

*Le second objet est de donner la manière de reconnaître, d'après une description exacte, les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent de leurs formes et de leurs positions respectives.*

Cette liaison explicite entre les techniques de représentation et les méthodes de la géométrie rationnelle, ce que Chasles appellera *l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes* [Chasles 1], permet à Monge d'énoncer et démontrer des propriétés des pôles et polaires des courbes et des surfaces du second ordre, qu'il relie à la construction des tangentes et des plans tangents, de façon précise : étant données une sphère  $\Sigma$  et une droite  $D$ , on mène les deux plans tangents à  $\Sigma$  passant par  $D$  et soient  $A$  et  $B$  les deux points de contact, alors pour tout cône circonscrit à la sphère  $\Sigma$  dont le sommet appartient à la droite  $D$ , le cercle de contact sur la sphère passe par  $A$  et  $B$ ;

réciiproquement étant donnée une droite  $D'$  qui coupe la sphère en deux points  $A$  et  $B$ , le sommet du cône circonscrit à la sphère  $\Sigma$  le long d'une section par un plan passant par  $A$  et  $B$  décrit une droite  $D$  lorsque le plan tourne autour de  $D'$ ; Monge remarque alors que l'on peut remplacer la sphère  $\Sigma$  par une surface du second ordre, d'autre part il ne distingue pas le cas où la droite  $D$  ne coupe pas la sphère  $\Sigma$ , auquel cas on peut construire effectivement les deux plans tangents et les points  $A$  et  $B$ , et le cas où la droite  $D$  coupe la sphère  $\Sigma$ , auquel cas les plans tangents et les points  $A$  et  $B$  sont *imaginaires*, première utilisation du *principe de continuité* qui sera développé par les successeurs de Monge [Chasles 1].

Un peu plus jeune que Monge dont il fut l'élève à l'école du Génie de Mézières, Lazare Carnot s'est intéressé à la géométrie de la règle; s'appuyant sur les théorèmes de Menelaüs et de Ceva, Carnot développe dans son *Essai sur la Théorie des Transversales* (1806) l'étude des relations métriques invariantes par projection; par ailleurs méfiant envers l'utilisation des nombres négatifs, Carnot se propose de développer dans la *Géométrie de Position* (1803) des méthodes géométriques à l'exclusion de toute intervention de l'analyse (*libérer la géométrie des hiéroglyphes de l'analyse*), et c'est pour unifier l'étude des divers cas de figure qu'il énonce le principe de continuité.

Ainsi se mettent en place avec Monge et Carnot les éléments d'une méthode géométrique générale : méthode des projections qui deviendra la méthode des transformations, principe de continuité, méthode que développent systématiquement leurs successeurs Poncelet et Chasles en France, Steiner et von Staudt en Allemagne.

Jean Victor Poncelet qui fut l'élève de Monge à l'Ecole Polytechnique va étudier systématiquement les propriétés projectives des figures (c'est-à-dire les propriétés invariantes par projection), ce sera l'objet de l'ouvrage qu'il publie en 1822, le *Traité des Propriétés projectives des Figures*. On peut distinguer deux sortes de propriétés géométriques des figures, les *propriétés métriques* définies par des relations entre grandeurs (longueurs et angles), les *propriétés descriptives* ou *graphiques* définies par les formes des figures et leurs positions relatives. Les propriétés descriptives sont invariantes par projection (à condition de considérer les points à l'infini comme des points ordinaires, les points à l'infini des droites d'un plan définissant une droite, les points à l'infini des droites de l'espace définissant un plan) tandis que les propriétés métriques ne le sont pas à l'exception de certaines d'entre elles telles la relation harmonique entre quatre points, la relation de Menelaüs et plus généralement les propriétés liées aux transversales telles celles étudiées par Carnot. Pour étudier les propriétés projectives (et en particulier déterminer parmi les propriétés métriques celles

qui sont projectives), Poncelet s'appuie sur les trois points qui sont à la base de la géométrie projective : d'abors, la *méthode des projections* et les transformations qu'il lui associe, ainsi l'homologie plane (*la perspective dans un plan*) qu'il considère comme *la projection plane d'une autre projection déjà existante dans l'espace, ou comme le rabattement de cette dernière au plan de projection*, ce qui lui permet de définir l'homologie transformant une conique en une autre par analogie avec les homothéties (qu'il appelle similitudes) transformant un cercle en un autre, puis l'homologie dans l'espace qu'il associe à l'étude des surfaces du second ordre; ensuite le *principe de réciprocité des figures* (qui deviendra le *principe de dualité*) qu'il associe à la transformation par polaires réciproques; enfin le *principe de continuité* qui lui permet de considérer les éléments imaginaires des figures de la même manière que les éléments réels, unifiant ainsi les divers cas de figures et les démonstrations. Poncelet établit ainsi les propriétés générales des courbes et surfaces du second ordre, mais aussi certaines propriétés relatives aux courbes d'ordre supérieur (l'ordre étant défini par le nombre de points d'intersection avec une droite) complétant ainsi des résultats établis par Newton et MacLaurin par la méthode des coordonnées.

#### 6. *Les principes de la géométrie projective : la méthode des transformations*

Dans son traité, Poncelet insiste sur le caractère général des méthodes qu'il utilise et qui doivent jouer, pour la géométrie pure, le même rôle que la méthode des coordonnées pour ceux qui utilisent l'analyse algébrique pour résoudre les problèmes de géométrie. Cette volonté de généralité, d'universalité des méthodes s'inscrit dans la tradition de Descartes et Desargues; Michel Chasles l'explicite dans son *Aperçu historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie* (1837), ouvrage historique et en quelque sorte apologétique, qu'il complète par un *Mémoire de Géométrie sur deux Principes généraux de la Science* dans lequel il expose les deux principes de la méthode des transformations : le principe de dualité et le principe d'homographie. Pour cela, il s'appuie sur un invariant métrique projectif, le birapport (*la fonction anharmonique*) de quatre points alignés (un énoncé équivalent à l'invariance projective du birapport est démontré au livre VII de la *Collection Mathématique* de Pappus, lequel l'attribue à Euclide; cet énoncé ferait partie des *Porismes*, ouvrage perdu d'Euclide consacré aux propriétés des transversales, ouvrage que Chasles, s'appuyant sur des travaux antérieurs de Simpson, a reconstitué). L'invariance projective du birapport permet alors de définir

dans un plan le birapport de quatre droites concourantes, dans l'espace le birapport de quatre plans passant par une même droite.

Ceci étant, Chasles étudie systématiquement dans le mémoire cité, les correspondances entre figures laissant invariantes les propriétés descriptives d'une part, le birapport d'autre part, mettant ainsi en avant la caractérisation d'une transformation par ses invariants.

S'appuyant sur des considérations de géométrie analytique, Chasles définit d'abord une correspondance entre points et plans dans l'espace, les paramètres du plan (c'est-à-dire les coefficients de l'équation du plan) dépendant *au premier degré* des coordonnées du point; il montre que si un point parcourt un plan (resp. une droite) le plan correspondant passe par un point fixe (resp. une droite fixe); de plus le birapport des quatre plans correspondant à quatre points alignés est égal au birapport de ces quatre points; dans une telle correspondance les éléments à l'infini (points, droites, plan) se comportent comme des éléments ordinaires; enfin Chasles étudie la correspondance entre surfaces, lorsqu'un point parcourt une surface, le plan correspondant enveloppe une autre surface.

Ces préliminaires étant donnés, Chasles définit une *corrélation* entre deux figures de la façon suivante : deux figures sont *corrélatives* si l'on peut définir une correspondance entre points, droites, plans de l'une et plans, droites, points de l'autre, correspondance telle que des points situés dans un plan donné de l'une des figures auront pour correspondant des plans passant par le point de l'autre figure correspondant au plan donné, et des points situés sur une droite donnée de l'une des figures auront pour correspondants des plans passant par la droite de l'autre figure correspondant à la droite donnée. S'appuyant sur les préliminaires analytiques, Chasles montre que le birapport de quatre points de l'une des figures et le birapport des quatre plans correspondants de l'autre figure sont égaux. Ceci lui permet d'établir les propriétés des figures corrélatives.

Parmi les corrélations Chasles cite les transformations par polaires réciproques par rapport à une surface du second ordre, ainsi que la dualité associée à ce qu'on appelle aujourd'hui le complexe des droites de moment nul du système défini par les vitesses d'un corps solide, ou du système des forces agissant sur un solide (autrement dit le champ des moments d'un torseur).

De même deux figures sont *en relation homographique* si l'on peut définir une correspondance entre points, droites et plans de l'une et points, droites et plans de l'autre, correspondance qui conserve les propriétés descriptives (autrement dit les relations d'alignement et de concours) et certaines relations métriques (birapport de quatre points alignés, de quatre plans passant par une même droite). Chasles remarque que la conservation

des propriétés descriptives implique la conservation des birapports, ainsi les propriétés métriques projectives sont conséquence des propriétés descriptives. Chasles définit alors ce qu'il appelle une *déformation* homographique d'une figure, opération qui transforme une figure en une figure en relation homographique avec la première; ainsi les projections, les homologies sont des déformations homographiques.

Les transformations ainsi définies (corrélations, homographies) permettent alors d'établir de nouvelles propriétés géométriques et Chasles écrit avec un certain lyrisme.

*Qu'on prenne une figure quelconque de l'espace, et l'une de ses propriétés connues, qu'on applique à cette figure l'un de ces modes de transformations, et qu'on suive les diverses modifications ou transformations qu'éprouve le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure et une propriété de cette figure qui correspondra à celle de la première.*

Cette fabrication de nouvelles propriétés par transformation de propriétés connues se traduit par des transformations des énoncés de ces propriétés, ce qui va mettre en avant l'aspect linguistique de la géométrie, et le principe de dualité y jouera un rôle crucial, par son caractère plus radical dans la mesure où une corrélation transforme la nature des éléments constitutifs de la figure (un point devient un plan...) alors qu'une transformation homographique n'est qu'une déformation de la figure, pour employer l'expression de Chasles, les éléments constitutifs de la figure (points, droites, plans) ne changeant pas de nature.

C'est en 1806 que Brianchon énonce le théorème qui porte aujourd'hui son nom, sur l'hexagone circonscrit à une conique, qu'il obtient en transformant par polaires réciproques le théorème de Pascal, mettant ainsi l'accent sur la *transformation des énoncés*. Mais l'utilisation de la transformation par polaires réciproques, qui, d'une certaine façon, justifie le principe de dualité, en cache la portée; il fallait dépasser l'aspect géométrique de la transformation pour en saisir ce que nous pouvons appeler la portée structurale. Ce sera l'œuvre de Gergonne qui publie dans *Les Annales de Mathématiques* en 1826 un article intitulé *Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue*, il y remarque que la dualité entre énoncés géométriques se définit comme une correspondance entre mots et que cette correspondance entre mots s'étend à la démonstration, autrement dit la démonstration de l'énoncé dual d'un énoncé s'obtient en *dualisant* la démonstration du premier énoncé, ce qui l'amène à la présentation devenue classique des énoncés et des démonstrations en deux colonnes, présentation qu'il avait déjà utilisée dans un article antérieur sur la dualité des polyèdres. Ainsi est mis en avant avec l'aspect linguistique de la méthode des transformations la structure linguistique du

raisonnement géométrique, première ébauche de la conception structurale de la géométrie (et des mathématiques) qui se développera à la fin du siècle (cf. ci-dessous).

Notons que Poncelet, pour qui le raisonnement géométrique s'appuie sur les figures (y compris lorsqu'il utilise les éléments imaginaires) refusera le point de vue de Gergonne, ne pouvant admettre que le raisonnement géométrique se réduise à de tels jeux de langage; ainsi il s'opposera à l'usage de la double colonne qui ne saurait remplacer la preuve via la théorie des polaires réciproques.

Signalons enfin que le caractère structural de la dualité apparaît sous son aspect analytique avec Plücker; pour tenir compte des éléments à l'infini, Plücker a introduit les coordonnées homogènes, écrivant l'équation d'une droite dans le plan sous la forme

$$ux + vy + wz = 0.$$

Plücker remarque alors la symétrie entre les variables  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et les variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; ce qui permet de considérer l'équation ci-dessus soit comme l'équation ponctuelle d'une droite, soit comme l'équation tangentielle d'un point.

### 7. Les principes de la géométrie projective : le principe de continuité

A l'origine du principe de continuité, la recherche d'une méthode permettant d'unifier les démonstrations relatives aux divers cas de figures, et ce d'une façon purement géométrique, c'est ainsi que le présente Carnot (cf. n° 5). Poncelet va le systématiser dans son *Traité des propriétés projectives des figures* mais la justification qu'il en donne n'est pas très claire, ce qui lui vaudra la critique de Cauchy.

Dans un texte écrit en 1816 mais qui ne sera publié qu'en 1868 dans les *Applications d'Analyse et de Géométrie* Poncelet se réfère à la méthode des coordonnées, remarquant que dans les calculs, la valeur, réelle ou imaginaire, des expressions algébriques intermédiaires n'intervient pas explicitement et par cela même ne met pas en cause la validité des résultats pourvu que le calcul soit bien fait, et il s'efforce de justifier l'analogie géométrique indépendamment de toute référence au calcul algébrique, cherchant à définir parmi les relations appartenant aux figures, celles qui *demeurent, dans leur forme explicite, applicables à toutes les situations possibles* et qui ainsi ne dépendent pas du fait que certains éléments de la figure soient suivant les situations réels ou imaginaires.

Ceci sera précisé par Chasles dans son *Aperçu historique* avec la *méthode des relations contingentes*, dénomination qu'il préfère à celle de principe de continuité, méthode qui consiste à *considérer la figure, sur*

*laquelle on a à démontrer quelque propriété générale, dans des circonstances de construction générale, où la présence de certains points, de certains plans ou de certaines lignes, qui dans d'autres circonstances seraient imaginaires, facilite la démonstration, puis à appliquer le théorème qu'on a ainsi démontré au cas de la figure où ces points, ces plans et ces droites seraient imaginaires,* Chasles distingue alors les *parties intégrantes et permanentes* de la figure qui sont toujours réelles et les *parties secondaires ou contingentes et accidentelles* qui peuvent être indifféremment réelles ou imaginaires, ce qui ne change pas les conditions générales de construction des figures; les théorèmes concernent les premières mais la démonstration peut s'appuyer sur les secondes, le géomètre choisissant la situation particulière de façon à faciliter la démonstration.

Chasles discute alors des limites de sa méthode, celle-ci s'appliquant sans problème *dans les questions de géométrie n'exigeant que le secours de l'Analyse finie*, c'est-à-dire la méthode des coordonnées de Descartes où n'interviennent que des équations algébriques. On sait aujourd'hui que c'est cette condition d'algébricité qui justifie le principe de continuité.

Parmi les conséquences du principe de continuité, nous citerons la définition des points cycliques d'un plan, points à l'infini commun à tous les cercles de ce plan, et l'ombilicale, intersection d'une sphère avec le plan à l'infini, ou si l'on préfère, lieu des points cycliques des différentes directions de plan; ces éléments imaginaires liés aux propriétés métriques de la géométrie élémentaire vont permettre d'intégrer celle-ci dans le cadre de la géométrie projective.

## 8. Des coniques et des quadriques

C'est autour de la théorie des coniques et des quadriques que vont se développer les méthodes de la géométrie projective, d'abord pour des raisons historiques : c'est l'étude des coniques comme intersections de cônes et de plans qui a conduit à la méthode des projections, une conique étant définie comme perspective de cercle, c'est la transformation par polaires réciproques par rapport à une conique ou une quadrique qui a conduit au principe de dualité; ensuite pour des raisons théoriques liées aux propriétés spécifiques des courbes et des surfaces au second degré.

Il faut cependant noter les travaux de géométrie élémentaire tels les théorèmes de Dandelin démontrés en 1822, théorèmes qui s'intégreront à la géométrie projective lorsque Laguerre aura montré en 1854 que les foyers d'une conique sont les points d'où l'on peut mener deux tangentes isotropes à la conique, ou si l'on préfère les points d'intersection des tangentes menées à la conique par les points cycliques.

En ce qui concerne les travaux relevant des méthodes de la géométrie projective nous citerons ceux sur les faisceaux de coniques et ceux sur les correspondances homographiques, travaux qui ont joué un rôle important dans le développement des méthodes et des conceptions théoriques.

Dans son *Traité des Propriétés projectives des Figures*, Poncelet étudiant les propriétés géométriques d'une famille de coniques ayant quatre points communs (resp. : quatre tangentes communes) a montré que les polaires d'un point donné (resp. : les pôles d'une droite donnée) par rapport aux coniques de la famille passent par un point fixe (resp. : sont sur une droite fixe), la relation entre les deux points (resp. : les deux droites) étant réciproques; il y montre aussi que le lieu des pôles d'une droite donnée (resp. : l'enveloppe des polaires d'un point donné) est une conique; ces résultats conduiront à l'étude des transformations quadratiques qui joueront un rôle important dans la géométrie algébrique. Développant les idées de Poncelet mais s'appuyant sur des méthodes analytiques, Charles Sturm, dans un article de 1826 aux *Annales de Mathématiques*, donne la forme générale des équations des coniques passant par les points d'intersection de deux coniques données et montre en toute généralité le théorème de Desargues sur l'involution définie sur une droite par un faisceau de coniques (Desargues avait seulement montré que les points d'intersection d'une droite avec les côtés d'un quadrilatère et une conique passant par les sommets sont en involution). Enfin Weierstrass classifia les faisceaux de coniques via la théorie des formes quadratiques.

Quant aux correspondances homographiques entre deux droites, deux faisceaux de droites, une droite et un faisceau de droites ce que l'on appellera plus tard *les formes fondamentales de première espèce* [Enriques] [Godeaux], elles ont été étudiées systématiquement par Steiner dans son *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Développement systématique de la dépendance entre les formes géométriques) publié en 1832, et indépendamment par Chasles qui en expose les propriétés dans son *Aperçu historique* ainsi que dans le *Traité de Géométrie Supérieure* (1861) rédigé à partir du cours qu'il donne à la Faculté des Sciences de Paris depuis 1846. Une correspondance homographique entre deux formes de première espèce est une correspondance biunivoque conservant le birapport; ayant défini le birapport de quatre points d'un cercle puis, par projection, de quatre points d'une conique (ce qui permet de considérer une conique comme une forme de première espèce), Steiner et Chasles montrent que deux points d'une conique étant donnés, la correspondance qui lie les deux droites joignant ces points à un point variable de la conique est une correspondance homographique; réciproque-



ment le lieu de l'intersection des droites correspondantes de deux faisceaux liés homographiquement est une conique passant par les sommets des faisceaux. Parmi les correspondances homographiques entre faisceaux, on note celles qui associent à une droite passant par un point donné, la droite passant par un second point donné et rencontrant la première sur une droite donnée (c'est la notion duale de projection d'une droite sur une autre) et Steiner note que toute correspondance homographique entre faisceaux de droites est composée de correspondance de type ci-dessus (de même que toute correspondance homographique entre deux droites est composée de projections); on peut ainsi définir une correspondance homographique d'une façon *descriptive* (alors que la définition du birapport fait appel à la notion de distance) et Steiner en déduit une définition *purement* projective des coniques, premier pas vers une construction de la géométrie projective indépendante de la notion de distance, construction que développera ultérieurement Von Staudt (cf. n° 10).

## 9. Géométrie projective et géométrie élémentaire

Si la géométrie projective se caractérise d'abord par l'universalité de ses méthodes, se présentant comme une géométrie générale, le problème se pose d'une part d'une construction autonome de la géométrie projective, d'autre part de l'intégration de la géométrie élémentaire (celle des propriétés métriques) dans cette géométrie générale.

Nous reviendrons ultérieurement sur le premier problème; en ce qui concerne les propriétés métriques, les géomètres projectifs vont les définir comme propriétés projectives faisant appel aux éléments imaginaires dont nous avons parlé plus haut, savoir les points cycliques et l'ombilicale (cf. n° 7).

Poncelet avait déjà introduit les points cycliques, points à l'infini communs à tous les cercles d'un plan et Chasles précisera dans son *Traité de Géométrie Supérieure* en énonçant

*Les points d'intersection d'un cercle par la droite située à l'infini sont sur les rayons doubles des deux faisceaux homographiques formés par les deux côtés d'un angle de grandeur constante, tournant autour de son sommet.*

C'est en s'appuyant sur le cours de Chasles à la Faculté des Sciences de Paris que Laguerre étudiant les foyers des coniques (cf. n° 8) montre en 1854 qu'un angle étant donné, le birapport des côtés de l'angle et des droites isotropes issues du sommet de l'angle est fonction de la grandeur de l'angle (la formule de Laguerre aujourd'hui).

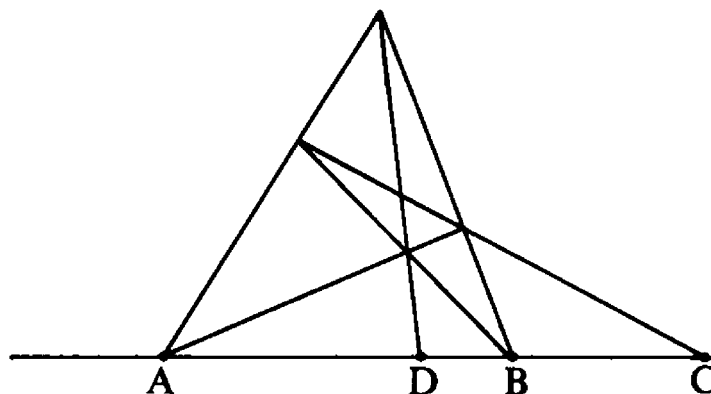
Peu après Laguerre, Cayley (1821-1895) indiquera une interprétation du rôle des imaginaires dans la définition des propriétés métriques dans un article intitulé *A sixth memoir on quantics* (Un sixième mémoire sur les formes polynômes) publié en 1859, mémoire dans lequel Cayley se propose de donner une interprétation géométrique de la théorie des formes polynômes (c'est-à-dire des polynômes homogènes) qu'il a étudiée antérieurement. Pour cela, il utilise les coordonnées homogènes de Plücker, une forme ternaire représentant alors une courbe plane; Cayley considère alors la géométrie associée à une conique (dite *conique absolue* du plan) définissant une notion de distance entre deux points dont Klein montrera qu'elle est, à un facteur près, le logarithme du birapport des deux points donnés et des deux points d'intersection de la conique avec la droite joignant les deux points donnés; lorsque la conique absolue (tangentielle) dégénère en les deux points cycliques la géométrie associée n'est autre que la géométrie usuelle, ce qui amène Cayley à écrire que les propriétés métriques d'une figure ne sont autres que les propriétés de la figure donnée en liaison avec la conique absolue, et dans le cas de la géométrie élémentaire avec les points cycliques. Ainsi la géométrie métrique est une partie de la géométrie descriptive (*metrical geometry is a part of descriptive geometry*), la géométrie descriptive désignant ici la géométrie projective.

Cette construction de Cayley prendra une nouvelle signification lorsque Félix Klein remarquera en 1871 que le cas où la conique absolue est imaginaire correspond à la géométrie sphérique et celui où la conique est réelle correspond à la géométrie de Lobatchevski, intégrant ainsi géométrie euclidienne et géométries non-euclidiennes à cette géométrie générale que veut être la géométrie projective.

#### 10. *La construction de la géométrie projective*

Chez Poncelet et ses successeurs les notions projectives étaient définies à partir de la géométrie élémentaire, que ce soient les éléments idéaux (éléments à l'infini, éléments imaginaires) où les invariants projectifs, descriptifs ou métriques; cependant lorsque la géométrie projective devient la géométrie générale dont la géométrie élémentaire (métrique) n'est plus qu'un chapitre particulier, le problème se pose d'une construction autonome des notions projectives, ce sera l'œuvre de Karl Von Staudt avec ses deux ouvrages *Die Geometrie der Lage* (La Géométrie de Position) et *Beitrag zur Geometrie der Lage* (Contribution à la Géométrie de Position) respectivement publiés en 1847 et 1856, le premier consacré à la géométrie projective réelle, le second à la géométrie complexe; dans le cadre de cet appendice nous ne parlerons que du premier renvoyant à la bibliographie [Coolidge 1], [Klein 3], [Kline].

Von Staudt se propose de donner une définition projective du birapport de quatre points alignés, pour cela il définit un *quaterne harmonique* à partir du quadrilatère complet (cf. fig. 4).



Il montre alors que la définition ne dépend pas du quadrilatère complet en utilisant le théorème de Desargues sur les triangles homologues, mettant ainsi en évidence le rôle de cet énoncé dans la construction de la géométrie projective. Il montre de même les propriétés de symétrie entre  $A$  et  $B$ , entre  $C$  et  $D$ , et entre les couples  $(A, B)$  et  $(C, D)$  ainsi que l'invariance par projection de la propriété d'harmonie. Par des constructions itérées de quaterns harmoniques il peut alors définir, trois points étant donnés sur une droite, les points dont le birapport avec les trois points donnés sont rationnels, mais il se heurte à un problème de continuité dans la définition générale du birapport de quatre points, problème qui sera résolu après la mise en place des méthodes axiomatiques à la Hilbert.

Une autre difficulté se posera avec la définition des points à l'infini qui fait appel à la notion de parallélisme.

Malgré ces difficultés Von Staudt peut mettre en place les principales notions de la géométrie projective, ainsi les transformations homographiques (correspondances biunivoques d'un plan sur un plan conservant l'alignement) et les transformations corrélatives (correspondances biunivoques de l'ensemble des points d'un plan sur l'ensemble des droites d'un plan qui associe à des points alignés des droites concourantes); von Staudt donne alors une définition *projective* des coniques : une transformation corrélative involutive étant donnée, l'ensemble des points situés chacun sur la droite qui lui correspond, est une conique.

Malgré ses points obscurs, la construction de Von Staudt a été le point de départ des constructions axiomatiques ultérieures, nous citerons celle de Enriques et celle de Veblen et Young (cf. IV n° 3).

## 11. Les espaces projectifs

Parallèlement à la géométrie *synthétique* (la géométrie pure par opposition à la géométrie analytique) se développe une étude analytique de la géométrie projective, nous ne pouvons dans le cadre de cet appendice citer en détail les travaux correspondants et nous renvoyons à la bibliographie [Coolidge 1 et 2], [Dieudonné 3], [Klein 3], [Kline]; nous citerons cependant l'introduction des coordonnées barycentriques par Möbius dans son *Barycentrische Calcul* (1827) et des coordonnées homogènes par Plücker dans un article publié en 1830 dans le *Journal für reine und angewandte Mathematik* (Journal de Crelle); ceci permettra à Möbius, Plücker et autres de mettre en évidence le caractère linéaire de la géométrie projective et en particulier des transformations; Cayley l'utilisera systématiquement dans l'étude géométrique de la théorie des formes polynômes, ce qui le conduira à définir les espaces numériques (un point d'un espace de dimension  $n$  est un système de  $n + 1$  nombres non tous nuls définis à un facteur près, ce qui résout le problème des éléments idéaux) et les transformations projectives comme transformations linéaires. La terminologie restera longtemps indécise, le terme *transformation linéaire* désignant aussi une transformation projective, terminologie que l'on retrouve jusqu'au début de ce siècle chez Félix Klein et Elie Cartan.

L'utilisation des coordonnées homogènes et du calcul linéaire, la mise en évidence d'invariants numériques associés aux transformations linéaires (tel le birapport) amène une redéfinition des rapports entre la géométrie et le numérique; aussi bien chez les géomètres grecs que chez les inventeurs de la méthode des coordonnées, le numérique se relie aux grandeurs géométriques via la mesure (les coordonnées de Descartes ne sont autres que les mesures de certaines grandeurs, une fois choisie l'unité de longueur), ce caractère de mesure disparaît avec l'utilisation systématique des coordonnées homogènes qui ne sont plus qu'un système de nombres définissant un point de l'espace comme le dit Cayley, et le birapport n'est plus qu'un nombre associé à un système de quatre points alignés défini indépendamment de toute mesure (c'est d'ailleurs ainsi que le définit Von Staudt).

Ainsi se met en place une double construction de la géométrie, la construction synthétique (à la Von Staudt) qui, à partir de notions *purement* géométriques, permet de reconstruire le numérique, et qui conduira aux axiomatiques de Enriques, Veblen-Young et plus tard Emil Artin, la construction algébrique (à la Cayley) qui s'appuie sur le calcul linéaire et sur laquelle nous reviendrons dans la dernière partie de cet appendice.

## 12. *Le programme d'Erlangen*

Géométrie élémentaire et géométrie projective s'appuient sur des objets d'origine empirique à partir desquels se construit une rationalité (définie comme la mise en place des conditions d'une connaissance *a priori*, à partir du seul raisonnement) permettant une meilleure prise sur ces objets; c'est en ce sens que l'on peut dire que la géométrie est la théorie physique de l'espace; les objets idéaux tels les éléments imaginaires ou les éléments à l'infini, aussi lointains soient-ils de l'expérience sensible ne diffèrent pas fondamentalement des abstractions des physiciens du XIX<sup>e</sup> siècle à la recherche de la rationalité des phénomènes physiques.

Mais cette rationalité *partielle* se heurte à ses propres limites, en particulier lorsqu'il s'agit d'intégrer la géométrie élémentaire à cette géométrie générale qu'est devenue la géométrie projective alors que la géométrie projective elle-même est construite à partir de la géométrie élémentaire (cf. n° 10); d'autre part les constructions numériques de la géométrie analytique ne sauraient satisfaire les géomètres *purs* dans la mesure où elles s'appuient sur un élément *a priori* étranger au géométrique, ce qui depuis Poncelet alimente la querelle entre partisans de la géométrie synthétique et partisans de la géométrie analytique.

Volonté d'unifier géométrie élémentaire et géométrie projective, volonté aussi de dépasser la querelle des méthodes, ceci conduit à rechercher *un principe général* sur lequel on puisse édifier la géométrie. Ce principe général, Félix Klein le découvre dans la théorie des groupes de transformations, la géométrie s'en déduisant à partir de l'étude des invariants, point de vue proche de celui de Galois (1811-1832) ce qu'explique Klein dans les dernières pages de son article *Vergleichende Betrachtungen über geometrische Forschungen* (considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes) publié en 1872 et connu sous le titre de *Programme d'Erlangen*.

La théorie des groupes a son origine dans l'étude des substitutions des racines d'une équation algébrique (étude entreprise par Lagrange dans la seconde moitié du XVIII<sup>e</sup>), elle a été développée par Galois qui étudie systématiquement le groupe des substitutions des racines d'une équation, ce qui lui permet de classer les équations et d'établir la condition de résolution par radicaux. Sophus Lie essaiera de développer une théorie analogue pour les équations différentielles ce qui le conduira à la théorie des groupes de Lie. Les travaux communs de Klein et Lie s'appuyant sur la théorie de Galois et le *Traité des Substitutions* de Jordan publié en 1870, vont porter sur les relations entre la géométrie et la théorie des groupes, ceci conduira Klein à mettre en place le *Programme d'Erlangen* (1872) qui propose une étude systématique de ces relations.

Avec le *Programme d'Erlangen* la géométrie devient partie de la théorie des groupes, plus précisément une géométrie est définie par la donnée d'un groupe de transformations opérant sur l'espace (plus généralement une multiplicité à plusieurs dimensions), le *groupe principal* de la géométrie, et les propriétés géométriques ne sont autres que les propriétés invariantes par le groupe principal (cf. le chapitre 11 de cet ouvrage). Ainsi chez Klein les transformations agissent sur l'espace et non plus seulement sur les figures comme chez les premiers géomètres projectifs, systématisant ainsi des idées que l'on trouve déjà chez des géomètres comme Möbius et Cayley. Mais le *Programme d'Erlangen* ne s'arrête pas à cette seule définition, qui ne serait qu'une simple réorganisation; en faisant *varier* le groupe (l'un des points essentiels de la théorie de Galois), Klein définit des relations de dépendance entre géométries; de façon précise, une première géométrie étant donnée, une seconde géométrie est dite subordonnée à la première si son groupe principal est un sous-groupe du groupe principal de la première. Ainsi la géométrie projective étant définie par le groupe des transformations projectives (groupe des transformations homographiques), le sous-groupe des similitudes définit la géométrie métrique, et ce sous-groupe n'est autre que le groupe laissant invariant l'ombilicale (ou, dans le plan, le couple des points cycliques). De même une conique étant donnée dans le plan (resp. : une quadrique étant donnée dans l'espace), le sous-groupe du groupe projectif du plan (resp. : de l'espace) qui laisse invariante la conique définit la géométrie de Cayley, ainsi subordonnée à la géométrie projective. Ainsi se précise la remarque de Cayley sur les liens entre géométrie métrique et géométrie projective.

Puisque c'est le groupe qui définit la géométrie, deux géométries ayant même groupe (ou des groupes isomorphes) ont des propriétés analogues, et Klein les définit comme géométries équivalentes. Ainsi la géométrie projective sur la droite (la théorie des formes binaires) est équivalente à la géométrie projective sur une conique et à la géométrie du plan muni d'une conique fondamentale; de même, Klein étudiant la géométrie des rayons vecteurs réciproques (géométrie anallagmatique) montre qu'elle est équivalente à la géométrie de la sphère munie des transformations circulaires (ou plus généralement à la géométrie projective d'une quadrique réelle), et à la géométrie projective complexe unidimensionnelle (la théorie des formes binaires complexes) (notons dans ce dernier cas, qu'il faut considérer les transformations homographiques et les transformations antihomographiques).

Les propriétés géométriques ne dépendent donc que de la structure du groupe principal, le caractère particulier de la multiplicité sur laquelle opère le groupe n'intervenant pas essentiellement; en particulier les démonstra-

tions doivent pouvoir s'écrire uniquement en termes de structure de groupe, remarque qui conduira aux conceptions formalistes d'aujourd'hui.

Il est remarquable qu'à l'origine des conceptions formalistes, on trouve l'un des mathématiciens les plus intuitifs de l'histoire des mathématiques; c'est Klein qui écrit dans l'une des notes qui terminent le *Programme d'Erlangen*.

*Il ne faut toutefois pas se départir de cette prescription qu'une question mathématique ne doit pas être considérée comme complètement épuisée alors qu'elle n'est pas encore devenue intuitivement évidente, découvrir au moyen de l'Analyse, c'est bien faire un pas très important, mais ce n'est faire que le premier pas.*

Mais il faut bien dire que si le *Programme d'Erlangen* libère la pensée géométrique de toute intuition, il enrichit la géométrie *abstraite* d'une nouvelle forme d'intuition dans la mesure où la notion d'équivalence de structure qui permettait à Klein de transporter les déductions d'un domaine à un autre (ici les géométries équivalentes) conduit par cela même à une notion heuristique d'équivalence permettant de *transporter l'intuition* et ainsi imaginer les nouvelles constructions de la géométrie dite abstraite, point de vue que l'on trouve aussi chez Riemann dans son article *Sur les Hypothèses qui servent de Fondement à la Géométrie* (conférence prononcée à Göttingen en 1854 mais publié seulement en 1867) sur lequel nous reviendrons; ces deux textes, celui de Riemann et celui de Klein, sont en quelque sorte les textes fondateurs de la géométrie d'aujourd'hui.

Cette notion de transport d'intuition transformera la géométrie en un langage universel des mathématiques, ainsi que l'écrit Bourbaki [Bourbaki 3].

*Dépassé en tant que science autonome et vivante, la géométrie classique s'est ainsi transfigurée en un langage universel de la mathématique contemporaine, d'une souplesse et d'une commodité incomparable.* ce que Dieudonné appelle la *domination universelle de la géométrie* [Dieudonné 2].

Mais il y a bien plus qu'un langage, la géométrisation de plusieurs domaines des mathématiques (y compris la physique mathématique) les remodèle et transforme les points de vue, permettant de nouvelles approches intuitives. Mais ce n'est pas le lieu de le développer ici (cf. III, n° 4).

### III. LE PROBLÈME DES PARALLÈLES ET LES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

*Il faut à la clarté beaucoup d'ombre pour éblouir.*

Edmond Jabes

#### 1. *Un postulat incongru!*

Ayant défini le parallélisme au début du livre I des *Eléments*, Euclide montre (proposition 28 du livre I) que *si deux droites découpent sur une sécante des angles alternes-internes égaux, ces droites sont parallèles*; pour montrer la réciproque (proposition 29) savoir que *si deux droites sont parallèles, elles découpent sur une sécante des angles alternes-internes égaux*, Euclide admet l'énoncé suivant (cinquième postulat ou onzième axiome suivant les éditions, rappelons qu'on ne connaît pas le texte original des *Eléments*).

*Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites prolongées indéfiniment, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

La démonstration de la proposition 29 n'est en fait qu'une paraphrase de l'énoncé du cinquième postulat, énoncé qui semble n'avoir été introduit que pour cette démonstration; on peut alors se demander pourquoi Euclide n'a pas admis la proposition 29 d'énoncé plus simple et qui joue un rôle crucial dans la théorie des parallèles.

Le rôle particulier du cinquième postulat non évident et pourtant vrai, qui ne peut pas ne pas être vrai puisque c'est lui qui légitime via l'étude des parallélogrammes la méthode des aires, a laissé insatisfaits les géomètres (et peut être Euclide lui-même) qui ont tenté en vain de le démontrer. L'échec de ces tentatives a conduit à la découverte (à l'invention!) des géométries non-euclidiennes.

Ce n'est pas ici le lieu de raconter l'histoire de ces tentatives de démonstration, nous renvoyons pour cela à la bibliographie [Bonola], [Heath 1], [Jaouiche], [Pont]. Si ces tentatives ont échoué, elles ont au moins permis de mettre en évidence de nombreuses propriétés équivalentes à l'énoncé d'Euclide, ainsi l'énoncé classique (attribué à Playfair (1795) mais qui était certainement connu de Proclus).

*Par un point donné non situé sur une droite donnée, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.*



Citons aussi la démonstration de Wallis qui s'appuie sur la possibilité de construire un triangle semblable à un triangle donné dans un rapport donné, propriété qui est elle-même conséquence du cinquième postulat; on sait aujourd'hui que l'existence de deux triangles semblables non égaux est équivalente au cinquième postulat.

## 2. Histoire d'un quadrilatère

Un nouveau type de démonstration apparaît avec Ibn Al Haytham et Omar Al Khayyam, d'une part ils ramènent le problème à l'étude des angles d'un quadrilatère donc à une construction finie ce qui est plus conforme à la tradition grecque, d'autre part ils utilisent le raisonnement par l'absurde.

Ainsi Ibn Al Haytham considère un quadrilatère ayant trois angles droits et il montre que si le quatrième angle n'est pas droit, cela conduit à une contradiction; mais Ibn Al Haytham admet que si un segment de droite de longueur constante se déplace perpendiculairement à une droite donnée, l'une de ses extrémités décrivant cette droite, l'autre extrémité décrit aussi une droite, proposition dont on sait aujourd'hui qu'elle est équivalente au cinquième postulat.

Omar Al Khayyam qui a critiqué l'intervention du mouvement chez Al Haytham considère quant à lui un quadrilatère ABCD ayant deux angles droits en A et B, les côtés AD et BC étant égaux; il montre alors que les angles en C et D sont égaux et que s'ils ne sont pas droits cela conduit à une contradiction, il en déduit la proposition 29 du livre I des *Eléments*. Mais Al Khayyam a utilisé dans sa démonstration l'assertion qui dit que deux perpendiculaires à une même droite sont équidistantes (assertion équivalente au cinquième postulat).

Cette nouvelle approche sera reprise au XVIII<sup>e</sup> siècle par Saccheri et Lambert sans que l'on sache de façon précise quelle est la filiation menant des géomètres arabes des X<sup>e</sup> et XI<sup>e</sup> siècles jusqu'aux mathématiciens européens du siècle des Lumières.

Saccheri considérant le quadrilatère d'Omar Al Khayyam dans son ouvrage *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclide vengé de toute tache) (1733), après avoir éliminé *l'hypothèse de l'angle obtus*, incompatible avec le second postulat, ne peut montrer que *l'hypothèse de l'angle aigu* conduit à une contradiction et il achève son ouvrage en affirmant que *l'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car elle répugne à la nature de la ligne droite*.

Lambert publie en 1766 la *Théorie der Parallelinien* (Théorie des Parallèles), il considère le quadrilatère à trois angles droits et après avoir éliminé *l'hypothèse du quatrième angle obtus* qui contredit le second

postulat, il étudie systématiquement les conséquences de *l'hypothèse du quatrième angle aigu*, ce qui le conduit à énoncer plusieurs propriétés géométriques, ainsi il montre que la somme des angles d'un triangle est plus petite que deux droits, la différence étant proportionnelle à l'aire du triangle; d'autre part développant la trigonométrie et comparant les formules qu'il obtient à celles de la trigonométrie sphérique, il remarque que la *géométrie de l'angle aigu* est celle d'une sphère de rayon imaginaire, la géométrie de l'angle obtus étant celle de la sphère usuelle.

Lambert est ainsi virtuellement en possession d'une théorie plus générale que la géométrie euclidienne mais il ne peut en prendre conscience; si le modèle de la sphère imaginaire assure la cohérence logique de sa construction, la géométrie reste pour lui, homme du XVIII<sup>e</sup> siècle, liée à l'espace physique. La vérité que l'on reconnaît à la construction euclidienne amène à confondre la part d'empirisme et la part de rationalité de cette construction, les principes y sont des vérités et le problème des parallèles (le *scandale de la géométrie* dira Dalember) est essentiellement celui de l'absence de démonstration d'un énoncé qui, quoique non évident, ne peut être que vrai.

Après Lambert, plusieurs géomètres feront des constructions analogues [Bonola], mais la géométrie non-euclidienne proprement dite ne prendra naissance que lorsqu'on saura concevoir comme géométrie possible de l'espace usuel une autre que celle définie par le corpus euclidien. Ce sera l'œuvre de Gauss, Bolyai et Lobatchevski.

Rappelons ici les nombreuses démonstrations de Legendre de l'énoncé, équivalent au cinquième postulat, qui affirme que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, démonstrations qui jalonnent les diverses éditions de ses *Eléments de Géométrie* (cf. I n° 7) et qu'il résumera à la fin de sa vie en 1833 dans un mémoire à l'Académie Royale des Sciences de Paris. Ces démonstrations montrent encore une fois l'importance du caractère physique de la géométrie (science de la mesure de l'étendue comme le rappelle Legendre) et souligne la confusion qui s'est installée autour de la tradition euclidienne où le discours rationnel des *Eléments*, par son exemplarité, a fini par occulter le caractère empirique qui le sous-tend.

### 3. Les géométries non-euclidiennes

Il faudra une réflexion sur les origines empiriques de la géométrie pour que s'exprime la possibilité d'une géométrie distincte du corpus euclidien.

*Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi la géométrie ne peut être mise à*

*côté de l'arithmétique, qui est de nature a priori, mais plutôt de la mécanique* écrit Gauss en 1817.

Et quelques années plus tard, Lobatchevski examinant les rapports entre l'expérience et la construction rationnelle de la géométrie, écrit dans l'introduction aux *Nouveaux Principes de la Géométrie* (1838).

*En réalité dans la nature nous ne connaissons que le mouvement, c'est lui qui rend possibles les perceptions des sens. Tous les autres concepts, par exemple ceux de la Géométrie, sont produits artificiellement par notre esprit et tirés des propriétés du mouvement, et pour cette raison, l'espace lui-même, pris à part, n'existe pas pour nous. Cela étant, notre esprit ne trouve aucune contradiction à admettre que certaines formes de la nature suivent une géométrie, et d'autres leur géométrie propre.*

Il est remarquable que les fondateurs de la géométrie non-euclidienne qui ont chacun travaillé indépendamment des deux autres aient eu des démarches analogues tant sur le plan proprement mathématique que sur le plan philosophique.

Sur le plan mathématique leur démarche est euclidienne quant à la méthode : raisonnement s'appuyant sur les figures, c'est-à-dire sur l'intuition géométrique, tout en essayant de se dégager de l'intuition usuelle, mais ils y ajoutent une explicitation des propriétés topologiques, implicites chez Euclide parce que évidentes, et l'intervention explicite du mouvement dans les démonstrations.

Reprenant le texte d'Euclide à la proposition 28 du livre I (qui ne dépend pas du cinquième postulat) ils montrent la possibilité d'une bifurcation suivant que l'on admet ou non l'unicité de la parallèle menée à une droite par un point non situé sur cette droite (l'existence étant assurée par la proposition 28) reconnaissant le caractère non-contradictoire de chacune des théories qu'ils développent; ce caractère non-contradictoire est d'ailleurs explicité par Lobatchevski dans un article de 1837, *La Géométrie imaginaire*, dans lequel il montre la possibilité de bifurcation à partir de calculs trigonométriques.

La géométrie non-euclidienne, ainsi nommée par Gauss à cause des propriétés étranges qu'il y trouve, sera longtemps critiquée comme absurde, notamment par Cayley qui ne comprendra jamais vraiment le lien entre la géométrie de Lobatchevski et ses propres constructions malgré les remarques de Klein (cf. III n° 9 et IV n° 5).

#### 4. *L'approche différentielle*

En 1827, Gauss publie les *Recherches sur les Surfaces courbes* dans lesquelles il développe la théorie infinitésimale des surfaces; ayant défini la notion d'*élément de longueur* d'une surface (le  $ds^2$  de la géométrie

différentielle d'aujourd'hui) il définit les propriétés absolues de la surface comme celles qui ne dépendent que de l'élément de longueur, ainsi les *géodésiques* lignes de plus courte distance entre deux points, ainsi la *courbure* définie à partir de la forme de la surface mais dont Gauss montre qu'elle ne dépend que de l'élément de longueur, théorème remarquable qui conduit à la *géométrie intrinsèque des surfaces*; étudiant les triangles géodésiques, Gauss montre alors une relation entre la somme des angles d'un tel triangle, son aire et la courbure de la surface; cette relation semble liée, bien que Gauss n'ait jamais rien voulu publier sur le sujet, à ses recherches sur la géométrie non-euclidienne.

Et c'est en s'appuyant sur les travaux de Gauss que Beltrami montrera en 1868 que les surfaces à courbure constante négative réalisent au moins localement la géométrie de Lobatchevski, exhibant pour la première fois un *modèle euclidien* de la géométrie non-euclidienne; Hilbert montrera en 1901 qu'une surface à courbure constante négative présente des singularités, on ne peut donc avoir de représentation globale du plan lobatchevskien comme surface de l'espace euclidien.

En 1854, Riemann s'appuyant sur les travaux de Gauss écrit son texte sur les *Hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie*, l'un des textes les plus importants de l'histoire de la géométrie; il y développe une théorie des espaces multidimensionnels munis d'un élément de longueur (les *variétés riemanniennes* d'aujourd'hui), définissant une notion de courbure qui dans le cas des surfaces correspond à la courbure de Gauss; parmi ces espaces, Riemann distingue les espaces à courbure constante, espaces dans lesquels il y a suffisamment de mouvements, la géométrie d'un tel espace étant déterminée par sa courbure; un espace à courbure nulle étant alors un espace euclidien (au moins localement). Et Beltrami, en 1869, montrera que les espaces à courbure constante négative correspondent à la géométrie de Gauss-Bolyai-Lobatchevski tandis que les espaces à courbure constante positive correspondent à la géométrie sphérique. Ainsi on retrouve les trois géométries de Lambert, la géométrie de l'angle droit, la géométrie de l'angle aigu et la géométrie de l'angle obtus dans le cadre général des espaces à courbure constante.

La physique n'est pas absente du texte de Riemann, d'une part le texte, à la fois abstrait et intuitif, propose bien plus un élargissement de l'intuition, y compris l'intuition visuelle, qu'une définition formelle des espaces multidimensionnels, d'autre part il pose le problème de la détermination de la géométrie de l'espace physique, l'expérience seule permettant de décider. Ainsi se met en place la séparation entre géométrie mathématique d'une part, étude des propriétés des espaces, et géométrie physique, étude des propriétés de l'espace physique.

### 5. Les modèles euclidiens de la géométrie non-euclidienne

En 1871 Félix Klein remarquait que les trois modèles de géométrie qu'il nomme respectivement *parabolique* (la géométrie euclidienne), *hyperbolique* (la géométrie de Lobatchevski) et *elliptique* (la géométrie sphérique) se rattachent aux constructions de Cayley; de façon précise, une conique étant donné dans le plan, l'absolue du plan, on lui associe une notion de distance (cf. III, n° 9), lorsque cette conique est imaginaire, la géométrie correspondante n'est autre que la géométrie elliptique, lorsque cette conique est une ellipse réelle, la géométrie ainsi définie sur l'ensemble des points intérieurs à l'ellipse n'est autre que la géométrie hyperbolique, enfin lorsque la conique dégénère en les deux points cycliques on obtient la géométrie euclidienne. Une construction analogue peut être définie dans l'espace, une quadrique absolue étant donnée, la géométrie euclidienne étant définie lorsque la quadrique absolue dégénère en la courbe ombilicale. Ces remarques permettront par la suite de faire entrer la géométrie non-euclidienne dans le cadre du *Programme d'Erlangen*, le groupe principal (qui n'est autre que le groupe des mouvements dont parle Riemann dans son article) n'étant autre que le sous-groupe des transformations homographiques du plan (resp. : de l'espace) qui laisse globalement invariante la conique absolue (resp. : la quadrique absolue).

Les constructions de Beltrami et de Cayley-Klein vont ainsi apporter une preuve relative de la cohérence des constructions non-euclidiennes de Gauss, Bolyai, Lobatchevski; en effet une contradiction de la géométrie non-euclidienne impliquerait une contradiction de la géométrie euclidienne; le problème se pose alors de la cohérence de la géométrie euclidienne, nous y reviendrons dans la dernière partie de cet appendice.

Signalons enfin le modèle de la géométrie de Lobatchevski défini par Poincaré en liaison avec le problème de l'uniformisation des courbes algébriques, l'une des premières utilisations de la géométrie non-euclidienne dans un autre domaine des mathématiques (Lobatchevski avait déjà utilisé sa construction pour des calculs d'intégrales).

### 6. Le problème des géométries non-euclidiennes

La découverte (ou l'invention!) des géométries non-euclidiennes, la démonstration via les modèles euclidiens de leur cohérence, vont poser un double problème, problème d'ordre logique et problème d'ordre physique, conduisant ainsi vers de nouvelles conceptions de la géométrie.

Problème logique d'abord, si plusieurs géométries sont possibles, l'intuition géométrique qui guidait le raisonnement euclidien perd sa validité (au moins sur le plan de la logique pure) et dans ces conditions la question

se pose de ce qui assure la validité du raisonnement géométrique, en particulier qu'est-ce qui assure que l'on ne rencontrera pas de contradiction dans le développement d'une théorie géométrique; les modèles euclidiens renvoient la cohérence des géométries non-euclidiennes à la cohérence de la géométrie euclidienne et posent ainsi le problème de la cohérence de la géométrie euclidienne elle-même, cohérence qui est à chercher dans le développement interne de la théorie et non plus dans la croyance fondatrice de toute science (qui est d'ordre métaphysique, voire théologique) que le monde est cohérent.

Problème d'ordre physique ensuite, quelle est parmi ces diverses constructions géométriques la *vraie* géométrie (pour reprendre une expression de Gauss), celle de la nature, à supposer qu'une telle géométrie existe? ou bien faut-il prendre la position de Lobatchevski rappelée ci-dessus (cf. n° 3) qui conduit à choisir parmi la multiplicité des géométries en fonction des objets étudiés? Ce sera l'un des grands débats du XIX<sup>e</sup> siècle qui aboutira à la théorie de la Relativité Générale d'Einstein.

Ainsi se distinguaient géométrie mathématique (qui est l'étude des espaces) et géométrie physique (qui reste la théorie de l'espace physique), distinction explicitée par Einstein dans *la Géométrie et l'Expérience* (1921) et que Reichenbach résumera ainsi [Reichenbach].

*Les mathématiques révèlent les espaces possibles, la physique décide lequel parmi eux correspond à l'espace physique.*

## IV. AXIOMATIQUE ET GÉOMÉTRIE

*Ils ont cru que raisonner en forme c'était raisonner juste.*

Dalembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie.*

### 1. Une crise du raisonnement

Avec la multiplicité des géométries, c'étaient moins les principes que les conditions de validité du raisonnement géométrique qui étaient mis en cause, et par conséquent se posait le problème d'une redéfinition des conditions du raisonnement géométrique.

Mais la géométrie n'était pas le seul lieu de remise en cause, ainsi l'analyse qui, malgré des bases floues, s'était développée au XVIII<sup>e</sup> siècle en liaison avec la physique mathématique : tant que le lien entre les solutions des équations différentielles et les phénomènes physiques paraissait clairement défini et que les solutions étaient *calculables*, la validité des résultats était assurée confortant l'adéquation entre les théories de l'analyse et les phénomènes physiques (ainsi le lien entre les propriétés d'unicité des solutions et les conceptions déterministes), mais avec l'apparition d'équations différentielles pour lesquelles le calcul ne suffisait plus pour assurer l'existence de solutions et de nouveaux types de représentations de ces solutions (séries de Fourier), on était amené à redéfinir la notion de fonction et les opérations du calcul infinitésimal; en outre la mise en place de la théorie des ensembles pour les besoins de l'analyse allait amener de nouvelles difficultés avec les classiques *paradoxes* qui mettaient en question les principes mêmes des techniques mathématiques [Cavailles].

Ainsi se posait le problème d'une redéfinition globale des mathématiques, redéfinition des objets et redéfinition des méthodes, mettant fin à ce qu'on a appelé la *crise* des fondements, de la fin du siècle dernier au début de ce siècle; ce n'est pas le lieu de raconter l'histoire de cette crise, renvoyant à une bibliographie nécessairement partielle, voire partielle [Cavailles] [Gonseth 2]; nous nous bornerons à parler de la solution qui s'est imposée à la fois par son ampleur et son efficacité, savoir, le formalisme de Hilbert, nous restreignant au cadre de la géométrie; pour un exposé des méthodes formalistes, nous renvoyons au texte sur *l'Architecture des Mathématiques* de Bourbaki [Bourbaki 1].

## 2. Axiomatique et géométrie

Ce qui était remis en cause en fait était le caractère empirique des objets de la géométrie, les représentations mentales chargées de sens, l'intuition qui accompagnait le raisonnement; tout cela qui avait joué un rôle dans l'édification de la géométrie, le corpus euclidien, mais aussi la géométrie projective et même les géométries non-euclidiennes, constituait dans l'état des mathématiques de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle un blocage et il fallait savoir passer outre. Ce que proposait Hilbert, c'était de renoncer à tout empirisme, à toute intuition, d'éliminer les représentations mentales et par conséquent d'éliminer tout sens autre que celui des opérations techniques qu'on effectuait sur les objets mathématiques réduit à n'être que des signes.

En 1899, Hilbert publiant les *Grundlagen der Geometrie* (les fondements de la géométrie) donnait une construction axiomatique de la géométrie; après avoir introduit les termes primitifs, *trois systèmes de choses*, qu'il nomme respectivement points, droites et plans (mais du point de vue théorique les noms importent peu), Hilbert énonce les relations primitives entre les termes, vingt-trois axiomes qu'il répartit en cinq groupes correspondant aux différents types de relations : appartenance, ordre, congruence, parallélisme, continuité, mais ici encore les termes désignant ces relations ne renvoient, sur le plan théorique, à aucune image antérieure. Seules interviennent dans le développement de la géométrie les règles logiques qui régissent l'usage des termes et des énoncés, ainsi disparaît tout recours à l'intuition et à la signification des termes et des énoncés, une démonstration ne s'appuie que sur les axiomes, les propositions antérieurement démontrés et les règles logiques. Ce qui implique la mise en place d'une grammaire explicite des règles logiques, et c'est cette nécessité grammaticale qui conduira aux langages formalisés, langages définis par un système de signes et de règles d'utilisation de ces signes.

L'axiomatique formelle ainsi définie se distingue radicalement de l'axiomatique euclidienne fondée sur des principes *évidents* régissant des objets d'origine empirique et permettant par le moyen du raisonnement la découverte de nouvelles *vérités*; dans l'axiomatique hilbertienne on ne peut parler de vérité d'un énoncé, seulement de sa validité à l'intérieur d'un système axiomatique défini.

Ceci pose de façon nouvelle le problème de la cohérence d'un système axiomatique, d'une part le problème de l'indépendance des axiomes, d'autre part le problème de la non-contradiction.

En ce qui concerne l'axiomatique de la géométrie, Hilbert montre l'indépendance des axiomes en construisant des systèmes où un axiome est remplacé par sa négation, ce qui le conduit à définir de nouvelles géométries, nous renvoyons ici à l'ouvrage de Hilbert [Hilbert].



En ce qui concerne le problème de la non-contradiction, Hilbert construit un *modèle numérique* de son système (qui n'est autre que la géométrie analytique usuelle), ainsi son axiomatique est cohérente si l'arithmétique est non contradictoire. Ceci renvoie à la construction axiomatique de l'arithmétique et à sa non-contradiction. Ce dernier problème sera à l'origine de nombreux travaux qui s'achèveront avec Gödel montrant en 1931 qu'on ne peut prouver de façon interne la non-contradiction d'une théorie formelle. Le théorème de Gödel montrait ainsi, sur le plan technique, les limites internes du formalisme, sans cependant mettre en danger les méthodes formalistes dont l'efficacité dans de nombreux domaines des mathématiques, en particulier l'algèbre moderne, ne pouvait être contestée, efficacité qui d'une certaine façon se situait en dehors de la problématique de la non-contradiction.

Sur le plan philosophique le théorème de Gödel ne fait qu'apporter une caution technique à la vieille idée aristotélicienne de la nécessité de principes premiers indémontrables au fondement de la connaissance, idée que réaffirmait quelques années avant que Gödel ne démontre son théorème, Ferdinand Gonseth écrivant dans *Les Fondements des Mathématiques* (1926).

*Les axiomes, eux-mêmes, si l'on remonte assez haut, échappent à l'empire de la logique formelle; il nous est, en particulier, impossible de démontrer logiquement qu'un système quelconque d'axiomes est tel que jamais il ne puisse conduire à une contradiction.*

### 3. L'axiomatique de la géométrie projective

Le problème d'une construction autonome de la géométrie projective (c'est-à-dire indépendant de toute relation métrique) avait été posé par Von Staudt qui n'avait pas su le résoudre complètement (cf. II n° 10), mais les travaux de Von Staudt seront le point de départ de constructions axiomatiques ultérieures parmi lesquelles nous avons cité celle de Enriques et celle de Veblen-Young.

Enriques publia en 1898 ses *Lezioni di geometria proiettiva* (Leçons de géométrie projective) qui seront ultérieurement publiées en français [Enriques], il y développe une axiomatique non formaliste, écrivant dans l'introduction.

*Le mathématicien étudie ces propriétés (les propriétés géométriques) de deux manières*

*en exerçant son intuition sur les concepts spatiaux*

*en déduisant par un raisonnement logique de nouvelles propriétés de celles que donne l'intuition : on dit que les nouvelles propriétés obtenues sont démontrées.*

*On appelle postulats les propriétés géométriques données immédiatement par l'intuition; théorèmes les propriétés qui s'en déduisent logiquement, et s'appuient par suite immédiatement sur l'intuition*

texte qui rappelle la conception de Legendre (cf. I n° 7).

Enriques se propose alors d'énoncer des postulats qui lui permettent de traiter *a priori* les éléments à l'infini comme les éléments usuels, il définit alors les *formes géométriques fondamentales* : formes de première espèce (droite ponctuelle, faisceau des plans passant par une droite, faisceau des droites d'un plan passant par un point), formes de seconde espèce (ensemble des points d'un plan, ensemble des droites d'un plan, étoile des plans passant par un point, étoile des droites passant par un point), formes de troisième espèce (ensemble des points de l'espace, ensemble des plans de l'espace) ce qui lui permet d'énoncer six postulats définissant les relations d'incidence entre formes, l'ordre sur les formes de première espèce, et une propriété de continuité de ces formes, évitant ainsi les obstacles auxquels se heurtait Von Staudt; il peut alors définir les quaterns harmoniques à la façon de Von Staudt, les transformations projectives, les coniques à partir des polarités (transformations corrélatives involutives) et ainsi développer la géométrie projective; cependant pour étudier les propriétés métriques il fait appel à la géométrie élémentaire sous-jacente à sa construction ce qui limite la portée de son axiomatique.

Veblen et Young en publiant en 1910 leur ouvrage *Projective Geometry* développent un point de vue proche de celui d'Enriques mais vont faire appel à la théorie des groupes et au *Programme d'Erlangen*; ceci leur permet de définir les propriétés métriques sans faire appel à la géométrie élémentaire, de façon précise la géométrie métrique plane est définie par la donnée d'une droite (la droite de l'infini) et d'une involution elliptique sur cette droite (involution sans points doubles réels) définissant l'orthogonalité; on définit de même les géométries de Cayley. D'autre part, reprenant une construction de Von Staudt, Veblen et Young construisent de façon purement géométrique les *coordonnées* permettant une représentation analytique de la géométrie qu'ils ont construite; l'ensemble des nombres et les opérations sur iceux sont alors définis à partir des homographies de la droite projective, construction remarquable qui est liée au théorème de Desargues sur les triangles homologues et qui montre l'importance de ce théorème quant aux fondements de la géométrie.

La démonstration classique du théorème de Desargues repose soit sur une construction auxiliaire dans l'espace (la configuration de Desargues s'interprétant comme perspective de perspective), soit sur le théorème de Menelaüs ou, ce qui revient au même, la méthode des coordonnées. Hilbert avait montré dans les *Grundlagen der Geometrie* que les relations

d'incidence (dans le plan) ne suffisaient pas pour démontrer le théorème de Desargues, en fait il avait construit un plan satisfaisant aux axiomes d'incidence dans lequel le théorème de Desargues n'était pas vérifié (plan non desarguézien). Et de fait Hilbert montrait que le théorème de Desargues était équivalent d'une part à la possibilité pour un plan d'être plongé dans l'espace à trois dimensions, d'autre part à l'existence d'une représentation par des coordonnées.

Tout ceci se précisera dans une construction générale d'Emil Artin que celui-ci a exposée dans un ouvrage paru en 1957 *Geometric Algebra* qui sera traduit en français en 1962 [Artin]. Se plaçant dans un cadre formaliste, Emil Artin définit une géométrie affine plane par la donnée d'axiomes d'incidence et d'opérations (les dilatations) satisfaisant à des axiomes convenables, les dilatations (qui sont les translations et les homothéties de la géométrie élémentaire) permettant sous certaines conditions de définir un corps et par conséquent une représentation analytique; le théorème de Desargues est alors lié à ces conditions. Ce faisant Artin montrait comment une condition *purement géométrique* conduisait à des représentations *numériques* reliant ainsi les axiomatiques géométriques aux constructions utilisant l'algèbre linéaire [Artin] [Coxeter] [Hartshorne].

#### 4. Algèbre linéaire et géométrie

L'intervention du calcul linéaire en géométrie commence avec la méthode des coordonnées où une grande partie des problèmes se ramènent à la résolution d'équations linéaires, ce qui d'une part précise les conditions d'existence et d'unité des solutions de ces problèmes et d'autre part conduit à une meilleure définition des opérations linéaires, ainsi la détermination de courbes de degré donné passant par des points donnés et le classique *paradoxe* de Cramer sur les cubiques planes, une cubique plane étant déterminée par la donnée de neuf de ses points, et deux cubiques planes se coupant en neuf points par lesquels passe une famille linéaire de cubiques.

Ce caractère linéaire se précise avec le développement des méthodes analytiques de la géométrie projective, le caractère linéaire des équations mais aussi les transformations projectives représentées par des transformations linéaires sur les coordonnées, avec Möbius, Plücker, Cayley, Klein (cf. II n° 11), ce qui conduira à la définition des espaces numériques et à l'étude de leurs propriétés géométriques; rappelons aussi la terminologie longtemps ambiguë où l'expression *transformation linéaire* désigne aussi bien les transformations ainsi nommées aujourd'hui que les transformations projectives.

D'autre part se développe tout au long du XIX<sup>e</sup> siècle un *calcul géométrique* savoir le calcul vectoriel; si d'une certaine manière ce calcul

réalise la vieille idée leibnizienne de la réduction du raisonnement au calcul, c'est la représentation géométrique des nombres complexes qui en constitue le point de départ, représentation déjà utilisée au XVII<sup>e</sup> siècle par Wallis qui associe à tout nombre imaginaire un point du plan, représentation qui, avec Wessel (1799), Argand (1806) et Gauss (1831) s'étend aux opérations. Cette représentation assurait la validité du calcul sur les imaginaires à une époque où la géométrie restait encore (pour peu de temps il est vrai!) le lieu de la rigueur mathématique, en même temps qu'elle ouvrait vers de nouvelles méthodes d'étude de la géométrie plane (les fameuses *applications géométriques* des nombres complexes); ceci conduisait les géomètres à rechercher un calcul analogue pour l'espace, ce que réalisera Hamilton en 1843 avec la théorie des quaternions.

A côté de ce calcul des nombres complexes et des quaternions qui se rattachait d'une certaine façon au numérique dont il étendait le domaine, se mettait en place le calcul vectoriel proprement dit; en 1827 Möbius développait le calcul barycentrique dans son ouvrage *Barycentrische Calcul*, en 1835 Bellavitis développait le calcul des équipollences, mais c'est Grassmann qui développera le calcul vectoriel sous sa forme la plus générale; après avoir introduit les opérations vectorielles pour les besoins de la théorie des marées qu'il étudie en 1839, il développera son calcul en 1844 dans son *Ausdehnungslehre*, ouvrage de lecture difficile qui restera longtemps méconnu; une seconde édition paraîtra en 1862 et l'œuvre de Grassmann sera peu à peu diffusée dans les années qui suivent.

Ce n'est pas ici le lieu d'une histoire exhaustive du développement du calcul vectoriel, nous renvoyons à l'ouvrage de Crowe [Crowe] ainsi qu'à l'exposé introductif d'Eliane Cousquer [Cousquer] dans *La Rigueur et le Calcul*.

Le calcul vectoriel se développera dans la seconde partie du XIX<sup>e</sup> siècle en liaison avec la physique mathématique, ainsi Grassmann, mais aussi Maxwell qui l'utilisera dans l'étude des phénomènes électromagnétiques et Clifford qui l'utilisera en mécanique. Le physicien Gibbs l'enseignera à partir de 1879 et son cours sera publié par Wilson en 1901.

En France, le calcul vectoriel s'introduira dans l'enseignement via la mécanique et la physique, ainsi Appell l'introduit comme chapitre préliminaire de son *Traité de Mécanique Rationnelle* (1<sup>re</sup> édition 1893) et Bruhat l'utilise dans son *Cours de Physique Générale* qui paraît autour du milieu de ce siècle. Son introduction dans l'enseignement mathématique proprement dit sera plus lente et s'effacera avec la réforme de 1970, remplacé par l'algèbre linéaire. Citons cependant parmi les principaux ouvrages consacrés au calcul vectoriel, les *Leçons de Géométrie vectorielle* de Bouligand (1<sup>re</sup> éd. 1924) et le *Calcul vectoriel* de Bricard (1<sup>re</sup> éd. 1929).

Il nous faut ici remarquer que le calcul linéaire et le calcul vectoriel ont des histoires distinctes; même si des méthodes *linéaires* apparaissent dans le développement du calcul vectoriel, il faudra attendre la fin du XIX<sup>e</sup> siècle pour que le lien entre ces deux domaines des mathématiques soit explicité; ainsi Peano publie en 1888 un *Calcolo geometrico* inspiré des travaux de Grassmann dans lequel il définit les *systèmes linéaires* (les espaces vectoriels d'aujourd'hui) et les applications linéaires; plus tard Hermann Weyl dans un ouvrage consacré à la physique mathématique *Raum, Zeit, Materie* (Espace, Temps, Matière) qu'il publie en 1918, construit la géométrie à partir des espaces vectoriels, la géométrie euclidienne étant définie par la donnée d'une forme quadratique définie positive; c'est sur cet ouvrage de Weyl que s'appuie Bouligand dans ses *Leçons de Géométrie vectorielle* explicitant l'aspect *linéaire* du calcul vectoriel.

Cette linéarisation de la géométrie, qu'elle provienne des tendances algébriques à la Cayley ou des développements du calcul vectoriel, conduira à la *présentation structurale* telle qu'elle est exposée dans [Bourbaki 2] [Dieudonné 1], présentation qui réduit la géométrie à n'être plus qu'un chapitre de l'algèbre linéaire.

Mais si cette dernière conception se justifie d'un point de vue structural, elle ne recouvre qu'une partie du domaine géométrique; celui-ci se définit moins par les structures qui y interviennent que par les grandes problématiques autour desquels il se construit, problématiques issues des situations spatiales définissant la géométrie élémentaire et la première géométrie projective, problématiques liées à l'étude des espaces de la géométrie contemporaine. Si le formalisme à la Hilbert se montre fécond, c'est bien parce qu'il fournit des méthodes d'étude de ces problématiques, qu'il permet de nouvelles approches, fécondité qui se manifeste autant par la résolution de problèmes déjà posés que par l'émergence de nouveaux problèmes. C'est ainsi qu'on pourrait lire les deux traités cités de Berger et de Tisseron (cf. I, n° 7) dont nous avons dit qu'ils participent de la seconde face du développement scientifique, la reconstruction du réel à partir du rationnel. Mais c'est bien parce que la géométrie contemporaine prolonge cette première géométrie d'origine empirique que nous ont léguée les Grecs qu'elle permet avec une efficacité certaine cette reconstruction du réel, reconstruction qui dépasse le simple cadre de la rationalité en ce sens qu'elle permet cet élargissement de l'intuition que nous proposaient Riemann dans son texte de 1854 et Klein ouvrant la voie au point de vue structural avec le *Programme d'Erlangen*. Dans cette même optique nous citerons la *Géométrie Projective* récemment publié par Samuel (1986).

Et nous terminerons ce trop bref appendice historique en revenant à cette domination universelle de la géométrie dont parle Dieudonné.

La linéarisation de la géométrie permet en retour une géométrisation du linéaire et par cela même une géométrisation des divers domaines de la connaissance où intervient le linéaire. Les concepts linéaires interviennent dans divers domaines des mathématiques ou de la physique (pour ne citer que ceux-ci), ainsi la théorie des équations différentielles linéaires, la théorie ondulatoire en physique avec le principe de superposition des ondes et les problèmes spectraux qui lui sont associés, la notion de covariance qu'on peut considérer comme un produit scalaire (indéfini) sur l'espace des variables aléatoires... C'est la prise de conscience par les mathématiciens d'un caractère commun à ces divers domaines qui a conduit à l'algèbre linéaire telle que nous la connaissons aujourd'hui, construction unificatrice qui continue l'idéal d'une méthode universelle que l'on retrouve tout au long de l'histoire des mathématiques; la représentation géométrique de l'algèbre linéaire issue de la représentation linéaire de la géométrie (et le terme même *d'espace vectoriel* en témoigne) a conduit alors à cette géométrisation universelle, nouveau principe unificateur induisant les transferts d'intuition dont nous avons déjà parlé qui sont autant que la puissance du raisonnement formel, l'un des aspects du développement des mathématiques contemporaines si tant est que, comme l'explique Gonseth, *l'objet des mathématiques n'est pas tant de raisonner que de gagner du terrain* [Gonseth 1].

## ÉPILOGUE

*Quiconque recherche le nom seul est égaré  
et perdu*

Rûmi.

Si l'on peut voir la science comme la construction d'une représentation rationnelle du monde par l'esprit humain, construction dont les mathématiques constituent l'un des aspects les plus importants (même si l'on peut douter de leur universalité) on ne saurait oublier que cette rationalité se construit sur un donné, donné qui n'est autre que le résultat du heurt de l'homme avec le *réel*. Et l'appropriation du savoir, qui reste l'un des objectifs de l'enseignement, se construit elle aussi sur ce donné; c'est ainsi que la géométrie élémentaire, cette partie de la science qui se situe au carrefour des mathématiques et de la physique, construction qui fut longtemps le modèle de la physique mathématique, reste encore aujourd'hui la voie d'accès au savoir géométrique contemporain; les représentations géométriques d'aujourd'hui se construisent sur cette géométrie première et sans elle les aspects métaphoriques de ce langage universel qu'est devenu le langage géométrique perdent tout sens.

Une initiation à la géométrie dont l'un des objectifs est l'accès au savoir contemporain peut alors se définir comme le cheminement qui conduit de cette géométrie première aux constructions sophistiquées des mathématiques contemporaines, moins pour suivre une reconstruction historique qui n'a pas lieu d'être que pour démêler les fils directeurs et expliciter les problématiques qui permettent de comprendre les enjeux et les significations du savoir d'aujourd'hui.

Rudolf Bkouche  
Lille, mai 1987

## INDEX DES NOMS CITÉS

Alberti Leon Battista (1404-1472) : 456.  
 Apollonius (-262 - -200?) : 445, 446, 448, 449, 453, 459, 460.  
 Appell Paul (1855-1930) : 489.  
 Argand Jean Robert (1768-1822) : 489.  
 Aristote (-384 - -322) : 442.  
 Arnauld Antoine (1612-1684) : 451.

Bellavitis Giusto (1803-1880) : 489.  
 Beltrami Eugenio (1835-1899) : 481, 482.  
 Berger Marcel : 454, 490.  
 Bolyai Janos (1802-1860) : 479, 481, 482.  
 Bonola Roberto : 477, 479.  
 Borel Émile (1871-1956) : 452.  
 Bosse Abraham (1602-1676) : 460.  
 Bouligand Georges : 489, 490.  
 Bourbaki Nicolas : 453, 476, 484, 490.  
 Bourlet Carlo : 452.  
 Braudel Fernand (1902-1985) : 437.  
 Brianchon Charles (1783-1864) : 466.  
 Bricard Raoul (1870-1944) : 489.  
 Bruhat Georges : 489.  
 Brunelleschi Filippo (1377-1446) : 456.  
 Brunschvicg Léon (1869-1944) : 455.

Caire Daniel : 453.  
 Camus M. : 451.  
 Carnot Lazare (1753-1823) : 463, 467.  
 Carrega Jean-Claude : 443, 453.  
 Cartan Élie (1869-1951) : 473.  
 Cauchy Augustin (1789-1857) : 467.  
 Cavailles Jean (1903-1944) : 467.  
 Cayley Arthur (1821-1895) : 471, 473, 475, 480, 482, 487, 488, 490.  
 Ceva Giovanni (1648-1737) : 463.  
 Chasles Michel (1793-1880) : 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470.  
 Clairaut Alexis Claude (1713-1765) : 450, 451, 454.

Clifford William Kingdon (1845-1879) : 489.  
 Comberousse Charles : 452.  
 Condillac Étienne (1715-1780) : 451.  
 Coolidge Julian : 445, 449, 471, 473.  
 Cousquer Éliane : 489.  
 Coxeter H. S. M. : 454, 488.  
 Cramer Gabriel (1704-1752) : 488.  
 Crowe Michael : 489.

Dalembert Jean le Rond (1717-1783) : 479, 484.  
 Damish Hubert : 456, 460.  
 Dandelin Germain (1794-1847) : 453, 468.  
 Deltheil Robert : 453.  
 Desargues Girard (1591-1662) : 446, 459, 460, 461, 464, 469, 472, 487, 488.  
 Descartes René (1596-1650) : 445, 446, 447, 448, 464, 473.  
 Dieudonné Jean : 453, 473, 476, 490, 491.  
 Dürer Albrecht (1471-1528) : 456, 458.

Einstein Albert (1879-1955) : 483.  
 Enriques Federigo (1871-1946) : 469, 472, 473, 486, 487.  
 Euclide (III<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) : 440, 441, 442, 443, 445, 446, 450, 451, 452, 464, 477, 480.  
 Eudoxe (-400 - -347) : 442.  
 Eutocius (VI<sup>e</sup> siècle) : 443, 444, 445.

Fermat Pierre (1601-1665) : 445, 446, 447, 448.  
 Flocon Albert : 456, 460.  
 Francastel Pierre : 455, 456.  
 Fourier Jean-Baptiste Joseph (1768-1830) : 484.

Galois Évariste (1811-1832) : 443, 474, 475.  
 Gauss Carl Friedrich (1777-1855) : 443, 479, 480, 481, 482, 483, 489.



Gergonne Joseph Diaz (1771-1859) : 466, 467.  
 Gibbs Josiah Williard (1839-1903) : 489.  
 Godeaux Lucien : 469.  
 Gödel Kurt (1906-1978) : 486.  
 Gonseth Ferdinand : 484, 486, 491.  
 Grassmann Hermann (1809-1877) : 489, 490.  
 Guido Ubaldo del Monte (1545-1607) : 458, 459.

Hadamard Jacques (1865-1963) : 452, 453.  
 Hamilton William Rowan (1805-1865) : 489.  
 Hartshorne Robin : 488.  
 Haytham (Al) (965-1040) : 478.  
 Heath Thomas : 442, 445, 446, 477.  
 Hémery : 453.  
 Hilbert David (1862-1943) : 440, 449, 454, 472, 481, 484, 485, 486, 487, 488, 490.  
 Hoüel Jules : 442, 452.

Jabès Edmond : 477.  
 Jaouiche Khalil : 477.  
 Jordan Camille (1838-1921) : 474.

Khayyam Omar (Al) (1045-1130) : 446, 478.  
 Khwarizmi Mahammed (Al) (780?-830?) : 446.

Klein Felix (1849-1925) : 440, 443, 449, 453, 471, 473, 474, 475, 476, 480, 482, 488, 490.  
 Kline Morris : 449, 471, 473.

Lacroix Sylvestre François (1765-1843) : 437, 451, 452.  
 Lagrange Joseph Louis (1736-1813) : 474.  
 Laguerre Edmond (1834-1886) : 468, 470, 471.  
 La Hire Philippe (1640-1718) : 460.  
 Lambert Johann Heinrich (1728-1777) : 460, 461, 462, 478, 479, 481.  
 Laurent Roger : 461, 462.  
 Lebesgue Henri (1875-1941) : 443, 453.  
 Lebossé : 453.  
 Legendre Adrien Marie (1752-1833) : 441, 451, 452, 479, 487.  
 Leibniz Wilhelm Gottfried (1646-1716) : 448, 460.  
 Leonardo da Vinci (1452-1519) : 456.  
 Lie Sophus (1842-1899) : 474.  
 Lobatchevski Nicolas (1792-1856) : 471, 479, 480, 481, 482, 483.

Mac Laurin Colin (1698-1741) : 464.  
 Mascheroni Lorenzo (1750-1800) : 453.  
 Maxwell James Clerk (1831-1879) : 489.  
 Ménechme (iv<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) : 444.  
 Ménélaüs (i<sup>er</sup> siècle) : 459, 463, 487.  
 Méray Charles (1835-1911) : 449, 452.  
 Möbius August Ferdinand (1790-1868) : 473, 475, 488, 489.  
 Monge Gaspard (1746-1818) : 462, 463.

Neugebauer O. : 439.  
 Newton Isaac (1642-1727) : 448, 449, 464.  
 Nicéron Claude (1601-1664) : 460.  
 Nicomaque de Gérace (i<sup>er</sup> siècle) : 441.

Pascal Blaise (1623-1662) : 460, 466.  
 Panofsky Erwin (1892-1968) : 456.  
 Pappus d'Alexandrie (v<sup>e</sup> siècle) : 443, 445, 447, 464.

Peano Giuseppe (1858-1932) : 490.  
 Peiffer Jeanne : 462.  
 Picard Émile (1856-1941) : 439.  
 Piero della Francesca (1416-1492) : 456.  
 Playfair John (1748-1819) : 477.  
 Plücker Julius (1801-1868) : 467, 471, 473, 488.  
 Poincaré Henri (1854-1912) : 482.  
 Poncelet Jean Victor (1788-1867) : 463, 464, 467, 469, 470, 471, 474.  
 Pont Jean-Claude : 477.  
 Poudra M. : 460.  
 Proclus (412-485) : 477.  
 Pythagore (vi<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) : 441.

Reichenbach Hans (1891-1953) : 483.  
 Rey Abel (1873-1940) : 439, 441, 443.  
 Riemann Bernhart (1826-1867) : 476, 481, 482, 490.  
 Rouché Eugène : 452.  
 Rûmi (1210-1273) : 492.  
 Saccheri Girolamo (1667-1733) : 478.  
 Samuel Pierre : 490.  
 Schoenflies Arthur Moritz (1853-1928) : 452.  
 Senechal Brigitte : 453.  
 Simpson Thomas (1710-1761) : 464.  
 Steiner Jakob (1796-1863) : 463, 469, 470.  
 Stevin Simon (1548-1620) : 458.  
 Sturm Charles (1803-1855) : 469.

Taton René : 456-460.

Taylor Brook (1685-1731) : 460, 461.

Thalès (vr<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) : 452.

Tisseron Claude : 454, 490.

Veblen Oscar (1880-1960) : 472, 473, 486, 487.

Viator Jean Pellerin dit (1445-1524) : 458.

Viète François (1540-1603) : 446.

Vitruve (I<sup>er</sup> siècle avant J.-C.) : 456.

Von Staudt Karl (1798-1867) : 463, 470, 471, 472, 473, 486, 487.

Wallis John (1616-1703) : 448, 478, 489.

Wantzel Pierre Laurent (1814-1897) : 443.

Weierstrass Karl (1816-1897) : 469.

Wessel Caspar (1745-1818) : 489.

Weyl Hermann (1885-1955) : 490.

Wilson Edwin Bilwell : 489.

Young John Wesley (1877-1932) : 472, 473, 486, 487.



## BIBLIOGRAPHIE

- Apollonius, *Les coniques* (traduction Ver Eecke), Paris, Blanchard, 1979.
- Aristote, *Les seconds analytiques* (traduction Tricot), Paris, Vrin, 1979.
- Artin Emil, *Algèbre géométrique* (traduction Lazard), Paris, Gauthier-Villars, 1962.
- Berger Marcel, *Géométrie* (5 volumes), Paris, Cedic/Nathan, 1979.
- Bkouche Rudolf, Euclide, Klein, Hilbert et les autres, in *La rigueur et le calcul*, Paris, Cedic, 1982.
- Bonola Roberto, *Non-euclidean Geometry* (translation by Carslaw), New York, Dover, 1965.
- Bouligand Georges, *Leçons de géométrie vectorielle*, Paris, Vuibert, 1924/1949.
- Bourbaki Nicolas, 1. L'architecture des mathématiques, in *Les grands courants de la pensée mathématique* (1947), Paris, Blanchard, 1962; 2. *Algèbre*, chap. IX « Formes sesquilineaires et formes quadratiques », Paris, Hermann, 1974; 3. *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1974.
- Bricard Raoul, *Le calcul vectoriel*, Paris, Armand Colin, 1929/1950.
- Brunschvicg Léon, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Blanchard, 1912/1972.
- Carrega J.-Claude, *Théorie des corps. La règle et le Compas*, Paris, Hermann, 1981.
- Cavaillès Jean, *Méthode axiomatique et formalisme*, Paris, Hermann, 1937/1981.
- Chasles Michel, 1. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Paris, Gauthier-Villars, 1889; 2. *Traité de géométrie supérieure*, Paris, Gauthier-Villars, 1861/1880.
- Clairaut Alexis-Claude, *Éléments de géométrie*, Laval, Editions Siloé, 1987.
- Coolidge Julian, 1. *A History of Geometrical Methods*, New York, Dover, 1963; 2. *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*, New York, Dover, 1965.
- Cousquer Eliane, Le calcul vectoriel, in *La rigueur et le calcul*, Paris, Cedic, 1982.
- Coxeter H. S. M., *Introduction to Geometry*, New York, John Wiley and Sons, 1969.
- Crowe Michael J., *A History of Vector Analysis*, New York, Dover, 1985.
- Dahan-Dalmedico Amy, Peiffer Jeanne, *Routes et dédales*, Paris, le Seuil, 1986.
- Damish Hubert, *L'origine de la perspective*, Paris, Flammarion, 1987.
- Deltheil Robert, Caire Daniel, 1. *Géométrie*, Paris, Baillères et Fils, 1939; 2. *Compléments de géométrie*, Paris, Baillères et Fils, 1951.
- Dieudonné Jean, 1. *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Paris, Hermann, 1961; 2. *The Universal Domination of Geometry*, Berkeley, International Congress of Mathematical Education, 1980; 3. *Abrégé d'histoire des mathématiques* (2 volumes), Paris, Hermann, 1978.
- Duporc Ernest, *Premiers principes de géométrie moderne*, Paris, Gauthier-Villars, 1938.
- Einstein Albert, La géométrie et l'expérience (traduction Solovine), in *Reflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, Paris, Gauthier-Villars, 1972.
- Enriques Federigo, *Leçons de géométrie projective* (traduction Laberrenne), Paris, Gauthier-Villars, 1930.

- Euclide, *Les Œuvres d'Euclide* (traduction française Peyrard), Paris, Blanchard.
- Eutocius, Commentaires, in *Archimède* tome IV (traduction Mugler), Paris, Les Belles-Lettres, 1972.
- Flocon Albert, Taton René, *La Perspective*, « Que sais-je? » Paris, PUF, 1978.
- Francastel Pierre, *Etudes de sociologie de l'art*, Paris, Denoël-Gauthier, 1970.
- Godeaux Lucien, *Les géométries*, Armand Colin, 1937/1960.
- Gonseth Ferdinand, 1. *Les fondements des Mathématiques*, Paris, Blanchard, 1926/1973; 2. *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann, 1939.
- Hadamard Jacques, *Leçons de géométrie* (2 volumes), Armand Colin, 1898/1950.
- Hartshorne Robin, *Foundations of Projective Geometry*, New York, Benjamin, 1967.
- Heath Thomas L., 1. *Euclid : the Thirteen Books of the Elements* (3 volumes) (translation and commentaries), New York, Dover, 1956; 2. *A History of Greek Mathematics* (2 volumes), New York, Dover, 1981.
- Hilbert David, *Les fondements de la géométrie* (traduction et notes de Rossier), Paris, Dunod, 1971.
- Hilbert David, Cohn-Vossen S., *Geometry and Imagination* (translation by Nemenyi), New York, Chelsea, 1952.
- Hoüel Jules, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars, 1867.
- Jaouiche Khalil, *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, Paris, Vrin, 1987.
- Klein Félix, 1. *Le programme d'Erlangen* (traduction Padé), Paris, Gauthier-Villars, 1974; 2. *Leçon sur certaines questions de géométrie élémentaire* (traduction Griess), Paris, Vuibert, 1931; 3. *Developments of Mathematics in the 19th century* (translation by Ackermann), Brookline, Mass., Math. Sci. Press., 1979.
- Kline Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford, University Press, 1972.
- Lambert Jean-Henri, 1. *Essai sur la perspective* (1752) (traduction de J. Peiffer, commentaires de R. Laurent), Coubron, Monom (France), 1981; 2. *La perspective affranchie de l'embarras du Plan géométral* (1759), Paris, Alain Brieux, 1977; 3. Notes et additions à la perspective affranchie de l'embarras du Plan géométral (1774) (traduction de J. Peiffer, commentaires de R. Laurent et J. Peiffer), in Laurent-Peiffer, *La place de Lambert dans l'histoire de la perspective*, Paris, Cedic-Nathan, 1987.
- Laurent Roger, Peiffer Jeanne, *La place de Lambert dans l'histoire de la perspective*, Paris, Cedic-Nathan, 1987.
- Lebesgue Henri, 1. *Les coniques*, Paris, Gauthier-Villars, 1942/1955; 2. *Leçons sur les constructions géométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1950. Paris, Gabuy, 1987.
- Mascheroni Lorenzo, *Géométrie ou compas* (traduction Duprat), Coubron, Monom, 1980.
- Monge Gaspard, *Géométrie descriptive*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.
- Neugebauer O., *The exact Sciences in Antiquity*, New York, Dover, 1969.
- Nicomaque de Gêrase, *Introduction arithmétique* (traduction J. Bertier), Paris, Vrin, 1978.
- Panofsky Erwin, *La Perspective comme forme symbolique* (traduction Ballangé), Paris, Editions de Minuit, 1975.

- Pappus d'Alexandrie, *Collection mathématique* (2 volumes) (traduction Ver Eecke), Paris, Blanchard, 1982.
- Peanno Giuseppe, *Calcolo geometrico*, Torino, Fratelli Bocca Editori, 1888.
- Picard Émile, *La science moderne*, Paris, Flammarion, 1919.
- Poncelet Jean-Victor, *Traite des propriétés projectives des figures*, Paris, Gauthier-Villars, 1866.
- Poudra M., *Histoire de la perspective*, Paris, Corréard Editeur, 1864.
- Reichenbach Hans, *Philosophy of Space and Time* (1927) (translation by M. Reichenbach and J. Freund), New York, Dover, 1957.
- Rey Abel, *La Science dans l'antiquité* (5 volumes), Paris, Albin Michel, 1942/1948.
- Riemann Bernhard, Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie (traduction française J. Hoüel), *Œuvres*, Blanchard, Paris, 1968.
- Samuel Pierre, *Géométrie projective*, Paris, PUF, 1986.
- Schoenflies Arthur, *La Géométrie du mouvement* (traduction Speckel), Paris, Gauthier-Villars, 1893.
- Seidenberg Abraham, *Lectures on projective geometry*, Princeton, Van Nostrand, 1962.
- Sénéchal Brigitte, 1. *Géométrie classique et mathématiques modernes*, Paris, Hermann, 1979; 2. *Groupes et géométries*, Paris, Hermann, 1979.
- Taton René, *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Paris, Vrin, 1981.
- Tisseron Claude, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Paris, Hermann, 1983.
- Veblen Oswald, Young John Wesley, *Projective Geometry* (2 volumes), Boston, Ginn and C<sup>ie</sup>, 1910/1918.
- Weyl Hermann, *Space, Time, Matter*, New York, Dover, 1952.
- Young John Wesley, *Projective Geometry*, Chicago, Open Court Publ. C<sup>ie</sup>, 1930/1971.
- Groupe d'Enseignement Mathématique, *L'Archipel des isométries*, Louvain-la-Neuve, GEM, 1982.
- Groupe Epistémologie Inter IREM, 1. *La Rigueur et le calcul*, Paris, Cedic, 1982; 2. *Mathématiques au fil des âges*, Paris, Gauthier-Villars, 1987.
- IREM de Caen, *Cahiers de la perspective*, 1982/1987.



# INDEX TERMINOLOGIQUE

Abscisse curviligne : XIII.1.  
 Affine (géométrie) : XI.2.  
 Affine (structure, repère, transformation) : X.1.  
 Affinité : VIII.3.  
 Algébrique (hypersurface, surface, courbe) : IX.3.  
 Angle : II.1, X.3, XIII.1.  
 Angle hyperbolique : XIII.4.  
 Angle pivotant (théorème de l') : II.4, IV.4, VII.5, VIII.7.  
 Antipodaire : VII.3.  
 Arc capable (théorème de l') : II.3, VIII.7.  
 $A_n(K) = \text{Aff}(K^n)$  : X.1.  
  
 Birapport de 4 points alignés, cocycliques : V.2.  
 Birapport de 4 droites concourantes ou parallèles (coplanaires) : V.2.  
 Birapport de 4 nombres : VIII.2.  
 Birapport de 4 points sur une conique : V.6.  
 Birapport de 4 tangentes à une conique : VII.5.  
 Bissectrices : I.4.  
 Brianchon (théorème de) : VIII.6.  
  
 $\mathcal{C}$  : VIII.1.  
 Caractéristique (point) : VII.6.  
 Cayley (disque de, modèle de)  $\mathcal{C}$  : XIII.4.  
 Cercle : X.3.  
 Circonscrit (cercle) : I.2.  
 Complété projectif d'une conique : VII.4.  
 Complété projectif d'une droite, d'un plan : V.3.

Complété projectif d'une hypersurface algébrique : IX.3.  
 Complexification : X.2.  
 Conique : IV.1.2, V.6, XII.1.  
 Conjugués (droites) : VI.6.  
 Conjugués (faisceaux) : III.4.  
 Conjugués (points) : VII.1, XII.4.  
 Cycliques (points) : X.3.  
  
 $\hat{D}$  : V.3.  
 Dandelin (théorème de) : V.7.  
 Dégénérée (conique, quadrique) : VIII.7, XII.1. 3.  
 Desargues (théorème de) : V.5.  
 Dessin en perspective : V.7.  
 Directeur (cercle), directrice (droite) : IV.1.  
 Dualité : VII.5, XII.4.  
  
 Ellipse : IV.1. 2. 3.  
 Ellipsoïde : XII.3.  
 Enveloppe : VII.6.  
 Euler (droite d') : I.3.  
 Excentricité : IV.2.  
 Exinscrit (cercle) : I.4.  
  
 Faisceau de cercles, de droites : III.5.  
 Faisceau de coniques : XII.5.  
 Forme polaire, quadratique : XII.4.  
 Foyer : IV.1. 2. X.3.  
 Fuite (point de, ligne de) : V.7.  
  
 Générique (cas particulier) : XI.4.  
 Géométries (affine, projective, euclidienne, conforme ou anallagmatique, métrique, angulaire ou semblable, ...) : XI.2.



Gravité (centre de) : I.1.

Groupe d'une géométrie : XI.2.

Harmonique (division) : III.1.

Harmonique (faisceau) : V.2.

Harmonique (homologie) : V.8, IX.5, XIII.4.

Hauteur : I.2.

Homogène (coordonnées) : IX.1.

Homographie : VIII.3. 5.

Homologie : V.8, IX.5, XIII.4.

Horizon (ligne d') : V.7.

Hyperbole : IV.1. 2. 3.

Hyperbolique (géométrie, espace, distance, angle) : XIII.4.

Hyperboloïde : XII.3.

Hypersphère, hypersurface : IX.3, X.3.

$\mathcal{H}_p(\Pi)$ ,  $\mathcal{H}_p(\mathcal{X})$ ,  $\mathcal{H}(\Pi)$  : IX.3.

Imaginaires conjugués (points) : X.2.

Infini (point à l', droite de l') : V.3.

Infini (hyperplan de l') : X.1.

Infini (le point à l') : VI.4.

Inscrit (cercle) : I.4.

Invariants d'une géométrie : XI.2.

Inversion : VI.1. 5.

Involution : VIII.3.

Isotrope (droite) : X.3.

$K$ ,  $\bar{K}$  : VIII.1.

Laguerre (formule de) : X.3.

Liberté (degré de) : XI.4.

Médiane : I.1.

Médiatrice : I.2.

Modèle conforme : XIII.4.

Ombilicale : X.3.

Orthocentre, orthocentrique : I.3.

Orthogonaux (cercles) : III.3.

Osculateur, osculatrice : XII.5.

$O(E)$ ,  $PO(E)$  : XIII.3.

$O(2, 1)$ ,  $O_+(2, 1)$  : XIII.4.

Pappus (théorème de) : VIII.5.

Parabole : IV.1. 2. 3.

Paraboloïde : XII.3.

Pascal (théorème de) : VIII.6.

Perspective (perspective cavalière) : V.1.

Podaire : VII.3.

Poincaré (disque de, modèle de) : XIII.4.

Point caractéristique : VII.6.

Point de vue, de fuite : V.7.

Point de contact : VII.6.

Point limite, de base : III.5.

Polaire (droite) : VII.2.

Polaire (forme, hyperplan) : XII.4.

Polaires réciproques (tppr) : VII.3. 4.

Pôle : VII.2, XII.4.

Pôle d'une inversion : VI.1.

Projection conique, cylindrique : V.1.

Projection stéréographique : VI.6.

$P(E)$ ,  $P^n(K) = P(K^n)$  : IX.1.

$PGL(E)$ ,  $PG_n(K) = PGL(K^n)$  : IX.2.

$\bar{\Pi}$  : V.3.

$\bar{\Pi}$  : VI.4.

$\mathcal{T}$  : XIII.4.

Quadratique (forme) : XII.4.

Quadratique (transformation) : XII.5.

Quadrilatère complet : V.4.

Quadrique : XII.3.

$\bar{R}$  : VIII.1.

Radical (axe, centre) : III.3.

Rang d'une forme quadratique : XII.3.

Rapport algébrique de 3 points alignés : V.2.

Rapport algébrique de 3 nombres : VIII.2.

Rectifiable (courbe) : XIII.1.

Repère affine : X.1.

Repère projectif : IX.2.

Repère réel : X.2.

Riemann (sphère de) : VI.6.

Signature d'une forme quadratique : XII.3.

Similitude : X.3.

Structure affine : X.1.

Structure angulaire (pseudo-angulaire) ou semblable : X.3.

Structure projective : IX.3.

Structure réelle : X.2.

Surosculatrice (coniques) : XII.5.

Tableau (plan du) : V.7.

Transformation : XI.2.

Triangle autopolaire : XII.5.

Imprimé en France  
Imprimerie des Presses Universitaires de France  
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme  
Juin 1988 — N° 33 004

## COLLECTION *MATHÉMATIQUES*

- Jean-Pierre AUBIN. *Analyse fonctionnelle appliquée. 1 et 2*
- Marcel BERGER et Bernard GOSTIAUX. *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces*
- Josette CALAIS. *Eléments de théorie des groupes*
- Bernard CHARLES et Denis ALLOUCH. *Algèbre générale*
- Jean COMBES. *Suites et séries*
- Paul DEHEUVELS. *L'intégrale*
- René DEHEUVELS. *Formes quadratiques et groupes classiques*
- Roger DESCOMBES. *Eléments de théorie des nombres*
- Jacques DIXMIER. *Topologie générale*
- Jean GEFROY. *Equations différentielles*
- Michel HERVÉ. *Les fonctions analytiques*
- Michel HERVÉ. *Transformation de Fourier*
- Daniel LEBORGNE. *Calcul différentiel et géométrie*
- Daniel LEHMANN et Carlos SACRÉ. *Géométrie et topologie des surfaces*
- Daniel LEHMANN et Rudolphe BKOUCHE. *Initiation à la géométrie*
- Jacqueline LELONG-FERRAND. *Les fondements de la géométrie*
- Henri MASCART et Marius STOKA. *Algèbre linéaire. 1 et 2 : Exercices et corrigés*
- Henri MASCART et Marius STOKA. *Fonctions d'une variable réelle. 1, 2, 3 et 4 : Exercices et corrigés*
- Maurice MIGNOTTE. *Algèbre appliquée à l'informatique*
- Georges PUPION. *Exercices d'algèbre avec solutions et cours résumé*
- Georges PUPION. *Exercices d'analyse avec solutions et cours résumé*
- Pierre SAMUEL. *Géométrie projective*
- Paul VER EECKE. *Fondements du calcul différentiel*
- Paul VER EECKE. *Applications du calcul différentiel*

Les deux premières parties de ce livre pourront paraître désuètes, qui reprennent l'étude naïve de figures et de transformations autrefois bien connues. On sait aujourd'hui que les propriétés de celles-ci ne sont en effet que des conséquences plus ou moins triviales de grandes théories générales, telles l'algèbre linéaire, la théorie des groupes et la classification des géométries.

Ces théories, que nous abordons effectivement en troisième partie, sont de puissants outils qui permettent de mieux comprendre, d'aller plus vite et d'aller plus loin. Encore fallait-il qu'on en eût besoin, en ayant d'abord quelque chose à comprendre et à dépasser, faute de quoi ces théories restaient sans signification.

Ce livre est destiné surtout à la formation en géométrie, tant initiale que continue, des professeurs de mathématiques. Une telle formation est en effet la condition première pour que la géométrie reprenne la place qui lui revient dans l'enseignement scientifique d'aujourd'hui.

