

NOUVELLE BIBLIOTHÈQUE
MATHÉMATIQUE

RACHED MNEIMNÉ

éléments de géo métrie

actions
de groupes

C A S S I N I

NOUVELLE BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUE

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

Nouvelle bibliothèque mathématique

1. M. Demazure, *Cours d'algèbre*
2. R. Mneimné, *Éléments de géométrie. Actions de groupes*
3. J.-P. Kahane et P. G. Lemarié-Rieusset, *Séries de Fourier et ondelettes*
4. R. et A. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*

*Ouvrage publié avec le concours du Ministère
de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur
et de la Recherche (DISTNB)*

Rached Mneimné

Éléments de géométrie

Actions de groupes

CASSINI

Rached Mneimné
Théorie des Groupes (U.R.A. 748, C.N.R.S.)
U.F.R. de Mathématiques
Université Paris VII – Denis Diderot
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France
Adresse électronique : mneimne@math.jussieu.fr

Catalogage Électre-Bibliographie

Mneimné, Rached

Éléments de géométrie. Actions de groupes – Paris, Cassini : 1997

ISBN 2-84225-002-8 (série complète)

ISBN 2-84225-003-6 (Actions de groupes)

RAMEAU : Géométrie : étude et enseignement (supérieur)

Géométrie algébrique : problèmes et exercices

Actions de groupes (mathématiques)

DEWEY : 516 : Géométrie

Public concerné : Universitaire. Spécialiste du domaine

Mathematics Subject Classification (1991): Primary 13A50, 14L30, 15xx, 17B10, 20xx, 51xx. Secondary 05E10, 14Mxx, 17B20, 20D20, 20Fxx, 20G20, 20H20, 51A50, 51M35, 51N30, 51N35, 57Rxx, 57Sxx.

Imprimé sur papier permanent.

© R.Mneimné, Paris, 1997.

© Cassini, Paris, 1997, pour la présente édition.

Tous droits de traduction, reproduction, même fragmentaire, sous quelque forme que ce soit y compris photographie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, réservés pour tout pays.

à la mémoire de mon père

PRÉFACE

Le présent volume est en principe le premier d'une série de quatre où l'on projette d'initier le lecteur aux objets et méthodes algébriques de la géométrie contemporaine.

Ce travail voudrait inaugurer un genre nouveau de combinaison entre ouvrage didactique et ouvrage synthétique, conçu qu'il fut à partir d'une volonté sensible aux essences naturelles des « choses » dans leur rapport, dialectique pour certains, pathétiquement païen pour d'autres, avec l'activité de l'esprit humain. La réalité mathématique est d'une richesse inouïe, l'intelligence s'appliquant à détecter, reconnaître, ou parfois inventer, des ordonnancements qu'elle ressent comme primordiaux. Ceci suppose une grande expérience de ces objets, qui s'acquiert par leur manipulation systématique. Aussi avons-nous réservé un aspect de notre approche à la familiarisation du lecteur, par l'exemple ou par l'exercice, avec les objets de la géométrie, pour le conduire par la suite à saisir la hiérarchie des énoncés et tenter une élaboration des principes, et lui offrir enfin le plaisir de détecter de lui-même à l'occasion de tel ou tel énoncé les essences dont il fut question auparavant.

L'idée de cet ouvrage est née il y a quelques années, à l'époque où un département de mathématiques existait encore à l'École normale supérieure de Saint-Cloud. Il s'agissait, à partir de cette position privilégiée qu'offrait le jeune auditoire des normaliens, d'établir un lien entre ce que nous percevions des hautes mathématiques qui sont pratiquées dans certaines équipes universitaires, et les non moins belles mathématiques que l'on enseignait dans les classes préparatoires. Ces deux mondes professionnels se méconnaissaient et se méconnaissent toujours trop, malgré quelques rares exceptions. Une collaboration active entre les uns et les autres ferait du bien à tous.

Le monde mathématique ressemble beaucoup à une ville, une ville immense, dans laquelle les lois de l'échange ne sont pas toujours bien définies. On s'y insère sans toujours la dominer, et en y vivant, on la fait vivre. Elle est bâtie avant notre arrivée, et on n'apprendra jamais tout ce qu'elle contient, mais chacun de nous sait que beaucoup y œuvrent dans l'anonymat pour que les circuits de distribution et d'information y soient efficaces, et que certains veillent sur sa mémoire, préservent ses monuments, alors que d'autres la font visiter, et d'autres y bâtissent de nouveaux édifices, souvent dignes d'intérêt, et plus rarement de superbes monuments. Certaines gens réhabilitent de vieux bâtiments et d'autres

les regardent faire... Mais comme il est bien connu, il faut de tout pour faire un monde.

Nous avons voulu, en travaillant à cet ouvrage, apporter une contribution bien modeste à la fascinante vie de ce petit monde, et souhaité que les lecteurs qui voudront bien s'y plonger découvrent à leur tour les nombreuses occasions de bonheur que nous avons connues durant son élaboration.

Réussir un ouvrage de géométrie, c'est avant tout croire « *que tout est géométrie* ». Cette conviction, qu'il ne s'agit évidemment pas de porter comme une vérité éternelle, organise spécialement la perception du champ mathématique et l'ordonne suivant la Nature. Cette nature porteuse de structures s'offre au mathématicien dans un foisonnement inhérent à sa matérialité et à la pulsion de vie qui l'anime. Il apprendra donc petit à petit à la réinterpréter et la déchiffrer, parfois même à l'inventer, pour s'apercevoir à la fin qu'il ne fait que la découvrir.

Les objets algébriques comme les méthodes analytiques doivent ainsi finir par être « vus »; la fonction déterminant se voit en effet dans l'ensemble des matrices singulières, et la transformation de Fourier dans le groupe unitaire de L^2 ... L'apprentissage de cette démarche peut efficacement se faire dans le champ linéaire, qui offre l'avantage de mêler une dose limitée de complexité à une richesse considérable des données. Cette affirmation que nous avons eu l'occasion de vérifier auprès de nombreuses promotions d'élèves, dans l'expérience au jour le jour, confirmera la place privilégiée de cette branche de base dans l'enseignement.

L'algèbre linéaire, qui doit donc faire partie des connaissances fondamentales dans toute formation scientifique, est accessible aux étudiants à travers de nombreux textes qui encombrant les rayons des bibliothèques universitaires. Manuels de cours et recueils d'exercices se disputent les mêmes points de vue et les mêmes approches depuis plus de vingt ans¹. Aussi le présent ouvrage prétend-il, entre autres, devoir servir à inspirer de futurs auteurs qui voudraient sortir des sentiers battus et proposer au public mathématique un traité d'algèbre linéaire qui serait à l'égard de ses semblables ce qu'est la Haute couture par rapport au prêt-à-porter.

Nous avons subdivisé l'ouvrage en chapitres ou thèmes où s'intercalent un certain nombre de notes. Tout est ici organisé de façon relativement indépendante à la manière des tiroirs d'un même meuble : il arrivera donc que l'on rencontre une paire de chaussettes dans une pile de tricot; nous procéderons alors à son insertion en son lieu « naturel ». Ce travail, qui va de pair avec l'affermissement des connaissances, nous semble utile au niveau de l'apprentissage véritable. L'ordre n'est saisi que si l'on a vécu le chemin qui le sépare du désordre. Ceci finit par donner à l'ouvrage l'apparence d'un diptyque : le corps proprement dit des chapitres et des notes, constituant la partie majeure, l'autre partie regroupant les commentaires et remarques qui doivent permettre de surmonter les difficultés de certains exercices, et dévoiler le secret des situations. C'est là que l'on procède à

¹ Nous excluons de ce propos les louables efforts qui ont été faits au niveau des retombées de l'algèbre linéaire dans les mathématiques appliquées et en informatique.

l'ordonnement des énoncés et que le lecteur est livré à lui-même pour continuer à sa manière le voyage initiatique ainsi commencé.

Dans le cadre actuel des études, on commence en suivant un ordre pédagogique logique pour tout démontrer, mais quand on a avancé, on renonce systématiquement à regarder l'édifice dans son ensemble. La tendance de l'enseignement consiste à favoriser un ordre démonstratif au détriment d'un ordre descriptif; l'on finit souvent par accepter cet état de fait, sans même penser à le remettre en cause. Nous procéderons à différentes occasions différemment, tout en sachant que les deux approches sont nécessaires et même complémentaires.

Un exercice ou un problème doit toujours être posé, formulé, résolu, sans qu'il faille nécessairement l'insérer dans un contexte de 300 pages. C'est là toute la fascination des problèmes des oraux de concours. Quelques exercices se rencontrent dans le texte même des chapitres, et ceci donne déjà une indication sur leur solution; les autres sont regroupés à la fin de chaque chapitre ou note, et sont suivis la plupart du temps d'indications. Nous pensons que le lecteur sérieux devrait se poser ces exercices et y réfléchir tout seul aussi longtemps qu'il le faut; c'est vraiment quand il a épuisé toutes ses ressources, notamment et surtout en regardant les situations particulières et les cas de petite dimension, qu'il pourra se reporter aux suggestions et autres indications proposées.

Les exercices sont souvent originaux; parfois ce sont des variantes sur des thèmes classiques. L'ordre dans lequel ils apparaissent peut sembler à certains endroits arbitraire. Il faudrait cependant penser les exercices comme les composantes d'une boîte à jouets, s'en servir pour étudier un thème déterminé, en les adaptant au besoin, ou en les réordonnant. Démanteler entièrement un exercice peut nécessiter parfois un cheminement à travers l'ensemble du livre; c'est l'occasion alors d'une promenade orientée où les références croisées et l'index alphabétique sont fort utiles.

L'ouvrage contient assez d'exemples de petits groupes pour servir d'illustration à un cours introductif à la théorie des groupes finis. Les théorèmes de Sylow sont sollicités maintes fois, et de nombreux treillis de sous-groupes sont dressés. La manipulation méthodique de ces petits groupes est indispensable pour vérifier ou faire ressortir certaines idées de la théorie. Outre l'intérêt propre d'une telle démarche, nous y voyons une excellente préparation aux exemples de la théorie des représentations des groupes finis ou de la théorie de leur cohomologie. Nous avons délibérément laissé de côté l'examen attentif des classes de conjugaison (des éléments) des groupes considérés ainsi que la détermination de générateurs et relations, pensant que cela trouvera mieux sa place ultérieurement. D'ailleurs, traitées trop tôt, les présentations des groupes finis risquent parfois d'éclipser la signification géométrique de leurs éléments: la nécessaire étape qui privilégierait l'essence par rapport aux avatars est frustrante au stade où l'on se place.

Plus inattendue, une introduction aux groupes algébriques affines (et du même coup à la géométrie algébrique) est offerte au lecteur qui a un goût prononcé pour les choses de l'algèbre linéaire. Une bonne introduction au sujet sup-

pose l'apprentissage rapide, en plus évidemment du théorème des zéros de Hilbert, des notions d'ensembles irréductibles et d'ensembles constructibles. De nombreux exemples issus du champ linéaire peuvent aider à cela efficacement. Prouver l'irréductibilité de l'ensemble des matrices nilpotentes d'indice de nilpotence donné, ou reconnaître « à la main » la constructibilité de l'image de l'application polynomiale qui à une matrice associe sa comatrice, c'est déjà en fait se préparer à une meilleure manipulation de certaines notions cruciales de la géométrie algébrique. Les anciens faisaient cela en jouant très tôt avec les courbes et les surfaces algébriques, et quand ces chapitres sont tombés en désuétude dans les programmes universitaires (non pas pour leur manque d'actualité, mais parce qu'on réalisait mieux toute leur difficulté), rien n'est venu remplacer ces vieux exemples qui rendaient plus intuitives des notions telles que celle d'intersection complète ou celle de normalité. Or, établir que l'ensemble des matrices de rang inférieur à p (quelconque) n'est pas une intersection complète, ou que l'adhérence d'une classe de similitude est une variété algébrique affine normale, c'est faire de l'algèbre linéaire (toute élémentaire) et de la très bonne géométrie algébrique. Sans aller jusque là dans le présent volume, il a été possible d'introduire élémentairement, et à travers de nombreux exemples, des notions importantes telles que celle de quotient catégorique, celle de points réguliers et de points singuliers ou encore celle de complétude. Espérons enfin que les jeunes étudiants reconnaîtront dorénavant la densité ou la connexité de $GL(n, \mathbb{C})$, mais aussi celles de l'ensemble des matrices diagonalisables complexes, en invoquant des arguments algébriques avant tout autre argument. De même serait-il souhaitable qu'ils relèvent que, si l'ensemble des matrices ayant un rang donné, ou une classe de similitude, sont localement fermés, c'est parce qu'il s'agit d'orbites d'un groupe algébrique affine.

Au moment où l'on apprend le théorème de Steinitz sur l'existence d'une clôture algébrique, ou la caractérisation des équations algébriques résolubles par radicaux, des problèmes aussi simples que le calcul des sous-groupes du groupe alterné à quatre éléments ou la détermination du groupe des automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ restent souvent inaccessibles aux étudiants. Il n'est plus acceptable en cette fin de siècle, à un moment où l'enseignement des hautes mathématiques se propose de toucher le plus grand nombre possible d'étudiants, de taire les situations clés qui cachent l'essentiel des difficultés et que l'on apprivoise en premier quand on réfléchit sur un problème ou une question. Pour ne pas tomber cependant dans l'excès inverse, on ne travaillera pas indéfiniment avec des matrices 2×2 , des connexes dans \mathbb{R} ou des courbes planes... Le passage au cadre général reste malgré tout nécessaire pour comprendre le vrai sens des choses, car finalement à quoi cela servirait-il de diagonaliser la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ si l'on n'évoque pas le fait qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable, ou bien d'affirmer que $GL(n, \mathbb{C})$ ou l'ensemble des matrices complexes ayant des valeurs propres distinctes sont connexes, si l'on ne relève pas que cela découle d'un même principe ?

Il s'agit donc de garder systématiquement un juste équilibre entre une formalisation extrême et une manipulation indéfinie de cas particuliers. Dès lors, on

se servira avec joie des applications propres une fois comprises les applications propres dans \mathbb{R} et dans \mathbb{R}^2 , et l'on s'étonnera devant l'équation générale de degré supérieur ou égal à cinq en même temps que l'on sera capable de résoudre par radicaux l'équation du troisième degré et de calculer non sans aise le groupe de Galois de quelques équations de degré quatre. . .

On ne lit plus que très rarement un ouvrage mathématique du début à la fin, mais on y regarde de temps en temps. Les ouvrages réussis sont aujourd'hui un peu à l'image des séries américaines télévisées qui ont la faveur du public : des scènes courtes et de la variété. Le lecteur veut consommer vite et veut de jolies choses à chaque page. On ne peut plus se permettre de lui demander de patienter 70 ou 80 pages en lisant des mathématiques indigestes avant de s'émerveiller sur les finesses de la géométrie algébrique ou la théorie des groupes de Lie. Il faut savoir l'étonner rapidement, l'accrocher dès le début et lui montrer qu'il peut s'amuser avec des exemples non triviaux avant qu'il ne soit gagné par le sommeil, sinon par le désespoir. Ceci suppose que l'enseignement évolue pour rendre possible ce genre de promesses, un peu comme le cinéma et la publicité n'ont plus besoin de détailler toute une scène pour montrer un acteur qui entre dans une maison ou qui descend d'une voiture : certaines choses semblent faire partie du sens commun alors que ce n'était pas encore le cas au début du siècle. Le spectateur a été éduqué !

Le corps même du chapitre zéro est bâti à la manière d'une leçon d'agrégation (quoique à une tout autre échelle), en ce sens qu'il essaie de donner un panorama succinct d'un sujet, en l'occurrence les actions de groupes, en présentant les résultats essentiels au niveau où l'on se place, et en évoquant à l'occasion de chacun d'eux quelques applications ou illustrations immédiates. Les notes qui suivent évoquent trois thèmes abordés dans le corps du chapitre zéro², et qui sont développés plus en détail pour eux-mêmes. Les exercices devraient d'une part justifier l'arrière plan des connaissances qui fondent l'édifice, et d'autre part illustrer les développements plus pointus sur une question donnée.

Ce premier volume est par ailleurs conçu pour préparer le terrain aux chapitres qui suivront. L'investissement pour étudier par exemple le groupe $GL(2, \mathbb{F}_3)$ ne saurait être justifié si l'on n'avait à l'esprit le besoin d'y puiser une foule d'exemples pour mieux comprendre, et les représentations des groupes, et plus tard la cohomologie de ceux-ci.

La note sur le birapport introduit le lecteur à certains thèmes centraux de la géométrie projective plane; un effort a été fourni pour sortir des sentiers battus tant au niveau de la présentation de la matière couverte que de son contenu. Une certaine familiarité avec le sujet est toutefois souhaitable.

² Une dernière note sur les géométries affine et euclidienne et sur les groupes cristallographiques du plan aurait pu trouver sa place dans ce cadre. Cela aurait doublé ou peu s'en faut la taille du présent volume. Nous devrions pourtant revenir ultérieurement sur ce sujet fascinant, et surtout fondateur.

La note sur la similitude des matrices occupe près de la moitié du présent volume, c'est dire toute l'importance que nous lui accordons. Outre un traitement d'ensemble, dans le langage des groupes, des idées clés de la réduction des endomorphismes, le lecteur y découvrira une présentation claire des rapports étroits qui existent entre la réduite de Jordan, les \mathfrak{sl}_2 -triplets et les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$. C'est aussi l'occasion pour lui de manipuler les tableaux de Young, que l'on retrouvera lors de l'examen des représentations du groupe S_n , et qui devraient normalement figurer avec la réduction de Jordan, dans les programmes des classes préparatoires. Nous pensons que la clarification qui en découlera fera du bien tant aux élèves qu'à leurs enseignants.

L'idéal pour juger de notre travail est d'avoir quelque peu regardé les ouvrages suivants : le joli cours de D. Perrin fait à l'ENS de Sèvres, les livres de Weinstein et de Hall sur les groupes, le livre de Glazman-Liubitch sur l'algèbre linéaire en dimension finie, celui de Kaplansky sur la géométrie, de Mneimné-Testard sur les groupes de Lie classiques, le livre de J.-P. Serre sur les algèbres de Lie semi-simples complexes, celui de Carter sur les groupes finis de type de Lie et enfin le très élégant Humphreys sur les groupes algébriques. Ce sont surtout ces ouvrages que l'auteur a consultés et c'est en partant de là que le lecteur pourra voir le chemin parcouru.

La question de l'originalité est sans doute épineuse. Beaucoup de choses non écrites peuvent être connues malgré tout des spécialistes, surtout quand on traite de sujets mathématiques relativement classiques. Les rendre accessibles soudain au grand public ne permet pas pour autant de prétendre à leur paternité. Par opposition, une preuve réellement inattendue, mais élémentaire, d'un résultat bien connu, ou une présentation nouvelle d'un sujet standard, ont beaucoup de mal à passer pour originales, même si elles le sont en réalité. Aussi, s'atteler à prouver la nouveauté de telle ou telle idée dans un domaine plus que classique nous semble presque inconvenant, et l'on devrait en toute logique laisser le public juge de l'originalité de telle ou telle idée et surtout de l'originalité de l'ensemble de l'ouvrage. Aussi avons-nous renoncé délibérément à préciser notre contribution à la science universelle (sic), tant il est vrai en effet que nous n'avons effectué aucune démarche sérieuse pour enquêter sur tel ou tel résultat que nous croyons avoir découvert. D'ailleurs, détiendrions-nous même la certitude que l'originalité des quelques idées nouvelles et sûrement modestes que contient l'ouvrage nous soit due, nous savons pertinemment que tout cela est négligeable à l'échelle de la science, et *a fortiori* devant le miracle d'un mot qui vient éclore sur les lèvres d'un enfant.

Enfin, nous nous devons de signaler que le corps du texte a été pour l'essentiel fixé dès la fin de l'année 1992, et que plusieurs fragments ont circulé, auparavant et après, parmi quelques amis et collègues³. Certaines idées, et nous nous en réjouissons, furent de ce fait mises à profit, entre autres, pour élaborer quelques sujets d'examens écrits ou oraux.

³ Un principe sourd et d'essence négative aura retardé durablement la parution de ce volume. Peut-être comprendrons-nous un jour les termes de sa viralité...

Un des souhaits de l'auteur est que le présent ouvrage puisse enrichir aussi le débat sur les contenus des programmes des deux premiers cycles universitaires, ainsi que celui des classes préparatoires; en particulier, la place grandissante qui est donnée d'ores et déjà dans l'organisation de ceux-ci à la notion de groupe opérant sera, nous l'espérons, d'autant mieux fondée que ceux qui auront à l'enseigner seront en état de juger en connaissance de cause de son importance et de son efficacité. De même, le traitement qui est proposé de la réduction des endomorphismes devrait normalement convaincre ceux qui ne le sont pas déjà de la priorité à accorder à l'examen du cône nilpotent, et de l'urgence qu'il y a à dépasser le blocage psychologique qui interdisait encore aux jeunes étudiants (et à leurs enseignants) l'usage systématique de la réduction de Jordan. À un stade un peu plus avancé, les représentations de $\mathfrak{sl}(2)$ seraient appréhendées en même temps que les \mathfrak{sl}_2 -triplets lors de la réduction des opérateurs nilpotents.

On débattait encore à la fin du dix-neuvième siècle de l'opportunité d'enseigner la notion de dérivabilité aux élèves de l'École polytechnique, et c'est maintenant dès la Première que cette notion est abordée. Aussi, avec l'accélération du progrès, nous sommes en droit d'espérer que les quelques vertus que nous trouvons à ce modeste travail seront appréciées par le plus grand nombre, avant la fin de cette décennie.

Le texte de ce volume a été saisi en $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, dans le format $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Les dessins ont été réalisés dans Adobe Illustrator en langage postscript, puis incorporés dans le texte.

Le travail sur machine est à double tranchant et il y a beaucoup à dire à ce propos. Il est encore tôt, nous semble-t-il, pour tirer des jugements sur cette évolution sans doute irréversible et il faudra attendre encore un certain temps pour qu'on se fasse une idée précise sur le sujet. On peut cependant d'ores et déjà exprimer quelques idées à cet égard. Sans évoquer les nombreux troubles oculaires et articulaires que les spécialistes de l'ergonomie du travail sont mieux aptes que nous à relever, nous dirons que l'inconvénient majeur est quelque peu paradoxal : il est très difficile de s'arrêter un jour de toucher ou retoucher le texte ! Les possibilités qu'on a d'intervenir indéfiniment, d'améliorer, de remanier, d'ajouter, etc., possibilités que l'informatique rend toutes réelles, font que les ouvrages ont tendance à croître dangereusement. La tentation est grande⁴. Cependant, saisir directement sur machine fait qu'on a du mal à réécrire de longs passages qui ne sont pas sortis sous leur meilleure forme dès le départ.

Un ouvrage comme celui-ci est le fruit d'une longue maturation mathématique; aussi serait-il impossible de déclinier toutes les influences qui ont pu s'exercer sur l'auteur durant la période correspondante. Il est cependant une personne à qui l'auteur tient en priorité à adresser ses remerciements, une personne dont la patience et la générosité ne se sont jamais démenties durant les trois dernières

⁴ Ainsi, l'histoire des bagues de Suleima que nous avons insérée presque un an après nous être promis de ne plus toucher au « manuscrit », et qui apparaît en exercice, marqua pour nous l'ultime intervention effectuée sur le texte.

années de gestation de l'ouvrage. Alberto Arabia, qui tenait tant à l'achèvement du présent volume, nous a appris avant tout à savoir aller seul jusqu'au bout d'un projet, mais il a aussi su ne pas nous laisser seul, et nous accompagner de son attention, de son assistance et surtout de son amitié quand la vie nous rendait quelquefois la vie malheureuse, ou que certaines mathématiques nous étaient un peu trop délicates. Il suffisait parfois de désirer simplement ou de rêver pour qu'Alberto Arabia prenne à cœur la réalisation du rêve ou l'accomplissement du désir : beaucoup de jolies choses n'auraient pu ainsi figurer dans l'ouvrage s'il n'avait contribué à les rendre possibles et à les faire s'accomplir. Le temps formidable qu'il a pu nous consacrer, il le prenait sur ses activités de recherche et surtout sur ses loisirs en famille : puisse la qualité de notre travail constituer une compensation à tant de labeur. Nous remercions aussi Abderrazak Bouaziz pour nous avoir aidé à éclaircir plusieurs points obscurs. Par ailleurs, Bernhard Keller, mais aussi Ghazi Abou-Jaoudé, Jean-Paul Allouche, Yves Benoist, Jean-Yves Charbonnel, René Cori, Michel Duflo, Paul Gérardin, Jean Giraud, Nouri Kamoun, Olivier Mathieu, Bernard Randé, Christoph Sorger et Michèle Vergne, ont tous apporté leur contribution à l'élaboration de cet ouvrage ; qu'ils en soient aussi remerciés. Enfin, les séances de cours ou de travaux dirigés avec les élèves, de même que les (courtes) conversations mathématiques autour d'un repas ou lors d'une pause-café, furent à l'origine de bien des idées que nous avons mises à profit ici ou là. L'auteur n'oubliera donc pas toutes ces personnes non citées, et qui auront malgré tout, par leur attention et leur curiosité, marqué cet ouvrage.

Paris, septembre 1994.

Table des Matières

Notations	xi
0 Actions de groupes	
0.1 Introduction	1
0.2 Quelques mots clés	2
0.3 Exemples fondamentaux	3
0.4 Premières manipulations	4
0.5 Aspect topologique	9
0.6 Aspect différentiel	11
0.7 Sous l'angle de la géométrie algébrique	12
0.8 Représentations linéaires	17
0.9 Produits semi-directs de groupes	23
0.10 Espaces symétriques	26
0.11 Exercices	27
0-A Le groupe quaternionique \mathbb{H}_8 et le groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$	
0-A.1 Introduction	81
0-A.2 Construction du groupe \mathbb{H}_8	82
0-A.3 Les matrices de $SL(2, \mathbb{F}_3)$	83
0-A.4 Les groupes d'automorphismes de \mathbb{H}_8 et de $SL(2, \mathbb{F}_3)$	83
0-A.5 Structure des 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$	86
0-A.6 Exercices	86
0-B Le birapport	
0-B.1 Introduction	121
0-B.2 Définition et premières propriétés	122
0-B.3 Action du groupe \mathfrak{S}_4 sur le birapport	124
0-B.4 Expression classique du birapport	126
0-B.5 Une \mathfrak{S}_4 -compactification de $\mathbb{R} - \{0, 1, \infty\}$	127
0-B.6 Un peu de géométrie plane	131
0-B.7 La conique fondamentale	134
0-B.8 Involutions et groupe circulaire	138
0-B.9 Retour sur le birapport	145
0-B.10 Le complexe octaédral	149
0-B.11 Exercices	158
0-C Classes de similitude	
0-C.1 Introduction	181
0-C.2 Premières manipulations	184
0-C.3 Le cas $n = 8$	191
0-C.4 Les tableaux de Young	193
0-C.5 Le cône nilpotent	193
0-C.6 Réduite de Jordan, théorème de Jacobson-Morozov et représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$	200

0-C.7	Le théorème de Jacobson-Morozov dans les algèbres de Lie semi-simples	212
0-C.8	Appendice 1 – Quadriques affines et classes de similitude dans $M(2, \mathbb{R})$	215
0-C.9	Appendice 2 – L’algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	228
0-C.10	Appendice 3 – Scholie informatique pour orbites nilpotentes . . .	238
0-C.11	Exercices	246
	 Bibliographie	 303
	Index	305

Notations

<i>Symbole</i>	<i>Page</i>	<i>Symbole</i>	<i>Page</i>
$G \cdot x$	2	$\mathcal{I}(X)$	48
G_x	2	X_f	48
$\varphi_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$	2	$O(p, q)$	51
$G \backslash X$	2	η	51
$\mathfrak{S}(X)$	2	$X = (X_{ij})$	52
$GL(n, \mathbb{K})$	2	$c_{n,k}$	54
\mathbb{K}^n	2	$ax + b$	61
$O(n)$	2	π_n	62
\mathbb{R}^n	2	$\text{Hom}_G(V, W)$	64
\mathbb{R}_+	2	$\text{End}_G(V)$	64
G/H	3	\mathbb{H}_8	81
$\mathfrak{z}(M)$	4	\mathbb{H}	81
$Z(M)$	4	\mathcal{P}	95
$S(n, \mathbb{K})$	5	\mathcal{D}	122
$\mathcal{Z}(E)$	6	$[D_1, D_2, D_3, D_4]$	122
R_p	6	$\overline{\mathcal{D}}$	124
$PGL(2, \mathbb{K})$	7	$\mathcal{C} = GL(2, \mathbb{R}) \backslash \overline{\mathcal{D}}$	127
\mathfrak{S}_n	8	$Q(E)$	134
$SL(n, \mathbb{F}_q)$	9	\mathcal{C}	134
$SO(n)$	10	$\text{Möb}(\mathbb{S}^2)$	142
$GL^+(n, \mathbb{R})$	10	$PO(3, 1, \mathbb{R})$	143
\mathcal{O}_M	11	H_∞	143
$\text{ad}(M)$	12	\mathfrak{S}_2^4	149
$\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$	13	\emptyset	150
$T(n, \mathbb{K})$	14	$\tilde{\emptyset}$	150
$\mathbb{K}[Z]$	14	\tilde{k}	154
$\mathbb{K}(Z)$	14	l	156
\mathcal{R}_p	15	\mathcal{D}_4	161
$\overline{\mathcal{R}_k}$	15	\mathcal{V}_4	161
$\mathbb{K}[E]$	17	$J(B_1, \dots, B_s)$	188
$\mathcal{P}(E)$	17	$p(n)$	193
$\mathbb{K}[E]^G$	18	$a(n)$	193
$H \times_A G$	23	μ	194
A_i	24	\mathcal{N}	195
$D(n, \mathbb{K})$	25	$\langle Y, H, X \rangle$	202
$U(n, \mathbb{K})$	25	$\overline{S_{F_1}}$	206
$\mathcal{N}_G(H)/H$	28	$\mathbb{Z}[X, 1/X]$	208
X_H	28	$K(X, Y) = \text{tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y)$	213
\mathcal{P}_H	28	\mathcal{A}	256
\mathfrak{A}_n	32	C_π	258
\tilde{A}	48		

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

Chapitre 0

Actions de groupes

0.1 Introduction

Il est naturel et presque nécessaire de commencer de nos jours un ouvrage sur la géométrie par un chapitre sur les groupes opérant sur un ensemble. Nous avons voulu par ce choix aller dans le sens d'un courant majeur qui prend ses racines au dix-neuvième siècle, mais également préciser un langage et habituer aussi le lecteur à regarder (quand c'est possible) le champ mathématique à travers la recherche de ce que les physiciens appellent le *principe de symétrie*.

Des mots tels que stabilisateur, orbite, espace homogène, etc., non seulement éclairent favorablement un contexte mathématique, mais permettent aussi de formuler des problèmes et d'enrichir par ce fait même notre connaissance (voir à titre d'illustration la série d'exercices en fin de chapitre).

Dans le cadre précis de l'algèbre linéaire, qui est pour nous un territoire d'apprentissage mathématique privilégié, des problèmes aussi variés que la recherche de critères de similitude de deux matrices, la classification des formes quadratiques ou encore la caractérisation des transvections, sont mieux analysés au moyen de ce langage.

Quand on se souvient par ailleurs qu'un certain nombre de renseignements sur un groupe peuvent être obtenus en le faisant opérer de façon appropriée, on comprendra la nécessité que cela entraîne pour nous d'exhiber des opérations pour tel ou tel groupe de la géométrie linéaire. Nous rencontrerons évidemment dans ce chapitre les théorèmes de Sylow. C'est l'occasion de proposer certains exercices concernant les groupes classiques sur les corps finis. Nous y reviendrons ultérieurement quand nous étudierons les formes quadratiques sur les corps finis ou les représentations des groupes finis.

0.2 Quelques mots clés

0.2.1. On dit que le groupe G opère sur l'ensemble X si l'on a une application définie sur $G \times X$ à valeurs dans X , notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$ vérifiant $e \cdot x = x$ et $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ pour tout x dans l'ensemble X et tout g_1 et g_2 dans le groupe G .

L'orbite d'un point x de X est définie comme l'ensemble formé par les $g \cdot x$ quand g décrit G . Elle est notée $G \cdot x$. Le stabilisateur de x est le sous-groupe de G formé par les éléments $g \in G$ tels que $g \cdot x = x$. On le note G_x . Les stabilisateurs de deux points x et y appartenant à une même orbite sont conjugués dans G : si $y = h \cdot x$, alors $G_y = h G_x h^{-1}$. (Cf. exercice 0.11.1 pour justifier l'expression *sous-groupes conjugués*.)

Il existe une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence à droite modulo G_x et l'orbite $G \cdot x$, donnée par

$$\begin{aligned} \varphi_x : G/G_x &\longrightarrow G \cdot x \\ \bar{g} &\longmapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

On précisera plus bas (cf. 0.2.3) une appellation pour φ_x .

On dit que le groupe G opère transitivement sur X si l'orbite de tout élément $x \in X$ est l'ensemble X lui-même; ceci équivaut clairement à dire qu'il existe $x \in X$ tel que $G \cdot x = X$. L'ensemble des orbites du groupe G dans X est noté $G \backslash X$. On note π l'application canonique de X dans $G \backslash X$ qui à $x \in X$ associe son orbite $G \cdot x$. Dire que G opère transitivement équivaut à dire que l'ensemble $G \backslash X$ est réduit à un seul élément.

0.2.2. Le premier exemple non trivial de groupe opérant sur un ensemble est donné par le groupe $G = \mathfrak{S}(X)$ des bijections de X . Se donner un groupe H opérant sur X équivaut à se donner un homomorphisme A du groupe H dans le groupe $\mathfrak{S}(X)$, et l'on a $h \cdot x = A(h)(x)$.

Ainsi tout sous-groupe de $\mathfrak{S}(X)$ opère sur X . Le cas le plus immédiat est donné par l'action sur $X = \{1, \dots, n\}$ du sous-groupe engendré par une permutation σ de X . Les orbites correspondent alors à la décomposition en cycles (disjoints) de σ .

Par ailleurs, les opérations naturelles de $GL(n, \mathbb{K})$ ou de l'un de ses sous-groupes sur \mathbb{K}^n relèvent encore de cette situation. Dans l'exemple de $GL(n, \mathbb{K})$ lui-même, opérant sur \mathbb{K}^n , on a deux orbites dont l'une est réduite à $\{0\}$: tout vecteur non nul de \mathbb{K}^n peut être, en effet, complété en une base.

Dans l'exemple du groupe orthogonal $O(n)$ opérant sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n , les orbites sont paramétrées par \mathbb{R}_+ ; cela résulte du fait que le groupe orthogonal opère transitivement sur les sphères.

0.2.3. L'exemple *typique* de groupe opérant transitivement est donné par l'action canonique de G sur l'espace G/H des classes à droite modulo un sous-groupe H , action (bien) définie par l'écriture $G \times G/H \rightarrow G/H$ et $(g, \bar{x}) \mapsto g \cdot \bar{x} = \overline{g \cdot x}$. Le stabilisateur de l'origine $\bar{e} \in G/H$ n'est autre que le sous-groupe H .

Si X et Y sont deux ensembles sur lesquels opère le groupe G , une application φ de X dans Y est dite *équivariante* si $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$ pour tout $x \in X$; le stabilisateur de x_0 est alors contenu dans celui de $\varphi(x_0)$. C'est le cas de la bijection canonique φ_x quand on fait opérer G canoniquement sur G/G_x . On appellera φ_x la *bijection canonique équivariante*, et *espace homogène* tout ensemble de la forme G/H muni de l'opération canonique de G . Toute orbite d'un groupe agissant sur un ensemble est donc isomorphe, du point de vue des groupes opérant, à un espace homogène¹. Un tel isomorphisme privilégie ainsi un point particulier de l'orbite correspondant à l'origine dans G/H .

0.3 Exemples fondamentaux

0.3.1. Exemples issus de l'algèbre linéaire. Nous allons dès maintenant donner quelques exemples fondamentaux de groupes opérant dans le cadre de l'algèbre linéaire.

a) Le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ opérant sur $M(n, \mathbb{K})$ par *conjugaison*, ou *similitude*

$$(P, M) \mapsto P \cdot M = PMP^{-1}.$$

L'étude des orbites de cette opération correspond au chapitre « réduction des endomorphismes » de l'algèbre linéaire.

b) Le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ opérant par *congruence* sur $M(n, \mathbb{K})$

$$(P, M) \mapsto P \cdot M = PM^tP.$$

¹ Dans le cadre des groupes opérant, les G -espaces homogènes jouent un peu un rôle analogue à celui que jouent les espaces \mathbb{K}^n dans le cadre des \mathbb{K} -espaces vectoriels. L'énoncé ci-dessus sur les G -espaces munis d'une action transitive correspond au classique résultat qui exprime que tout \mathbb{K} -espace vectoriel V de dimension finie est isomorphe à un \mathbb{K}^n . De même qu'un isomorphisme entre V et \mathbb{K}^n suppose le choix d'une base dans V , un isomorphisme entre un G -espace X sur lequel G opère transitivement et un G/H suppose le choix d'un point dans X . Et de même qu'un \mathbb{K}^n admet une base privilégiée, un espace homogène admet un point privilégié. Enfin, à l'énoncé (non trivial) qui affirme que deux espaces vectoriels \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^m sont isomorphes si et seulement si $m = n$, correspond dans le cadre des groupes opérant l'énoncé suivant qu'on propose au lecteur à titre d'exercice facile : deux G -espaces G/H_1 et G/H_2 sont isomorphes si et seulement si les sous-groupes H_1 et H_2 sont conjugués dans G .

Deux matrices $M_1 = S_1 + A_1$ et $M_2 = S_2 + A_2$ sont congruentes si et seulement si leurs parties symétriques et antisymétriques le sont simultanément. Le problème de la classification des formes quadratiques et des formes bilinéaires alternées sur le corps \mathbb{K} est un cas particulier de cette situation.

c) Le groupe $GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K})$ opérant sur $M(n, \mathbb{K})$ par

$$((P, Q), M) \mapsto (P, Q) \cdot M = PMQ^{-1}.$$

On appellera cette opération l'*opération de Steinitz*, et deux matrices conjuguées sous cette action seront dites *r-équivalentes*. La « r-équivalence » des matrices est à la base de la notion de *rang* d'une matrice (ce qui explique la présence de la lettre « r »).

d) Le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ opérant sur les quadruplets de droites de \mathbb{K}^n

$$(g, (D_1, D_2, D_3, D_4)) \mapsto (g(D_1), g(D_2), g(D_3), g(D_4)).$$

L'étude de cette opération, lorsque n est égal à 2, est à la base de la notion de birapport de quatre points de la droite projective.

0.3.2. Sous-groupes de Sylow. L'exemple qui suit sort du cadre linéaire proprement dit. Il apparaît cependant souvent lors de l'étude des groupes linéaires sur les corps finis.

Soit G un groupe fini d'ordre $n = p^\alpha m$ où le nombre premier p ne divise pas m . Alors le groupe G opère de façon transitive sur les *p-Sylow*, c'est-à-dire sur les sous-groupes de G de cardinal p^α . On verra en 0.4.5 que de tels sous-groupes existent toujours.

0.4 Premières manipulations

Nous procédons dès ce paragraphe à quelques manipulations sur chacun des exemples rencontrés plus haut.

0.4.1. Classes de similitude. Soit $M \in M(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{z}(M)$ le *centralisateur* de M , c'est-à-dire l'ensemble des matrices X qui commutent avec M . Le stabilisateur $Z(M)$ de M , sous l'action de $GL(n, \mathbb{R})$ opérant par conjugaison, apparaît comme le groupe des éléments inversibles de l'anneau unitaire $\mathfrak{z}(M)$. Le bon point de vue ici consiste en fait à constater que le sous-groupe fermé $Z(M)$ est une sous-variété différentiable de $M(n, \mathbb{R})$ dont l'espace tangent en l'identité est précisément l'espace vectoriel $\mathfrak{z}(M)$, que cet espace vectoriel est muni d'une structure naturelle d'*algèbre de Lie* (à savoir celle induite par la structure d'algèbre associative), et que

l'application $\exp : \mathfrak{z}(M) \rightarrow Z(M)$ donnée par $X \mapsto \exp X$ est bien définie². De façon plus précise

$$X \in \mathfrak{z}(M) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in Z(M).$$

Le groupe $Z(M)$ apparaît donc comme un *sous-groupe de Lie* fermé de $GL(n, \mathbb{R})$ dont l'algèbre de Lie est donnée par $\mathfrak{z}(M)$.

Beaucoup plus élémentairement, on a

Proposition 1. *L'espace vectoriel $\mathfrak{z}(M)$ est de codimension paire.*

Démonstration. Posons $[X, Y] = XY - YX$. L'application

$$f : (X, Y) \mapsto \operatorname{tr}(M[X, Y]) = \operatorname{tr}([M, X]Y)$$

est une application bilinéaire alternée, dont le noyau³ est précisément $\mathfrak{z}(M)$. La proposition résulte alors aussitôt du

Lemme 2. *Le noyau d'une forme bilinéaire alternée est de codimension paire.*

Démonstration. L'application $\bar{f} : E/E^\perp \times E/E^\perp \rightarrow \mathbb{K}$ donnée par $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto f(x, y)$ est bien définie, bilinéaire alternée non dégénérée. Si A désigne la matrice de \bar{f} dans une base, on a ${}^tA = -A$ et $0 \neq \det A = \det {}^tA = (-1)^m \det A$; il en découle que m est pair. ■

Remarque. Le résultat énoncé dans la proposition est un sous-produit élémentaire du fait que l'ensemble des matrices semblables à M (c'est-à-dire l'orbite de M) possède une structure naturelle de *variété symplectique*⁴. Établir tout cela demande un certain effort (voir en tout cas la section 0.6).

0.4.2. La réduction de Gauss

Proposition 1. *Quand le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ opère par congruence sur l'espace vectoriel des matrices symétriques $S(n, \mathbb{K})$, l'orbite de tout élément contient une matrice diagonale (le corps \mathbb{K} étant supposé de caractéristique différente de 2).*

² L'exponentielle d'une matrice M est la somme de la série $\sum_{n \geq 0} M^n/n!$, série qui est convergente, car normalement convergente dans l'espace vectoriel normé complet $M(n, \mathbb{R})$. Pour tout ce qui concerne les propriétés élémentaires des exponentielles de matrices, le lecteur est invité à consulter le chapitre 3 de [Mn-Ts].

³ Le noyau d'une forme bilinéaire antisymétrique f , appelé encore *radical* de f , n'est autre que l'orthogonal de l'espace tout entier.

⁴ On appelle ainsi une variété différentielle V munie d'une 2-forme différentielle symplectique, c'est-à-dire une 2-forme ω fermée ($d\omega = 0$) et telle que ω_x soit non dégénérée sur l'espace tangent $T_x(V)$ pour tout $x \in V$.

Démonstration. Soit f la forme bilinéaire symétrique définie dans la base canonique de \mathbb{K}^n par la matrice symétrique S ; comme $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, la forme f possède une base orthogonale⁵, c'est-à-dire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale, soit D . Si maintenant P désigne la matrice de changement de base, on a $S = PD^tP$. ■

Suit un exercice que nous donnons sous forme de

Corollaire 2. Soit S une matrice symétrique complexe vérifiant

$$\det(S + X) = \det X$$

pour toute matrice X symétrique complexe; alors S est nulle.

Démonstration. La propriété vérifiée par S est invariante par congruence (le vérifier); par suite, si D est diagonale et congruente à S , on a $\det(D + X) = \det X$, pour tout X symétrique. Si l'on fait alors $X = -\lambda \text{Id}$, on voit que 0 est la seule valeur propre de D . ■

0.4.3. Deux matrices A et B sont r -équivalentes si et seulement si elles ont même rang. C'est un résultat élémentaire (cf. exercice 0.11.33). Il s'ensuit que pour l'opération de Steinitz, le nombre d'orbites est exactement égal à $n + 1$.

Remarque. Il serait *a priori* très économique de définir la dimension d'un espace vectoriel E comme un de moins que le nombre d'orbites de $GL(E) \times GL(E)$ opérant par r -équivalence sur l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E ! Malheureusement, cette définition de la dimension est tout à fait inefficace (voir le chapitre 1) et le passage par les notions de famille libre et de famille génératrice semble incontournable...

Proposition 1. Les idéaux bilatères de l'anneau $M(n, \mathbb{K})$ sont triviaux.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'un tel idéal est un sous-espace vectoriel (multiplier par λId). Par ailleurs, si $M \neq 0$ est dans l'idéal bilatère \mathfrak{b} non nul, toute l'orbite de M sous l'action de $GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K})$ l'est aussi, de sorte que, si M est de rang p , la matrice $R_p = \text{Diag}(\text{Id}_p, 0, \dots, 0)$ est dans \mathfrak{b} , mais aussi $R_1 = R_1 R_p$, donc toutes les matrices de rang 1, et par conséquent \mathfrak{b} contient la base canonique, et donc $\mathfrak{b} = M(n, \mathbb{K})$. ■

Remarque. On verra dans la suite (cf. chapitre 1) que cette démonstration est naturelle!

⁵ Le résultat s'obtient par une récurrence facile sur la dimension de l'espace en considérant l'orthogonal d'un vecteur non isotrope.

Voici une autre application qui est en fait un exercice

Proposition 2. *Soit A une matrice non inversible; alors il existe une matrice P inversible telle que PA soit nilpotente.*

Démonstration. On écrit $A = P_1 \text{Diag}(J_{p+1}, 0, \dots, 0) Q_1$ où J_{p+1} est le bloc de Jordan nilpotent de rang égal au rang p de A . On prend alors $P = Q_1^{-1} P_1^{-1}$ et PA est semblable à une matrice triangulaire n'ayant que des zéros sur la diagonale : elle est nilpotente. ■

Remarques

a) La situation décrite dans la proposition précédente relève de l'action, multiplication à gauche, de $GL(n, \mathbb{K})$ sur $M(n, \mathbb{K})$ donnée par $(P, M) \mapsto PM$. Deux matrices M et N sont conjuguées pour cette action (c'est-à-dire appartiennent à la même orbite) si et seulement si M et N ont même noyau. (Cf. exercice 0.11.40.)

b) L'espace des orbites est donc paramétré par les sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n , l'ensemble des matrices inversibles formant l'orbite correspondant au sous-espace nul. La proposition ci-dessus exprime donc que dans toute orbite distincte de la *grosse orbite*⁶, il y a une matrice nilpotente.

0.4.4. Au titre d'une première manipulation sur le thème de l'opération de $GL(2, \mathbb{K})$ sur les quadruplets de droites de \mathbb{K}^2 , nous avons

Proposition. *Le groupe $GL(2, \mathbb{K})$ opère transitivement sur les triplets de droites (deux à deux) distinctes de \mathbb{K}^2 .*

Démonstration. Soit (D_1, D_2, D_3) un triplet de droites distinctes; il existe V_1, V_2, V_3 non nuls tels que $V_3 = V_1 + V_2$ et $V_i \in D_i$ pour tout i . Les vecteurs V_1, V_2 qui forment une base de \mathbb{K}^2 , peuvent être envoyés par une application linéaire sur deux vecteurs W_1, W_2 libres donnés à l'avance et alors V_3 s'envoie sur $W_3 = W_1 + W_2$. ■

Remarques

a) L'opération du groupe projectif $PGL(2, \mathbb{K}) = GL(2, \mathbb{K})/\mathbb{K}^*$ sur les triplets de droites distinctes est *simplement transitive*, c'est-à-dire qu'il existe un unique \bar{g} envoyant un triplet sur un autre. Ceci équivaut à dire que le stabilisateur d'un tel triplet pour l'action de $GL(2, \mathbb{K})$ est réduit à \mathbb{K}^* : en effet, un opérateur dans le stabilisateur a trois directions propres distinctes, il est donc scalaire (cf. exercice 0.11.3).

⁶ Cette appellation se justifie dans la mesure où (en dehors du cas où le corps de base est fini), une matrice prise au hasard est inversible (dans le cas réel, les matrices inversibles forment un ouvert dense).

b) On voit qu'une certaine condition est à poser pour que deux quadruplets de droites soient conjugués sous l'action de $GL(2, \mathbb{K})$. Cette condition s'exprime, comme on le verra, au moyen du birapport (voir la note 0-B).

0.4.5. Théorème de Sylow. Nous allons montrer dans ce qui suit l'existence d'un sous-groupe de Sylow, par des moyens (quelque peu) linéaires. On commence par l'établir pour le groupe $GL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, (où p est premier), dont le cardinal est $(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$, comme on le voit facilement en comptant les bases de l'espace vectoriel \mathbb{K}^n . Un p -Sylow est donc de cardinal $p^{n(n-1)/2}$. Le groupe des matrices unipotentes⁷ triangulaires supérieures (qui est aussi un sous-espace affine de dimension $n(n-1)/2$) a le cardinal souhaité. Pour le cas général, on remarque que si l'on établit l'existence d'un p -Sylow pour un groupe G , il est facile (voir le lemme ci-dessous) de l'obtenir pour n'importe lequel de ses sous-groupes; par suite, il suffit de réaliser tout groupe fini d'ordre n comme sous-groupe de $GL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$: on réalise d'abord G comme sous-groupe de $\mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n$ en le faisant opérer par translation à gauche sur lui-même, puis on plonge G dans $GL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ en réalisant \mathfrak{S}_n comme le sous-groupe des *matrices de permutation*.

Lemme. Soit $H \subset G$ et S un p -Sylow de G . Alors, l'un des stabilisateurs (d'éléments) pour l'action de H (obtenue par restriction) sur l'espace homogène G/S est un p -Sylow de H .

Démonstration. Si toutes les orbites de H sur G/S avaient un cardinal divisible par p , il en serait de même de G/S , ce qui est exclu. Il existe donc un stabilisateur qui a un indice dans H premier avec p . Pour finir, il suffit de remarquer que tout stabilisateur, étant de la forme $gSg^{-1} \cap H$, pour $g \in G$, est conjugué au sous-groupe $S \cap g^{-1}Hg$ de S ; c'est donc un p -groupe⁸. ■

Remarques

a) Les p -Sylow sont conjugués. Considérons à cet effet un p -Sylow H quelconque. Le groupe H stabilise un point de G/S , il est donc contenu dans un conjugué de S : on conclut alors par un argument de cardinalité. Le même argument, dans le cas où H est simplement un p -groupe, prouve que tout p -groupe est contenu dans un p -Sylow.

b) Sur le corps \mathbb{F}_q , où $q = p^k$, il est facile de dénombrer les p -Sylow du groupe linéaire : leur nombre est égal à l'indice du normalisateur de

⁷ Une matrice M est dite *unipotente* si $\text{Id} - M$ est nilpotente ou, ce qui revient au même, si 1 est sa seule valeur propre.

⁸ Un p -groupe est un groupe dont le cardinal est une puissance de p .

l'un d'entre eux (cf. exercice 0.11.1). Si l'on prend le p -Sylow formé par les matrices unipotentes supérieures, son normalisateur est le groupe des matrices triangulaires supérieures dont le cardinal est $q^{n(n-1)/2}(q-1)^n$ (cf. exercice 0.11.71).

c) Toujours dans le cas du groupe linéaire sur les corps finis, tout p -Sylow laisse invariante une droite (cf. exercice 0.11.9). Ceci est en accord avec un théorème sur les représentations d'un p -groupe en caractéristique p , qui assure, en pareil cas, l'existence d'un point fixe (cf. [Ser], page 80).

d) Remarquons que le fait, d'une part, que l'indice du sous-groupe (des matrices de déterminant 1) $SL(n, F_q)$ dans $GL(n, F_q)$, qui vaut $q-1$, est premier avec p , et d'autre part, que le premier groupe est distingué dans le second, permet d'affirmer que ces deux groupes ont les mêmes p -Sylow sans avoir à connaître la forme de ceux-ci (cf. exercice 0.11.5).

e) On trouvera dans l'exercice 0.11.7 une autre démonstration du théorème de Sylow qui utilise une propriété de congruence (arithmétique) sur les coefficients binomiaux.

0.5 Aspect topologique

0.5.1. On dit que le groupe topologique⁹ G opère *continûment* sur l'espace topologique séparé X si l'application que l'on devine de $G \times X$ dans X est continue. Les stabilisateurs G_x pour x décrivant X sont alors fermés, et pour tout g , l'application $A_g : x \mapsto g \cdot x$ est un homéomorphisme de X .

Nous nous intéressons aux propriétés topologiques des bijections canoniques équivariantes φ_x , l'espace G/G_x étant muni de la *topologie quotient* (si s désigne la surjection canonique, \mathcal{O} est ouvert si et seulement si $s^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de G) et l'orbite de la topologie induite par celle de X .

0.5.2. Il est faux en général que la bijection continue φ_x soit un homéomorphisme (cf. [Mn-Ts], page 29); il existe néanmoins deux cas assez fréquents où l'on peut l'affirmer.

0.5.2.1. Commençons par le plus simple.

Théorème 1. *Quand le stabilisateur de x donne un quotient compact, l'application $\varphi_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. L'application φ_x est une bijection continue envoyant tout fermé (= compact) de G/G_x sur un compact (= fermé) de $G \cdot x$. C'est donc un homéomorphisme. ■

⁹ Pour tout ce qui concerne les rudiments sur les groupes topologiques, on pourra consulter [Mn-Ts].

Le résultat est en particulier vrai quand le groupe G lui-même est compact. Ainsi par exemple, quand le groupe spécial orthogonal $SO(n)$ opère sur la sphère unité S^{n-1} de \mathbb{R}^n pour le produit scalaire, on a, en identifiant le stabilisateur du premier vecteur de base $(1, 0, \dots, 0)$ au sous-groupe $SO(n-1)$, un homéomorphisme entre $SO(n)/SO(n-1)$ et S^{n-1} . Ceci permet, par une récurrence facile, de démontrer que le groupe $SO(n)$ est connexe et ce au moyen du

Lemme 2. *Si H et G/H sont connexes, alors il en est de même de G .*

Démonstration. Soit $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$ continue. La restriction de f à toute classe à droite modulo H est constante car gH est homéomorphe à H , donc connexe; l'application f définit par passage au quotient une application continue (pourquoi ?) qui est donc constante. Il en est de même pour f . ■

0.5.2.2. Un deuxième cas est donné par le

Théorème 3. *Si le groupe G est localement compact, dénombrable à l'infini (c'est-à-dire réunion dénombrable de compacts) et si l'orbite est localement compacte, les bijections φ_x sont des homéomorphismes.*

Démonstration. Cf. [Mn-Ts], page 33. ■

Remarques

a) La démonstration de ce théorème fait intervenir une propriété de Baire.
 b) Ce théorème permet par exemple de démontrer que le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$, des matrices de déterminant strictement positif, est connexe. En effet, on le fait opérer sur l'ouvert $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Comme tout ouvert dans \mathbb{R}^k est localement compact (cf. exercice 0.11.74), les hypothèses du théorème sont satisfaites : l'espace homogène $GL^+(n, \mathbb{R})/G_1$ (où l'on a noté G_1 le stabilisateur du premier vecteur de base) est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Les éléments de G_1 sont de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

où $a_i \in \mathbb{R}$ et $M \in GL^+(n-1, \mathbb{R})$; l'ensemble G_1 est donc homéomorphe à $GL^+(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Le lemme 2 précédent permet alors de conclure au moyen d'une récurrence qui commence avec $n = 1$, auquel cas $GL^+(1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_+^*$.

0.6 Aspect différentiel

C'est une situation plus difficile que la précédente (on se contente de la décrire en renvoyant à [Mn-Ts] pour plus de détails et d'autres développements). Le groupe G est alors muni d'une structure différentiable qui en fait un groupe de Lie (en pratique, le groupe G sera un sous-groupe fermé contenu dans le groupe linéaire; un tel groupe est alors une sous-variété différentiable de l'espace vectoriel des matrices). L'espace X est aussi muni d'une structure différentiable. Quand H est un sous-groupe fermé de G , l'espace topologique G/H est un espace *localement euclidien*¹⁰. Il peut être muni d'une structure de variété différentiable compatible avec l'action de G (c'est-à-dire telle que l'application que l'on devine de $G \times G/H$ dans G/H est différentiable) et de dimension égale à $\dim G - \dim H$.

La bijection canonique équivariante $\varphi_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x \subset X$ est alors une *immersion* (c'est-à-dire différentiable et de différentielle injective en tout point de l'espace de départ). L'orbite $G \cdot x$ n'est pas en général une sous-variété de X (ceci supposerait au moins que $G \cdot x$ soit localement compacte, ou, ce qui revient au même, localement fermée : voir les exercices 0.11.74 et 0-C.11.33). Elle le devient quand la condition nécessaire de locale-compacité est vérifiée, puisqu'on sait alors que l'application φ_x est un homéomorphisme et donne donc un *bon paramétrage*¹¹ de l'orbite.

0.6.1. On établira assez facilement dans la note 0-C qu'une classe de similitude dans $M(n, \mathbb{R})$ est localement compacte. Par suite, la bijection canonique équivariante associée à la matrice M , soit $\varphi_M : GL(n, \mathbb{R})/Z(M) \rightarrow \mathcal{O}_M =$ classe de similitude de M , est un difféomorphisme. L'espace tangent en l'identité à $Z(M)$ étant le sous-espace $\mathfrak{z}(M)$ (tout simplement, car ici $Z(M)$ est l'intersection d'un ouvert et de l'espace vectoriel $\mathfrak{z}(M)$), la classe de similitude de M est donc une sous-variété différentiable de $M(n, \mathbb{R})$ de dimension paire. L'application $\psi : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{O}_M =$ classe de similitude de M , donnée par $X \mapsto \exp(X) \cdot M \cdot \exp(-X)$, a pour différentielle au point 0 l'application $\delta = d\psi(0) : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow T_M(\mathcal{O}_M)$ donnée par $\delta(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(tX) - \psi(0)}{t} = XM - MX$.

Son noyau n'est autre que $\mathfrak{z}(M)$ et, vu les dimensions, elle est donc surjective, et induit un isomorphisme noté encore δ entre le quotient

¹⁰ C'est-à-dire : tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .

¹¹ On désigne ainsi une application $f : V_1 \rightarrow V_2$ qui est une immersion injective et qui réalise un homéomorphisme entre la variété V_1 et son image. L'image $f(V_1)$ est alors une sous-variété de V_2 et l'espace tangent à $f(V_1)$ en un point $f(v)$ est donné par l'image de la différentielle de f au point $v \in V_1$.

$M(n, \mathbb{R})/\mathfrak{z}(M)$ et l'espace tangent en M à la classe de similitude \mathcal{O}_M de M .

Proposition. *L'espace tangent à la classe de similitude de M est donné par l'image de l'application*

$$\text{ad}(M) : X \mapsto [M, X] = MX - XM.$$

La 2-forme différentielle Ω dont il a été question à la remarque de la page 5 se définit comme suit : elle va être $GL(n, \mathbb{R})$ -invariante, c'est-à-dire que pour tout g , $A_g^*(\Omega) = \Omega$ où $A_g : X \mapsto g \cdot X = gXg^{-1}$. Autrement dit, si $N = g \cdot M$ et si $\alpha_g : T_M(\mathcal{O}) \rightarrow T_N(\mathcal{O})$ est la différentielle¹² en M de A_g , alors α_g conserve les structures symplectiques sur ces espaces tangents. Pour définir Ω , il suffit donc de la donner en M , et qu'en M la 2-forme bilinéaire alternée Ω_M soit invariante par les α_g où g laisse fixe M , c'est-à-dire pour $g \in Z(M)$.

Mais on a déjà une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $M(n, \mathbb{R})/\mathfrak{z}(M) \simeq T_M(\mathcal{O})$, et l'on a une opération du groupe $Z(M)$ sur l'espace de départ, puisque si $P \in Z(M)$, PXP^{-1} commute avec M si X commute avec M , autrement dit les éléments de $Z(M)$ laissent stable $\mathfrak{z}(M)$ et donnent par passage au quotient une opération (linéaire) de $Z(M)$ sur $M(n, \mathbb{R})/\mathfrak{z}(M)$; de même $Z(M)$ opère sur $T_M(\mathcal{O})$ par $P \cdot X = \alpha_P(X)$. L'application δ est équivariante :

$$\begin{aligned} \delta(P \cdot \bar{X}) &= \delta(\overline{PXP^{-1}}) = (PXP^{-1}M - MPXP^{-1}) \\ &= P(XM - MX)P^{-1} = P \cdot \delta(\bar{X}). \end{aligned}$$

Pour construire une forme symplectique $Z(M)$ -invariante, il suffit donc de transporter par δ la forme symplectique $\bar{f} : (\bar{X}, \bar{Y}) \mapsto \text{tr}(M[X, Y])$ introduite dans la proposition 1 page 5, pourvu que celle-ci soit $Z(M)$ -invariante. Or

$$\begin{aligned} \bar{f}(P \cdot \bar{X}, P \cdot \bar{Y}) &= \bar{f}(\overline{PXP^{-1}}, \overline{PYP^{-1}}) = \text{tr}(M[PXP^{-1}, PYP^{-1}]) \\ &= \text{tr}(PM[X, Y]P^{-1}) = \text{tr}(M[X, Y]), \end{aligned}$$

car P et M commutent.

Établir enfin que Ω est fermée n'est pas difficile, mais sort du cadre proprement dit de ce volume. (Voir par exemple [Kir].)

0.7 Sous l'angle de la géométrie algébrique

Nous nous contenterons comme dans la section précédente d'une description sommaire de la situation, en renvoyant le lecteur à [Hum], ou

¹² Remarquons que, dans notre action, l'application A_g est linéaire et que sa différentielle en tout point est elle-même.

[Bor], ou au premier chapitre de [Cart]. Le groupe G est dans ce cadre (pour simplifier) un *groupe algébrique affine*, c'est-à-dire un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{K})$ (où \mathbb{K} est supposé algébriquement clos) dont l'ensemble sous-jacent est une *variété algébrique affine*, c'est-à-dire réalisable comme l'ensemble des zéros communs à une famille (finie) de fonctions polynomiales en plusieurs variables. L'ensemble X , quant à lui, est une *variété algébrique* (nous ne donnerons pas une définition précise de la notion mais signalons tout de même que cette condition est réalisée dans la pratique dès lors que l'ensemble X est un ouvert¹³ d'une variété algébrique affine¹⁴ ou *projective*¹⁵). L'action du groupe G sur la variété algébrique X est supposée, évidemment, algébrique.

0.7.1. Le résultat crucial, c'est que l'orbite $G \cdot x$ d'un point $x \in X$ est localement fermée (chose qui n'est pas acquise dans le cas différentiable, mais qui le devient en particulier quand les objets en présence sont algébriques, vu qu'un localement fermé pour la topologie de Zariski l'est aussi pour la topologie usuelle). On s'étendra plus longuement sur cet aspect des choses dans la note **0-C** où l'on discutera de la notion, tout aussi cruciale, d'ensemble constructible.

Quand H est un sous-groupe fermé du groupe algébrique affine G , le quotient G/H peut être muni d'une structure de variété algébrique qui a toutes les bonnes propriétés d'une *structure quotient*¹⁶ : les ouverts dans

¹³ La topologie dont il est ici question est la *topologie de Zariski*, dont les ouverts (ou ce qui revient au même, les fermés) sont essentiellement définis au moyen de fonctions polynomiales. Ils sont donc aussi ouverts (ou fermés) pour la topologie usuelle (de Hausdorff) quand le corps \mathbb{K} est égal à \mathbb{C} . L'inverse étant évidemment faux en général.

¹⁴ Quand l'ouvert est défini par une seule équation, on parlera d'*ouvert principal*; la variété algébrique obtenue est encore affine; ainsi le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ est une variété algébrique affine puisqu'il apparaît comme l'ensemble des zéros dans l'espace $M(n+1, \mathbb{K})$ de l'équation :

$$\det \left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 1,$$

où $M = (\lambda_{ij}) \in M(n, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

¹⁵ Une variété projective est donnée par l'ensemble des zéros dans l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ d'une famille (finie) de polynômes homogènes. Un ouvert d'une telle variété sera appelé variété *quasi-projective*.

¹⁶ Cette structure sur G/H est liée essentiellement au fait qu'un sous-groupe fermé H apparaît comme le stabilisateur d'une droite D dans une certaine action de G sur un espace vectoriel V (ceci est un théorème dû à Chevalley). Le quotient G/H est alors identifié à l'orbite dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ du point correspondant à la droite D . On transfère au quotient G/H la structure de variété quasi-projective que possède l'orbite, qui est localement fermée. La structure algébrique ainsi obtenue est indépendante du procédé, en particulier

G/H sont caractérisés par le fait que leurs images réciproques par la surjection canonique sont les ouverts saturés de G , et une application algébrique¹⁷ sur G , constante sur les classes modulo H , définit sur le quotient G/H une application qui est encore algébrique...

Quand le sous-groupe H est *distingué* dans G , le quotient G/H est algébrique affine. D'un autre côté, la variété algébrique G/H est projective si et seulement si H est *parabolique*, c'est-à-dire contient un sous-groupe de Borel de G . Dans le cadre de $GL(n, \mathbb{K})$, un sous-groupe de Borel signifiera un sous-groupe conjugué du sous-groupe $T(n, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures (cf. 0-C.11.45).

Enfin, une variété algébrique affine Z est dite *irréductible* si l'algèbre $K[Z]$ des fonctions régulières définies sur Z est intègre, ce qui équivaut à dire que l'idéal des fonctions polynomiales de l'espace ambiant qui s'annulent sur Z est premier. Une façon topologique de le dire est que tout ouvert (non vide) de Z est dense. Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $Z = G$, ceci équivaut à dire que le groupe G est connexe pour la topologie usuelle. On notera $K(Z)$ le corps des fractions de l'anneau intègre $K[Z]$, et on l'appellera le *corps des fonctions* (rationnelles) sur Z .

On peut énoncer

Théorème. Soit G un groupe algébrique affine irréductible opérant sur la variété algébrique X . La bijection canonique équivariante $\varphi_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$ est un isomorphisme de variétés algébriques si et seulement si l'application $f : G \rightarrow G \cdot x$ donnée par $g \mapsto g \cdot x$ est séparable, c'est-à-dire que la différentielle en e de f est surjective.

Remarques

a) Nous ne donnerons pas les détails nécessaires à la définition d'espace tangent et de différentielle. Indiquons cependant que sur \mathbb{C} , tout se passe pour ces notions comme dans le cadre de la géométrie différentielle usuelle, où l'on calcule des dérivées partielles et des jacobienes.

b) Le terme de *séparable* provient de ce que la surjectivité de la différentielle en e est équivalente au fait que l'extension de corps $K(G) \supset f^*(K(G \cdot x))$ est séparable¹⁸. Cette condition est donc automatiquement

de la représentation de G sur V .

¹⁷ Les flèches entre les objets algébriques s'appellent aussi des *morphismes* ou encore *fonctions régulières* quand ils arrivent dans le corps de base.

¹⁸ Le corps des fonctions sur l'orbite est le corps des fonctions d'un ouvert affine qui s'y trouve. Ceci ne dépend pas de l'ouvert, car l'orbite, comme G , est irréductible (au sens topologique)... Par ailleurs, une fonction régulière sur (un ouvert de) l'orbite donne par composition par f une fonction régulière sur G ; cette correspondance (qui passe au corps des fractions) est désignée par f^* .

réalisée en caractéristique zéro, et appliquer le théorème ci-dessus n'est dans ce cadre d'aucune difficulté.

c) Ayant à disposition la notion de dimension, on a toujours (donc sans les hypothèses du théorème) $\dim(G \cdot x) = \dim G - \dim G_x$ qui est aussi égale à la dimension du quotient.

d) Remarquons encore que variété algébrique affine et variété projective sont deux notions antinomiques : moralement, il y a trop de fonctions sur l'une et seulement les constantes sur l'autre. En fait, ceci découle essentiellement de ce que les variétés projectives sont complètes¹⁹ (notion algébrique qui correspond, lorsqu'on est sur \mathbb{C} , à la compacité pour la topologie usuelle) et que l'image d'un complet est un complet (donc un fermé). Aussi, une variété algébrique (irréductible) X qui est à la fois affine et projective est réduite à un point : en effet, si $X \subset \mathbb{K}^n$, la $i^{\text{ème}}$ projection envoie X sur un fermé (strict) de \mathbb{K} , car $\mathbb{K} \subset \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, n'étant pas fermé, n'est pas complet. On conclut sachant que les fermés (irréductibles) de \mathbb{K} sont les ensembles finis (réduits donc à un point).

e) La notion de variété complète pour la topologie de Zariski est à rapprocher de celle de variété compacte (l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par exemple) pour la topologie de Hausdorff. En effet, c'est un exercice classique de topologie que d'établir qu'un espace métrique E est compact si et seulement si l'application $pr_2 : E \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ applique les fermés sur les fermés. (On pourra, pour la réciproque, considérer par l'absurde une suite (x_n) dans E sans valeurs d'adhérence, et noter que la suite $(x_n, 1/n)$ est elle aussi sans valeurs d'adhérence et forme donc un fermé de $E \times \mathbb{C}$.)

0.7.2. Exemples

a) Vérifions que l'ensemble \mathcal{R}_p des matrices de rang p , qui apparaît comme une orbite sous l'action de Steinitz, est bien localement fermé : en effet, les matrices de rang inférieur ou égal à k sont obtenues comme les matrices dont les mineurs d'ordre $k+1$ sont tous nuls. Notons $\overline{\mathcal{R}_k}$ leur ensemble, qui est donc fermé. L'orbite \mathcal{R}_p est alors intersection de $\overline{\mathcal{R}_p}$ et du complémentaire de $\overline{\mathcal{R}_{p-1}}$.

b) Il est un peu plus délicat de vérifier que l'ensemble des matrices semblables à une matrice A donnée est encore localement fermé : on verra cela dans la note 0-C.

c) L'ensemble des triplets de droites distinctes du plan \mathbb{K}^2 est une variété algébrique affine de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})^3$. C'est une conséquence du théorème précédent

¹⁹ On dit qu'une variété algébrique X est *complète* si pour toute variété Y , la projection $pr_2 : X \times Y \rightarrow Y$ applique les fermés sur des fermés. En particulier, si $f : X \rightarrow Y$ est algébrique, l'ensemble $\text{Im}(f)$ est alors fermé, car égal à $pr_2\{(x, y); y = f(x)\}$.

qui, en caractéristique zéro, ne pose aucun problème : en effet, on a affaire à une orbite du groupe $GL(2, \mathbb{K})$ dont le stabilisateur est le sous-groupe distingué des matrices scalaires inversibles. Le résultat est quand même vrai en toute caractéristique (cf. [Hum]).

d) L'ensemble des *drapeaux* de type $(2, 5)$ de l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^9$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de sous-espaces vectoriels (E_1, E_2) emboîtés et de dimensions respectives 2 et 5, est une variété projective : c'est en effet une orbite sous l'action de $GL(E)$ (utiliser deux fois le théorème de la base incomplète) dont le stabilisateur est le sous-groupe parabolique formé par les matrices

$$\begin{bmatrix} \boxed{A} & \star & \star \\ 0 & \boxed{B} & \star \\ 0 & 0 & \boxed{C} \end{bmatrix},$$

où les « matrices » A, B et C sont des matrices carrées de tailles respectives 2, 3 et 4. La vérification de la séparabilité est laissée aux lecteurs plus expérimentés ; les autres pourront se placer en caractéristique zéro.

Remarque. L'idée suivante est efficace dans bien des situations : si un groupe algébrique irréductible opère sur un ensemble fini, alors il laisse fixes tous ses points. On s'en servira dans la suite à trois reprises : pour établir à un moment l'irréductibilité de certains polynômes (cf. exercice 0.11.57), pour justifier la normalité d'une certaine variété algébrique (voir les remarques qui suivent le corollaire 0-C.5.5.2), et enfin pour établir la trivialité d'un quotient qui est à la fois affine et complet (cf. exercices 0-C.11.45 et 0-C.11.46).

0.7.3. Quand un groupe G opère sur une variété X , il opère naturellement sur l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des fonctions régulières sur X . L'étude de ce problème, notamment la recherche des fonctions régulières qui sont invariantes sous l'action de G , est de haute importance. Ce problème est connu dans la littérature sous l'appellation de « théorie des invariants ». Nous l'examinerons dans la section suivante, essentiellement lorsque X est un espace vectoriel et que l'action de G sur X est linéaire. On se contentera ici d'une proposition simple et néanmoins étonnante

Proposition. Soit G un groupe algébrique affine opérant sur la variété algébrique affine X , et soit $f \in \mathbb{K}[X]$. Le sous-espace vectoriel engendré par les translatés de f sous l'action de G est de dimension finie.

Démonstration. La fonction $(g, x) \mapsto f(g \cdot x)$ est algébrique sur le produit $G \times X$. On peut donc écrire $f(g \cdot x) = \sum_i k_i(g) l_i(x)$. Les translatés de f sont donc dans le sous-espace engendré par les fonctions l_i ! ■

Cette constatation sert déjà dans la démonstration du théorème dû à Chevalley évoqué plus haut²⁰. On s'en servira de nouveau dans 0-C.11.43.

0.8 Représentations linéaires

Nous avons rencontré plus haut des opérations d'un type particulier : un groupe qui opère de façon linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, c'est-à-dire tel que les $A_g : x \mapsto g \cdot x$ soient linéaires. Le premier exemple est celui du groupe $GL(n, \mathbb{K})$ opérant sur \mathbb{K}^n . C'était aussi le cas de l'opération de Steinitz et de ses restrictions qui donnent les opérations de similitude et de congruence. De même les actions de $Z(M)$ sur $T_M(\mathcal{O})$ et sur $M(n, \mathbb{R})/\mathfrak{z}(M)$ sont linéaires.

Une action linéaire d'un groupe G sur un espace vectoriel E correspond donc à un homomorphisme de G dans le groupe linéaire $GL(E)$. On parlera alors de *représentation linéaire* du groupe G sur l'espace vectoriel E . L'étude de ces représentations forme tout un édifice du champ mathématique. Nous nous contenterons dans ce chapitre d'en examiner quelques aspects des plus simples.

Une représentation est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les A_g sont les sous-espaces triviaux. Elle est dite *orthogonale* (resp. *unitaire* si l'on est sur \mathbb{C} , ou sur un corps fini...) si les A_g conservent une forme quadratique non dégénérée (resp. un produit hermitien) sur E . Le *caractère* d'une représentation est l'application $\chi_A : G \rightarrow \mathbb{K}$ donnée par $g \mapsto \text{tr}(A_g)$.

0.8.1. Fonctions polynomiales invariantes. Quand le groupe G opère de façon linéaire sur l'espace vectoriel E , il opère aussi linéairement sur l'algèbre $\mathbb{K}[E]$ des fonctions polynomiales²¹ définies sur E : si $P \in \mathbb{K}[E]$, on pose $g \cdot P : x \mapsto P(g^{-1} \cdot x)$. L'algèbre des fonctions polynomiales invariantes,

²⁰ Elle sert aussi pour démontrer que tout groupe algébrique affine peut être réalisé comme sous-groupe (fermé) d'un groupe linéaire.

²¹ L'ensemble des fonctions polynomiales sur l'espace vectoriel E sera parfois noté $\mathcal{P}(E)$. Relevons au passage que la bonne façon (c'est-à-dire la façon intrinsèque) de définir l'algèbre des fonctions polynomiales sur l'espace vectoriel E est de dire que c'est l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(E^*)$ sur le dual de E , mais, pratiquement, une fonction polynomiale n'est autre qu'une fonction polynomiale des composantes de $v \in E$ sur une base de E (ceci ne dépend pas de la base).

c'est-à-dire $\{P; \forall g, g \cdot P = P\}$, sera notée $\mathbb{K}[E]^G$. C'est un résultat classique (et facile, du moment que l'on dispose de la notion de noethérianité) dû à Hilbert que d'affirmer que cette algèbre est, lorsque G est fini, de type fini (cf. exercice 0.11.49). Il est facilement vérifiable quand le groupe $G = \mathfrak{S}_n$ est réalisé comme le groupe des matrices de permutations de \mathbb{K}^n : les polynômes invariants ne sont autres que les polynômes symétriques, et un système fini de générateurs de l'algèbre qu'ils forment est donné par exemple par les fonctions symétriques élémentaires ou par les polynômes de Newton.

Les fonctions polynomiales invariantes sont constantes sur les orbites, et donnent de ce fait un moyen pour établir que deux points ne sont pas conjugués sous l'action de G . La recherche d'un système de générateurs est donc du plus grand intérêt, d'autant que, parfois, les fonctions polynomiales séparent les orbites, c'est-à-dire que si $P(x) = P(y)$ pour tout P invariant, alors x et y sont conjugués. C'est le cas par exemple de l'action du groupe \mathfrak{S}_n rencontrée ci-dessus (cf. exercice 0.11.64).

0.8.1.1. Exemples. On suppose \mathbb{K} algébriquement clos.

a) Considérons l'action du groupe $G = GL(n, \mathbb{K})$ opérant par conjugaison sur $E = M(n, \mathbb{K})$.

Proposition 1. *L'algèbre $\mathbb{K}[E]^G$ est engendrée par les n fonctions polynomiales : $M \mapsto \text{tr}(M^i)$ où $i \in [1, n]$, ou encore par les n fonctions polynomiales apparaissant comme coefficients du polynôme caractéristique $P_M(X) = \det(M - X\text{Id}_n)$ de la matrice M .*

Démonstration. Soit f une fonction polynomiale invariante par similitude; la restriction de f à l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{D \in M(n, \mathbb{K}) : D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), d_i \in \mathbb{K}\}$$

des matrices diagonales est une fonction symétrique des d_i , puisqu'une matrice diagonale $D \in \mathcal{D}$ est semblable à

$$\text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)}) \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_n;$$

par suite, il existe un polynôme P tel que

$$\bar{f}(D) = P(\text{tr } D, \text{tr } D^2, \dots, \text{tr } D^n).$$

Les applications $M \mapsto f(M)$ et $M \mapsto P(\text{tr } M, \text{tr } M^2, \dots, \text{tr } M^n)$ sont toutes deux invariantes sous l'action de $GL(n, \mathbb{K})$ et sont égales sur les matrices diagonales, donc aussi sur les matrices diagonalisables. Ces dernières forment un sous-ensemble Zariski-dense (cf. exercice 0.11.51); les applications sont donc égales. ■

Remarque. On donnera plus bas une autre démonstration de ce résultat. Notons par ailleurs que les fonctions polynomiales invariantes ne séparent pas dans ce cas les orbites : s'il est vrai que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, la réciproque est en général fausse.

b) Le deuxième exemple constitue un cas particulier de ce que l'on appelle le premier théorème fondamental de la théorie des invariants. On suppose toujours \mathbb{K} algébriquement clos. On définit $X = Y \times Y$ où $Y = M(n, \mathbb{K})$ et l'on se propose de déterminer l'algèbre $\mathbb{K}[X]^G$ des fonctions polynomiales invariantes sous l'action du groupe $G = GL(n, \mathbb{K})$ opérant sur X par $g \cdot (A, B) = (Ag^{-1}, gB)$ (se reporter à l'exercice 0.11.55 pour l'autre action naturelle de G sur X). Soit $\mu : X \rightarrow Y$ définie par $\mu(A, B) = A \cdot B$; l'application μ est surjective et son induite $\mu^* : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ qui à l'application polynomiale f associe $f \circ \mu$ est donc une injection, ce qui permet d'identifier $\mathbb{K}[Y]$ avec son image. Une application p dans $\mathbb{K}[X]$ est alors dans $\mathbb{K}[Y]$ si et seulement si $p = q \circ \mu$ où q est une application polynomiale sur Y . On peut énoncer

Proposition 2. *L'inclusion évidente $\mathbb{K}[Y] \subset \mathbb{K}[X]^G$ est en fait une égalité.*

Démonstration. Soit p une fonction polynomiale invariante sur X ; si B est inversible, on peut écrire $p(A, B) = p(AB, \text{Id}) = q(AB)$, où l'on a noté q l'application polynomiale sur Y donnée par

$$q : M \xrightarrow{s} (M, \text{Id}) \mapsto p(M, \text{Id}).$$

L'égalité $p(A, B) = q(AB)$ est valable sur l'ouvert (dense) de X formé des couples (A, B) tels que B est inversible, elle est donc valable partout. ■

c) Le troisième exemple apparaît naturellement lors de l'étude des transvections. On se propose de déterminer les fonctions polynomiales invariantes sur l'espace vectoriel $E \times E^*$, muni de l'action naturelle de $GL(E)$ donnée par $g \cdot (v, \varphi) = (g(v), {}^t g^{-1}(\varphi))$. Les fonctions polynomiales en $\varphi(v)$ sont des exemples de telles fonctions. Il s'agit de démontrer que ce sont les seules, autrement dit

Proposition 3. *Une fonction polynomiale sur $E \times E^*$, invariante sous l'action de $GL(E)$, se factorise à travers l'application $(v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$.*

Démonstration. Soit (v_0, φ_0) vérifiant $\varphi_0(v_0) = 1$ et soit p une fonction polynomiale invariante. Si le couple (v, φ) est dans l'ouvert $\mathcal{U} = (E - \{0\}) \times (E^* - \{0\})$, il est conjugué sous l'action de G au couple $(\varphi(v)v_0, \varphi_0)$ [voir par exemple la question b) de l'exercice 0.11.58 ou bien l'exercice 0.11.60]; il s'ensuit donc que $p(v, \varphi) = q(\varphi(v))$, où l'on a noté q la fonction

polynomiale sur \mathbb{K} , donnée par

$$\lambda \xrightarrow{s} (\lambda v_0, \varphi_0) \mapsto p(\lambda v_0, \varphi_0).$$

L'égalité $p(v, \varphi) = q(\varphi(v))$, valable pour (v, φ) parcourant l'ouvert (dense) \mathcal{U} , l'est partout. ■

0.8.1.2. La notion de quotient catégorique. On suppose toujours \mathbb{K} algébriquement clos. On dit que le couple formé par Y et $\phi : X \rightarrow Y$ (où ϕ est un morphisme de variétés algébriques) est un *quotient catégorique* pour la variété X munie d'une action d'un groupe algébrique affine G , s'il existe un morphisme $\phi : X \rightarrow Y$ constant sur les orbites et tel que tout morphisme $X \rightarrow Z$ constant sur les orbites se factorise (uniquement) à travers ϕ . Ceci permet alors d'identifier les deux algèbres $\mathbb{K}[Y]$ et $\mathbb{K}[X]^G$.

L'exemple de l'application $\phi : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$ donnée par $\phi(M) = (\text{tr}(M), \dots, \text{tr}(M^n))$ est un cas de cette notion, pour le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ opérant par similitude sur $M(n, \mathbb{K})$; il reste en effet à vérifier l'unicité de la factorisation à travers ϕ , c'est-à-dire à montrer que les fonctions $M \mapsto \text{tr}(M^i)$, pour $i \in [1, n]$, sont algébriquement indépendantes. Ceci découle aussitôt du fait que l'image de ϕ contient un ouvert : l'application est une submersion (cf. 0-C.5.1.1 où l'application ϕ est notée autrement) sur l'ouvert des matrices dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique; elle y est ouverte (voir la dernière question de l'exercice 0-C.11.33). Les deux autres exemples traités ci-dessus s'interprètent au moyen de cette notion, et suggèrent un moyen souvent efficace pour établir que le couple formé par Y et $\phi : X \rightarrow Y$ est un quotient catégorique pour l'action de G sur X . En effet, il suffit de trouver une section s de ϕ dont le saturé de l'image sous l'action de G contient un ouvert de X . Ce moyen s'applique aussi au premier exemple : l'application qui à une matrice associe les coefficients de son polynôme caractéristique a une section donnée par les matrices compagnons; l'ensemble des matrices semblables aux matrices compagnons est exactement l'ouvert des matrices dont le polynôme minimal et le polynôme caractéristique « coïncident » (cf. exercice 0-C.11.20). L'unicité de la factorisation s'établit en vérifiant, par exemple, que l'image de ϕ contient un ouvert dense de Y .

Remarque. L'existence d'un quotient catégorique est assurée quand le groupe G est *réductif*²² et la variété X affine. Ceci est essentiellement équivalent au fait que le théorème des invariants de Hilbert, qui est valable comme on l'a vu pour les groupes finis, est encore valable pour les groupes réductifs²³ : le quotient

²² Les sous-groupes fermés de $GL(n, \mathbb{K})$, et stables par transposition, donnent les exemples usuels de tels groupes.

²³ Le quatorzième problème de Hilbert soulevait en fait la question de savoir

catégorique est alors une variété algébrique affine et, plus précisément, la variété algébrique affine naturellement associée à l'algèbre (de type fini et réduite, i.e. sans éléments nilpotents autres que 0) des invariants (cf. [Hum], page 11).

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, l'application ϕ , dans un quotient catégorique général, n'est pas nécessairement surjective, même si le groupe est réductif. On démontre cependant qu'elle l'est lorsque la variété X est affine. C'est le cas des trois exemples traités précédemment, où X est un espace vectoriel. Nous verrons plus bas un exemple où ϕ n'est plus surjective et qui présente un intérêt en lui-même. Auparavant, rappelons que l'ouvert (principal) $\mathbb{K} - \{0\}$ est une variété algébrique affine mais que

Proposition 4. *L'ouvert $\mathbb{K}^n - \{0\}$ n'est jamais, pour $n \geq 2$, une variété algébrique affine.*

Démonstration. Le cas $n = 2$ est typique. Soit p un morphisme défini sur l'ouvert considéré. La restriction de p à l'ouvert principal $(\mathbb{K} - \{0\}) \times \mathbb{K}$ s'écrit $p_1(X, Y)/X^k$ où k est choisi minimal (cf. exercice 0.11.48); sa restriction à $\mathbb{K} \times \mathbb{K} - \{0\}$ s'écrit $p_2(X, Y)/Y^l$ avec la même condition sur l . On a donc, d'abord sur un ouvert et ensuite sur tout \mathbb{K}^2 , l'égalité $p_1(X, Y)Y^l = p_2(X, Y)X^k$. La factorialité de l'anneau $\mathbb{K}[X, Y]$ entraîne que $k = 1$, et donc que p est un polynôme, c'est-à-dire se prolonge à \mathbb{K}^2 tout entier. On sait d'après le théorème des zéros de Hilbert que tout idéal maximal dans l'algèbre $\mathbb{K}[V]$ des applications polynomiales sur une variété algébrique affine V est donné par les morphismes qui s'annulent en un point de V . Ce n'est pas le cas de l'idéal des morphismes (de l'ouvert considéré) qui sont sans terme constant²⁴. ■

On conserve les notations de l'exemple b) ci-dessus et l'on considère l'ouvert U_{n-1} des matrices dont le rang est supérieur ou égal à $n - 1$. L'ouvert $U = U_{n-1} \times U_{n-1}$ de X est stable sous l'action de G . Nous allons établir

Proposition 5. *Le couple formé par l'espace $M(n, \mathbb{K})$ et la restriction $\mu : U \mapsto M(n, \mathbb{K})$ est un quotient catégorique pour la variété U munie de l'action induite du groupe G .*

Avant de procéder à la démonstration, faisons quelques commentaires : il est facile de voir que l'image de l'application μ est donnée par l'ouvert U_{n-2} des matrices de rang supérieur ou égal à $n - 2$. La restriction de μ à U n'est donc plus surjective. La variété (*quasi-affine*²⁵) U est normale²⁶, les fonctions régulières

dans quelle mesure l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sous l'action d'un groupe G est de type fini. Un contre-exemple donné en premier par Nagata montrait que ce n'était pas toujours le cas.

²⁴ Retenons que les fonctions régulières sur $\mathbb{K}^n - \{0\}$ se prolongent lorsque $n \geq 2$ à l'espace ambiant. Ceci a rapport avec la notion de *normalité* (voir les commentaires qui suivent l'énoncé de la proposition ci-après).

²⁵ On appelle ainsi les variétés algébriques qui sont des ouverts de variétés algébriques affines. À comparer avec variété quasi-projective.

²⁶ Une variété algébrique affine irréductible X est dite *normale* si l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ de ses fonctions régulières est *intégralement close*, c'est-à-dire si les seuls éléments de

dessus sont donc des restrictions de fonctions polynomiales définies sur X . Si le morphisme p vérifie $p(Ag^{-1}, gB) = p(A, B)$ sur l'ouvert U , il vérifie la même condition sur X ; il s'ensuit que les fonctions régulières invariantes sur U proviennent de fonctions invariantes sur X qui, elles, se factorisent à travers $Y = \mathbb{K}^n$. La proposition découle donc facilement des résultats sur les variétés normales. En restant terre à terre, on donnera de la proposition une démonstration qui ne fait pas explicitement usage de la notion de normalité.

On utilisera dans la démonstration le lemme suivant

Lemme 6. *Le polynôme \det est irréductible dans l'anneau de polynômes en n^2 variables $\mathbb{K}[X_{ij}]$.*

Démonstration. Nous choisissons de donner de ce lemme une démonstration ayant une saveur de géométrie algébrique affine (on trouvera dans l'exercice 0.11.57 une démonstration plus élémentaire). L'ensemble des matrices de déterminant nul est égal à l'adhérence²⁷ de l'ensemble \mathcal{R}_{n-1} des matrices de rang $n-1$: en effet²⁸, la matrice singulière $M = P \operatorname{Diag}(\operatorname{Id}_r, 0, \dots, 0)Q$ de rang r est égale à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de $M_\varepsilon = P \operatorname{Diag}(\operatorname{Id}_r, \varepsilon \operatorname{Id}_{n-r-1}, 0)Q$. Mais \mathcal{R}_{n-1} est une orbite sous l'action de Steinitz du groupe $G \times G$, et la variété algébrique affine donnée par les matrices de déterminant nul est donc irréductible (cf. exercice 0.11.48), ce qui veut dire que l'idéal de cette variété est premier. Vu le théorème des zéros de Hilbert, cet idéal n'est autre que le radical²⁹ de l'idéal engendré par \det ; la factorialité de l'anneau $\mathbb{K}[X_{ij}]$ implique alors que le polynôme \det est *a priori* une puissance d'un polynôme premier, soit $\det = p^k$. On conclut que $k = 1$, grâce à la remarque suivante : la différentielle de \det en A n'est autre que la forme linéaire $X \mapsto \operatorname{tr}(\dot{A}X)$ (cf. exercice 0.11.47), qui est en particulier non nulle si A est de rang $n-1$, ce qui est faux si $k > 1$. ■

Démonstration de la proposition 5. Soit $p : U \rightarrow \mathbb{Z}$ une fonction régulière constante sur les orbites. Si A et B sont inversibles, on a $p(A, B) = p(AB, \operatorname{Id}) = q(AB)$ où q est la fonction régulière sur l'ouvert (principal) des matrices inversibles donnée par $q(M) = p(M, \operatorname{Id})$. Il existe donc (cf. exercice 0.11.48) un entier k , que l'on choisira minimal, et une fonction polynomiale f sur $M(n, \mathbb{K})$, tels que $\det(AB)^k p(A, B) = f(AB)$ pour tout couple de matrices A, B inversibles, et par densité pour tout couple de matrices dans U . Soit maintenant M une matrice

son corps des fractions qui sont des racines de polynômes unitaires à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ sont les éléments de l'algèbre elle-même.

²⁷ Attention : l'adhérence d'une partie pour la topologie de Zariski est plus grande que son adhérence pour la topologie de Hausdorff usuelle : ainsi \mathbb{Z} est fermé dans \mathbb{C} pour la topologie usuelle, et dense pour la topologie de Zariski sur \mathbb{C} . Il y a cependant égalité des adhérences si l'adhérence au sens de la topologie usuelle est un fermé de Zariski; c'est le cas par exemple de l'adhérence de $(\mathbb{C}^*)^{(n-1)} \times \{0\}$ dans \mathbb{C}^n .

²⁸ La démonstration donnée est valable pour le corps \mathbb{C} ; le lecteur est invité à l'adapter au cas général.

²⁹ Le radical d'un idéal \mathfrak{a} se définit comme l'ensemble des éléments dont une puissance est dans \mathfrak{a} .

quelconque de rang $n - 1$, on a $f(M) = \det(M)^k p(M, \text{Id}) = 0$ dans le cas où $k \geq 1$. La fonction f s'annule donc sur les matrices de rang $n - 1$ et donc, par densité, sur les matrices de déterminant nul; elle est donc, d'après le théorème des zéros de Hilbert et d'après l'irréductibilité du déterminant, divisible par le déterminant, ce qui contredit le caractère minimal de k . Aussi, l'entier k est nul et le morphisme q est défini sur $M(n, \mathbb{K})$ tout entier. ■

0.9 Produits semi-directs de groupes

0.9.1. Les produits semi-directs sont très bien appréhendés en termes de groupes opérant. On rencontrera certains exemples dans la suite de l'ouvrage. On se donne un groupe G opérant sur X et l'on suppose que X lui-même (désormais noté H) est muni d'une structure de groupe et que les actions A_g des éléments de G sur H sont des homomorphismes du groupe H . On construit alors un nouveau groupe appelé *produit semi-direct* de H par G pour l'action A et noté $H \times_A G$. L'ensemble sous-jacent est le produit de H et de G , et la loi de groupe est donnée³⁰ par $(h, g) \cdot (h', g') = (h \cdot A_g(h'), gg')$. Si l'on identifie H et G avec leurs images dans le produit, le groupe H apparaît alors comme sous-groupe distingué, et les automorphismes intérieurs par les éléments g de G (qui laissent stable H) ne sont alors autres que les A_g agissant dans H . On est donc en présence d'une suite exacte (courte)³¹ et d'une section³² privilégiée σ qui est un *homomorphisme* de groupes (et qui sera l'inclusion,

³⁰ Si l'on se souvient que $(h, g) = h \cdot g$ une fois que G et H ont été réalisés comme sous-groupes du produit semi-direct, il est facile de multiplier $(h, g) \cdot (h', g') = hgh'g' = hgh'g^{-1} \cdot gg' = (h \cdot A_g(h'), gg')$.

³¹ L'idée de suite exacte courte n'est pas plus profonde, en première approximation, que l'idée de décomposition (canonique) d'un homomorphisme de groupes (voir cependant l'exercice 0.11.68). Il s'agit, étant donné un homomorphisme $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$, entre deux groupes d'écrire son noyau, son image et de relever le fait que l'image est isomorphe au quotient du groupe G_1 par le noyau de φ . Si donc deux homomorphismes $\varphi_1 : G_1 \rightarrow G_2$ et $\varphi_2 : G_2 \rightarrow G_3$ vérifient $\text{Im}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_2)$, on dira que la suite (supercourte) $G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3$ est exacte en G_2 . Ceci exige évidemment davantage que $\varphi_2 \circ \varphi_1 = e$, condition qui est équivalente à $\text{Im}(\varphi_1) \subset \text{Ker}(\varphi_2)$. Exprimer maintenant que la suite (courte)

$$\{e\} \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\varphi} K \longrightarrow \{e\}$$

est *exacte* revient à dire qu'elle est exacte à chaque étape, ce qui signifie ici que $\text{Im}(i) = \text{Ker}(\varphi)$ mais aussi que l'application i est injective et que l'application φ est surjective (on aura noté qu'il n'y a pas « beaucoup » d'homomorphismes allant dans un sens ou dans l'autre entre un groupe G et un groupe trivial).

³² L'application de projection pr_2 étant surjective (donc « inversible » à droite), on appelle *section* toute application s (définie sur G et) telle que $pr_2 \circ s = \text{Id}_G$.

une fois G réalisé comme sous-groupe du produit semi-direct)

$$\{e\} \rightarrow H \xrightarrow{i} H \times_A G \xrightleftharpoons[\sigma]{pr_2} G \rightarrow \{e\}.$$

L'élément $x \in H \times_A G$ correspond donc au couple $(x pr_2(x)^{-1}, pr_2(x))$ et l'action de G sur H est donnée par les $A_g(h)$ définis par $i(A_g(h)) = \sigma(g)i(h)\sigma(g)^{-1}$, ces derniers éléments étant dans l'image de i puisqu'ils sont dans le noyau de pr_2 .

Étant donné un groupe S et deux sous-groupes H et G , où l'on a supposé H distingué dans S , alors l'application de $H \times_{A_i} G$ dans S (où A_i est l'action de G sur H par automorphismes intérieurs dans S), qui est donnée par $(h, g) \mapsto hg$, est un isomorphisme si et seulement si $S = HG$ et $H \cap G = \{e\}$ (cf. **0.11.69**). On dit quand c'est le cas que l'on a un *produit semi-direct interne* et que G est un *complément* de H dans S .

Une section étant déterminée par son image (pourquoi ?), il y a donc correspondance, dans la situation de la suite exacte ci-dessus, entre les sections qui sont des homomorphismes de groupes et les compléments de H dans $H \times_A G$, la section privilégiée σ correspondant au plongement évident de G dans le produit.

Un produit semi-direct est un produit direct (pour l'action³³ A) si l'action A de G sur H est triviale (c'est-à-dire que $\forall g \in G, A_g(h) = h$), c'est-à-dire encore qu'une fois H et G plongés dans S , alors ils commutent, ce qui équivaut facilement à dire que G est distingué dans S .

0.9.2. Certains auteurs choisissent pour le produit semi-direct l'une des notations $G \ltimes H$ ou $H \rtimes G$. On ne saurait préférer l'une des notations à l'autre. Ceci d'ailleurs n'est point nécessaire du moment que l'on précise l'action A (chose qui est indispensable même quand les groupes sont donnés au départ comme sous-groupes de S , auquel cas on adoptera, comme on l'a fait plus haut, la notation A_i pour rappeler que l'on a des automorphismes intérieurs). On mettra alors le A en indice du côté du groupe G qui agit, et G est placé après H comme dans la suite exacte !

0.9.3. Exemples

a) Le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ est isomorphe au produit semi-direct du sous-groupe distingué $SL(n, \mathbb{K})$ et de \mathbb{K}^* , pour l'action de \mathbb{K}^* sur $SL(n, \mathbb{K})$

³³ C'est utile parfois de le préciser, dans la mesure où un groupe S peut être produit semi-direct de deux de ses sous-groupes isomorphes à H et G , qui ne commutent pas, bien que S soit isomorphe par ailleurs au produit direct $H \times G$. On vérifiera à titre d'exercice que c'est le cas dans l'exemple du produit semi-direct d'un groupe G (non commutatif) par lui-même, où l'action est donnée par les automorphismes intérieurs.

définie par

$$\alpha \cdot M = \text{Diag}(\alpha, 1, \dots, 1) M \text{Diag}(\alpha^{-1}, 1, \dots, 1).$$

La suite exacte associée à l'homomorphisme $\det : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ admet la section $\alpha \mapsto \text{Diag}(\alpha, 1, \dots, 1)$. L'isomorphisme est donc donné par

$$M \in GL(n, \mathbb{K}) \mapsto (M \cdot \text{Diag}(\det(M)^{-1}, 1, \dots, 1), \det M).$$

Il est facile de vérifier que ce n'est pas un produit direct (comparer avec **0.11.67**).

b) L'application qui à une matrice associe sa diagonale est un homomorphisme surjectif du groupe $T(n, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures inversibles sur le sous-groupe $D(n, \mathbb{K})$ des matrices diagonales inversibles dont le noyau est le sous-groupe $U(n, \mathbb{K})$ des matrices unipotentes supérieures. Il s'ensuit donc que le groupe $T(n, \mathbb{K})$ est produit semi-direct interne du groupe $U(n, \mathbb{K})$ et du groupe $D(n, \mathbb{K})$.

Remarquons au passage une chose bien utile, à savoir que le groupe $T(n, \mathbb{K})$ est le normalisateur de $U(n, \mathbb{K})$ dans $GL(n, \mathbb{K})$: en effet, si l'on calcule, pour $P = (p_{ij})$ dans le normalisateur, le coefficient n, n de $P(\text{Id} + E_{1n})$, qui doit être égal au coefficient correspondant de TP où la matrice T est unipotente, on obtient aussitôt que p_{n1} est nul; de proche en proche, on arrive ainsi à montrer que P est triangulaire. Le groupe $T(n, \mathbb{K})$ est donc égal à son propre normalisateur, car si une matrice normalise $T(n, \mathbb{K})$, elle normalise $U(n, \mathbb{K})$ pour raison de valeurs propres. (Voir aussi **0.11.71**.)

c) Soit G un groupe opérant linéairement par π sur l'espace vectoriel V . On appelle *groupe de Takif* associé le produit semi-direct $V \times_{\pi} G$. Les deux situations particulières suivantes sont familières en géométrie affine : lorsque le groupe G est le groupe linéaire $GL(V)$ et lorsque c'est le groupe \mathbb{K}^* , avec les actions évidentes. On obtient respectivement le groupe affine et le (sous-) groupe des homothéties-translations, tous deux attachés à l'espace vectoriel V considéré comme espace affine avec le vecteur nul comme origine.

0.9.4. Suites exactes scindées et/ou scindables. Lorsque dans une suite exacte

$$\{e\} \rightarrow H \xrightarrow{i} S \xrightarrow{p} G \rightarrow \{e\}$$

la surjection p a une section σ qui est un homomorphisme de groupes, on dit alors que la suite exacte est *scindée* (relativement à σ). L'existence d'une section σ qui soit un homomorphisme³⁴ est équivalente au fait que

³⁴ On devrait plutôt dire que la suite exacte est alors *scindable*; mais souvent on ne fait pas (à tort) la distinction entre la possibilité de scinder une suite exacte et le fait de la scinder effectivement relativement à une section précise.

le sous-groupe distingué $i(H)$ a un complément dans S (en l'occurrence $\sigma(G)$)³⁵. À chaque choix d'une section σ correspond une action A_σ de G sur $H : (g, h) \mapsto g \cdot h = i^{-1}(\sigma(g)i(h)\sigma(g)^{-1})$, et donc un isomorphisme entre S et le produit semi-direct $H \times_{A_\sigma} G$.

Une suite exacte peut ne pas être scindable malgré la présence d'une action A de G sur H découlant naturellement du cadre de la suite exacte : l'action ne se factorise pas alors à travers une section qui soit un *homomorphisme*, et le groupe S n'est pas isomorphe au produit semi-direct $H \times_A G$. Considérons en effet le cas où le groupe H est un sous-groupe distingué commutatif de S ; l'action de S par automorphismes intérieurs ($\tau_x, x \in S$) sur le groupe H est alors triviale pour $x \in H$; elle se factorise donc à travers S/H qui est isomorphe à G et donne ainsi un homomorphisme de G dans $\text{Aut}(H)$ ³⁶. Pour peu que le groupe H n'ait pas de complément dans S , on est alors dans le cas qui vient d'être décrit. Les exemples de $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ réalisé comme sous-groupe de $S = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou du groupe $S = \mathbb{H}_8$ (voir également la note consacrée aux groupes \mathbb{H}_8 et $SL(2, \mathbb{F}_3)$) sont là pour nous en convaincre³⁷.

0.10 Espaces symétriques

Ce sont, pour simplifier, les espaces homogènes du type G/H où H est l'ensemble des points fixes d'un automorphisme involutif σ défini sur le groupe de Lie connexe G ³⁸. Nous renvoyons à [Mn-Ts], pages 246 et suivantes, ou à [Loo] ou [Hel] pour plus de détails. L'ensemble des formes réelles de \mathbb{C}^n (qui s'identifie à $GL(n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{R})$), ou bien celui des lagrangiens de l'espace symplectique \mathbb{R}^{2n} , qui s'identifie à $U(n)/O(n)$, sont des exemples d'espaces symétriques. La présence de l'involution enrichit considérablement la situation. Nous nous contenterons pour l'illustrer des résultats suivants

Théorème 1. *L'application $\varphi : G/H \rightarrow S$ donnée par $\bar{x} \mapsto x\sigma(x^{-1})$ réalise un homéomorphisme entre l'espace symétrique G/H et l'ensemble S*

³⁵ L'exemple du groupe diédral \mathcal{D}_4 (voir la note suivante) est le bienvenu pour mieux comprendre tout cela : on y trouve en effet des sous-groupes distingués qui ont deux, une ou aucune classe de conjugaison de compléments.

³⁶ Notons au passage que l'action ainsi obtenue de G sur H est triviale si et seulement si H est dans le centre de S .

³⁷ Notons enfin avant de clore (provisoirement) ces considérations sur la notion de produit semi-direct que cette notion, importante et délicate à la fois, ne doit pas être traitée à la légère, et qu'elle trouve son prolongement dans le cadre de la cohomologie des groupes (en bas degré).

³⁸ En fait, le sous-groupe H est en général coïncé entre le groupe des points fixes d'une involution et la composante neutre de celui-ci.

des transformations symétriques³⁹ définies par les $x\sigma(x^{-1})$ quand x décrit le groupe G .

Démonstration. On fait agir transitivement le groupe G sur S en posant : $g \cdot x\sigma(x^{-1}) = gx\sigma((gx)^{-1})$. Le stabilisateur est donné par H et l'homéomorphisme découle de 0.5.2.1, vu le théorème suivant que l'on admettra et qui implique que S est localement compact. ■

Théorème 2. *L'ensemble S des éléments symétriques est la composante connexe de l'élément neutre e dans l'ensemble $T = \{x \in G; x\sigma(x) = e\}$.*

Il n'est pas difficile (et c'est un joli exercice) de vérifier ce dernier résultat dans les deux exemples d'espaces symétriques donnés plus haut (cf. [Mn-Ts], page 256).

0.11 Exercices

Les séparateurs horizontaux entre les énoncés indiquent un changement de thème.

Les résultats qui vont suivre sont de nature variée. Les uns sont de simples exercices d'entraînement. D'autres (tels les théorèmes de Sylow ou le lemme de Schur) doivent être gardés en mémoire⁴⁰; on s'en servira souvent. Ceux qui concernent les petits groupes, notamment les isomorphismes $\mathfrak{A}_5 \simeq PSL(2, \mathbb{F}_5) \simeq SL(2, \mathbb{F}_4)$, inaugurent l'apprentissage de quelques exemples de groupes auxquels on fera souvent appel pour illustrer ou vérifier certains résultats. Le mode choisi pour les étudier mélange agréablement des méthodes linéaires et des méthodes propres à la théorie des groupes. Toute une série d'exercices est consacrée par ailleurs à une meilleure compréhension de la notion de quotient catégorique. Enfin, certains exercices ont été naturellement engendrés par les objets rencontrés dans le texte du chapitre; ils illustrent bien la variété des thèmes liés aux actions de groupes, mais n'entendent évidemment pas le faire de façon exhaustive.

0.11.1. Sous-groupes conjugués. a) On fait opérer G sur ses sous-groupes par conjugaison : $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$. Le stabilisateur d'un sous-groupe H pour cette action n'est autre que le *normalisateur* $\mathcal{N}_G(H)$ de H dans G , qui peut être défini comme le plus grand sous-groupe de G contenant H comme sous-groupe distingué. Vérifier que le nombre de sous-

³⁹ Les éléments dans G agissent en effet sur l'espace symétrique.

⁴⁰ Le lecteur saura reconnaître seul la valeur de tel ou tel énoncé.

groupes conjugués à un sous-groupe H (dans le cas où ce nombre est fini) est égal à l'indice du normalisateur $\mathcal{N}_G(H)$ dans G .

b) Montrer que deux sous-groupes conjugués ont des normalisateurs conjugués.

c) Soit G un groupe opérant sur un ensemble X . Montrer que l'application $x \mapsto G_x$ est une application équivariante pour les actions de G opérant par conjugaison sur lui-même et sur ses sous-groupes.

0.11.2. La notion de profil. a) Soit x_0 et x_1 deux points d'une même orbite \mathcal{O} dans l'action de G sur X ayant le même stabilisateur H . Montrer que tout élément de G qui applique x_0 sur x_1 est dans $\mathcal{N}_G(H)$. En déduire une bijection entre l'ensemble des points de l'orbite \mathcal{O} ayant H comme stabilisateur et le quotient $\mathcal{N}_G(H)/H$.

b) Soit $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ la relation d'équivalence, sur \mathcal{O} , associée à l'application $x \mapsto G_x$. Montrer que les classes d'équivalence sont équipotentes⁴¹. Montrer que la classe d'équivalence de l'élément x est formée des points fixes de l'action de G_x sur l'orbite.

c) On dira que deux orbites dans X ont même *profil* si les stabilisateurs de leurs points sont conjugués. Ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $G \backslash X$ des orbites. Les classes d'équivalence seront appelées profils. Si H est le stabilisateur de x , on notera X_H l'ensemble des points de X qui ont H pour stabilisateur. Montrer que les orbites de X qui passent par les points de X_H vivent dans un même profil \mathcal{P}_H et que ce profil ne dépend que de la classe de conjugaison de H dans G . On a ainsi une correspondance bijective entre les classes de conjugaison des stabilisateurs de l'action et les profils d'orbites.

d) Montrer que toute orbite dans le profil \mathcal{P}_H rencontre X_H en un ensemble équipotent à $\mathcal{N}_G(H)/H$. Établir enfin qu'on a un paramétrage biunivoque naturel des orbites qui se trouvent dans le profil \mathcal{P}_H au moyen des orbites du groupe $\mathcal{N}_G(H)/H$ sur X_H . Ce point de vue s'avère particulièrement adapté à l'étude des sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple. Voir aussi 0.11.54 puis 0.11.46 ainsi que l'étude des profils dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ pour l'action adjointe (cf. 0-C.9.4).

0.11.3. a) Montrer qu'une matrice d'ordre n ayant $n + 1$ directions propres, n quelconques parmi elles étant indépendantes, est nécessairement scalaire.

b) Quel est le sous-espace vectoriel engendré par toutes les matrices qui laissent stables n quelconques des $n + 1$ directions précédentes ?

⁴¹ Quand leur cardinal sera fini, on l'appellera le *nombre de Weyl* de l'orbite.

INDICATION.— On trouve tout $M(n, \mathbb{K})$. Se ramener au cas où les $n + 1$ directions sont données par les vecteurs de la base canonique de \mathbb{K}^n et par le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Écrire alors $E_{ij} = E_{ii} + (E_{ij} - E_{ii})$.

c) On se donne deux bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 de \mathbb{K}^n . Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par les endomorphismes qui laissent stables les directions définies par tous les vecteurs de l'une puis l'autre des deux bases est de dimension au plus $2n - 1$.

INDICATION.— Il s'agit du sous-espace vectoriel de $M(n, \mathbb{K})$ engendré par les $2n$ matrices E_{ii} et $PE_{ii}P^{-1}$ (avec $i \in [1, n]$), où P est la matrice de passage de l'une des bases à l'autre. Remarquer alors que la somme des n premières matrices est égale à la somme des n dernières.

0.11.4. On se donne deux sous-groupes emboîtés $H_1 \subset H_2$ d'un groupe G que l'on supposera fini pour simplifier. La partition sur G donnée par les classes à gauche modulo H_2 peut être affinée comme suit : on partitionne chaque classe gH_2 en translatant par g la partition dans H_2 modulo H_1 .

a) Montrer que la partition ainsi obtenue est la partition de G modulo les classes à gauche H_1 . En déduire que

$$\text{Card}(G/H_1) = \text{Card}(H_2/H_1) \cdot \text{Card}(G/H_2).$$

b) Montrer que la partition sur G/H_1 donnée par le groupement de toutes les classes modulo H_1 qui sont contenues dans une même classe dans G modulo H_2 n'est autre que celle définie par $xH_1 \sim yH_1$ si et seulement si il existe $h_2 \in H_2$ tel que $xh_2 = y$.

c) Quand le groupe H_1 est distingué dans H_2 , le groupe quotient opère naturellement sur G/H_1 , et les orbites sont les mêmes que les classes dans (b). Montrer que l'espace des orbites s'identifie à G/H_2 .

On conviendra de représenter la situation issue des deux sous-groupes emboîtés, qu'ils soient distingués ou non, par l'écriture

$$\{e\} \rightarrow H_2/H_1 \rightarrow G/H_1 \rightarrow G/H_2 \rightarrow \{e\}.$$

0.11.5. Les autres théorèmes de Sylow. Ils expriment que dans un groupe fini d'ordre $n = p^\alpha m$ où p ne divise pas m , les p -Sylow sont conjugués [voir la remarque a) de 0.4.5], que leur nombre est congru à 1 (mod p), et divise m . On remarquera que l'unicité dans G d'un p -Sylow H équivaut au fait que H est distingué.

a) On fait opérer H dans $G/\mathcal{N}_G(H)$. Montrer que seule l'origine est laissée fixe dans cette action. Chacune des autres orbites a donc un cardinal qui est une puissance (strictement positive) de p : conclure alors pour le premier point.

INDICATION.— Dire qu'il y a une classe \bar{g} fixe est équivalent à l'inclusion $H \subset g\mathcal{N}_G(H)g^{-1}$. Montrer alors que $g^{-1}Hg$ est un p -Sylow du normalisateur et qu'il est donc égal à H .

b) Pour montrer que le nombre des p -Sylow divise m , on écrit $\{e\} \rightarrow \mathcal{N}_G(H)/H \rightarrow G/H \rightarrow G/\mathcal{N}_G(H) \rightarrow \{e\}$. Le quotient de m par le nombre des p -Sylow est égal à l'indice de H dans son normalisateur.

0.11.6. Soit G un groupe opérant sur un espace X . On note X^g l'ensemble des points fixes de X sous l'action de $g \in G$.

a) On suppose dans un premier temps que l'action est transitive. Établir alors que $\text{Card}(G) = \sum_{g \in G} \text{Card}(X^g)$.

INDICATION.— Considérer l'ensemble $\{(g, x) \in G \times X, g \cdot x = x\}$ et calculer son cardinal par « sections horizontales et verticales »; les sections horizontales ont toutes le même cardinal puisque les stabilisateurs sont conjugués.

b) Vérifier cela directement dans le cadre de l'opération d'un groupe fini G sur l'ensemble de ses p -Sylow. (On aura à remarquer au passage que deux p -Sylow distincts ont des normalisateurs distincts.)

c) Montrer que dans le cas général⁴², on a

$$\text{Card}(G \backslash X) = \left(1 / \text{Card}(G)\right) \left(\sum_{g \in G} \text{Card}(X^g)\right).$$

d) *Les bagues de Suleima.* Le fiancé de Suleima, orfèvre arithméticien, prépare dans son atelier une bague pour sa bien-aimée. Il a en effet promis, comme preuve de son amour, de lui offrir *chaque mois une bague en or différente* incrustée d'éméraldes, de saphirs ou de rubis. Chaque bague a 10 pierres précieuses, régulièrement réparties, et se distingue des autres uniquement par l'ordonnancement des pierres qu'elle comporte. Pendant combien de temps Suleima pourra-t-elle être rassurée sur l'amour que lui voue son futur mari ?

INDICATION.— Faire opérer le groupe additif $G = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sur l'ensemble X des applications définies sur $Y = \{1, \dots, 10\}$ à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Une application sera invariante sous l'action de $g \in G$ si et seulement si elle est constante sur les orbites dans Y du sous-groupe engendré par g . Si $\varphi(m)$ est l'indicateur d'Euler de l'entier m , le nombre N de

⁴² La formule combinatoire qui suit, déjà intéressante dans le cadre d'un groupe G opérant sur lui-même par conjugaison, s'avère aussi utile lors de la détermination des sous-groupes finis de $SO(3)$ (qui prélude à la classification des 5 polyèdres réguliers de l'espace). Dans ce dernier cas, on fait opérer $G \subset SO(3)$ sur l'ensemble des « pôles » de ses éléments non triviaux (les deux pôles d'une rotation consistent en les points d'intersection de son axe avec la sphère-unité de l'espace \mathbb{R}^3).

bagues différentes s'écrit donc [voir la question d) de l'exercice 0-A.6.49] $N = 1/10 \sum_{d|10} \varphi(d) 3^{10/d}$. Suleima pourra dormir tranquille.

0.11.7. L'idée sous-jacente à la démonstration que l'on a donnée du théorème (principal) de Sylow réside dans la remarque suivante : si G opère sur un ensemble X de cardinal premier avec p et si les stabilisateurs sont tous des p -groupes, alors l'un des stabilisateurs est un p -Sylow de G .

Le problème consiste donc à trouver un ensemble X satisfaisant aux conditions précédentes. Dans le texte du chapitre, on plongeait G dans un groupe plus grand contenant un p -Sylow évident, et l'on faisait opérer G sur l'espace déduit du grand groupe par passage au quotient modulo le p -Sylow en question. Le grand groupe considéré était $GL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, mais on peut se contenter du groupe symétrique \mathfrak{S}_n si l'on a une connaissance de ses p -Sylow, qui ne sont pas si difficiles à décrire (voir le chapitre 2). On peut cependant procéder autrement en faisant opérer le groupe G (par translations à gauche) sur l'ensemble de ses parties de cardinal $q = p^\alpha$, où q est la puissance maximale de p divisant le cardinal $n = qm$ du groupe. Sachant que $C_{mq}^q \equiv C_m^1 \pmod{p}$ pour tout $q = p^s$ (considérer, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, le polynôme $(1 + X^q)^m = (1 + X)^{mq}$ et y regarder le coefficient du monôme de degré q), on est sûr que l'une des orbites de G sur ses parties à p^α éléments est de cardinal premier avec p . Il reste à vérifier que le stabilisateur H d'une partie Q est un p -groupe. Ceci résulte simplement de ce que $HQ = Q$, et Q est donc une réunion de classes à gauche modulo H ; son cardinal est de ce fait un multiple du cardinal de H .

Remarque. On trouvera dans [Ser], page 81, encore une autre démonstration du théorème de Sylow.

0.11.8. a) On note $G = SL(2, \mathbb{F}_p)$ le groupe des matrices de déterminant 1 à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que le cardinal de $SL(2, \mathbb{F}_p)$ est égal à $(p-1)p(p+1)$.

b) Montrer que

$$P_1 = \left\{ u_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{F}_p \right\} \quad \text{et} \quad P_2 = \left\{ v_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{F}_p \right\}$$

sont deux p -Sylow de G .

c) Montrer que P_1 et P_2 engendrent G , ou, ce qui revient au même, que les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

engendrent G .

INDICATION.— Soit

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{F}_p).$$

Pour $c = 0$, on a $d = a^{-1}$ et on écrit $M = v_{a^{-1}(a^{-1}-1)}u_a v_{1-a^{-1}}u_{ba^{-1}-1}$. Pour $c \neq 0$ et $a \neq 0$, on écrit $M = v_{a^{-1}c}M_1$ et on se ramène au cas précédent. Enfin si $c \neq 0$ et $a = 0$, on écrit $M = u_{-1}M_2$ et on se ramène au deuxième cas considéré. (Consulter éventuellement [Tsu], page 121.)

d) Montrer qu'un sous-groupe H de G qui contient deux p -Sylow de G est égal à G .

INDICATION.— Les p -Sylow dans G sont au nombre de $p+1$ (d'après 0.11.5, ou bien d'après 0.11.1). Dénombrer de même les sous-groupes de Sylow dans H et conclure grâce à c).

0.11.9. a) Vérifier que dans le groupe $GL(3, \mathbb{F}_2)$, il y a vingt-et-un 2-Sylow, et que dans l'espace de dimension trois \mathbb{F}_2^3 , il y a sept droites.

b) Voyez-vous une justification au fait que l'un de ces nombres divise l'autre ?

c) Montrer que dans le cas des matrices 2×2 seulement, ces deux nombres sont égaux et valent $q+1$, où $q = p^k$ est le cardinal du corps de base.

INDICATION.— Si S est le p -Sylow standard donné dans la base canonique, on lui associe la droite engendrée par le premier vecteur de base, et qui est la seule droite que ce groupe laisse invariante. Ceci permet de définir alors une unique application $GL(n, \mathbb{F}_q)$ -équivariante entre l'espace homogène des p -Sylow et celui des droites de \mathbb{F}_q^n . Nous sommes alors dans une situation de la forme

$$\{e\} \rightarrow H_2/H_1 \rightarrow G/H_1 \rightarrow G/H_2 \rightarrow \{e\}.$$

0.11.10. a) Soit G un groupe d'ordre $2n$ avec n impair $\neq 1$. Montrer que G n'est pas simple⁴³.

INDICATION.— Faire opérer G sur lui-même à gauche (pour $g \neq e$, A_g n'a pas de points fixes). Cela donne $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_{2n}$. Montrer alors qu'il y a dans G une permutation de signature -1 (il existe dans G un élément d'ordre 2, qui agit donc sans points fixes). Considérer enfin $G \cap \mathfrak{A}_{2n}$, où \mathfrak{A}_{2n} est le groupe alterné.

b) Appliquer ceci au groupe $SL(2, \mathbb{F}_2)$.

INDICATION.— $\text{Card}(SL(2, \mathbb{F}_2)) = 6$. Il est facile de montrer que l'on a $SL(2, \mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.

⁴³ On dit qu'un groupe fini est *simple* s'il n'est pas réduit à $\{e\}$ et si ses seuls sous-groupes distingués sont triviaux. Certains auteurs excluent de cette catégorie les groupes (abéliens) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier.

c) Montrer qu'un groupe d'ordre 1000 ne peut être simple.

INDICATION.— Il possède en fait un sous-groupe de Sylow distingué.

0.11.11. a) Soit G opérant sur G/H où H est un sous-groupe de G . Décrire le noyau de $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}(G/H)$.

(On trouve $\text{Ker } \varphi = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$.)

b) Soit p le plus petit facteur premier de $\text{Card}(G)$ où G est un groupe fini. On suppose que H est d'indice p . Montrer que H est distingué. Appliquer ceci au cas $p = 2$.

INDICATION.— Considérer un diviseur premier de $\text{Card}(G/\text{Ker } \varphi)$, qui est nécessairement un diviseur premier de $p!$ et de $\text{Card}(G)$.

Pour le cas $p = 2$, on peut procéder autrement en remarquant que les deux relations, compatibles d'un côté ou de l'autre (avec la loi du groupe) et associées à H , définissent la même partition sur G ; elles sont donc identiques !

0.11.12. Un isomorphisme $PGL(2, \mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$

a) Calculer le centre Z de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

b) Calculer le cardinal de $PGL(2, \mathbb{F}_3) = GL(2, \mathbb{F}_3)/Z$.

c) Calculer le nombre de droites du plan $P = \mathbb{F}_3^2$ défini sur $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

d) Faire opérer $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sur les droites de P et en déduire l'isomorphisme annoncé.

e) Noter que, dans cet isomorphisme, signature et déterminant se correspondent.

Remarque. Pour établir la surjectivité de $GL(2, \mathbb{F}_3) \rightarrow \mathfrak{S}_4$, ce dernier groupe étant réalisé comme le groupe des permutations des quatre droites de \mathbb{F}_3^2 , on peut procéder aussi comme suit : le birapport des quatre droites, considérées comme points de la droite projective, est égal à -1 (seul scalaire dans $\mathbb{K} - \{0, 1\}$) quel que soit l'ordre de ces points. Par suite, toute permutation provient d'une application projective.

0.11.13. Un isomorphisme $PSL(2, \mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$. Faire opérer comme dans l'exercice précédent le groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$ sur les droites du plan défini sur \mathbb{F}_3 . On en déduit un homomorphisme injectif de $PSL(2, \mathbb{F}_3)$ dans \mathfrak{S}_4 . Pour établir que l'image est contenue dans \mathfrak{A}_4 , on peut utiliser l'exercice 0.11.8, ou bien se rappeler que $SL(2, \mathbb{F}_3)$ est engendré par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(cf. exercice 0-A.6.14), ou enfin utiliser l'exercice suivant.

0.11.14. Montrer que le seul sous-groupe d'indice 2 de \mathfrak{S}_n est \mathfrak{A}_n .

INDICATION.— Si un homomorphisme $\varphi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ vaut 1 sur une transposition τ_{ij} , il vaut aussi 1 sur toutes les transpositions (deux transpositions sont conjuguées : $g\tau_{ij}g^{-1} = \tau_{g(i)g(j)}$) et vaudrait alors 1 sur \mathfrak{S}_n , qui est engendré par les transpositions.

0.11.15. Un isomorphisme $SL(2, \mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$. Le déduire de l'action du groupe $SL(2, \mathbb{F}_4)$ sur les cinq droites du plan défini sur \mathbb{F}_4 , en utilisant l'exercice précédent.

0.11.16. Montrer que pour $n \geq 5$, le groupe \mathfrak{A}_n est simple (cf. [Per], chapitre 1); pour le cas crucial $n = 5$, voir plus bas, dans 0.11.24, une méthode qui, au lieu de travailler avec les permutations, utilise les éléments du groupe $SL(2, \mathbb{F}_4)$, et donc un peu d'algèbre linéaire.

0.11.17. Soit G un groupe simple d'ordre 60. Montrer qu'il n'existe pas dans G de sous-groupes d'ordre 15, 20 ou 30. (On montre, dans 0.11.18, que le groupe \mathfrak{A}_5 est le seul exemple d'un tel groupe.)

De même, montrer qu'un groupe simple d'ordre 168 ne peut avoir de sous-groupes d'ordre 28, 42, 56 ou 84. Le groupe $PSL(2, \mathbb{F}_7)$ est un exemple d'un tel groupe, et l'on montre (encore qu'assez difficilement) qu'à isomorphisme près, c'est d'ailleurs le seul.

INDICATION.— On raisonne par l'absurde en faisant opérer G sur G/H , d'où une injection (pourquoi ?) de G dans $\mathfrak{S}(G/H) \simeq \mathfrak{S}_4$ (quand $\text{Card } G = 15$).

0.11.18. Soit G un groupe simple d'ordre 60. Montrer que $G \simeq \mathfrak{A}_5$.

INDICATION.— L'exercice serait facile si l'on pouvait établir que G possède cinq 2-Sylow d'ordre 4, car alors on aurait une application $G \rightarrow \mathfrak{S}_5$ nécessairement injective et l'on conclurait grâce à l'exercice 0.11.14. On procède en fait autrement en passant par les 5-Sylow qui sont au nombre de six (cf. 0.11.5). On en déduit une injection de G dans \mathfrak{S}_6 , injection qui arrive en fait dans \mathfrak{A}_6 (sous-groupe dérivé⁴⁴ de \mathfrak{S}_6), puisque G est égal à son sous-groupe dérivé (pourquoi G ne peut-il être abélien ?). Il s'agit alors de montrer qu'un sous-groupe H d'indice 6 dans \mathfrak{A}_6 est isomorphe

⁴⁴ Le sous-groupe dérivé d'un groupe G , noté $D(G)$ ou encore G' , est le sous-groupe engendré par les commutateurs $\{x, y\} = xyx^{-1}y^{-1}$ quand x et y décrivent G . C'est clairement un sous-groupe distingué dans G .

à \mathfrak{A}_5 . Pour cela, on fait opérer (transitivement) \mathfrak{A}_6 sur son quotient par H . Comme \mathfrak{A}_6 est simple et égal à son groupe dérivé, on obtient ainsi une injection de \mathfrak{A}_6 dans lui-même. On termine comme dans l'exercice 0.11.19.

Remarque. On établit (cf. [Art], page 167), en faisant appel aux trans-vections, que les groupes $PSL(n, \mathbb{F}_q)$ sont tous simples sauf deux d'entre eux : $PSL(2, \mathbb{F}_2)$ et $PSL(2, \mathbb{F}_3)$. Les groupes $SL(2, \mathbb{F}_4)$ et $PSL(2, \mathbb{F}_5)$ sont donc simples. Comme il est facile de voir que leur cardinal est 60, ils sont donc isomorphes à \mathfrak{A}_5 . Pour notre part, nous établirons cela autrement.

0.11.19. On suppose $n \geq 5$. Soit H un sous-groupe de \mathfrak{S}_n d'indice n ; montrer que H est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} .

INDICATION.— Commencer par remarquer que si G opère sur X , et si φ est l'homomorphisme de groupes $G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ associé, alors $\varphi(G_{x_0})$ est contenu dans le stabilisateur de x_0 dans $\mathfrak{S}(X)$, de sorte que si φ est injectif et $\text{Card } G_{x_0} = (n-1)!$, où $n = \text{Card } X$, alors G_{x_0} est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} . Appliquer ceci à $G = \mathfrak{S}_n$ et $X = G/H$: pour établir l'injectivité de φ , noter que \mathfrak{A}_n est le seul sous-groupe distingué propre de \mathfrak{S}_n pour $n \geq 5$ et que $\text{Ker } \varphi$ qui est inclus dans H ne peut être égal à \mathfrak{A}_n , car alors $(n-1)! = \text{Card } H \geq \text{Card}(\text{Ker } \varphi) = n!/2$; contradiction.

0.11.20. a) Établir que les sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_n , pour $n \geq 5$, sont $\{1\}$, \mathfrak{A}_n et \mathfrak{S}_n .

INDICATION.— Commencer par remarquer que si un sous-groupe d'ordre 2 dans \mathfrak{S}_n était distingué, l'élément non trivial du groupe serait central, ce qui est impossible, puisque le centre de \mathfrak{S}_n est réduit à l'identité. Discuter ensuite sur l'intersection du sous-groupe distingué H avec \mathfrak{A}_n . Cf. 0.11.16.
b) Calculer le groupe dérivé de \mathfrak{S}_n .

0.11.21. Un isomorphisme $PGL(2, \mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ qui fait correspondre signature et déterminant : on fait opérer $GL(2, \mathbb{F}_5)$ sur les six droites du plan construit sur $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Conclure grâce à un dénombrement et à l'exercice 0.11.19.

Remarque. Le groupe $\mathfrak{S}_5 \simeq PGL(2, \mathbb{F}_5)$ opère transitivement sur les six droites du plan \mathbb{F}_5^2 ; il s'injecte en un sous-groupe d'indice 6 dans \mathfrak{S}_6 sans être donc égal au stabilisateur d'un point de $\{1, \dots, 6\}$. On reviendra sur ce phénomène lié à la nature des automorphismes de \mathfrak{S}_n , qui sont tous intérieurs sauf dans le cas de \mathfrak{S}_6 (cf. [Per], page 36), à l'occasion de l'étude du groupe orthogonal $SO(3, \mathbb{F}_5)$. (Voir le chapitre 3.)

0.11.22. a) Établir directement que \mathfrak{S}_5 possède un sous-groupe d'indice six.

INDICATION.— Montrer que les 5-Sylow de \mathfrak{S}_5 sont au nombre de 6. Utiliser **0.11.5** et **0.11.20**

b) Montrer que dans \mathfrak{A}_5 , il y a 24 éléments d'ordre 5.

0.11.23. a) Dédurre des exercices **0.11.21** et **0.11.14** un isomorphisme $PSL(2, \mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$ déjà annoncé dans **0.11.18**.

b) À partir de maintenant, on pourra pour étudier l'un de ces groupes se placer éventuellement et suivant la convenance dans les autres. Ainsi, il est immédiat de constater qu'il y a six 5-Sylow dans $SL(2, \mathbb{F}_4)$ en les comptant dans $PSL(2, \mathbb{F}_5)$ (cf. **0.11.9**). De même, il est immédiat, en se plaçant dans $SL(2, \mathbb{F}_4)$, de se convaincre qu'il y a cinq 2-Sylow dans \mathfrak{A}_5 . Comme on sait par ailleurs qu'ils sont tous conjugués, dans $SL(2, \mathbb{F}_4)$, au sous-groupe $U(2, \mathbb{F}_4)$, et que tout élément $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est d'ordre 2, il s'ensuit qu'un 2-Sylow est isomorphe dans \mathfrak{A}_5 à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En remarquant qu'un 2-Sylow de $SL(2, \mathbb{F}_4)$ est un sous-espace affine de dimension 1 de $M(2, \mathbb{F}_4)$, montrer que l'intersection de deux 2-Sylow distincts est réduite à l'élément neutre.

c) En déduire qu'il y a quinze éléments d'ordre 2 dans $SL(2, \mathbb{F}_4)$. Retrouver le résultat en se plaçant dans \mathfrak{A}_5 (un élément d'ordre 2 est alors un produit de deux transpositions à supports disjoints).

d) Retrouver aussi le résultat en se plaçant dans $GL(2, \mathbb{F}_5)$. Il s'agit de dénombrer les matrices M telles que $\det M = 1$ et $M^2 = \pm \text{Id}$. On pourra se servir de Cayley-Hamilton pour les matrices 2×2 , de l'identité $X^2 + 1 = (X - 2)(X - 3)$ et du fait que la classe de similitude de $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ a pour cardinal $(24 \cdot 20)/16 = 30$. On trouve en tout 32 matrices.

e) Montrer, en se plaçant dans \mathfrak{A}_5 , qu'il y a une seule classe de conjugaison pour les éléments d'ordre 2. On pourra aussi se placer dans $GL(2, \mathbb{F}_4)$, où toute matrice d'ordre 2 est semblable (pourquoi ?) à $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer qu'on peut choisir la matrice de passage P dans $SL(2, \mathbb{F}_4)$. (Remplacer P par λP , sachant que $\lambda \mapsto \lambda^2$ est surjective, car injective.)

0.11.24. Simplicité de \mathfrak{A}_5 . Soit H un sous-groupe distingué de \mathfrak{A}_5 non réduit à l'élément neutre⁴⁵.

⁴⁵ On s'abstiendra évidemment dans cet exercice d'utiliser l'isomorphie $\mathfrak{A}_5 \simeq PSL(2, \mathbb{F}_5)$ qu'on a établie en invoquant la simplicité de \mathfrak{A}_5 . On pourra, par

- a) Montrer que si H contient un des éléments d'ordre 3 de \mathfrak{A}_5 , il les contient tous. (Utiliser le fait que les 3-Sylow sont conjugués). De même pour les éléments d'ordre 5.
- b) Montrer que si H contient un des éléments d'ordre 2, il les contient tous. [Utiliser e) de l'exercice précédent.]
- c) En déduire que H est égal à \mathfrak{A}_5 . (Se rappeler le cardinal de chacune des classes de conjugaison et le fait que l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe.)

0.11.25. a) Montrer que dans le groupe simple à 60 éléments, il y a dix 3-Sylow et donc 20 éléments d'ordre 3. (Remarquer que s'il n'y en avait que 4, le normalisateur de l'un d'entre eux serait d'ordre 15 – cf. 0.11.17.) Les éléments d'ordre 3 dans \mathfrak{A}_5 ne sont autres que les cycles d'ordre 3. Calculer directement leur nombre.

- b) Montrer que tout sous-groupe H d'ordre 6 est le normalisateur d'un 3-Sylow unique (considérer un 3-Sylow dans H). Montrer que tous les sous-groupes d'ordre 6 sont conjugués, et qu'ils sont au nombre de 10.
- c) Montrer que, dans $SL(2, \mathbb{F}_4)$, l'ensemble formé par les éléments

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

quand α décrit \mathbb{F}_4^* , est un groupe non commutatif à six éléments. Quels sont ses éléments d'ordre 3 ? Retrouver le fait que les éléments d'ordre 3 sont au nombre de 20 et qu'ils sont tous conjugués (se rappeler que $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ et $\alpha^{-1} = \alpha^2$).

- d) Montrer que l'ensemble formé de l'identité et des permutations $\sigma = (123), \sigma^2, (12)(45), (13)(45), (23)(45)$ est le sous-groupe à six éléments attaché au 3-Sylow défini par σ (ou σ^2). Noter qu'il apparaît comme le stabilisateur dans \mathfrak{A}_5 d'une des dix parties à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

0.11.26. Soit G le groupe simple à 60 éléments, et soit B un sous-groupe à 12 éléments.

- a) Montrer qu'il y a quatre 3-Sylow dans B . (S'il y en avait un seul, le groupe B serait contenu dans le normalisateur d'un 3-Sylow qui n'a que 6 éléments.)
- b) En dénombrant les éléments de B d'ordre 2 et 3, montrer que B est nécessairement le normalisateur d'un 2-Sylow dans G .

contre, utiliser le fait que \mathfrak{A}_5 est isomorphe à $SL(2, \mathbb{F}_4)$. Reprendre aussi le présent exercice en remplaçant \mathfrak{A}_5 par $PSL(2, \mathbb{F}_5)$. On obtient une nouvelle démonstration de la simplicité de ce dernier groupe.

c) Soit B un sous-groupe à 12 éléments de $SL(2, \mathbb{F}_4)$. Montrer que les éléments de B sont simultanément trigonalisables sur \mathbb{F}_4 .

INDICATION.— Le sous-groupe B est conjugué du normalisateur du 2-Sylow standard de $SL(2, \mathbb{F}_4)$.

d) Montrer que les sous-groupes d'ordre 12 de $SL(2, \mathbb{F}_4)$ sont les stabilisateurs de droites du plan P . En déduire que deux sous-groupes d'ordre 12 se coupent suivant un 3-Sylow. Montrer aussi qu'un 3-Sylow est l'intersection de deux sous-groupes uniques d'ordre 12. (Repenser aux stabilisateurs de droites.)

e) Montrer que dans \mathfrak{A}_5 , les sous-groupes d'ordre 12 sont les stabilisateurs de points de $\{1, \dots, 5\}$; ils sont donc isomorphes à \mathfrak{A}_4 . Retrouver le fait que l'intersection de deux 2-Sylow distincts est triviale.

f) Montrer qu'un sous-groupe d'ordre 12 ne peut contenir de sous-groupe d'ordre 6. Un argument possible ici (voir la note sur le birapport où l'on étudie en détail \mathfrak{A}_4) serait : un tel sous-groupe normaliserait un 2 et un 3-Sylow, il serait donc commutatif...

0.11.27. Un isomorphisme $\text{Aut}(\mathfrak{A}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$

a) Montrer que le groupe \mathfrak{S}_5 s'injecte dans le groupe des automorphismes de \mathfrak{A}_5 . (Remarquer que le centralisateur de \mathfrak{A}_5 est trivial.)

b) Soit maintenant un automorphisme Φ de \mathfrak{A}_5 laissant invariants les cinq sous-groupes d'ordre 12. Montrer qu'il laisse invariants les 3-Sylow (cf. exercice précédent) ainsi que les sous-groupes d'ordre 6. Sachant qu'il doit exister au moins deux sous-groupes d'ordre 6 distincts qui se coupent suivant un élément d'ordre 2 [sinon, il y aurait trop d'éléments d'ordre 2; voir aussi le b) de l'exercice suivant], montrer que Φ laisse fixes tous les éléments d'ordre 2 et par suite qu'il est trivial. (Utiliser le fait qu'il n'y a aucun sous-groupe propre de G d'ordre ≥ 15 , cf. 0.11.17.)

c) En déduire une injection du groupe des automorphismes de \mathfrak{A}_5 dans \mathfrak{S}_5 et conclure.

0.11.28. a) Montrer qu'il existe dans \mathfrak{A}_5 des sous-groupes d'ordre 10 et qu'un tel sous-groupe, que l'on notera \mathcal{D}_5 , est maximal en ce sens qu'il n'est contenu dans aucun sous-groupe non trivial. (Ce sont les normalisateurs des 5-Sylow, cf. 0.11.1.)

b) On rappelle qu'un sous-groupe à six éléments de \mathfrak{A}_5 est attaché à une partie à trois éléments de $\{1, \dots, 5\}$. Discuter, suivant l'intersection de deux parties à trois éléments, du cardinal de l'intersection de deux sous-groupes de \mathfrak{A}_5 d'ordre 6.

0.11.29. On s'intéresse aux éléments d'ordre 5 dans $SL(2, \mathbb{F}_4)$.

a) Montrer qu'un élément d'ordre 5 ne peut avoir 1 comme valeur propre.

(On pourra considérer la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

b) Montrer que, dans $\mathbb{F}_4[X]$, on a

$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = (X^2 + \alpha X + 1)(X^2 + \alpha^2 X + 1),$$

où α est un générateur du groupe multiplicatif \mathbb{F}_4^* .

c) Montrer qu'il y a deux classes de conjugaison des éléments d'ordre 5 dans $SL(2, \mathbb{F}_4)$, contenant chacune 12 éléments. (On pourra considérer les matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha^2 \end{bmatrix}.)$$

Noter en particulier que si M est dans une classe de conjugaison, alors M^2 est dans l'autre.

d) Retrouver cela dans le cadre de \mathfrak{A}_5 . Noter en particulier que le cycle $\sigma = (12345)$ n'est pas conjugué à σ^2 dans \mathfrak{A}_5 .

e) Retrouver cela dans le cadre de $PSL(2, \mathbb{F}_5)$.

0.11.30. a) Soit $k \geq 5$ un nombre premier divisant $p^{2l} - 1$, où p est également premier. Alors le polynôme $1 + X + X^2 + \dots + X^{k-1}$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{F}_q[X]$, où $q = p^l$.

INDICATION.— Considérer un élément M d'ordre k dans le groupe $GL(2, \mathbb{F}_q)$ (d'après Sylow, il en existe). Si M est une matrice scalaire, notre polynôme aura une racine dans \mathbb{F}_q ; dans le cas contraire, le polynôme caractéristique de M (qui est alors égal à son polynôme minimal) divisera $X^k - 1$: vu l'hypothèse $k > 3$, notre polynôme n'est donc pas irréductible.

Ainsi le polynôme $1 + X + \dots + X^4$ est réductible sur \mathbb{F}_4 et aussi sur tous les \mathbb{F}_{p^2} où p est un nombre premier congru à 3 ou à 7 modulo 10. Enfin quand p est congru à 1, il admet une racine dans chaque \mathbb{F}_{p^2} . (Utiliser pour ce dernier point le fait que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.)

b) Soit $P(X)$ un polynôme de degré 4 à coefficients dans \mathbb{F}_p , montrer que $P(X)$ est réductible sur \mathbb{F}_{p^2} . (Remarquer que les racines de $P(X)$ sont toutes dans \mathbb{F}_{p^4} , l'extension $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^4}$ étant galoisienne.)

0.11.31. a) Soit H un sous-groupe d'un groupe fini G . On suppose $H \neq G$. Montrer que $G \neq \bigcup_{x \in G} xHx^{-1}$.

INDICATION.— On pourra chercher à contrôler le cardinal de la réunion ci-dessus, réunion que l'on peut indexer par $x \in G/N(H)$.

b) Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini. Soit p un entier tel que $0 < p < n$. Montrer qu'il existe $u \in GL(E)$ n'ayant aucun sous-espace stable de dimension p .

0.11.32. a) Montrer que dans toute orbite de $GL(n, \mathbb{K})$ opérant par congruence sur l'espace vectoriel $\mathfrak{so}(n)$ des matrices antisymétriques, il y a une matrice (diagonale en blocs 2×2) de la forme

$$\text{Diag}(J, J, \dots, J, 0, \dots, 0), \quad \text{où } J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En déduire que deux matrices antisymétriques sont congruentes si et seulement si elles ont même rang.

INDICATION.— Une forme f bilinéaire antisymétrique non nulle possède des plans hyperboliques (un plan P est dit *hyperbolique* s'il possède une base où la matrice de la restriction de f à $P \times P$ est précisément égale à J). Un tel plan étant non isotrope, un raisonnement par récurrence peut s'engager facilement.

b) Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique est un carré dans \mathbb{K} .

c) Montrer qu'il existe sur l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre $2n$ une fonction polynomiale unique (de degré n), appelée *pfaffien* et notée $A \mapsto Pf(A)$, vérifiant $Pf(\mathcal{J}) = 1$ (où $\mathcal{J} = \text{Diag}(J, \dots, J)$) et $Pf(A)^2 = \det(A)$ pour tout A .

INDICATION.— Considérer la matrice antisymétrique générale (obtenue en remplaçant les coefficients dans \mathbb{K} par $n(n-1)/2$ indéterminées) et une racine (bien choisie) de son déterminant, racine qui est *a priori* une fraction rationnelle. Vérifier alors, en invoquant la factorialité d'un anneau de polynômes (à coefficients dans un corps), que cette racine est en fait un polynôme.

d) Montrer que $Pf({}^tPAP) = \det(P)Pf(A)$ pour toute matrice A antisymétrique. En déduire que tout élément du groupe $Sp(n, \mathbb{K})$ des matrices M vérifiant ${}^tM\mathcal{J}M = \mathcal{J}$ est de déterminant 1.

e) Soit A une matrice antisymétrique non inversible. Montrer que la comatrice \tilde{A} de A est nulle.

Montrer qu'il existe sur l'espace vectoriel $\mathfrak{so}(2n)$ une application polynomiale qui coïncide avec la fonction $A \mapsto \tilde{A}/\det(A)$ sur les matrices antisymétriques inversibles.

INDICATION.— À un scalaire près, cette fonction n'est autre que la différentielle du pfaffien quand $\mathfrak{so}(2n)$ a été identifié à son dual.

f) En s'inspirant de la démonstration du lemme 0.8.1.6, montrer alors que le polynôme pfaffien est irréductible.

0.11.33. Matrices r -équivalentes. Pour démontrer qu'une matrice M de rang p est r -équivalente à la matrice $R_p = \text{Diag}(\text{Id}_p, 0, \dots, 0)$, on considère d'abord une base de l'espace de départ, obtenue en complétant au moyen de vecteurs (v_1, \dots, v_p) une base du noyau de M , et ensuite une base de l'espace à l'arrivée, obtenue en complétant la base $\{M(v_1), \dots, M(v_p)\}$ de l'image de M avec $n - p$ vecteurs. On effectue alors un double changement de bases.

Résoudre les questions suivantes en faisant appel à la notion de matrices r -équivalentes.

- a) Montrer que le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.
 - b) Montrer que toute matrice est somme de deux matrices inversibles. (On commencera par le faire pour les matrices R_p .)
 - c) Montrer que toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles.
 - d) Toute matrice de déterminant nul est produit de deux matrices de déterminant nul.
 - e) Montrer que les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.
- INDICATION.— Quand l'une des matrices est inversible, les matrices sont semblables. Se ramener alors au cas où l'une des deux matrices est la matrice R_p et effectuer directement le calcul.
- f) Montrer qu'une matrice non inversible A dans $M(n, \mathbb{K})$ est diviseur de zéro bilatère, c'est-à-dire qu'il existe une matrice B non nulle vérifiant $AB = BA = 0$.
 - g) Montrer que si A est non inversible, il existe B telle que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

INDICATION.— Multiplier à gauche et à droite R_p par la matrice E_{1n} de la base canonique.

h) Montrer qu'étant donnée une matrice M , il existe toujours une matrice inversible P telle que $MPM = M$.

INDICATION.— Utiliser le b) de l'exercice suivant.

i) Soit $f : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, une fonction multiplicative, c'est-à-dire vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$. On suppose f non nulle et distincte de la fonction constante 1. Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si $\det(A) = 0$.

INDICATION.— Commencer par remarquer que l'application f est non nulle sur les matrices inversibles; considérer ensuite le produit (évidemment nul) de toutes les matrices diagonales ayant chacune p fois le nombre 1 et $n - p$ fois le nombre 0 sur la diagonale. La fonction f s'annule sur l'une d'elles et est donc nulle sur toutes les matrices de rang p .

j) Montrer que dans tout hyperplan H de $M(n, \mathbb{K})$ il existe une matrice inversible.

INDICATION.— Écrire l'équation de H sous la forme $\text{tr}(AX) = 0$, et se ramener au cas où $A = R_p$.

0.11.34. a) Montrer que, pour l'opération de $GL(n, \mathbb{K})$ par translations à gauche sur $M(n, \mathbb{K})$, toute orbite contient une matrice symétrique.

b) Montrer que toute orbite contient un *projecteur* (c'est-à-dire une matrice M telle que $M^2 = M$).

c) Qu'en est-il pour les matrices antisymétriques ? (Remarquer que le rang d'une matrice antisymétrique est pair.)

INDICATION.— Se ramener à des matrices simples grâce à l'opération de Steinitz, puis penser congruence et similitude. De façon plus précise, pour la question a) par exemple : si $M = PR_rQ$, alors ${}^tQP^{-1}M$ est symétrique. Enfin, on pourra remarquer que toute matrice de rang $2r$ est r -équivalente à une matrice de la forme $\text{Diag}(J, \dots, J, 0)$ où $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

0.11.35. On s'intéresse toujours à l'action de l'exercice précédent.

a) Montrer que pour que l'orbite de M contienne des matrices ayant toutes leurs valeurs propres distinctes, il faut et il suffit que $\text{rang } M \geq n - 1$; on suppose $\text{Card}(\mathbb{K})$ assez grand.

b) Montrer que la condition dans a) est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que dans l'orbite de M , il y ait une matrice dont le polynôme minimal soit égal au polynôme caractéristique.

0.11.36. Montrer que si F est un sous-espace de \mathbb{K}^n , il existe une matrice symétrique S à coefficients dans \mathbb{K} telle que $\text{Ker}(S) = F$.

INDICATION.— Utiliser l'exercice 0.11.34 ainsi que les remarques de la page 7. Énoncer des exercices analogues traduisant les autres résultats des deux exercices précédents.

0.11.37. Soit $\Delta(X)$ un polynôme unitaire de degré n et soit M une matrice de $M(n, \mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour qu'il existe une matrice inversible Q telle que le polynôme caractéristique de QM soit précisément $(-1)^n \Delta(X)$.

INDICATION.— Commencer par le cas où le polynôme Δ est scindé. Si r désigne la multiplicité de 0 dans Δ , le rang de M est nécessairement $\geq n - r$. Quand le rang de M est strictement plus petit que n , introduire la matrice

$$R = \text{Diag}(\lambda_2 \text{Id}, \lambda_3 \text{Id}, \dots, \lambda_k \text{Id}, J, 0),$$

où les λ_i sont les racines non nulles de Δ reproduites avec leur ordre de multiplicité et où J est un bloc de Jordan nilpotent d'ordre tel que R et M soient r -équivalentes. Il est facile alors de conclure.

Quand le polynôme Δ n'est pas scindé, on fait appel aux matrices compagnons associées aux facteurs irréductibles distincts du polynôme $\Delta(X)$ (cf. exercice 0-C.11.20). La condition s'écrit : $n - r \leq \text{rang } M \leq n - 1$ si $r \leq 1$, et M inversible lorsque $r = 0$.

0.11.38. a) Pour qu'une matrice M soit de rang $n - 1$, il faut et il suffit qu'il existe une matrice inversible P telle que le polynôme caractéristique de PM soit égal à $(-1)^n X(X - 1)^{n-1}$.

b) Pour qu'une matrice non nulle soit singulière, il faut et il suffit qu'il existe une matrice inversible P telle que PM admette $(-1)^n X^{n-1}(X - 1)$ comme polynôme caractéristique.

INDICATION.— Voir l'exercice précédent, dont ce sont des cas particuliers.

0.11.39. Écrire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice inversible R telle que 0 soit racine simple du polynôme minimal de RM .

INDICATION.— Il faut et il suffit que M soit singulière. (Utiliser l'action de Steinitz.)

0.11.40. Le pivot de Gauss. On se propose dans cet exercice d'indiquer sommairement quelques-uns des avantages que procure la méthode du pivot de Gauss pour l'examen de certaines opérations de groupes⁴⁶.

a) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Vérifier qu'une fois choisie une base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ dans E , il est possible d'associer naturellement à chaque sous-espace F de E de rang p une « matrice-échelon » ayant p lignes et n colonnes. Procéder à cette fin de la manière suivante : la matrice en question est la matrice de la surjection canonique $s : E \rightarrow E/F$ écrite dans les bases (e_i) de E et $(s(q_j))$ de E/F où q_1 est le premier vecteur parmi les vecteurs de la base (e_i) n'appartenant pas à F , q_2 le premier vecteur parmi les vecteurs de la base (e_i) n'appartenant pas au sous-espace engendré par F et q_1 , et où q_j est défini par récurrence à partir de F et des vecteurs (q_1, \dots, q_{j-1}) de façon analogue.

b) Déterminer à titre d'exemple la matrice-échelon associée au sous-espace F de \mathbb{Q}^4 (rapporté à sa base canonique) donné par les équations suivantes

⁴⁶ B. Keller a très justement attiré notre attention sur l'intérêt du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 + 9x_6 &= 0 \\
7x_1 + 14x_2 + 7x_3 + x_4 + 22x_5 + 29x_6 &= 0 \\
-x_1 - 2x_2 - x_3 &\quad - 3x_5 - 3x_6 = 0 \\
6x_1 + 12x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 20x_5 + 27x_6 &= 0
\end{aligned}$$

INDICATION.— Appliquer la méthode du pivot de Gauss à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 7 & 14 & 7 & 1 & 22 & 29 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -3 & -3 \\ 6 & 12 & 6 & 2 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

pour obtenir la matrice-échelon déduite de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en supprimant la ligne nulle.

Bien vérifier les calculs; on constatera que la deuxième colonne de A est le double de sa première colonne et que sa cinquième colonne est bien égale à trois fois la première, ajoutées à la quatrième. . .

c) En déduire alors que les orbites de $GL(n, \mathbb{K})$ opérant par translations à gauche sur l'ensemble des matrices de rang p sont paramétrées par les matrices-échelon de rang p ayant p lignes et n colonnes (voir les premières remarques de la page 7).

d) Vérifier que le stabilisateur d'une matrice-échelon (de rang p) est donné par les matrices inversibles qui laissent fixes les p premiers vecteurs de la base canonique. Calculer alors de deux manières la dimension d'une orbite.

e) Utiliser la paramétrisation des droites de \mathbb{K}^n par des matrices-échelon pour partitionner l'espace projectif $\mathbb{P}(n-1, \mathbb{K})$ en n sous-espaces affines de dimensions distinctes allant de 0 à $n-1$.

f) Procéder de même pour établir que le nombre de plans (vectoriels) contenus dans l'espace vectoriel \mathbb{F}_q^4 est égal à $(1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4)$. Retrouver le résultat en remarquant que l'ensemble de ces plans est une orbite sous l'action de $GL(4, \mathbb{F}_q)$.

g) Appliquer une variante de la méthode du pivot de Gauss pour établir que toute matrice inversible M à coefficients dans \mathbb{K} s'écrit comme un produit $M = T_1 P_\sigma T_2$, où les matrices T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures inversibles et P_σ est une matrice de permutation unique (c'est la *décomposition de Bruhat* pour le groupe $GL(n, \mathbb{K})$).

INDICATION.— Multiplier une matrice M à gauche et à droite par des matrices triangulaires revient à effectuer des transformations élémentaires (à préciser) sur les lignes et les colonnes de M .

h) Appliquer encore une (autre) variante de la méthode du pivot de Gauss pour montrer que le quotient du groupe (additif) \mathbb{Z}^3 par le sous-groupe engendré par les vecteurs $v_1 = (4, 2, 2)$, $v_2 = (0, 0, 2)$ et $v_3 = (2, 2, 2)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

0.11.41. a) Montrer que dans un hyperplan de $M(n, \mathbb{C})$, il existe toujours au moins $n(n-1)/2$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes.

INDICATION.— Écrire l'équation de l'hyperplan sous la forme $\text{tr}(AX) = 0$ et se ramener à une matrice A triangulaire.

b) L'exemple des matrices symétriques réelles d'ordre 2 montre que le résultat est faux sur \mathbb{R} .

c) On considère l'hyperplan des matrices $M \in M(n, \mathbb{K})$ telles que $m_{1n} = 0$. Quel est le nombre maximal de matrices nilpotentes linéairement indépendantes contenues dans cet hyperplan ?

INDICATION.— Se rappeler que les matrices nilpotentes sont toujours de trace nulle. Quand $n \geq 3$, on trouve le nombre $n^2 - 2$ (les matrices E_{ij} de la base canonique, où $i \neq j$ et $(i, j) \neq (1, n)$, donnent déjà $n^2 - n - 1$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes; on en fabriquera $n - 1$ autres au moyen de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$).

d) Quel est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes ?

INDICATION.— En procédant comme dans b), on trouve l'espace vectoriel des matrices de trace nulle. [Voir aussi la question d) de l'exercice 0.11.64.]

0.11.42. a) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $M \in M(n, \mathbb{R})$ soit diagonalisable sur \mathbb{R} est qu'elle s'écrive comme produit d'une matrice symétrique S et d'une matrice symétrique définie positive H .

INDICATION.— Si $M = P^{-1}DP$, on écrit $M = (P^{-1}D^tP^{-1})(^tPP)$. Ceci prouve la condition nécessaire. Inversement, si $M = SH$, on écrit $H = X^2$, avec X symétrique; ce qui donne $M = SX^2 = X^{-1}(XSX)X$. La matrice M est semblable à une matrice symétrique.

b) L'ensemble des matrices réelles diagonalisables et l'ensemble des matrices réelles trigonalisables sont étoilés par rapport à l'origine. Examiner la connexité de ces ensembles privés de l'origine [on pourra utiliser la question précédente, ou bien la question d) ci-dessous].

INDICATION.— Le second ensemble est l'adhérence du premier. La connexité est assurée à partir du moment où $n \geq 1$.

c) Il est bien connu qu'une matrice est semblable à sa transposée (cf. exercice 0-C.11.7). Montrer qu'une autre manière d'écrire a) est qu'une

matrice $M \in M(n, \mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si l'on peut trouver, parmi les matrices de $GL(n, \mathbb{R})$ qui conjuguent M et sa transposée, une matrice qui soit symétrique définie positive.

d) Examiner la connexité de l'ensemble des matrices réelles diagonalisables auquel on a ôté les matrices scalaires.

INDICATION.— Considérer l'image de l'application $(P, D) \mapsto PDP^{-1}$ définie sur $GL^+(n, \mathbb{R}) \times D(n, \mathbb{R})$, où $D(n, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel de dimension n des matrices diagonales. Enlever ensuite à $D(n, \mathbb{R})$ la droite formée par les matrices scalaires. Le cas $n = 2$ est à étudier à part : il s'agit d'examiner la connexité de l'ensemble des matrices d'ordre 2 à valeurs propres réelles distinctes; on pensera à cet effet au discriminant du polynôme caractéristique et l'on décrira l'ensemble des points de $M(2, \mathbb{R})$, identifié à \mathbb{R}^4 , où il s'annule (voir aussi 0-C.8.2.13).

e) Examiner la connexité de l'ensemble des matrices réelles (ou complexes) trigonalisables mais non diagonalisables.

INDICATION.— Procéder comme dans la question précédente en commençant par les matrices complexes.

0.11.43. a) On considère une matrice inversible $P = A + iB$ dans $M(n, \mathbb{C})$, où les matrices réelles A et B sont supposées singulières ainsi que les matrices $A + B$, $A - B$, $A + 2B$ et $A - 2B$. Montrer que $n \geq 6$.

INDICATION.— Le polynôme $p(\lambda) = \det(A + \lambda B)$ est de degré n si et seulement si $\det(B) \neq 0$.

b) On suppose que les deux matrices X et Y de $M(n, \mathbb{R})$ sont semblables dans $M(n, \mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $M(n, \mathbb{R})$.

INDICATION.— Considérer une matrice inversible $P = A + iB$ vérifiant $PX = YP$. (Voir aussi l'exercice 0-C.11.52.)

0.11.44. a) Montrer que le résultat de la proposition 0.4.3.2 peut s'exprimer dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ en disant que pour peu que l'on soit bien placé dans $GL(n, \mathbb{C})$, on peut regarder dans n'importe quelle direction (complexe) singulière donnée à l'avance sans apercevoir la moindre matrice singulière. Autrement dit, pour toute matrice A singulière, il existe une matrice inversible P telle que $P + \lambda A$ soit inversible quel que soit le scalaire λ dans \mathbb{C} .

b) Remarquer que le résultat est faux pour A inversible. (Prendre $A = \text{Id}$ pour commencer.)

c) Montrer, par contre, que l'on peut regarder dans n'importe quelle direction (réelle) donnée à l'avance, sans voir de matrices singulières pourvu que l'on soit adéquatement placé dans $GL(n, \mathbb{C})$. Autrement dit : pour tout A , il existe P inversible dans $M(n, \mathbb{C})$ telle que $P + \lambda A$ soit inversible pour

tout λ réel, ou encore il existe R inversible telle que RA n'ait que des valeurs propres non réelles ou nulles.

INDICATION.— Écrire $A = P_1 R_r Q_1$ et prendre $P = P_1 \text{Diag}(i\text{Id}_r, \text{Id}_{n-r}) Q_1$.

0.11.45. Étudier le problème suivant : soit A et B deux matrices de $M(n, \mathbb{C})$. Existe-t-il P inversible telle que $P + \alpha A + \beta B$ soit inversible pour tout α et β dans \mathbb{R} , puis dans \mathbb{C} ?

0.11.46. On considère la forme quadratique non dégénérée sur l'espace $M(n, \mathbb{K})$ donnée par $X \mapsto \text{tr}(X^2)$.

a) Soit A une matrice fixée. Montrer que l'orthogonal de $\text{Im}(\text{ad } A)$ est précisément $\mathfrak{z}(A)$.

b) Sachant que $\text{tr}(E_{ij} E_{kl}) = \delta_{jk} \delta_{il}$, calculer l'orthogonal des différentes matrices E_{ij} .

c) Montrer que, si A est semi-simple, il en est de même de $\text{ad } A$ (la réciproque est d'ailleurs exacte; voir par exemple [Mn-Ts], page 89). En déduire que les sous-espaces précédents sont alors supplémentaires et que la restriction de la forme quadratique au centralisateur de A est non dégénérée. (Cf. exercice 0-C.11.2.)

d) Montrer que, si A est régulière, son centralisateur est commutatif, et que si A est *semi-régulière* (c'est-à-dire semi-simple avec seulement deux valeurs propres égales), l'algèbre de Lie $\mathfrak{z}(A)$ vérifie $[\mathfrak{z}(A), \mathfrak{z}(A)] = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

e) Soit D une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux distincts. Montrer que l'espace (affine) tangent à l'orbite de D au point D est donné par l'ensemble des matrices ayant la même diagonale que D .

f) Quel est l'espace (vectoriel) tangent en la matrice de Jordan J_n à son orbite ?

On trouve l'espace vectoriel de dimension $n^2 - n$ formé des matrices de trace nulle et telles que les sommes des coefficients sur chacune des $n - 1$ sous-diagonales sont nulles.

g) Montrer que les orbites (par similitude) des éléments semi-réguliers dans $M(n, \mathbb{C})$ ont toutes le même profil (cf. 0.11.54). Quel est le nombre de Weyl d'une telle orbite ? On trouve $(n - 2)!$.

h) On suppose n suffisamment grand. Quel est le nombre de Weyl de l'orbite d'une matrice qui a exactement p paires de valeurs propres égales et q triplets de valeurs propres égales ? On trouve $p!q!(n - 2p - 3q)!$.

0.11.47. Différentielle du déterminant. Un calcul rapide de la différentielle du déterminant en A est donné par la méthode suivante (comparer avec [Mn-Ts], page 69).

a) Montrer que toute forme linéaire φ sur $M(n, \mathbb{K})$ est de la forme $\varphi : X \mapsto \text{tr}(MX)$, où la matrice $M = (m_{ij})$ est telle que les coefficients de sa transposée sont les composantes de φ sur la base duale $\{E_{ij}^*\}$ de la base canonique $\{E_{ij}\}$ de $M(n, \mathbb{K})$.

b) Après avoir remarqué que la fonction \det est bien différentiable en A , montrer que sa différentielle en A est donnée par $X \mapsto \text{tr}(\tilde{A}X)$, où \tilde{A} est la *comatrice* de A (i.e. la transposée de la matrice des cofacteurs).

INDICATION.— Il s'agit donc de démontrer que le cofacteur Δ_{ij} est égal à $D(\det)(A)(E_{ij}) = \partial/\partial_{ij}(\det)(A)$, mais ceci découle immédiatement de la règle de développement du déterminant suivant la $j^{\text{ième}}$ colonne.

c) Montrer que \tilde{A} est nulle si et seulement si le rang de A est inférieur ou égal à $n - 2$.

0.11.48. Espaces irréductibles. (On pourra consulter avec intérêt [Hum], pages 7 et suivantes.) On dit qu'un espace topologique non vide X est *irréductible* si tout ouvert non vide de X est dense. Il revient au même de dire que l'espace X (non vide) ne peut s'écrire comme réunion de deux fermés stricts.

a) Montrer qu'une partie Y est irréductible si et seulement si son adhérence l'est et montrer que tout ouvert d'un espace irréductible est irréductible.

b) Montrer que l'image d'un espace irréductible par une application continue est irréductible.

Dans la suite de l'exercice, on supposera que le corps \mathbb{K} qui intervient est algébriquement clos.

c) Montrer que lorsque l'on munit l'espace \mathbb{K}^n de sa topologie de Zariski (définie par les fermés que sont les variétés algébriques affines de \mathbb{K}^n , c'est-à-dire par les ensembles de zéros communs aux familles (finies) de polynômes de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$), une partie fermée X est irréductible si et seulement si son idéal $\mathcal{I}(X)$ (défini comme l'ensemble de tous les polynômes qui s'annulent sur X) est premier. En particulier, l'espace \mathbb{K}^n est irréductible.

d) Montrer que le produit de deux fermés irréductibles dans \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^m est un fermé irréductible dans \mathbb{K}^{n+m} .

e) On pose $X = \mathbb{K}^n$ et l'on note X_f l'ouvert (principal) défini comme le complémentaire de l'ensemble des zéros du polynôme f . Montrer que X_f a une structure naturelle de variété algébrique affine réalisée comme fermé de \mathbb{K}^{n+1} . (Considérer l'ensemble des (x_1, \dots, x_{n+1}) tels que

$$x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1 = 0.)$$

Montrer que l'algèbre des fonctions régulières sur l'ouvert principal X_f ,

qui est définie par le quotient de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{n+1}]$ par l'idéal engendré par le polynôme $Q = x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1$, est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n][1/f]$. Retrouver le fait que X_f est irréductible.

INDICATION.— On pourra considérer l'homomorphisme d'algèbres

$$R(X_1, \dots, X_{n+1}) \mapsto R(X_1, \dots, X_n, 1/f)$$

et, pour déterminer son noyau, effectuer la division euclidienne de R par Q dans l'anneau $\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n)[X_{n+1}]$, puis faire $X_{n+1} = 1/f$ et conclure par un argument de factorialité.

f) Montrer maintenant que le groupe $G = GL(n, \mathbb{K})$ est algébrique affine irréductible et que toute classe de similitude, ou toute classe de congruence, ou enfin toute classe de matrices de rang constant, est irréductible, de même que son adhérence.

g) Montrer que chacun des 2^{n-1} sous-groupes paraboliques (standard) donnés par les stabilisateurs des drapeaux formés avec les sous-espaces de coordonnées (dans la base canonique) de \mathbb{K}^n est un sous-groupe algébrique affine irréductible. En particulier, le groupe $T(n, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures en est un également.

INDICATION.— Commencer par le plus grand.

0.11.49. Théorème des invariants de Hilbert pour les groupes finis. On suppose \mathbb{K} de caractéristique nulle, ce qui permet en particulier, vu que le corps est infini, d'identifier les fonctions polynomiales sur l'espace vectoriel E de dimension n avec les polynômes en n variables. On vérifie que l'ensemble $\mathcal{P}^G(E)$ des fonctions polynomiales invariantes est un sous-anneau de $\mathcal{P}(E)$.

Pour $f \in \mathcal{P}(E)$, on pose

$$f^{\natural} = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} g \cdot f.$$

a) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{P}(E)$, la fonction polynomiale f^{\natural} est invariante.

b) Établir $(f + p)^{\natural} = f^{\natural} + p^{\natural}$, puis $f = f^{\natural} \iff f \in \mathcal{P}^G(E)$ et enfin $(fp)^{\natural} = f^{\natural}p$ si $f \in \mathcal{P}(E)$ et $p \in \mathcal{P}^G(E)$.

c) Montrer que si f est invariant, il en est de même de ses composantes homogènes.

d) On pose $T_G = \{f \in \mathcal{P}^G(E); f(0) = 0\}$. Soit J l'idéal de $\mathcal{P}(E)$ engendré par T_G . Montrer qu'il existe dans J des polynômes homogènes en nombre fini, soit f_1, \dots, f_r , qui engendrent J .

e) On pose $q_i = \deg f_i$. Montrer que pour tout $f \in T_G$ homogène de degré q , il existe des $u_i \in \mathcal{P}(E)$ de degrés $q - q_i$ (on prendra $u_i = 0$ si $q - q_i$ est négatif) telles que $f = \sum_i f_i u_i$. Montrer qu'on peut les choisir invariantes.

f) En raisonnant par récurrence, déduire de là que tout élément de $\mathcal{P}^G(E)$ est un polynôme en les f_i à coefficients dans \mathbb{K} .

0.11.50. Montrer que les fonctions polynomiales sur $M(n, \mathbb{K})$ invariantes pour l'action par translations à gauche de $GL(n, \mathbb{K})$ se réduisent aux fonctions polynomiales constantes. (On suppose \mathbb{K} infini.)

INDICATION.— Une telle fonction est constante sur les matrices inversibles; utiliser alors l'exercice suivant.

0.11.51. a) Soit \mathbb{K} un corps infini et P et Q deux fonctions polynomiales en n variables, égales sur le complémentaire de l'ensemble des zéros d'une troisième fonction polynomiale R non nulle sur \mathbb{K}^n , alors $P = Q$. (Considérer le polynôme $R(P - Q)$ qui s'annule partout.)

b) Application : si deux fonctions polynomiales sur $M(n, \mathbb{K})$ sont égales sur les matrices inversibles, ou (lorsque \mathbb{K} est algébriquement clos) sur les matrices diagonalisables, alors elles sont égales.

INDICATION.— Se rappeler que les matrices inversibles sont caractérisées par $\det(M) \neq 0$; quant à l'ensemble des matrices diagonalisables sur \mathbb{K} , il contient les matrices dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Une telle matrice M peut être caractérisée par le fait que le discriminant de son polynôme caractéristique est non nul. Ce discriminant est une fonction polynomiale des coefficients de M (dans le cas $n = 2$, il vaut $(a - d)^2 + 4bc$

si $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$).

c) Montrer que, si X et Y sont deux matrices de $M(n, \mathbb{C})$, alors la trace de l'endomorphisme de $M(n, \mathbb{C})$ donné par le produit $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)$ est égale à $2n \text{tr}(XY) - 2 \text{tr}(X) \text{tr}(Y)$. (Cf. page 213.)

INDICATION.— Supposer $X = Y$ et X diagonalisable. Écrire auparavant, lorsque X est diagonale, l'action de $\text{ad}(X)$ sur la base canonique de $M(n, \mathbb{C})$.

d) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Montrer que l'ensemble des points de \mathbb{K}^n où un polynôme P non nul en n variables ne s'annule pas est dense pour la topologie de Hausdorff. Ainsi, le simple fait de vérifier par exemple qu'il y a une matrice symétrique inversible de trace nulle suffit à prouver qu'il y en a « beaucoup » : de façon plus précise, si l'ordre n est supérieur ou égal à 2, l'ensemble des matrices symétriques inversibles de trace nulle est dense dans l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle.

INDICATION.— La formule de Taylor est là pour nous convaincre qu'un polynôme sur \mathbb{K}^n qui s'annule sur une boule (non vide) de centre a est nul.

e) Vérifier que, pour la topologie de Hausdorff, l'ensemble des matrices diagonalisables de $M(n, \mathbb{C})$ est dense dans $M(n, \mathbb{C})$, et que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $M(n, \mathbb{R})$ coïncide avec l'ensemble des matrices trigonalisables de $M(n, \mathbb{R})$. En particulier, la limite d'une suite convergente de matrices trigonalisables sur \mathbb{R} est encore trigonalisable sur \mathbb{R} .

f) Montrer qu'il existe une fonction continue non nulle $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui est cependant nulle sur l'ensemble de toutes les matrices trigonalisables sur \mathbb{R} . Montrer qu'une telle fonction ne peut être polynomiale.

INDICATION.— Une fonction f qui est nulle sur les matrices diagonalisables sur \mathbb{R} est donc nulle dans un voisinage suffisamment petit d'une matrice à valeurs propres réelles distinctes (pourquoi ?). Si elle était polynomiale, elle serait alors identiquement nulle. Pour l'existence d'une fonction continue f non nulle, il suffit d'invoquer le théorème de Tietze-Urysohn.

g) Que peut-on dire d'une fonction polynomiale sur \mathbb{R}^3 (ou \mathbb{C}^3) qui s'annule sur un ouvert (non vide) de la sphère unité, du cône d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, ou enfin de leur réunion ?

0.11.52. On considère l'opération $(P, S) \mapsto PS^tP$ de $GL(n, \mathbb{K})$ sur les matrices symétriques.

a) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les fonctions polynomiales invariantes sont les constantes.

INDICATION.— Remarquer que toute matrice symétrique inversible est congruente à l'identité. Utiliser alors **0.11.51**.

b) Montrer qu'il en est de même si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

INDICATION.— Une fonction polynomiale invariante prend un nombre fini de valeurs (utiliser le fait que toute matrice réelle est congruente à $\text{Diag}(\text{Id}_r, -\text{Id}_s, 0)$), elle est donc constante, car continue.

0.11.53. a) Déterminer l'algèbre des fonctions polynomiales sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n , invariantes sous l'action du groupe orthogonal $O(n)$.

INDICATION.— Si P est une telle fonction et si u est un vecteur de la sphère unité, l'application $t \mapsto P(tu)$ est polynomiale, paire et indépendante de u . Il s'ensuit que l'algèbre recherchée est $\mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2]$.

b) Même question pour le groupe orthogonal $O(p, q)$ quand \mathbb{R}^n est muni de la structure orthogonale de signature (p, q) .

0.11.54. Matrices semi-simples régulières. Il existe sur $M(n, \mathbb{C})$ une fonction polynomiale particulière η invariante par conjugaison et qui est donnée par le discriminant du polynôme caractéristique.

a) Montrer que l'ensemble des points où η est non nulle est l'ouvert invariant des matrices dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Les matrices ainsi considérées sont appelées *matrices (semi-simples) régulières*.

b) Montrer que l'ouvert des matrices régulières, comme aussi l'ouvert $GL(n, \mathbb{C})$ des matrices inversibles, est connexe dans $M(n, \mathbb{C})$.

INDICATION.— Si p est une fonction polynomiale sur \mathbb{C}^m , l'ouvert O_p (principal) des points où p ne s'annule pas est connexe (par arcs). En effet, si A et B sont dans O_p , l'application $z \mapsto p(zA + (1-z)B)$ applique le complémentaire dans \mathbb{C} d'un nombre fini de points (lesquels ?) dans un connexe de O_p contenant les points A et B .

c) Montrer que, dans l'action de $GL(n, \mathbb{C})$ sur l'ouvert O_η des points (semi-simples) réguliers, il y a un seul profil (cf. exercice 0.11.2). Ceci s'exprime aussi en disant qu'il n'y a dans $GL(n, \mathbb{C})$ qu'une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan (ceux-ci sont précisément les stabilisateurs des matrices régulières).

INDICATION.— Toute orbite de matrices régulières contient une matrice diagonale et le stabilisateur d'une matrice diagonale régulière A est toujours donné par le sous-groupe H des matrices diagonales inversibles.

Il est à remarquer que les matrices régulières qui ont H pour stabilisateur sont nécessairement diagonales, et que les matrices semblables à A qui ont pour stabilisateur H sont les $n!$ matrices de l'orbite qui sont diagonales (le nombre de Weyl de l'orbite de A est donc $n!$). Le normalisateur de H est donné par le groupe $H \times_A \mathfrak{S}_n$ des *matrices monomiales* (ce sont les matrices qui ont un seul coefficient non nul par ligne et par colonne).

d) Quelles sont les orbites dans $M(n, \mathbb{C})$ qui ont le même profil que l'orbite de l'identité ?

Il s'agit de déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices inversibles. Une telle matrice étant trigonalisable dans toute base admet donc tout vecteur non nul comme vecteur propre : on trouve les matrices scalaires ! (Une autre façon de faire consiste à se ramener par densité à chercher les matrices qui commutent avec toutes les matrices E_{ij} ; on écrit alors de deux manières $\text{tr}(E_{ij}E_{kl}M)$.)

e) Montrer que la matrice $X = (X_{ij})$ dont le terme général est donné par l'indéterminée X_{ij} est diagonalisable dans une extension adéquate du corps $\mathbb{K}(X_{ij})$ des fractions rationnelles en n^2 indéterminées.

INDICATION.— Ses valeurs propres sont distinctes, car le discriminant de son polynôme caractéristique (qui est un polynôme en n^2 variables) n'est pas nul, comme on le vérifie en l'évaluant en une matrice (semi-simple) régulière.

0.11.55. Un joli quotient catégorique. a) Montrer que les fonctions polynomiales sur $X = M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K})$ invariantes sous l'action de $G = GL(n, \mathbb{K})$ donnée par $g \cdot (A, B) = (gA, gB)$ se réduisent aux constantes.

INDICATION.— Considérer l'application $\delta : (A, B) \mapsto \det(A)$; si p est G -invariante sur X , elle s'écrit sur $X_\delta : p(A, B) = f(\tilde{A}B / \det(A))$. Il existe alors (décomposer f en ses composantes homogènes) $k \in \mathbb{N}$ minimal et un polynôme q en $(n^2 + 1)$ variables tels que

$$\det(A)^k p(A, B) = q(\tilde{A}B, \det(A)).$$

En ordonnant q par rapport à sa dernière variable, on pourra se ramener (en utilisant le fait qu'un polynôme qui s'annule sur les matrices de déterminant nul est un multiple du polynôme déterminant) à $k = 0$. On établit ensuite que le polynôme q est alors homogène de degré zéro (puisque l'application $z \mapsto z^n$ est surjective dans \mathbb{K} algébriquement clos); il est donc constant.

b) Que se passe-t-il quand $G = SL(n, \mathbb{K})$?

Il s'agit d'expliciter le quotient catégorique de l'action. L'idée est que l'application $(A, B) \mapsto \tilde{A}B$, qui est une application constante sur les orbites, ne suffit pas à engendrer les autres applications ayant la même propriété, comme par exemple la fonction $A \mapsto \det(A)$, puisqu'on ne peut lire le déterminant de A dans \tilde{A} ! Par ailleurs, ces deux applications sont liées, et enfin le quotient catégorique à trouver doit être affine : l'application $\phi : (A, B) \mapsto (\tilde{A}B, \det(A), \det(B))$ de X dans le fermé $V_1 \subset M(n, \mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}_x^2$ formé des triplets (M, x, y) tels que $\det(M) = x^{n-1}y$, donne le quotient catégorique (on a noté \mathbb{K}_x^2 l'ouvert principal de \mathbb{K}^2 formé des couples (x, y) où x est non nul). Pour justifier cela, on pourra construire une section σ dont le saturé de l'image sous l'action de $SL(n, \mathbb{K})$ est dense. L'application $\sigma : (M, x, y) \mapsto (\text{Diag}(x, 1, \dots, 1), \text{Diag}(1, 1/x, \dots, 1/x)M)$ convient.

0.11.56. a) On a vu dans le texte du chapitre que l'application $\mu : (A, B) \mapsto AB$ de $X = M(n, \mathbb{K})^2$ dans $Y = M(n, \mathbb{K})$ donnait le quotient catégorique de X muni de l'action de $GL(n, \mathbb{K})$ définie par $g \cdot (A, B) = (Ag^{-1}, gB)$. L'application qui au couple (A, B) associe les coefficients du polynôme caractéristique de BA est constante sur les orbites; elle se factorise donc à travers Y . Quelle est l'application sur Y ainsi obtenue ?

INDICATION.— Le fait que AB et BA ont même polynôme caractéristique est présent dans le diagramme de factorisation !

b) On a vu par ailleurs dans l'exercice précédent que l'application $\phi : (A, B) \mapsto (\tilde{A}B, \det(A), \det(B))$ de X dans le fermé $V_x \subset M(n, \mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}_x^2$ formé des triplets (M, x, y) tels que $\det(M) = x^{n-1}y$, donnait le quotient catégorique de X pour l'action de $SL(n, \mathbb{K})$ définie par $g \cdot (A, B) = (gA, gB)$. L'application obtenue en inversant les rôles de A et B et qui

au couple (A, B) associe le triplet $(\tilde{B}A, \det(B), \det(A))$ définit un autre quotient catégorique, soit V_2 . Lequel ? Expliciter l'isomorphisme entre les deux quotients catégoriques obtenus.

INDICATION.— C'est l'isomorphisme $(M, x, y) \mapsto (\tilde{M}, y, x)$.

0.11.57. De l'irréductibilité de certains polynômes. a) Soit A un anneau intègre. On suppose $a \in A$ irréductible. Montrer que si a ne divise pas b , l'élément $aX + b$ de l'anneau $A[X]$ est irréductible.

b) On notera d_n le polynôme déterminant de la matrice (X_{ij}) d'ordre n . Supposons d_{n-1} irréductible et d_n réductible.

Vérifier alors que l'on a $d_n = X_{nn}d_{n-1} + r$, où r est un polynôme en $n^2 - 1$ variables qui est divisible par d_{n-1} . En considérant la matrice de permutation associée à la transposition τ_{1n} , obtenir une contradiction. En déduire alors l'irréductibilité du polynôme déterminant.

c) On note $c_{n,k}$ le polynôme coefficient de λ^k dans le polynôme caractéristique de la matrice (X_{ij}) d'ordre n . On rappelle⁴⁷ que le polynôme $c_{n,k}$ s'obtient aussi comme la somme des mineurs principaux d'ordre k de la matrice (X_{ij}) . Vérifier que l'on a $c_{n,k} = X_{nn}c_{n-1,k-1} + s$ où s est un polynôme où n'intervient pas la variable X_{nn} . En imitant la démonstration précédente, établir l'irréductibilité des polynômes coefficients du polynôme caractéristique.

INDICATION.— Trouver une matrice M pour laquelle tous les $c_{n-1,l}$ sont nuls pour $l < n - 1$, et dont les coefficients du polynôme caractéristique sont tous non nuls. Penser pour cela à une matrice compagnon adéquate (cf. exercice 0-C.11.20).

d) Montrer que les facteurs irréductibles d'un polynôme homogène de $R = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ sont encore homogènes.

INDICATION.— Notons h_t le polynôme de $R[t]$ déduit de h en remplaçant chaque indéterminée X_i par tX_i . Si $p = fg$ est homogène de degré k , on a $t^k p = f_t g_t$; considérer alors les facteurs irréductibles de l'élément $t^k p$ de l'anneau factoriel $\mathbb{K}[t, X_1, \dots, X_n]$.

e) Montrer que les polynômes homogènes sont les vecteurs propres de l'action de \mathbb{K}^* sur R . Quels sont les polynômes homogènes invariants ? En déduire que le quotient catégorique de \mathbb{K}^n muni de l'action de \mathbb{K}^* est réduit à un point et que le quotient catégorique de $\mathbb{K}^n - \{0\}$ muni de l'action induite est donné par l'espace projectif $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{K})$ et par l'application qui à un point non nul de \mathbb{K}^n associe la droite vectorielle qu'il définit.

f) Chercher un quotient catégorique de \mathbb{K}^n pour l'action naturelle du groupe à deux éléments induite par $v \mapsto -v$.

⁴⁷ Il s'agit là de reconnaître la trace de la puissance extérieure $k^{\text{ième}}$ de la matrice (X_{ij}) .

INDICATION.— Pour $n = 2$ par exemple, on trouve le cône de \mathbb{K}^3 d'équation $Y^2 = XZ$, donné par le paramétrage $(x, y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$.

g) Montrer que les facteurs irréductibles d'un polynôme invariant p (sur $M(n, \mathbb{C})$) sous l'action par conjugaison du groupe (connexe) $GL(n, \mathbb{C})$ sont *quasi-invariants*, ce qui veut dire que, si p_i est un facteur irréductible de p , il existe un homomorphisme défini sur $GL(n, \mathbb{C})$ et à valeurs dans \mathbb{C}^* , soit χ , tel que $g \cdot p_i = \chi(g)p_i$ pour tout $g \in GL(n, \mathbb{C})$.

INDICATION.— On peut supposer p lui-même quasi-invariant. Les éléments du groupe $G = GL(n, \mathbb{C})$ permutent les facteurs irréductibles de p (un argument de factorialité est ici bien utile) à constantes près. Notons $\langle p_i \rangle$ la droite engendrée par p_i ; l'irréductibilité du groupe implique que $G \cdot \langle p_i \rangle = \langle p_j \rangle$ pour un certain j , et comme l'élément neutre laisse fixe p_i , on a $j = i$.

h) Vérifier que dans le cas d'un groupe fini (non connexe), par exemple pour \mathfrak{S}_3 , les facteurs irréductibles d'un invariant ne sont plus quasi-invariants, et retrouver le résultat sur les polynômes homogènes puisque le groupe \mathbb{C}^* est irréductible.

i) Dédire de la question g) une preuve du fait que les polynômes $M \mapsto \text{tr}(M^k)$, comme les polynômes coefficients du polynôme caractéristique, sont irréductibles.

INDICATION.— Les facteurs irréductibles de ces polynômes sont quasi-invariants et donc invariants sous l'action du sous-groupe $SL(n, \mathbb{C})$, qui est engendré par des commutateurs. Les invariants sous l'action de $SL(n, \mathbb{C})$ sont les mêmes que ceux de $GL(n, \mathbb{C})$, car deux matrices conjuguées sous l'action de $GL(n, \mathbb{C})$ le sont encore sous l'action de $SL(n, \mathbb{C})$ (cf. exercice 0-C.11.52). On conclut en se ramenant à établir que dans l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[\text{tr}(M), \dots, \text{tr}(M^n)]$, le polynôme $\text{tr}(M^i)$ est irréductible, ce qui est évident.

0.11.58. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps algébriquement clos qui, pour simplifier, sera de caractéristique nulle.

a) Montrer que les fonctions polynomiales sur $E \times E^*$, invariantes sous l'action [déjà définie dans le c) de la page 19] de \mathbb{K}^* , s'écrivent, aussitôt qu'une base a été choisie dans E et que E^* a été muni de la base duale, comme $p(\dots, x_i y_j, \dots)$, où p est une fonction polynomiale en n^2 variables.

INDICATION.— Les monômes en les variables x_i et y_j sont des vecteurs propres pour cette action de \mathbb{K}^* ; ceux dont la valeur propre est égale à 1 forment une base de l'espace des fonctions polynomiales invariantes, et le résultat est alors facile.

b) On note ϕ l'application $E \times E^* \rightarrow \text{End}(E)$ donnée par $(v, \varphi) \mapsto \varphi \otimes v$ où $\varphi \otimes v(w) = \varphi(w)v$. Elle a pour image l'ensemble $\overline{\mathcal{R}}_1(E)$ des endomorphismes de rang inférieur ou égal à 1. Vérifier que ce qui précède signifie

que l'application $\phi : E \times E^* \rightarrow \overline{\mathcal{R}}_1(E)$ fait de $\overline{\mathcal{R}}_1(E)$ un quotient catégorique pour l'action de \mathbb{K}^* .

c) Une application $\mu : X \rightarrow Y$ entre deux variétés algébriques (où l'on suppose X munie de l'action d'un groupe) est dite *orbitale* si ses fibres coïncident avec les orbites (autrement dit si les points de Y paramètrent les orbites), ce qui suppose au moins que les orbites soient fermées. L'application $\mu : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$ donnée par $\mu(M) = (\text{tr}(M), \dots, \text{tr}(M^n))$ n'est pas orbitale, mais le devient si l'on se restreint à l'ouvert des matrices dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique (cf. 0-C.5.1). De même, l'application (rencontrée dans le texte du chapitre) $\phi : (A, B) \mapsto AB$ définie sur $X = M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K})$ qui fait de $Y = M(n, \mathbb{K})$ un quotient catégorique pour l'action de $GL(n, \mathbb{K})$ devient orbitale quand on regarde ϕ comme définie sur $\{(A, B); \det(AB) \neq 0\}$ et à valeurs dans Y_{\det} .

Vérifier que l'application $\text{tr} : \mathcal{R}_1(E) \rightarrow \mathbb{K}$ donnée par la trace est une application orbitale pour l'action par similitude de $GL(n, \mathbb{K})$.

INDICATION.— Ceci signifie que deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace (cf. 0-C.11.4).

d) On démontre et l'on admettra (cf. [Cart], page 13) qu'une application orbitale $\mu : X \rightarrow Y$ entre deux variétés irréductibles qui est séparable (donc en particulier en caractéristique 0) fait de Y un quotient catégorique pour la G -variété X dès lors que Y est lisse (c'est-à-dire sans points singuliers). Essayer ce critère pour traiter les différents exemples rencontrés dans le texte du chapitre, en se restreignant à des ouverts adéquats.

0.11.59. Transvections et dilatations. a) Vérifier que deux endomorphismes u et v d'un espace vectoriel E qui ont une même droite pour image ne sont pas nécessairement proportionnels, bien que $u(x)$ et $v(x)$ le soient pour tout x .

INDICATION.— Considérer deux projecteurs sur une même droite parallèlement à deux supplémentaires distincts. En fait, l'ensemble des endomorphismes ayant pour image la même droite est un espace vectoriel de dimension $n = \dim(E)$ privé de son origine (nous dirons : « épointé »). Notons au passage que l'ensemble des endomorphismes qui ont le même hyperplan H pour noyau est encore un espace vectoriel (épointé) de dimension n , car isomorphe à $\mathcal{L}(E/H, E)$.

b) Montrer que deux endomorphismes u et v de E qui ont la même droite D pour image et le même hyperplan H pour noyau sont proportionnels.

INDICATION.— Écrire les décompositions canoniques de u et de v en notant que l'espace des endomorphismes de E/H dans D est de dimension 1.

c) *Le plongement de Segre.* On note $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif associé à E ,

c'est-à-dire l'ensemble des droites de E . L'espace projectif $\mathbb{P}(E^*)$ s'identifie naturellement aux hyperplans de E . On note par ailleurs φ le plongement du produit $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E^*)$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{L}(E))$ donné par $(D, H) \mapsto \varphi(D, H)$ où $\varphi(D, H)$ désigne la droite des endomorphismes de E qui ont pour image la droite D et pour noyau l'hyperplan H .

Montrer que l'application φ est équivariante pour les actions naturelles de $GL(E)$ sur les espaces considérés.

d) Déterminer l'image de φ .

INDICATION.— On trouve l'ensemble des droites passant par les endomorphismes de rang 1.

e) Montrer que le groupe $GL(E)$ a deux orbites sur l'image de φ .

INDICATION.— Vu l'équivariance, on peut évidemment examiner le problème dans $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E^*)$. Les deux orbites regardées dans le produit $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E^*)$ sont données d'une part par les couples (D, H) tels que $D \cap H = \{0\}$ et d'autre part par les couples tels que $D \subset H$. On peut retrouver cela directement en remarquant que l'action en question est issue de la similitude, et que deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace (cf. 0-C.11.4).

f) Calculer les dimensions de ces deux orbites.

INDICATION.— Les matrices nilpotentes de rang 1 sont semblables et leur ensemble est une sous-variété de dimension $2(n-1)$ (cf. 0-C). L'une des orbites cherchées est l'image de cette sous-variété par la projection $\pi : \mathcal{L}(E) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{L}(E))$; elle est donc de dimension $2n-3$. L'autre orbite est de même dimension que l'image de φ , c'est-à-dire $2n-2$.

g) On dit qu'un endomorphisme u de E est une *transvection* si l'image de $u - \text{Id}$ par la projection π est dans l'orbite de dimension $2n-3$. Montrer que u est une transvection si et seulement si l'endomorphisme $u - \text{Id}$ est nilpotent de rang 1.

h) On dit que v est une *dilatation* si la projection par π de $v - \text{Id}$ est dans l'orbite de dimension $2n-2$. Montrer que v est une dilatation si et seulement si l'endomorphisme $v - \text{Id}$ est de rang 1, mais de trace non nulle.

i) On suppose que le corps de base est \mathbb{R} . Montrer que l'orbite de dimension $2n-3$ est compacte (pour la topologie de Hausdorff) alors que l'autre ne l'est pas.

INDICATION.— L'image de φ est compacte connexe (le justifier de deux façons différentes). L'une des orbites y est ouverte pour raison de dimension, l'autre y est donc fermée.

Remarques

(i) Distinguer transvections et dilatations revient à distinguer les deux

orbites rencontrées ci-dessus. On a vu qu'on pouvait distinguer l'une de l'autre par la dimension, ou (dans le cas réel) par la compacité.

(ii) L'application φ est un morphisme algébrique. En effet, si V est la matrice colonne des coordonnées du vecteur $v \neq 0$ dans une base de E , et W la matrice colonne des coordonnées de la forme linéaire $f \neq 0$ dans la base duale, alors la matrice $V^t W$ a pour image la droite engendrée par v et pour noyau l'hyperplan $\text{Ker}(f)$. On peut aussi remarquer que l'application $(f, v) \mapsto f \otimes v$ est bilinéaire (cf. exercice 0.11.58).

(iii) L'application φ envoie la variété projective $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E^*)$ sur une partie complète, donc fermée, de $\mathbb{P}(\mathcal{L}(E))$ (cf. page 15). L'image de φ est donc une variété projective ! Mais attention : ceci doit être établi directement, car on a besoin précisément du plongement de Segre pour établir que le produit $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E^*)$ est une variété projective ! Aussi, on pourra procéder comme suit : l'ensemble des matrices nilpotentes de rang 1 est fermé dans $\mathcal{L}(E) - \{0\}$ (pourquoi ?) ; il est de plus saturé pour la relation qui définit le projectif. Son image par π est donc fermée dans le projectif, car π est ouverte.

Notons au passage que, pour la topologie de Zariski, la topologie produit sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ n'est pas celle de la variété projective $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ identifiée à son plongement dans \mathbb{P}_3 . (Utiliser le fait qu'il y a d'autres courbes que les droites sur la quadrique projective associée aux matrices d'ordre 2 de déterminant nul.)

(iv) La condition de transversalité $D \cap H = \{0\}$ est clairement ouverte pour la topologie de Zariski du produit $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E^*)$. Ceci permet de retrouver la dimension de la grande orbite.

(v) Dans le cas réel, le groupe orthogonal opère transitivement sur les couples (D, H) tels que $D \subset H$. Ceci donne un autre moyen pour établir la compacité de l'une des deux orbites. L'angle que fait la droite avec l'hyperplan rend la situation moins simple pour l'autre cas.

(vi) La manière inhabituelle dont furent introduites transvections et dilatations est à vrai dire peu convaincante. Elle présente néanmoins quelque avantage, puisqu'elle éclaire la dépendance d'une transvection v par rapport à l'ensemble de ses points fixes et par rapport à l'image de $v - \text{Id}$.

0.11.60. (Variante du précédent). a) Montrer qu'un endomorphisme $u \neq \text{Id}$ est une transvection si et seulement si u laisse fixes tous les points d'un hyperplan H et translate tout vecteur de E par un vecteur de H .

b) Montrer qu'un endomorphisme $u \neq \text{id}$ laissant fixe un hyperplan H est une transvection ou une dilatation suivant que l'endomorphisme induit dans E/H par $u - \text{Id}$ est une homothétie de rapport nul ou pas.

c) Soit f une forme linéaire non nulle et soit e un élément non nul de

$\text{Ker}(f)$. Montrer que l'application $\tau_{f,e} : x \mapsto x + f(x)e$ est une transvection et que les transvections sont toutes de cette forme.

Vérifier que $\tau_{f,e} = \tau_{f',e'}$ si et seulement si il existe un scalaire non nul λ tel que $f = \lambda f'$ et $e' = \lambda e$.

d) Constater que l'hyperplan noyau de f et la droite portant e ne caractérisent pas la transvection $\tau_{f,e}$.

e) Montrer par contre qu'une dilatation u est entièrement caractérisée par la donnée d'un hyperplan, d'une droite qui lui est transverse⁴⁸, et enfin d'un scalaire non nul. Montrer que ce scalaire caractérise la classe de similitude de la dilatation.

INDICATION.— Le scalaire en question est la trace de $u - \text{Id}$.

f) Montrer que l'ensemble des transvections est une sous-variété de $M(n, \mathbb{K})$, de dimension $2(n-1)$.

g) Déterminer le sous-espace affine de $M(n, \mathbb{K})$ engendré par les transvections.

INDICATION.— On trouve l'hyperplan affine des matrices de trace n (cf. exercice 0.11.65).

h) Montrer que le groupe $SL(n, \mathbb{K})$ est engendré par les transvections (voir par exemple [Art], page 161).

0.11.61. L'ensemble \mathcal{R}_1 est flexé. a) Montrer que l'ensemble \mathcal{R}_1 des matrices de rang 1 est flexé (cf. page 221).

INDICATION.— Si A et B sont deux matrices de $M(n, \mathbb{K})$ de rang 1, les deux sous-espaces vectoriels (épointés) de dimension n formés respectivement des matrices ayant le même noyau que A et la même image que B se rencontrent suivant une droite (voir l'exercice 0.11.59 ci-dessus). Il est facile de suivre dans la réunion de ces deux sous-espaces (épointés) un accent circonflexe joignant A à B et restant donc dans \mathcal{R}_1 .

b) Montrer que l'espace vectoriel tangent en la matrice R_p à l'ensemble \mathcal{R}_p des matrices de rang p est donné par l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})$ telles que $m_{kl} = 0$ pour k et l supérieurs strictement à p .

INDICATION.— L'application

$$(A, B, C) \mapsto \begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

définit un bon paramétrage d'un ouvert de \mathcal{R}_p contenant la matrice R_p (cf. [Mn-Ts], page 145). L'espace tangent en R_p est alors l'image de sa différentielle en $(R_p, 0, 0)$.

c) Montrer que l'espace tangent en la matrice A à la sous-variété \mathcal{R}_1 s'appuie sur \mathcal{R}_1 suivant d'une part l'espace vectoriel (épointé) des matrices qui

⁴⁸ On dit qu'un sous-espace F est *transverse* à un sous-espace G si $F \cap G = \{0\}$.

ont même image que A , et d'autre part le sous-espace vectoriel (épointé) des matrices ayant le même noyau que A .

INDICATION.— Se ramener sous l'action de Steinitz à la matrice R_1 . Le cas particulier $n = 2$ fera l'objet d'un long exercice dans la note **0-C** (cf. page 221).

d) Montrer que tout élément de l'espace tangent en A à \mathcal{R}_1 est somme d'une matrice X telle que $\text{Ker}(X) = \text{Ker}(A)$ et d'une matrice Y telle que $\text{Im}(Y) = \text{Im}(A)$.

0.11.62. La surface de Véronèse. Soit E un espace vectoriel de dimension $n = 3$ sur un corps algébriquement clos \mathbb{K} . On note $Q(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E , et $\mathbb{P}(Q(E))$ l'espace projectif associé.

a) Montrer que l'ensemble des formes quadratiques de rang 1 définit dans le projectif une variété fermée, de dimension 2, qu'on appellera la *surface de Véronèse*.

INDICATION.— Faire opérer par congruence le groupe linéaire de E .

b) Montrer que l'application qui à une forme quadratique q de rang 1 associe la droite (dans E^*) des formes linéaires qui définissent le cône isotrope de q , permet d'écrire un plongement de $\mathbb{P}(E^*)$ dans $\mathbb{P}(Q(E))$ dont l'image est exactement la surface de Véronèse.

INDICATION.— Une forme quadratique de rang 1 s'écrit $q(x) = \varphi(x)^2$ pour une forme linéaire φ non nulle.

c) Montrer qu'en coordonnées, le plongement précédent de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{P}_5(\mathbb{K})$ est donné par

$$(x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix}.$$

d) Paramétrer les matrices symétriques nilpotentes de rang 1.

e) Montrer que l'on peut plonger la surface de Véronèse dans $\mathbb{P}_4(\mathbb{K})$: considérer les sécantes à la surface issues du point S (point du projectif que définissent les matrices scalaires) et la projetant sur l'hyperplan projectif associé aux matrices symétriques de trace nulle.

INDICATION.— Le point S n'appartient à aucune droite coupant la surface en deux points (distincts ou non) : remarquer en fait que dans le plan formé par l'identité et une matrice symétrique de rang 1, il n'y a qu'une droite de matrices (symétriques) de rang 1.

f) Vérifier que, dans tout l'exercice, il n'y a aucune raison pour se restreindre au cas où $n = 3$.

g) Montrer que pour $n > 1$ tout hyperplan de matrices symétriques complexes contient des matrices symétriques de rang 1.

INDICATION.— L'équation d'un tel hyperplan est de la forme $\text{tr}(SX) = 0$, où S est symétrique; grâce à une congruence, on peut se ramener à supposer que S est égale à R_p .

0.11.63. Actions k -transitives. On dit d'un groupe G qui opère transitivement sur X qu'il opère k -transitivement sur X si, quels que soient les k -uplets (x_1, \dots, x_k) et (y_1, \dots, y_k) d'éléments (deux à deux) distincts de X , il existe un élément g de G tel que $g(x_i) = y_i$ pour tout i .

a) Soit x_0 un point quelconque de X . Montrer que, pour que G opère 2-transitivement sur X , il faut et il suffit que G opère transitivement sur X et que G_{x_0} opère transitivement sur $X - \{x_0\}$.

b) En déduire que G opère 2-transitivement sur G/H si et seulement si $G = H \cup HxH$ pour tout $x \notin H$.

c) Montrer que, si G opère transitivement sur X et sur les parties à deux éléments de X , et si $\text{Card}(X)$ est fini et pair, alors l'action de G sur X est doublement transitive.

INDICATION.— Se ramener au cas d'une *représentation fidèle* (c'est-à-dire au cas où l'élément neutre est seul à agir de façon triviale), et considérer alors une *involution* dans G (c'est-à-dire un élément d'ordre deux dans G).

d) Montrer que le groupe $GL(2, \mathbb{K})$ opère 3-transitivement sur les droites de \mathbb{K}^2 . [Cf. remarque a) page 7.]

e) Montrer que, pour $n \geq 2$, le groupe $SL(n, \mathbb{K})$ opère 2-transitivement sur les droites de \mathbb{K}^n .

f) Montrer que, pour leur action naturelle (sur $[1, n]$), les groupes \mathfrak{S}_n et \mathfrak{A}_n opèrent respectivement n -transitivement et $(n-2)$ -transitivement.

g) Un théorème (difficile), dû à Burnside, exprime que si un groupe (fini) simple non abélien G opère transitivement sur un ensemble dont le cardinal est premier, alors G est 2-transitif (cf. [Tsu], page 247).

h) Montrer qu'un groupe fini qui opère doublement transitivement sur un ensemble X à n éléments a un cardinal qui est nécessairement multiple de $n^2 - n$.

INDICATION.— Le groupe opère transitivement sur l'ensemble $X \times X$ auquel on a soustrait la diagonale.

i) On démontre qu'un groupe d'ordre $n^2 - n$ ne peut opérer doublement transitivement sur un ensemble à n éléments que si n est la puissance d'un nombre premier (cf. [Carm], page 145). Vérifier que si c'est le cas, on a un exemple avec le groupe $ax + b$ des matrices inversibles de la forme

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ à coefficients dans le corps \mathbb{F}_q , avec $q = p^\alpha$, opérant (doublement transitivement) sur la droite affine d'équation $y = 1$.

INDICATION.— Le groupe $GL(2, \mathbb{F}_q)$ opère (simplement) transitivement sur les repères du plan centrés à l'origine, et le sous-groupe $ax + b$ est le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{F}_q)$ qui stabilise la droite affine $y = 1$. Noter au passage que le groupe considéré est le produit semi-direct du groupe additif \mathbb{F}_q par le groupe cyclique \mathbb{F}_q^* , celui-ci agissant sur celui-là par simple multiplication.

0.11.64. On considère la représentation naturelle du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur l'espace \mathbb{K}^n . On désignera cette représentation par π_n ou simplement par π .

a) Montrer que les fonctions polynomiales invariantes séparent les orbites.

INDICATION.— Il y a correspondance bijective entre les orbites et les polynômes unitaires de degré n ayant n racines (éventuellement multiples).

b) Soit $L = (a_1, \dots, a_n)$ une ligne de longueur n . Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que L soit la première ligne d'une matrice inversible dont les autres lignes sont obtenues par l'action de $n - 1$ permutations sur (les composantes a_i de) L ?

INDICATION.— Voir les questions suivantes.

c) La représentation π n'est pas irréductible. Quels sont les sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n invariants sous cette action?

INDICATION.— Il y a seulement la droite formée des points dont toutes les composantes sont égales et l'hyperplan des points dont la somme des composantes est nulle. (Cf. **0.11.66.**)

d) On se propose dans cette question de déterminer le sous-espace vectoriel de $M(n, \mathbb{C})$ engendré par les matrices ayant un polynôme caractéristique donné, soit $p(X)$.

(i) Montrer que toute matrice M de trace nulle est somme de deux matrices nilpotentes. (Voir aussi l'exercice **0.11.41.**)

INDICATION.— Établir qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale. (On commencera par exhiber, quand cela est possible, un vecteur v tel que la famille $\{v, M(v)\}$ soit libre.)

(ii) Soit D une matrice diagonale. Montrer que tous les éléments E_{ij} de la base canonique, pour lesquels $i \neq j$, sont dans le sous-espace engendré par les matrices ayant le même polynôme caractéristique que D .

INDICATION.— Remarquer que $E_{ij} = (D + E_{ij}) - D$.

(iii) On suppose que le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme $p(X)$ est non nul. Montrer que si le polynôme $p(X)$ n'est pas de la forme $(\lambda - X)^n$, les

matrices qui ont $p(X)$ comme polynôme caractéristique engendrent tout l'espace $M(n, \mathbb{C})$.

(iv) On suppose que le coefficient de X^{n-1} est nul. Montrer que si le polynôme $p(X)$ n'est pas de la forme $(\lambda - X)^n$, les matrices qui ont $p(X)$ comme polynôme caractéristique engendrent l'hyperplan des matrices de trace nulle.

(v) On suppose que $p(X) = (\lambda - X)^n$. Montrer que le polynôme caractéristique de A est égal à $p(X)$ si et seulement si $A - \lambda \text{Id}$ est nilpotent. Montrer que si $\lambda \neq 0$, le sous-espace engendré par les matrices qui ont $p(X)$ comme polynôme caractéristique est égal à $M(n, \mathbb{C})$.

(vi) Conclure.

e) Soit A une matrice de $M(n, \mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Montrer qu'il existe une matrice B semblable à A et dont tous les coefficients sont non nuls. (Une matrice vérifiant cette dernière condition est parfois appelée *matrice pleine*.)

INDICATION.— La classe de similitude de A serait contenue, dans le cas contraire, dans la réunion des hyperplans $m_{ij} = 0$. Cette classe de similitude, étant fermée (considérer le polynôme caractéristique) et irréductible, serait alors dans l'un des hyperplans en question. Mais le sous-espace engendré par cette classe de similitude est égal à $M(n, \mathbb{C})$ ou à l'hyperplan des matrices de trace nulle. Contradiction.

0.11.65. a) Montrer que les matrices *idempotentes* (c'est-à-dire telles que $M^2 = M$) engendrent $M(n, \mathbb{K})$.

INDICATION.— On pourra écrire $E_{ij} = (E_{ii} + E_{ij}) - E_{ii}$.

b) Soit A une matrice telle que toutes les matrices $M = (m_{ij})$ de sa classe de similitude vérifient $m_{11} = 0$. Montrer que la matrice M est nulle.

INDICATION.— Remarquer d'abord que l'hypothèse s'exprime par le fait que $\text{tr}(PAP^{-1}E_{11}) = 0$ pour toute matrice inversible P ; en déduire alors que $\text{tr}(AX) = 0$ pour toute matrice semblable à E_{11} , puis la même chose pour toute matrice X idempotente.

c) Que peut-on dire d'une matrice A telle que toutes les matrices $M = (m_{ij})$ de sa classe de similitude vérifient $m_{12} = 0$?

INDICATION.— La matrice est scalaire. Il est facile en effet de voir que l'hypothèse implique que la matrice A vérifie $\text{tr}(AX) = 0$ pour toutes les matrices nilpotentes X de rang 1. Ces matrices engendrent l'hyperplan des matrices de trace nulle (penser aux E_{ij} pour $i \neq j$ et au fait que les deux

matrices $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ et E_{12} sont semblables).

Remarque. Cet exercice, comme le précédent, peut servir de point de départ pour l'étude des représentations irréductibles des groupes. L'un et l'autre sont faciles : on sait en effet que la représentation de $GL(n, \mathbb{C})$ sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ (opérant par conjugaison) est irréductible, ou, ce qui revient au même, que le groupe (de Weyl) \mathfrak{S}_n opère de façon irréductible sur (la sous-algèbre de Cartan formée par) les matrices diagonales de trace nulle...

0.11.66. Lemme de Schur. Soit ρ_V et ρ_W deux représentations d'un groupe G sur les espaces vectoriels de dimension finie V et W . On note $\text{Hom}_G(V, W)$ l'espace vectoriel des applications linéaires équivariantes⁴⁹ de V dans W .

a) Constater que $\text{Hom}_G(V, V)$, que l'on note aussi $\text{End}_G(V)$, coïncide avec l'algèbre des endomorphismes de V qui commutent avec tous les opérateurs $\rho_V(g)$ quand g décrit G .⁽⁵⁰⁾

On suppose à partir de maintenant que les représentations ρ_V et ρ_W sont irréductibles.

b) Montrer qu'un élément non nul de $\text{Hom}_G(V, W)$ est un isomorphisme. En déduire que $\text{End}_G(V)$ est un corps (non nécessairement commutatif, mais contenant néanmoins le corps de base dans son centre).

c) On suppose le corps de base algébriquement clos (ce qui assure l'existence de valeurs propres). Montrer que $\text{End}_G(V)$ se réduit à \mathbb{C} . Montrer aussi que $\text{Hom}_G(V, W)$ est de dimension 1 ou est nul suivant que les représentations ρ_V et ρ_W sont équivalentes ou pas⁵¹.

d) Appliquer cela à la représentation (irréductible) de $GL(n, \mathbb{K})$ sur l'espace \mathbb{K}^n .

e) Appliquer cela au cas d'un groupe commutatif. En déduire que toute représentation linéaire (non nulle) d'un groupe abélien possède un sous-espace stable de dimension 1.

f) Soit π une représentation unitaire irréductible du groupe G sur l'espace hermitien H . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hermitien sur H . Montrer que les produits hermitiens sur H (qui sont tous de la forme $\langle A \cdot, \cdot \rangle$ où A est un opérateur hermitien défini positif sur H) qui, comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$, laissent unitaires

⁴⁹ Ces applications linéaires sont appelées aussi *opérateurs d'entrelacement*.

⁵⁰ Vérifier aussi que $\text{End}_G(V)$ est l'ensemble des points fixes, sous l'action de G , d'une représentation naturelle Θ_ρ de G sur $\text{End}(V)$ et qu'il est égal, quand le groupe est fini, à l'image du projecteur défini sur $\text{End}(V)$ par $\frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} \Theta_\rho(g)$.

⁵¹ Il est facile de voir à partir de là qu'une représentation de G qui est somme de deux représentations irréductibles, soit $E = V \oplus W$, vérifie que $\text{End}_G(E)$ est de dimension 2 ou de dimension 4 suivant que les représentations sur V et W sont équivalentes ou pas. Ceci témoigne dans un cas particulier du lien qu'il y a entre la dimension du commutant d'une représentation et sa décomposition en somme de représentations irréductibles.

tous les opérateurs $\pi(g)$ pour $g \in G$, sont tous multiples (par un scalaire positif non nul) de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

g) Montrer, toujours lorsque \mathbb{K} est algébriquement clos, que le sous-espace vectoriel engendré par les $\rho_V(g)$ quand g décrit G est l'espace $\text{End}(V)$ tout entier (ce résultat est connu sous le nom de théorème de Burnside⁵²). Vérifier que c'est une conséquence facile du fait que la représentation de Steinitz⁵³ associée à une représentation irréductible ρ_V de G , qui est une représentation de $G \times G$ sur $\text{End}(V)$, est irréductible.

INDICATION.— Ayant identifié la représentation considérée avec le produit tensoriel (cf. chapitre 2) des représentations ρ_V^* et ρ_V , on est ramené à montrer, vu le a), que l'image du produit tensoriel de deux opérateurs (ici, il s'agit des opérateurs de projection) est égale au produit tensoriel des images (ce qui résulte du fait que le rang d'un produit tensoriel d'opérateurs est égal au produit des rangs, chose qui se démontre simplement par une réduction par l'action de Steinitz).

h) *Réciproque au lemme de Schur* : soit ρ une représentation unitaire de G . On suppose que l'algèbre des opérateurs qui commutent avec tous les $\rho(g)$ où $g \in G$ est réduite aux scalaires. Montrer que la représentation ρ est irréductible.

INDICATION.— Considérer pour un sous-espace stable par les éléments de G la projection orthogonale sur ce sous-espace et montrer qu'elle est scalaire.

i) Montrer que l'hypothèse que la représentation est unitaire peut être levée si l'on travaille avec un groupe G fini.

INDICATION.— Il existe toujours dans une représentation de G un produit hermitien qui rend la représentation unitaire (moyenner sur G un produit hermitien quelconque).

j) *Matrices magiques*. On considère la représentation naturelle de \mathfrak{S}_n sur \mathbb{C}^n . Montrer qu'une matrice $M = (m_{ij})$ commute avec la matrice de permutation P_σ si et seulement si $m_{\sigma(i)\sigma(j)} = m_{ij}$ pour tout i et j dans $[1, n]$. Établir alors que le centralisateur des matrices de permutation est de dimension 2, et qu'il est engendré par la matrice identité et par la matrice qui a des 1 partout, sauf sur la diagonale où il n'y a que des zéros (noter que l'on utilise le fait que le groupe symétrique opère doublement transitivement sur $[1, n]$).

⁵² La démonstration sera développée au chapitre 2.

⁵³ Il s'agit de la représentation $(g_1, g_2) \cdot f = \rho_V(g_1) \circ f \circ \rho_V(g_2^{-1})$. La représentation de G sur $\text{End}(V)$ donnée par $g \cdot f = \rho_V(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$, que l'on serait tenté d'appeler la *représentation de Jordan associée à ρ_V* , n'est jamais quant à elle irréductible si $\dim(V) \geq 2$, puisque les sous-espaces formés respectivement par les matrices scalaires et les matrices de trace nulle sont invariants.

Montrer, grâce à h), que la représentation de \mathfrak{S}_n sur l'hyperplan Z de \mathbb{C}^n formé des points dont la somme des coordonnées est nulle, est irréductible. Montrer que l'espace vectoriel \mathcal{M} (de dimension $n^2 - 2n + 2$) des *matrices magiques* (c'est-à-dire des matrices telles que les sommes de leurs coefficients par ligne et par colonne sont constantes⁵⁴) est exactement le sous-espace engendré par les matrices de permutation.

INDICATION.— Commencer par démontrer qu'une matrice est magique si et seulement si elle laisse stables l'hyperplan Z et son orthogonal formé par la droite D des points dont toutes les composantes sont égales (penser à la matrice et à son adjointe). Appliquer ensuite le théorème de Burnside et le fait que la matrice qui a des 1 partout est somme de matrices de permutation.

On peut aussi se passer du théorème de Burnside en procédant par exemple comme suit : une matrice magique $M = (m_{ij})$ est déterminée entièrement par le choix (arbitraire) de ses coefficients situés sur les $n - 1$ premières lignes, termes diagonaux $m_{22}, \dots, m_{n-1, n-1}$ non compris. Les différentes matrices obtenues en annulant tous ces paramètres, sauf l'un d'entre eux qu'on prend égal à 1, forment une base de l'espace des matrices magiques; chaque élément dans cette base s'écrit comme combinaison de matrices de permutation [retrancher éventuellement l'identité, et écrire ensuite la matrice nulle extraite (obtenue en rayant les deux lignes et les deux colonnes, qui comportent des coefficients non nuls) d'ordre $n - 2$, comme la différence de la matrice identité avec elle-même]. Voici un exemple obtenu en donnant au coefficient en position 2, 3 la valeur 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons que l'action de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ sur l'idéal \mathcal{M}_0 de l'algèbre \mathcal{M} formé des matrices magiques de poids nul est irréductible (ceci est du même ordre de difficulté que le théorème de Burnside); le sous-espace engendré par l'orbite de l'identité dans \mathcal{M} (c'est-à-dire par l'ensemble des matrices de permutation) est donc tout \mathcal{M} . Ceci donne encore une façon d'établir que les matrices de permutation engendrent l'espace \mathcal{M} .

k) Soit $L = (a_1, \dots, a_n)$ une ligne de longueur n . Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que L soit la première ligne d'une matrice

⁵⁴ On appelle parfois cette somme le *poids* de la matrice magique.

inversible dont les autres lignes sont obtenues par l'action de $n - 1$ permutations paires sur (les composantes a_i de) L ?

INDICATION.— On aura à séparer les cas où $n = 2$ ou 3 du cas où $n \geq 4$, cas à partir duquel \mathfrak{A}_n est doublement transitif sur $[1, n]$. Le cas $n = 3$ met en évidence les obstructions données par les trois plans passant par les droites $a_1 = a_2 = a_3$, puis $a_2 = ja_1$ et $a_3 = j^2a_1$, et enfin $a_2 = j^2a_1$ et $a_3 = ja_1$, où $j^3 = 1$.

l) Montrer que, pour l'action (irréductible) de $GL(n, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^n , le lemme de Schur exprime que les matrices qui commutent avec toutes les matrices inversibles sont les matrices scalaires, et le théorème de Burnside exprime que les matrices inversibles engendrent $M(n, \mathbb{C})$; comment interpréter alors le fait que les matrices de rang $p > 0$ donné engendrent aussi $M(n, \mathbb{C})$?

Montrer que, pour l'action (irréductible) de \mathfrak{S}_n sur l'hyperplan Z de \mathbb{C}^n , le lemme de Schur exprime que les matrices magiques de poids nul qui commutent avec toutes les matrices de permutation sont les multiples de la matrice p_Z qui comporte des $-1/n$ partout en dehors de la diagonale et des $(n-1)/n$ partout sur la diagonale (d'où provient cette matrice ?); et que le théorème de Burnside exprime ici que les matrices obtenues en permutant de toutes les façons possibles les lignes de p_Z engendrent l'ensemble des matrices magiques de poids nul.

m) La représentation (de Steinitz) de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ sur $M(n, \mathbb{C})$ est somme de quatre représentations irréductibles (non équivalentes). On en a rencontré deux : celle sur les matrices magiques de poids nul, et celle sur les matrices dont tous les coefficients sont identiques. Quelles sont les deux autres ? Donner alors une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices obtenues en permutant arbitrairement les lignes, puis les colonnes, d'une matrice donnée engendrent $M(n, \mathbb{C})$.

INDICATION.— On trouve les matrices dont toutes les colonnes sont identiques à un même vecteur de Z et de même avec les lignes.

Quant à la condition cherchée, elle est donnée par le fait que la matrice $M = (m_{ij})$ ne vérifie aucune des quatre obstructions suivantes : en premier, la somme de ses coefficients est nulle; ensuite, pour toute matrice carrée d'ordre 2 extraite de M , soit $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on a $a + d = b + c$; puis, la somme des coefficients est la même pour toutes les colonnes; et enfin, la somme des coefficients est la même pour toutes les lignes.

n) Montrer qu'une matrice qui vérifie la deuxième des obstructions précédentes est nécessairement de rang inférieur ou égal à 2. Les matrices de ce genre seront appelées *matrices antimagiques*⁵⁵.

⁵⁵ Attention : l'espace des matrices magiques et l'espace des matrices antimagiques ont une intersection non nulle. Notons aussi que les matrices antimagiques

INDICATION.— Montrer que tous les mineurs 3×3 sont nuls ! On peut aussi constater que les matrices antimagiques appliquent l'hyperplan Z dans la droite D .

o) Montrer que le sous-espace des matrices antimagiques (qui est de dimension $2n - 1$) est un sous-espace vectoriel maximal dans l'ensemble $\overline{\mathcal{R}}_2$ des matrices de rang inférieur ou égal à 2. Noter par ailleurs qu'il existe dans $\overline{\mathcal{R}}_2$ des sous-espaces vectoriels de $M(n, \mathbb{C})$ qui sont de dimension $2n$.

INDICATION.— Remarquer tout d'abord que l'espace des matrices antimagiques est conjugué de l'espace vectoriel des matrices d'ordre n dont seuls les coefficients situés sur la dernière ligne et la dernière colonne sont éventuellement non nuls. Constater ensuite que l'on obtient une matrice (d'ordre n) de rang inférieur ou égal à $p + 2$ lorsqu'on borde une matrice donnée, d'ordre $n - 1$ et de rang p , par une ligne et une colonne⁵⁶, et qu'on peut effectivement la border, quand $p < n - 1$, en une matrice de rang égal à $p + 2$.

p) (Question difficile) Il reste à décomposer l'action de \mathfrak{S}_n sur les matrices magiques de poids nul. On pourra commencer à y réfléchir en attendant de lire le chapitre 2.

q) Voici une dernière application du lemme de Schur : montrer que le centre d'un sous-groupe fini G de $GL(n, \mathbb{C})$ qui agit de façon irréductible sur \mathbb{C}^n est nécessairement cyclique.

INDICATION.— Le centre est formé de matrices scalaires et il est fini. Il s'identifie donc à un sous-groupe fini d'ordre k de \mathbb{C}^* , c'est donc le groupe des racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

r) Pour finir, une dernière application du théorème de Burnside : montrer que les éléments d'un sous-groupe G de $GL(n, \mathbb{C})$ qui est formé de matrices unipotentes sont simultanément trigonalisables. Ce résultat, désigné parfois sous le nom de *théorème de Kolchin*, exprime que le groupe G est conjugué à un sous-groupe de $U(n, \mathbb{K})$.

INDICATION.— Il suffit de montrer que les éléments de G ont un vecteur propre en commun. Remarquer alors qu'on peut se ramener au cas où G opère de façon irréductible sur \mathbb{C}^n ; il s'agit donc d'établir sous cette hypothèse que $n = 1$ ou encore que $G = \{\text{Id}\}$. On procède comme suit : soit $A = \text{Id} + N$ un élément fixé quelconque de G . L'égalité $\text{tr}(NX) = 0$ pour tout $X \in G$ implique d'après le théorème de Burnside que $N = 0$.

peuvent être caractérisées par le fait que la somme $\sum_i m_{i\sigma(i)}$ est la même pour toute permutation σ .

⁵⁶ On notera donc que les matrices d'ordre $n - 1$ extraites d'une matrice inversible d'ordre n sont de rang $n - 1$ ou $n - 2$.

Prouver alors cette égalité est facile si l'on remarque que la trace de tout élément de G est égale à n ; c'est donc le cas pour X et pour AX !

0.11.67. a) On considère la suite exacte⁵⁷

$$\{0\} \rightarrow 2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}^1 \rightarrow \{1\}$$

où φ désigne l'application $x \mapsto e^{ix}$. Montrer que φ est une application ouverte, mais non fermée. Montrer aussi qu'il n'existe pas de section de φ qui soit un homomorphisme de groupes, ou qui soit continue.

INDICATION.— La suite $(2n\pi + 1/n)$, n'ayant pas de valeurs d'adhérence, forme un fermé de \mathbb{R} , et son image par φ est non fermée; par ailleurs, le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ étant compact (car image par la surjection canonique de $[0, 1]$) est donc homéomorphe à \mathbb{S}^1 . Aussi, un ouvert de \mathbb{S}^1 est caractérisé par le fait que son image réciproque par φ est ouverte dans \mathbb{R} . Il est facile alors de voir que φ est ouverte, car $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U + 2\pi\mathbb{Z} = \bigcup_n (U + 2\pi n)$. Enfin, si φ a de telles sections, il existerait dans le premier cas des éléments d'ordre fini dans \mathbb{R} , et dans le second, la sphère \mathbb{S}^1 serait homéomorphe à son image dans \mathbb{R} qui est un segment.

b) Montrer que pour la suite exacte

$$\{e\} \rightarrow \mathfrak{A}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n \xrightarrow{\varepsilon} \{\pm 1\} \rightarrow \{1\},$$

où ε est la signature, il existe plusieurs sections de ε qui font de \mathfrak{S}_n un produit semi-direct de \mathfrak{A}_n et du groupe à deux éléments, mais que, pour $n \geq 3$, aucune de ces sections ne fait de \mathfrak{S}_n un produit direct. (Il est bon de se rappeler à cette occasion que la signature est le seul homomorphisme non trivial à valeurs dans $\{\pm 1\}$.)

INDICATION.— La même que celle de 0.11.20 : on aurait dans le cas contraire un sous-groupe distingué de \mathfrak{S}_n d'ordre 2.

c) Soit la suite exacte

$$\{\text{Id}_n\} \rightarrow SL(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{\det} \mathbb{K}^* \rightarrow \{1\}.$$

Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si n est impair, il existe une section du déterminant qui fait de $GL(n, \mathbb{K})$ un produit direct, et qu'il n'y en a pas quand n est pair. (Remarquer que le problème se ramène à l'étude de l'existence éventuelle d'homomorphismes de groupes $\varphi : \mathbb{K}^* \rightarrow \mathbb{K}^*$ tels que, pour tout λ , $\varphi(\lambda)^n = \lambda$.)

⁵⁷ Ayant défini la fonction $z \mapsto e^z$ comme la somme de la série $\sum z^n/n!$ et choisi une définition quelconque de π , on pourra à titre d'exercice (chose à laquelle se prêtent parfois les agrégatifs !) expliquer pourquoi cette suite est exacte.

d) Que se passe-t-il dans le cas complexe? Se convaincre en fait qu'il n'existe pas d'homomorphisme φ du groupe \mathbb{C}^* dans lui-même vérifiant pour tout $z \neq 0$, $\varphi(z)^n = z$.

INDICATION.— Considérer, pour faire compliqué, l'homomorphisme $\phi(z) = z/\varphi(z^n)$ et montrer que ϕ est l'identité sur les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et vaut 1 sur les puissances $n^{\text{ièmes}}$, d'où une contradiction.

Un autre argument consiste à affirmer que l'existence de φ impliquerait que \mathbb{C}^* soit isomorphe au produit semi-direct, donc direct (vu que tout est commutatif) de $\text{Ker}(\varphi)$ qui est le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et de $\text{Im}(\varphi)$ qui est \mathbb{C}^* . On aurait alors une contradiction en comptant les éléments du produit direct dont une puissance $n^{\text{ième}}$ est égale à 1.

0.11.68. Les extensions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par lui-même. a) Calculer le nombre de suites exactes

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}.$$

INDICATION.— On trouve $(p-1)^2$ suites exactes (on aura noté qu'un homomorphisme défini sur un groupe cyclique est entièrement caractérisé par l'image d'un générateur).

b) Calculer de même le nombre de suites exactes

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}.$$

INDICATION.— On trouve $(p-1)(p^2-1)$.

c) Soit $\mathcal{E}_{\{B;E;A\}}$ l'ensemble des suites exactes

$$\{0\} \longrightarrow B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow \{0\}$$

qui se déploient parmi les groupes abéliens B , E et A . Définir une action naturelle du groupe $\text{Aut}(E)$ sur l'ensemble $\mathcal{E}_{\{B;E;A\}}$ en considérant pour $\Phi \in \text{Aut}(E)$ la suite exacte

$$\{0\} \longrightarrow B \xrightarrow{\Phi \circ i} E \xrightarrow{\varphi \circ \Phi^{-1}} A \longrightarrow \{0\}.$$

Déterminer alors l'ensemble des orbites dans chacun des exemples précédents.

INDICATION.— On trouve $p-1$ orbites dans le premier exemple et une seule dans le second. (Le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ s'identifie au groupe $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$ et celui de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ à $GL(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.)

d) Une *extension* ξ de A par B est une suite exacte de groupes abéliens dont les groupes extrêmes sont (dans l'ordre) les groupes B puis A . Deux extensions ξ_1 et ξ_2 seront dites équivalentes s'il existe un isomorphisme Φ

entre les groupes centraux rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \rightarrow & B & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & A \rightarrow \{0\} \\ & & \parallel & & \downarrow \Phi & & \parallel \\ \{0\} & \rightarrow & B & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & A \rightarrow \{0\}. \end{array}$$

Déterminer alors dans le cas où $A = B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient. Exhiber un représentant privilégié pour chaque classe.

INDICATION.— On trouve p classes d'équivalence d'extensions [voir le b) de 0-C.11.70]. Penser ensuite aux $p - 1$ suites exactes associées aux homomorphismes surjectifs de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

0.11.69. Un exercice utile et élémentaire. Soit H et G deux sous-groupes d'un groupe S . On désigne par HG l'ensemble des éléments de la forme hg où $h \in H$ et $g \in G$.

- Montrer que HG est un sous-groupe si et seulement si $HG = GH$.
- Montrer que si H est distingué dans S , alors HG est un sous-groupe de S et $H \cap G$ est distingué dans G ; vérifier alors que l'on a $(HG)/H \simeq G/(H \cap G)$. Noter en passant que, lorsque les groupes sont finis, le cardinal du groupe HG est le quotient du produit des cardinaux de H et de G par le cardinal de leur intersection.
- Si $S = HG$ avec $H \cap G = \{e\}$, alors tout élément de S s'écrit de façon unique comme produit hg .
- Montrer que si $S = H \times_{A_i} G$, alors tout élément de H qui normalise G commute en fait avec les éléments de G , et le normalisateur de G dans S est égal au produit semi-direct interne $G \times_{A_i} Z_H(G)$, où l'on a noté $Z_H(G)$ le centralisateur de G dans H . Ce dernier produit est en fait direct, et G est donc facteur direct dans son normalisateur $N_S(G)$.

0.11.70. Un isomorphisme $SO(4) \simeq \mathbb{S}^3 \times_A SO(3)$. Le plongement $SO(3) \hookrightarrow SO(4)$ donné par

$$M \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

permet de restreindre à $SO(3)$ l'action naturelle de $SO(4)$ sur la sphère \mathbb{S}^3 de \mathbb{R}^4 . Ceci définit l'action A . La structure de groupe sur \mathbb{S}^3 est celle qui s'étend par homogénéité à \mathbb{R}^4 pour en faire le corps des quaternions. (Le plongement $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow SO(4)$ est alors donné par $z \mapsto (h \in \mathbb{R}^4 \mapsto z \cdot h \in \mathbb{R}^4)$ où la multiplication est celle des quaternions.)

Pour les détails, voir [Mn-Ts], page 142, où l'on démontre aussi par des arguments de topologie algébrique que le groupe $SO(4)$ n'est pas un produit direct de deux sous-groupes isomorphes aux groupes \mathbb{S}^3 et $SO(3)$.

0.11.71. a) Soit J_n le bloc de Jordan nilpotent d'ordre n . Montrer que la droite engendrée par le premier vecteur de base est la seule droite stable par J_n .

b) Montrer que le seul sous-espace vectoriel de dimension k stable par J_n est le sous-espace engendré par les k premiers vecteurs de base.

INDICATION.— Si F est un tel sous-espace, la restriction de J_n à F est encore nilpotente; il s'ensuit que le noyau de J_n^k (qui n'est autre que le sous-espace engendré par les k premiers vecteurs de base) contient F . On conclut par un argument de dimension.

c) En déduire que si \mathfrak{t}_n désigne l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures, alors les matrices triangulaires (supérieures) inversibles sont les seules matrices P qui vérifient $P\mathfrak{t}_n P^{-1} = \mathfrak{t}_n$. (Remarquer que si F est stable par tous les éléments de \mathfrak{t}_n , alors il en est de même du sous-espace $P(F)$.)

d) Montrer que le groupe $T(n, \mathbb{K})$ est égal à son normalisateur dans $GL(n, \mathbb{K})$. (On pourra ou bien considérer $\text{Id}_n + J_n$ et répéter le raisonnement précédent, ou bien remarquer que « l'adhérence » de $T(n, \mathbb{K})$ est égale à \mathfrak{t}_n .)

e) Quel est le normalisateur de $U(n, \mathbb{K})$?

f) On suppose dorénavant le corps algébriquement clos. Montrer que les seuls groupes qui contiennent $T(n, \mathbb{K})$ sont donnés par les sous-groupes paraboliques standard. En particulier, le groupe engendré par $T(n, \mathbb{K})$ et la matrice $\text{Id}_n + E_{n1}$ est le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ lui-même. Montrer que le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ est le seul groupe (algébrique⁵⁸) qui trigonalise toutes les matrices de $M(n, \mathbb{K})$.

g) Montrer que deux groupes paraboliques standard distincts ne peuvent être conjugués. (Ceci est lié au fait que le normalisateur de $T(n, \mathbb{K})$ est $T(n, \mathbb{K})$ lui-même, et que les sous-groupes de Borel d'un groupe algébrique sont conjugués; voir l'exercice 0-C.11.45. Voir aussi l'exercice 0.11.8.)

0.11.72. a) Montrer qu'en dehors du cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, le produit semi-direct interne $T(n, \mathbb{K}) \simeq U(n, \mathbb{K}) \times_{A_i} D(n, \mathbb{K})$ n'est pas direct.

INDICATION.— Calculer le centralisateur des matrices diagonales dans $T(n, \mathbb{K})$.

b) Montrer qu'en dehors du cas précédent et du cas où $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ et $n = 2$, le produit semi-direct

$$T(n, \mathbb{K}) \cap SL(n, \mathbb{K}) \simeq U(n, \mathbb{K}) \times_{A_i} (D(n, \mathbb{K}) \cap SL(n, \mathbb{K}))$$

⁵⁸ Le groupe unitaire, qui est Zariski-dense dans $GL(n, \mathbb{C})$ (cf. [Mn-Ts], page 189), trigonalise toutes les matrices.

n'est pas direct. (Se reporter pour l'exemple du groupe $T(2, \mathbb{F}_3)$ à l'exercice 0-A.6.27.)

0.11.73. a) Montrer que l'espace topologique quotient

$$GL(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{Z})$$

n'est pas compact⁵⁹.

INDICATION.— Considérer la fonction non bornée $M \mapsto \det(M)^2$.

b) Montrer que, si $n > 1$, le quotient $GL(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{Z})$ n'est pas un espace symétrique pour l'action de $GL(n, \mathbb{R})$.

INDICATION.— Soit τ une involution de $GL(n, \mathbb{R})$ telle que le groupe L de ses points fixes vérifie $\overset{\circ}{L} \subset GL(n, \mathbb{Z}) \subset L$. On a alors nécessairement $\overset{\circ}{L} = \{\text{Id}\}$, car $GL(n, \mathbb{Z})$ est discret. Par suite, le groupe L , qui est fermé, est un sous-groupe de Lie dont l'algèbre de Lie (qui est en particulier son espace tangent en l'identité) est réduite à $\{0\}$. La différentielle de τ en l'identité, qui est une involution dont l'ensemble des points fixes est l'algèbre de Lie de L , est donc l'application $X \mapsto -X$ sur $M(n, \mathbb{R})$; celle-ci n'est pas un homomorphisme d'algèbre de Lie.

c) Montrer que l'espace symétrique $GL(n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas compact si $n > 1$.

INDICATION.— Une méthode possible est de réaliser cet espace symétrique comme l'espace des formes réelles⁶⁰ de \mathbb{C}^n . Vu ainsi, il apparaît comme une partie ouverte de la grassmannienne des sous-espaces réels de dimension n de \mathbb{C}^n , et ne peut donc être également fermé, car cette grassmannienne, qui est un espace homogène de $GL^+(2n, \mathbb{R})$, est connexe.

0.11.74. Les espaces localement compacts. On dit qu'un espace topologique X est *localement compact* s'il est *séparé* et si tout élément de X admet un voisinage compact.

a) Montrer que si F est un fermé de l'espace localement compact X , alors F muni de la topologie induite est un espace topologique localement compact.

b) Montrer qu'un ouvert U de X , muni de la topologie induite, est aussi un espace topologique localement compact.

INDICATION.— Soit $a \in U$, et K un voisinage compact de a dans X . Séparer la partie compacte $K \setminus U$ et le point a par deux ouverts $O_{K \setminus U}$ et O_a . La partie $K \setminus (O_{K \setminus U})$ est un voisinage compact de a dans U .

⁵⁹ Cela est intuitivement clair si l'on identifie cet espace avec l'ensemble des réseaux de \mathbb{R}^n .

⁶⁰ Une *forme réelle* de \mathbb{C}^n est un sous-espace F de dimension n de l'espace vectoriel réel \mathbb{C}^n qui est transverse à son image par la multiplication par i .

c) En déduire que lorsqu'on munit un sous-espace localement fermé dans X de la topologie induite, il est alors un espace topologique localement compact.

d) Montrer inversement qu'une partie A d'un espace topologique séparé X qui est un localement compact lorsque cette partie est munie de la topologie induite est un sous-espace localement fermé de X .

INDICATION.— Il est immédiat de constater que tout point de A est un bon point de A (cf. exercice 0-C.11.33) puisqu'un voisinage compact K_a de a dans A est la trace sur A d'un voisinage V_a de a dans X . Le compact K_a , trace de A sur V_a , est fermé dans V_a . Il est alors facile de démontrer que A est localement fermé.

e) Montrer que l'ensemble des matrices réelles d'ordre n dont le rang est compris entre 1 et $n - 1$ est localement compact.

f) Montrer que l'ensemble des matrices de rang pair dans $M(n, \mathbb{R})$, une fois muni de la topologie canonique, est localement compact si et seulement si $n = 1$ (cf. exercice 0-C.11.33). Traiter de même le cas des matrices de rang impair.

g) Montrer que dans un espace topologique localement compact tout point admet un système fondamental de voisinages compacts.

INDICATION.— C'est essentiellement le b).

h) Soit E un espace métrique localement compact et dénombrable à l'infini, et soit A une partie localement fermée de E . Montrer que A est dénombrable à l'infini.

INDICATION.— L'espace métrique E étant dénombrable à l'infini est séparable (i.e. contient une partie dénombrable dense, ce qui dans les espaces métriques est équivalent au fait qu'il admet une base dénombrable d'ouverts); la partie A est alors à son tour séparable (comme toute partie d'un métrique séparable); comme A est de plus un localement compact, il est facile alors d'établir qu'il est dénombrable à l'infini (prendre une base dénombrable d'ouverts relativement compacts).

i) Exhiber pour le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$ une famille dénombrable de compacts dont il est la réunion.

INDICATION.— Si $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $M(n, \mathbb{R})$, on peut par exemple écrire

$$GL^+(n, \mathbb{R}) =$$

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (\{M \in M(n, \mathbb{R}); \det(M) \in [1/k, k]\} \cap \{M \in M(n, \mathbb{R}); \|M\| \leq k\}).$$

j) Montrer que le point à l'infini (dans le compactifié d'Alexandroff) d'un espace X localement compact et dénombrable à l'infini possède un système fondamental *dénombrable* de voisinages. Vérifier inversement que si le point à l'infini admet un tel système, alors l'espace X est dénombrable à l'infini.

INDICATION.— Remplacer le recouvrement dénombrable par des compacts par un recouvrement dénombrable d'ouverts relativement compacts.

k) Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés connexes d'un espace topologique localement compact. On suppose que l'intersection des F_n est un compact K non vide. Montrer que les F_n sont compacts à partir d'un certain rang. En considérant les fermés $[-1/n, 1/n] \cup [n, \infty[$ de \mathbb{R} , vérifier la nécessité de l'hypothèse concernant la connexité des F_n .

INDICATION.— Partant d'un ouvert V relativement compact contenant K , considérer les intersections des F_n avec la frontière (compacte) $\text{Fr}(V)$ de V . L'une de ces intersections, soit $F_{n_0} \cap \text{Fr}(V)$, est vide; un argument de connexité montre que F_{n_0} est dans V , et qu'il est donc compact.

0.11.75. Actions de groupes discrets. L'objet de cet exercice consiste en l'examen rapide de certaines actions de groupes discrets.

a) Montrer que tout sous-groupe discret H d'un groupe topologique *séparé* G est fermé.

INDICATION.— Si V est un voisinage de $e \in G$ tel que $H \cap V = \{e\}$, considérer un voisinage U de $\{e\}$ tel que $U = U^{-1}$ et $U \cdot U \subset V$. Si maintenant $g \notin H$ est adhérent à H , le voisinage gU de g contient deux éléments distincts de H . En déduire une contradiction.

On peut aussi considérer une suite (h_i) d'éléments de H qui tend vers g et constater que la suite de terme général $h_i h_{i+1}^{-1}$ est une suite d'éléments de H qui tend vers e .

b) On dit que le groupe discret G opère *proprement* sur l'espace topologique E si pour tout compact $K \subset E$ on a $g(K) \cap K = \emptyset$ pour tous les éléments $g \in G$ sauf peut être un nombre fini (dépendant de K). Montrer qu'il revient au même de dire que pour deux compacts K_1 et K_2 quelconques, $g(K_1) \cap K_2 = \emptyset$ pour tout $g \in G$ sauf pour un nombre fini. Montrer que si E est localement compact, chaque orbite est fermée et discrète dans E .

INDICATION.— Pour établir que $G \cdot x$ est discret, remarquer que si $x \in V$, alors la condition $g \cdot x \in V$ implique que $g(V)$ rencontre V (au moins au point x); par suite, si V est un voisinage compact de x , l'orbite de x rencontre V en un nombre fini de points dont on peut séparer x tout en restant dans V . Pour établir que l'orbite est fermée, faire appel à deux voisinages compacts.

c) À partir de maintenant, on considère, à titre d'exemple, le groupe G des isométries du plan affine euclidien \mathbb{R}^2 qui laissent invariant le réseau \mathbb{Z}^2 formé par les points à coordonnées entières (ce groupe appartient à la classe notée habituellement $p4m$ et qui est l'une des 17 classes de groupes

cristallographiques du plan affine euclidien). Montrer que le groupe G est un sous-groupe discret du groupe des isométries affines et qu'il opère proprement sur \mathbb{R}^2 .

INDICATION.— Pour établir que G est discret, on peut par exemple, en pensant aux endomorphismes de \mathbb{R}^2 naturellement associés aux éléments de G , établir que le sous-groupe des translations dans G , qui est isomorphe à \mathbb{Z}^2 , est d'indice fini dans G (égal à huit). Pour montrer que l'action est propre, se rappeler que les isométries du plan sont de quatre sortes : des translations, des rotations, des symétries, ou enfin des glissements (c'est-à-dire des composées d'une symétrie d'axe Δ et d'une translation de vecteur parallèle à Δ). Vérifier alors que pour chaque type d'isométries dans G , seuls des éléments de G en nombre fini manquent de transporter suffisamment loin le compact donné K .

d) On démontre que lorsqu'un groupe discret G opère proprement sur un espace localement compact E , l'espace des orbites $G \backslash E$ (muni de la topologie quotient, topologie pour laquelle les ouverts sont les parties dont les images réciproques par la surjection canonique $E \rightarrow G \backslash E$ sont des ouverts de E) est un espace quotient séparé. Vérifier, dans le cas de l'exemple examiné ici, que cet espace s'identifie à un disque.

e) Montrer que le groupe G est produit semi-direct interne du sous-groupe (distingué) $T(G)$ des translations qu'il contient et du sous-groupe G_O de ses éléments qui laissent fixe l'origine. Ce dernier sous-groupe est isomorphe au groupe diédral \mathcal{D}_4 (cf. exercice 0-B.11.12).

f) Montrer que le sous-groupe $T(G)$ de G a deux classes de conjugaison de compléments dans G .

INDICATION.— Remarquer d'abord que deux compléments d'un sous-groupe distingué T qui sont conjugués le sont par un élément du sous-groupe T . Par ailleurs, un complément de $T(G)$ est nécessairement de la forme G_M avec $M \in \mathbb{R}^2$ (tous les sous-groupes du groupe des isométries du plan qui sont isomorphes à \mathcal{D}_4 sont des groupes d'isométries de carrés dans le plan). Il suffit alors pour conclure de voir que la translation qui fait passer de l'origine au point de coordonnées $(1/2, 1/2)$ n'est pas dans $T(G)$.

0.11.76. Le groupe d'automorphismes d'une action transitive. On se place dans le cadre d'une action transitive d'un groupe G sur un ensemble X et l'on se propose d'attacher à cette action un groupe d'opérateurs sur X , noté $\text{Aut}(G, X)$, qui agit librement sur X et dont l'action sur X commute avec celle de G . Précisons qu'un groupe L agit *librement* sur X si tout élément non trivial de L « bouge » tous les éléments de X ;

autrement dit, si tout élément de L qui opère sur X en laissant fixe un point est égal à e .

a) Donner un certain nombre d'exemples d'actions libres et déterminer pour chacune d'elles l'espace des orbites. Penser notamment à l'action libre naturelle de \mathbb{Z} sur \mathbb{R} dont l'espace des orbites est le cercle, et à deux actions de \mathbb{Z} sur le cylindre (droit) dont les espaces d'orbites sont respectivement le tore et la bouteille de Klein. Penser aussi au groupe des translations d'un espace affine, et au cas particulier du groupe de Klein \mathcal{V}_4 opérant sur $\{1, 2, 3, 4\}$ (cf. exercice 0-B.11.11).

b) Montrer que toute application de X dans lui-même qui est équivariante pour l'action de G est bijective et que son inverse est encore G -équivariante. On note alors $\text{Aut}(G, X)$ le groupe déterminé par l'ensemble de ces applications G -équivariantes, qui n'est donc autre que le « commutateur » de l'action. Vérifier que ce groupe opère librement sur X et que l'orbite d'un élément x_0 n'est autre que $\mathcal{N}_G(H_0)/H_0$, où l'on a désigné par H_0 le stabilisateur de x_0 dans G .

INDICATION.— Se rappeler que les points fixes de l'action de H sur G/H sont les points de $\mathcal{N}(H)/H$ (cf. exercice 0.11.2).

c) En déduire un isomorphisme entre $\text{Aut}(G, X)$ et n'importe lequel des groupes $\mathcal{N}_G(H_0)/H_0$ quand x_0 décrit X .

d) Déterminer le groupe $\text{Aut}(G, X)$ pour l'action du groupe orthogonal $G = O(n)$ sur la sphère $X = \mathbb{S}^{n-1}$.

INDICATION.— On trouve le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ défini par l'application antipodale et dont l'espace des orbites est l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Penser pour cela à l'écriture $f \circ s_\Delta \circ f^{-1} = s_{f(\Delta)}$, où l'on a désigné par s_Δ la symétrie par rapport à l'axe Δ .

e) Déterminer le groupe $\text{Aut}(G, X)$ pour l'action de $G = GL(n, \mathbb{R})$ sur $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$.

INDICATION.— On trouve le groupe des homothéties (vectorielles), et l'espace des orbites est encore l'espace projectif.

f) Déterminer les applications $f : \mathcal{R}_p \rightarrow \mathcal{R}_p$ qui vérifient l'identité $f(PAQ) = Pf(A)Q$ pour toute matrice A de rang p et tout couple (P, Q) de matrices inversibles.

INDICATION.— On trouve les homothéties; calculer évidemment à cet effet le normalisateur dans $GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K})$ du stabilisateur de la matrice standard R_p de rang p pour l'action de Steinitz.

g) Montrer qu'une matrice $N \in M(n, \mathbb{K})$ est d'indice de nilpotence n si et seulement si elle est nilpotente et de rang $n - 1$, ou encore si et seulement si elle est semblable au bloc de Jordan J_n . En déduire que si q est un polynôme et si N est nilpotente d'indice de nilpotence n , la matrice $q(N)$ est semblable à N si et seulement si la valuation du polynôme q est égale

à 1 (c'est-à-dire $q(0) = 0$ et $q'(0) \neq 0$). On suppose à partir de maintenant que $N \in M(3, \mathbb{K})$. Montrer que les applications $N \mapsto \alpha N + \beta N^2$, où α est non nul, donnent tous les éléments du groupe d'automorphismes de l'action transitive du groupe $GL(3, \mathbb{K})$ sur l'ensemble \mathcal{O}_3 des matrices nilpotentes d'indice de nilpotence égal à trois, et écrire la loi de composition dans ce groupe en termes des coefficients α et β .

INDICATION.— Se reporter à la note sur les classes de similitude; si J_3 désigne le bloc de Jordan d'ordre trois, montrer que le normalisateur du stabilisateur de J_3 est produit semi-direct interne du stabilisateur (qui est formé des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

où $a \neq 0$) et du sous-groupe des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Considérer enfin l'homomorphisme

$$\begin{bmatrix} \alpha & x & y \\ 0 & \alpha\lambda & z \\ 0 & 0 & \alpha\lambda^2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \lambda & \alpha^{-1}(z - \lambda x) \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Remarque. L'existence du groupe $\text{Aut}(G, X)$ (et de son action libre) est passée sous silence dans les ouvrages que nous avons eu l'occasion de consulter; ce groupe est pourtant omniprésent, et de façon cruciale, aussi bien, pour ne donner que deux exemples, dans la théorie des revêtements que dans l'étude de la variété des drapeaux. Dans ce dernier cas, vérifier que, sous l'action de $GL(n, \mathbb{C})$, le groupe d'automorphismes est trivial, puisque le groupe des matrices triangulaires $T(n, \mathbb{C})$ est son propre normalisateur (cf. exercice 0.11.71); par contre, pour l'action du groupe unitaire $U(n)$, le groupe des automorphismes est le groupe symétrique \mathfrak{S}_n , puisque le normalisateur dans $U(n)$ des matrices de $U(n)$ qui sont diagonales est donné par les matrices de permutation. Notons au passage qu'il est difficile (en dehors des cas de dimension 2 ou 3, et en tenant compte pour u unitaire de l'écriture $u(F \cap G^\perp) = u(F) \cap u(G)^\perp$) de deviner *a priori* les applications équivariantes.

0.11.77. On examine dans cet exercice l'espace quotient W_3 de l'orbite $X = \mathcal{O}_3$ apparaissant dans l'exercice précédent par l'action libre de son

groupe d'automorphismes noté pour la circonstance L . On supposera le corps de base égal à \mathbb{R} .

a) Écrire un isomorphisme entre le groupe L considéré et le produit semi-direct $\mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^*$, où l'action A est donnée par $\lambda \cdot x = x/\lambda$.

b) On munit L et X de leur topologie naturelle. Montrer d'une part que l'application $\Phi : X \times L \rightarrow X \times X$ définie par $(x, l) \mapsto (x, l(x))$ a une image fermée (qui n'est autre que le graphe de la relation d'équivalence associée à la partition de X en L -orbites) et que d'autre part Φ réalise un homéomorphisme entre $X \times L$ et son image.

INDICATION.— Il s'agit essentiellement d'établir qu'étant données une suite (N_k) de matrices convergeant dans X vers N , une suite (α_k) de nombres réels non nuls, et enfin une suite (β_k) de nombre réels telles que la suite $(\alpha_k N_k + \beta_k N_k^2)$ converge dans X vers une matrice N' , alors la suite (α_k) converge vers un réel α *non nul* et la suite (β_k) converge vers un réel β , et donc $N' = \alpha N + \beta N^2$. Constater à cette fin que la suite $(\alpha_k N_k^2)$ converge vers la matrice NN' qui ne peut être nulle, car l'image de N' (qui est un plan) serait dans le cas contraire contenue dans le noyau de N (qui est une droite).

c) En déduire que l'espace des orbites $W_3 = L \backslash X$ a une structure naturelle de variété différentiable de dimension 4 pour laquelle la projection $\mathcal{O}_3 \rightarrow W_3$ est une submersion.

INDICATION.— Ceci découle d'un résultat général qui exprime que la structure différentielle sur l'espace $L \backslash X$ des orbites existe si et seulement si le graphe de la relation associée à la partition de X en L -orbites est une sous-variété fermée de $X \times X$, condition nécessaire et suffisante qui revient, lorsque le groupe L opère librement, à dire que le paramétrage donné par Φ est un bon paramétrage. (On trouvera une référence dans [Mn-Ts], pages 148 et 154.)

d) La variété W_3 est-elle compacte ?

Note 0-A

Le groupe quaternionique \mathbb{H}_8 et le groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$

0-A.1 Introduction

Le groupe quaternionique \mathbb{H}_8 (H comme Hamilton, le découvreur des quaternions), noté parfois Q , est l'un des cinq groupes d'ordre 8 de la nature. On le rencontre réalisé de différentes façons dans la littérature mathématique. Quand on sait ce qu'est le corps \mathbb{H} des quaternions construit sur \mathbb{R}^4 , muni de sa base $\{1, i, j, k\}$ avec la table de multiplication (\clubsuit), où 1 est unité et

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, & ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, & ki &= -ik = j, \end{aligned}$$

le groupe \mathbb{H}_8 n'est autre que le sous-groupe de \mathbb{H}^* formé des éléments $\pm 1, \pm i, \pm j$ et $\pm k$.

L'associativité dans \mathbb{H}_8 résulte de celle qu'on a dans \mathbb{H} ; cependant un moyen classique de construire \mathbb{H} consiste à prouver que la multiplication définie dans \mathbb{R}^4 par bilinéarité à partir des relations dans (\clubsuit) est associative, ceci étant le seul point qui mérite d'être vérifié. (Lire l'introduction du chapitre sur les quaternions de [Per].) Autrement dit, l'existence du groupe \mathbb{H}_8 est intimement liée à celle de \mathbb{H} .

Le groupe \mathbb{H}_8 se distingue des autres groupes d'ordre 8 par le fait qu'il est le seul à être non abélien et à n'avoir en même temps qu'un seul élément d'ordre 2. Une autre façon de le présenter consiste à le caractériser comme le groupe hamiltonien¹ de plus petit ordre (voir aussi les exercices). Nous l'introduisons pour notre part comme suit : soit $G = SL(2, \mathbb{F}_3)$ le groupe unimodulaire des matrices d'ordre 2 de déterminant 1 construit

¹ Un groupe est dit *hamiltonien* s'il n'est pas commutatif et si tous ses sous-groupes sont distingués.

sur $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le cardinal de G est égal à $24 = 2^3 \cdot 3$. Alors, le groupe quaternionique \mathbb{H}_8 peut se définir comme l'unique 2-Sylow de G . De façon plus précise, les éléments semi-simples² de G forment un sous-groupe qui n'est autre que l'unique 2-Sylow de G .

Il est bon de signaler ici que le groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$ occupe une place spéciale parmi les autres $SL(2, \mathbb{F}_p)$, du fait qu'il est le seul avec $SL(2, \mathbb{F}_2)$ à ne pas être égal à son sous-groupe dérivé.

Les méthodes linéaires ainsi utilisées ne sont pas en fait dans la nature du problème, un peu comme lorsqu'on a étudié auparavant le groupe \mathfrak{A}_5 en le regardant comme isomorphe à $SL(2, \mathbb{F}_4)$ ou à $PGL(2, \mathbb{F}_5)$. Si l'on voulait ne pas sortir du cadre proprement dit de la théorie des groupes, l'introduction du groupe quaternionique devrait plutôt se faire au moyen de générateurs et relations.

0-A.2 Construction du groupe \mathbb{H}_8

Soit S un 2-Sylow de $G = SL(2, \mathbb{F}_3)$. Tout élément $M \in S$ doit vérifier $M^8 = \text{Id}$. Le polynôme $X^8 - 1$ a toutes ses racines simples en caractéristique 3. Il s'ensuit donc que tous les éléments de S (qui sont des matrices) sont semi-simples (penser au polynôme minimal). Or le polynôme caractéristique de M s'écrit : $X^2 - \text{tr}(M)X + 1$. Si donc $\text{tr } M$ était égale à ± 1 , on aurait une valeur propre double (puisque $(X^2 - X + 1) = (X^2 + 2X + 1) = (X + 1)^2$ et $(X^2 + X + 1) = (X^2 - 2X + 1) = (X - 1)^2$). Seules

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

parmi les matrices de trace non nulle seraient diagonalisables. Maintenant si $\text{tr } M$ était égale à 0, la matrice inversible M aurait deux valeurs propres distinctes et serait diagonalisable dans une extension de \mathbb{F}_3 . Or il y a 6 matrices de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ de trace nulle (distinguer pour

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

telle que $ad - bc = 1$ les cas $a = 0$ et $a \neq 0$). Les huit éléments ainsi obtenus forment le seul 2-Sylow. Celui-ci est donc distingué dans G et même dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$, car si $P \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ et $M \in \mathbb{H}_8$, la matrice PMP^{-1} est d'une part semi-simple, comme M , et d'autre part de déterminant 1.

Il est à noter que l'on n'aurait pas pu établir l'unicité de S par les seuls théorèmes de Sylow. De même, il n'aurait pas suffi de constater que si M

² C'est-à-dire diagonalisables dans $GL(2, \mathbb{K})$, où \mathbb{K} est une extension adéquate du corps \mathbb{F}_3 .

est semi-simple, alors M^{-1} l'est aussi; la stabilité par produit n'est pas acquise.

0-A.3 Les matrices de $SL(2, \mathbb{F}_3)$

Nous donnons dans cette section la liste (\spadesuit) des éléments de $SL(2, \mathbb{F}_3)$. Nous y ferons allusion par la suite.

$$\begin{aligned}
 1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & -1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & -i &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 j &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, & -j &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & k &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, & -k &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 a &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 a^2 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, & & b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Remarquons que les éléments de \mathbb{H}_8 figurent sur les deux premières lignes; les troisième et quatrième lignes représentent la classe $a \cdot \mathbb{H}_8$, et les deux dernières la classe $a^2 \cdot \mathbb{H}_8$. L'élément b est égal à $-a^2 k$.

Remarquons également qu'il y a un seul élément d'ordre 2 dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$: en effet, un tel élément vérifiant $M^2 = \text{Id}$ est nécessairement diagonalisable et se trouve donc dans \mathbb{H}_8 . Or les éléments i, j, k et leurs opposés sont d'ordre 4; il ne reste que -1 qui constitue avec 1 le centre de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

0-A.4 Les groupes d'automorphismes de \mathbb{H}_8 et de $SL(2, \mathbb{F}_3)$

0-A.4.1.

Proposition. *Le groupe des automorphismes de \mathbb{H}_8 est isomorphe à $GL(2, \mathbb{F}_3)/\{\pm \text{Id}\} \simeq \mathfrak{S}_4$.*

Démonstration. Un automorphisme de \mathbb{H}_8 est connu quand on connaît ses valeurs sur les éléments i et j , lesquels engendrent \mathbb{H}_8 . Le nombre de possibilités pour l'image de i par un automorphisme, image qui doit être d'ordre 4, est égal à 6. Quant à l'image de j , qui doit être en dehors du sous-groupe engendré par l'image de i , elle est à choisir parmi les quatre éléments d'ordre 4 restants. Le cardinal de $\text{Aut}(\mathbb{H}_8)$ est donc inférieur ou égal à 24. Par ailleurs, comme \mathbb{H}_8 est distingué dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$,

l'homomorphisme de ce dernier groupe dans $\text{Aut}(\mathbb{H}_8)$ qui associe à un élément la restriction à \mathbb{H}_8 de l'automorphisme intérieur que cet élément définit, a pour noyau $\{\pm \text{Id}\}$ (cf. exercice 0-A.6.7). On en déduit une injection de $GL(2, \mathbb{F}_3)/\{\pm \text{Id}\}$ dans $\text{Aut}(\mathbb{H}_8)$. Il reste pour finir à rappeler l'isomorphisme entre \mathfrak{S}_4 et $PGL(2, \mathbb{F}_3)$ rencontré antérieurement (cf. exercice 0.11.12). ■

0-A.4.2.

Proposition 1. *Le groupe quotient $GL(2, \mathbb{F}_3)/\mathbb{H}_8$ est isomorphe à \mathfrak{S}_3 .*

Démonstration. Le quotient est un groupe à six éléments. Il est donc isomorphe à \mathfrak{S}_3 , car il est non commutatif : en effet, les matrices a et a^2 sont semblables dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ (voir la liste ♠) ; il existe donc P telle que $P^{-1}aPa^{-1} = a$. Si le quotient était commutatif, on aurait $a \in \mathbb{H}_8$, d'où contradiction (voir aussi l'exercice 0-A.6.23). ■

Proposition 2. *Le groupe dérivé de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ est égal à $SL(2, \mathbb{F}_3)$.*

Démonstration. Le groupe dérivé est nécessairement formé de matrices de déterminant 1 : il est donc contenu dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$. De plus, il contient \mathbb{H}_8 [cf. exercice 0-A.6.8, c)], et ceci strictement, car d'après la démonstration précédente il contient a . Il est par conséquent égal à $SL(2, \mathbb{F}_3)$, vu que son ordre divise l'ordre de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ et est un multiple de celui de \mathbb{H}_8 . ■

Proposition 3. *Soit B un sous-groupe d'ordre 6 de $SL(2, \mathbb{F}_3)$. Les éléments de B sont simultanément trigonalisables sur \mathbb{F}_3 .*

Démonstration. D'après 0.11.5, il y a un unique 3-Sylow S dans B . Le groupe B est donc contenu dans le normalisateur de S dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$ qui est d'indice 4 (cf. 0.11.1 et exercice 0-A.6.11). Le groupe B est donc le normalisateur d'un 3-Sylow et est donc conjugué du normalisateur du 3-Sylow standard $U(2, \mathbb{F}_3)$, c'est-à-dire de l'intersection $T(2, \mathbb{F}_3) \cap SL(2, \mathbb{F}_3)$. ■

Remarquons qu'il est facile de montrer que B est commutatif, par exemple en invoquant le fait qu'il n'y a qu'un seul élément d'ordre 2, contrairement au cas du groupe \mathfrak{S}_3 . (On peut aussi constater que l'élément $-a$ engendre $T(2, \mathbb{F}_3) \cap SL(2, \mathbb{F}_3)$... Voir enfin 0-A.6.27.)

0-A.4.3. Nous allons, dans ce paragraphe, déterminer les groupes d'automorphismes de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ et de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. Pour cela, nous aurons besoin,

comme plus haut, de plusieurs résultats faciles qui figurent dans les exercices en fin de note.

Proposition 1. *Le groupe $\text{Aut}(SL(2, \mathbb{F}_3))$ est isomorphe à \mathfrak{S}_4 .*

Démonstration. Comme \mathbb{H}_8 est l'unique 2-Sylow de $G = SL(2, \mathbb{F}_3)$, tout automorphisme Φ le laisse invariant. L'automorphisme Φ agit sur les éléments de \mathbb{H}_8 comme la conjugaison par un élément P de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ (voir la proposition 0-A.4.1.0). On écrit alors G comme produit semi-direct interne de \mathbb{H}_8 et de l'un de ses quatre 3-Sylow S fixé une fois pour toutes. Il suffit alors d'établir que $\Phi(M) = PMP^{-1}$ pour tout M dans S (cf. 0.11.69). Soit pour cela un élément $H \in \mathbb{H}_8$ quelconque; on écrit que $\Phi(MH)$ est égal d'une part à $\Phi(MHM^{-1}M) = PMHM^{-1}P^{-1}\Phi(M)$, et d'autre part à $\Phi(M)\Phi(H) = \Phi(M)PHP^{-1}$. L'élément $M^{-1}P^{-1}\Phi(M)P$ centralise ainsi les éléments de \mathbb{H}_8 : il existe donc (d'après l'exercice 0-A.6.7) $\varepsilon(M) \in \{\pm \text{Id}\}$ tel que $\Phi(M) = PMP^{-1}\varepsilon(M)$. Il est facile alors de vérifier que ε est un homomorphisme du groupe $S \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\{\pm \text{Id}\}$; il est donc trivial. ■

Proposition 2. *Le groupe des automorphismes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ est isomorphe au produit direct $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On identifie le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ au sous-groupe $\{1, \det\}$ du groupe multiplicatif des applications de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ dans \mathbb{F}_3^* . L'application $\Psi : (P, \varepsilon) \mapsto [M \mapsto \varepsilon(M)PMP^{-1}] \in \text{Aut}(GL(2, \mathbb{F}_3))$ est alors un homomorphisme de groupes défini sur $GL(2, \mathbb{F}_3) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à valeurs dans le groupe $\text{Aut}(GL(2, \mathbb{F}_3))$. Son noyau est le centre de $GL(2, \mathbb{F}_3)$: en effet, si $\varepsilon(M)PMP^{-1} = M$ pour tout M , il en résulte que ε vaut 1 sur les matrices de trace non nulle, et en particulier sur $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; ce n'est donc pas le déterminant³. Il s'agit maintenant d'établir que Ψ est surjective: pour cela, il suffit de montrer qu'un automorphisme Φ de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ est de la forme indiquée sur les éléments de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ et sur l'élément $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, car $GL(2, \mathbb{F}_3)$ est produit semi-direct interne de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ et du groupe à deux éléments engendré par D . On procède alors comme dans la démonstration de la proposition précédente, connaissant cette fois-ci la forme des automorphismes de $SL(2, \mathbb{F}_3)$. ■

³ On n'aurait pas pu conclure en prenant le déterminant des deux membres.

Remarque. Le groupe $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est autre que le groupe des isométries de \mathbb{R}^3 qui laissent invariant le cube⁴. On retrouvera ce rapport énigmatique entre le groupe $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et le cube dans la configuration cubique parmi les sous-groupes de ce dernier groupe (cf. exercice 0-A.6.42).

0-A.5 Structure des 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$

Il y a dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ trois 2-Sylow (cf. exercice 0-A.6.19), d'ordre 16 et contenant tous \mathbb{H}_8 comme sous-groupe distingué. De façon plus précise :

Proposition. *Il y a sur \mathbb{H}_8 deux classes d'automorphismes d'ordre 2 : d'une part, les trois automorphismes intérieurs induits par les conjugaisons par i , j et k , et d'autre part 6 automorphismes extérieurs. Les 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ contiennent \mathbb{H}_8 et sont isomorphes à $\mathbb{H}_8 \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où Φ est un des automorphismes extérieurs d'ordre 2 précédents.*

Démonstration. Le groupe des automorphismes de \mathbb{H}_8 s'identifie à $GL(2, \mathbb{F}_3)/\{\pm \text{Id}\}$, et les éléments X de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ tels que $X^2 = \text{Id}$ ou $X^2 = -\text{Id}$ ont été entièrement déterminés dans les exercices 0-A.6.18 et 0-A.6.21. Or tout élément d'ordre 2 en dehors de \mathbb{H}_8 permet de faire le produit semi-direct interne de \mathbb{H}_8 et du sous-groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qu'il engendre. [Cf. 0.11.69 en se rappelant que \mathbb{H}_8 est distingué dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$]. Enfin, comme les 2-Sylow sont conjugués et que l'on a construit des 2-Sylow qui contiennent le sous-groupe distingué \mathbb{H}_8 , ils le contiennent tous. ■

Remarques

- a) Le lecteur saisira encore mieux la situation en se reportant aux exercices 0-A.6.32 à 0-A.6.35.
- b) Quand on se place dans \mathfrak{S}_4 , les éléments d'ordre 2 auxquels il est fait allusion sont d'une part les six transpositions, et d'autre part les trois permutations d'ordre 2, produits de deux transpositions à supports disjoints. (Cf. exercice 0-A.6.33).

0-A.6 Exercices

Les quatre premiers exercices ne serviront pas par la suite (ils sont là en écho à ce qui a été dit dans l'introduction de la note). On s'attache dans les suivants à démanteler les groupes $SL(2, \mathbb{F}_3)$ et $GL(2, \mathbb{F}_3)$. Le lecteur a intérêt à se poser lui-même toutes sortes de questions concernant l'un ou l'autre de ces groupes, et à se reporter ensuite aux exercices pour voir le traitement qui en est proposé.

⁴ Penser aux quatre grandes diagonales du cube.

0-A.6.1. On se propose de vérifier l'associativité de la multiplication dans \mathbb{H}_8 défini comme il a été suggéré dans l'introduction de la note.

a) Soit $\sigma : \mathbb{H}_8 \rightarrow \mathbb{H}_8$ définie par $\sigma(\pm 1) = \pm 1, \sigma(\pm i) = \pm j, \sigma(\pm j) = \pm k$ et $\sigma(\pm k) = \pm i$. Montrer que σ vérifie $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ pour tout x et y dans \mathbb{H}_8 .

b) Même question pour τ définie par $\tau(\pm 1) = \pm 1, \tau(\pm i) = \mp i, \tau(\pm j) = \pm k$ et $\tau(\pm k) = \pm j$.

c) Montrer que l'associativité dans \mathbb{H}_8 découle de l'examen de 5 cas au lieu de 27. (Cf. [Hal], page 23.)

0-A.6.2. a) Montrer que \mathbb{H}_8 peut être introduit comme le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{C})$ formé des matrices

$$\pm \text{Id}, \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

où $i^2 = -1$.

b) Montrer que, pour ce plongement, le sous-groupe \mathbb{H}_8 est égal à son propre normalisateur.

0-A.6.3. Montrer que le groupe \mathbb{H}_8 est hamiltonien minimal.

INDICATION.— On rappelle qu'il y a deux groupes d'ordre 4, deux groupes d'ordre 6 et quatre groupes d'ordre 8 en dehors de \mathbb{H}_8 . Prouver alors qu'aucun de ces groupes n'est hamiltonien.

0-A.6.4. Montrer que le centralisateur dans le groupe $SL(3, \mathbb{F}_3)$ d'une involution⁵ u est isomorphe à $GL(2, \mathbb{F}_3)$. ⁽⁶⁾

INDICATION.— Réduire u dans $GL(3, \mathbb{F}_3)$ à $\text{Diag}(-1, -1, 1)$. Comme $SL(3, \mathbb{F}_3)$ est distingué dans $GL(3, \mathbb{F}_3)$, on peut se contenter d'examiner le centralisateur de la matrice diagonale dans $SL(3, \mathbb{F}_3)$ (le vérifier) : on trouve toutes les matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \det M \end{bmatrix}, \text{ où } M \text{ décrit } GL(2, \mathbb{F}_3).$$

⁵ Rappelons qu'une involution dans un groupe G est un élément d'ordre 2. Les involutions jouent un rôle très important dans la classification des groupes simples finis.

⁶ On démontre que si G est un groupe simple tel que le centralisateur d'une involution est isomorphe à $GL(2, \mathbb{F}_3)$, alors G est isomorphe à $SL(3, \mathbb{F}_3)$ ou au groupe \mathcal{M}_{11} , qui est l'un des cinq groupes de Mathieu (cf. [Hup-Bla], page 343, théorème de Brauer-Wong et [Dorn], pages 155 ou 195).

0-A.6.5. a) Vérifier que l'ensemble des matrices de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ qui ont un nombre pair de coefficients nuls est un groupe ($= \mathbb{H}_8$).

b) Montrer que l'ensemble des matrices

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

appartenant à $SL(2, \mathbb{F}_3)$ et telles que

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{bmatrix}$$

soit semi-simple est de cardinal 8.

INDICATION.— On pourra remarquer que c'est une classe modulo \mathbb{H}_8 .

c) Déterminer tous les homomorphismes du groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$ dans le groupe additif \mathbb{F}_3 .

INDICATION.— Il y en a deux qui sont non triviaux. Si π est l'un d'eux, on observera que l'autre est donné par $M \mapsto -\pi(M) = \pi({}^t M)$.

d) Existe-t-il une forme quadratique sur $M(2, \mathbb{F}_3)$ qui induise par restriction à $SL(2, \mathbb{F}_3)$ un tel homomorphisme non trivial ?

0-A.6.6. Montrer que les groupes \mathfrak{S}_4 et $SL(2, \mathbb{F}_3)$ ne sont pas isomorphes.

INDICATION.— Ils ont le même nombre d'éléments, mais il y a trop d'éléments d'ordre 2 dans \mathfrak{S}_4 ; on peut aussi comparer leurs centres.

0-A.6.7. Montrer que le centralisateur de \mathbb{H}_8 dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ est $\{\pm \text{Id}\}$.

INDICATION.— Si g commute avec j , qui est semi-simple et à valeurs propres distinctes, alors g est semi-simple. Il en est de même si g commute avec i . Or les éléments i et j ne sont pas simultanément diagonalisables (car ils ne commutent pas); conclure !

0-A.6.8. Groupe dérivé de $SL(2, \mathbb{F}_3)$. a) Montrer que pour tout X et Y dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$, la matrice $XYX^{-1}Y^{-1}$ est semi-simple.

INDICATION.— Le groupe (et c'en est bien un) $SL(2, \mathbb{F}_3)/\mathbb{H}_8$ est d'ordre 4; il est donc commutatif. On conclut en se rappelant que \mathbb{H}_8 est précisément l'ensemble des éléments semi-simples de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

b) Montrer que le groupe dérivé de \mathbb{H}_8 est égal à $\{\pm \text{Id}\}$.

INDICATION.— Les éléments i et j ne commutent pas : leur commutateur devrait être $-\text{Id}$, ce que l'on vérifie sans peine. On procède pareillement avec tous les commutateurs.

c) Montrer que \mathbb{H}_8 est le groupe dérivé de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— Si x n'est pas dans \mathbb{H}_8 , le commutateur $xix^{-1}i^{-1}$ est différent de 1, car sinon x commuterait avec i serait aussi semi-simple et donc

dans \mathbb{H}_8 . Ce même commutateur est aussi différent de $-\text{Id}$, car sinon $ix^{-1}i^{-1} = -x^{-1}$, autrement dit, x^{-1} et $-x^{-1}$ seraient semblables et auraient même trace, mais aussi des traces opposées, ce qui oblige la trace à être nulle et l'élément x^{-1} à être dans \mathbb{H}_8 . Enfin, ce commutateur est clairement différent de i et de $-i$. Il est donc égal à $\pm j$ ou bien à $\pm k$. On procède de même avec le commutateur $xjx^{-1}j^{-1}$ qui est égal à $\pm i$ ou bien $\pm k$. On obtient alors deux commutateurs différents (car sinon x commuterait avec k) qui sont des générateurs de \mathbb{H}_8 .

0-A.6.9. a) Montrer que $SL(2, \mathbb{F}_3)$ ne possède pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Il n'y a dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$ qu'un seul élément d'ordre 2.

b) Montrer que le groupe quotient $SL(2, \mathbb{F}_3)/\{\pm \text{Id}\}$ est isomorphe à \mathfrak{A}_4 . (Cf. exercice 0.11.13.)

c) Montrer que $\mathbb{H}_8/\{\pm \text{Id}\}$ est isomorphe précisément au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Constater directement que dans le quotient, il y trois éléments d'ordre 2, à savoir les classes des éléments i, j et k . On peut aussi utiliser le fait que, si le quotient d'un groupe par son centre est cyclique, alors ce groupe est abélien.

0-A.6.10. a) Montrer qu'il n'y a pas dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$ de sous-groupe d'ordre 12.

INDICATION.— Un tel sous-groupe serait distingué et à quotient commutatif; il contiendrait donc \mathbb{H}_8 (cf. exercice 0-A.6.8), ce qui n'est pas possible, car 8 ne divise pas 12.

b) En déduire qu'aucun des trois sous-groupes d'ordre 4 n'est distingué.

INDICATION.— D'après 0.11.69, l'ensemble $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cdot S_3$, où S_3 est un 3-Sylow, serait dans le cas contraire un sous-groupe d'ordre 12.

c) Montrer que les trois sous-groupes d'ordre 4 de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ sont en fait conjugués.

INDICATION.— Faire opérer $SL(2, \mathbb{F}_3)$ sur l'ensemble de ces sous-groupes en utilisant b).

0-A.6.11. a) Montrer que les 3-Sylow de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ sont au nombre de quatre.

INDICATION.— Leur nombre est 1 ou 4, et l'on en connaît déjà deux, à savoir les unipotentes supérieures et les unipotentes inférieures. C'est aussi le nombre de droites du plan \mathbb{F}_3^2 .

b) Montrer qu'un élément M de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ est d'ordre 3 si et seulement si $\text{tr } M = 2$ et $M \neq \text{Id}$. Vérifier qu'il y a huit éléments d'ordre 3.

INDICATION.— On peut remarquer que la trace des éléments du 3-Sylow standard est égale à 2, ou encore qu'en caractéristique 3, on a $X^3 - 1 = (X - 1)^3$.

c) Montrer que dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$, il y a deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 3.

INDICATION.— L'une est donnée par la classe de a et l'autre par la classe de a^2 . En effet, s'il existait x tel que $xax^{-1} = a^2$, on constaterait alors que l'élément a , égal à $a^{-1}xax^{-1}$, est un commutateur, donc semi-simple.

d) Montrer que $\text{tr } M = 1$ si et seulement si M est d'ordre 6 ou $M = -\text{Id}$, et que le nombre des éléments d'ordre 6 est bien égal à 8.

INDICATION.— Remarquer que si $\text{tr } M = 1$, alors $-M$ vérifie la condition donnée dans b).

e) Montrer également qu'il y a deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 6 dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— On procède comme pour c) : on considère deux éléments z et z^5 d'ordre 6 et l'on constate qu'ils ne peuvent être conjugués, car sinon z^4 qui est d'ordre 3 serait un commutateur et figurerait donc dans \mathbb{H}_8 .

0-A.6.12. Représenter graphiquement le treillis des sous-groupes de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

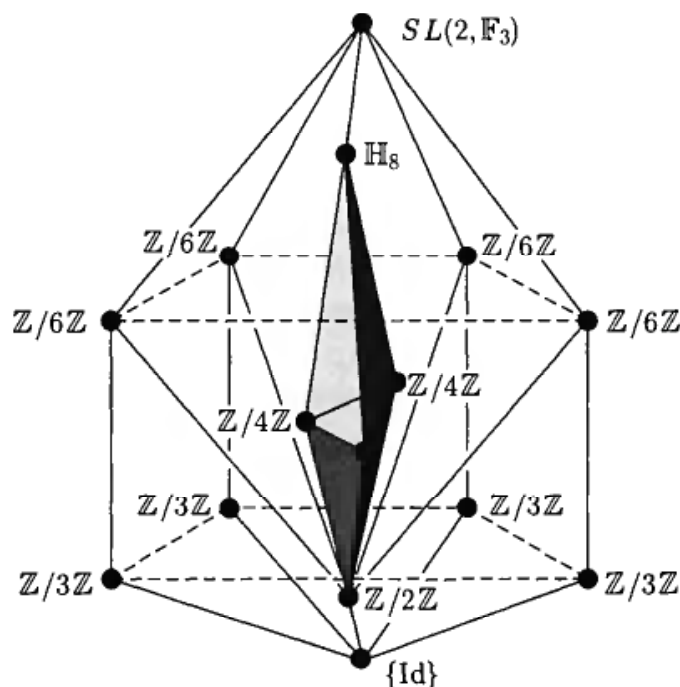


FIGURE 1

Dans le graphe ci-dessus, on a convenu de joindre par des pointillés deux sous-groupes (d'un même niveau horizontal) qui sont conjugués (par un

automorphisme intérieur du groupe). Un trait continu indique une inclusion (dont le sens ne fait pas de doute). Quant aux faces ombrées, elles servent uniquement à mieux faire ressortir les éléments du dessin.

0-A.6.13. Déterminer les sous-groupes distingués de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— On trouve : $\{\text{Id}\}$, $\{\pm \text{Id}\}$ qui est le centre, \mathbb{H}_8 qui est le groupe dérivé, et $SL(2, \mathbb{F}_3)$ lui-même. [Cf. b) de l'exercice 0-A.6.10.] On peut aussi, à partir du graphe du treillis, établir qu'il n'y a pas de sous-groupes distingués d'ordre 4, car alors le *groupe quotient* qui est de cardinal 6 n'aurait qu'un seul sous-groupe propre, ce que contredirait l'existence des sous-groupes de Sylow d'ordre 2 et 3. On retrouve ainsi le fait que les sous-groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ sont conjugués⁷.

0-A.6.14. a) Montrer que les matrices

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

engendrent $SL(2, \mathbb{F}_3)$. (Cf. exercice 0.11.8.)

INDICATION.— Dédurre cela du graphe du treillis des sous-groupes de $SL(2, \mathbb{F}_3)$, ou bien, si l'on veut faire appel au minimum, procéder comme suit : il est clair que ab et ba donnent deux des six éléments d'ordre 6 de \mathbb{H}_8 ; on obtient facilement les autres, car $ij = k, i^{-1} = -i, \dots$ mais aussi les deux classes modulo \mathbb{H}_8 (voir la liste ♠), vu que a et b appartiennent à deux classes différentes (on peut utiliser aussi le théorème de Lagrange pour conclure).

b) Déterminer, à partir de ces matrices et de l'isomorphisme (déjà rencontré dans 0.11.13) entre les groupes $PSL(2, \mathbb{F}_3)$ et \mathfrak{A}_4 , les deux générateurs correspondants dans \mathfrak{A}_4 .

INDICATION.— Si l'on numérote les quatre droites du plan \mathbb{F}_3^2 en posant $D_1 = \mathbb{K} \cdot (1, 0)$, $D_2 = \mathbb{K} \cdot (1, 1)$ et $D_3 = \mathbb{K} \cdot (0, 1)$, on obtient les deux permutations

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Montrer que les matrices

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

⁷ L'identification d'un groupe cyclique C_n d'ordre n avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est en fait qu'une façon abusive d'exprimer qu'ils sont algébriquement isomorphes; un tel isomorphisme n'est en effet pas unique, puisque le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède $\varphi(n)$ éléments. Cependant, on commettra souvent cet abus.

engendrent $GL(2, \mathbb{F}_3)$

INDICATION.— Remarquer que $x^2 = ba$ et utiliser a).

d) En déduire que les permutations

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

engendrent \mathfrak{S}_4 . Déterminer les isométries qui leur correspondent quand on a identifié le groupe \mathfrak{S}_4 au groupe des déplacements du cube.

INDICATION.— On trouve une rotation d'angle $2\pi/3$ suivant une grande diagonale et une rotation d'angle $\pi/2$ suivant un axe perpendiculaire aux deux faces correspondantes. (Retrouver le résultat géométriquement.)

0-A.6.15. a) Montrer que le groupe \mathbb{H}_8 n'est pas produit semi-direct (non trivial) de deux de ses sous-groupes.

INDICATION.— Tous ses sous-groupes contiennent le sous-groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Montrer que le groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$ est produit semi-direct interne de \mathbb{H}_8 et de l'un quelconque de ses 3-Sylow, et qu'aucun de ces produits semi-directs n'est direct.

INDICATION.— Utiliser **0.11.69** et l'exercice **0-A.6.7**.

0-A.6.16. a) Dessiner à part le graphe du treillis des sous-groupes de \mathbb{H}_8 (on observera que ses trois sous-groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ cessent d'y être conjugués alors qu'ils l'étaient dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$).

b) Dédire du graphe du treillis des sous-groupes de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ celui des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4 \simeq PSL(2, \mathbb{F}_3)$.

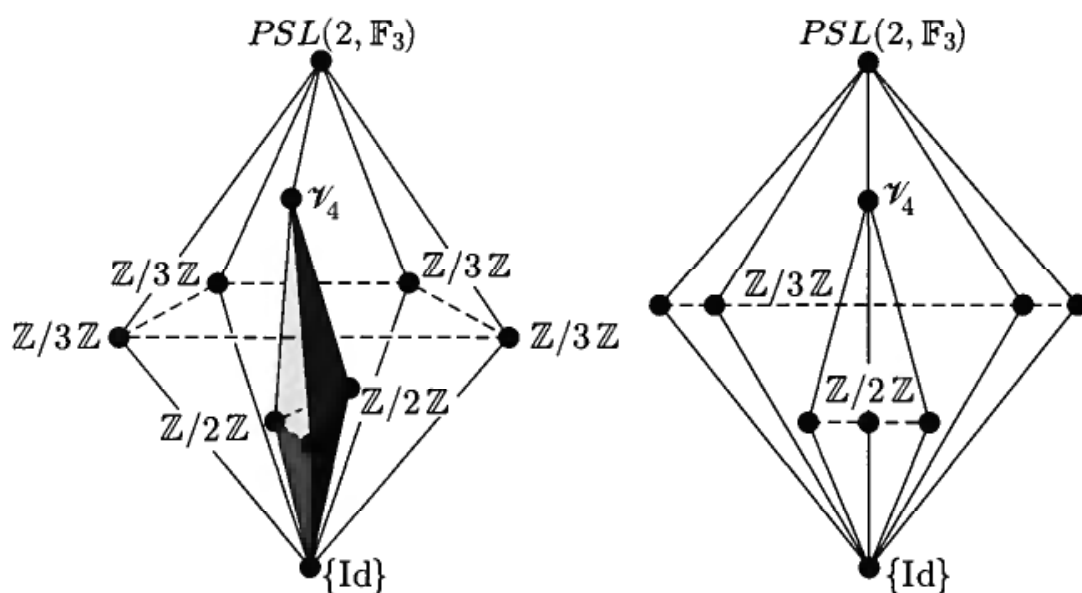


FIGURE 2

0-A.6.17. a) Vérifier que le groupe $\mathcal{V}_4 \simeq \mathbb{H}_8/\{\pm \text{Id}\}$ est distingué dans $PSL(2, \mathbb{F}_3)$, et que le groupe quotient est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

b) Soit $M \in SL(2, \mathbb{F}_3)$ tel que $\forall X \in SL(2, \mathbb{F}_3), \exists \varepsilon(X) = \pm 1 : MX = \varepsilon(X)XM$. Montrer que $M = \pm \text{Id}$. En déduire que le centre de $PSL(2, \mathbb{F}_3)$ est trivial. Retrouver ceci directement dans \mathfrak{A}_4 , en considérant les cycles d'ordre 3 (qui ont chacun un seul point fixe).

INDICATION.— Remarquer que $\varepsilon(X) = 1$ sur toutes les matrices de trace non nulle, et donc que M commute en particulier avec les matrices a et b qui engendrent $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

c) Prouver que le centralisateur de \mathcal{V}_4 dans $PSL(2, \mathbb{F}_3)$ est \mathcal{V}_4 lui-même.

INDICATION.— Utiliser b) et le graphe du treillis des sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{F}_3)$. Noter au passage que l'exercice **0-A.6.16** permet aussi de voir que \mathcal{V}_4 est le seul sous-groupe distingué non trivial de \mathfrak{A}_4 .

0-A.6.18. Éléments d'ordre 2 dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$. Montrer qu'en dehors de la matrice $-\text{Id}$ qui est dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$, les éléments d'ordre 2 dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sont tous conjugués de la matrice

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

ces derniers éléments sont au nombre de douze et caractérisés par le fait que leur trace est nulle et que leur déterminant est -1 . (Écrire Cayley-Hamilton pour les matrices 2×2 .)

0-A.6.19. Les 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. a) Soit

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \{\text{Id}, d\}.$$

Montrer que $S = \mathbb{H}_8 \cdot D$ est un 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

b) Montrer qu'il y a trois 2-Sylow dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— Si S était le seul Sylow, il serait distingué d'indice trois, le groupe quotient serait commutatif, et par suite $SL(2, \mathbb{F}_3)$, groupe dérivé de $GL(2, \mathbb{F}_3)$, serait dans S ...

On peut aussi argumenter comme suit : le groupe \mathbb{H}_8 , étant un 2-groupe, serait dans S qui devrait contenir tous les éléments d'ordre 2; ceux qui sont de déterminant -1 sont au nombre de 12.

0-A.6.20. Les sous-groupes d'ordre 12 dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$. a) Montrer qu'il y a quatre 3-Sylow dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et que deux 3-Sylow distincts se coupent suivant $\{\text{Id}\}$.

b) Soit K un sous-groupe d'ordre 12 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. Montrer que dans K il y a un seul 3-Sylow.

INDICATION.— Si les quatre 3-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ étaient dans K , les éléments d'ordre 3 de $SL(2, \mathbb{F}_3)$ y seraient aussi, en particulier les matrices a et b qui engendrent $SL(2, \mathbb{F}_3)$, d'où une contradiction.

c) En déduire qu'un sous-groupe d'ordre 12 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ est le normalisateur dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ du 3-Sylow qu'il contient, et que le nombre des sous-groupes d'ordre 12 est égal à 4.

d) Montrer que les sous-groupes d'ordre 12 sont exactement les stabilisateurs dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ des quatre droites du plan \mathbb{F}_3^2 .

e) Montrer que les éléments d'un sous-groupe d'ordre 12 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sont simultanément trigonalisables sur \mathbb{F}_3 .

f) Montrer que l'intersection de deux sous-groupes d'ordre 12 différents est isomorphe à \mathcal{V}_4 et que ce dernier donne la structure d'un 2-Sylow dans K . (On pourra considérer la base formée par deux des quatre droites de \mathbb{F}_3^2 .)

0-A.6.21. Les éléments d'ordre 4 dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$. a) Montrer que les éléments d'ordre 4 dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sont les six éléments de \mathbb{H}_8 autres que $\pm \text{Id}$.

INDICATION.— Remarquer qu'un élément M d'ordre 4 est semi-simple et de déterminant 1. Pour ce dernier point, on pourra démontrer que M est semblable (sur \mathbb{F}_9) à la matrice $\text{Diag}(\lambda, \mu)$, où λ et μ sont les deux racines de $X^2 + 1$. (Se rappeler par exemple que la trace de M est dans \mathbb{F}_3 .)

b) Montrer que les six éléments d'ordre 4 sont conjugués. (On a $jij^{-1} = -i \dots$ et les $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont conjugués.)

0-A.6.22. Le sous-groupe $\mathbb{H}_8 \subset GL(2, \mathbb{F}_3)$ est caractéristique

a) Montrer que $GL(2, \mathbb{F}_3)$ possède un seul sous-groupe isomorphe à \mathbb{H}_8 .

INDICATION.— Remarquer que dans un \mathbb{H}_8 , il y a six éléments d'ordre 4, et utiliser a) de l'exercice précédent.

b) En déduire que \mathbb{H}_8 est *caractéristique*⁸.

c) Retrouver le résultat en remarquant que \mathbb{H}_8 est l'intersection des trois 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— Le sous-groupe \mathbb{H}_8 est contenu dans un 2-Sylow; comme il est distingué et que les 2-Sylow sont conjugués, il est dans chacun d'eux. On invoque pour finir le théorème de Lagrange.

d) Retrouver enfin le résultat en démontrant que $SL(2, \mathbb{F}_3)$ est caractéristique et que \mathbb{H}_8 est l'unique 2-Sylow de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

⁸ C'est-à-dire stable par tous les automorphismes du groupe ambiant. C'est une notion plus forte que celle de sous-groupe distingué.

0-A.6.23. En faisant opérer $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sur ses trois 2-Sylow, retrouver (cf. proposition 0-A.4.2.1) la suite exacte

$$\{\text{Id}\} \rightarrow \mathbb{H}_8 \rightarrow GL(2, \mathbb{F}_3) \rightarrow \mathfrak{S}_3 \rightarrow \{e\}.$$

INDICATION.— Chaque 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ est égal à son normalisateur (voir l'exercice 0.11.1 et relever le fait, rencontré dans l'exercice précédent, que deux 2-Sylow distincts se coupent suivant \mathbb{H}_8).

0-A.6.24. L'ensemble des huit sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ isomorphes au groupe \mathfrak{S}_3 . a) Vérifier que dans \mathfrak{S}_3 , il y a deux éléments d'ordre 3 et trois éléments d'ordre 2.

b) Soit H un groupe isomorphe à \mathfrak{S}_3 et soit $x \in H$ d'ordre 2 et $y \in H$ d'ordre 3. Montrer que $xyx^{-1} = y^2$. (Si l'on avait $xyx^{-1} = y$, alors H serait commutatif.)

c) Montrer que si H est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ isomorphe à \mathfrak{S}_3 , son intersection avec $SL(2, \mathbb{F}_3)$ est un des quatre 3-Sylow.

INDICATION.— Cf. 0.11.69.

d) Montrer que le sous-groupe H_0 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ engendré par

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

est isomorphe à \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— Ce groupe non commutatif a un cardinal multiple de 3, est un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires, et ne lui est pas égal, car il ne contient pas $-\text{Id}$, vu que tous ses éléments ont 1 en haut à gauche.

e) Soit x un des douze éléments de l'ensemble \mathcal{D} des éléments de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ d'ordre 2 et de déterminant -1 . Chercher les éléments y d'ordre 3 tels que $xyx = x$; en déduire qu'il y a deux sous-groupes contenant x et isomorphes à \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— Comme les douze éléments de \mathcal{D} sont conjugués, on effectue le calcul pour d , en se souvenant qu'un élément d'ordre 3 est de trace égale à 2 (cf. exercice 0-A.6.11). On trouve alors les matrices a, a^2, b et b^2 .

f) Soit \mathcal{S} l'ensemble des sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ isomorphes à \mathfrak{S}_3 . Montrer que $\text{Card}(\mathcal{S}) = 8$.

INDICATION.— Considérer dans $\mathcal{D} \times \mathcal{S}$ la partie formée par les couples (x, H) tels que $x \in H$, et calculer son cardinal par balayage horizontal et vertical. On trouve $3 \times \text{Card}(\mathcal{S}) = 2 \times \text{Card}(\mathcal{D})$. (Cf. 0-A.6.26.)

0-A.6.25. Action de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sur ses huit sous-groupes \mathfrak{S}_3

a) Montrer que le groupe $GL(2, \mathbb{F}_3)$ possède deux orbites sur l'ensemble \mathcal{S} de ses sous-groupes isomorphes à \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— Le groupe $GL(2, \mathbb{F}_3)$ agit transitivement sur ses quatre 3-Sylow et chaque groupe \mathfrak{S}_3 contient un unique 3-Sylow. Ceci prouve que chaque orbite dans \mathcal{P} possède au moins quatre éléments. Si par ailleurs l'action était transitive, le normalisateur d'un \mathfrak{S}_3 quelconque serait d'ordre 6, et donc égal à lui-même; mais le groupe $T(2, \mathbb{F}_3)$, qui est d'ordre 12, contient le sous-groupe H_0 de l'exercice précédent, qui est d'ordre 6, comme sous-groupe distingué. Contradiction.

b) On fait opérer le groupe $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sur $\mathbb{F}_3^2 - \{0\}$ de façon naturelle. Montrer que les stabilisateurs des différents points sont des sous-groupes isomorphes à \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— L'action est transitive et les stabilisateurs sont des sous-groupes conjugués d'ordre 6. Le stabilisateur du point $(1, 0)$ n'est autre que le sous-groupe des

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \text{ pour } \alpha \text{ et } \beta \neq 0 \text{ dans } \mathbb{F}_3.$$

Les trois matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sont d'ordre 2 (pour éviter tout calcul (sic), les diagonaliser). Le stabilisateur est donc isomorphe à \mathfrak{S}_3 .

c) De même, on fait opérer naturellement⁹ $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sur le dual de \mathbb{F}_3^2 . Montrer que le stabilisateur d'une forme linéaire non nulle est encore dans \mathcal{P} .

d) Montrer que les stabilisateurs issus de chacune des actions définies en b) et c) sont respectivement l'une ou l'autre des deux orbites de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sur \mathcal{P} .

Chaque action donne naissance à quatre stabilisateurs (considérer les opérateurs qui stabilisent deux points du plan). Par ailleurs, si H stabilise à la fois $p \in \mathbb{F}_3^2$ et $\varphi \in \mathbb{F}_3^{2*}$, alors $\text{Card}(H) = 3$ ou 2 suivant que $\varphi(p) = 0$ ou pas. (Se placer dans une base du plan de la forme $\{p, p'\}$ et discuter sur les coordonnées de φ dans la base duale.) Maintenant, s'il existait $g \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ tel que $H_\varphi = gH_qg^{-1}$ où $q \in \mathbb{F}_3^2$, le groupe H_φ stabiliserait à la fois φ et $p = g \cdot q = g(q)$, d'où une contradiction.

e) Vérifier en conséquence que deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 (distincts) de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sont conjugués si et seulement si leur intersection est réduite à $\{\text{Id}\}$ et que dans le cas contraire, cette intersection est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ou bien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ suivant que « le » point de \mathbb{F}_3^2 , qui indexe l'un, est ou

⁹ Quand un groupe G opère linéairement sur E , il opère naturellement sur E^* par $(g, \varphi) \mapsto {}^t g^{-1}(\varphi) = \varphi \circ g^{-1}$. Voir la notion de représentation contragrédiente d'une représentation donnée.

n'est pas dans le noyau de « la » forme linéaire qui indexe l'autre. Voir aussi l'exercice suivant.

0-A.6.26. a) Montrer que le normalisateur d'un sous-groupe isomorphe à \mathfrak{S}_3 est d'ordre 12.

INDICATION.— Se rappeler [cf. a) de l'exercice précédent] qu'il y a quatre sous-groupes conjugués d'un même sous-groupe \mathfrak{S}_3 .

b) Montrer que dans chaque sous-groupe d'ordre 12, il y a exactement deux sous-groupes isomorphes à \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— Les sous-groupes d'ordre 12 sont conjugués et au nombre de quatre, et il y a 8 sous-groupes \mathfrak{S}_3 . Il suffit de se rappeler alors, d'une part que chacun de ces derniers est contenu dans un sous-groupe d'ordre 12 (à savoir son normalisateur), et d'autre part que deux sous-groupes d'ordre 12 se coupent suivant un sous-groupe à quatre éléments. (Cf. exercice 0-A.6.20.)

c) Montrer que les deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 d'un même sous-groupe d'ordre 12 ne sont pas conjugués (dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$).

INDICATION.— Dans le cas contraire, tout les \mathfrak{S}_3 seraient conjugués puisque les sous-groupes d'ordre 12 le sont. D'ailleurs, les deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 d'un même sous-groupe T d'ordre 12 se coupent suivant l'unique 3-Sylow dans T . [Cf. e) de l'exercice précédent.]

d) Retrouver le fait que deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 ayant des normalisateurs différents se coupent suivant l'identité s'ils sont conjugués et suivant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'ils ne le sont pas. Exprimé autrement, cela revient à dire que si H est différent des quatre sous-groupes d'une même orbite, il rencontre l'un des quatre suivant $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et les trois autres suivant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

e) Exhiber dans $T(2, \mathbb{F}_3)$ les deux sous-groupes isomorphes à \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— On trouve le sous-groupe engendré par a et $\text{Diag}(1, -1)$, et celui engendré par a et par $\text{Diag}(-1, 1)$.

f) (Cf. 0-A.6.24.) Les deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ qui contiennent un même élément (de \mathcal{D}) d'ordre 2 et de déterminant -1 ne sont pas conjugués [cf. e) de l'exercice précédent] et leur intersection est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Expliquer cela à la lumière du critère de e) de l'exercice précédent.

INDICATION.— Un élément d'ordre 2 admet 1 et -1 comme valeurs propres, il laisse donc fixe un vecteur p de \mathbb{F}_3^2 et une forme φ de son dual, et l'on vérifie que $\varphi(p) \neq 0$.

g) Représenter par un schéma (en forme de tableau) la dépendance des \mathfrak{S}_3 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ en fonction des douze éléments de \mathcal{D} avec une discussion sur les intersections respectives de deux \mathfrak{S}_3 (porter en abscisse les douze éléments d'ordre 2 et de déterminant -1 , et en ordonnée les huit

sous-groupes \mathfrak{S}_3 répartis en deux classes de conjugaison sous l'action de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. (Cf. exercice 0-A.6.24.)

0-A.6.27. Structure du groupe $T(2, \mathbb{F}_3)$. On verra dans cet exercice que le groupe $T(2, \mathbb{F}_3)$ des matrices triangulaires (supérieures) d'ordre 2 à coefficients dans \mathbb{F}_3 est isomorphe au produit direct $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui est lui-même isomorphe au groupe diédral \mathcal{D}_6 des isométries du plan qui conservent l'hexagone régulier. Les différents sous-groupes qui apparaîtront ci-dessous dans la représentation graphique du treillis associé seront examinés, vu le contexte, d'un point de vue algébrique dans le groupe $T(2, \mathbb{F}_3)$. Ils sont en réalité mieux appréhendés dans la géométrie d'un quelconque motif du plan affine euclidien ayant le groupe \mathcal{D}_6 comme groupe de symétrie¹⁰.

a) Montrer que les applications qui à

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

associent respectivement a, c et ac sont des homomorphismes de $T(2, \mathbb{F}_3)$ dans le groupe multiplicatif \mathbb{F}_3^* et que leurs noyaux sont les trois sous-groupes d'ordre 6 de $T(2, \mathbb{F}_3)$. Un seul est cyclique et les deux autres sont isomorphes à \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— On pourra remarquer que $-\text{Id}$ est le seul élément d'ordre 2 qui commute avec l'unique 3-Sylow, et se reporter aussi à l'exercice précédent.

b) Vérifier que $T(2, \mathbb{F}_3)$ possède trois 2-Sylow isomorphes à \mathcal{V}_4 et sept éléments d'ordre 2. [Cf. 0-A.6.20, f).]

c) Montrer que $T(2, \mathbb{F}_3)$ possède sept sous-groupes distingués : les deux triviaux, les trois sous-groupes d'ordre 6, le 3-Sylow et le centre $\{\pm \text{Id}\}$.

d) Montrer que $T(2, \mathbb{F}_3)$ est produit direct de chacun des deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 et de son centre (l'élément $-\text{Id}$ n'est dans aucun S_3). En déduire que le groupe cyclique $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est le groupe dérivé de $T(2, \mathbb{F}_3)$.

e) Montrer que deux sous-groupes \mathcal{V}_4 se coupent suivant le centre.

INDICATION.— Le centre est inclus dans un des 2-Sylow ; comme il est distingué, il est dans les trois 2-Sylow.

f) Montrer que le 2-Sylow de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est distingué dans $T(2, \mathbb{F}_3)$.

g) Montrer qu'un 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et un sous-groupe d'ordre 12 se coupent suivant un \mathcal{V}_4 .

¹⁰ Chacun de ces sous-groupes a une signification géométrique : ainsi, partant de l'hexagone régulier, les trois sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, par exemple, correspondent chacun à l'un ou l'autre des trois rectangles « inscrits » dans l'hexagone régulier...

h) Dessiner le graphe du treillis des sous-groupes de $T(2, \mathbb{F}_3)$. Noter en particulier que les 7 sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se répartissent en trois classes de conjugaison sous l'action des automorphismes intérieurs. (Se rappeler que les deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 sont distingués et que les quatre 2-Sylow sont conjugués.)

Voici une représentation (plane) du treillis des sous-groupes de $T(2, \mathbb{F}_3)$. Une autre est proposée plus loin. On reviendra par ailleurs sur l'examen des sous-groupes de $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans l'exercice 0-A.6.43.

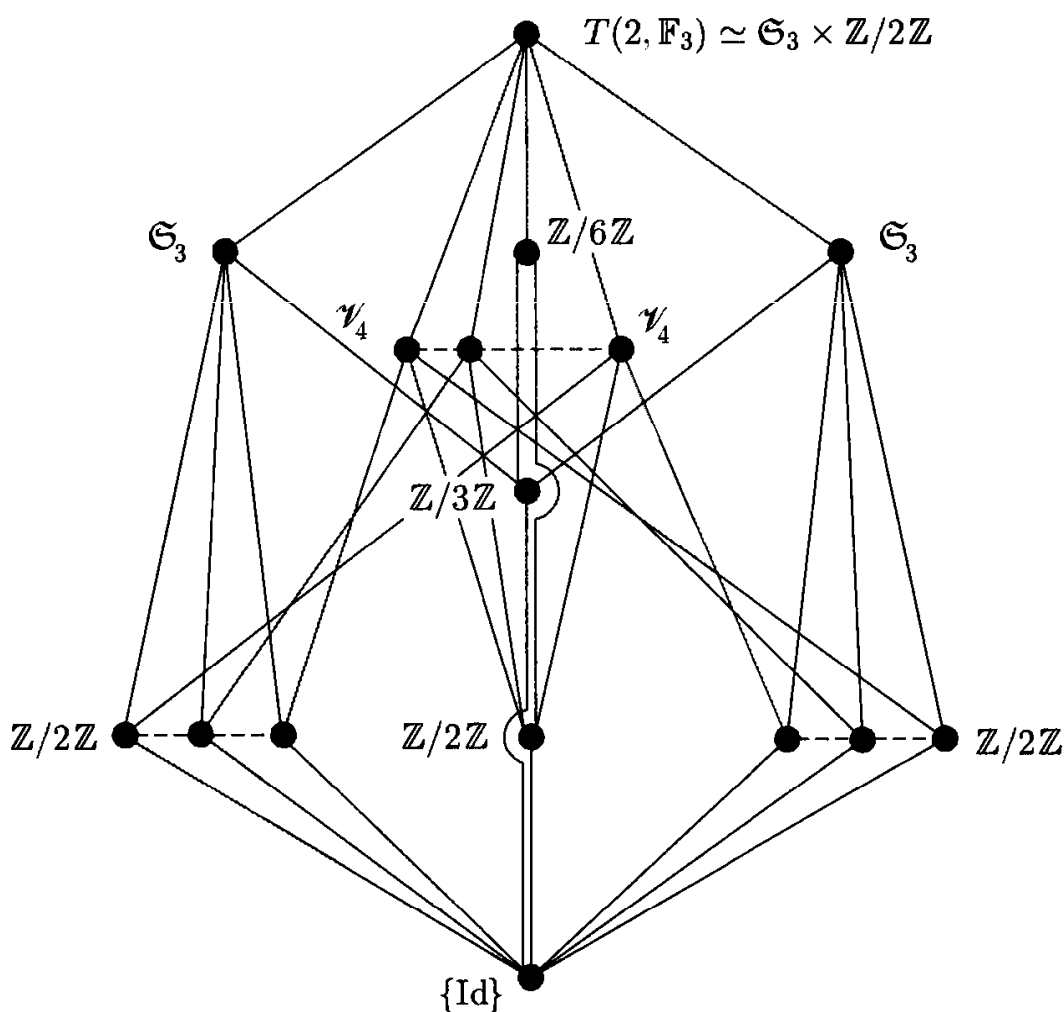


FIGURE 3

0-A.6.28. Le groupe des automorphismes de $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

a) Montrer que le groupe des automorphismes intérieurs de $T(2, \mathbb{F}_3)$ est isomorphe à \mathfrak{S}_3 .

b) Montrer que l'application

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mapsto \det(T)T = \begin{bmatrix} c & abc \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

est un automorphisme extérieur de $T(2, \mathbb{F}_3)$.

c) En déduire que le groupe des automorphismes de $T(2, \mathbb{F}_3)$ s'identifie au produit direct $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire à $T(2, \mathbb{F}_3)$ lui-même.

d) Montrer que les deux sous-groupes distingués \mathfrak{S}_3 ne sont pas caractéristiques.

e) Que peut-on dire d'un automorphisme qui laisse fixes tous les sous-groupes de $T(2, \mathbb{F}_3)$?

INDICATION.— Un tel automorphisme laisserait fixes tous les éléments d'ordre 2. Ces éléments engendrent le groupe, comme l'indique clairement le graphe du treillis précédent. L'automorphisme est donc trivial.

Remarque. Le groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes d'un groupe G induit une action sur le treillis des sous-groupes de G . Le graphe du treillis peut

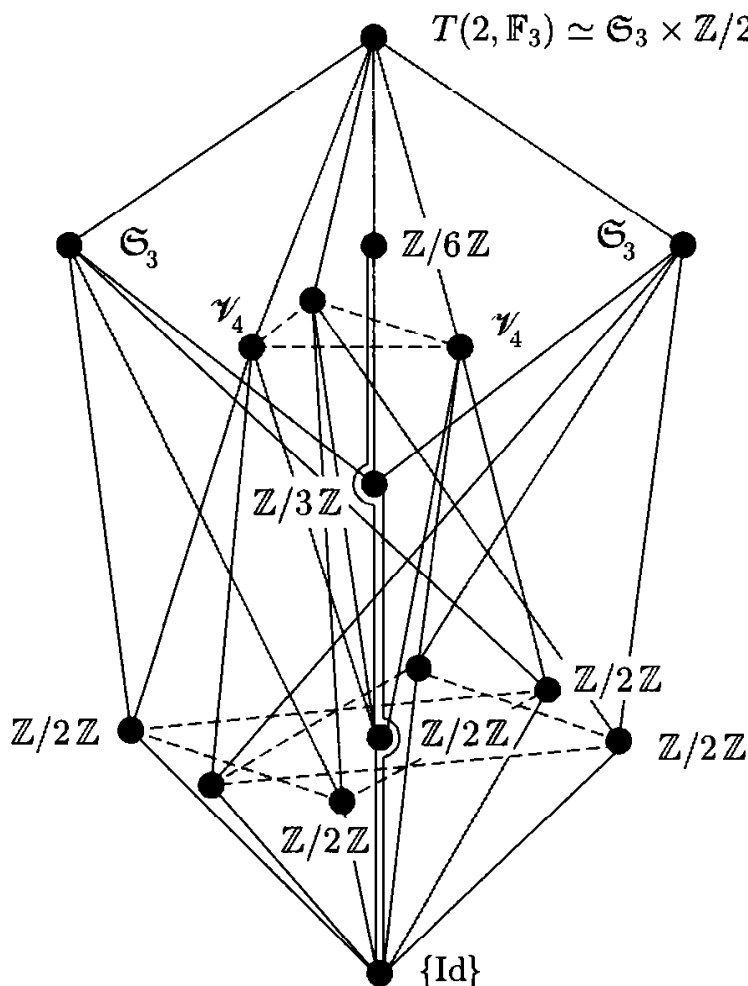


FIGURE 4

donc parfois suggérer la présence d'automorphismes, comme dans le cas du groupe de Klein \mathcal{V}_4 (cf. exercice 0-B.11.18), pour lequel le groupe des automorphismes s'identifie au groupe des isométries du triangle équilatéral.

La même constatation suggère les limites d'une représentation, dans le plan ou l'espace, du treillis des sous-groupes de G . Toute représentation dans l'espace usuel du treillis des sous-groupes de $T(2, \mathbb{F}_3)$ présentera quelque défaut. C'est le cas en particulier de la représentation ci-dessus du treillis précédent. L'automorphisme extérieur qui permute les deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 laisse fixe chacun des sous-groupes \mathcal{V}_4 (noter qu'un tel sous-groupe est toujours constitué de $\pm \text{Id}$ et $\pm x$, pour x d'ordre 2 de déterminant -1).

0-A.6.29. Les sous-groupes distingués de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. a) Montrer que $SL(2, \mathbb{F}_3)$ est le seul sous-groupe (distingué) d'indice 2.

INDICATION.— C'est en effet le plus petit sous-groupe distingué de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ dont le quotient est commutatif (cf. proposition 0-A.4.2.2).

b) Montrer qu'il n'y a aucun sous-groupe distingué de cardinal 3, 12 ou 16.

INDICATION.— Les sous-groupes de cardinal correspondant sont les 3-Sylow et leurs normalisateurs, et les 2-Sylow.

c) Montrer que le centre est le seul sous-groupe distingué d'ordre 2.

INDICATION.— Les éléments de \mathcal{D} sont tous conjugués (cf. exercice 0-A.6.24).

d) Montrer que le seul sous-groupe distingué d'ordre 8 est \mathbb{H}_8 .

INDICATION.— Si $H \neq \mathbb{H}_8$, alors H n'est pas dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$ (cf. exercice 0-A.6.13) et l'écriture $SL(2, \mathbb{F}_3) \cdot H / SL(2, \mathbb{F}_3) \simeq H / SL(2, \mathbb{F}_3) \cap H$ (cf. 0.11.69) montre alors que H rencontre $SL(2, \mathbb{F}_3)$ suivant un sous-groupe (distingué) d'ordre 4, d'où une contradiction.

e) Montrer qu'il n'y a pas de sous-groupe distingué d'ordre 6.

INDICATION.— On peut raisonner comme on vient de le faire dans la question précédente, ou bien considérer dans un tel groupe un 3-Sylow.

f) Montrer qu'il n'y a pas dans le groupe $GL(2, \mathbb{F}_3)$ de sous-groupe distingué d'ordre 4.

INDICATION.— Un tel sous-groupe ne peut contenir aucun élément de \mathcal{D} et ne possède donc qu'un seul élément d'ordre 2, à savoir $-\text{Id}$. C'est donc un $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Or les éléments d'ordre 4 sont dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$ (cf. exercice 0-A.6.21), et dans ce dernier groupe il n'y a pas de sous-groupe distingué d'ordre 4.

g) En déduire que les seuls sous-groupes distingués de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sont $\{\text{Id}\}$, $\{\pm \text{Id}\}$ qui est le centre, \mathbb{H}_8 , $SL(2, \mathbb{F}_3)$ qui est le groupe dérivé, et enfin $GL(2, \mathbb{F}_3)$ lui-même.

0-A.6.30.. Soit $\varphi : GL(2, \mathbb{F}_3) \rightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$ un homomorphisme de groupes. Montrer que si φ n'est pas trivial, alors c'est le déterminant.

INDICATION.— Considérer $\text{Ker } \varphi$ et utiliser l'exercice précédent.

0-A.6.31. Les Sous-Groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. a) Montrer qu'un élément d'ordre 6 dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ est nécessairement de déterminant égal à 1.

INDICATION.— Écrire sur \mathbb{F}_3 que $(X^6 - 1) = (X^2 - 1)^3$. Si les valeurs propres étaient distinctes, la matrice serait semblable à d et serait alors d'ordre 2.

b) Montrer que dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$, il y a quatre sous-groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, qui sont conjugués.

c) Montrer que dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$, il y a 12 éléments d'ordre 8, et qu'ils sont tous de déterminant -1 .

INDICATION.— Ces éléments partitionnent avec \mathcal{D} le complémentaire de $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

d) Montrer que M est d'ordre 8 dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ si et seulement si $\det M = -1$ et $\text{tr } M = \pm 1$. En déduire qu'il y a deux classes de conjugaison parmi les éléments d'ordre 8, ayant chacune six éléments, et données respectivement par les classes de similitude de

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

INDICATION.— Se souvenir que les éléments de \mathcal{D} sont de trace nulle et que si M n'est pas une homothétie, alors

$$M \sim \begin{bmatrix} 0 & -\det M \\ 1 & \text{tr } M \end{bmatrix}.$$

Pour montrer enfin que chaque classe contient six matrices, il suffit de remarquer que le centralisateur de h_i contient au moins le groupe commutatif $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ engendré par h_i (et qu'en fait il lui est égal).

e) Montrer que dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$, il y a trois sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, conjugués sous l'action de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et contenus chacun comme sous-groupe distingué dans un des trois 2-Sylow. Dans chaque $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, il y a quatre éléments d'ordre 8 dont deux sont semblables à h_1 et les deux autres à h_2 .

f) Montrer qu'un 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ s'écrit aussi comme produit semi-direct interne de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et d'un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bien choisi.

INDICATION.— Il suffit de trouver en dehors de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ un élément d'ordre 2. Mais dans un 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$, il y a cinq éléments d'ordre 2 (voir plus bas l'exercice 0-A.6.36).

g) Y a-t-il un lien entre l'existence d'éléments d'ordre 8 dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et le fait que le groupe multiplicatif du corps \mathbb{F}_9 à 9 éléments est cyclique ?

0-A.6.32. Soit G un groupe et Φ_1 et Φ_2 deux automorphismes de G d'ordre 2. On forme $S_i = G \rtimes_{\Phi_i} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $i = 1, 2$. Montrer que si Φ_1 et

Φ_2 sont conjugués dans $\text{Aut}(G)$, ou, autrement dit, s'il existe un automorphisme Ψ de G tel que $\Phi_2 = \Psi \circ \Phi_1 \circ \Psi^{-1}$, alors les deux groupes S_1 et S_2 sont isomorphes.

INDICATION.— Les groupes S_i apparaissent comme conjugués dans le groupe $G \times_A \text{Aut}(G)$ (où A est l'action évidente). Attention : on a

$$(e, \Psi) \cdot (g, \Phi) \cdot (e, \Psi^{-1}) = (\Psi(g), \Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1}),$$

ce qui permet d'écrire explicitement un isomorphisme entre S_1 et S_2 défini par : $(g, \Phi_1) \mapsto (\Psi(g), \Phi_2)$ et $(g, e) \mapsto (\Psi(g), e)$.

0-A.6.33. Déterminer les classes de conjugaison des éléments d'ordre 2 dans le groupe \mathfrak{S}_4 , réalisé comme groupe des permutations de quatre éléments ou bien comme $PGL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— On trouve deux classes de conjugaison : celle de la transposition (12) qui contient six éléments et celle de (12)(34) qui contient trois éléments. Elles correspondent respectivement aux classes des éléments d et i .

0-A.6.34. Écrire un automorphisme extérieur d'ordre 2 de \mathbb{H}_8 .

INDICATION.— Par exemple la conjugaison τ par d qui donne $\tau(i) = -i$ et $\tau(j) = k$.

0-A.6.35. Sachant que $\text{Aut}(SL(2, \mathbb{F}_3))$ est isomorphe à \mathfrak{S}_4 , comparer les deux groupes $G_i = SL(2, \mathbb{F}_3) \rtimes_{\Phi_i} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où Φ_i est un automorphisme d'ordre 2 appartenant à l'une ou l'autre des classes de conjugaison des éléments d'ordre 2 de \mathfrak{S}_4 .

INDICATION.— Ils ne sont pas isomorphes : si Φ_1 est extérieur, le groupe est isomorphe à $GL(2, \mathbb{F}_3)$ qui contient treize éléments d'ordre 2. Par contre, avec Φ_2 donné par exemple par la conjugaison τ par i , on trouve sept éléments d'ordre 2. (Le calcul de ceux-ci revient à déterminer les $x \in SL(2, \mathbb{F}_3)$ tels que $x \cdot \tau(x) = \text{Id}$, c'est-à-dire $ixi^{-1} = x^{-1}$. Si

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix},$$

ceci exige $x_{12} = x_{21}$ et donne d'après la liste (\spadesuit) six éléments.)

0-A.6.36. Comparer les deux groupes $S_i = \mathbb{H}_8 \rtimes_i \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ fabriqués à partir de l'une ou l'autre des classes d'automorphismes d'ordre 2 du groupe \mathbb{H}_8 .

INDICATION.— Là non plus, les groupes qu'on obtient ne sont pas isomorphes. Dans un cas, on obtient un 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ qui, d'après

un calcul analogue à celui de l'exercice précédent, mais avec l'automorphisme donné par la conjugaison par d , a cinq éléments d'ordre 2 (la condition $dx d^{-1} = x^{-1}$ impose aux termes diagonaux de x d'être égaux, et donne dans \mathbb{H}_3 quatre matrices). Dans l'autre cas, le même type de calcul, avec cette fois l'automorphisme défini par la conjugaison par i , donne sept ($= 6 + 1$) éléments d'ordre 2.

0-A.6.37. Existe-t-il dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ des sous-groupes isomorphes au groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ou bien au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ou enfin au groupe diédral \mathcal{D}_4 qui a lui aussi huit éléments ?

INDICATION.— Ces groupes devraient, s'ils existaient, être dans l'un ou l'autre des 2-Sylow. Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il y a trop d'éléments d'ordre 2 (en fait, sept). Par contre, il y a un \mathcal{D}_4 (unique) dans chaque 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. Ce qui milite en faveur de l'existence d'un tel sous-groupe, c'est que dans un \mathcal{D}_4 il y a exactement cinq éléments d'ordre 2 (cf. exercice 0-B.11.12). Si, en effet, on considère le sous-groupe engendré par les éléments d'ordre 2 d'un 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$, on trouve un sous-groupe d'ordre 8. Comme exemple :

$$\left\{ \pm \text{Id}, \pm d, \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \pm i \right\};$$

on obtient apparemment un sous-groupe¹¹ \mathcal{D}_4 . Il en résulte d'ailleurs que la suite exacte

$$\{\text{Id}\} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{H}_8 \times_{\Phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{D}_4 \rightarrow \{e\},$$

qui correspond à l'homomorphisme qui applique un 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ sur un 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 , n'a pas de section qui soit un homomorphisme de groupes, vu que tous les éléments d'ordre 2 sont dans \mathcal{D}_4 .

Pour le dernier cas, il faudrait un élément d'ordre 2 dans \mathcal{D} qui commuterait avec un élément d'ordre 4. Mais l'un est diagonalisable sur \mathbb{F}_3 et l'autre pas (juste semi-simple).

0-A.6.38. Les six sous-groupes \mathcal{V}_4 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. a) Montrer qu'un sous-groupe d'ordre 4 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ non contenu dans le sous-groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$ rencontre ce dernier suivant $\{\pm \text{Id}\}$.

INDICATION.— Utiliser 0.11.69 et le fait qu'il n'y a qu'un sous-groupe d'ordre 2 dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

b) Montrer que le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ engendré par $-\text{Id}$ et un quelconque élément de \mathcal{D} est isomorphe à \mathcal{V}_4 . En déduire qu'il y a dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ six sous-groupes isomorphes à $\mathcal{V}_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

¹¹ On notera qu'il s'agit exactement du groupe orthogonal $O(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— Se rappeler qu'il existe douze éléments dans \mathcal{D} et pas de sous-groupe \mathcal{V}_4 dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

c) Montrer que chaque 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ contient deux sous-groupes isomorphes à \mathcal{V}_4 .

INDICATION.— Il y a quatre éléments de \mathcal{D} dans chaque 2-Sylow.

d) Montrer que $GL(2, \mathbb{F}_3)$ opère transitivement sur ses six sous-groupes \mathcal{V}_4 , et que le normalisateur d'un quelconque \mathcal{V}_4 d'un 2-Sylow S de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ est le groupe diédral \mathcal{D}_4 contenu dans S .

INDICATION.— La transitivité découle, par exemple, du fait que les éléments de \mathcal{D} sont conjugués. Le normalisateur d'un sous-groupe \mathcal{V}_4 est donc un sous-groupe d'ordre 8 qui ne peut être ni $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, ni \mathbb{H}_8 , vu que ces derniers groupes n'ont pas de sous-groupe isomorphe à \mathcal{V}_4 . C'est donc un groupe \mathcal{D}_4 (cf. exercice précédent). Le fait que le normalisateur est dans S résulte de ce que deux 2-Sylow se coupent suivant \mathbb{H}_8 .

0-A.6.39. Groupe dérivé d'un 2-Sylow. Montrer que les trois sous-groupes (distingués) d'ordre 8 d'un 2-Sylow S de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ se coupent suivant un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ qui n'est autre que le groupe dérivé de S .

INDICATION.— Il s'agit des sous-groupes \mathbb{H}_8 , de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, et enfin de \mathcal{D}_4 . Soit alors H le sous-groupe $\mathbb{H}_8 \cap \mathcal{D}_4$. C'est un sous-groupe à quatre éléments (cf. 0.11.69) qui est obligatoirement un $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Le quotient de S par H est un groupe à quatre éléments, donc commutatif. Il s'ensuit que H contient le sous-groupe dérivé de S . Ce dernier ne peut être d'ordre 2, car le quotient de S par son seul sous-groupe distingué d'ordre 2 (qui est son centre, cf. exercice 0-A.6.7) n'est pas commutatif (le quotient de S par $\{\pm \text{Id}\}$ est un 2-Sylow de $PGL(2, \mathbb{F}_3)$, c'est donc un \mathcal{D}_4 vu l'exercice 0-B.11.12). Maintenant H est contenu obligatoirement dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, car le quotient de S par ce dernier est commutatif.

0-A.6.40. Le treillis des sous-groupes d'un 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$

a) Montrer qu'il y a, dans un 2-Sylow S de $GL(2, \mathbb{F}_3)$, quinze sous-groupes, dont cinq sont isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, deux à \mathcal{V}_4 , trois à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et trois, d'ordre 8, sont isomorphes respectivement à \mathbb{H}_8 , $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et \mathcal{D}_4 .

b) Montrer que les deux sous-groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ différents du groupe dérivé sont conjugués dans S . Montrer qu'il en est de même des deux sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Le groupe (cyclique) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et le groupe \mathcal{D}_4 ne contiennent qu'un seul $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (cf. 0-B.11.13). Dans le groupe S , il s'agit d'après l'exercice précédent du groupe dérivé de S . Si l'un des autres $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ était distingué, son produit interne par l'un des deux $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ serait un sous-

groupe d'ordre 8, qui ne peut être \mathbb{H}_8 non plus ! On raisonne de même pour montrer qu'un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne peut être distingué dans le groupe S .

c) Dessiner le graphe du treillis des sous-groupes d'un 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

On trouve

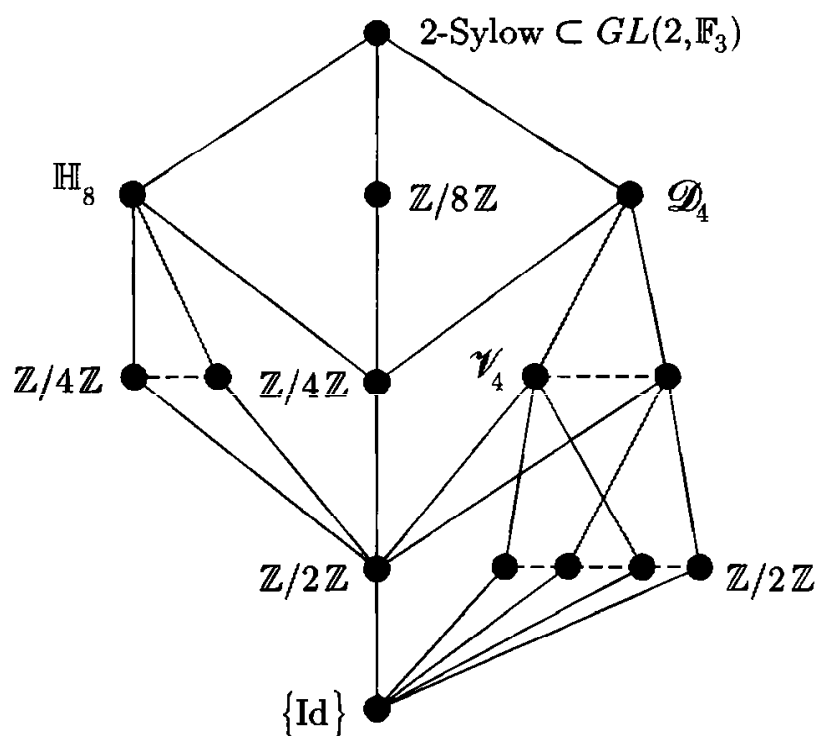


FIGURE 5

0-A.6.41. a) Montrer que deux sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ isomorphes à \mathcal{D}_4 se coupent suivant le centre.

INDICATION.— L'intersection est contenue dans l'intersection des deux 2-Sylow attachés respectivement à chacun des deux \mathcal{D}_4 , elle est donc dans \mathbb{H}_8 . Par ailleurs, comme les $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont conjugués, chacun est dans un seul \mathcal{D}_4 (voir le graphe précédent). L'intersection ne peut donc être l'un d'eux. b) Montrer que l'intersection d'un \mathcal{D}_4 et d'un sous-groupe à douze éléments est un \mathcal{V}_4 .

INDICATION.— On peut supposer le \mathcal{D}_4 égal à $O(2, \mathbb{F}_3)$ (cf. exercice **0-A.6.37**). Utiliser alors le fait qu'une matrice orthogonale qui laisse invariant une droite laisse invariant son orthogonal par rapport à la forme quadratique $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ définie sur \mathbb{F}_3 . Se reporter enfin à l'exercice **0-A.6.20**.

c) Montrer que l'intersection d'un \mathcal{D}_4 et d'un \mathfrak{S}_3 est toujours un des douze

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ différents du centre. En déduire qu'il en est de même de l'intersection d'un \mathfrak{S}_3 et d'un 2-Sylow.

INDICATION.— Inclure le \mathfrak{S}_3 dans un sous-groupe à 12 éléments et utiliser la question précédente pour se ramener à examiner l'intersection d'un \mathcal{V}_4 et d'un \mathfrak{S}_3 contenus dans un même sous-groupe à 12 éléments. On peut aussi utiliser l'interprétation des sous-groupes \mathfrak{S}_3 donnée dans l'exercice 0-A.6.25 et procéder comme dans la question précédente.

d) Fixons un \mathcal{V}_4 . Montrer que son intersection avec quatre des \mathfrak{S}_3 est l'un des douze $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (différents du centre) et que son intersection avec chacun des quatre \mathfrak{S}_3 restants est réduite à $\{\text{Id}\}$. Noter aussi que les \mathfrak{S}_3 de chacun des deux quadruplets ainsi définis se répartissent également entre les deux classes de conjugaison des sous-groupes \mathfrak{S}_3 .

e) Montrer enfin qu'un même \mathfrak{S}_3 ne rencontre que trois des six \mathcal{V}_4 . Il s'agit plus précisément de ceux qui sont contenus dans son normalisateur.

0-A.6.42. La configuration cubique dans les sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. a) Montrer qu'il y a (sauf erreur) dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$ cinquante-cinq sous-groupes.

b) Montrer que si l'on note T_1, T_2, T_3 et T_4 les quatre sous-groupes d'ordre 12, et que l'on choisit d'indexer au moyen des six transpositions de quatre éléments les six sous-groupes \mathcal{V}_4 , on peut faire en sorte que le groupe T_i contienne les trois sous-groupes \mathcal{V}_4 indexés par les trois transpositions qui ne laissent pas i fixe. Par exemple, si $i = 2$, les trois sous-groupes \mathcal{V}_4 de T_2 sont indexés par $(12), (23)$ et (24) . Montrer alors qu'on peut indexer par les trois produits de deux transpositions (à supports disjoints) les trois sous-groupes \mathcal{D}_4 de telle sorte que le sous-groupe \mathcal{D}_4 , indexé par exemple par $(14)(23)$, contienne (exactement) les deux \mathcal{V}_4 indexés par (14) et (23) .

c) En cherchant à exhiber les relations d'incidence entre les sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$, on tombe sur une configuration cubique qui régit les sous-groupes qui ne sont pas dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$. Il s'agit des quatre sous-groupes d'ordre 12, des trois \mathcal{D}_4 (respectivement $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et 2-Sylow), des huit \mathfrak{S}_3 , des six \mathcal{V}_4 et enfin des douze $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si l'on nomme en effet A, B, C, D, A', B', C' et D' à la fois les huit sous-groupes \mathfrak{S}_3 et les huit sommets du cube, les quatre grandes diagonales AC', BD', CA' et DB' correspondent aux quatre sous-groupes d'ordre 12. On note au passage que chacun de ces sous-groupes contient deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 , de même que chaque grande diagonale contient deux sommets.

Vérifier aussi que les six sous-groupes \mathcal{V}_4 correspondent aux six plans $ABC'D', ACA'C', \dots, CDA'B'$ engendrés par les paires de (grandes) diagonales. Noter qu'on lit dans cette correspondance le fait que chaque sous-groupe d'ordre 12 contient deux \mathcal{V}_4 .

Qu'est-ce qui correspond aux trois sous-groupes \mathcal{D}_4 ?

INDICATION.— Il s'agit des trois axes centraux. Ici les relations d'incidence sont renversées : chaque sous-groupe \mathcal{D}_4 contient deux \mathcal{V}_4 , et chaque axe central est l'intersection de deux plans de diagonales.

Enfin, les douze sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ considérés correspondent aux douze arêtes du cube, et l'on vérifie que les trois sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'un même \mathfrak{S}_3 se trouvent indexés de la même façon que les trois arêtes qui s'articulent à un même sommet. Ainsi, à titre d'exemple, le sous-groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ indexé par AD est contenu dans le \mathcal{V}_4 indexé par $ADC'B'$, mais aussi dans les deux \mathfrak{S}_3 indexés par A et D .

d) Vérifier les différents résultats sur les relations d'incidence entre ces différents sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$, notamment ceux qui apparaissent dans l'exercice précédent !

e) Le groupe \mathfrak{S}_4 des isométries directes du cube opère transitivement sur les huit sommets, alors que le groupe \mathfrak{S}_4 des automorphismes intérieurs de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ a deux orbites sur les huit sous-groupes \mathfrak{S}_3 . Comment s'explique cet apparent paradoxe ?

INDICATION.— On renvoie pour cela à l'exercice suivant¹², et l'on se contente de justifier ici le fait que les isométries directes agissent transitivement sur les sommets : la rotation d'angle $2\pi/3$ suivant la grande diagonale AC' et la rotation d'angle $\pi/2$ suivant l'axe perpendiculaire à la face $ABA'B'$ devraient suffire (avec leurs composées) pour transporter A en tous les sommets [voir d'ailleurs l'exercice 0-A.6.14, d)].

0-A.6.43. Le groupe $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. a) Montrer qu'il y a deux plongements du groupe \mathfrak{S}_n dans le groupe $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Si $\varphi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un tel plongement, considérer la composée $pr_2 \circ \varphi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cf. exercice 0.11.14).

b) Vérifier aussi le résultat dans le treillis du groupe $T(2, \mathbb{F}_3)$ (cf. exercice 0-A.6.27).

c) Quels sont les deux sous-groupes \mathfrak{S}_4 du groupe des automorphismes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$?

INDICATION.— On trouve d'une part le sous-groupe des automorphismes intérieurs, et d'autre part le sous-groupe formé des automorphismes $x \mapsto gxg^{-1}$ pour $\det(g) = 1$ et $x \mapsto \det(x)gxg^{-1}$ pour $\det(g) = -1$ [cf. exercice 0.11.12, e)].

d) Montrer qu'un seul de ces deux sous-groupes \mathfrak{S}_4 opère transitivement sur les huit sous-groupes \mathfrak{S}_3 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— Il suffit, vu la première question de l'exercice suivant, de

¹² L'idée à l'origine de l'explication de ce paradoxe est due à A. Arabia.

vérifier que l'automorphisme $x \mapsto \det(x)dx d^{-1}$ conjugue les deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 de $T(2, \mathbb{F}_3)$ (cf exercice 0-A.6.28), ce qui est aisé.

e) Montrer que, dans l'identification du groupe des automorphismes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et du groupe des isométries du cube (de la configuration rencontrée dans l'exercice précédent), le sous-groupe des automorphismes intérieurs et le sous-groupe des isométries directes ne se correspondent pas, mais donnent plutôt des réalisations de l'un et l'autre des deux sous-groupes \mathfrak{S}_4 de $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ceci lève le mystère à propos du paradoxe de l'exercice précédent et y trouve une justification.

f) Montrer que les seuls sous-groupes d'indice deux de $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont donnés par les deux sous-groupes \mathfrak{S}_n précédents et par le sous-groupe $\mathfrak{A}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est clairement $\mathfrak{A}_n \times \{0\}$ (cf exercices 0.11.20 et 0-B.11.14). Le quotient est un groupe à quatre éléments qui n'est pas $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ d'après la question précédente. Utiliser alors le fait que le groupe \mathcal{V}_4 n'a que trois sous-groupes non triviaux.

g) Montrer que tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui n'est pas un produit $H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $H \subset \mathfrak{S}_n$ est contenu dans l'un ou l'autre des deux sous-groupes \mathfrak{S}_n .

INDICATION.— Si dans le sous-groupe il y a $(h_0, 0)$ et $(h_0, 1)$, il y a alors l'élément $(\text{Id}, 1)$.

0-A.6.44. a) Montrer que le groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$ a deux orbites sur les huit sous-groupes \mathfrak{S}_3 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— Le normalisateur d'un \mathfrak{S}_3 n'est autre qu'un sous-groupe à douze éléments, et un tel sous-groupe rencontre $SL(2, \mathbb{F}_3)$ suivant un sous-groupe $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ d'indice quatre.

b) Montrer que le sous-groupe \mathcal{V}_4 de \mathfrak{S}_4 apparaît comme le sous-groupe (distingué) des automorphismes intérieurs de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ qui laissent invariants les trois 2-Sylows.

c) Que peut-on dire d'un automorphisme intérieur qui laisse invariants les trois sous-groupes \mathcal{D}_4 ?

d) Que peut-on dire d'un automorphisme intérieur qui laisse invariants les six sous-groupes \mathcal{V}_4 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$?

INDICATION.— Il est trivial, car l'intersection de leurs normalisateurs (que sont les sous-groupes \mathcal{D}_4) est réduite au centre (cf. exercice 0-A.6.41).

e) Montrer que l'automorphisme extérieur Φ de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ donné par $M \mapsto \Phi(M) = \det(M)M$ laisse invariants les trois 2-Sylow. Quels sont tous les autres automorphismes ayant cette propriété ?

INDICATION.— Étant d'ordre 2, il laisse invariant au moins l'un des trois;

il commute par ailleurs avec les automorphismes intérieurs qui agissent transitivement sur les trois.

f) Montrer qu'un automorphisme intérieur qui laisse invariants les 3-Sylow est trivial. En déduire que Φ est le seul automorphisme non trivial de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ qui laisse invariants les 3-Sylow.

INDICATION.— Les sous-groupes d'ordre 12 se coupent suivant le centre de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. Pour la question suivante, remarquer que les 3-Sylow qui sont dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$ sont invariants par Φ , et que la composée de l'automorphisme non trivial considéré et de Φ est donc un automorphisme intérieur qui laisse encore invariants les 3-Sylow.

g) Déterminer les automorphismes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ qui laissent invariant un \mathfrak{S}_3 donné.

INDICATION.— Les automorphismes intérieurs forment un groupe isomorphe au quotient par son centre du sous-groupe T_0 à douze éléments contenant le \mathfrak{S}_3 donné. Il s'agit donc d'un groupe isomorphe à \mathfrak{S}_3 . Maintenant, un automorphisme extérieur ne peut laisser invariant le sous-groupe \mathfrak{S}_3 considéré, car composé avec Φ , il donnerait un automorphisme intérieur qui conjuguerait les deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 de T_0 , ce qui contredit les résultats de l'exercice 0-A.6.26.

h) Déterminer les isométries du cube qui laissent fixe l'un de ses sommets. Comparer avec la question précédente.

INDICATION.— Celles qui sont directes forment un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; il est facile de vérifier que ces isométries induisent sur les quatre grandes diagonales des permutations paires. Par ailleurs, une isométrie indirecte laissant le sommet A fixe est la composée d'une isométrie directe qui envoie le sommet A en (l'autre extrémité) C' (de la grande diagonale passant par A) et de la symétrie s_0 par rapport au centre. Les isométries directes qui envoient A sur C' sont toutes obtenues à partir de l'une d'elles en composant d'abord avec celles qui fixent A . Une isométrie directe qui envoie A sur C' induit sur les grandes diagonales une permutation impaire, comme on peut le vérifier en se contentant d'un seul exemple. L'ensemble des isométries directes qui laissent invariante la diagonale AC' est un groupe \mathfrak{S}_3 , et le groupe qui nous intéresse est obtenu à partir de celui-ci en considérant les σ et les $\sigma \circ s_0$, suivant que σ est paire ou impaire (voir l'exercice précédent). Lu dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$, ceci s'exprime donc par le fait que les automorphismes qui laissent un sous-groupe \mathfrak{S}_3 invariant sont tous intérieurs. (On aura relevé, au passage, que l'automorphisme Φ correspond dans la configuration cubique à la symétrie par rapport au centre.)

i) Déterminer les isométries du cube qui laissent invariant un des trois axes centraux, et ce en regardant dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— D'une part, l'automorphisme Φ laisse les \mathcal{D}_4 invariants, et,

d'autre part, le quotient d'un 2-Sylow par son centre est isomorphe à \mathcal{D}_4 . On trouve un groupe isomorphe à $\mathcal{D}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

0-A.6.45. Les carrés dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$ et dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$. a) Montrer qu'il y a dix carrés dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$, à savoir $\{\pm \text{Id}\}$ et les éléments d'ordre 3.

b) Montrer qu'il y a seize carrés dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$, à savoir les précédents et tous les éléments d'ordre 4.

INDICATION.— On pourra écrire $X^2 = M$ avec M semblable à $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ si M n'est pas scalaire, ou bien discuter suivant l'ordre de X dans $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

0-A.6.46. a) Calculer le nombre d'orbites de \mathbb{H}_8 sur l'ensemble \mathcal{P} des projecteurs non triviaux (de rang 1) de $M(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— Le groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$ opère transitivement sur \mathcal{P} ; le centralisateur de chacun des douze éléments de \mathcal{P} (tous semblables à la matrice $p_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$) est réduit à $\{\pm \text{Id}\} \subset \mathbb{H}_8$. Chaque orbite de \mathbb{H}_8 contient donc quatre éléments, et l'on a donc trois orbites.

b) Sachant qu'il y a une correspondance bijective entre les éléments de \mathcal{P} et les couples ordonnés de droites distinctes de \mathbb{F}_3^2 , donnée par $p \mapsto (\text{Im } p, \text{Ker } p)$, préciser l'orbite sous l'action de \mathbb{H}_8 du projecteur p associé à deux droites D_i et D_j distinctes.

INDICATION.— Remarquer que si p est associé à (D_i, D_j) , alors gpg^{-1} est associé à (gD_i, gD_j) . Déterminer ensuite l'orbite du projecteur p_0 , et utiliser enfin le fait que \mathbb{H}_8 est distingué. On trouve alors que l'orbite de (D_i, D_j) est

$$\{(D_i, D_j), (D_j, D_i), (D_k, D_l), (D_l, D_k)\},$$

D_i, D_j, D_k, D_l étant les quatre droites de \mathbb{F}_3^2 .

c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les projecteurs non triviaux p_1 et p_2 pour qu'il existe deux éléments X et Y conjugués dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$ tels que $Xp_1X^{-1} = Yp_2Y^{-1}$.

INDICATION.— Écrire $X = AB$ et $Y = BA$ et utiliser le fait que tout élément de \mathbb{H}_8 est un commutateur; faire enfin appel au b) ci-dessus.

d) Montrer que \mathcal{P} a une structure naturelle de groupe isomorphe à \mathcal{A}_4 pour laquelle p_0 est l'élément neutre.

INDICATION.— Identifier \mathcal{P} à $PSL(2, \mathbb{F}_3)$.

0-A.6.47. a) Montrer que le groupe \mathbb{H}_8 a deux orbites sur l'ensemble des matrices nilpotentes non nulles dans $M(2, \mathbb{F}_3)$, orbites qui sont les mêmes que celles du groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— Commencer par celles de $SL(2, \mathbb{F}_3)$, sachant qu'une matrice nilpotente non nulle est semblable à $n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Le centralisateur d'une

telle matrice est un groupe commutatif¹³ à six éléments; c'est donc $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, qui est dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$ et qui coupe \mathbb{H}_8 suivant deux éléments.

b) Quel rapport y a-t-il avec les classes de conjugaison des éléments d'ordre 3 dans $SL(2, \mathbb{F}_3)$?

INDICATION.— La somme d'une matrice nilpotente non nulle et de l'identité est un élément d'ordre 3 de $SL(2, \mathbb{F}_3)$. On peut donc retrouver le résultat ci-dessus vu l'exercice 0-A.6.11.

c) Remarquer alors que n et $2n$ sont dans deux orbites différentes.

d) Quand $GL(2, \mathbb{F}_3)$ opère transitivement sur les huit matrices nilpotentes non triviales, les stabilisateurs sont les quatre sous-groupes conjugués $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, une matrice et son double ayant le même centralisateur. En déduire que si une matrice de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ commute avec trois matrices nilpotentes non nulles, elle est scalaire.

INDICATION.— Deux sous-groupes d'ordre 6 se coupent suivant $\{\pm \text{Id}\}$.

e) Retrouver le résultat directement.

INDICATION.— Écrire un élément commutant $\alpha n_1 + \beta = \gamma n_2 + \delta$; alors $\beta = \delta$ par un argument de trace. Conclure sachant que n_1 et n_2 ont été choisies linéairement indépendantes.

0-A.6.48. a) Montrer que, si F est un sous-espace de $M(3, \mathbb{R})$ tel que $F - \{0\}$ soit inclus dans $GL(3, \mathbb{R})$, alors F est de dimension 1.

b) Montrer qu'il existe dans $M(2, \mathbb{R})$ des plans P tels que $P - \{0\}$ soit un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

INDICATION.— Penser à la réalisation matricielle des nombres complexes.

c) Déterminer tous les plans de $M(2, \mathbb{F}_3)$ tels que $P - \{0\}$ soit un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

INDICATION.— Un plan contient 9 éléments. Les sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ qui doivent apparaître sont d'ordre 8. Comme le plan contient l'identité, les matrices qui y figurent commutent. Seuls les trois sous-groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont commutatifs parmi les sous-groupes d'ordre 8 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$. On obtient ainsi trois réalisations matricielles du corps \mathbb{F}_9 à neuf éléments dans

¹³ Si l'on ne veut effectuer aucun calcul : c'est l'ensemble des polynômes en n , vu que le polynôme minimal de n est égal à son polynôme caractéristique (sic).

$M(2, \mathbb{F}_3)$, réalisations données respectivement par les ensembles des matrices

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & a+b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

(cf. exercice 0-A.6.31). On vérifiera que les formes quadratiques que définissent les déterminants de ces matrices sont toutes de discriminant 1 et sont donc définies (cf. exercice 0-A.6.41).

d) Comment s'écrit l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^3$ de \mathbb{F}_9 dans chacune des réalisations matricielles précédentes ?

INDICATION.— Le plus simple, c'est d'effectuer le calcul et de constater que l'automorphisme de Frobenius coïncide dans chaque réalisation avec l'application qui à une matrice M associe sa comatrice \tilde{M} . On peut cependant procéder autrement en remarquant que, dans une réalisation fixée de \mathbb{F}_9 , l'application $M \mapsto \tilde{M}$ est bien un automorphisme (les groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont commutatifs) dont les points fixes sont les éléments du corps \mathbb{F}_3 . C'est donc l'élément non trivial du groupe de Galois de \mathbb{F}_9 sur \mathbb{F}_3 .

e) En déduire que les éléments M de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ qui vérifient $M^4 = \det(M)\text{Id}$ sont exactement les 20 éléments qui se trouvent dans la réunion des trois sous-groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Se ramener à examiner la situation dans les trois 2-Sylow, en séparant les cas $\det(M) = 1$ et $\det(M) = -1$.

0-A.6.49. (Patchwork). On rassemble ici quelques résultats que le lecteur a sans doute déjà pressentis, voire même établis. Ces résultats auraient pu figurer plus haut, parmi les exercices qui suivent le corps du chapitre 0, et servir parfois à mieux les comprendre. On saura (entre autres), grâce au présent exercice, que dans un groupe G de cardinal $n = p^\alpha m$ où le nombre premier p ne divise pas m (et où α est supérieur ou égal à 1, évidemment), il existe des sous-groupes de cardinal p^r , avec $r = 1, \dots, \alpha$.

a) Rappeler pourquoi l'ensemble des points fixes de l'action de H sur G/H induite par celle de G sur l'espace homogène G/H est en correspondance bijective avec le quotient $\mathcal{N}_G(H)/H$. (Cf. exercice 0.11.2.)

b) Montrer que deux p -Sylow différents d'un groupe G ont des normalisateurs différents. En déduire que le normalisateur d'un p -Sylow est son propre normalisateur.

INDICATION.— Utiliser 0.11.5 et 0.11.1.

c) Il n'existe donc pas, dans le groupe G , de sous-groupe *contenant* le normalisateur d'un p -Sylow comme sous-groupe d'indice 2. Comment appliquer cela pour retrouver le fait (déjà constaté) que $SL(2, \mathbb{F}_3)$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 12 ? (Attention, le groupe $GL(2, \mathbb{F}_3)$ a bien un

sous-groupe d'ordre 24, mais qui ne contient aucun des normalisateurs des 3-Sylow !)

d) Dessiner le graphe du treillis des sous-groupes de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. Constater, en répartissant les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ suivant leur ordre, que l'identité

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d),$$

où $\varphi(d)$ est l'indicateur d'Euler de l'entier d , correspond à l'existence et à l'unicité, pour tout diviseur d de n , d'un sous-groupe (cyclique) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d .

e) Montrer que dans tout p -groupe (non trivial) il existe au moins un sous-groupe d'ordre p .

INDICATION.— Considérer le sous-groupe (cyclique) engendré par un élément non trivial.

f) Montrer que le centre d'un p -groupe S (non trivial) est non réduit à $\{e\}$.

INDICATION.— Faire opérer S sur lui-même par conjugaison : toutes les classes de conjugaison ont pour cardinal une puissance de p , et il y en a déjà une (celle de e) qui est réduite à un seul élément ; elle ne peut être la seule.

g) Soit H un sous-groupe du p -groupe S , d'ordre p^r . Montrer qu'il existe, dans le groupe S , au moins un sous-groupe K contenant H et d'ordre p^{r+1} .

INDICATION.— Faire opérer H sur S/H , pour prouver que le groupe $\mathcal{N}_S(H)/H$ n'est pas trivial. Y considérer alors un sous-groupe d'ordre p , pour revenir ensuite dans S .

h) Noter que le groupe K peut donc être choisi de sorte que H y soit distingué.

i) Montrer que sur tout p -groupe, il existe un homomorphisme non trivial à valeurs dans le groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Remarquer qu'il existe au moins un sous-groupe d'indice p , et qu'un tel sous-groupe est nécessairement distingué, vu la question précédente [voir aussi l'exercice 0.11.10, b)].

j) Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est commutatif.

k) Montrer enfin que lorsque H est un sous-groupe distingué dans un groupe G , le groupe quotient G/H peut se lire aussi comme le quotient $\mathcal{N}_G(P)/\mathcal{N}_H(P)$ du normalisateur dans G d'un p -Sylow P de H par le normalisateur de P dans H .

INDICATION.— Remarquer que l'on a $G = H \cdot \mathcal{N}_G(P)$.

0-A.6.50. Les 5 groupes d'ordre 18. Il existe à isomorphisme près cinq groupes d'ordre 18, dont deux, à savoir $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, sont commutatifs. Un tel groupe possède un unique 3-Sylow et s'écrit donc

comme produit semi-direct d'un groupe d'ordre 9 par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous allons en fait, dans cet exercice, produire cinq groupes non commutatifs d'ordre 18, et déterminer parmi eux ceux qui sont isomorphes. On y vérifiera également le graphe suivant du treillis des sous-groupes du produit $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

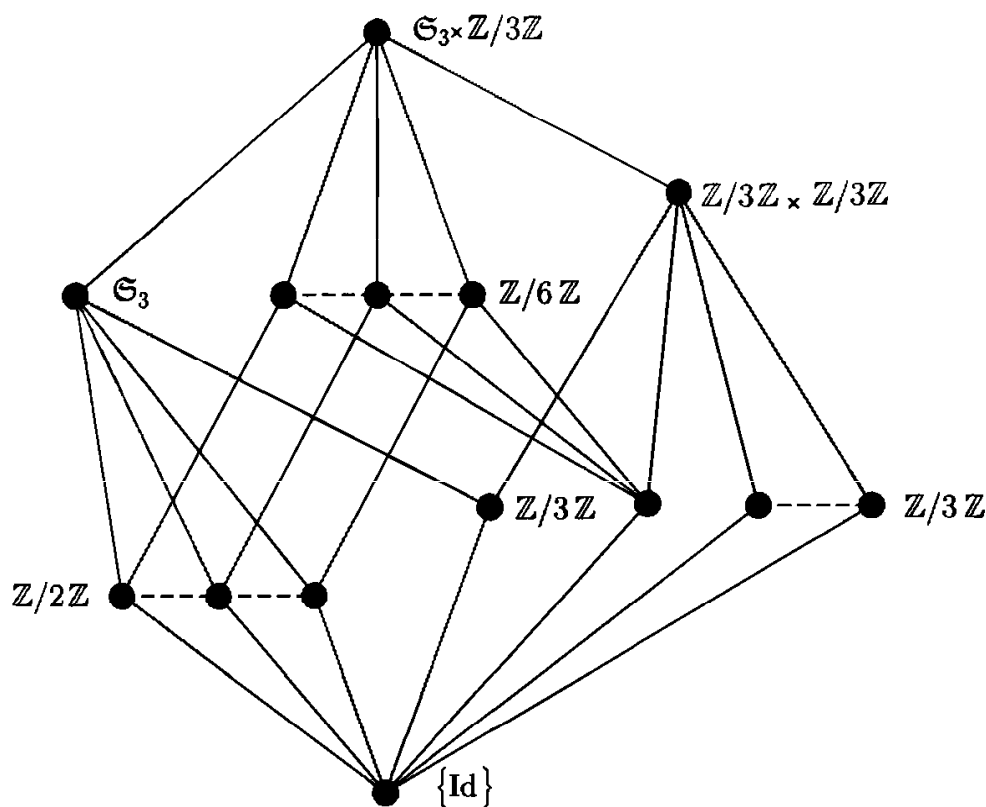


FIGURE 6

- Montrer qu'il existe un seul sous-groupe d'ordre 3 dans le groupe des automorphismes de \mathfrak{S}_3 .
- Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ a un seul sous-groupe d'ordre 2.
- Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ a deux classes de conjugaison de sous-groupes d'ordre 2.

INDICATION.— Le groupe des automorphismes en question est précisément le groupe $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

- Les quatre produits semi-directs d'ordre 18 ainsi exhibés, joints au produit direct $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, sont les cinq groupes non commutatifs dont il est question. Constaté que, parmi les cinq, trois sont isomorphes.

INDICATION.— Dresser le treillis des sous-groupes du produit direct $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: on trouvera, comme représenté dans le graphe ci-dessus, trois 2-Sylow d'ordre 2, et donc un seul sous-groupe \mathfrak{S}_3 . Le 3-Sylow est donné par le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, qui contient quatre sous-groupes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (le plan sur \mathbb{F}_q contient $(q+1)$ droites passant par l'origine). Il y a enfin

trois sous-groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, qui apparaissent comme les trois normalisateurs des 2-Sylow et qui se coupent deux à deux suivant le sous-groupe $\{\text{Id}\} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le groupe $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ contient quatre sous-groupes distingués non triviaux, dont deux sont des $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (aucun des deux autres $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ne peut être distingué, car sinon son produit semi-direct avec l'un des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ serait d'ordre 6 et le contiendrait, ce qui n'est pas).

Lire alors le groupe $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ comme produit semi-direct de \mathfrak{S}_3 et de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ pour l'action définie par a), et comme produit semi-direct de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour l'action définie par l'automorphisme induit par l'un des douze éléments d'ordre 2 non centraux, soit par exemple l'élément

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou encore l'élément

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

e) Comparer enfin les deux produits semi-directs $G_i = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes_i \mathfrak{S}_3$, où le groupe \mathfrak{S}_3 est dans l'une ou l'autre des classes de conjugaison des sous-groupes \mathfrak{S}_3 de $GL(2, \mathbb{F}_3)$, ce dernier étant identifié au groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Calculer les centres ou voir l'exercice suivant.

Remarque. Le groupe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes_A \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où l'action est donnée par l'automorphisme $(x, y) \mapsto (y, x)$ est donc isomorphe à $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Ce groupe est un cas particulier des groupes qui sont des produits en couronne (« wreath-product », en anglais)¹⁴. Ces derniers se rencontrent notamment lors de l'examen des sous-groupes de Sylow de \mathfrak{S}_n ; ainsi, les 2-Sylow de \mathfrak{S}_8 , par exemple, qui sont d'ordre 128, sont isomorphes au produit en couronne $(\mathcal{D}_4 \times \mathcal{D}_4) \rtimes_A \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

0-A.6.51. Le groupe $U(3, \mathbb{F}_3)$. a) Montrer que le produit semi-direct de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par son groupe d'automorphismes¹⁵ est isomorphe à l'en-

¹⁴ Un groupe *produit en couronne* est un produit semi-direct de $G \times G \times \cdots \times G$ (n fois) et d'un sous-groupe de \mathfrak{S}_n agissant en permutant les facteurs.

¹⁵ Le produit semi-direct d'un groupe G par son groupe $\text{Aut}(G)$ est appelé l'*holomorphe* de G . C'est aussi un exercice que de vérifier que le groupe \mathfrak{S}_4 est isomorphe à l'holomorphe du groupe de Klein (cf. exercice 0-B.11.18).

semble des matrices inversibles (à coefficients dans \mathbb{F}_p) de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

INDICATION.— Le groupe des automorphismes du groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est donné par $GL(2, \mathbb{F}_p)$ que l'on plonge dans $GL(3, \mathbb{F}_p)$ par

$$M \mapsto \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) En déduire que les deux groupes G_1 et G_2 à 54 éléments qui apparaissent dans la question e) de l'exercice précédent peuvent se décrire comme les sous-groupes de $GL(3, \mathbb{F}_3)$ formés respectivement des matrices

$$\begin{bmatrix} a & b & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et des matrices} \quad \begin{bmatrix} 1 & b & x \\ 0 & a & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où le scalaire a est évidemment non nul. Vérifier que le 3-Sylow de l'un comme de l'autre est donné par le groupe $U(3, \mathbb{F}_3)$ des matrices unipotentes supérieures.

c) Le centre du groupe $U(3, \mathbb{F}_3)$ est non trivial [cf. exercice 0-A.6.49, f)]. Le calculer. En déduire que le centre de G_1 est trivial alors que celui de G_2 ne l'est pas.

d) On se propose dans cette question de justifier le graphe suivant des sous-groupes du groupe $U = U(3, \mathbb{F}_3)$

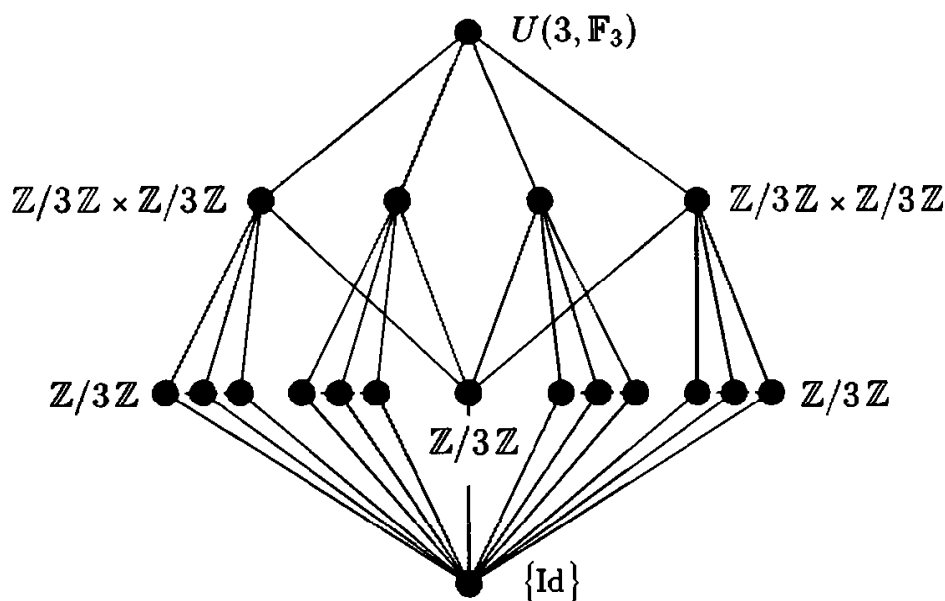


FIGURE 7

Vérifier que tous les éléments du groupe U , en dehors de l'élément neutre, sont d'ordre 3 (écrire $0 = (u - \text{Id})^3 = u^3 - \text{Id}$). Vérifier aussi que les sous-groupes U_1, U_2, U_3 et U_4 de U , noyaux des homomorphismes qui à la matrice

$$u = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

associent respectivement $\chi_1(M) = a$, $\chi_2(M) = c$, $\chi_3(M) = a + c$, et enfin $\chi_4(M) = a - c$, sont tous isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Sachant (cf. exercice 0-A.6.49) que tout sous-groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est contenu dans un groupe d'ordre 9, que les seuls groupes d'ordre 9 de la nature sont $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et enfin que ce dernier groupe est engendré par deux quelconques de ses quatre sous-groupes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, en déduire que les quatre sous-groupes U_k précédemment définis sont les seuls sous-groupes d'ordre 9 dans U .

INDICATION.— Pour finir, remarquer qu'un sous-groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de U contient obligatoirement le sous-groupe de U donné par le centre, car sinon le produit semi-direct de ces deux sous-groupes serait égal à U , et comme ils sont tous les deux distingués, ce produit semi-direct serait direct, et le groupe U serait commutatif. La conjugaison des trois $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ d'un même U_k autres que le centre est à ce stade assez facile.

0-A.6.52. On se propose dans cet exercice d'étudier le groupe résoluble G_1 (à 54 éléments) rencontré dans les deux exercices précédents¹⁶.

a) Montrer que le groupe G_1 possède 9 sous-groupes d'ordre 2 et un seul sous-groupe d'ordre 27.

b) Montrer que le groupe G_1 possède 18 éléments d'ordre 6.

c) Montrer que les neuf normalisateurs de ses 2-Sylow sont isomorphes à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, et que les sous-groupes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qu'ils contiennent sont tous dans le sous-groupe U_1 de l'exercice précédent.

INDICATION.— Élever au carré la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $c \neq 0$.

d) Montrer que le centre $Z(G')$ du groupe dérivé G' d'un groupe quelconque G est distingué dans G . Vérifier aussi que les deux sous-groupes U_1 et U_2 sont distingués dans G_1 .

¹⁶ On notera le fait curieux (mais pas trop rare, vu les exemples des groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou \mathfrak{S}_3) que le nombre des sous-groupes de ce groupe est (sauf erreur) le même que son cardinal.

e) Étudier les deux groupes H_1 et H_2 d'ordre 18 définis respectivement comme l'ensemble des matrices de $GL(3, \mathbb{F}_3)$ de la forme

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et de la forme} \quad \begin{bmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(cf. exercice 0-A.6.50).

f) Vérifier en particulier que le groupe H_2 contient neuf sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, un seul sous-groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et douze sous-groupes \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— On remarquera que les quatre sous-groupes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de H_2 y sont tous distingués, et que chacun d'eux est contenu dans trois \mathfrak{S}_3 , (pour éviter tout calcul (sic), on pourra se rappeler un fait bien utile en soi, à savoir que la conjugaison par une matrice diagonale $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ applique la matrice E_{ij} sur $(d_i/d_j)E_{ij}$ ¹⁷; aussi, la conjugaison par la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

induit sur le groupe commutatif $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ la multiplication par α ; c'est donc une homothétie).

g) Vérifier aussi que le groupe H_1 contient trois éléments d'ordre deux, ainsi que trois groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et un seul \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— On a sans doute déjà relevé le fait que le groupe H_1 est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

h) Établir que le groupe G_1 contient un seul sous-groupe (d'ordre dix-huit) isomorphe à H_2 et trois sous-groupes (d'ordre dix-huit) isomorphes à H_1 qui sont tous conjugués et contiennent le sous-groupe U_1 .

INDICATION.— Considérer les produits semi-directs internes de U_1 et U_2 avec un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et remarquer par ailleurs qu'un sous-groupe d'ordre pair contenant l'un des deux sous-groupes U_3 ou U_4 contient l'autre (tout élément d'ordre deux de G_1 conjugue ces deux sous-groupes) et par suite contient $U(3, \mathbb{F}_3)$.

i) Montrer que le groupe H_2 contient douze groupes \mathfrak{S}_3 conjugués par « paquets » de trois.

INDICATION.— On remarquera entre autres qu'un sous-groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de U_1 différent de $Z(G'_1)$ ne peut donner naissance à un \mathfrak{S}_3 , car il engendre déjà avec n'importe quel élément d'ordre deux un sous-groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. De même, un tel sous-groupe dans U_3 ou U_4 ne peut être contenu dans un \mathfrak{S}_3 , car le

¹⁷ Le facteur d_i/d_j se « voit » comme le quotient des coefficients de D figurant à l'horizontale et à la verticale du coefficient non nul de E_{ij} . Le facteur $(d_i - d_j)$ qui apparaît dans $DE_{ij} - E_{ij}D = (d_i - d_j)E_{ij}$ peut se « voir » de manière analogue.

produit semi-direct de $Z(G'_1)$ avec ce \mathfrak{S}_3 donnerait un sous-groupe d'ordre dix-huit, dont le 3-Sylow serait U_3 ou U_4 , ce qui n'est pas possible.

j) Dresser le graphe du treillis des 54 sous-groupes de G_1 .

INDICATION.— On remarquera que deux sous-groupes d'ordre dix-huit non isomorphes se coupent suivant un des trois \mathfrak{S}_3 contenant $Z(G'_1)$.

Note 0-B

Le birapport

0-B.1 Introduction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} . L'action naturelle du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des droites de E induit une action de $GL(E)$ sur les ensembles $\mathbb{P}(E)^n$ où $n \geq 2$. La partie formée par les n -uplets de droites distinctes, ou bien la partie formée par les n -uplets (D_1, D_2, \dots, D_n) où par exemple $D_1 = D_2$, sont des parties stables pour cette action... Elles ne sont évidemment pas les seules dès lors que $n \geq 3$.

Quand $\dim E = 2$, le seul cas vraiment intéressant est celui où $n = 4$, comme il résulte clairement du résultat suivant déjà constaté dans le corps du chapitre 0 : le groupe $PGL(E)$ opère transitivement et simplement sur les triplets de droites distinctes [voir aussi l'exercice 0-B.11.1].

Dès le cas $n = 4$, nous avons donc à exprimer une condition pour assurer que deux quadruplets de droites distinctes se déduisent l'un de l'autre par une application linéaire de E . Cette condition est exactement que le birapport du premier quadruplet soit égal au birapport du second. Présenté tel quel, le birapport de (D_1, D_2, D_3, D_4) n'est autre, après tout, que l'orbite du quadruplet considéré sous l'action de $GL(E)$. La chose devient plus sérieuse quand on affirme que le birapport est un scalaire, ou plus précisément, que les orbites sont paramétrées par les scalaires différents de 0 et de 1, ou encore, que l'espace des orbites de $GL(E)$ sur l'ensemble \mathcal{D} des quadruplets de droites distinctes s'identifie à $\mathbb{K} - \{0, 1\}$.

Nous avons par ailleurs sur $\mathbb{P}(E)^n$ une autre action naturelle, à savoir celle du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Les deux actions ainsi considérées commutent, et par suite chacun des groupes $GL(E)$ et \mathfrak{S}_n induit une action sur l'espace des orbites de l'autre. On pourra se contenter d'examiner l'action de \mathfrak{S}_n sur l'espace des orbites de $GL(E)$. Quand $n = 4$, elle permet d'étudier de façon équivalente la structure du groupe \mathfrak{S}_4 , ou

bien certaines propriétés d'invariance du birapport¹. Nous aborderons dans cette note (exercices compris) ces questions de façon précise, et nous laisserons de côté les très nombreuses questions de géométrie projective où intervient le birapport et qui se situent en dehors du cadre de l'ouvrage. Néanmoins, nous n'avons pu nous empêcher d'illustrer cet aspect par un plaisant exercice de géométrie plane faisant intervenir les trois couples de points obtenus à partir d'un triangle, comme intersections de chaque hauteur avec le cercle ayant pour diamètre le côté correspondant du triangle. Ceci débouche sur une jolie façon de présenter le groupe de Möbius, à partir de ses sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Au passage, on aura bien compris la notion de birapport de quatre points (ordonnés) sur une conique, la notion de triquadrangle harmonique, celle de cercle, et enfin la projection stéréographique.

On termine le chapitre par l'étude du complexe octaédral, objet de la vieille géométrie projective qui revient à la mode². Une compactification (non séparée) de $\overline{\mathbb{R}} - \{0, 1, \infty\}$, inspirée par le birapport, éclaire favorablement la géométrie du complexe octaédral lui-même.

0-B.2 Définition et premières propriétés

0-B.2.1. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 sur un corps commutatif \mathbb{K} . Quand $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il n'y a que trois droites dans E , et l'ensemble \mathcal{D} des quadruplets de droites distinctes est vide. On supposera donc que \mathbb{K} est un corps ayant au moins trois éléments (ce qui inclut évidemment les corps de caractéristique 2 autres que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Si D_1, D_2, D_3 et D_4 sont alors quatre droites distinctes, il existe une base de E formée de deux vecteurs V_1 et V_2 appartenant respectivement à D_1 et D_2 et telle que $V_1 + V_2 \in D_3$. Ces vecteurs V_1 et V_2 sont définis à un même scalaire multiplicatif près. De plus, il existe un scalaire $\lambda \notin \{0, 1\}$ tel que $\lambda \cdot V_1 + V_2 \in D_4$; ce scalaire est indépendant du choix de la base de E opéré ci-dessus, et ne dépend que du quadruplet (D_1, D_2, D_3, D_4) . On l'appelle le *birapport* du quadruplet considéré et on le note $[D_1, D_2, D_3, D_4]$. (On remarquera au passage que l'on aurait pu définir le birapport comme le scalaire μ tel que $V_1 + \mu \cdot V_2 \in D_4$, ce qui aurait donné un birapport μ inverse du précédent λ et que la définition du birapport suppose donc une convention).

¹ Nous démarrons pour notre part avec le groupe \mathfrak{S}_4 , tel qu'il s'est présenté à nous dans la note précédente, comme le groupe des automorphismes de \mathbb{H}_3 ou encore comme $GL(2, \mathbb{F}_3)/\{\pm \text{Id}\}$. Nous examinerons, à partir de là, les propriétés d'invariance du birapport. La procédure inverse est employée dans [Frk], pages 252-253.

² Voir l'article [G-MP], dont on a adopté à quelques variations près le traitement.

Proposition. Pour que deux quadruplets de \mathcal{D} soient sur la même orbite sous l'action de $GL(E)$, il faut et il suffit que leurs birapports soient égaux.

Démonstration. On a en effet $u(\lambda \cdot V_1 + V_2) = \lambda \cdot u(V_1) + u(V_2)$. ■

Ceci s'exprime aussi en disant que les applications projectives conservent le birapport. Inversement, il est facile de voir que les applications de $\mathbb{P}(E)$ qui conservent le birapport sont les applications projectives (cf. 0-B.4.1).

0-B.2.2. Remarques

a) Si l'on note p_{ijk} la restriction à la droite D_i de la projection sur la droite D_j parallèlement à la droite D_k , restriction qui est un isomorphisme entre D_i et D_j , alors l'application

$$D_1 \xrightarrow{p_{312}^{-1}} D_3 \xrightarrow{p_{341}} D_4 \xrightarrow{p_{412}} D_1$$

est un automorphisme de D_1 dont le rapport (ou le déterminant, ou la trace, ...) n'est autre que $[D_1, D_2, D_3, D_4]$.

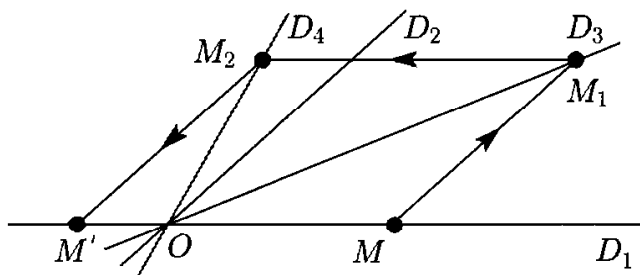


FIGURE 8

L'application $M \mapsto M'$ définit le birapport λ par $\overline{OM'} = \lambda \cdot \overline{OM}$.

Ceci donne un moyen rapide pour avoir une idée, dans le cas réel, de la valeur du birapport : sur le dessin ci-dessus, le birapport de (D_1, D_2, D_3, D_4) vaut à peu près $-\frac{2}{5}$.

b) L'application $M' \mapsto M$ inverse de l'application ci-dessus correspond à l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$, et c'est l'application associée au quadruplet (D_1, D_2, D_4, D_3) ; on a donc

$$[D_1, D_2, D_3, D_4] = [D_1, D_2, D_4, D_3]^{-1}.$$

On verra, dans les exercices 0-B.11.6 et 0-B.11.8, d'autres propriétés du birapport déduites de considérations analogues.

c) Le birapport apparaît donc aussi comme *endomorphisme* (de la droite D_1 , par exemple). On généralisera dans l'exercice 0-B.11.5 la notion de birapport au cas des quadruplets de plans transverses dans un espace de dimension 4 ou, plus largement, des sous-espaces transverses de dimension

m dans un espace de dimension $2m$. Cette généralisation sera fondée sur la nature du birapport comme endomorphisme.

0-B.3 Action du groupe \mathfrak{S}_4 sur le birapport

La remarque b) et les exercices 0-B.11.6 et 0-B.11.8 montrent comment se comporte le birapport sous l'action de trois transpositions particulières. Reconnaître la place de ces transpositions dans le groupe \mathfrak{S}_4 , en prouvant notamment qu'elles engendrent celui-ci, suffirait pour déterminer le comportement du birapport sous l'effet d'une permutation quelconque de \mathfrak{S}_4 . En fait, comme précisé dans l'introduction, le groupe \mathfrak{S}_4 opère naturellement sur l'ensemble $\overline{\mathcal{D}} \simeq \mathbb{P}(E)^4$ des quadruplets de droites de E . Cette action commute avec l'action de $GL(E)$. On en déduit une opération du groupe \mathfrak{S}_4 sur l'espace des orbites de $GL(E)$ sur l'ensemble $\overline{\mathcal{D}}$, mais aussi sur l'espace des orbites de $GL(E)$ sur l'ensemble \mathcal{D} des quadruplets de droites distinctes.

Décrivons brièvement, à ce stade, la situation issue des actions de deux groupes G_1 et G_2 sur un même ensemble \mathcal{X} dans le cas où ces deux actions *commutent*, c'est-à-dire quand

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \forall g_1 \in G_1, \quad \forall g_2 \in G_2, \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_2 \cdot (g_1 \cdot x).$$

Le groupe G_1 opère alors naturellement sur l'espace des orbites $G_2 \backslash \mathcal{X}$ de \mathcal{X} sous l'action de G_2 ; on a la même chose pour l'autre groupe. En fait, se donner des actions de G_1 et G_2 commutant entre elles revient à se donner une action du groupe $G_1 \times G_2$.

Il est alors immédiat de constater les correspondances bijectives naturelles

$$G_2 \backslash (G_1 \backslash \mathcal{X}) \simeq G_1 \backslash (G_2 \backslash \mathcal{X}) \simeq G_1 \times G_2 \backslash \mathcal{X}.$$

De plus, l'orbite de $x_0 \in \mathcal{X}$ sous l'action de $G_1 \times G_2$ est la réunion des orbites dans \mathcal{X} sous l'action de G_1 qui rencontrent $G_2 \cdot x_0$, et de même pour l'action de G_2 .

Soit K le stabilisateur de x_0 dans $G_1 \times G_2$ (le sous-groupe K de $G_1 \times G_2$ peut être quelconque puisqu'on peut partir avec $\mathcal{X} = (G_1 \times G_2)/K$ où K est donné). On a alors $KG_1 \cap G_2 = G_1K \cap G_2$; ce sous-groupe de G_2 n'est autre que le stabilisateur de \bar{x}_0 dans G_1 opérant sur $G_2 \backslash \mathcal{X}$ et l'on a donc

$$(G_1K \cap G_2) \backslash G_2 \simeq G_1 \backslash (G_1 \times G_2)/K.$$

Dans l'action commutative de G_1 et G_2 sur \mathcal{X} , on constate en fait que l'intersection des orbites $G_1 \cdot x_0$ et $G_2 \cdot x_0$ est une orbite dans \mathcal{X} du stabilisateur dans G_1 de \bar{x}_0 appartenant à $G_1 \backslash \mathcal{X}$ et de même du côté de G_2 . On a

$$(G_1 \cdot x_0) \cap (G_2 \cdot x_0) = (G_1K \cap G_2) \cdot x_0 = (G_1 \cap G_2K) \cdot x_0.$$

Enfin une même orbite $G_1 \cdot x_0$ dans \mathcal{X} sous l'action de G_1 est réunion d'orbites d'un même sous-groupe de G_2 , à savoir le stabilisateur de $\bar{x}_0 \in G_1 \backslash \mathcal{X}$ sous l'action de G_2 .

Ainsi, à titre d'exemple et dans le cas du corps $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on a 360 quadruplets de droites distinctes réparties en 3 orbites sous l'action de $GL(2, \mathbb{F}_5)$, indexées par les birapports -1 , 2 , et $1/2$, et en 15 orbites sous l'action de \mathfrak{S}_4 . L'intersection d'une orbite de $GL(2, \mathbb{F}_5)$ avec une orbite de \mathfrak{S}_4 est l'orbite d'un 2-Sylow adéquatement choisi, et chaque intersection contient 8 éléments. On examine en exercice les différents cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ avec $q = 3, 4, 5, 7, 9$ qui contiennent toutes les situations possibles en rapport avec les différents sous-groupes de \mathfrak{S}_4 .

On peut énoncer et on laisse au lecteur le soin de vérifier la proposition suivante.

Proposition. *Dans l'action de \mathfrak{S}_4 sur $\mathbb{K} - \{0, 1\}$, une orbite contient en règle générale six éléments. Une ou deux peuvent échapper prioritairement à cette règle : en dehors évidemment du cas du corps \mathbb{F}_4 , il y a toujours en caractéristique 3 une orbite réduite au scalaire -1 , et en caractéristique différente de 2 et de 3 il y a toujours une orbite à 3 éléments, donnée par $\{-1, 2, 1/2\}$, et éventuellement une orbite à 2 éléments, égale à $\{-j, -j^2\}$, si le corps \mathbb{K} contient les racines cubiques j et j^2 de l'unité. Les groupes d'isotropie de -1 , 2 et $1/2$ sont alors les 2-Sylow et celui de $-j$ (resp. $-j^2$) est \mathfrak{A}_4 .*

Le noyau de l'action de \mathfrak{S}_4 sur $\mathbb{K} - \{0, 1\}$ est égal au groupe de Klein, sauf lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{F}_4$, auquel cas le noyau est \mathfrak{A}_4 .

On se reportera aux exercices pour les différents cas particuliers³.

Il est néanmoins intéressant de signaler que cette action du groupe \mathfrak{S}_4 sur $\mathbb{K} - \{0, 1\}$ issue du birapport, \mathbb{K} étant un corps quelconque, semble quelque peu mystérieuse ! On comprendra mieux son existence plus loin (cf. section 0-B.9).

Par ailleurs, on aurait pu examiner de façon analogue les différentes actions sur d'autres types de quadruplets, par exemple sur les sous-ensembles de \mathcal{D} formés des quadruplets de droites dont deux droites exactement sont identiques, ou bien trois exactement sont identiques, etc. On rencontre là aussi différents sous-groupes de \mathfrak{S}_4 . (Cf. exercice 0-B.11.24.)

³ Les résultats énoncés dans la proposition figurent, avec leur démonstration, dans [Frk] aux pages 252-253. On peut aussi consulter [Ber], qui reprend tout cela.

0-B.4 Expression classique du birapport

Quand l'espace vectoriel E est \mathbb{K}^2 , l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, qui se note alors $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, possède deux points privilégiés : le point correspondant à la droite d'équation $y = 0$ (portée par le premier vecteur de la base canonique), et le point correspondant à la droite d'équation $x = 0$ (portée par le deuxième vecteur de cette même base). Les éléments de la droite affine d'équation $y = 1$ dans \mathbb{K}^2 paramètrent les droites vectorielles, exception faite de la droite $y = 0$ que l'on désignera par ∞ : il suffit de considérer les traces de ces droites sur $y = 1$. La droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ se trouve ainsi identifiée à $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ et l'on conviendra à cette fin de noter z le point de la droite projective correspondant à la droite vectorielle de \mathbb{K}^2 passant par $(z, 1)$; en particulier, les droites vectorielles passant par $(1, 0)$ et $(1, 1)$ correspondront respectivement au point de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ notés 0 et 1 . La définition même du birapport implique alors que $[\infty, 0, 1, z] = z$, où le premier z est un point de la droite projective (distinct des trois points $\infty, 0$ et 1) et le second z est un scalaire de $\mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.

0-B.4.1. Le groupe qui gère la géométrie de la droite projective est le groupe projectif $PGL(2, \mathbb{K}) = GL(2, \mathbb{K})/\mathbb{K}^*$. Les éléments de ce groupe s'appellent les *applications projectives* ou *homographies*. Ces applications sont caractérisées, comme déjà mentionné, par le fait qu'elles conservent le birapport. En effet, si f conserve le birapport dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, on peut supposer, en la composant au besoin par une application projective, qu'elle laisse fixe les trois points privilégiés $\infty, 0$ et 1 . Mais alors

$$z = [\infty, 0, 1, z] = [f(\infty), f(0), f(1), f(z)] = [\infty, 0, 1, f(z)] = f(z),$$

et f est donc l'identité.

0-B.4.2. L'identification de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ permet de nommer une droite (vectorielle) de \mathbb{K}^2 par un scalaire (éventuellement égal à l' ∞). Si donc a, b, c et d sont quatre points distincts de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, appelés par les scalaires a, b, c et d , leur birapport $[a, b, c, d]$, qui est un scalaire, devrait pouvoir se calculer en fonction des scalaires a, b, c et d ⁴. La proposition qui suit répond à notre attente et justifie de surcroît l'origine de l'appellation de birapport.

⁴ Un cinquième point (à découvrir) de la droite projective correspondrait à ce scalaire et devrait à son tour s'obtenir géométriquement à partir des quatre premiers (et des points privilégiés).

Proposition. On a

$$[a, b, c, d] = \frac{c - a}{c - b} \div \frac{d - a}{d - b}.$$

On renvoie le lecteur à [Frk] pour la démonstration et de nombreux autres développements.

0-B.4.3. Si \mathcal{E} désigne le plan (réel) affine euclidien orienté, le choix d'un repère orthonormé direct $\{\Omega; \vec{u}, \vec{v}\}$ permet d'identifier \mathcal{E} avec l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes. Si A, B, C et D sont alors quatre points distincts de \mathcal{E} , il leur correspond quatre scalaires complexes, qui paramètrent à leur tour des points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ identifié à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On peut donc parler du birapport de ces quatre points qui est alors un scalaire complexe. L'expression du birapport apparaissant dans la proposition précédente prouve en fait que ce scalaire ne dépend pas du repère orthonormé choisi : en effet, si l'on désigne pour un choix d'un tel repère par a, b, c et d les affixes des points A, B, C et D , le nombre complexe $(c - a)/(c - b)$ a pour module le rapport des distances AC et BC et pour argument l'angle orienté \widehat{BCA} . On peut ainsi parler du birapport de quatre points (d'un plan affine euclidien orienté), et c'est donc un nombre complexe. On pressent cependant que ce birapport va changer si l'on remplace la structure euclidienne par une autre. C'est évidemment plus clair si l'on admet l'énoncé suivant qu'on laisse en exercice (facile) au lecteur : les quatre points A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si leur birapport $[A, B, C, D]$ est réel. On verra plus bas (cf. section 0-B.6 et exercice 0-B.11.26) la signification géométrique de la condition $[A, B, C, D] = -1$.

0-B.5 Une \mathfrak{S}_4 -compactification de $\overline{\mathbb{R}} - \{0, 1, \infty\}$

0-B.5.1. Nous allons nous intéresser à une compactification (*non séparée*) de $\overline{\mathbb{R}} - \{0, 1, \infty\}$ respectant le birapport. De façon plus précise, nous allons étudier l'espace $\mathcal{C} = GL(2, \mathbb{R}) \backslash \overline{\mathcal{D}}$, qui est en fait une compactification (non séparée) de $\overline{\mathbb{R}} - \{0, 1, \infty\}$ au moyen de 14 points. Six de ces points correspondent aux orbites des quadruplets (D_1, D_2, D_3, D_4) tels que deux seulement parmi les quatre droites sont égales; quatre autres points correspondent aux orbites de quadruplets tels que trois seulement des droites sont égales; trois autres encore correspondent aux orbites de quadruplets avec deux couples de droites égales (comme par exemple (D, D, D', D') ou (D, D', D, D')); et enfin, un dernier point correspondant à l'orbite des quadruplets de droites toutes égales.

0-B.5.2. L'outil indispensable pour comprendre la topologie de \mathcal{C} est l'expression classique du birapport $[a, b, c, d]$ de quatre points de la droite projective comme $(\frac{c-a}{c-b} \div \frac{d-a}{d-b})$, où $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ a été identifié à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ainsi, lorsque $a \rightarrow b$ ou bien $c \rightarrow d$, le birapport tend vers 1. Ceci exprime que dans la topologie de \mathcal{C} , tout voisinage du point-orbite (D, D, D', D'') rencontre $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ dans un voisinage de 1 (sauf 1). De même, lorsque $c \rightarrow a$ ou $d \rightarrow b$, le birapport tend vers 0. Enfin, lorsque $d \rightarrow a$, ou bien $b \rightarrow c$, le birapport tend vers ∞ . Les six points-orbites apparaissent dans la topologie de \mathcal{C} comme insérés deux par deux en trois points que l'on a retirés à un cercle C . De façon plus précise, l'espace topologique \mathcal{C}_1 formé par les points-orbites des quadruplets de droites distinctes et des six points-orbites précédents est obtenu comme quotient de $C \times \{x, y\}$ par la relation d'équivalence qui identifie (c, x) à (c, y) pour tous les $c \in C$ à l'exception de trois d'entre eux.

0-B.5.3. Il s'agit de comprendre ce qui se passe dans le birapport quand, par exemple, b et c tendent à la fois vers a . On écrit $[a, a + \varepsilon, a + \lambda\varepsilon, b] = \frac{\lambda\varepsilon(b-a+\varepsilon)}{\varepsilon(\lambda+1)(b-a)}$ qui, quand ε tend vers 0, tend vers $\frac{\lambda}{\lambda+1}$, quantité qui prend toutes les valeurs de $\overline{\mathbb{R}} - \{1\}$ quand λ varie; et si l'on développe $[a, a + \lambda\varepsilon, a + \varepsilon, b]$, cette quantité tend, quand ε tend vers 0, vers $1/1 - \lambda$, limite qui prend toutes les valeurs de $\overline{\mathbb{R}} - \{0\}$. Ceci exprime en particulier le fait que, étant donné un voisinage quelconque V d'une droite D et un voisinage quelconque V' d'une droite $D' \neq D$, on peut trouver trois droites distinctes dans V et une droite dans V' ayant le birapport que l'on veut.

Dans l'espace topologique \mathcal{C} , cela veut dire que tout voisinage du point-orbite (D, D, D, D') contient un point orbite de quadruplets de droites distinctes ayant le birapport que l'on veut, mais il en est de même pour le point-orbite (D, D, D', D'') , le point-orbite (D, D', D, D'') , et enfin le point orbite (D', D, D, D'') . Dans le sous-espace topologique de \mathcal{C} obtenu par l'adjonction du point-orbite (D, D, D, D') à \mathcal{C}_1 , tout voisinage épointé de (D, D, D, D') rencontre \mathcal{C}_1 suivant un cercle! Indiquons au passage comment on peut construire un espace topologique formé par la réunion d'un cercle et d'un point p tel que p soit adhérent à tout point appartenant au cercle: on considère le cône ayant pour sommet p et s'appuyant sur le cercle, et l'on identifie ensemble tous les points d'une génératrice passant par p à l'exception du point p ; tout voisinage de p contient alors le cercle...

précédent où l'on s'est contenté (pour ne pas l'alourdir) de tracer quelques-unes seulement des flèches, notamment toutes celles qui aboutissent au point-orbite (D, D, D, D') (en admettant que le point k_0 décrit tout le cercle tri-épointé).

0-B.5.5. Remarques. Les considérations qui suivent nous seront utiles dans la compréhension du complexe octaédral.

a) Dans l'espace topologique \mathcal{C} obtenu, on vérifie que l'adhérence d'un point quelconque k_0 du cercle triplement épointé est donnée par

$$\{k_0; (D, D, D, D'); (D, D, D', D); (D, D', D, D); (D', D, D, D); (D, D, D, D)\}.$$

Par contre, l'adhérence de (D, D, D', D'') est donnée par

$$\{(D, D, D', D''); (D, D, D', D'); (D, D, D, D'); (D, D, D', D); (D, D, D, D)\}.$$

L'adhérence du point-orbite (D, D, D', D') est formée de deux points : lui-même et (D, D, D, D) .

b) Un voisinage ouvert assez petit de k_0 est en fait homéomorphe à un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Un voisinage ouvert assez petit de (D', D, D, D) est quant à lui homéomorphe à un cercle; ce dernier est obtenu par l'adjonction au cercle triplement épointé des points (D', D, D, D'') , (D', D, D'', D) et (D', D'', D, D) , respectivement aux points ∞ , 0 et 1. Par ailleurs, un voisinage épointé du point-orbite (D, D, D', D') est homéomorphe au quotient de $]1 - r, 1 + r[\times \{x, y\}$ par la relation qui identifie (k, x) à (k, y) pour tous les $k \neq 1$.

c) Le point (D, D, D, D) est le seul point-orbite fermé.

d) La construction ci-dessus a été effectuée dans le cas du corps \mathbb{R} . On aurait pu procéder exactement de même avec le corps des nombres complexes. L'espace topologique obtenu est alors une compactification au moyen de quatorze points de la sphère \mathbb{S}^2 privée de trois points. Toutes les considérations topologiques précédentes s'adaptent facilement à ce cas.

Si par ailleurs on se plaçait d'un point de vue purement algébrique et que l'on considérât la variété projective $(\mathbb{P}_1)^4$ munie de sa topologie de Zariski, les remarques d'ordre topologique exprimées ci-dessus seraient encore valables. On obtiendrait une sorte de complétion projective de $\mathbb{K} - \{0, 1\}$, ce dernier étant muni de sa structure algébrique d'ouvert de l'espace affine standard de dimension un où les fermés sont les ensembles finis de points.

0-B.6 Un peu de géométrie plane

On examine dans cette section un problème de géométrie, intimement lié au birapport. Cet exemple est un des nombreux problèmes de géométrie où le birapport est la notion de base.

0-B.6.1. Soit ABC un triangle et soit AA' (resp. BB' , CC') la hauteur issue du sommet A (resp. B , C). Soit H l'orthocentre du triangle ABC ; c'est aussi le centre du cercle inscrit dans le triangle $A'B'C'$. Le cercle de diamètre BC coupe la hauteur AA' en deux points X et X' . On définit de manière analogue deux autres couples de points : (Y, Y') et (Z, Z') .

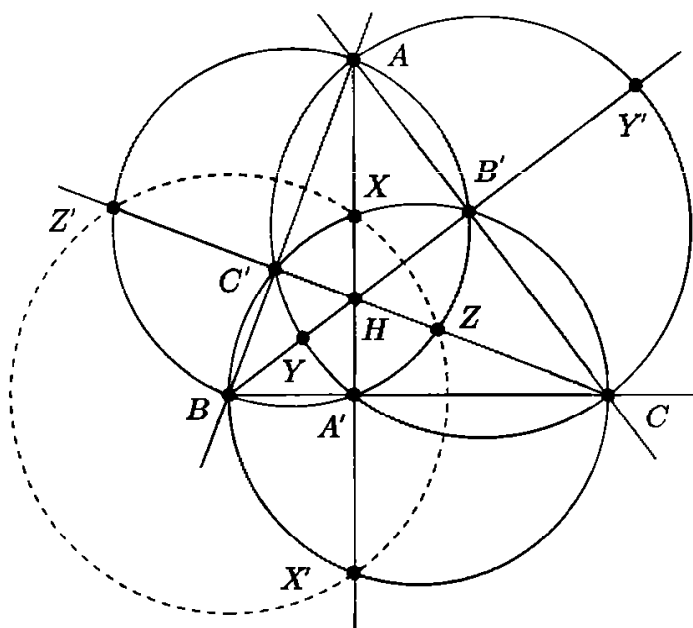


FIGURE 10

Des égalités $\overline{BC'} \cdot \overline{BA} = \overline{BH} \cdot \overline{BB'} = \overline{BA'} \cdot \overline{BC}$ et du fait que le triangle BXC (resp. BZA) est rectangle – ce qui permet d'écrire que $BX^2 = \overline{BA'} \cdot \overline{BC}$ (resp. $BZ^2 = \overline{BC'} \cdot \overline{BA}$) –, il est facile de déduire que les quatre points X , X' , Z , et Z' sont sur un même cercle de centre le point B . De plus, le pôle de la droite XX' par rapport à ce dernier cercle (en l'occurrence, le point C) se trouve sur ZZ' . Enfin, les angles $\widehat{XC'C}$ et $\widehat{X'C'C}$ sont égaux, car ils découpent sur le cercle de diamètre BC des arcs symétriques par rapport à ce même diamètre. Il s'ensuit que $C'Z$ est la bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{XC'X'}$. On est en mesure de donner la proposition-définition suivante

Proposition. On dit que quatre points non alignés X , X' et Z , Z' dans

le plan forment un quadrangle harmonique si les propriétés suivantes équivalentes sont satisfaites.

- a) Le birapport $[Z, Z', X, X']$ est égal à -1 .
- b) Les quatre points sont cocycliques, et si C' est le milieu de ZZ' , alors ZZ' est la bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{XC'X'}$.
- c) Les quatre points sont sur un même cercle, et le pôle de XX' par rapport à ce cercle appartient à ZZ' .

0-B.6.2. Remarque. Un quadrangle harmonique $XX'ZZ'$ permet de définir deux autres quadrangles harmoniques, à savoir les quadrangles $XX'YY'$ et $ZZ'YY'$. En fait, les trois cercles centrés en A (resp. B, C) et passant respectivement par les trois quadruplets harmoniques sont orthogonaux deux à deux, et les six points X, \dots, Z' sont alors leurs points d'intersection.

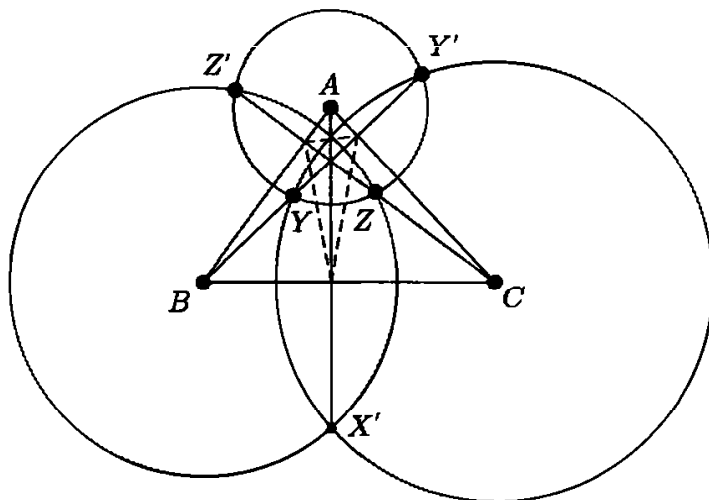


FIGURE 11

Nous pourrions donc parler aussi de sextangle harmonique, ou de *tri-quadrangle harmonique*, ou enfin de sextuplet harmonique.

0-B.6.3. On se propose, dans la suite, d'analyser progressivement la situation géométrique rencontrée. Cette démarche, qui consiste à procéder petit à petit, est un excellent exercice qui, de surcroît, est instructif sur la manière de trier dans certains cas des notions géométriques de natures diverses qui se présentent, pourtant, souvent mélangées ensemble. Ceci commence dès le paragraphe qui va suivre et se prolonge jusqu'à la fin du paragraphe 0-B.8.6 sur la projection stéréographique. Le lecteur est alors invité à réorganiser lui-même, de façon plus systématique, la matière ainsi examinée.

0-B.6.4. Étant donné une conique (non dégénérée) de l'espace projectif réel et quatre points X, X', Y et Y' de cette conique, la notion de quadrangle harmonique peut être étendue à ce cas, en exprimant que le pôle de XX' par rapport à la conique appartient à la droite YY' . Nous allons voir qu'on peut encore ici récupérer deux autres quadrangles harmoniques, et ce en complexifiant. De façon plus précise, si l'on désigne par Q l'intersection des droites XX' et YY' , la polaire de Q par rapport à la conique passe par Q' , pôle de la droite XX' .

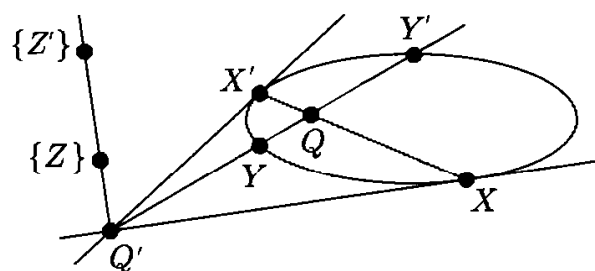


FIGURE 12

Cette droite recoupe la conique en deux points (imaginaires) Z et Z' , figurant (de ce fait) sur la figure entre accolades. Les six points X, \dots, Z' apparaissent sur la conique *complexe*. Nous allons voir, dans ce qui suit, que les deux situations décrites ci-dessus sont équivalentes, autrement dit, que les six points du plan obtenus à partir du triangle ABC peuvent être regardés comme trois couples de points sur une même conique complexe tels que le pôle de chaque droite définie par les points d'un même couple soit à l'intersection des deux autres droites définies par les deux couples restants.

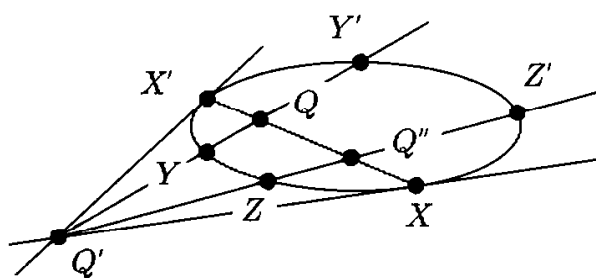


FIGURE 13

Il s'agit alors de reconnaître sur cette dernière figure la traduction des différents points de la figure 11, et notamment de réaliser la traduction du fait que les trois droites $XX', YY',$ et ZZ' sont concourantes.

0-B.7 La conique fondamentale

Soit E un espace vectoriel *complexe* de dimension deux. L'espace vectoriel $Q(E)$ des formes quadratiques sur E sera noté aussi V . On a $\dim(V) = 3$. Dans l'espace V , il y a un cône privilégié : c'est le cône des formes quadratiques dégénérées. Une équation de ce cône est donnée par le déterminant dans une base de E . Plus précisément, si $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ est la matrice d'une forme quadratique q dans une base fixée de E , alors q appartient au cône si et seulement si $ac - b^2 = 0$. Il existe par ailleurs une application C (comme « cône ») définie sur l'espace projectif $\mathbb{P}(Q(E))$ à valeurs dans $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E)/\mathcal{R}$ où \mathcal{R} est la relation d'équivalence qui identifie (D_1, D_2) avec (D_2, D_1) . Autrement dit, on va associer à chaque forme quadratique non nulle q sur E une paire *non ordonnée* de droites et qui ne change pas quand on remplace la forme quadratique par un multiple scalaire de celle-ci. Il est clair que cette application n'est autre que celle qui, à une forme quadratique non nulle, associe ses deux droites isotropes (qui sont confondues si et seulement si la forme est dégénérée). L'application ci-dessus est bijective. En effet, si (D_1, D_2) est un couple de droites de E , il existe une forme quadratique, unique à un coefficient multiplicatif près, telle que le cône de q soit $D_1 \cup D_2$. La restriction de C à la conique privilégiée⁵ arrive dans $\mathbb{P}(E)$, plongé dans $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E)/\mathcal{R}$ par $D \mapsto (D, D)$. Ceci permettra d'identifier de façon intrinsèque la conique avec la droite projective $\mathbb{P}(E)$, et donc de parler de birapport de quatre points distincts donnés sur la conique !

0-B.7.1. Auparavant, remarquons qu'il existe, en rapport avec C , une application naturelle qui associe à un point de $\mathbb{P}(Q(E))$ deux autres points situés sur la conique. C'est celle qui est donnée par

$$q \xrightarrow{C} (D_1, D_2) \mapsto ((D_1, D_1), (D_2, D_2)) \xrightarrow{C^{-1} \times C^{-1}} (q_1, q_2).$$

Lemme. Les points q_1 et q_2 sont les intersections de la conique avec la polaire de q par rapport à la conique.

Démonstration. Choisissons une base e_1, e_2 de E de telle sorte que dans cette base la matrice de q s'écrive $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Les droites $\mathbb{K} \cdot e_1$ et $\mathbb{K} \cdot e_2$ sont

⁵ Il s'agit de la conique projective donnée par l'image dans $\mathbb{P}(Q(E))$ du cône des formes quadratiques dégénérées, privé de 0, par $Q(E) - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(Q(E))$. On y fera référence sous l'appellation de *conique fondamentale*.

les isotropes, et les formes quadratiques q_1 et q_2 sont données par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maintenant la forme quadratique $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est orthogonale à q_1 et q_2 par rapport au déterminant (dont la forme polaire est

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix} \right) \mapsto \frac{ac' + a'c}{2} - bb').$$

Ceci caractérise la polaire de q par rapport à la conique. ■

0-B.7.2. Soit q' une autre forme quadratique. La droite de $\mathbb{P}(Q(E))$ passant par q et q' est tangente à la conique si et seulement si les deux formes quadratiques ont un vecteur isotrope en commun.

On suppose donc que les deux points q et q' n'appartiennent pas à la conique et sont tels que qq' ne soit pas tangente à la conique. On a alors

Proposition. Les points q et q' sont conjugués par rapport à la conique si et seulement si les deux paires $C(q)$ et $C(q')$ forment un quadrangle harmonique.

Démonstration. On choisit sur D_1 et D_2 deux vecteurs v_1 et v_2 tels que les droites passant par $v_1 + v_2$ et $k \cdot v_1 + v_2$ donnent le cône isotrope de q' . La

matrice de q dans la base donnée par les vecteurs v_1 et v_2 s'écrit $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$,

et celle de q' s'écrit $\begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ avec $\beta + \delta + 2\gamma = 0$ et $k^2\beta + \delta + 2\gamma k = 0$. Ce qui donne $\beta(k+1) + 2\gamma = 0$. Maintenant $q \perp q' \Leftrightarrow \gamma = 0 \Leftrightarrow k = -1$. ■

0-B.7.3. Si q , q' et q'' sont trois points du plan projectif $\mathbb{P}(Q(E))$, le triangle $qq'q''$ est autopolaire par rapport à la conique fondamentale si et seulement si les droites isotropes associées aux formes quadratiques forment un triquadrangle harmonique.

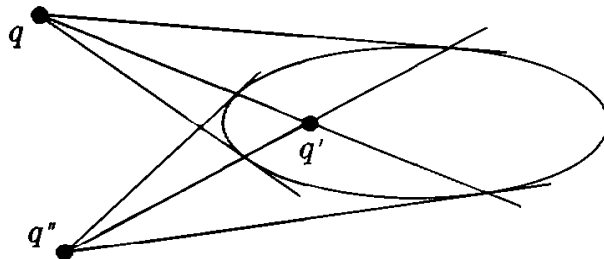


FIGURE 14

0-B.7.4. Le groupe $GL(E)$ opère sur $\mathbb{P}(Q(E))$ par $(u, q) \mapsto q \circ u$. Les deux orbites sont données par la conique et son complémentaire (ceci montre au passage que ce complémentaire est connexe). L'application induite par u sur $\mathbb{P}(Q(E))$ est projective (c'est-à-dire qu'elle provient d'une application linéaire sur $Q(E)$), et laisse stable la conique. Réciproquement, tout automorphisme qui conserve la conique est induit par un élément de $GL(E)$. Avant d'établir ce résultat, nous allons donner un lemme.

Lemme. *Soit u une application projective sur $\mathbb{P}(Q(E))$ qui laisse fixe tous les points de la conique; alors, elle est triviale.*

Démonstration. Cela résulte du fait que, sur le cône de V , on peut trouver quatre droites linéairement indépendantes trois à trois, et ceci parce que la forme déterminant est non dégénérée. ■

0-B.7.5. Soit donc Φ une application projective sur $\mathbb{P}(Q(E))$ qui conserve la conique. Désignons encore par Φ la restriction de Φ à la conique. Cette application induit alors sur $\mathbb{P}(E)$ une application qui conserve le birapport (voir plus bas); c'est donc une homographie. L'homographie elle-même induit alors sur $\mathbb{P}(Q(E))$ une application projective qui coïncide avec Φ sur la conique. Elles sont donc égales.

L'idée consiste à montrer que le birapport de quatre points M_1, \dots, M_4 sur la conique introduit plus haut peut être lu comme le birapport des droites MM_1, MM_2, MM_3, MM_4 qui passent toutes par un point quelconque M de la conique. Les plans qui leur sont associés dans $Q(E)$ passent par une même droite, donc leurs orthogonaux dans le dual donnent quatre points alignés dans $\mathbb{P}(Q(E)^*)$. Il est alors facile de conclure, car Φ conserve le birapport des quatre plans: il suffit en effet de considérer ${}^t\Phi : Q(E)^* \rightarrow Q(E)^*$.

Soit donc q_1, \dots, q_4 quatre formes quadratiques dégénérées, et D_1, \dots, D_4 les droites isotropes de E qui leur sont associées. On choisit sur ces droites des vecteurs $v_1, v_2, v_1 + v_2, kv_1 + v_2$ où $k = [D_1, D_2, D_3, D_4]$. Dans la base (v_1, v_2) , les formes quadratiques sont données par

$$q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad q_4 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{bmatrix}.$$

Maintenant si $q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ où $ac = b^2$, les formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_4$, définies par $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \mapsto x - \frac{a}{b}y$ (resp. $y - \frac{b}{c}z; x + \frac{c-a}{b-c}y + \frac{a-b}{b-c}z; x + \frac{c-k^2a}{k^2b-kc}y + \frac{ka-b}{k^2b-kc}z$) s'annulent sur les plans engendrés par (q_1, q) (resp.

$(q_2, q); (q_3, q); (q_4, q)$). La forme linéaire $\varphi_1 + \frac{c(b-a)}{b(b-c)}\varphi_2$ est égale à φ_3 . On vérifie alors que $k\varphi_1 + \frac{c(b-a)}{b(b-c)}\varphi_2$ est multiple de φ_4 . ■

0-B.7.6. On vient d'établir dans ce qui précède que, dans l'action de $GL(E)$ sur $Q(E)$, les éléments de $GL(E)$ induisent des applications projectives de $\mathbb{P}(Q(E))$ qui conservent la conique. Si l'on note alors G le groupe des transformations projectives qui conservent la conique, on a donc une application $GL(E) \rightarrow G$ qui est surjective. Son noyau est donné par les éléments de $GL(E)$ qui vérifient pour toute forme quadratique q dégénérée $q \circ u = \lambda q$. Comme la conique est propre, u est une homothétie. Cela donne

$$GL(E)/\mathbb{C}^* \cdot \text{Id} \simeq O(\det)/(\text{Homothéties}) \simeq O(3, \mathbb{C})/\{\lambda : \lambda^3 = 1\}.$$

Mais en fait, on a mieux : si $\Phi : Q(E) \rightarrow Q(E)$ conserve le cône, les deux formes quadratiques $\det \circ \Phi$ et \det ont même cône isotrope. Elles sont proportionnelles, et Φ appartient donc au groupe ${}^o\text{Sim}(Q(E))$ des similitudes vectorielles de $Q(E)$, qui est isomorphe à $O(3, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^*$. D'après ce qui précède, il existe $u \in GL(E)$ tel que $\Phi(q) = \lambda_q(q \circ u)$, pour toute forme quadratique q dégénérée. Mais comme le cône contient $n+1$ vecteurs isotropes n à n libres, λ ne dépend pas de q . Si l'on note alors Θ_u l'application $q \mapsto q \circ u$, on a $\Phi = \Theta_{\sqrt{\lambda}u}$ et donc $\Theta : GL(E) \rightarrow {}^o\text{Sim}(Q(E))$ est surjective. Son noyau est donné par $\{P; \forall S \quad {}^tPSP = S\} = \{\pm \text{Id}\}$, et par suite

$$GL(2, \mathbb{C})/\{\pm \text{Id}\} \simeq O(3, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^*.$$

Remarque. Un raisonnement standard de groupes de Lie (voir par exemple [Mn-Ts], page 237) permet de retrouver l'isomorphisme précédent.

0-B.7.7. Il est naturel de se demander maintenant si, étant donnée une conique du plan projectif complexe, on peut la réaliser comme la conique fondamentale de $Q(E)$. Autrement dit, si, étant donné un cône non dégénéré dans un espace V de dimension 3 sur \mathbb{C} , il existe un espace vectoriel E de dimension 2 tel que $Q(E) = V$ et que le cône dans V soit le cône des formes quadratiques dégénérées sur E . Nous allons voir que oui.

On aura auparavant besoin de décrire les représentations du groupe $GL(E)$ où $\dim(E) = 2$. Les représentations de dimension 1 sont paramétrées chacune par un entier $n \in \mathbb{Z}$; ce sont en effet les homomorphismes multiplicatifs $M \mapsto (\det M)^n$ de $GL(E)$ dans \mathbb{C}^* . Celles de dimension m sont obtenues à partir de l'une d'entre elles par tensorisation avec une représentation de dimension 1 : donc, si ρ_0 est une représentation fixée, toutes les autres représentations de dimension 2 sont données par $g \mapsto \varphi_0^n \cdot \rho_0(g)$ où φ_0 est la représentation de dimension 1 donnée par le déterminant. Si E_0 est l'espace de la représentation de ρ_0 , on a aussi sur $Q(E_0)$

une représentation donnée par $g \mapsto (q \mapsto q \circ \rho_0(g))$, soit $\theta_0 : GL(E) \mapsto GL(Q(E_0))$. Les représentations de dimension 3 sont données par $g \mapsto \varphi_0^n \cdot \theta_0(g)$. Remarquons alors que lorsque $GL(E)$ opère sur E et $Q(E)$, on a $(u \cdot q)(u \cdot x) = q(x)$. Autrement dit, on a une contraction entre représentations de dimension 2 et 3 compatible avec l'action de $GL(E)$.

Revenons au problème qui nous occupe. On considère le groupe G_0 des automorphismes de V qui laissent invariant le cône non dégénéré. Si q_0 est une équation fixée de ce cône, le groupe G_0 n'est autre que ${}^{\circ}Sim(q_0)$. On considère le revêtement de degré deux de ce groupe, qu'on notera \tilde{G} . Ce groupe sera, à la fin, le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel E recherché. Soit donc (E_0, φ_0) une représentation fixée de dimension 2 du groupe \tilde{G} . La représentation $\tilde{G} \rightarrow G_0 \rightarrow GL(V)$ est donc équivalente à $g \mapsto \varphi_0^{n_V}(g) \cdot \theta_0(g)$ pour un entier n_V dépendant de V . La dualité montre alors que l'espace E cherché n'est autre que l'espace de la représentation $g \mapsto \varphi_0^{-n_V}(g) \cdot \rho_0(g)$. On a donc établi qu'étant donnée une conique du plan projectif complexe, il y a une façon intrinsèque de la munir d'une structure de droite projective. Inversement, étant donnée une droite projective complexe, il y a une façon naturelle de la plonger comme conique propre d'un plan projectif naturel, et dans ce plongement les six points d'un triquadrangle harmonique correspondent, comme précisé plus haut, aux sommets d'un triangle autopolaire par rapport à la conique.

0-B.8 Involutions et groupe circulaire

La description, en termes du groupe $GL(E)$, du groupe des transformations homographiques qui conservent une conique permet de caractériser simplement les involutions sur cette conique.

0-B.8.1. Plus précisément, nous allons voir qu'une involution quelconque est une *involution de Frégier*, c'est-à-dire qu'elle est définie comme l'indique la figure qui suit à partir d'un point F situé en dehors de la conique, point qu'on désigne sous le nom de *point de Frégier* de l'involution.

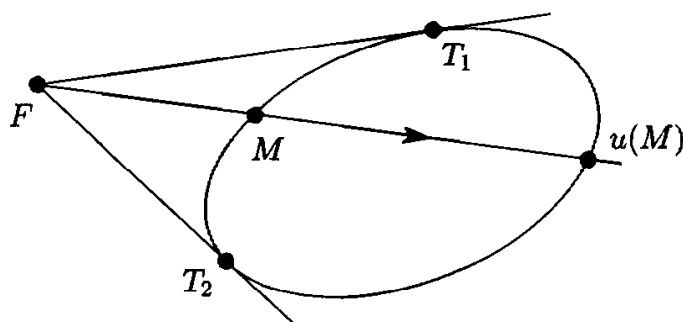


FIGURE 15

En effet, si u est une involution de la conique, que l'on peut prendre comme la conique fondamentale, il lui correspond dans $GL(E)$ une transformation linéaire v telle que $v^2 = \lambda \cdot \text{Id}$. L'application v possède deux valeurs propres distinctes, car λ est différent de 0. Ses deux directions propres

définissent les points fixes T_1 et T_2 de u . Le birapport $[T_1, T_2, M, u(M)]$ est invariant par u . Il vaut donc son inverse [cf. remarque b) de 0-B.2.2]. Comme il ne peut valoir 1, il est égal à -1. Ceci prouve donc (cf. proposition 0-B.6.1.0) que le pôle F de la droite T_1T_2 est sur la droite $Mu(M)$.

0-B.8.2. À ce stade, ayant identifié $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec une conique complexe, on se demande comment se traduit sur la conique le fait que les droites XX' , YY' et ZZ' sont concourantes. (Cf. figure 11.) Nous avons en réalité une façon de parler de cercle sur une conique sans même avoir de notion de distance (!) : le cercle passant par trois points A, B, C est l'ensemble des points M tels que $[A, B, C, M]$ est réel. Ainsi, sur la conique, les points X, X', Y et Y' sont cocycliques, et la droite AA' correspond en fait au cercle passant par les points A, A', ∞ . Comme le point correspondant à l'infini est arbitraire sur la conique, ceci montre que sur la conique où l'on s'est donné les trois couples de points (X, X') , (Y, Y') , et (Z, Z') , à chaque fois que l'on se donne un point M , les trois cercles circonscrits à (X, X', M) , (Y, Y', M) et (Z, Z', M) se recoupent en un nouveau point $h(M)$ de la conique.

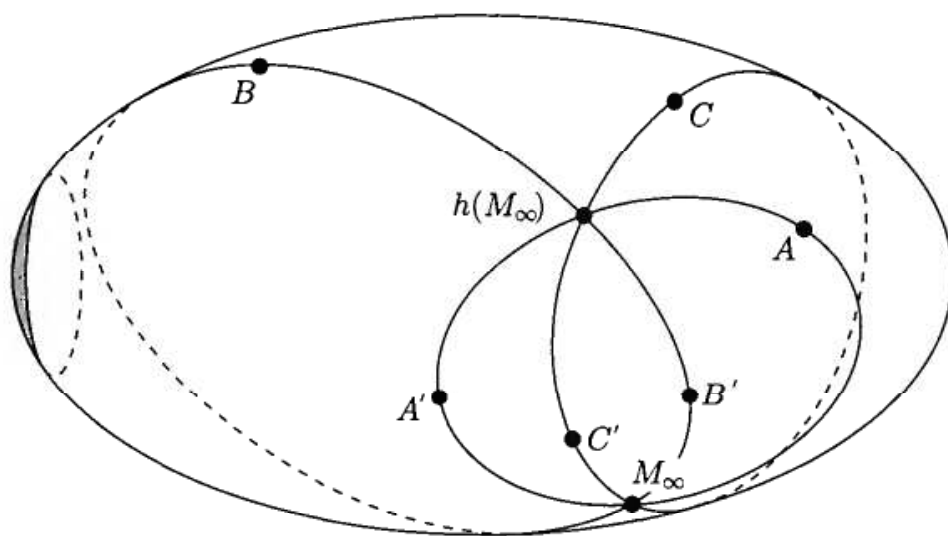


FIGURE 16

Nous laisserons au lecteur le soin de travailler une démonstration de ce résultat, qui soit débarrassée de tous les ingrédients inutiles, et procéderons plutôt à l'examen de l'application involutive h donnée par $M \mapsto h(M)$, ce qui éclairera sous un nouvel angle la figure 10.

0-B.8.3. Nous savons qu'un couple (X, X') de points sur la conique définit une involution homographique sur cette conique : c'est l'application de Frézier associée au pôle x de la droite qui passe par les deux points. On notera cette involution u_x .

Lemme 1. Les quatre points X, X', Y et Y' forment un quadrangle harmonique si et seulement si les deux involutions u_x et u_y commutent.

Démonstration. Les deux applications $u_x \circ u_y$ et $u_y \circ u_x$ coïncident sur les quatre points donnés sur la conique. Elles sont donc égales.

Inversement, si les applications u_x et u_y commutent, les points fixes de l'une sont stables par l'autre. Le point de Frégier de u_x , par exemple, est sur la droite YY' . ■

0-B.8.3.1. La donnée d'un quadrangle harmonique sur la conique correspond donc à la donnée de deux involutions u_x et u_y qui commutent, c'est-à-dire aussi à la donnée d'un homomorphisme (injectif) du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans le groupe des homographies de la conique. Les deux autres quadrangles apparaissent aussitôt comme associés aux couples d'involutions (u_x, u_z) et (u_y, u_z) , où $u_z = u_x \circ u_y$ est bien une involution !

0-B.8.3.2. Le cercle passant par les points X, X', Y et Y' est conservé par les involutions u_x et u_y . Dans le plan complexe, nous connaissons une autre involution qui conserve le cercle (et même qui le laisse fixe) : il s'agit de l'*inversion* dont le centre est le centre du cercle et dont la puissance est le carré du rayon de celui-ci. Deux inversions commutent si et seulement si leurs cercles de points fixes sont orthogonaux. Notons aussi qu'étant données deux inversions qui commutent, il y a une infinité d'inversions commutant avec les deux premières. Enfin, une inversion n'est pas homographique mais appartient au groupe circulaire que l'on va définir plus bas. L'application h que l'on cherche à étudier n'a pas de point fixe ; la proposition suivante éclaire la nature de cette application.

Proposition 2. Si l'on désigne par i_{pq} l'inversion dont le cercle de points fixes est le cercle circonscrit à quatre points P, P', Q et Q' cocycliques, alors l'involution h définie plus haut n'est autre que le produit $i_{xy} \circ i_{xz} \circ i_{yz}$.

Démonstration. On se place dans le cas de la figure 10. Le point à l'infini est envoyé en B sous l'action de i_{xz} . L'inversion i_{xy} , dont le centre est le point C , applique le point B en A' . Ce dernier point s'applique en H sous l'action de l'inversion i_{yz} . ■

On peut se reporter à l'exercice **0-B.11.28** pour une autre démonstration établie dans le cas d'une situation équivalente, où deux des trois cercles orthogonaux sont des diamètres orthogonaux du troisième.

0-B.8.3.3. La donnée de trois inversions commutant deux à deux, ou de trois cercles orthogonaux deux à deux, permet inversement de retrouver

trois involutions homographiques commutant deux à deux. En effet, on a par exemple $u_x = i_{xy} \circ i_{xz}$.

0-B.8.4. Quand $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est identifié à la sphère S^2 plongée dans \mathbb{R}^3 par la projection stéréographique, nous pouvons y définir des involutions analogues aux involutions de Frégier sur les coniques : elles sont définies à partir de points-foyers situés en dehors de la sphère et envoient un point X de la sphère sur l'autre intersection de celle-ci avec la droite joignant X au foyer. Simplement, ces involutions sont de nature différente suivant que le point est à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère. En effet, les unes n'ont pas de point fixe et les autres ont tout un cercle de points fixes. Ces dernières (exercice !) correspondent aux inversions du plan⁶ (ou bien aux symétries droites, quand le cercle de points fixes passe par le pôle nord), les autres correspondent aux applications du type de h .

Proposition. *Toute involution de la sphère avec foyer à l'intérieur de la sphère est le produit de trois inversions qui commutent.*

Démonstration. Remarquons d'abord que pour que deux inversions commutent, il faut et il suffit que le plan polaire (par rapport à la sphère) du pôle de la première contienne le pôle de la seconde. Ceci dit, soit M un point à l'intérieur de la sphère, et soit (P) le plan polaire de ce point par rapport à la sphère. Si A est un point de ce plan, son plan polaire (qui passe par M) recoupe le plan (P) suivant une droite Δ sur laquelle on choisit un point B . Le plan polaire de B coupe le plan (P) suivant une droite passant par A et rencontrant Δ en un point C . Les inversions associées aux points A, B , et C commutent, et nous allons montrer que leur produit est l'involution définie par le point M . Ceci résulterait d'un calcul relativement élémentaire dans l'algèbre de Clifford⁷. On choisira plutôt de le prouver par des moyens géométriques : le tétraèdre $ABCD$ est autopolaire par rapport à la sphère.

⁶ Une inversion du plan sera pour nous une inversion de puissance positive, et aura donc tout un cercle de points fixes.

⁷ Il est bien connu que la symétrie par rapport à l'hyperplan défini par un vecteur non isotrope a s'exprime dans l'algèbre de Clifford par $x \mapsto -axa^{-1}$. Le résultat présent s'exprime alors simplement par le fait qu'une base orthogonale (a_1, a_2, \dots, a_n) (qui donne, quand $n = 4$, le tétraèdre autopolaire de l'espace projectif) est telle que le produit $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ commute ou anticommute avec tout le monde, ce qui au niveau du projectif est la même chose.

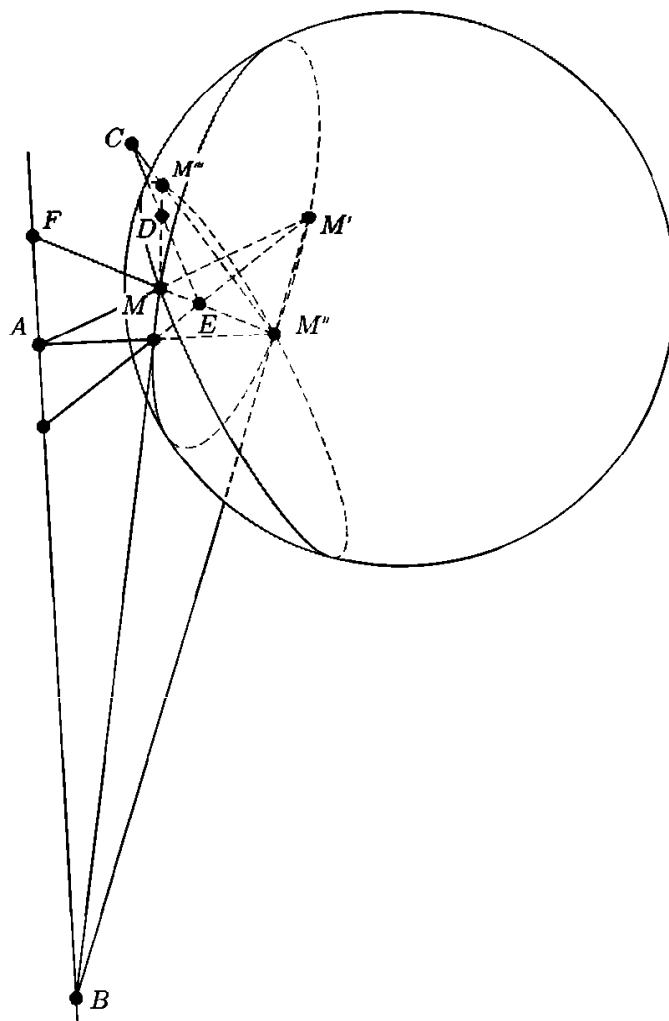


FIGURE 17

Le point E est conjugué, par rapport à la sphère, à A et à B . Il appartient donc à la droite CD . Maintenant, la polaire du point F relativement au cercle défini par l'intersection de la sphère avec le plan $(MM'M'')$ est clairement la droite EC , et l'intersection de EC avec MM'' est un point conjugué à C ; c'est donc le point D . ■

0-B.8.5. On est en mesure d'introduire le groupe circulaire.

Définition. Le groupe engendré par les inversions s'appelle le *groupe circulaire*, ou encore le *groupe de Möbius*, et sera noté $\text{Möb}(S^2)$.

Ce groupe correspond dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ aux applications

$$z \mapsto (az + b)/(cz + d) \text{ et } z \mapsto (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d).$$

En effet, une involution est le produit de deux inversions qui commutent, et toute homographie (exercice !) est le produit d'au plus trois involutions. Il a deux composantes connexes, et sa composante neutre est le groupe $PGL(2, \mathbb{C})$ rencontré plus haut. Nous allons en donner une dernière repré-

sensation, issue de la réalisation de la sphère de \mathbb{R}^3 comme l'ensemble des points d'une quadrique projective de l'espace $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$: le groupe de Möbius apparaît comme isomorphe au groupe $PO(3, 1, \mathbb{R})$ des transformations projectives qui conservent la quadrique. En effet, il suffit de vérifier qu'une inversion du plan correspond à une involution de la sphère avec point extérieur, et que cette dernière application n'est autre que la transformation projective de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, induite par une symétrie hyperplane dans \mathbb{R}^4 muni de la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$, puisque dire que deux points sont conjugués par rapport au cône isotrope équivaut à dire qu'ils sont orthogonaux pour la forme quadratique. On conclut en rappelant que les symétries hyperplanes engendrent le groupe orthogonal de notre forme quadratique, et il suffit de se contenter des symétries hyperplanes associées à des vecteurs situés en dehors du cône, vu la proposition précédente. Enfin, on verra plus bas [cf. remarque b) page 148] que les symétries droites du plan qui correspondent à des points situés dans l'espace tangent au pôle nord de la sphère sont aussi engendrées par des inversions.

On retrouve alors la description des deux composantes connexes du groupe $\text{Möb}(S^2)$ en termes du déterminant...

0-B.8.6. La projection stéréographique. Il s'agit maintenant de mieux comprendre la projection stéréographique. Soit toujours E notre espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension 2. Soit H une structure hermitienne sur E : $H(x, y) = \langle x, y \rangle$. On considère, dans $\mathcal{L}(E)$, l'espace \mathcal{H} des opérateurs hermitiens relativement à H ; c'est un espace vectoriel réel de dimension 4. Dans une base orthonormée de E , les matrices de \mathcal{H} s'écrivent $\begin{bmatrix} a & x + iy \\ x - iy & b \end{bmatrix}$, avec a et b réels. Le déterminant définit sur \mathcal{H} une forme quadratique de signature $(1, 3)$, indépendante de la base dans E . Le cône isotrope est donné par les opérateurs hermitiens de déterminant nul, et l'on a dans $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ une quadrique (projective réelle), sur laquelle $GL(E)$ induit une action donnée par $(u, A) \mapsto uAu^*$. L'ensemble des opérateurs de trace nulle définit un hyperplan à l'infini⁸ que l'on notera H_∞ . L'ap-

⁸ Le complémentaire de H_∞ dans le projectif est muni d'une structure naturelle d'espace affine, et l'on déduit donc une quadrique affine de la quadrique projective. L'espace affine peut être réalisé comme l'hyperplan affine de \mathcal{H} donné par les opérateurs hermitiens de trace égale à 1, et la quadrique affine comme l'intersection du cône isotrope et de cet hyperplan affine. L'hyperplan vectoriel associé à celui-ci n'est autre que l'hyperplan H_∞ : il rencontre le cône suivant le vecteur nul, comme il résulte du fait que la restriction du déterminant à cet hyperplan est définie négative. La quadrique affine, identique donc à la quadrique projective, est pour le moment un ellipsoïde et sera une véritable sphère quand on aura introduit une structure euclidienne naturelle sur \mathcal{H} .

plication qui à une droite D de E associe le projecteur orthogonal sur D (qui est bien un opérateur hermitien de déterminant nul) considéré dans le projectif, réalise une bijection entre $\mathbb{P}(E)$ et l'ensemble des points de la quadrique, comme il résulte clairement du fait que sur une droite de \mathcal{H} engendrée par un opérateur hermitien A de déterminant nul et de trace différente de zéro, l'élément $p = A/\text{tr}(A)$ est un projecteur hermitien. La projection stéréographique n'est autre que l'inverse de cette application. Elle dépend apparemment du choix d'une structure hermitienne sur E . De plus, il résulte d'un calcul élémentaire (que le lecteur aura plaisir à effectuer) que 4 droites de E ont un birapport réel si et seulement si les projecteurs orthogonaux sur ces droites sont liés dans l'espace \mathcal{H} . La notion de cercle dans $\mathbb{P}(E)$ devient ainsi plus claire !

Il s'agit maintenant de comprendre comment voir la quadrique comme une sphère et comment apparaît la structure euclidienne sur le plan. L'application $A \mapsto \text{tr}(A^2)$ est une forme quadratique définie positive sur \mathcal{H} , elle munit donc celui-ci d'une structure euclidienne; l'ellipsoïde formé des projecteurs hermitiens de rang 1 est alors contenu dans la sphère unité de l'espace euclidien \mathcal{H} . Le cône isotrope des opérateurs hermitiens de déterminant nul est un cône de révolution pour la structure euclidienne : en effet, dans la base de \mathcal{H} où la matrice ci-dessus a pour coordonnées (a, b, x, y) , la matrice S_1 du produit scalaire est la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 2, 2)$ (ce qui indique au passage que cette base n'est pas orthonormée), et la matrice S_2 de la forme quadratique déterminant est la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & & \\ 1/2 & 0 & & \\ & & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice $S_2 S_1^{-1}$ sont donc $-1/2, -1/2, -1/2$ et $1/2$, et sont donc, comme il se doit, toutes égales, à un signe près. Notre ellipsoïde est donc bien une sphère. En y choisissant un point N (c'est-à-dire un projecteur orthogonal N sur une droite Δ), on fixe le pôle nord et aussi le point à l'infini dans le plan $\mathbb{P}(E)$, qui n'est autre que la droite $\Delta = \text{Im}(N)$. L'espace affine complexe de dimension 1 (que l'on va « réélifier »), complémentaire dans $\mathbb{P}(E)$ du point à l'infini, admet comme espace vectoriel associé la droite complexe Δ ; celle-ci est munie d'une structure hermitienne induite, et la partie réelle de la forme hermitienne considérée donne un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel (de dimension 2) sous-jacent à la droite complexe Δ . L'espace affine euclidien ainsi obtenu est le plan usuel !

On va établir que ce plan affine euclidien s'identifie (modulo un petit changement qui consiste à remplacer la structure euclidienne de départ

par $A \mapsto \frac{\text{tr}(A^2)}{2}$, changement qui sera justifié quelques lignes plus bas) avec l'espace tangent à la sphère au point pôle sud $S = \text{Id} - N$, symétrique de N par rapport au centre $\text{Id}/2$ de la sphère. Le diamètre de la sphère pour la structure euclidienne initiale est égal à $\|S - N\| = (\text{tr Id})^{1/2} = \sqrt{2}$, et devient égal à 1 pour la structure qui vient d'être introduite !

Choisissons maintenant une base orthonormée \mathcal{B} de E portée par Δ et Δ^\perp . La matrice de N est donnée par $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. L'espace tangent à la sphère en S s'obtient comme l'intersection de l'espace tangent au cône en S avec l'hyperplan des matrices de trace 1. La forme polaire du déterminant est donnée par

$$(A, B) \mapsto \frac{1}{2}[\text{tr}(A) \text{tr}(B) - \text{tr}(AB)];$$

on en déduit que l'espace tangent au cône au point S , donné par l'orthogonal pour cette forme polaire de la génératrice passant par S , s'obtient comme $\{X; \text{tr}(NX) = 0\}$; cet espace n'est autre que l'orthogonal pour la structure euclidienne de la génératrice passant par N . Si maintenant

$$M = \begin{bmatrix} a & x + iy \\ x - iy & 1 - a \end{bmatrix} \quad (\text{où } 0 = a - a^2 - x^2 - y^2),$$

est un point de la sphère et L l'intersection de la droite NM avec l'espace tangent à la sphère en S , on peut écrire $L = \alpha N + \beta M$ avec $\alpha + \text{tr}(MN)\beta = \alpha + a\beta = 0$, mais aussi (grâce à la trace) $\alpha + \beta = 1$. On a donc

$$L = \begin{bmatrix} \alpha + \beta a & \beta(x + iy) \\ \beta(x - iy) & \beta(1 - a) \end{bmatrix}$$

et (avec la nouvelle norme)

$$\begin{aligned} \|L - S\|^2 &= \frac{1}{2}[(\alpha + \beta a)^2 + (\beta - a\beta - 1)^2 + 2\beta^2(x^2 + y^2)] \\ &= \beta^2(x^2 + y^2) = \beta^2(a - a^2). \end{aligned}$$

Maintenant, dans E , l'image de M est donnée dans \mathcal{B} par la droite de vecteur directeur $(a, x - iy)$, auquel correspond le point $M_0 = (a/(x - iy), 1)$ du plan usuel réalisé comme l'ensemble des points de E d'ordonnée égale à 1. Quant au point $S_0 = (1, 0)$, il correspond à la droite image de l'opérateur S . Dans le plan usuel, le carré de la norme $\|S_0 M_0\|^2 = \langle S_0 M_0, S_0 M_0 \rangle$ est donné par

$$|a/(x - iy)|^2 = a^2/(x^2 + y^2) = a/(1 - a).$$

On conclut en remarquant que $\beta = 1/(1 - a)$.

0-B.9 Retour sur le birapport

Le choix de trois points sur une conique complexe permet d'après ce qui précède d'identifier celle-ci avec $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Rappelons aussi que le groupe

\mathfrak{S}_4 opère sur l'ensemble $\mathbb{C} - \{0, 1\}$. Il opère donc sur la conique quand on y a privilégié trois points. Il s'agit de mieux comprendre cette action.

0-B.9.1. La situation devient plus claire quand on se souvient que le birapport est invariant par les éléments du groupe de Klein \mathcal{V}_4 . L'action sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ est en réalité une action du groupe $\mathfrak{S}_4/\mathcal{V}_4$, qui n'est autre que le groupe \mathfrak{S}_3 des permutations des trois 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 (cf. exercice 0-B.11.12). L'action sur la conique tri-épointée devient l'action induite par celle du groupe \mathfrak{S}_3 sur l'espace vectoriel de dimension 3 (au-dessus du plan projectif), où l'on a choisi une base et fixé dans cette base la forme quadratique invariante $2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$. Cette dernière action n'est autre que celle réalisée par les matrices de permutation. Nous avons donc une injection du groupe \mathfrak{S}_3 dans le groupe des homographies (qui n'est évidemment rien d'autre que celle réalisée par les transformations rationnelles $z \mapsto 1/z, z \mapsto 1 - z, \dots$). Ainsi, la transposition τ_{23} induit sur la conique l'involution qui permute les deux premiers points A et B , et laisse fixe le troisième C ; son point de Frégier est donc à l'intersection de la droite AB avec la tangente en C à la conique. Si l'on compose maintenant les deux transpositions τ_{12} et τ_{23} , on obtient la permutation circulaire (123) dont l'ordre est 3. Ceci s'exprime alors sur la conique par un joli résultat géométrique !

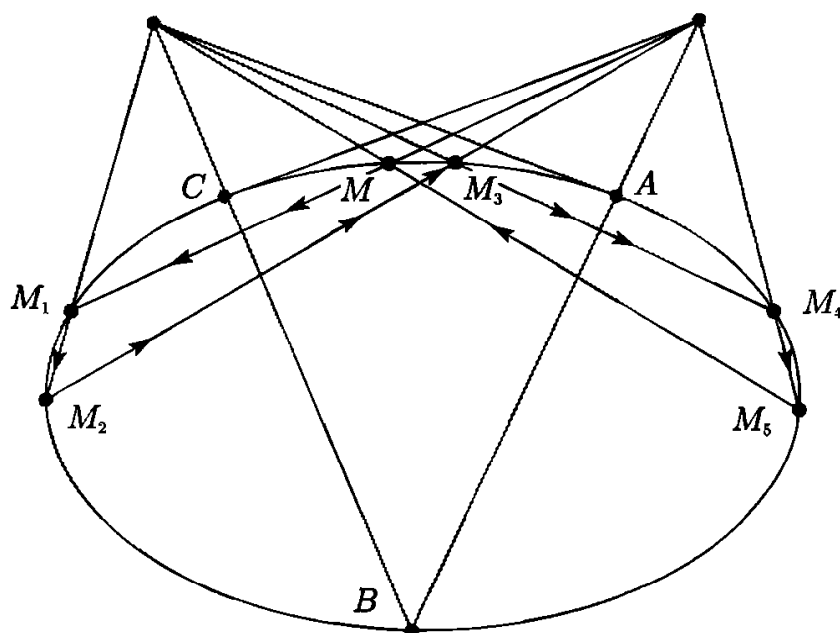


FIGURE 18

Plusieurs autres résultats analogues peuvent être exprimés. On laisse par exemple au lecteur le soin de représenter géométriquement le fait que le produit des trois transpositions de \mathfrak{S}_3 est égal à une transposition :

on trouve en particulier que les trois autres points fixes des involutions associées aux trois transpositions sont permutés par ces mêmes involutions; ces points correspondent aux points -1 , 2 et $1/2$ du plan complexe, qui donnent avec les points de base 0 , 1 et ∞ plus d'une division harmonique. On trouvera aussi comme exercice (cf. 0-B.11.25) le fait que les points de Frégier des trois involutions définies par les trois transpositions de \mathfrak{S}_3 sont alignés.

0-B.9.2. Ceci dit, on est en mesure, en principe, de lire sur la conique tri-épointée le birapport de quatre points donnés sur cette même conique. En faisant opérer des involutions, il est possible, vu que le birapport est invariant par les homographies, de supposer que trois de ces points ont été choisis aux trois points de base. Il s'agit donc de déterminer un point sur la conique à partir de quatre autres points (nommés évidemment dans un ordre précis). Comme $[0, 1, \infty, z] = z$, ce point n'est autre que le quatrième point ! Mais alors, la formule $[A, B, C, D] = [A, B, C, E] \cdot [A, B, E, D]$ de l'exercice 0-B.11.3 permet de lire sur la conique la multiplication dans le corps \mathbb{C} ! La commutativité (et aussi l'associativité) de la multiplication correspond à une propriété géométrique

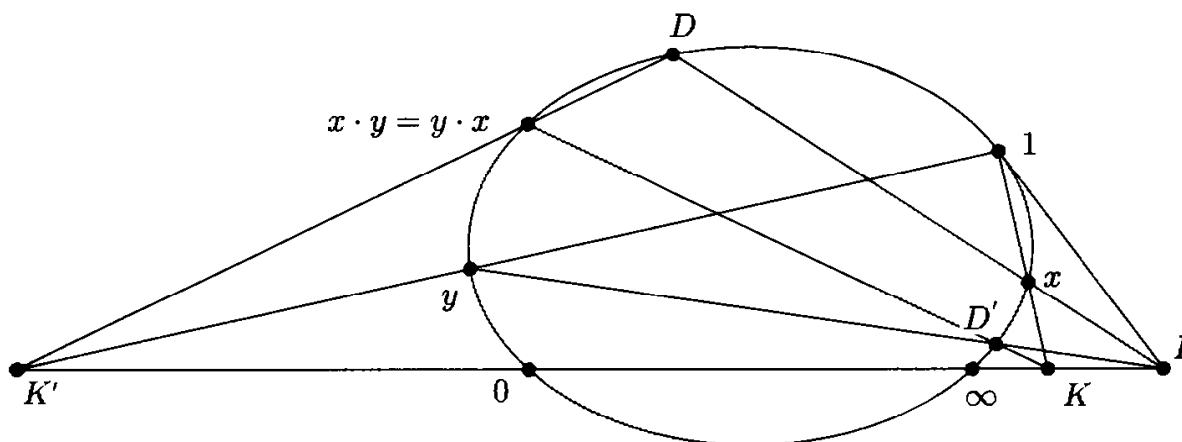


FIGURE 19

En effet, l'homographie, composée des deux involutions avec points de Frégier K , puis I , montre que le birapport $[0, \infty, x, xy]$ est égal au birapport $[0, \infty, 1, y]$. On notera que la multiplication ne semble dépendre que de la droite joignant les points 0 et ∞ . Ceci correspond au fait que l'application $x \mapsto 1/x$ est un homomorphisme du groupe multiplicatif \mathbb{K}^* .

De même, il est possible, vu 0-B.11.8, de lire sur la conique l'addition dans le corps. Il en découle ici aussi plusieurs propriétés géométriques sur la conique, qu'on laisse encore au lecteur le soin d'expliciter.

0-B.9.3. Revenons maintenant au cas de la figure 18. Les trois points choisis sur la conique permettent, vu le procédé décrit plus haut, de définir trois involutions. Nous allons constater que les points de Frégier de ces trois involutions sont alignés et que les droites MM_3 , M_1M_4 , M_2M_5 passent par le troisième point, non représenté sur la figure... Nous nous plaçons pour cela dans le cas de la conique fondamentale. Les points de Frégier sont alors les formes quadratiques non dégénérées

$$q_1(x, y) = (x - y)(x + y) \quad ; \quad q_2(x, y) = x(x - y/2) \quad ; \quad q_3(x, y) = y(x - 2y),$$

et l'on a $q_2 + \frac{1}{2}q_3 = q_1$! Ceci n'est autre que le classique théorème de Pascal⁹ sur les coniques, que l'on peut énoncer ici de la manière suivante : pour que le produit de trois involutions soit une involution, il faut et il suffit que leurs points de Frégier soient alignés. De plus, dans ce cas, le point de Frégier de la nouvelle involution est le conjugué harmonique de l'un de ces points par rapport aux deux autres.

Remarques

a) La figure 19 est une version camouflée du théorème de Pascal ; elle a la vertu de montrer le rôle crucial joué par la commutativité du corps !

b) En transportant ces résultats en dimension supérieure et au cas réel, et en les appliquant à la sphère regardée comme conique projective, on constate alors que les inversions engendrent bien les symétries droites, ces dernières correspondant à des involutions de la sphère définies à partir de points situés à l'extérieur de celle-ci, et plus précisément dans le plan tangent au pôle nord de la sphère.

c) La figure 19 témoigne du plongement du groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans le groupe des homographies de la conique. Chaque sous-groupe fini semble donc se rapporter à une situation géométrique propre, qu'il serait intéressant de déterminer à chaque fois. On procède, dans cette démarche, à l'inverse du programme d'Erlangen de F. Klein ! Pourvu qu'on dresse la liste des sous-groupes finis du groupe de Möbius, on découvre autant de figures géométriques dignes d'intérêt ! On laisse à plus tard la détermination de la liste de ces sous-groupes finis et des interprétations géométriques qu'ils incarnent.

⁹ Dans l'algèbre de Clifford, le résultat s'exprime essentiellement en disant que le carré de $a \cdot b \cdot c$, où le point c est combinaison linéaire de a et b , est un scalaire. Ceci s'énonce de façon équivalente dans l'espace $\mathfrak{sl}(2)$ des matrices 2×2 de trace nulle : le produit de 3 matrices linéairement dépendantes de $\mathfrak{sl}(2)$ est encore dans $\mathfrak{sl}(2)$ (exercice). Ceci est une autre version du théorème de Pascal ! Merci à A. Arabia.

0-B.10 Le complexe octaédral

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux orbites du groupe $G = D(4, \mathbb{K})$ des matrices diagonales inversibles¹⁰ sur la *grassmannienne* \mathfrak{G}_2^4 des plans (vectoriels) d'un espace vectoriel E , de dimension 4, rapporté à une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ fixée une fois pour toutes. On supposera, pour simplifier, que \mathbb{K} est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

0-B.10.1. Commençons par quelques remarques où figurent entre autres des considérations de géométrie algébrique qui ne nous seront pas vraiment utiles, mais qui présentent l'intérêt de bien préciser la nature des objets que l'on considère.

0-B.10.1.1. La grassmannienne \mathfrak{G}_2^4 est une variété algébrique projective, comme on le vérifie simplement en remarquant que c'est une orbite sous l'action du groupe $GL(4, \mathbb{K})$, avec comme stabilisateur du plan $\langle e_1, e_2 \rangle$ le parabolique (maximal) de type 2. On a par ailleurs un système naturel de cartes affines, obtenu en considérant l'ensemble des six ouverts \tilde{A}_{ij} pour $1 \leq i < j \leq 4$ et où \tilde{A}_{ij} est l'ensemble des plans transverses¹¹ au plan de coordonnées $P_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. L'ouvert \tilde{A}_{ij} a une structure de variété algébrique affine, puisque c'est un espace affine de dimension 4, avec comme espace vectoriel associé l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E/P_{ij}, P_{ij})$ des applications linéaires définies sur l'espace vectoriel quotient E/P_{ij} et à valeurs dans P_{ij} (voir par exemple [Mn-Ts], page 203, ou bien l'exercice **0-B.11.41**).

0-B.10.1.2. Il est possible de réaliser simplement \mathfrak{G}_2^4 comme fermé dans un espace projectif, plus précisément comme une quadrique projective. En effet, les points de $\mathbb{P}(\wedge^2(E))$ qui correspondent aux droites de (l'espace vectoriel de dimension 6) $\wedge^2(E)$ qui sont de la forme $\wedge^2 P$, où P décrit \mathfrak{G}_2^4 , forment une quadrique projective : l'équation du cône dont elle dépend, quand on a rapporté $\wedge^2(E)$ à sa base $\{e_i \wedge e_j\}_{i < j}$, est donnée par $X_{1,2}X_{3,4} - X_{1,3}X_{2,4} + X_{1,4}X_{2,3} = 0$ (cf. exercice **0-B.11.40**).

0-B.10.1.3. Nous donnerons une dernière réalisation de la grassmannienne \mathfrak{G}_2^4 . Pour cela, considérons l'ensemble des applications linéaires

¹⁰ Les groupes algébriques affines isomorphes à $D(n, \mathbb{K})$, où \mathbb{K} est algébriquement clos, sont appelés des tores (complexes quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Se reporter à l'exercice **0-C.11.46** pour quelques-unes de leurs propriétés les plus simples.

¹¹ On dit que deux sous-espaces d'un même espace vectoriel sont *transverses* si leur intersection est réduite à zéro.

surjectives de \mathbb{K}^4 dans \mathbb{K}^2 (c'est-à-dire des quadruplets de vecteurs générateurs de \mathbb{K}^2). Le noyau d'une telle application f (qui correspond en fait au sous-espace des relations entre les images par f des quatre vecteurs de la base canonique de \mathbb{K}^4) est clairement dans \mathcal{G}_2^4 . Deux applications surjectives f_1 et f_2 donnent le même noyau si et seulement si existe un automorphisme Q de l'espace d'arrivée tel que $Q \circ f_1 = f_2$ (ce qui, au niveau des quadruplets, exprime qu'ils appartiennent à une même orbite sous l'action naturelle¹² de $GL(2, \mathbb{K})$). La grassmannienne des plans de \mathbb{K}^4 est alors identifiée à l'espace des orbites sous l'action de $GL(2, \mathbb{K})$ de « configurations » de quatre vecteurs appartenant au plan \mathbb{K}^2 et engendrant celui-ci, de telle façon qu'à une orbite de pareilles configurations corresponde l'espace (de dimension 2) des relations entre les vecteurs de l'une d'entre elles. On peut aussi exprimer cela en disant que la grassmannienne \mathcal{G}_2^4 s'identifie à l'ensemble des matrices 2×4 de rang 2, modulo l'action par multiplication à gauche par les matrices inversibles 2×2 , de telle façon qu'une orbite de pareilles matrices soit associée au noyau de l'une d'entre elles.

0-B.10.2.

Définition. On dira qu'un plan de $E \simeq \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est général s'il ne contient aucun des axes de coordonnées; on dira qu'il est supergénéral s'il est transverse aux six plans de coordonnées.

On notera l'ensemble des premiers \mathcal{O} et celui des seconds $\tilde{\mathcal{O}}$. On a évidemment $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$. Remarquons que ce sont tous les deux des ouverts de la grassmannienne, et que l'on a $\tilde{\mathcal{O}} = \bigcap \tilde{A}_{ij}$. De même, si A_i désigne, pour $1 \leq i \leq 4$, l'ensemble des plans transverses à l'ième axe de coordonnées, on a $\mathcal{O} = \bigcap A_i$. De plus, $\tilde{A}_{ij} \subset A_i \cap A_j$.

Dans son action sur la grassmannienne \mathcal{G}_2^4 , le groupe $G = D(4, \mathbb{K})$ laisse évidemment fixes les six plans de coordonnées. Ce sont d'ailleurs ses seuls points fixes: en effet, si P est un tel plan, il est en particulier laissé invariant par la matrice $\delta = \text{Diag}(1, 2, 3, 4)$ qui a toutes ses valeurs propres distinctes. La restriction de δ à P est encore diagonalisable; le plan P est ainsi engendré par deux vecteurs propres de δ ; c'est donc un plan de coordonnées.

Par ailleurs, le groupe G laisse clairement invariants les deux ouverts définis plus haut.

Définition. On appelle complexe octaédral tout ensemble de plans supergénéraux formant une orbite Ω sous l'action du groupe $D(4, \mathbb{K})$.

¹² Notons au passage que $GL(2, \mathbb{K})$ opère aussi naturellement sur l'ensemble des applications surjectives de \mathbb{K}^4 dans \mathbb{K}^2 par $(Q, f) \mapsto Q \cdot f = Q \circ f$.

Proposition 1. *Un complexe octaédral s'identifie (du point de vue de la géométrie algébrique¹³) à la variété algébrique affine $PD(4, \mathbb{K})$ de dimension trois, quotient du groupe $D(4, \mathbb{K})$ par le sous-groupe distingué des matrices scalaires.*

Avant de donner de cette proposition non pas une, mais deux démonstrations, remarquons qu'elle exprime simplement qu'une matrice diagonale inversible qui laisse stable un plan transverse aux six plans de coordonnées est nécessairement scalaire.

Démonstration. a) Soit $\delta \in D(4, \mathbb{K})$ laissant stable le plan supergénéral P . La restriction de δ à P est encore diagonalisable; il existe donc un vecteur $v \in P$ qui est un vecteur propre pour δ . Si toutes les coordonnées de v étaient non nulles, il s'ensuivrait que δ est scalaire. Il nous reste à examiner le cas où l'une seulement de ses composantes, disons v_1 par exemple, est nulle, car le vecteur v qui est dans P ne peut avoir plus d'une composante nulle sous peine d'être aussi dans l'un des plans de coordonnées. Comme v_2, v_3 et v_4 sont non nulles, on déduit que les coefficients diagonaux d_2, d_3 et d_4 de δ sont égaux. Pour conclure, il suffit de faire intervenir un deuxième vecteur propre w dans P tel que la composante w_1 soit non nulle; ceci est possible, car, sinon, tous les vecteurs de P , qui est engendré par des vecteurs propres de δ , seraient dans l'hyperplan (de dimension 3) d'équation $X = 0$, mais alors le plan P rencontrerait dans cet hyperplan n'importe quel plan, en particulier les trois plans de coordonnées qui y figurent.

b) La deuxième démonstration est plus élégante dans la mesure où elle convient encore dans un cadre plus général que celui examiné ici [cf. remarque c) de 0-B.2.2], et réduit le résultat à l'exercice 0.11.3. Elle repose sur le lemme suivant

Lemme 2. *On considère dans $M(n, \mathbb{K})$ l'équation $PM = MD$, où D est diagonale inversible, où P est une matrice inversible et où M est de rang p (avec $p \neq 0$ et $p \neq n$) telle que p quelconques de ses colonnes soient linéairement indépendantes. La matrice D est alors scalaire.*

Démonstration. On se ramène, en considérant les puissances extérieures $p^{\text{ièmes}}$, au cas où $p = 1$ (pour établir que le rang de $\wedge^p M$ est égal à 1, utiliser l'action de Steinitz). Tout revient alors, vu 0-B.10.1.3, à montrer que

¹³ Pour le lecteur qui préfère rester (notamment sur \mathbb{R}) avec la géométrie différentielle usuelle, on ne peut pas encore affirmer qu'il s'agit d'un isomorphisme tant que l'on n'a pas prouvé la locale-compacité de l'orbite. Par contre, sur \mathbb{C} , on peut déjà affirmer que l'orbite, qui est localement fermée pour la topologie de Zariski, l'est pour la topologie de Hausdorff.

si une matrice diagonale laisse invariant un hyperplan (celui qui correspond au noyau de M) qui ne contient aucun des axes de coordonnées, elle est scalaire. Mais ceci, exprimé dans le dual, signifie que la matrice diagonale tD admet un vecteur propre qui n'appartient à aucun des hyperplans de coordonnées; elle est donc scalaire. ■

On revient à la deuxième démonstration de la proposition ci-dessus. On interprète la grassmannienne comme dans 0-B.10.1.3, et on applique alors le lemme précédent avec des matrices M qui ne sont plus carrées, mais rectangulaires 2×4 , et des matrices inversibles P et D ayant la taille qu'il faut. La condition sur les colonnes de M exprime que son noyau est supergénéral, vu que la restriction de l'application linéaire qu'elle définit de \mathbb{K}^4 dans \mathbb{K}^2 à n'importe lequel des plans de coordonnées est injective

Sachant qu'un complexe octaédral Ω est de dimension 3 dans la grassmannienne \mathfrak{G}_2^4 qui est, elle, de dimension 4, nous nous proposons dans ce qui suit de rechercher une fonction polynomiale k qui s'annule sur Ω .

0-B.10.3. L'ensemble des plans non transverses à un plan de coordonnées fixé, c'est-à-dire le complémentaire d'un des \tilde{A}_{ij} , est un fermé de dimension 3 qui est examiné dans l'exercice 0-B.11.42. L'ensemble de ceux qui ne sont pas transverses à deux plans de coordonnées (au moins) peut être de différents types.

i) Il y a ceux qui passent par un des axes de coordonnées. Leur ensemble est un plan projectif (de dimension 2).

ii) Il y a ceux qui rencontrent deux plans de coordonnées adjacents (tels que $\langle e_1, e_2 \rangle$ et $\langle e_1, e_3 \rangle$) ailleurs qu'en les axes. Ces plans-ci sont nécessairement contenus dans l'hyperplan engendré par les deux plans de coordonnées adjacents et rencontrent aussi le troisième plan de coordonnées qui y figure. Leur ensemble est clairement aussi un espace projectif de dimension 2 privé de trois espaces \mathbb{P}_1 et passant par les trois points qui correspondent aux trois plans de coordonnées dans l'hyperplan.

iii) Il y a ceux qui rencontrent deux plans de coordonnées non adjacents (tels que $\langle e_1, e_2 \rangle$ et $\langle e_3, e_4 \rangle$). Leur ensemble est un espace de type $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, car ils sont en correspondance bijective avec les couples de droites, dont une est dans un des deux plans de coordonnées considérés et l'autre dans l'autre.

Remarque. L'ensemble des plans qui passent par un axe de coordonnées et par une droite d'un plan de coordonnées transverse à l'axe de départ est une droite projective. Il est contenu dans celui considéré en i) et correspond aussi à un des trois \mathbb{P}_1 écartés dans ii).

Le tout est très agréablement représenté schématiquement dans le dessin d'un *octaèdre* qu'il faut penser dans l'espace à quatre dimensions et où les huit faces sont en fait des espaces projectifs de dimension deux, les douze arêtes des droites projectives et les trois quadrilatères médians un produit chacun de deux droites projectives¹⁴. Les six sommets de l'octaèdre sont les six plans de coordonnées, quatre des faces qui se coupent deux à deux suivant un sommet représentent chacune les plans contenus dans un des quatre hyperplans de coordonnées. Les quatre autres faces représentent chacune l'ensemble des plans passant par un des quatre axes de coordonnées. Les trois « parallélogrammes » (il s'agit des quadrilatères médians) ayant pour sommets opposés des couples de plans de coordonnées transverses et qui, contrairement à ce qui se passe dans le schéma dans l'espace tridimensionnel, ne se coupent qu'en deux sommets, correspondent aux trois ensembles de plans examinés dans iii). Les quatre arêtes et les deux parallélogrammes qui s'articulent en un sommet correspondant à un plan de coordonnées $P_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ donnent l'intersection du complémentaire (fermé) de l'ouvert \tilde{A}_{ij} avec notre octaèdre. L'octaèdre apparaît comme la réunion des intersections deux à deux des six fermés complémentaires des \tilde{A}_{ij} , c'est-à-dire encore comme l'ensemble des plans qui sont non transverses à au moins deux parmi les plans de coordonnées.

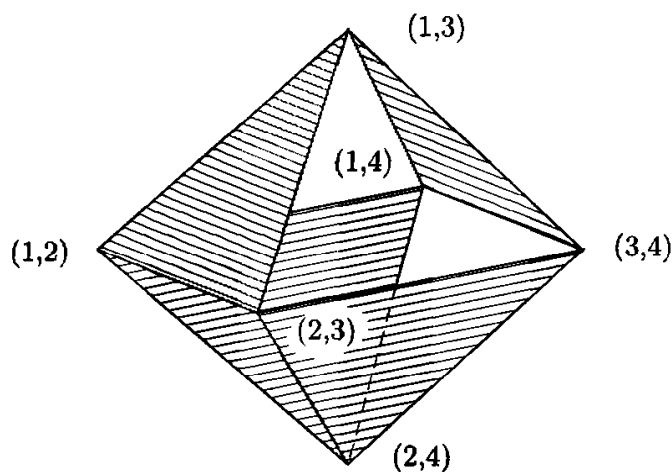


FIGURE 20

0-B.10.3.1. Commentaires

1) Le couple (i, j) représente le plan P_{ij} considéré comme point dans la grassmannienne \mathcal{G}_2^4 .

¹⁴ Considéré sur \mathbb{R} , un produit de deux droites projectives est en fait homéomorphe à un tore.

2) Les quatre faces non hachurées correspondent aux quatre plans projectifs considérés dans i) ci-dessus. La face $\{(1, 3); (2, 3); (3, 4)\}$ représente ainsi l'ensemble des plans passant par l'axe $\mathbb{K} \cdot e_3$.

3) Les quatre faces hachurées auxquelles on a ôté les « bords » représentent les ensembles considérés dans ii). L'ensemble des plans contenus dans l'hyperplan $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ est représenté ainsi par la face $\{(1, 2); (1, 3); (2, 3)\}$, et les trois arêtes de cette face représentent les trois espaces \mathbb{P}_1 évoqués aussi dans ii). L'arête $\{(1, 2); (2, 3)\}$ représente l'ensemble des plans passant par une droite du plan P_{13} et par e_2 ; l'arête $\{(1, 4); (3, 4)\}$ représente les plans passant aussi par une droite de P_{13} , mais par e_4 .

4) Le quadrilatère médian $\{(1, 2); (1, 4); (3, 4); (2, 3)\}$ représente l'ensemble des plans passant par une droite de P_{13} et par une droite de P_{24} . Il fait partie des trois ensembles évoqués dans iii) ci-dessus. Le quadrilatère associé aux deux plans non transverses P_{12} et P_{34} est donné par $\{(1, 3); (1, 4); (2, 4); (2, 3)\}$. Le fait que chacun des quadrilatères soit représenté par un parallélogramme ne devrait pas laisser croire à un point à l'infini commun à deux arêtes opposées, mais simplement au fait que ces arêtes ne se coupent pas : chacun de ces quadrilatères est en effet un produit $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ et sur \mathbb{R} , comme c'est le cas du schéma, chaque arête est un cercle sur le tore, et deux arêtes consécutives représentent deux cercles de types différents sur ce même tore, se coupant suivant deux points.

0-B.10.3.2. Le complémentaire de \mathcal{O} dans la grassmannienne se décrit facilement : il est donné par les quatre faces non hachurées (arêtes et sommets compris). Le complémentaire de $\tilde{\mathcal{O}}$ est plus compliqué à représenter : il est formé de six « copies » du fermé $\mathcal{F}_{P_{12}}$ (cf. exercice **0-B.11.42**) auquel on a ôté P_{12} et deux plans projectifs qui se coupent en un point¹⁵. Ces six ensembles sont des variétés quasi-projectives de dimension 3, qu'on ne peut évidemment représenter, mais qui offrent cet avantage que la réunion de leurs intersections deux à deux est visible sur notre schéma : il s'agit des ensembles évoqués dans ii) et de ceux évoqués dans iii) auxquels on a ôté les bords, c'est-à-dire l'octaèdre privé des quatre faces (avec leurs bords) non hachurées.

0-B.10.4. Nous allons définir sur $\tilde{\mathcal{O}}$ une fonction (algébrique) \tilde{k} à valeurs dans $\mathbb{K} - \{0, 1\}$, qui est constante sur chaque complexe octaédral, et nous allons montrer qu'elle est la restriction à $\tilde{\mathcal{O}}$ d'une fonction k définie sur

¹⁵ La copie indexée par P_{12} est formée de tous les plans de \mathbb{K}^4 non transverses à P_{12} , exception faite de P_{12} lui-même et de tous les plans passant par les axes $\mathbb{K} \cdot e_3$ et $\mathbb{K} \cdot e_4$ (relever sur l'octaèdre les éléments correspondant à ces morceaux exceptionnels).

\mathcal{O} à valeurs dans l'espace rencontré dans 0-B.5, et que l'on a appelé le (quasi-) compactifié de $\overline{\mathbb{K}} - \{0, 1, \infty\}$.

Soit donc P un plan général de l'espace $E = \mathbb{K}^4$, c'est-à-dire transverse aux quatre axes de coordonnées. Les sous-espaces engendrés par P et par chaque axe de coordonnées sont alors des hyperplans $H_{P,i}$ de E . Leurs orthogonaux dans le dual donnent quatre droites contenues toutes dans le plan $P^\perp \subset E^*$, c'est-à-dire un élément de l'ensemble $\overline{\mathcal{D}_{P^\perp}}$ des quadruplets de droites de P^\perp . L'image de cet élément dans l'espace $GL(P^\perp) \setminus \overline{\mathcal{D}_{P^\perp}}$ des orbites sous l'action du groupe des automorphismes linéaires de P^\perp opérant sur $\overline{\mathcal{D}_{P^\perp}}$ sera notée $k(P)$. Ceci définit donc l'application k . Quand le plan P est supergénéral, les hyperplans précédents qui lui sont associés sont tous distincts : en effet, dans le cas contraire le plan P serait dans un même hyperplan (de dimension 3) que deux axes de coordonnées et rencontrerait non trivialement le plan formé par ces deux axes. La restriction \tilde{k} de k à $\tilde{\mathcal{O}}$ n'est donc autre que le birapport des quatre droites obtenues ci-dessus.

Maintenant si deux plans généraux P_1 et P_2 sont conjugués sous l'action d'un élément $\delta \in D(4, \mathbb{K})$, l'application ${}^t\delta$ induit un isomorphisme entre P_1^\perp et P_2^\perp qui envoie le quadruplet dans P_1^\perp sur celui dans P_2^\perp , car δ , qui laisse invariants les axes, conjugue du même coup les hyperplans $H_{P_1,i}$ et $H_{P_2,i}$. Par suite, la fonction k , et donc aussi sa restriction \tilde{k} , sont constantes sur les orbites de $D(4, \mathbb{K})$ sur les ouverts \mathcal{O} et $\tilde{\mathcal{O}}$ respectivement. On en déduit

Proposition. *L'adhérence dans \mathcal{O} d'un complexe octaédral quelconque rencontre $\mathcal{O} - \tilde{\mathcal{O}}$ suivant une partie contenue nécessairement dans la réunion des faces hachurées de l'octaèdre (privées de leurs bords).*

Démonstration. Remarquons d'abord que l'adhérence dans \mathcal{O} d'un complexe octaédral \mathcal{C}_P , orbite du plan supergénéral P , est contenue clairement (continuité de k) dans l'image réciproque par k de l'adhérence du point $k(P)$. Mais vu les considérations topologiques de 0-B.5, l'adhérence d'un point de $\overline{\mathbb{K}} - \{0, 1, \infty\}$ ne contient que les orbites correspondantes à des quadruplets dont trois ou quatre des droites sont égales, ce qui revient à dire qu'il y a un hyperplan de E qui contient P et trois des axes de coordonnées (il ne peut contenir davantage). Ceci entraîne que nous sommes en présence de plans P qui sont dans les parties hachurées, et exclut du même coup, d'une part les quadrilatères médians, qui correspondent à des quadruplets d'hyperplans deux par deux égaux, et d'autre part les six ouverts quasi-projectifs évoqués plus haut (sauf leurs intersections deux à deux) qui correspondent à des quadruplets d'hyperplans dont deux seulement sont égaux. ■

À ce stade, deux questions se posent : l'adhérence d'un complexe octaédral dans \mathcal{G}_2^4 est-elle exactement sa réunion avec les faces de l'octaèdre ; deux plans supergénéraux contenus dans une même fibre pour la fonction k sont-ils conjugués sous l'action de $D(4, \mathbb{K})$? Nous répondrons affirmativement dans ce qui suit à ces deux questions.

0-B.10.5. Une autre interprétation de la fonction k . La réalisation de la grassmannienne donnée en c) ci-dessus suggère l'introduction d'une fonction l définie sur les plans de \mathbb{K}^4 : si P est un plan général et si f_P est une quelconque application surjective $\mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^2$ de noyau P , l'orbite sous l'action de $GL(2, \mathbb{K})$ du quadruplet des droites de \mathbb{K}^2 engendrées par les $f_P(e_i)$ (qui sont bien non nuls) est indépendante du choix de l'application linéaire surjective f_P ayant P pour noyau ; on appellera cette orbite $l(P)$.

Proposition 1. *L'application ${}^t f_P$ qui réalise un isomorphisme entre le dual de \mathbb{K}^2 et l'orthogonal P^\perp de P dans le dual de \mathbb{K}^4 envoie les droites $(\mathbb{K} \cdot f_P(e_i))^\perp$ sur les droites $(H_{P,i})^\perp$.*

Démonstration. On remarque d'abord que $f_P(H_{P,i}) = \mathbb{K} \cdot f_P(e_i)$. Le reste est un exercice élémentaire sur la dualité ; on a en effet

$$f_P(H_{P,i})^\perp = {}^t f_P^{-1}(H_{P,i}^\perp). \quad \blacksquare$$

On notera \tilde{l} la restriction de l à l'ouvert $\tilde{\mathcal{O}}$ des plans supergénéraux et on la verra comme arrivant dans $\mathbb{K} - \{0, 1\}$ grâce au birapport ; de même verra-t-on la fonction \tilde{k} .

Corollaire 2. *Les applications \tilde{k} et \tilde{l} sont égales.*

Démonstration. Il s'agit de prouver que le birapport $[D_1, D_2, D_3, D_4]$ des quatre droites de \mathbb{K}^2 est égal au birapport $[D_1^\perp, D_2^\perp, D_3^\perp, D_4^\perp]$ des quatre droites D_i^\perp du dual. Ceci est facile : si $v_1, v_2, v_1 + v_2, \lambda v_1 + v_2$ engendrent respectivement les droites D_i , alors $-v_2^*, v_1^*, -v_2^* + v_1^*, \lambda(-v_2^*) + v_1^*$ engendrent respectivement les droites D_i^\perp . \blacksquare

Théorème 3. *Tout complexe octaédral est fermé dans $\tilde{\mathcal{O}}$. Plus précisément, l'application $\tilde{k} : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{K} - \{0, 1\}$ est une application orbitale¹⁶ pour l'action de $D(4, \mathbb{K})$.*

Démonstration. Il suffit évidemment de le vérifier pour \tilde{l} . Remarquons d'abord que le plan d'équations $x + z + \lambda t = 0$ et $y + z + t = 0$ (où $\lambda \in \mathbb{K} - \{0, 1\}$) est envoyé sur λ par notre application (le lecteur aura évidemment

¹⁶ C'est-à-dire que les fibres sont exactement les orbites.

compris d'où viennent ces équations); celle-ci est donc surjective. Soit, par ailleurs, P_1 et P_2 deux plans supergénéraux tels que les birapports des quadruplets de droites engendrées respectivement par $f_{P_1}(e_i)$ et $f_{P_2}(e_i)$ soient égaux. Il s'ensuit alors qu'il existe un automorphisme linéaire u de \mathbb{K}^2 tel que les droites engendrées par $u \circ f_{P_1}(e_i)$ et par $f_{P_2}(e_i)$ soient égales, c'est-à-dire qu'il existe une application diagonale d telle que $u \circ f_{P_1} = f_{P_2} \circ d$. Il suffit pour conclure de considérer les noyaux des deux applications apparaissant de part et d'autre de l'égalité précédente. ■

Corollaire 4. *L'adhérence dans \mathcal{O} d'un complexe octaédral quelconque est sa réunion avec les faces hachurées (arêtes et sommets non compris) de l'octaèdre, et son adhérence dans la grassmannienne est sa réunion avec toutes les faces de l'octaèdre.*

Démonstration. Un complexe octaédral ne peut être une variété projective, car il est affine; il n'est donc pas fermé dans la grassmannienne. Son adhérence dans \mathfrak{G}_2^4 est contenue, d'après ce qui précède, dans sa réunion avec les huit faces de l'octaèdre. On sait par ailleurs (cf. exercice 0-B.11.43) que l'adhérence d'une orbite est elle-même réunion d'orbites, et que « l'intérieur » de chaque face de l'octaèdre est une orbite : il suffit alors pour conclure de démontrer qu'il y a, dans l'adhérence du complexe octaédral \mathcal{C}_P considéré, un point intérieur à chacune des faces. On procède cas par cas. Si $k(P) = \lambda$, le plan P est conjugué par un élément de $D(4, \mathbb{K})$ au noyau de l'application linéaire donnée par la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; le noyau de l'application linéaire associée au produit à droite de A par la matrice diagonale $\text{Diag}(d_1, d_2, d_3, d_4)$ est encore dans l'orbite du plan P , c'est-à-dire dans \mathcal{C}_P , et les équations de ce plan noyau sont données par $d_1x + d_3z + \lambda d_4t = 0$ et $d_2y + d_3z + d_4t = 0$. Si maintenant $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ et $d_4 \rightarrow 0$, on obtient à la limite le plan d'équations $x + z = 0$ et $y + z = 0$ qui passe par l'axe de coordonnées engendré par e_4 . Enfin, si $d_2 = d_3 = 1$ et $d_1 = d_4 \rightarrow 0$, on obtient à la limite le plan d'équations $z = 0$ et $y + z = 0$ qui est dans l'hyperplan de coordonnées engendré par les vecteurs e_1, e_2 et e_4 . Pour retrouver d'autres faces, il suffit de procéder de même en variant la matrice de départ A à la lumière du comportement du birapport sous l'action de permutations de \mathfrak{S}_4 et en se souvenant que les applications $z \mapsto 1/z, z \mapsto 1 - z, \dots$ sont bijectives dans $\mathbb{K} - \{0, 1\}$. ■

Remarque. Le théorème précédent relève de la situation générale d'un groupe algébrique affine – en l'occurrence ici $D(4, \mathbb{K})$ – opérant librement (i.e. tous les stabilisateurs sont réduits à l'élément neutre) sur une variété algébrique X (ici $X = \tilde{\mathcal{O}}$) : les orbites sont dans ce cas *fermées* et il y a

une bonne application orbitale (ici c'est $\tilde{k} : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{K} - \{0, 1\}$). En effet, une orbite est ouverte dans son adhérence; celle-ci est réunion d'orbites qui sont toutes de même dimension (à savoir celle de G). S'il existait dans l'adhérence une autre orbite, elle serait à son tour dense¹⁷, et rencontrerait la première orbite, d'où une contradiction.

0-B.11 Exercices

0-B.11.1. Soit $(D_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(D'_i)_{i=1,\dots,n}$ deux n -uplets de droites distinctes, où $n \geq 4$. Pour qu'il existe $u \in GL(E)$ tel que $u(D_i) = D'_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$, il faut et il suffit que $[D_1, D_2, D_3, D_i] = [D'_1, D'_2, D'_3, D'_i]$ pour tout $i \geq 4$.

0-B.11.2. a) Montrer que $PGL(3, \mathbb{R})$ opère transitivement sur les quadruplets de points de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ qui sont tels que trois quelconques d'entre eux sont non alignés.

b) Montrer que le groupe $GL(3, \mathbb{R})$ opère transitivement sur les triplets de plans bissecteurs des trièdres ayant pour sommet l'origine.

INDICATION.— Les plans bissecteurs se coupent suivant la droite $x = y = z$.

c) Montrer que 3 plans distincts qui se coupent suivant une droite peuvent se réaliser comme les plans bissecteurs d'un même trièdre. (On pourra prendre pour équations de ces plans $\phi_1 = 0, \phi_2 = 0, \phi_1 = \phi_2$.) En déduire que le groupe $GL(3, \mathbb{R})$ opère transitivement sur les triplets de plans passant par une même droite.

0-B.11.3. Montrer que si $(D_i)_{i=1,\dots,5}$ sont 5 droites distinctes du plan vectoriel, alors $[D_1, D_2, D_3, D_4] = [D_1, D_2, D_3, D_5] \cdot [D_1, D_2, D_5, D_4]$.

INDICATION.— Se reporter à la remarque a) de 0-B.2.2, en considérant le dessin suivant.

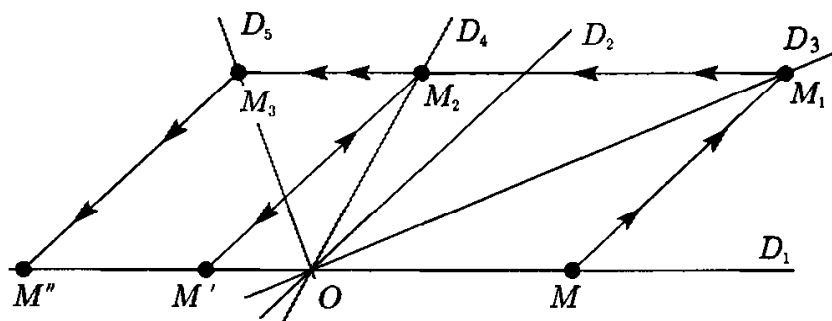


FIGURE 21

¹⁷ Car une sous-variété fermée (irréductible) propre est de dimension strictement inférieure.

0-B.11.4. a) Quand \mathbb{K} est fini, avec q éléments, calculer le nombre de plans dans l'espace $E = \mathbb{K}^4$.

INDICATION.— Faire opérer $GL(E)$ sur les plans; on trouve $q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1$.

b) Montrer qu'étant donné un plan P_0 fixé, il y a q^4 plans qui lui sont transverses et $q^3 + 2q^2 + q$ qui le coupent suivant une droite.

INDICATION.— On pourra faire opérer sur l'ensemble des plans transverses le groupe des automorphismes de E qui laissent P_0 invariant, ou bien commencer par dénombrer les plans qui coupent P_0 suivant une droite sachant qu'il y a $q^3 + q^2$ droites de E qui n'appartiennent pas à P_0 . Un argument plus expéditif consisterait enfin à se souvenir (voir l'exercice **0-B.11.41**) que l'ensemble des plans transverses à un plan P_0 est un espace affine dont l'espace vectoriel associé est donné par $\mathcal{L}(E/P_0, P_0)$; il est de dimension 4 et contient donc q^4 éléments...

c) Donner un exemple d'un quadruplet (P_1, P_2, P_3, P_4) de plans de l'espace E de dimension 4 sur \mathbb{K} tel que $P_i \cap P_j = \{0\}$ pour $i \neq j$. (Pour se convaincre que cela est bien possible, il est bon de se placer dans l'espace projectif de dimension trois).

d) Calculer le nombre k de plans transverses à 2 plans transverses (entre eux) P_1 et P_2 donnés.

INDICATION.— On montrera que le groupe des automorphismes de E qui laissent invariants P_1 et P_2 opère transitivement sur les plans transverses à P_1 et P_2 : pour cela, on montrera que, étant donné un tel plan, il existe une base de P_1 , soit (e_1, e_2) , et une base de P_2 , soit (v_1, v_2) , telles que $(e_1 + v_1, e_2 + v_2)$ soit une base du plan P ; on notera ensuite que le quadruplet (e_1, e_2, v_1, v_2) est défini à un automorphisme près du plan P_1 , comme on s'en apercevra en introduisant $p_{312}^{-1} \circ p_{321}$ [cf. remarque a) de **0-B.2.2**]. On trouve $k = (q^2 - 1)(q^2 - q)$ après avoir remarqué que les automorphismes de la forme $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ qui laissent invariant le plan $\langle e_1 + e_3, e_2 + e_4 \rangle$ sont exactement ceux qui vérifient $A = B$.

0-B.11.5. a) Montrer que, pour que deux quadruplets (P_i) et (P'_i) de plans transverses 2 à 2 soient conjugués sous l'action d'un même élément de $GL(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension 4, il faut et il suffit qu'une certaine classe d'endomorphismes diagonalisables de P_1 et de P_2 soient conjugués.

INDICATION.— Pour cela, on introduit comme dans le c) de l'exercice précédent les vecteurs e_i, v_i . Il existe alors k_1 et k_2 tels que $k_1 e_1 + v_1, k_2 e_2 + v_2$ soit une base de P_4 . L'application $(e_1, e_2) \mapsto (k_1 e_1, k_2 e_2)$ est définie à un automorphisme près dans P_1 , sa trace et son déterminant la caractérisent.

b) Calculer les valeurs k_1 et k_2 en fonction des coordonnées plückériennes des droites de l'espace projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ correspondant aux plans P_i .

c) Montrer que pour que le plan $\langle e_1 + v_1, e_2 + v_2 \rangle$ soit non transverse à $\langle k_1 e_1 + v_1, k_2 e_2 + v_2 \rangle$, il faut et il suffit que $k_1 \cdot k_2 + k_1 + k_2 + 1 = 0$, c'est-à-dire que $k_1 = -1$ ou $k_2 = -1$.

d) Montrer que les invariants (k_1, k_2) décrivent tout $\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ à l'exception des points $(0, 0)$, (∞, ∞) et des deux droites $X = -1$ et $Y = -1$.

e) Montrer que dans le cas réel, ceci témoigne du fait que l'espace E reste connexe quand on lui enlève trois plans transverses deux à deux.

INDICATION.— Remarquer que $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ s'identifie au tore et que le complémentaire dans le tore de l'ensemble formé par deux cercles qui se coupent est connexe.

0-B.11.6. Montrer que $[D_2, D_1, D_3, D_4] \cdot [D_1, D_2, D_3, D_4] = 1$.

INDICATION.— Considérer la figure

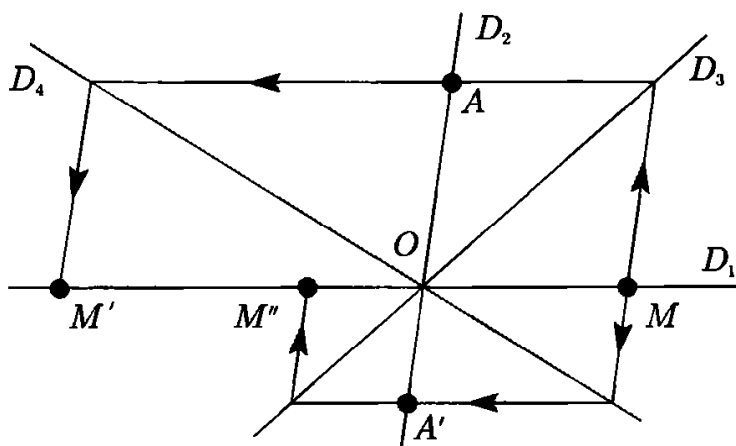


FIGURE 22

et noter que, d'après la remarque a) de 0-B.2.2, $OM^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OM'}$. Ceci dit, les endomorphismes $(M' \mapsto M \text{ et } A \mapsto A')$ de D_1 et de D_2 que l'on doit examiner sont conjugués grâce à l'isomorphisme $p_{412} \circ p_{241}$ de D_1 sur D_2 (qui envoie le point A sur M' et le point A' sur M). Ils ont donc même déterminant.

0-B.11.7. Donner, connaissant les trois droites D_1 , D_2 et D_3 , une construction de la droite D_4 telle que $[D_1, D_2, D_3, D_4] = -1$.

On verra au c) de l'exercice 0-B.11.41 une jolie interprétation de cette quatrième droite.

0-B.11.8. Montrer que $[D_1, D_2, D_3, D_4] + [D_1, D_3, D_2, D_4] = 1$.

INDICATION.— Considérer le dessin suivant.

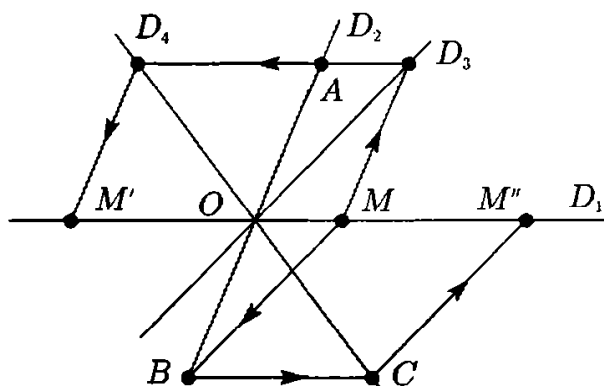


FIGURE 23

0-B.11.9. Montrer que si X et Y sont deux isométries du plan réel euclidien qui laissent invariant un carré donné, alors $XY = \pm YX$.

INDICATION.— On exhibera le groupe \mathcal{D}_4 des huit isométries qui conservent le carré et l'on constatera que le sous-groupe $\{\pm \text{Id}\}$ est distingué.

0-B.11.10. Déterminer les éléments d'ordre 2 dans \mathfrak{S}_4 ; en déduire le nombre des 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 .

INDICATION.— Le calcul du nombre des éléments d'ordre 2 peut se faire à partir des éléments de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ vérifiant $X^2 = \pm \text{Id}$. On trouve 14 éléments vérifiant $X^2 = \text{Id}$ et 6 éléments vérifiant $X^2 = -\text{Id}$; ce qui donne 6 + 3 éléments d'ordre 2 dans \mathfrak{S}_4 , qui correspondent aux 6 transpositions et aux 3 produits de 2 transpositions à supports disjoints. On trouve trois 2-Sylow.

0-B.11.11. Le groupe de Klein. Montrer que, dans \mathfrak{S}_4 , il y a un unique sous-groupe distingué d'ordre 4. Il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et sera noté \mathcal{V}_4 .

INDICATION.— Réalisé comme groupe des automorphismes de \mathbb{H}_8 , le groupe \mathfrak{S}_4 contient le groupe des automorphismes intérieurs de \mathbb{H}_8 , à savoir $\mathbb{H}_8 / \pm \text{Id}$, comme sous-groupe distingué et même caractéristique; ce sous-groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est le groupe¹⁸ formé par l'identité et les trois permutations évoquées dans l'exercice précédent, à

¹⁸ Le groupe \mathcal{V}_4 est appelé *groupe de Klein*. Par abus (et à tort), on notera parfois \mathcal{V}_4 un groupe quelconque isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

savoir (12)(34); (13)(24) et (14)(23). L'unicité provient du fait qu'un tel groupe doit être dans les trois 2-Sylow obligatoirement; c'est donc leur intersection.

Remarquons aussi que, lorsque le groupe \mathfrak{S}_4 est réalisé comme le groupe affine du plan \mathbb{F}_2^2 (justifier), le groupe de Klein n'est autre que le sous-groupe (distingué) des translations¹⁹.

0-B.11.12. Le groupe diédral \mathcal{D}_4 et les 2-Sylow de \mathfrak{S}_4

a) Montrer que dans un 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 , il y a 8 éléments dont 5 sont d'ordre 2.

b) Montrer qu'un 2-Sylow n'est pas cyclique, et par suite contient 2 éléments d'ordre 4 (on pourra se rappeler qu'un 2-Sylow contient le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de l'exercice précédent). En déduire qu'il n'est pas commutatif.

c) Montrer qu'étant donnée une transposition, il existe un unique 2-Sylow qui la contient. Quelle est l'autre transposition contenue dans le même 2-Sylow? Même question pour les cycles d'ordre 4. L'ensemble

$$\left\{ \text{Id}; (12); (34); (12)(34); (13)(24); (14)(23); \begin{pmatrix} 1234 \\ 3421 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1234 \\ 4312 \end{pmatrix} \right\}$$

donne un exemple d'un 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 . Vérifier qu'il est formé des éléments de \mathfrak{S}_4 qui conservent la forme quadratique non dégénérée $q(x) = x_1x_2 + x_3x_4$.

d) Le groupe diédral \mathcal{D}_n est le groupe des isométries d'un polygone régulier ayant n côtés. C'est le produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par le groupe à deux éléments

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{D}_n \xrightleftharpoons[\sigma]{\det} \{\pm 1\} \rightarrow \{1\},$$

où σ est déterminé par le choix d'une involution adéquate dans \mathcal{D}_n .

Montrer que les éléments de \mathcal{D}_4 sont les seules permutations des quatre sommets du carré qui se prolongent en des isométries du plan.

e) Montrer que les trois 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 sont isomorphes au groupe diédral \mathcal{D}_4 .

f) Montrer que le centre de \mathcal{D}_4 est $\pm \text{Id}$. (Utiliser le fait que $u \circ s_D \circ u^{-1} = s_{u(D)} \cdot$)

Vérifier que, lorsque \mathcal{D}_4 est réalisé comme un des trois 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 , l'élément non trivial de son centre est donné par le produit des deux transpositions qu'il contient.

¹⁹ Noter au passage que sur \mathbb{F}_2 , toutes les transformations affines sont directes : ne pas être tenté, donc, de réaliser \mathfrak{A}_4 comme le groupe des transformations affines directes ! Relever cependant l'existence d'un homomorphisme non trivial sur $GL(2, \mathbb{F}_2)$ à valeurs dans le groupe à deux éléments.

g) Montrer qu'un 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 est égal à son propre normalisateur.

INDICATION.— On pourra invoquer le fait que l'indice du normalisateur est égal au nombre des 2-Sylow, ou bien le fait que le normalisateur a un cardinal qui est un multiple de huit et un diviseur de 24, et qu'un 2-Sylow n'est pas distingué.

h) Dédurre alors de l'action de \mathfrak{S}_4 sur ses trois 2-Sylow la suite exacte

$$\{e\} \rightarrow \mathcal{V}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_3 \rightarrow \{e\}.$$

Retrouver cette suite exacte, que l'on appellera *suite exacte de Klein*, en considérant les isométries d'un tétraèdre régulier et leur action sur les trois perpendiculaires communes aux paires de deux arêtes opposés.

i) Montrer que le groupe dérivé de \mathcal{D}_4 est égal à son centre.

INDICATION.— Le groupe \mathcal{D}_4 a huit éléments et son quotient par son centre est un groupe (commutatif) à 4 éléments.

j) Quelle est la structure des 2-Sylow de \mathfrak{S}_5 ?

INDICATION.— C'est la même que pour $\mathfrak{S}_4 \subset \mathfrak{S}_5$.

0-B.11.13. Montrer qu'il y a dix sous-groupes dans \mathcal{D}_4 , dont cinq sont isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et deux isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

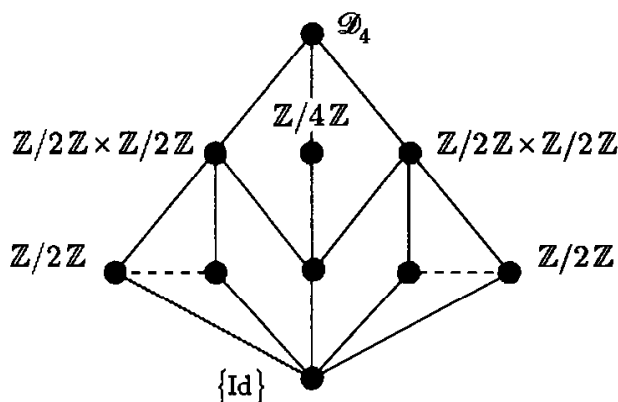


FIGURE 24

Remarque. Le groupe $\mathcal{V}_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de l'exercice 0-B.11.12 occupe dans les 2-Sylow une position particulière; en fait, il n'en est rien quand on regarde les sous-groupes de \mathcal{D}_4 . En effet, il existe un automorphisme (évidemment pas intérieur, vu que les 3 sous-groupes d'ordre 4 = $\text{Card}(\mathcal{D}_4)/2$ de \mathcal{D}_4 y sont distingués) qui permute les 2 sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: constater pour cela que les deux systèmes d'axes orthogonaux qui apparaissent dans la symétrie du carré sont échangés par une rotation d'angle $\pi/4$ (cf. exercice 0-B.11.31). Il est relativement facile de démontrer que le groupe des automorphismes de \mathcal{D}_4 est \mathcal{D}_4 lui-même (par exemple, en remarquant que \mathcal{D}_4 est distingué dans \mathcal{D}_8). Pour les groupes

diédraux \mathcal{D}_n généraux, le groupe des automorphismes est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ après identification de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ au groupe $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (remarquer qu'un automorphisme est entièrement caractérisé par l'image de la rotation d'angle π/n et par l'image d'une symétrie droite).

Par contre, il n'existe pas d'automorphisme de \mathfrak{S}_4 qui conjugue les deux sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'un même \mathcal{D}_4 . Il est clair que c'est vérifié pour les automorphismes intérieurs, vu que l'un de ces deux groupes est le groupe distingué \mathcal{V}_4 . Mais en fait, \mathcal{V}_4 est caractéristique dans \mathfrak{S}_4 . (Remarquer qu'un automorphisme envoie toujours un sous-groupe distingué sur un sous-groupe distingué, ce dernier point résultant du fait que lorsqu'un groupe opère, l'ensemble des points fixes d'un de ses sous-groupes est invariant sous l'action du normalisateur de ce sous-groupe.)

0-B.11.14. a) Montrer que le centre de \mathfrak{S}_n est réduit à Id dès que $n \geq 3$.

[Utiliser le fait que $\sigma \circ \tau_{ij} \circ \sigma^{-1} = \tau_{\sigma(i)\sigma(j)}$, ou bien voir c) plus bas.]

b) Montrer que le groupe dérivé de \mathfrak{S}_4 est égal à \mathfrak{A}_4 et que celui de \mathfrak{A}_4 est le groupe \mathcal{V}_4 . (On utilisera par exemple le fait que si N est distingué dans G , alors $D(G/N) = D(G)N/N$, et le fait que $D(GL(2, \mathbb{F}_3)) = SL(2, \mathbb{F}_3)$ et que $D(SL(2, \mathbb{F}_3)) = \mathbb{H}_8$.)

c) Montrer que si une permutation σ a un *seul* point fixe x_0 , alors le centralisateur de σ est contenu dans le stabilisateur de x_0 . Prouver alors par des choix adéquats de telles permutations que les centres de \mathfrak{S}_n et de \mathfrak{A}_n sont réduits à Id sauf pour $n = 2$ et $n = 3$ respectivement.

0-B.11.15. a) Montrer que dans \mathfrak{S}_4 , il y a quatre 3-Sylow et huit éléments d'ordre 3. (On pourra voir cela à partir de $GL(2, \mathbb{F}_3)$, ou bien directement en exhibant 3 éléments au moins d'ordre 3 comme (123) ou (124) ou (234) et appliquer Sylow.)

b) Montrer que, dans \mathfrak{S}_4 , il y a quatre sous-groupes d'ordre 6, qui ne sont autres que les stabilisateurs de points dans l'action de \mathfrak{S}_4 sur $\{1, 2, 3, 4\}$; ils sont tous isomorphes à \mathfrak{S}_3 . (Le 3-Sylow du sous-groupe à six éléments est un des quatre 3-Sylow de \mathfrak{S}_4 ; son normalisateur est d'indice 4.)

c) Montrer que l'intersection de deux d'entre eux est l'un des 6 sous-groupes, d'ordre 2, engendrés par une transposition.

d) Quelle est l'intersection d'un 2-Sylow et d'un sous-groupe d'ordre six ?

e) Montrer que la suite exacte de Klein est scindable et qu'elle admet en fait quatre scindages.

INDICATION.— Le sous-groupe distingué \mathcal{V}_4 admet quatre compléments²⁰,

²⁰ Dès lors qu'on remarque que les trois éléments d'ordre 2 de \mathcal{V}_4 ne laissent fixe aucun point de $\{1, 2, 3, 4\}$, il est facile d'établir que le groupe \mathfrak{S}_4 des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$ est produit semi-direct interne de \mathcal{V}_4 et du stabilisateur du point 1

à savoir les sous-groupes \mathfrak{S}_3 ; remarquer au passage que ces compléments sont tous conjugués.

f) Quelle est l'interprétation des quatre sous-groupes \mathfrak{S}_3 dans la géométrie du tétraèdre régulier ?

0-B.11.16. a) Quelle est l'intersection de \mathfrak{A}_4 et d'un 2-Sylow particulier de \mathfrak{S}_4 ? (Remarquer que \mathcal{V}_4 est inclus dans \mathfrak{A}_4 ; on trouve exactement \mathcal{V}_4 .)

b) Déterminer l'intersection de \mathfrak{A}_4 avec l'un quelconque des 3 sous-groupes de \mathfrak{S}_4 isomorphes à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. (Penser à la signature : on obtient à chaque fois un sous-groupe différent des 3 sous-groupes d'ordre 2 de \mathcal{V}_4 .)

0-B.11.17. Déterminer les sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_4 . (On trouve \mathfrak{S}_4 , \mathfrak{A}_4 , \mathcal{V}_4 et $\{\text{Id}\}$.)

0-B.11.18. Le groupe des automorphismes de \mathcal{V}_4 . a) Montrer que tout automorphisme non trivial de \mathcal{V}_4 est extérieur, et que le groupe des automorphismes de \mathcal{V}_4 est isomorphe à \mathfrak{S}_3 .

INDICATION.— Se rappeler que \mathcal{D}_4 et \mathfrak{A}_4 sont des produits semi-directs de \mathcal{V}_4 et de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ respectivement (voir aussi la remarque qui suit l'exercice **0-A.6.28**).

b) Montrer que le produit semi-direct de \mathcal{V}_4 et de son groupe d'automorphismes est un groupe à 24 éléments isomorphe à \mathfrak{S}_4 .

c) Le groupe $GL(2, \mathbb{F}_2)$ est isomorphe à \mathfrak{S}_3 (cf. exercice **0.11.10**). Y a-t-il un lien avec ce qui précède ?

0-B.11.19. a) Montrer que \mathfrak{S}_4 est engendré par 2 quelconques de ses 2-Sylow.

b) Montrer que \mathfrak{S}_4 est engendré par les transpositions $(12); (23); (34)$ ou encore par 4 quelconques des 6 transpositions, ou par 3 quelconques des 6 cycles d'ordre 4.

0-B.11.20. Réaliser le treillis des sous-groupes de \mathfrak{S}_4 , en commençant par « placer », avant toute relation d'incidence, l'ensemble des 30 boules correspondant aux différents sous-groupes de \mathfrak{S}_4 .

INDICATION.— Placer évidemment sur un même niveau horizontal tous les sous-groupes de même cardinal. Il y a un seul sous-groupe d'ordre 12, trois sous-groupes isomorphes au groupe \mathcal{D}_4 , quatre \mathfrak{S}_3 , trois $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, trois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ autres que le groupe de Klein, quatre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et six

par exemple, et que le quotient de \mathfrak{S}_4 par \mathcal{V}_4 est donc donné par \mathfrak{S}_3 (cf. exercice **0.11.69**).

sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ autres que les trois qui figurent dans \mathcal{V}_4 . Pour tracer les relations d'incidence, on reconnaît une configuration tétraédrale ayant pour sommets les quatre sous-groupes \mathfrak{S}_3 : chacun des six sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ précédents portera le nom d'une arête et sera inclus dans les deux sous-groupes \mathfrak{S}_3 qui sont nommés par les extrémités de l'arête; quant aux trois sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auxquels il a été fait allusion plus haut, ils correspondront aux trois perpendiculaires communes aux paires d'arêtes opposées, et chacun d'eux contiendra, d'une part les deux sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspondant à la paire d'arêtes qui le caractérise, et d'autre part un différent parmi les trois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du groupe de Klein, celui précisément qui est contenu dans le $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ qui vit avec notre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans le même 2-Sylow. On vérifiera ainsi que sur chacun des neuf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ arrivent trois relations d'incidence du graphe, et qu'il en part évidemment une. La présence de cette configuration tétraédrale est moins énigmatique que celle de la configuration cubique parmi les sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$: en effet, à chaque « élément » du tétraèdre, correspond son stabilisateur dans le groupe des isométries²¹. On notera cependant que le groupe des automorphismes de \mathfrak{S}_4 est le même que le groupe des isométries qui laissent invariant le tétraèdre régulier, en l'occurrence \mathfrak{S}_4 , de même que l'on avait noté que le groupe des isométries du cube est le même que le groupe des automorphismes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

Remarques

- a) On aura noté que, pour tout diviseur d de l'ordre de \mathfrak{S}_4 il existe un sous-groupe d'ordre d de \mathfrak{S}_4 . Cette propriété est encore vraie dans le cas de \mathfrak{S}_3 , mais cesse de l'être au-delà de \mathfrak{S}_5 : il est facile par exemple de démontrer qu'il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 15 dans \mathfrak{S}_5 (on pourra montrer²² qu'un tel sous-groupe est nécessairement dans \mathfrak{A}_5 , puis utiliser l'exercice 0.11.17). On démontre que si un groupe G vérifie cette propriété-là, il est nécessairement résoluble (cf. [Hal], page 144).
- b) Lorsque le groupe \mathfrak{S}_4 est réalisé comme le groupe des isométries directes du cube, le nombre (égal à treize) des sous-groupes cycliques maximaux dans \mathfrak{S}_4 correspond aux treize axes des (vingt-trois) rotations qui

²¹ Il est à noter que le même procédé dans le groupe des isométries du cube pose des problèmes : les stabilisateurs des huit sommets du cube dans le groupe des isométries ne donnent en fait que quatre des huit sous-groupes \mathfrak{S}_3 de $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cf. exercices 0-A.6.44 et 0-A.6.43); les quatre autres sont obtenus comme les isométries directes qui stabilisent une quelconque grande diagonale. Existe-t-il pour autant une configuration cubique parmi les sous-groupes de ce groupe ?

²² Un autre raisonnement possible consiste à constater qu'un tel groupe devrait être contenu dans le normalisateur de son unique 5-Sylow, lequel normalisateur est d'ordre 20.

conservent le cube. Les trois axes médiateurs des faces opposées, les quatre (grandes) diagonales et les six axes passant par le centre et par les milieux des arêtes définissent le bouquet de droites associé au cube. Les nombres trois, sept et treize correspondent aux sous-groupes cycliques (éventuellement maximaux) de \mathcal{V}_4 , \mathcal{A}_4 et \mathcal{S}_4 . Ces mêmes nombres se retrouvent dans la figure plane donnée par un triangle, ses quatre centres de cercles inscrit et exinscrits, et les six pieds des bissectrices intérieures et extérieures. En ne gardant de cette figure que ses propriétés projectives, on obtient la configuration projective associée au bouquet de droites précédent. Il serait intéressant d'obtenir la configuration projective de trente et un points associée au groupe \mathcal{A}_5 , réalisé comme groupe des déplacements de l'icosaèdre...

0-B.11.21. a) Montrer que, dans un espace vectoriel E de dimension 2 sur \mathbb{F}_q , il y a $(q+1)^4$ quadruplets de droites et $(q+1)q(q-1)(q-2)$ quadruplets de droites distinctes.

b) Montrer que le nombre d'orbites du groupe \mathcal{S}_4 sur \mathcal{D} est égal à l'entier $(q+1)q(q-1)(q-2)/24$.

c) Montrer qu'il y a $6(q+1)q(q-1)$ quadruplets de droites dont 2 droites exactement sont les mêmes. On notera leur ensemble \mathcal{D}^I . Montrer que le nombre d'orbites du groupe \mathcal{S}_4 sur \mathcal{D}^I est égal à $(q+1)q(q-1)/2$.

d) Montrer qu'il y a $4(q+1)q$ quadruplets de droites dont 3 exactement sont les mêmes. Déterminer le nombre d'orbites du groupe \mathcal{S}_4 sur leur ensemble \mathcal{D}^{II} . (On trouve $(q+1)q$.)

e) Montrer qu'il y a $3(q+1)q$ quadruplets de droites dont deux couples sont égaux, (comme (D, D, D', D') par exemple), et que le groupe \mathcal{S}_4 a $(q+1)q/2$ orbites sur leur ensemble \mathcal{D}^{III} .

f) Montrer qu'il y a $(q-2)$ orbites de $GL(E)$ sur \mathcal{D} , contenant chacune $\text{Card}(PGL(E)) = (q+1)q(q-1)$ éléments, et 6 orbites sur \mathcal{D}^I contenant $(q+1)q(q-1)$ éléments, 4 orbites sur \mathcal{D}^{II} contenant chacune $q(q+1)$ éléments, 3 orbites sur \mathcal{D}^{III} contenant chacune $q(q+1)$ éléments, et enfin une orbite sur \mathcal{D}^{IV} contenant $(q+1)$ quadruplets.

g) Combien de quadruplets de droites distinctes ont-ils pour birapport un scalaire (adéquat) donné ?

0-B.11.22. a) Dans le cas de \mathbb{F}_5 , montrer que les 360 quadruplets de droites distinctes sont répartis en 3 orbites sous l'action de $GL(2, \mathbb{F}_5)$ et 15 orbites sous l'action de \mathcal{S}_4 . Les orbites sous l'action de $GL(2, \mathbb{F}_5)$ contiennent chacune 120 éléments et sont indexées par les birapports 2, $1/2$ et -1 .

b) Montrer qu'étant donnés deux quadruplets portant sur les mêmes droites distinctes de \mathbb{F}_5^2 et ayant même birapport, on peut passer de l'un à l'autre par une permutation dont l'ordre divise quatre.

INDICATION.— La permutation est dans le stabilisateur dans \mathfrak{S}_4 d'un birapport; celui-ci est d'ordre $24/3$, c'est donc un 2-Sylow.

c) Montrer que tout 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 opère sur les 3 birapports dans $\{2, 1/2, -1\}$ en laissant fixe l'un d'entre eux et en permutant les deux autres. (Ceci exprime aussi que \mathfrak{S}_4 opère doublement transitivement sur ses 2-Sylow, comme il résulte clairement du fait que le normalisateur d'un 2-Sylow dans \mathfrak{S}_4 est lui-même.) On peut voir aussi cela en remarquant que \mathfrak{S}_4 est engendré par deux de ses 2-Sylow et que si un 2-Sylow laissait fixe les 3 birapports, chaque 2-Sylow le ferait aussi, et donc également \mathfrak{S}_4 .

d) En déduire que chaque intersection d'une orbite de $GL(2, \mathbb{F}_5)$ sur \mathcal{D} avec une orbite de \mathfrak{S}_4 sur \mathcal{D} est l'orbite d'un 2-Sylow bien choisi, et que chaque orbite contient exactement 8 éléments.

e) Montrer que le noyau de l'action est \mathcal{V}_4 .

0-B.11.23. a) Montrer que dans le cas du corps \mathbb{F}_3 , les 24 quadruplets de droites distinctes forment une orbite sous l'action de \mathfrak{S}_4 et une orbite sous l'action de $GL(2, \mathbb{F}_3)$.

b) Montrer que dans le cas du corps \mathbb{F}_7 , on trouve 1680 quadruplets de droites distinctes, répartis en 5 orbites sous l'action de $GL(2, \mathbb{F}_7)$. Vérifier que ces orbites contiennent chacune 336 éléments, qu'elles sont indexées par 2, 3, 4, 5 ou 6, et que le groupe \mathfrak{S}_4 agit sur $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ avec 2 orbites : $\{2, 6, 4\}$ et $\{3, 5\}$. Le stabilisateur d'un point est ou bien \mathfrak{A}_4 , ou bien un 2-Sylow; le noyau de l'action est \mathcal{V}_4 .

c) Montrer que dans \mathcal{D} l'intersection d'une orbite de $GL(2, \mathbb{F}_7)$ avec une orbite de \mathfrak{S}_4 contient 8 ou 12 éléments.

d) Montrer que, dans le cas de \mathbb{F}_4 , les 120 quadruplets sont répartis en deux orbites sous l'action de $GL(2, \mathbb{F}_4)$, orbites indexées par α et α^2 où $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$ et α est une racine de $X^2 + X + 1$. Le noyau de l'action est \mathfrak{A}_4 . L'intersection d'une orbite de \mathfrak{S}_4 avec une orbite de $GL(2, \mathbb{F}_4)$ contient 12 éléments.

e) Dans le cas de \mathbb{F}_9 , on trouve 5040 quadruplets de droites distinctes répartis en 7 orbites sous l'action de $GL(2, \mathbb{F}_9)$, orbites contenant chacune 720 éléments et paramétrées par $\{-1, \alpha, 1 + \alpha, \alpha - 1, 1 - \alpha, -(1 + \alpha), -\alpha\}$ où $\alpha^2 = -1$. Il y a, sur l'ensemble formé par ces 7 birapports, 2 orbites sous l'action de \mathfrak{S}_4 , l'orbite réduite au point -1 et le reste. Montrer que l'ensemble des quadruplets de birapport -1 est la réunion de 30 orbites sous l'action de \mathfrak{S}_4 .

0-B.11.24. Montrer que l'action de \mathfrak{S}_4 sur l'espace $GL(2, \mathbb{F}_q) \backslash \mathcal{D}^I$ est transitive, et que l'on trouve comme stabilisateurs des sous-groupes d'ordre 4, stabilisateurs qui ne sont autres que les sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ différents du sous-groupe de Klein \mathcal{V}_4 . On rencontre les 2-Sylow dans l'action sur $GL(2, \mathbb{F}_q) \backslash \mathcal{D}^{III}$ et les sous-groupes d'ordre 6 dans l'action sur $GL(2, \mathbb{F}_q) \backslash \mathcal{D}^I$.

0-B.11.25. a) Soit G un groupe opérant sur un espace vectoriel V . On suppose que V possède une forme bilinéaire notée B , invariante sous l'action des éléments de G , c'est-à-dire telle que $B(g \cdot v, g \cdot w) = B(v, w)$ pour v et w parcourant V et g aussi quelconque dans G . On suppose par ailleurs que l'espace vectoriel V est la somme de deux représentations irréductibles de G , soit $V = V_1 \oplus V_2$, telles que la représentation ρ_1 sur V_1 ne soit pas équivalente à la représentation contragrédiente de ρ_2 , opérant sur V_2^* (²³). Montrer que les sous-espaces V_1 et V_2 sont orthogonaux pour B .

INDICATION.— Dans le cas contraire, l'orthogonal de V_1 , qui est stable pour G , couperait V_2 suivant $\{0\}$. On aurait donc une dualité non dégénérée entre V_1 et V_2 , d'où un isomorphisme entre V_1 et le dual de V_2 qui, du fait de l'invariance de B , commuterait avec les actions de G .

b) On considère le cas du groupe $G = \mathfrak{S}_n$ opérant sur \mathbb{C}^n , et l'on prend pour B l'une ou l'autre des deux formes quadratiques (invariantes) données par $\sum_i x_i^2$ ou $2 \sum_{i < j} x_i x_j$. Les matrices S et S_0 de ces formes quadratiques sont respectivement la matrice identité et la matrice qui a des 1 partout en dehors de la diagonale et des zéros sur celle-ci.

Vérifier que les sous-espaces D et Z rencontrés dans l'exercice 0.11.66 (que l'on notera D_n et Z_n pour rappeler, si nécessaire, l'espace où ils vivent) sont bien orthogonaux pour chacune des deux formes quadratiques.

INDICATION.— On se doit clairement d'appliquer la question précédente. On peut cependant constater, par exemple, que la matrice S_0 , ayant des lignes de poids constant, admet la droite D comme direction propre; par suite, l'orthogonal de D pour S_0 est le même que l'orthogonal de D pour le produit scalaire S . On peut aussi remarquer que la somme des deux formes quadratiques est donnée par le carré de l'équation de l'hyperplan Z .

c) On suppose que $n = 3$, et on considère la conique du plan projectif associée au cône isotrope de la forme quadratique S_0 . Montrer que les points de Frégier des trois involutions définies par les trois transpositions de

²³ Cette représentation est définie pour $\tau \in V^*$ par $\rho(g)(\tau) = {}^t\rho(g)^{-1}(\tau)$, autrement dit $\rho(g)(\tau)(v) = \tau(\rho(g)^{-1}v)$.

\mathfrak{S}_3 sont alignés et se trouvent précisément dans la droite du plan projectif définie par Z .

INDICATION.— La droite définie par Z rencontre la conique en deux points distincts (la restriction de la forme quadratique à Z est non dégénérée, son cône isotrope est formé de deux droites), qui sont permutés par chacune des involutions; la droite qu'ils définissent passe par les points de Frégier.

d) Montrer que pour $n \geq 3$ la représentation ρ_n de \mathfrak{S}_{n+1} sur Z_{n+1} et la représentation $\epsilon\rho_n$ (où ϵ est la signature) ne sont pas équivalentes.

INDICATION.— Elles n'ont pas le même caractère; en effet, la trace d'une transposition agissant sur \mathbb{C}^{n+1} étant égale à $n-1$, la trace de sa restriction à Z_{n+1} vaut $n-2$, et est donc non nulle.

e) On a rencontré jusqu'à présent trois représentations irréductibles de \mathfrak{S}_4 : la représentation triviale, la représentation donnée par la signature ϵ et la représentation ρ_3 sur l'hyperplan Z_4 de \mathbb{C}^4 . En voici deux autres: la représentation $\epsilon\rho_3$, et la représentation $\pi_2 = \rho_2 \circ s$ (où $s: \mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_4/\mathcal{V}_4 \simeq \mathfrak{S}_3$ est l'homomorphisme surjection canonique, lequel est induit par l'action de \mathfrak{S}_4 sur ses trois 2-Sylow – voir l'exercice 0-B.11.12) opérant sur l'hyperplan Z_3 de \mathbb{C}^3 . On verra au chapitre 2 que le fait que la somme des carrés des dimensions de ces cinq représentations est égale à $24 = \text{Card}(\mathfrak{S}_4)$ prouve qu'on les a toutes! Aussi, vérifier que les deux représentations π_2 et $\epsilon\pi_2$ sont équivalentes.

(On notera d'abord que, le groupe de Klein étant formé de permutations paires, la signature sur \mathfrak{S}_4 se factorise par s et donne par passage au quotient la signature de \mathfrak{S}_3 . Il s'agit ensuite de l'établir pour \mathfrak{S}_3 en vérifiant par exemple — et c'est suffisant, cf. chapitre 2 — qu'ils ont même caractère: chaque transposition étant de trace égale à 1 dans \mathbb{C}^3 , sa restriction à Z_2 est donc de trace nulle.)

f) Montrer que les sous-groupes de $GL(2, \mathbb{C})$ qui sont isomorphes à \mathfrak{S}_3 sont tous conjugués²⁴.

INDICATION.— Un tel sous-groupe G agit de façon irréductible sur \mathbb{C}^2 , car sinon il laisserait une droite stable, et donc aussi son orthogonal (pour un produit hermitien invariant par G) et serait donc diagonal, donc commutatif! On conclut en admettant qu'il n'y a qu'une représentation irréductible (à équivalence près) de dimension 2 de \mathfrak{S}_3 .

g) Il est amusant de noter que les sous-groupes de $GL(2, \mathbb{C})$ qui sont isomorphes à \mathbb{S}^3 sont aussi tous conjugués²⁵.

INDICATION.— Il s'agit évidemment (voir par exemple [Mn-Ts]) de la structure de groupe sur la sphère \mathbb{S}^3 , qui en fait un groupe de Lie isomorphe

²⁴ Le lecteur familier avec les systèmes de racines pourra s'interroger sur les implications de tout cela au niveau des systèmes de type A_2 et G_2 .

²⁵ On a là un exemple d'homonymie mathématique!

à $SU(2)$. Celui-ci, étant compact, est donc conjugué à un sous-groupe K du groupe $U(2)$, car ce dernier est « le » compact maximal de $GL(2, \mathbb{C})$. Comme $SU(2)$ est égal à son sous-groupe dérivé, le sous-groupe K est donc contenu dans le groupe dérivé de $U(2)$, c'est-à-dire dans $SU(2)$. Le groupe K , qui a même dimension que $SU(2)$, y est donc ouvert; or, il y est aussi fermé. On conclut sachant que $SU(2)$ est connexe.

0-B.11.26. Identification de $\mathbb{P}(E)$ avec $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Il s'agit de préserver le birapport : dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, il y a trois éléments privilégiés, à savoir $\infty, 0, 1$, que nous écrivons dans le sens indiqué pour des raisons que l'on va comprendre ci-dessous. Pour chaque triplet de points A_1, A_2, A_3 dans $\mathbb{P}(E)$, on a une identification Φ_{A_i} de $\mathbb{P}(E)$ avec $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ en posant $[A_1, A_2, A_3, M] = [\infty, 0, 1, \Phi(M)]$.

a) Montrer que lorsque E est l'espace \mathbb{C}^2 rapporté à sa base canonique, l'application est l'identité.

b) Montrer que le choix d'un triplet (B_1, B_2, B_3) définit une identification Φ_{B_i} , qui diffère de la première par la composition d'une application homographique.

c) Montrer que si l'on définit quatre points de $\mathbb{P}(E)$ comme cocycliques en exprimant que leur birapport est réel, ceci équivaut à exprimer que dans une identification quelconque de $\mathbb{P}(E)$ avec $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, ce dernier identifié lui-même à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, les quatre points sont cocycliques en ce sens qu'ils appartiennent à un même cercle, ou à une même droite du plan complexe auquel on a adjoint un point à l'infini. Noter que cette façon de procéder éclaire moins bien la situation que celle proposée dans le texte de la note et qui consiste à passer par la projection stéréographique définie de façon intrinsèque, cette dernière faisant voir la structure riemannienne du plan (union le point à l'infini) à partir de celle induite sur la sphère des projecteurs hermitiens (réalisée dans l'espace affine des opérateurs de trace égale à 1) par la forme $-\det$ donnée sur l'espace vectoriel des opérateurs hermitiens de trace nulle. (Cf. section 0-B.8.6.)

d) Montrer que si quatre points non alignés dans le plan vérifient $[A, B, C, D] = -1$, alors ces points sont sur un même cercle, et de plus, si I est le milieu de BC , on a $IB^2 = IC^2 = IA \cdot ID$ ou aussi, de façon équivalente, que BC est bissectrice de l'angle \widehat{AID} , ou encore que le pôle de BC (par rapport au cercle) appartient à AD .

0-B.11.27. Soit (C) un cercle du plan et A un point quelconque. Déterminer, quand M décrit le cercle, le lieu du point d'intersection I de la médiatrice de AM avec la tangente en M au cercle (C) .

INDICATION.— Le cercle passant par M et centré en I est orthogonal à (C) . La puissance du centre O de (C) par rapport à ce cercle est égale à R^2 et vaut $OA \cdot OA'$, où A' est le conjugué de A par rapport à (C) . Le lieu est donc la médiatrice de AA' .

0-B.11.28. Soit AA' et BB' deux diamètres orthogonaux d'un cercle (C) de centre O et soit M un point quelconque du plan.

a) Montrer que les cercles (MAA') et (MBB') se coupent en un point $h(M)$ aligné avec les points O et M .

b) Vérifier, dans ce cas, l'énoncé de la proposition **0-B.8.3.2**.

0-B.11.29. a) Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

INDICATION.— On trouve 7 sous-groupes d'ordre 2 et 7 sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; remarquer que chaque élément d'ordre 2 est contenu dans 3 sous-groupes d'ordre 4 et que chaque sous-groupe d'ordre 4 contient 3 éléments d'ordre 2. (Voir aussi l'exercice suivant.)

b) Montrer que tout homomorphisme injectif de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans le groupe des homographies (composante neutre du groupe circulaire) se prolonge de façon unique en un homomorphisme injectif du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si l'on décide d'envoyer l'élément $(1, 1, 1)$ sur une involution sans point fixe.

c) Montrer qu'il n'existe pas dans le groupe homographique de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Ceci supposerait l'existence d'une involution qui commute avec les 3 involutions de points fixes A et A' , respectivement B et B' , respectivement C et C' . La polaire de son point de Frégier doit passer par chacun des 3 points de Frégier des involutions u_a, u_b et u_c , ce qui oblige a , b et c à être alignés; il n'en est rien, puisque la polaire de a est la droite passant par b et c .

0-B.11.30. Les automorphismes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. a) Montrer que les sous-groupes du groupe additif $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ sont exactement les sous-espaces vectoriels du \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. En déduire qu'il y a $2^n - 1$ sous-groupes d'ordre 2 et autant de sous-groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(n-1)}$ dans le groupe additif $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

b) Montrer que le groupe des automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est donné par $GL(3, \mathbb{F}_2)$. Ce groupe n'est autre que le groupe simple à 168 éléments. (Voir d'une part la remarque qui suit l'exercice **0.11.18** et d'autre part l'exercice **0.11.17**.)

c) Montrer que les 2-Sylow de $GL(3, \mathbb{F}_2)$ sont isomorphes au groupe \mathcal{D}_4 .

INDICATION.— On pourra compter dans le groupe (non commutatif) $T(3, \mathbb{F}_2)$ les éléments qui ne sont pas d'ordre 2.

d) Montrer que le groupe $GL(3, \mathbb{F}_2)$ contient vingt-et-un 2-Sylow, vingt-huit 3-Sylow et huit 7-Sylow.

INDICATION.— On pourra montrer qu'il y a dans ce groupe 56 éléments

d'ordre trois, tous conjugués à la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

0-B.11.31. a) On se place dans le cadre du plan affine euclidien \mathcal{E}_2 . Montrer qu'étant donnés deux axes orthogonaux Δ_1 et Δ_2 se coupant en Ω , les symétries S_{Δ_1} , S_{Δ_2} et S_{Ω} forment avec l'identité de \mathcal{E}_2 un sous-groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du groupe des isométries de \mathcal{E}_2 , et que les sous-groupes du groupe des isométries de \mathcal{E}_2 isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont tous obtenus de cette façon-là et sont donc conjugués.

b) Montrer que les sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du groupe des isométries de l'espace affine euclidien \mathcal{E}_3 se répartissent en trois classes de conjugaison, associées naturellement à des systèmes de trois axes orthogonaux, de deux plans orthogonaux, ou enfin d'une droite et d'un plan orthogonaux. Qu'en est-il des sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

c) Examiner les classes de conjugaison des sous-groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans le groupe des homographies. En donner une interprétation géométrique au moyen des triquadrangles harmoniques.

0-B.11.32. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. a) Dessiner le graphe du treillis des sous-groupes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier.

INDICATION.— Il y a $p + 1$ sous-groupes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donc autant que de droites dans le plan sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b) En déduire que, dans le groupe $G = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, il y a exactement $p + 1$ sous-groupes d'ordre p .

INDICATION.— On peut compter les éléments d'ordre p , ou bien montrer que tout sous-groupe d'ordre p est contenu dans $G^{(p)} = \{c \in G : pc = 0\} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

c) Dessiner le graphe du treillis des sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

INDICATION.— On relèvera la présence de deux sous-groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et d'un seul sous-groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) Montrer que le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.

e) Dessiner le graphe du treillis des sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

INDICATION.— Les deux sous-groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ se coupent suivant un sous-groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

f) Montrer que le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$. Généraliser (on pensera aux classes de -1 et de 5).

g) Résoudre l'équation $\varphi(x) = 16$, où φ désigne l'indicateur d'Euler.

INDICATION.— On trouve $x = 17, 32, 34, 40, 48, 60$. Attention, seuls les deux groupes $(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z})^*$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

h) Pourquoi $\varphi(n)$ est-il pair dès que $n \geq 3$?

INDICATION.— Le nombre $\varphi(n)$ n'est autre que le cardinal du groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ce groupe contient un élément d'ordre 2 (la classe de -1).

i) Montrer enfin que le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est donné par le groupe diédral \mathcal{D}_4 .

INDICATION.— L'élément $(0, 2)$ est laissé fixe par tous les automorphismes. Un automorphisme est caractérisé par les images de $(1, 0)$ et de $(0, 1)$. Enfin, il y a exactement cinq automorphismes qui sont d'ordre 2.

Remarque. L'exercice qui s'achève examine le dernier groupe d'ordre 8 non encore traité. Il serait bon à ce stade de dresser côte à côte les graphes des treillis (des sous-groupes) des cinq groupes d'ordre 8 et de voir ce qui les caractérise les uns par rapport aux autres. Vérifier, pour chacun de ces groupes, les résultats de l'exercice 0-A.6.49. Le lecteur devrait tenter maintenant, s'il ne l'a pas encore fait, de justifier pourquoi il n'y a pas d'autres groupes d'ordre 8 que les *cinq* groupes déjà rencontrés. Il pourra prouver aussi qu'il y a (toujours à isomorphisme près) deux groupes d'ordre 9 et cinq groupes d'ordre 12. (Voir pour complément d'information [Hal], page 52.)

0-B.11.33. Cet exercice se présente naturellement lors de l'étude des orbites dans $M(n, \mathbb{K})$ sous l'action $(P, D) \star M = PMD^{-1}$, où P est une matrice inversible quelconque et D une matrice diagonale inversible. On s'intéressera au cas où $n = 3$, la généralisation au cas des matrices d'ordre quelconque étant facile.

a) Examiner dans un premier temps l'action de $GL(3, \mathbb{K})$ sur les triplets de vecteurs (C_1, C_2, C_3) de \mathbb{K}^3 , pour en déduire que le nombre des orbites respectives de l'action initiale \star sur les matrices de rang 0, 1, 2 et 3 est égal à 1, 7, 7 et 1.

b) Noter que les orbites de l'action \star se répartissent en paquets ayant le même nombre d'éléments que les paquets de sous-groupes isomorphes du groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Voyez-vous une explication ?

INDICATION.— Constater que dans le cas du corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il n'y a pas beau-

coup de matrices diagonales inversibles, et penser aux remarques qui suivent la proposition 0.4.3.2.

0-B.11.34. Soit G un groupe opérant continûment sur l'espace topologique X . On note φ l'homomorphisme naturel de G dans le groupe des permutations de l'ensemble des composantes connexes de X .

a) Déterminer φ dans le cas de l'action sur $X = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ du groupe \mathfrak{S}_3 réalisé comme groupe des transformations $z \mapsto 1/z, z \mapsto z - 1, \dots$ (On pourra constater que seule l'identité induit l'application triviale.)

b) Même question pour le groupe \mathfrak{S}_4 opérant sur les birapports décrivant $X = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

0-B.11.35. Calculer le déterminant de l'application linéaire $q \mapsto q \circ u$, où u est un opérateur linéaire et q une forme quadratique.

0-B.11.36. Soit E un espace de dimension 3 sur le corps \mathbb{K} . On considère l'ensemble Δ des drapeaux de E , c'est-à-dire l'ensemble des couples (D, P) où D est une droite contenue dans le plan P .

a) Montrer que $GL(E)$ opère transitivement sur Δ ; en déduire que le quotient $GL(3, \mathbb{K})/T(3, \mathbb{K})$ (où le groupe par lequel on quotiente est le groupe des matrices triangulaires supérieures) s'identifie à Δ .

b) On considère l'action de $GL(E)$ sur $\Delta \times \Delta$. Montrer que l'on a six orbites.

INDICATION.— On trouve les couples $(D_1, P_1); (D_2, P_2)$ tels que i) $P_1 = P_2$ et $D_1 = D_2$; ii) $P_1 = P_2$ et $D_1 \neq D_2$; iii) $P_1 \neq P_2$ et $D_1 = D_2 = P_1 \cap P_2$; iv) $P_1 \neq P_2, D_1 = P_1 \cap P_2$ et $D_1 \neq D_2$; v) $P_1 \neq P_2, D_2 = P_1 \cap P_2$ et $D_1 \neq D_2$; vi) $P_1 \neq P_2$ et D_1 et D_2 différents de $P_1 \cap P_2$.

c) Soit $\underline{D} = D(E)$ le sous-groupe de $GL(E)$ formé des matrices diagonales. Déterminer le normalisateur \underline{N} de \underline{D} dans $GL(E)$. (Un élément N de \underline{N} vérifie que quelle que soit D diagonale, il existe D' diagonale telle que $ND = D'N$; constater alors que si un élément n_{ij} de N est non nul, les autres coefficients de la ligne i et de la colonne j sont nuls.) Montrer que $\underline{N}/\underline{D} \simeq \mathfrak{S}_3$.

d) On identifie le groupe \mathfrak{S}_3 au groupe des matrices de permutation. Montrer que $GL(3, \mathbb{K}) = \coprod_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} T\sigma T$. (C'est la décomposition de Bruhat.)

e) En déduire qu'il y a une correspondance bijective entre les orbites de $GL(E)$ sur $\Delta \times \Delta$ et \mathfrak{S}_3 . (On remarquera qu'étant donné un couple $(g_1 B, g_2 B)$, il existe dans son orbite un élément de la forme $(B, \sigma B)$, et la permutation σ est unique.)

f) Constater que, dès que $k \geq 3$, le birapport intervient dans l'action de $GL(E)$ sur Δ^k .

Remarque. On notera en rapport avec la question e) que l'ensemble des orbites d'un groupe G sur le produit $G/H \times G/H$ (où H est un sous-groupe de G) est en bijection naturelle avec l'ensemble des orbites de H dans G/H .

0-B.11.37. Les matrices de Cauchy. Soit x_1, x_2, \dots, x_n n scalaires distincts dans le corps \mathbb{C} . La *matrice de Cauchy* associée aux scalaires x_i est la matrice antisymétrique $M(x_i)$ dont le terme général $m_{i,j}$ est donné pour $i \neq j$ par $m_{i,j} = 1/(x_i - x_j)$.

a) Montrer que, pour $n = 4$, la matrice $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est singulière si et seulement si les quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 forment un *quadrilatère équi-anharmonique*, c'est-à-dire sont tels que $[x_1, x_2, x_3, x_4] = -j$ ou $-j^2$, où j vérifie $j^3 = 1$.

INDICATION.— On propose 3 méthodes différentes.

(i) Le pfaffien d'une matrice antisymétrique d'ordre 4, soit

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix},$$

est donné (au signe près) par $be - cd - af$. La nullité du déterminant de $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ s'exprime alors par le fait que $[x_3, x_2, x_1, x_4] + [x_3, x_4, x_1, x_2] = 1$; le deuxième birapport est égal au birapport $\lambda = [x_1, x_2, x_3, x_4]$, car il s'en déduit par une permutation qui est dans le groupe de Klein; quant au premier, il est égal à $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ puisqu'il s'en déduit par la permutation (13) qui est égale au produit des trois transpositions (23), (12) et (23) dont on connaît, pour chacune, l'action sur le birapport.

(ii) La deuxième méthode permet simplement d'éviter de faire allusion au pfaffien et consiste à exprimer que le rang d'une matrice antisymétrique est pair. Les matrices $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sont donc singulières si et seulement si elles sont de rang deux; ce qui, traduit au niveau des colonnes, donne la même relation entre les birapports.

(iii) La troisième méthode, plus subtile, consiste à remarquer que le caractère inversible des matrices de Cauchy d'ordre 4 est invariant par transformation homographique. On se ramène alors à effectuer le calcul pour les quatre points $1, 0, \infty$ et z (après avoir multiplié les premières ligne et colonne par $x_1 \neq 0$, ce qui n'affecte pas non plus l'inversibilité); cela conduit à $z = -j$ ou $-j^2$. On peut aussi effectuer le calcul pour les quatre points $1, j, j^2$ et z , ce qui donne $z = 0$.

b) Montrer que quatre points A, B, C et D du plan forment un quadrilatère anharmonique si l'un d'eux est intersection des arcs capables d'angle 120° construits sur les autres.

Remarques

a) Les nombres $-j$ et $-j^2$ forment l'orbite à deux éléments sous l'action du groupe \mathfrak{S}_4 sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ rencontrée dans la proposition 0-B.3.0.0.

b) Les matrices de Cauchy apparaissent (d'après J.-F. Mestre) dans certains problèmes galoisiens. La notion de quatre points équi-anharmoniques apparaît quant à elle dans l'étude des courbes elliptiques (cf. [Garn], page 99 du Tome 1). Un lien éventuel serait intéressant à préciser.

0-B.11.38. Soit E un espace de dimension 5 sur \mathbb{K} , et soit \mathfrak{G}_3^5 la grassmannienne des sous-espaces T de dimension 3 de E . On se fixe une fois pour toutes cinq droites D_1, \dots, D_5 qui engendrent E .

a) Montrer que le groupe $GL(E)$ opère transitivement sur \mathfrak{G}_3^5 , et que pour la topologie naturelle ainsi déduite sur \mathfrak{G}_3^5 , l'ensemble \mathcal{U} des sous-espaces ne contenant aucune des droites D_i est un ouvert.

b) Pour tout $T \in \mathcal{U}$, on note H_i l'hyperplan de E engendré par T et D_i . Montrer que les cinq droites Δ_i de E^* données par $\Delta_i = H_i^\perp$ sont coplanaires.

c) On note $k_i(T)$, ou encore k_i , le birapport $[\Delta_1, \dots, \hat{\Delta}_i, \dots, \Delta_5]$ des quatre droites qui restent une fois omise la droite Δ_i . Montrer que deux quelconques des k_i déterminent les trois autres. De façon plus précise, montrer par exemple que si l'on pose $k_5 = x$ et $k_4 = y$, alors $k_1 = x(1-y)/(1-x)y$, $k_2 = (1-y)/(1-x)$ et $k_3 = y/x$.

INDICATION.— Utiliser l'exercice 0-B.11.3 et les formules donnant l'action des permutations sur le birapport.

0-B.11.39. Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension 4 sur \mathbb{K} , et P un plan de cet espace. Existe-il x tel que x et $u(x)$ engendrent P ? Caractériser, dans le cas où l'endomorphisme u est à valeurs propres distinctes, l'ensemble des plans définis par x et $u(x)$ quand x varie.

INDICATION.— On examinera l'ensemble des plans P de E tels que $u(P)$ rencontre P . Si $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 0$ sont les équations d'un tel plan, le déterminant des quatre vecteurs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1 \circ u, \varphi_2 \circ u$ de l'espace E^* est nul. On a là une sous-variété de dimension 7 dans $E^* \times E^*$. Mais φ_1 et φ_2 donnent les équations de P si elles vérifient chacune les deux équations de P^\perp . On obtient finalement une sous-variété à trois dimensions (de la grassmannienne), dont on dispose, dans le cas où u est à valeurs propres distinctes,

d'une équation, à savoir celle donnée par la fonction k ! Remarquer enfin que dans le cas où la droite passant par x est générale par rapport aux droites propres de u , l'ensemble des plans de la forme $(x, u(x))$ est une orbite du groupe $D \simeq (D(4, \mathbb{K})$ des opérateurs inversibles ayant les mêmes directions propres que u . Ceci offre une troisième approche du complexe octaédral.

- 0-B.11.40.** a) Montrer qu'il y a une correspondance bijective entre les plans d'un espace E de dimension 4 sur \mathbb{K} et les « droites » de formes bilinéaires alternées (dégénérées) de rang 2 sur E donnée par $\mathbb{K} \cdot f \mapsto \text{Ker } f$.
 b) En se rappelant que le pfaffien est une forme quadratique en dimension 4, montrer que l'ensemble des formes bilinéaires alternées dégénérées forme un cône quadratique non dégénéré.
 c) En déduire l'équation de la quadrique projective qui définit \mathfrak{G}_2^4 dans $\mathbb{P}(\wedge^2(E))$. (Cf. exercice **0-B.11.37**.)

0-B.11.41. Soit F un sous-espace de dimension p d'un espace E de dimension finie n . On notera A_F l'ensemble des sous-espaces de E supplémentaires de F .

a) Montrer que A_F s'identifie à l'ensemble des projecteurs de E , dont le noyau est F . Montrer que ce dernier ensemble est en fait un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$, dont l'espace vectoriel associé est donné par $\mathcal{L}(E/F, F)$ réalisé comme sous-espace du précédent grâce à l'injection $f \mapsto i \circ f \circ s$, où i est l'injection canonique $F \hookrightarrow E$ et s la surjection canonique $E \rightarrow E/F \rightarrow \{0\}$.

INDICATION.— Le point $p + f$, somme du « point » p de noyau F et du « vecteur » $f \in \mathcal{L}(E/F, F)$, est donné par $p + f = p + i \circ f \circ s$ qui est encore un projecteur de noyau F .

b) En déduire que le groupe additif sous-jacent à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E/F, F)$ opère lui aussi librement et transitivement sur A_F . Ce dernier est ainsi muni d'une structure naturelle d'espace affine de dimension $p(n - p)$.

c) On suppose $n = 2$ et $p = 1$. Quel supplémentaire de F correspond au milieu de deux points de A_F ?

0-B.11.42. Soit P_0 un plan fixé de $E = \mathbb{R}^4$. On s'intéresse au fermé $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{P_0}$ de la grassmannienne \mathfrak{G}_2^4 défini par l'ensemble des plans de E non transverses à P_0 .

a) Montrer que l'application, de $\mathcal{F} - \{P_0\}$ dans la droite projective, qui à un plan P non transverse à P_0 et différent de celui-ci associe la droite

$P \cap P_0$ est une fibration dont la fibre au-dessus d'un point est isomorphe à un plan projectif privé d'un point.

INDICATION.— La fibre au-dessus d'une droite D de P_0 n'est autre que l'ensemble des plans P passant par D et distincts de P_0 . Considérer pour conclure $P^\perp \subset D^\perp$.

b) Soit P un plan bien défini (et distinct de P_0) passant par une droite donnée D de P_0 . Dans l'espace à trois dimensions engendré par P et P_0 , effectuons la rotation d'angle π ayant pour axe la perpendiculaire à P_0 passant par l'origine. Vérifier que la droite reste globalement invariante alors que le plan P est transformé en un plan P' différent de P sauf si P était au départ choisi de façon à passer par l'axe de la rotation. Constater que ceci définit un lacet dans la base $\mathbb{P}_1(P_0)$ de notre fibration, et seulement un chemin dans l'espace de celle-ci. En déduire que la fibration considérée n'est pas triviale (c'est-à-dire que ce n'est pas un produit).

c) Montrer que le fermé \mathcal{F}_{P_0} est une variété projective de dimension 3, ayant P_0 pour seul point singulier.

0-B.11.43. On fait opérer le groupe $D(4, \mathbb{K})$ sur les plans de l'espace vectoriel \mathbb{K}^4 .

a) Montrer que l'ensemble des plans passant par un axe de coordonnées et qui sont transverses aux trois plans de coordonnées définis par les autres axes est une orbite.

b) Montrer que l'ensemble des plans contenus dans un hyperplan de coordonnées, exception faite de ceux qui passent par un des axes de coordonnées de l'hyperplan, est encore une orbite.

c) Montrer que chacun des ensembles précédents est dense dans la face de l'octaèdre qui le contient.

INDICATION.— Les questions a) et b) sont duales l'une de l'autre. On démontre b), par exemple, en se ramenant à établir que les plans ne passant pas par les axes (ou, ce qui revient au même, les droites distinctes des axes) d'un espace vectoriel de dimension 3 forment une orbite sous l'action du groupe des matrices diagonales $D(3, \mathbb{K})$. Ceci est facile.

Note 0-C

Classes de similitude

0-C.1 Introduction

On se propose dans cette note d'étudier les classes de similitude de matrices à coefficients dans un corps¹.

0-C.1.1. Il est facile de voir que, dans le cas réel ou complexe, une classe de similitude est localement compacte : on remarque tout d'abord qu'il suffit d'établir le résultat dans \mathbb{C} , puisque la classe de similitude d'une matrice réelle est la trace sur $M(n, \mathbb{R})$ de sa classe de conjugaison sur \mathbb{C} (cf. exercice **0.11.43**) ; par ailleurs, l'ensemble des matrices ayant un polynôme caractéristique donné est clairement fermé ; de plus, deux matrices A et B ayant mêmes valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seront semblables si et seulement si, pour tout i et pour tout k , le rang de $(A - \lambda_i)^k$ est le même que celui de $(B - \lambda_i)^k$; on conclut en se rappelant que l'ensemble des matrices ayant un rang donné r est localement fermé dans $M(n, \mathbb{R})$, donc localement compact.

0-C.1.2. L'étude des classes de similitude des matrices nilpotentes constitue une étape cruciale. Les *réduites de Jordan* jouent alors un rôle essentiel. Tout repose ici sur le fait que les sauts de dimension dans la suite croissante des noyaux itérés

$$\{0\} \subset \text{Ker } A \subset \text{Ker } A^2 \subset \dots \subset \text{Ker } A^k \subset \dots$$

¹ Le corps de base \mathbb{K} est supposé algébriquement clos et de caractéristique nulle. Toutefois, la plupart des résultats sont encore valables sans ces hypothèses.

vont en diminuant. On dispose alors ces sauts de dimension sous forme de lignes dans un *tableau de Young*², et les lignes du tableau de Young transposé donnent aussitôt la réduite de Jordan recherchée³.

0-C.1.3. L'ordre de Chevalley. À une même classe de similitude de matrices nilpotentes, il est donc associé deux tableaux de Young, et l'un d'eux s'avère plus satisfaisant à garder que l'autre : il s'agit de celui qui est issu de la réduite de Jordan elle-même (qui permet d'ailleurs de lire les facteurs invariants – cf. 0-C.2.7.2). Voici pourquoi : quand un groupe algébrique opère sur une variété algébrique, les orbites sont localement fermées pour la topologie de Zariski et il existe un ordre *naturel*, qu'on choisira d'appeler l'*ordre de Chevalley*, sur l'ensemble de ces orbites : on écrit $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ lorsque \mathcal{O}_1 est contenue dans l'adhérence $\overline{\mathcal{O}_2}$. Cette relation est bien antisymétrique, car deux orbites ayant la même adhérence, étant ouvertes (et denses) dans celle-ci, vont se rencontrer et sont donc égales⁴. Par ailleurs, il y a un ordre naturel sur les tableaux de Young (appelés par leurs lignes) : $(k_1, k_2, \dots, k_l) \leq (m_1, m_2, \dots, m_p)$ si et seulement si (une fois convenu que $k_{l+i} = m_{p+i} = 0$ pour tout $i \geq 1$) $k_1 \leq m_1$, $k_1 + k_2 \leq m_1 + m_2$, etc. Dans le cadre des orbites de matrices nilpotentes, ces deux ordres sont les *mêmes* pourvu que le choix du tableau de Young soit celui qu'on a signalé plus haut : une classe de similitude est contenue dans l'adhérence d'une autre si et seulement si le tableau de Young (obtenu à partir des facteurs invariants) de la première est inférieur à celui de la seconde.

0-C.1.4. Le graphe nilpotent. Afin de dresser, pour une dimension donnée, le graphe des orbites nilpotentes, on va utiliser le *principe de*

² Ainsi par exemple, pour une matrice A d'ordre 8 telle que $\dim \text{Ker } A = 3$, $\dim \text{Ker } A^2 = 5$, $\dim \text{Ker } A^3 = 7$ et $A^4 = 0$, le tableau des sauts de dimension est donné par $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$, et le tableau de Young transposé est donné par $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$; la réduite de Jordan canonique de A est alors

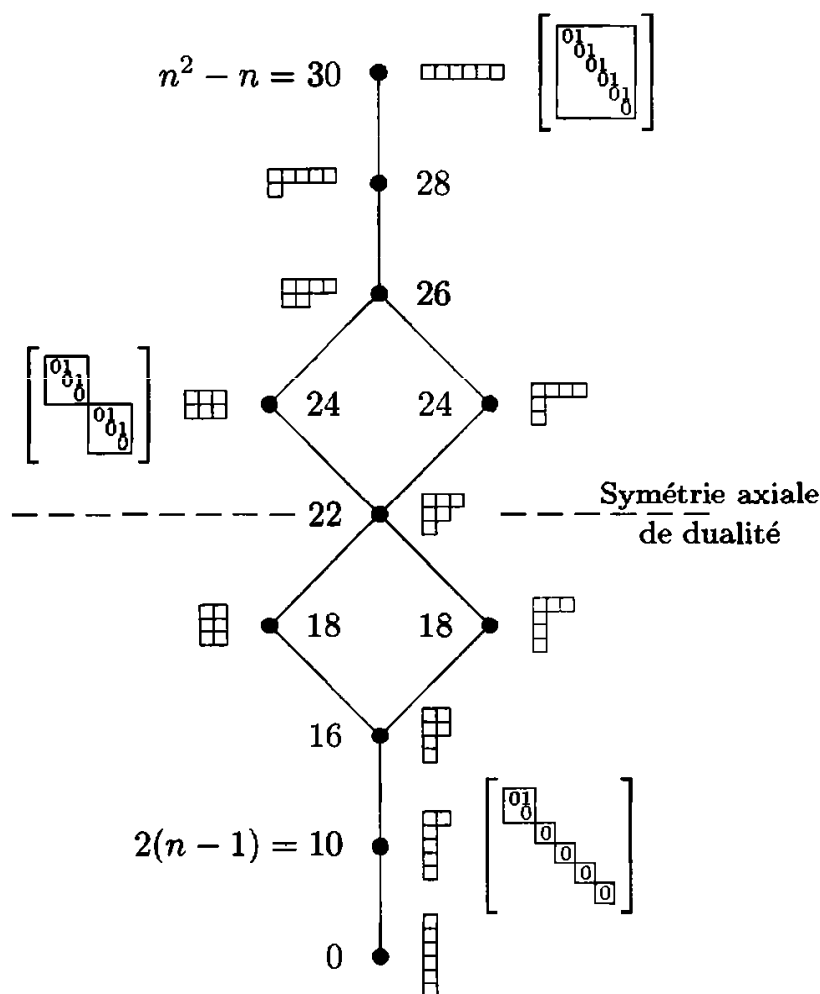
$$\begin{bmatrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & \\ \hline \end{array} & & \\ & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \\ & & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{bmatrix}.$$

³ Il peut être utile de remarquer, pour s'en souvenir ensuite, que chaque bloc de Jordan contribue par une dimension au calcul de la dimension de $\text{Ker } A$. Voir en tout cas l'exercice 0-C.11.1.

⁴ Traduit en termes élémentaires, ceci veut dire que deux matrices à coefficients complexes sont semblables si et seulement si toute limite d'une suite de matrices semblables à la première est aussi limite d'une suite de matrices semblables à la seconde.

dégradations successives : à partir d'un tableau de Young donné, le ou les tableaux qui lui sont immédiatement inférieurs s'obtiennent en laissant glisser un carré latéral vers une position la plus basse possible, c'est-à-dire correspondant à un nouveau tableau et ce de telle sorte qu'entre les deux positions, il n'y ait pas d'autre position intermédiaire possible.

Ainsi, pour la dimension $n = 6$, il y a onze partitions de n , donc onze orbites de matrices nilpotentes qui sont emboîtées comme suit



On a fait figurer devant chaque point représentant une orbite le tableau de Young qui lui est associé, la dimension (toujours paire) de cette orbite et, dans certains cas, la réduction de Jordan canonique des éléments d'une même orbite.

0-C.1.5. Dimensions des orbites. Le calcul de la dimension d'une orbite se fait de façon simple et sera justifié par la suite : l'orbite maximale est de dimension n^2 et on obtient la dimension d'une orbite à partir de celle placée immédiatement plus haut en retranchant à la dimension de cette dernière deux fois le nombre de chutes qu'on a fait effectuer au carré latéral en le laissant glisser de sa position initiale à sa nouvelle po-

sition. Ainsi l'orbite qui suit l'orbite maximale est toujours de dimension $n^2 - n - 2$, et celle qui est au-dessus de l'orbite de dimension nulle, et qui correspond aux matrices nilpotentes de rang un, est de dimension $2(n-1)$. Évidemment, ce processus ne permet pas de calculer la dimension d'une orbite sans avoir à construire le graphe de toutes celles qui lui sont supérieures ou inférieures; c'est pour cela qu'il vaut mieux garder en mémoire la formule suivante

$$\dim \mathcal{O}_N = n^2 - \sum \hat{p}_i^2 = 2 \sum n_{i+1} (n_i - n_{i+1})$$

où la matrice nilpotente N admet comme tableau de Young (p_1, p_2, \dots, p_k) et où $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_s)$ est la partition duale. Cette dimension apparaît donc comme la codimension (effectivement paire) du groupe (de Lévi) des matrices diagonales en blocs ayant comme ordres successifs $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_s$. Quant aux n_i , ils désignent respectivement les rangs de A^i : on a bien $\hat{p}_1 = \dim \text{Ker } A = n_0 - n_1$ et $\hat{p}_2 = \dim \text{Ker } A^2 - \dim \text{Ker } A = n_1 - n_2 \dots$

Relevons au passage deux faits qu'il est immédiat de constater au niveau des tableaux de Young.

- a) Le tableau de Young de la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une matrice N s'obtient à partir de celui de N en sommant p par p les colonnes; ainsi, si N admet le tableau de Young $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$, son carré (resp. son cube) admet $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}$ (resp. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array}$) pour tableau de Young.
- b) Le tableau de Young de la restriction d'un opérateur nilpotent N à son image s'obtient à partir de celui de N en gommant la première colonne! Ainsi, si N admet $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$ pour tableau de Young, sa restriction à son image (qui vit dans un espace de dimension 4) admet $\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ pour tableau de Young.

0-C.2 Premières manipulations

Nous donnons en vrac une série de résultats simples sous forme d'exercices, suivis quand il le faut de certaines indications, et qui permettent entre autres d'obtenir l'ensemble des résultats décrits plus haut.

0-C.2.1. L'ensemble des matrices de rang strictement supérieur à k est un ouvert, comme on le voit immédiatement en considérant la non nullité d'un mineur d'ordre $k+1$. Il s'ensuit que l'ensemble des matrices de rang p est un localement fermé.

Par ailleurs, il est facile de voir que l'orbite sous l'action de Steinitz de la matrice D_p , ayant p fois le scalaire 1 sur la diagonale et des zéros partout ailleurs, est formée par l'ensemble des matrices de même rang p . Son adhérence est donnée par l'ensemble des matrices de rang inférieur à p ; cet ensemble est une variété algébrique affine que l'on peut définir par les

équations algébriques données par les mineurs d'ordre $p + 1$. L'ensemble des matrices de rang p est une sous-variété différentiable de dimension $p(2n - p)$, comme on le voit en calculant, dans $GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K})$, le stabilisateur de D_p pour l'action de Steinitz.

On peut consulter [Mn-Ts] pour toutes ces considérations (notamment la page 145). Voir aussi la remarque à la fin de l'exercice 0-C.11.41.

0-C.2.2. Toute matrice commutant avec un bloc de Jordan plein J_n est un polynôme en J_n , comme le montre le calcul (facile) des puissances de J_n ainsi que l'explicitation, sur les coefficients de X , de l'équation $XJ_n = J_nX$. Ceci est un cas particulier d'un résultat standard d'algèbre linéaire (cf. exercice 0-C.11.15) qui affirme que, pour que le centralisateur d'une matrice soit formé des polynômes en cette matrice, il faut et il suffit que le polynôme caractéristique soit égal au polynôme minimal...

Il s'ensuit que le centralisateur de J_n est de dimension n , et donc que l'orbite de J_n est de dimension $n^2 - n$.

0-C.2.3. La suite croissante $\{0\} \subset \text{Ker } A \subset \text{Ker } A^2 \subset \dots \subset \text{Ker } A^k$ est une suite qui « s'essouffle », en ce sens que les sauts de dimension vont en diminuant; ce résultat clé (que l'on peut aussi voir, cf. exercice 0-C.11.12, au niveau de la suite des images itérées

$$\{0\} \subset \text{Im } A^{k-1} \subset \dots \subset \text{Im } A^2 \subset \text{Im } A \subset E,$$

qui, elle, « a du souffle ») découle des *injections de Frobenius* induites par l'endomorphisme A

$$\text{Ker } A^{k+1} / \text{Ker } A^k \hookrightarrow \text{Ker } A^k / \text{Ker } A^{k-1}.$$

0-C.2.4. On suppose $p > q \geq 1$ et l'on considère la matrice rectangulaire Z_ϵ d'ordre (p, q) ayant partout des zéros sauf en $p^{\text{ième}}$ ligne, $j^{\text{ième}}$ colonne où il y a $\epsilon \neq 0$. Pour régler la question des adhérences d'orbites, on est conduit à établir essentiellement que la matrice

$$N_\epsilon = \begin{bmatrix} J_p & Z_\epsilon \\ 0 & J_q \end{bmatrix}$$

admet un tableau de Young ayant $p + 1$ cases à la première ligne et $q - 1$ à la seconde ligne. En effet, le passage du tableau de celle-ci à celui de sa limite s'opère par le glissement d'une case de son niveau au niveau immédiatement inférieur.

Pour établir maintenant l'affirmation sur N_ϵ , on peut procéder comme suit : le vecteur de base e_{p+q} , dont l'image est donnée par $\epsilon e_p + e_{p+q-1}$, engendre sous l'action itérée de N_ϵ un sous-espace de dimension $p + 1$; la

puissance $p^{\text{ième}}$ de N_ϵ est donc non nulle, ce qui veut dire que la première ligne de son tableau de Young contient strictement plus que p cases. Il est facile de voir par ailleurs que le rang de N_ϵ est égal à $n - 2$ (considérer les images des vecteurs de base) et que son tableau de Young contient donc deux lignes. On finit en remarquant que la puissance $(p + 1)^{\text{ième}}$ de N_ϵ s'annule sur tous les vecteurs de base, et la première ligne de son tableau de Young ne peut donc avoir plus de $p + 1$ cases.

0-C.2.5. Il est facile à partir de là de décrire l'adhérence de l'orbite d'une matrice nilpotente A : elle est donnée par l'ensemble (clairement fermé) de toutes les matrices (nilpotentes) M vérifiant $\text{rang}(M^k) \leq \text{rang}(A^k)$ pour tout k . En effet, tout élément de cet ensemble admet un tableau de Young qui s'obtient par dégradations successives à partir de celui de A .

0-C.2.6. On prouvera dans le paragraphe suivant la formule donnant la dimension du centralisateur d'une matrice nilpotente : si (p_1, p_2, \dots, p_k) est son tableau de Young et $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_s)$ la partition duale, alors la dimension cherchée est $\sum \hat{p}_i^2$.

On comprendra alors facilement pourquoi le passage d'un tableau à un tableau plus bas obtenu par k dégradations fait chuter la dimension du centralisateur de $2k$ dimensions. Ceci résulte en effet de la simple formule suivante : $[(m + 1)^2 + (m - 1)^2] - 2m^2 = 2$, formule qui témoigne de la variation des contributions (dans la formule donnant la dimension du centralisateur) des différentes colonnes qui ont changé quand on fait chuter une case d'une seule ligne.

0-C.2.7. Nous donnons ici trois méthodes pour le calcul de la dimension du centralisateur d'une matrice A .

0-C.2.7.1. On calcule à la main les matrices qui commutent avec une réduite de Jordan canonique N (le cas où il y a deux blocs de Jordan J_p et J_q avec $p \geq q$ est déjà suggestif). On constate que les matrices qu'on écrit avec les mêmes blocs que notre réduite de Jordan ne sont pas si compliquées que cela : les blocs diagonaux sont des polynômes en les blocs diagonaux J_j de N ; quant aux autres blocs X_{ij} (qui sont rectangulaires $p_i \times p_j$), ils vérifient tous des relations du type $X_{ij}J_i = J_jX_{ij}$ et, aussi bien lorsque $i > j$ que lorsque $j > i$, la forme des matrices X_{ij} est fort simple et contribue par $\min(p_i, p_j)$ à la dimension du centralisateur (il faut quand même effectuer le calcul !). La dimension du centralisateur d'une matrice nilpotente ayant un tableau de Young (p_1, p_2, \dots, p_k) est donc donnée par $\sum_{i,j} \min(p_i, p_j)$, et il s'agit alors de prouver que ce nombre est égal à

$\sum \hat{p}_i^2$. Ceci est facile et revient à calculer la somme des coefficients de la matrice $S = (\min(p_i, p_j))_{i,j}$. L'astuce consiste à ajouter et retrancher p_k aux coefficients figurant en dehors des dernières ligne et colonne. Ceci donne déjà $\hat{p}_1^2 = k^2$, et ce, p_k fois. On recommence alors avec $p_{k-1} - p_k$ que l'on ajoute et retranche aux coefficients situés en dehors des deux dernières lignes et colonnes et ainsi de suite (le cas $k = 3$ est déjà assez suggestif).

0-C.2.7.2. La deuxième méthode sera donnée après un bref rappel sur les *facteurs invariants* d'une matrice quelconque A d'ordre n . Ceux-ci peuvent être introduits comme les n polynômes unitaires $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ où chaque polynôme divise celui qui vient après et où le produit $P_1 \cdots P_k$ des k premiers est le PGCD des mineurs d'ordre k de la matrice $A - X\text{Id}_n$ (ainsi les premiers apparaissent souvent égaux à 1); leur produit total est donc le polynôme caractéristique de A . Il revient au même de dire que la matrice $A - X\text{Id}_n$ est r -équivalente, sur l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$, à la matrice diagonale ayant les P_i comme coefficients successifs. Une autre façon de les introduire consiste à examiner le $\mathbb{K}[X]$ -module E_A (où l'on a relevé encore que l'anneau est principal) et à le décomposer en la somme directe de sous-modules

$$E_A \simeq \mathbb{K}[X]/(P_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}[X]/(P_{n-1}) \oplus \mathbb{K}[X]/(P_n).$$

La dimension sur \mathbb{K} de chaque facteur est donnée par le degré du polynôme définissant l'idéal par lequel on a quotienté, et l'action de A dans chaque facteur est donnée par la multiplication par l'indéterminée X ; cela donne quand A est nilpotente⁵ une autre façon (moins bonne) d'obtenir la réduction de Jordan (écrite néanmoins en commençant par les blocs de Jordan les plus petits) sans faire usage des injections de Frobenius associées à A . Toujours est-il que le degré du polynôme P_i donne la longueur de la ligne $n - i + 1$ dans le tableau de Young de A .

La dernière version des facteurs invariants va nous être utile : un élément qui commute avec A est donc un endomorphisme de notre $\mathbb{K}[X]$ -module E_A ; un tel endomorphisme est caractérisé par ses blocs opérant entre les différents facteurs de la somme directe. Maintenant, un homomorphisme entre deux blocs est entièrement déterminé par le choix de l'image de la classe du polynôme constant 1, laquelle image est nécessairement annihilée par le polynôme engendrant l'idéal apparaissant dans le facteur de départ. Ceci nous laisse sans contrainte si c'est le polynôme de départ qui

⁵ La décomposition que l'on obtient par ce procédé quand A est quelconque est ce qu'on appelle d'habitude la *décomposition de Frobenius*, où l'on voit apparaître les matrices compagnons (cf. exercice 0-C.11.20) associées aux différents polynômes qui forment les facteurs invariants.

est multiple de celui de l'arrivée et, dans le cas inverse, l'image considérée doit se trouver dans le sous-module engendré par la classe du quotient de ces deux polynômes⁶, ce qui donne les mêmes degrés de liberté que dans le cas précédent : on retrouve, pour un choix approprié des blocs, le nombre $\min(p_i, p_j)$.

Retenons au passage que les matrices ayant $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$, par exemple, comme tableau de Young, ont $1, 1, 1, X, X^2, X^3$ comme facteurs invariants, et notons que le dernier facteur invariant qui apparaît n'est autre que le polynôme minimal⁷. Une dernière remarque : le calcul de la dimension du centralisateur n'a pas supposé A nilpotente ; on a donc toujours $\dim_{\mathbb{Z}}(A) = \sum \min(p_i, p_j)$, où les p_i sont les degrés des facteurs invariants.

0-C.2.7.3. La pseudo-réduction de Jordan. La troisième méthode utilise une réduction analogue à la réduction de Jordan, mais qui à notre avis présente par rapport à celle-ci quelques avantages sensibles.

Proposition 1. *Toute matrice nilpotente N est semblable à un pseudo-bloc de Jordan⁸, et deux pseudo-blocs de Jordan sont semblables si et seulement si les tailles des blocs diagonaux sont identiques.*

Démonstration. On obtient une pseudo-base de Jordan de l'espace en complétant dans une première étape une base de $\text{Ker}(N)$ en une base de $\text{Ker}(N^2)$, laquelle sera complétée dans une deuxième étape en une base de $\text{Ker}(N^3)$, et ainsi de suite.

La deuxième assertion est facile et se voit typiquement sur le calcul suivant : si

$$N = \begin{bmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où les blocs diagonaux sont de tailles respectives k_1, k_2 et k_3 , alors le noyau de N est formé des vecteurs colonnes dont les $k_2 + k_3$ dernières composantes sont nulles et le noyau de N^2 est formé des vecteurs colonnes dont les k_3 dernières composantes sont nulles, vu l'injectivité de B_1, B_2 et de $B_1 B_2$. Autrement dit, la dimension des noyaux itérés ne dépend que de la taille

⁶ On laisse au lecteur le soin de calculer la dimension de ce module en usant de l'isomorphisme classique $(E/F)/(G/F) \simeq (E/G)$.

⁷ On voit la réelle information portée par le polynôme minimal : pour une matrice nilpotente, ce n'est rien d'autre que la première ligne de son tableau de Young.

⁸ Un pseudo-bloc de Jordan est une matrice triangulaire en blocs dont tous les blocs sont nuls à l'exception de ceux de la surdiagonale qui doivent être des matrices B_i d'applications linéaires injectives, ce qui implique au passage que la taille des blocs diagonaux va en décroissant. On le notera souvent $J(B_1, \dots, B_s)$.

des blocs diagonaux, et le résultat découle alors de la réduction de Jordan classique. ■

Remarques

a) La réduction ci-dessus remplace avantageusement la réduction de Jordan; il est donc normal d'en donner une démonstration directe : dans le cas typique où $N = J(B_1, B_2)$ et $N' = J(B'_1, B'_2)$ sont deux pseudo-blocs de Jordan qui ont les mêmes tailles de blocs diagonaux, on vérifie qu'ils sont conjugués par la matrice inversible diagonale en blocs $P = \text{Diag}(P_1, P_2, \text{Id})$ où l'existence des matrices inversibles P_2 , puis P_1 , vérifiant $P_2 B_2 = B'_2$ et $P_1 B_1 = B'_1 P_2$, résulte de ce que, d'abord $\text{Ker } B_2 = \text{Ker } B'_2$, et ensuite $\text{Ker } B_1 = \text{Ker } B'_1 P_2$ [voir la remarque a) de la page 7].

b) Le fait que les scalaires 1 des blocs de Jordan classiques sont remplacés ici par des applications injectives aide souvent dans les démonstrations, pour la simple raison qu'on sait qu'on a à faire intervenir l'injectivité quelque part.

c) Comme conséquence immédiate de cette proposition, on a le fait qu'une matrice nilpotente est semblable à son double (voir aussi l'exercice 0-C.11.7), ou encore que la matrice nulle est dans l'adhérence de l'orbite de toute matrice nilpotente.

L'intérêt de la pseudo-réduction de Jordan réside pour nous dans la forme des matrices du centralisateur d'un pseudo-bloc de Jordan. Ces matrices auront une forme fort agréable si l'on prend la précaution de choisir une base de pseudo-jordanisation adéquate. De façon plus précise, partant d'un endomorphisme nilpotent N d'indice de nilpotence égal à 3 pour simplifier (le cas général étant analogue), on introduit une famille⁹ F_1, F_2, F_3 de trois sous-espaces de l'espace $E = \mathbb{K}^n$, telle que le sous-espace F_1 soit un supplémentaire de $\text{Ker } N^2$ dans $E = \text{Ker } N^3$, que le sous-espace $F_2 \oplus N(F_1)$ soit un supplémentaire de $\text{Ker } N$ dans $\text{Ker } N^2$ et enfin que le sous-espace $F_3 \oplus N(F_2) \oplus N^2(F_1)$ soit égal à $\text{Ker } N$. On forme une base de l'espace E en regroupant une base de F_1 avec une base adaptée de $N(F_1) \oplus F_2$ et enfin avec une base adaptée de $N^2(F_1) \oplus N(F_2) \oplus F_3$. La matrice de N dans une telle base prendra évidemment la forme d'un pseudo-bloc de Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et l'on vérifie, par exemple, que le sous-espace $N(F_1)$ n'est autre que l'image de l'application linéaire représentée par B_2 .

⁹ Une telle famille sera dite *famille de Kostant* de l'opérateur N , cf. 0-C.6.7.

Proposition 2. *Si la pseudo-jordanisation de l'opérateur N a été effectuée dans une base telle que celle qu'on a décrite ci-dessus, un élément Z de son centralisateur est donné, dans cette même base, par une matrice ayant la forme indiquée dans le schéma qui suit, où les blocs hachurés sont arbitraires alors que les autres sont entièrement déterminés par ces mêmes blocs hachurés et par les blocs B_i .*

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline 0 & B_1 & 0 \\ \hline & & \\ \hline & 0 & B_2 \\ \hline & & \\ \hline & & 0 \\ \hline \end{array} \quad Z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{I} & & & & & \\ \hline 0 & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \\ \hline & 0 & & 0 & & \\ \hline & & & \text{I} & & \\ \hline & 0 & & 0 & \text{II} & \text{IV} \\ \hline & & & 0 & & \text{I} \\ \hline \end{array}$$

Démonstration. Un élément Z du centralisateur stabilise les différents noyaux itérés de N ; il a donc une forme triangulaire en blocs analogue aux blocs dans N , soit

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 & S_1 & T \\ 0 & R_2 & S_2 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix}.$$

Les conditions

$$R_2 B_2 = B_2 R_3, R_1 B_1 = B_1 R_2 \text{ et } S_1 B_2 = B_1 S_2$$

sont alors claires et montrent en particulier que la connaissance de R_3 implique celle de R_2 sur l'image de B_2 , et que la connaissance de R_2 implique celle de R_1 sur l'image de B_1 . La liberté dans le choix de R_2 est donc limitée, une fois R_3 fixée, à celle d'une application linéaire du sous-espace F_2 dans le sous-espace $N(F_1) \oplus F_2$. De même, la liberté dans le choix de R_1 , une fois R_2 fixée, est limitée à celle d'une application linéaire de F_3 dans $\text{Ker } N$. On procède de même pour les matrices S_i et pour la matrice T . La forme de la matrice Z est alors claire à son tour. ■

Le nombre k de blocs diagonaux dans la pseudo-réduite de N est égal au degré du polynôme minimal de N . Si l'on désigne par s_i , où $i \in [1, k]$, le saut de dimension $\dim \text{Ker}(A^i) - \dim \text{Ker}(A^{i-1})$, on peut énoncer

Corollaire 3. *La dimension du centralisateur d'une matrice nilpotente N est donnée par la somme $\sum_i (s_i - s_{i+1})(s_1 + \cdots + s_i) = \sum_i s_i^2$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que la somme des surfaces hachurées, dans le dessin ci-dessus, est égale à la somme des surfaces des blocs diagonaux; mais ceci se voit facilement en sommant, de droite à gauche, les surfaces hachurées d'un même niveau horizontal. ■

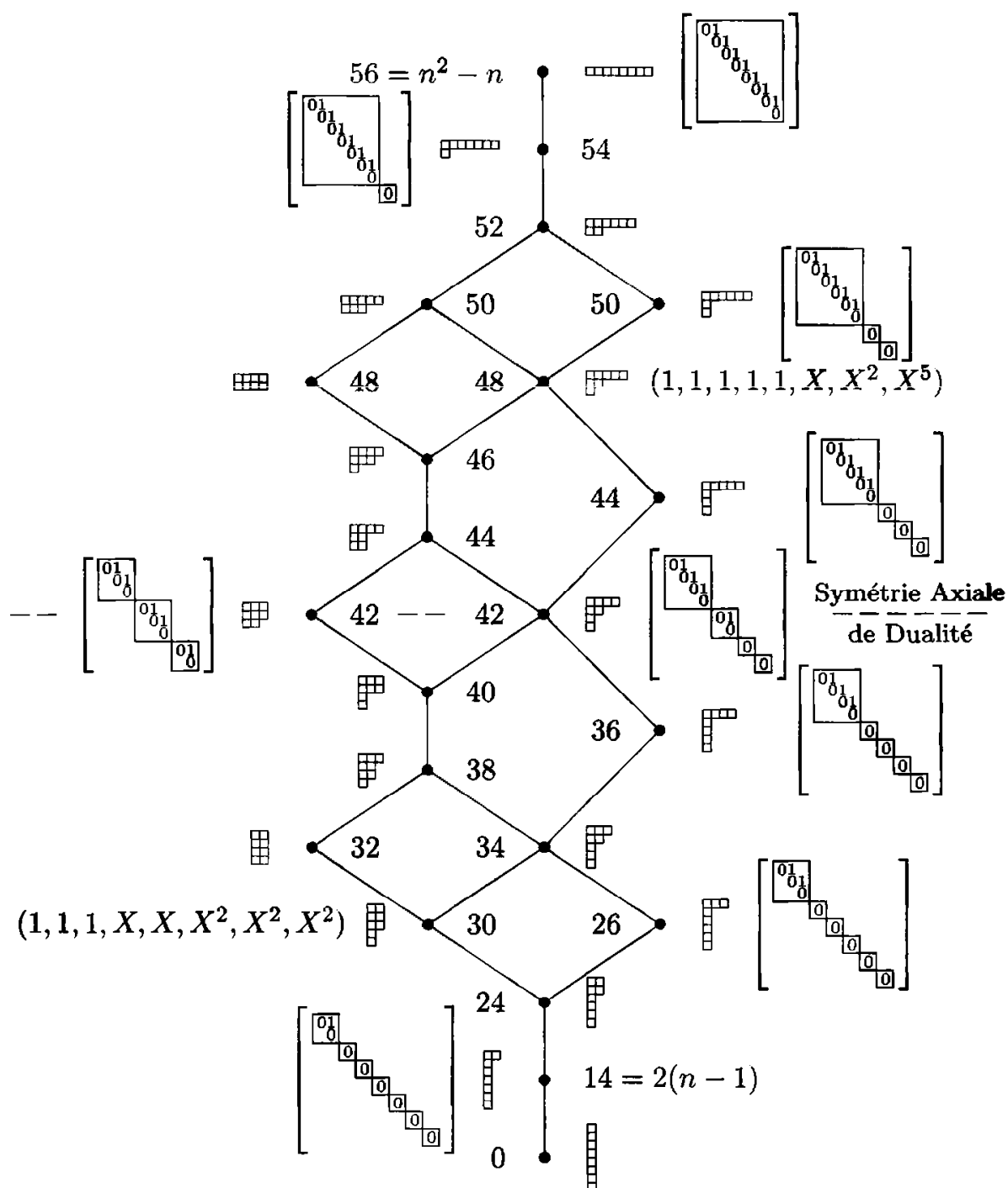
Remarques

- a) La matrice N commutant avec elle-même a aussi la forme décrite ci-dessus. Autrement dit, les matrices d'injections B_i apparaissant dans notre pseudo-jordanisation particulière ne sont pas quelconques.
- b) Les matrices notées par le même chiffre romain (I) sont toutes *semblables*, et un choix approprié de bases peut même les rendre identiques : ainsi la sous-matrice notée (I) dans R_2 devient égale à R_3 si l'on choisit comme base de $N(F_1)$ l'image par N d'une base de F_1 . La base totale obtenue en répétant ce procédé n'est alors qu'une permutation adéquate d'une base de Jordan habituelle.
- c) Notons alors un fait bien utile et qui se lit très simplement dans la forme ainsi obtenue pour une matrice Z du centralisateur : l'inversibilité de la matrice Z est équivalente à celle de son premier bloc diagonal.
- d) *Last but not least*, voici encore une vertu de la pseudo-réduction de Jordan : si l'on multiplie par $\lambda \neq 0$ les coefficients d'une première colonne d'une des matrices surdiagonales B_i , il est facile de vérifier que, ce faisant, on reste dans la classe de conjugaison de la matrice de départ N ; si l'on fait alors tendre λ vers zéro, on obtient à la limite une matrice nilpotente dont le tableau de Young se déduit par une dégradation du tableau de Young de N . Ceci donne une preuve bien plus simple du principe de dégradations successives (comparer avec 0-C.2.4).

0-C.3 Le cas $n = 8$

Pour nous faire plaisir, nous allons donner le graphe des orbites dans le cas $n = 8$: on a inséré à certains endroits du graphe les facteurs invariants des matrices d'une même orbite. On est en présence de 22 orbites dont les dimensions varient de $n^2 - n = 56$ jusqu'à 0.

Graphe des orbites nilpotentes de $\mathfrak{gl}(8, \mathbb{C})$




0-C.4 Les tableaux de Young

Nous consacrons ce paragraphe à quelques considérations sur les tableaux de Young. Leur nombre $p(n)$ pour un n donné est très vite énorme. Ainsi, le nombre de partitions de n pour $n = 50$ est de 204 226, nombre à comparer cependant avec

$$50! = 30\,414\,093\,201\,713\,378\,043\,612\,608\,166\,064\,768 \\ 844\,377\,641\,568\,960\,512\,000\,000\,000\,000.$$

On a $p(10) = 42$. Les *tableaux auto-duaux* sont les tableaux égaux à leurs transposés. Leur nombre $a(n)$ est plus raisonnable, mais augmente très vite également. Ainsi, alors que $a(10) = 2$, on a $a(50) = 98$, $a(150) = 34037$ et $a(151) = 35698$. Il est clair aussi que $p(n) \equiv a(n) \pmod{2}$, vu que la dualité induit une involution sans points fixes sur les tableaux non auto-duaux. (Voir l'appendice 3 à cette note.)

Dans le graphe des orbites nilpotentes, il est clair que les orbites autoduales distinctes ne sont pas comparables, puisque la dualité renverse l'ordre des inégalités. De plus, il est à remarquer qu'il n'y a pas au niveau matriciel d'application algébrique qui induise la dualité au niveau des orbites, car dans le cas contraire, une telle application serait constante sur l'orbite maximale, qui est dense, et serait donc partout constante.

Dans le graphe des orbites, et dès que n est supérieur ou égal à 12, on a des orbites qui ont plus de trois orbites qui leur sont immédiatement inférieures, c'est le cas de , et pour $n \geq k(k+1)$, il y a des orbites qui ont plus de k orbites immédiatement inférieures. Enfin, il est intéressant de savoir si, étant donnée une orbite, il y a dans son adhérence ou dans celle de sa duale une orbite autoduale. Dès le cas $n = 11$, il y a des exemples qui montrent que ceci n'est pas toujours vrai. L'orbite numérotée 61 dans le graphe des orbites de $\mathfrak{sl}(15, \mathbb{C})$ (cf. page 245) fournit aussi un tel exemple.

0-C.5 Le cône nilpotent

Les fonctions polynomiales sur $M(n, \mathbb{K})$ invariantes par conjugaison ne séparent évidemment pas les orbites (cf. remarque page 19). Elles permettent cependant de répartir celles-ci en familles finies : il existe en effet un nombre fini de classes de similitude parmi les matrices ayant un même polynôme caractéristique.

0-C.5.1. Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe à une application, notée μ , dont les fibres sont précisément les matrices ayant un

même polynôme caractéristique¹⁰ et dont la différentielle se calcule aisément. L'application $\mu : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$ est donnée par $\mu(M) = (\text{tr}(M), \text{tr}(M^2), \dots, \text{tr}(M^n))$. On munira dans la suite $M(n, \mathbb{K})$ de la forme bilinéaire T non dégénérée $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$.

Proposition 1. *Le rang de la différentielle de μ au point M est égal au degré du polynôme minimal de M .*

Démonstration. Il est facile de voir que

$$d\mu(M)(X) = (\text{tr}(X), 2\text{tr}(MX), \dots, n\text{tr}(M^{n-1}X)).$$

Le noyau de $d\mu(M)$ est l'intersection des n hyperplans d'équations $\text{tr}(M^i X) = 0$. L'orthogonal dans le dual de $M(n, \mathbb{K})$ de cette intersection est la somme des orthogonaux, c'est-à-dire le sous-espace \mathcal{F}_M engendré par les formes linéaires $X \mapsto \text{tr}(M^i X)$. La forme bilinéaire symétrique non dégénérée T réalise un isomorphisme entre $M(n, \mathbb{K})$ et son dual, isomorphisme par lequel le sous-espace $\mathbb{K}[M]$ des polynômes en M et le sous-espace \mathcal{F}_M se correspondent. Le résultat découle alors du fait que $\dim(\mathbb{K}[M])$ n'est autre que le degré du polynôme minimal, et de considérations élémentaires sur les dimensions. ■

Corollaire 2. *L'ensemble \mathcal{O} des matrices dont le polynôme minimal est égal¹¹ au polynôme caractéristique est un ouvert de $M(n, \mathbb{K})$.*

Démonstration. L'application μ étant de classe C^1 , l'ensemble des points où sa différentielle est de rang maximal est un ouvert. ■

Remarque. L'ensemble des matrices dont le polynôme minimal est de degré inférieur ou égal à $n - 1$ est donc un fermé algébrique dont il serait intéressant de déterminer les composantes irréductibles et de calculer leurs dimensions (cf. exercice 0-C.11.20).

Corollaire 3. *L'ensemble V_π des matrices dans $M(n, \mathbb{R})$ ayant un polynôme minimal $\pi(X)$ donné de degré n est une sous-variété différentielle de dimension $n^2 - n$. L'espace tangent en un point M de cette sous-variété est donné par l'orthogonal pour la forme bilinéaire symétrique T du centralisateur $\mathfrak{z}(M)$ de M .*

Démonstration. L'ensemble V_π apparaît comme une fibre de la restriction $\mu_{\mathcal{O}}$ de μ à l'ouvert \mathcal{O} en tous les points de laquelle l'application $\mu_{\mathcal{O}}$ est

¹⁰ Il est clair qu'une telle application n'est pas unique : il suffit en effet de remplacer la famille de fonctions $M \mapsto \text{tr}(M^i)$ par n'importe quelle famille de générateurs de l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes.

¹¹ Au facteur $(-1)^n$ près évidemment.

une submersion. C'est donc bien une sous-variété différentiable, et l'espace tangent au point M est donné par le noyau de la différentielle au point M de μ . On conclut alors en remarquant que les matrices qui commutent avec une matrice M dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique forment exactement (cf. exercice 0-C.11.15) l'ensemble des polynômes en M . ■

Remarque. L'ensemble V_π est en fait une classe de similitude. Si $\pi(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, les matrices de V_π sont toutes semblables à la matrice compagnon C_π (cf. exercice 0-C.11.20). L'espace tangent en un point M de cette classe de similitude, tel qu'il est décrit ci-dessus, coïncide bien avec l'espace tangent en M à cette même classe de similitude tel qu'il est décrit dans la proposition 12. Cela résulte de l'exercice 0.11.46.

0-C.5.2. Nous verrons que le *cône nilpotent* \mathcal{N} (on désigne ainsi l'ensemble de toutes les matrices nilpotentes) est une variété algébrique affine irréductible de dimension $n^2 - n$ et que cette variété est normale (cf. corollaire 0-C.5.5.2), c'est-à-dire que l'anneau (intègre) des fonctions polynomiales définies dessus est intégralement clos.

L'irréductibilité de cette variété découle de ce que le cône nilpotent est l'adhérence de l'orbite du bloc de Jordan plein sous l'action du groupe $G = GL(n, \mathbb{K})$ qui est lui-même irréductible. Cf. exercice 0.11.48. Nous établirons sa normalité au moyen d'un critère dû à Cohen, Macaulay et Serre (cf. 0-C.5.5.1) et que l'on ne démontrera pas ici-même.

Auparavant, arrêtons-nous brièvement sur l'énoncé important rencontré au début (cf. paragraphe 0-C.1.3) et qui affirme qu'une orbite est ouverte dans son adhérence : ceci provient du résultat (difficile, cf. [Hum], page 33) qui exprime que l'image d'un *constructible*¹² par une application polynomiale (ou morphisme) est constructible ; ceci est pratiquement un des deux ou trois arguments techniques fins de géométrie algébrique qui forment la clé de voûte de la théorie des groupes algébriques. L'orbite contient donc une partie ouverte dense de son adhérence et possède donc en particulier des points intérieurs pour la topologie de l'adhérence, mais le groupe agit par des translations qui conservent les voisinages ; l'orbite toute entière est par conséquent formée de points intérieurs.

Pour la question de la dimension, on peut procéder comme suit : la dimension de \mathcal{N} peut être définie comme le degré de transcendance du corps

¹² On appelle ainsi une partie qui est dans l'algèbre de Boole engendrée par les ouverts et les fermés d'un espace topologique, c'est-à-dire que les constructibles s'expriment comme réunions finies de parties localement fermées. Un constructible contient toujours un ouvert dense de son adhérence (cf. exercice 0-C.11.33).

des fonctions rationnelles¹³ sur \mathcal{N} . Ce corps est le même pour les fonctions rationnelles d'un ouvert, par exemple l'orbite ci-dessus. Les fonctions sur l'orbite peuvent être décrites comme les fonctions rationnelles sur le groupe qui sont invariantes par le stabilisateur, c'est-à-dire les fonctions rationnelles sur le quotient, et le degré de transcendance est donc la différence entre la dimension du groupe et celle du stabilisateur.

0-C.5.3. Points réguliers et points singuliers. Rappelons, à ce stade, quelques considérations sur les *points lisses* (ou réguliers) et les *points singuliers* (avant d'en donner une définition précise dans 0-C.5.4) : quand on a une variété algébrique affine, la notion de point singulier est une notion hautement géométrique. Les points singuliers sont ceux que l'on voit en premier quand on regarde la variété; ils sont « plus rares » que les points lisses. Ainsi, le sommet d'un cône quadratique non dégénéré est le seul point singulier; il en est de même pour le point double de la lemniscate. L'intersection de deux hyperplans (distincts) donne l'ensemble des points singuliers de la variété algébrique affine définie par leur réunion. La variété algébrique sous-jacente à un groupe algébrique affine est formée entièrement de points lisses; c'est aussi le cas de toute variété algébrique sur laquelle opère transitivement un groupe algébrique : l'existence d'un point lisse entraîne la lissité de tous les autres.

L'ensemble des points singuliers, appelé *lieu singulier*, est une sous-variété algébrique affine, et l'on peut regarder les points qui y sont singuliers : ceci introduit une certaine hiérarchie dans le degré de singularité d'un point. L'explicitation des différents niveaux de singularité devrait théoriquement être le premier réflexe à avoir lors de l'examen d'une variété algébrique affine. Ceci s'avère assez difficile dans la pratique; l'ensemble des points singuliers serait pourtant « visible à l'œil nu » si l'on était doté de sens (algébriques) adéquats.

On pourrait prendre l'exemple des points d'un cube (qui n'a rien d'une variété algébrique !) pour comprendre par analogie ces niveaux de singularité auxquels il a été fait allusion : les points intérieurs sont plus réguliers que ceux qui sont situés sur les faces, ceux qui sont situés sur les faces plus réguliers que ceux situés sur les arêtes, les sommets étant plus singuliers que tous les autres points. Cette analogie peut être poussée plus loin, car elle suggère aussi le fait que les points lisses forment un ouvert dense (c'est pour cela que les autres, plus rares, sont dits singuliers) dans la variété algébrique affine obtenue à chaque niveau. Il est intéressant de signaler que lorsque le corps de base est \mathbb{C} , l'irréductibilité de la variété algébrique affine V est équivalente à la connexité (pour la topologie usuelle

¹³ Il s'agit du corps des fractions de l'anneau des fonctions polynomiales.

de Hausdorff) de l'ouvert V^* des points lisses. Ce critère, appliqué dans le cadre d'un groupe algébrique affine, démontre que l'irréductibilité d'un groupe algébrique affine complexe G est équivalente à sa connexité (pour la topologie usuelle). Aussi est-il d'usage d'appeler connexes les groupes dont la variété sous-jacente est irréductible¹⁴. Nous n'adopterons pas ici cette terminologie quelque peu dangereuse¹⁵. Nous vérifierons ce critère dans plusieurs situations.

Si l'on considère la variété algébrique affine des matrices singulières, l'ensemble de ses points singuliers est donné par l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à $n - 2$, et dans la variété formée par ces points singuliers, les points réguliers sont donnés par les matrices de rang $n - 2$ exactement. Plus généralement, les points lisses dans la variété $\mathcal{V}_k = \overline{\mathcal{R}_k}$ des matrices de rang inférieur ou égal à k sont donnés par les matrices de rang k exactement. La démonstration de ce fait est assez difficile, mais l'enseignement que nous voudrions en tirer, c'est que la notion de rang d'une matrice est une notion géométrique à laquelle on ne peut échapper dès lors qu'on regarde la variété des matrices singulières. On pourra cependant, à titre d'exercice, établir que les points lisses de cette variété sont les matrices de rang $n - 1$. Enfin, c'est encore un exercice facile (cf. 0.11.48) que de vérifier l'irréductibilité de la variété $\overline{\mathcal{R}_k}$, ainsi que la connexité (lorsqu'on est sur \mathbb{C} et pour la topologie usuelle) de l'ensemble $\mathcal{V}_k^* = \mathcal{R}_k$ des matrices de rang k (voir par exemple [Mn-Ts], page 36).

Remarque. Il est faux, contrairement à ce que laisserait croire l'exemple précédent, que les points lisses d'une adhérence d'orbite se limitent aux points de l'orbite elle-même. L'exemple de la grosse orbite de $GL(n, \mathbb{K})$ opérant sur \mathbb{K}^n montre en effet que des points de cette adhérence peuvent être lisses.

0-C.5.4. Points singuliers du cône nilpotent. Il s'agit de déterminer les points singuliers de la variété algébrique affine des matrices ayant un polynôme caractéristique donné. Auparavant, donnons la définition mathématique de *point régulier* et de *point singulier d'une variété* V . En un point régulier, la dimension de l'espace tangent de Zariski est minimale et vaut la dimension de la variété. Une droite (vectorielle) D est dans l'espace tangent (de Zariski) au point M_0 si la droite affine passant par M_0 et parallèle à D

¹⁴ On laisse d'ailleurs au lecteur le soin de démontrer en exercice qu'un groupe algébrique affine, défini sur un corps algébriquement clos, est connexe pour la topologie de Zariski si et seulement si la sous-variété algébrique sous-jacente est irréductible.

¹⁵ Ainsi, le groupe $GL(n, \mathbb{Q})$, défini sur la clôture algébrique de \mathbb{Q} , est totalement discontinu pour la topologie usuelle, et irréductible.

rencontre la variété V en un point (au moins) double. Si donc V est la fibre, au-dessus de 0, d'une « bonne » application polynomiale $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$ définie sur un ouvert (de Zariski) \mathcal{U} de \mathbb{K}^n , l'équation en λ donnée par $f(M_0 + \lambda v) = f(M_0) + \lambda df(M_0)(v) + \lambda^2/2 d^2f(M_0)(v, v) + \dots$ doit avoir une racine double en $\lambda = 0$. Aussi, l'espace tangent de Zariski au point M_0 est alors le noyau de la différentielle de f au point M_0 . La fonction $f = (f_1, \dots, f_p)$ n'est évidemment pas la seule à définir V , comme on le voit en remplaçant une fonction coordonnée quelconque f_i par une de ses puissances. Ce qui est par contre unique, autrement dit attaché uniquement à la variété V , c'est le radical de l'idéal engendré par les fonctions polynomiales coordonnées f_i , comme l'exprime le théorème des zéros de Hilbert. Les applications f qu'il s'agit donc de rechercher, et qu'on pourra appeler de ce fait « bonnes », sont telles que l'idéal engendré par les f_i soit l'idéal $I(V)$ des fonctions polynomiales qui s'annulent sur V ¹⁶. Quand la variété V est irréductible, ceci revient donc à demander que l'idéal engendré par les f_i soit premier. Toute la difficulté, donc, pour déterminer les points lisses d'une variété algébrique affine, consiste à établir que les équations $f_i(M) = 0$, pour $i = 1, \dots, p$, qui la définissent proviennent d'une « bonne » application f , c'est-à-dire, essentiellement, à établir qu'un certain idéal est premier¹⁷. Quand cela a été accompli, il ne reste plus qu'à déterminer l'ouvert des points où la différentielle de f est de rang maximal.

Théorème 1. Le critère de Kostant¹⁸ *On suppose que la variété algébrique affine V est irréductible et définie par l'équation $f(M) = 0$, où $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$. On suppose par ailleurs qu'il existe un point $M_0 \in V$ tel que la différentielle de f en M_0 soit surjective. On peut alors affirmer que l'idéal engendré par les p fonctions coordonnées f_i est premier, que la variété V est de codimension p et que les points lisses de V sont exactement les points M tels que $df(M)$ soit surjective.*

Nous ne donnons pas ici de démonstration à ce théorème, mais signalons qu'il est lié au chapitre d'algèbre commutative concernant les décom-

¹⁶ De telles fonctions existent toujours : si V est donné, et si $I(V)$ est engendré par f_1, \dots, f_p , alors $f = (f_1, \dots, f_p)$ est bonne...

¹⁷ La détermination des points singuliers de la variété algébrique $\overline{\mathcal{R}_p}$ des matrices de rang inférieur ou égal à p devient en fait aisée dès lors qu'il est prouvé que l'idéal engendré par les mineurs d'ordre $p+1$ de la matrice générale (X_{ij}) est premier.

¹⁸ Ce critère, que nous avons attribué à B. Kostant, est sans doute connu sous une forme ou une autre des spécialistes de géométrie algébrique. Proche parent du critère jacobien, il apparaît sous la forme plaisante et utile que nous présentons ici dans *Kostant B., Lie group representations on polynomial rings* – Am. J. Math. pages 327–402 (1963).

positions primaires. Nous avons rencontré un cas particulier de ce théorème au lemme cf. 0.8.1.6.

Corollaire 2. *L'ouvert des points lisses de la variété algébrique affine de dimension $n^2 - n$ formée par les matrices ayant un polynôme caractéristique donné coïncide avec la trace sur cette variété de l'ouvert \mathcal{O} des matrices dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique.*

Démonstration. L'application $\mu : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$ donnée par $\mu(M) = (\text{tr}(M) - a_1, \text{tr}(M^2) - a_2, \dots, \text{tr}(M^n) - a_n)$ est une « bonne » application, et le rang de sa différentielle en M_0 est le degré du polynôme minimal de M_0 . ■

Remarque. On voit en particulier que l'idéal engendré par les n fonctions polynômes $M \mapsto \text{tr}(M^i)$ est premier.

0-C.5.5. Normalité du cône nilpotent. Nous sommes en mesure d'énoncer le critère de normalité de Cohen-Macaulay-Serre¹⁹ (sans toutefois le démontrer ici), et de l'appliquer au cône nilpotent.

Théorème 1. Le critère de normalité de Cohen-Macaulay-Serre. *Une sous-variété algébrique affine irréductible V est normale si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

- (i) *La sous-variété V est régulière en codimension un.*
- (ii) *La sous-variété V est une intersection complète.*

La première condition veut dire simplement que la sous-variété fermée des points singuliers est de codimension supérieure ou égale à deux. Quant à la deuxième, elle signifie que l'idéal de la sous-variété irréductible peut être engendré par autant de fonctions polynomiales que sa codimension²⁰; les variétés algébriques affines apparaissant dans le critère de Kostant sont ainsi des intersections complètes²¹.

¹⁹ Merci à J. Bellaïche pour les remarques qu'il nous a faites à ce sujet.

²⁰ Il revient évidemment au même de dire que la sous-variété peut être définie par une « bonne » application f dont l'espace d'arrivée (rapporté au besoin à l'adhérence de l'image de f) ait la bonne dimension, à savoir la codimension de notre sous-variété.

²¹ Une intersection complète est en particulier une intersection complète ensembliste, c'est à dire qu'elle peut être définie par autant d'équations que sa codimension. La réciproque n'est pas vraie (le contre-exemple classique est donné par la surface conique suivante de \mathbb{K}^4 définie par $x = y, z = x^2$ et $t = x^3$). C'est un exercice difficile que d'établir que l'ensemble des matrices d'ordre quatre de rang inférieur ou égal à deux (qui est donné par l'annulation des seize mineurs d'ordre trois) n'est pas (comme on peut s'y attendre) une intersection complète

Corollaire 2. *Le cône nilpotent est une variété algébrique normale.*

Démonstration. La condition (i) est clairement réalisée, puisque l'ensemble de points singuliers est l'adhérence de l'orbite sous-régulière donnée par le tableau de Young dont la première ligne comporte $n - 1$ cases, orbite qui est de codimension deux dans le cône nilpotent. Quant à la condition (ii), elle est réalisée grâce à l'existence de l'application μ encore rencontrée dans la démonstration du corollaire 0-C.5.4.2. ■

Remarques

a) H. Kraft et C. Procesi ont démontré en 1979, en faisant appel au critère de Cohen-Macaulay-Serre, que l'adhérence d'une classe de similitude est normale (cf. [Kr-Pr]). Ils établiront par la suite que l'ensemble des points réguliers d'une telle variété se réduit à l'orbite.

b) La variété $W = \overline{\mathcal{R}_p} \subset M(n, \mathbb{K})$ est normale elle aussi (cf. [ACGH], page 77). Elle n'est pourtant pas une intersection complète dès que $1 \leq p \leq n - 1$. La méthode classique pour établir la normalité utilise le fait que l'algèbre des invariants sous l'action d'un groupe algébrique irréductible est intégralement close; nous utilisons à cette fin (dernière) une idée qui nous a déjà servi (cf. exercice 0.11.57) : les coefficients d'une relation de dépendance intégrale sont permutés par le groupe, celui-ci les laisse donc invariants (cf. [ACGH], page 77). Tout revient alors à établir que l'algèbre des fonctions polynomiales sur W est une algèbre de fonctions polynomiales invariantes, ou encore que W est un quotient catégorique d'une variété normale. Une telle variété est disponible, il s'agit de $M(n, p, \mathbb{K}) \times M(p, n, \mathbb{K})$ pour l'action de $GL(n, \mathbb{K})$ déjà rencontrée dans l'exemple b) de la page 19 : $g \cdot (A, B) = (Ag^{-1}, gB)$.

0-C.6 Réduite de Jordan, théorème de Jacobson-Morozov et représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$

Nous commençons cette section par le rappel de quelques énoncés que l'on rencontre assez tôt sous forme d'exercices.

a) Si une matrice A commute avec $[A, B]$, alors $[A, B]$ est nilpotente; en particulier, si $[H, X] = 2X$, alors X est nilpotente. Ceci se démontre simplement en montrant par exemple que les traces des puissances $[A, B]^k$ sont toutes nulles.

On verra au paragraphe suivant que si X est nilpotente, alors il existe H tel que $[H, X] = 2X$.

ensembliste : il est de dimension douze et on a du mal à imaginer l'existence de quatre équations qui caractériseraient les matrices 4×4 de rang ≤ 2 .

b) Si une matrice S est diagonalisable, alors sa classe de similitude \mathcal{O}_S est fermée (algébrique). Une démonstration possible consiste à considérer le fermé \mathcal{F}_S constitué des matrices ayant même polynôme caractéristique que S et à montrer qu'une matrice A dans \mathcal{F}_S est semblable à S si et seulement si pour toute valeur propre λ , $\text{rang}(A - \lambda \text{Id}) \leq \text{rang}(S - \lambda \text{Id})$. Ces conditions définissent bien alors un fermé de \mathcal{F}_S .

On procède pour cela comme suit : une telle matrice A vérifie

$$\sum \text{corang}(A - \lambda \text{Id}) \geq \sum \text{corang}(S - \lambda \text{Id}) = n,$$

elle est donc diagonalisable, et donc semblable à S .

On donnera plus bas (cf. corollaire 0-C.6.1.3) une autre démonstration de ce qui précède (voir aussi une dernière démonstration très simple dans l'exercice 0-C.11.10), et l'on établira, de plus, que la réciproque est vraie, à savoir qu'une matrice est diagonalisable dès lors que son orbite est fermée.

0-C.6.1. Les deux résultats annoncés dans le paragraphe précédent seront obtenus comme conséquence du *théorème de Jacobson-Morozov* dont voici l'énoncé

Théorème 1. Soit X une matrice nilpotente. Il existe alors deux matrices H et Y telles que

$$[H, X] = 2X; [H, Y] = -2Y; [X, Y] = H.$$

Démonstration. On décompose l'espace en la somme des sous-espaces spectraux, ce qui permet de se ramener au cas où la matrice X est une cellule de Jordan, soit J_{m+1} . On prend alors pour H la matrice diagonale²² $H_{m+1} = \text{Diag}(m, m-2, \dots, -m+2, -m)$ et pour Y la matrice

$$Y_{m+1} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1.m & 0 & & & \\ & 2(m-1) & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m.1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La vérification du fait que ces matrices conviennent est facile et se fait sur chaque vecteur de base. Cependant, ce qui manque pour le moment, c'est une explication de leur provenance; on verra cela plus loin (cf. 0-C.6.4).■

²² Un intervalle symétrique de \mathbb{Z} de la forme $[-m, m]$ contient $(2m+1)$ entiers, dont $m+1$ ont la parité de m et les m autres ont la parité opposée. Quand m est pair, la suite $\{-m, -m+2, \dots, m-2, m\}$ passe par 0 et est de longueur $m+1$; quand m est impair, elle est encore de longueur $m+1$ mais contient $-1, 1$ et non 0.

Corollaire 2. Soit $M = S + X$ l'écriture de M en semi-simple + nilpotent. Alors l'élément S appartient à l'adhérence de l'orbite de M .

Démonstration. La « construction » de S et de X ainsi que celle des matrices H et Y associées à X montrent en fait que les matrices H et Y du théorème de Jacobson-Morozov commutent avec S : tout se passe en effet au niveau des sous-espaces spectraux, là où précisément S est chaque fois une homothétie. Un calcul facile fondé sur une propriété classique de l'exponentielle de matrice (voir par exemple [Mn-Ts], page 80) donne

$$\begin{aligned} \exp(tH)M \exp(-tH) &= \exp(\operatorname{ad}(tH))(M) \\ &= M + t[H, M] + \frac{t^2}{2!}[H, [H, M]] + \dots = S + e^{2t}X. \end{aligned}$$

On fait alors tendre t vers $-\infty$. ■

Corollaire 3. Une orbite \mathcal{O}_M est fermée si et seulement si M est semi-simple.

Démonstration. Il nous reste à démontrer la condition nécessaire. Si donc l'orbite est fermée, elle contient S . La matrice M est donc conjuguée de S : elle est elle-même semi-simple. ■

0-C.6.2. Remarques

a) Un triplet $\langle Y, H, X \rangle$ vérifiant les conditions du théorème de Jacobson-Morozov s'appelle un \mathfrak{sl}_2 -triplet. On peut donc énoncer que tout élément nilpotent peut être mis dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet. L'origine de l'appellation est la suivante : l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ qui occupe une place naturelle importante dans les algèbres de Lie semi-simples (cf. 0-C.9) possède une base donnée par les trois matrices

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

qui vérifient les mêmes conditions de commutation. La donnée d'un \mathfrak{sl}_2 -triplet revient à la donnée d'une *représentation*²³ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{K})$.

b) On voit donc que, dans l'adhérence de l'orbite de M , il y a une orbite fermée, à savoir celle de sa composante semi-simple S . Cette orbite fermée est d'ailleurs la seule, puisqu'une telle orbite est celle d'un élément semi-simple qui a même polynôme caractéristique que S ; il est donc conjugué de S .

²³ Une représentation $\pi : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. On dit aussi que V est un \mathfrak{L} -module. De plus, la représentation π est dite irréductible si les seuls sous-espaces de V stables par tous les $\pi(x)$ pour x décrivant \mathfrak{L} sont les sous-espaces triviaux $\{0\}$ et V . Dans un tel cas, le \mathfrak{L} -module V est dit irréductible.

Plus généralement, quand un groupe algébrique opère sur une variété algébrique affine V , l'adhérence d'une orbite contient toujours des orbites fermées. Si l'on considère en effet une orbite \mathcal{O}_v de dimension minimale de cette adhérence-là, elle est nécessairement fermée, car sinon le fait que \mathcal{O}_v est ouverte dans son adhérence (cf. page 195) implique que, dans le fermé $\overline{\mathcal{O}_v} \setminus \mathcal{O}_v$, il y a des orbites de dimensions encore plus petites²⁴.

Il est à noter cependant que ces orbites fermées ne sont pas en général, comme dans le cas des classes de similitudes, uniques. L'exemple classique du groupe des matrices inversibles de la forme $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ opérant sur \mathbb{K}^2 donne une situation d'une orbite dense (le complémentaire de l'axe des abscisses) dont tout point du complémentaire est à lui seul une orbite.

c) Donnons à ce stade l'autre démonstration promise du fait qu'une matrice semi-simple a une orbite fermée, démonstration qui s'adapte au cadre des orbites dans les algèbres de Lie semi-simples. On raisonne par l'absurde; soit C un point du complémentaire (fermé!) de l'orbite \mathcal{O}_S dans son adhérence. La composante semi-simple S_C de C est encore, vu le corollaire 0-C.6.1.2, dans ce complémentaire. Les matrices semi-simples S et S_C ne sauraient donc être conjuguées; elles le sont pourtant, car leurs polynômes caractéristiques sont égaux.

d) Comparer malgré tout avec l'exercice 0-C.11.10, où une démonstration élémentaire de l'équivalence est proposée.

0-C.6.3. On vient de constater que la connaissance de la réduction de Jordan implique le théorème de Jacobson-Morozov. Inversement, le théorème de Jacobson-Morozov permet, si l'on fait appel aux représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, de retrouver la réduction de Jordan. En fait, nous allons constater dans ce paragraphe les relations étroites qui existent entre ces trois outils, et comment dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples les \mathfrak{sl}_2 -triplets remplacent efficacement les réduites de Jordan, qui n'ont là plus de sens.

Commençons par une remarque facile. Les seuls sous-espaces de \mathbb{K}^{m+1} stables sous l'action des matrices $Y_{m+1}, H_{m+1}, X_{m+1} = J_{m+1}$ apparaissant dans la démonstration du théorème de Jacobson-Morozov sont les sous-espaces triviaux : les sous-espaces stables par une cellule de Jordan sont les sous-espaces du drapeau de base (cf. exercice 0.11.71); la matrice Y ne laisse stables que les triviaux parmi eux. On voit donc que la représentation π_{m+1} de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ sur \mathbb{K}^{m+1} définie par le \mathfrak{sl}_2 -triplet $(Y_{m+1}, H_{m+1}, X_{m+1})$

²⁴ On rappelle qu'un fermé strict dans une variété algébrique irréductible de dimension n est de dimension $< n$. Les adhérences d'orbites sont clairement irréductibles.

est irréductible. On va représenter (sic) cette représentation au moyen d'une chaîne de $m+1$ cases pondérées par les valeurs propres de H et qui correspondent aux vecteurs de base écrits en commençant par le dernier, soit

$$\boxed{-m} \text{---} \boxed{-m+2} \text{---} \boxed{-m+4} \text{---} \cdots \cdots \cdots \boxed{m-4} \text{---} \boxed{m-2} \text{---} \boxed{m}.$$

Faisons quelques commentaires utiles : l'opérateur X_{m+1} fait passer d'une case à la case qui se trouve à sa droite immédiate, l'opérateur H_{m+1} laisse une case quelconque invariante et on y lit la valeur propre correspondante, et enfin Y_{m+1} fait passer d'une case à celle qui se trouve à sa gauche immédiate, mais un facteur multiplicatif est à prévoir au niveau des vecteurs. Le noyau de X_{m+1} correspond à la case extrême de droite, et le noyau de Y_{m+1} correspond à la case extrême de gauche. Le noyau de H se lit au centre de la chaîne : il est nul si et seulement si le nombre de cases de la chaîne est impair. Notons enfin que les pondérations des cases vont de deux en deux.

0-C.6.4. On est maintenant en mesure de démontrer très simplement que toute représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ est isomorphe à π_{m+1} et est donc caractérisée par sa dimension. On démarre donc avec un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle Y, H, X \rangle$ dans $M(m+1, \mathbb{K})$ et l'on suppose que les seuls sous-espaces stables par les matrices Y , H et X sont les sous-espaces triviaux. Nous allons montrer, en quatre étapes, que nos trois matrices sont simultanément semblables à $Y_{m+1}, H_{m+1}, X_{m+1} = J_{m+1}$.

a) La première étape consiste à exprimer que Y est nilpotente (cf. exercice 0-C.6) et donc, en particulier, que son noyau n'est pas réduit à zéro (on peut aussi établir ceci plus économiquement; cf. remarque plus bas).

b) On constate ensuite que la relation $[H, Y] = -2Y$ permet d'établir que le noyau de Y est stable par H qui y possède donc un vecteur propre, soit v , associé à une valeur propre, soit $-\lambda$ (quand tout aura été démontré, on constatera que le vecteur v correspond à la case extrême de gauche).

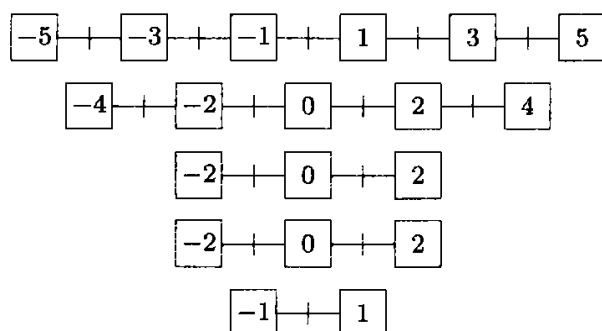
c) On forme les itérés sous l'action de X du vecteur v . Le vecteur $X(v)$ est un vecteur propre pour H associé à la valeur propre $-\lambda + 2$: $H(X(v)) = X(H(v)) + 2X(v) = (-\lambda + 2)X(v)$. On établit ensuite que $X^2(v)$ est un vecteur propre pour H de valeur propre $-\lambda + 4$ et ainsi de suite. L'opérateur Y envoie $X^i(v)$ sur un multiple de $X^{i-1}(v)$, comme il résulte d'une récurrence immédiate : $Y(X^i(v)) = YX(X^{i-1}(v)) = XY(X^{i-1}(v)) - H(X^{i-1}(v))$.

Les itérés $X^i(v)$ non nuls, étant des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes, forment donc la base d'un sous-espace vectoriel qui, vu ce qui précède, est stable pour la représentation; c'est donc l'espace tout entier.



d) On écrit maintenant les matrices de H , Y et X dans la base précédente qu'on ordonne en commençant par le dernier vecteur. La matrice de X est alors la cellule de Jordan J_{m+1} , et la matrice de H est une matrice diagonale dont la trace $-\lambda + (-\lambda + 2) + \cdots + (-\lambda + 2m)$ est nulle (H est un commutateur) : on en déduit que $\lambda = m$ et $H = H_{m+1}$, et en particulier que les valeurs propres de H sont entières ! Enfin la matrice de Y se détermine alors à partir de celles de X et de H et de la relation de commutation $[X, Y] = H$, et n'est autre que Y_{m+1} : en effet, $X(Y(v)) = Y(X(v)) + H(v) = \lambda v = mv$, puis $X(Y^2(v)) = \cdots = 2(m-1)Y(v)$ et ainsi de suite.

Remarque. On aurait pu établir que le noyau de Y est non nul en montrant que Y envoie un vecteur propre de H de valeur propre α sur le vecteur nul ou sur un vecteur propre de H de valeur propre $\alpha - 2$, et ainsi de suite. On conclut en se souvenant que H a un nombre fini de valeurs propres.

0-C.6.5. Un théorème (cf. par exemple [Dxm], pages 28 et 37) dont l'origine remonte à H. Weyl affirme que toute représentation π de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, ou plus généralement de toute algèbre de Lie semi-simple, est somme de représentations irréductibles. Il s'ensuit que les représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ sont pour nous maintenant entièrement comprises. On adoptera pour les représenter le modèle suivant (sorte de *pyramide pondérée renversée*) qui est assez suggestif : on dispose en lignes successives les différentes représentations irréductibles de π , en figurant chacune par sa chaîne associée, et ce de telle sorte que les cases correspondant à une même valeur propre de H soient disposées sur une même colonne. Ainsi la représentation π



consiste en la somme de cinq représentations irréductibles de dimensions respectives 6, 5, 3, 3 et 2 ; le noyau de X comme celui de Y est de dimension 5, dimension qui correspond à la somme des dimensions de $\text{Ker } H$ et de $\text{Ker}(H - \text{Id})$, et qui indique évidemment le nombre de représentations irréductibles de π . Ainsi, π est irréductible si et seulement si $\text{Ker } X$ est de dimension 1.

Le noyau de X correspond au sous-espace engendré par les vecteurs attachés²⁵ aux cases extrêmes de droite de la pyramide, et le noyau de Y à celui engendré par les vecteurs attachés aux cases extrêmes de gauche. L'opérateur X fait passer d'un sous-espace propre de H , correspondant à la valeur propre (on dira *poids*) α , à celui qui correspond au poids $\alpha + 2$, alors que l'opérateur Y envoie l'espace associé au poids α dans celui qui est associé au poids $\alpha - 2$. Enfin, le tableau de Young , obtenu en gommant les pondérations dans la pyramide et en justifiant à gauche, est celui de l'opérateur nilpotent Y ; quant au tableau , obtenu en justifiant à droite, c'est le tableau de Young de l'opérateur X réfléchi dans un miroir²⁶.

0-C.6.6. On voit maintenant que l'insertion d'une matrice nilpotente X de $M(n, \mathbb{K})$ dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet donne aussitôt la réduction de Jordan de X quand on décompose la représentation correspondante de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, sur \mathbb{K}^n , en somme de représentations irréductibles. L'effort fourni semblerait disproportionné avec le résultat si les retombées dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples (où le théorème de Jacobson-Morozov a un sens, cf. **0-C.7**) n'étaient considérables. Cependant, nous allons voir que les \mathfrak{sl}_2 -triplets donnent, même dans le cadre de la réduction de Jordan, quelque chose de plus²⁷.

a) On sait bien que la détermination d'une base de jordanisation canonique pour l'opérateur X se fait avec un certain nombre de degrés de liberté. En effet, le choix d'un supplémentaire F_1 de $\text{Ker } X^{k-1}$ dans $\text{Ker } X^k = E$ est totalement libre²⁸, de même que celui d'une base de F_1 ; ensuite, on a la même liberté dans le choix d'un sous-espace F_2 transverse à $X(F_1)$ et tel que $F_2 \oplus X(F_1)$ soit un supplémentaire de $\text{Ker } X^{k-2}$ dans $\text{Ker } X^{k-1}$, et ensuite d'une base de $F_2 \dots$ Avec le \mathfrak{sl}_2 -triplet contenant X , le noyau de Y est la somme directe des sous-espaces F_i .

b) Le sous-espace

$$\overline{S_{F_1}} = F_1 \oplus X(F_1) \oplus X^2(F_1) \oplus \dots$$

²⁵ On ne peut attacher des vecteurs (ou plus précisément les droites qu'ils engendrent) à des cases qu'à partir du moment où les sous-espaces propres de H ont été signalés, c'est-à-dire lorsque les diagrammes sont pondérés.

²⁶ On remarque au passage que les éléments X et Y d'un \mathfrak{sl}_2 -triplet sont conjugués, chose qui ne saute pas *a priori* aux yeux; il suffit de le vérifier pour les X et Y de $\mathfrak{sl}(2, K)$.

²⁷ Voir aussi dans **0-C.6.8** le joli calcul du tableau de Young de $\text{ad } X : Z \mapsto [X, Z]$ à partir du tableau de X nilpotent.

²⁸ Dans l'exemple précédent, on a $k = 6$ et F_1 est de dimension 1.

(voir l'exercice 0-C.11.29) apparaît comme engendré par les vecteurs attachés aux cases des chaînes de même longueur que la première (à savoir k). Cette somme est la somme directe des sous-espaces propres de la restriction de l'opérateur H ; en particulier, F_1 apparaît comme le sous-espace propre attaché à la plus petite valeur propre.

c) On sent déjà, et rien qu'à ces aspects secondaires, qu'une certaine contrainte se trouve introduite dans les degrés de liberté évoqués ci-dessus quand on insère X dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet. En fait, la bonne gestion de ces degrés de liberté se fait dans la gestion des degrés de liberté dont on dispose pour insérer X dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet. Dans ce qui suit, on évoque quelques aspects de cela.

0-C.6.7. Introduisons une définition : on appelle *famille de Kostant* associée à un opérateur nilpotent X d'indice k tout k -uplet (F_1, \dots, F_k) de sous-espaces vectoriels de E tels que F_1 soit un supplémentaire de $\text{Ker } X^{k-1}$ dans $E = \text{Ker } X^k$ et que $F_{i+1} \oplus X(F_i) \oplus X^2(F_{i-1}) \oplus \dots \oplus X^i(F_1)$ soit un supplémentaire de $\text{Ker } X^{k-i-1}$ dans $\text{Ker } X^{k-i}$ pour tout $i > 0$. Il est clair que certains de ces sous-espaces peuvent être nuls et que leurs dimensions respectives se lisent dans le tableau de Young de X : la dimension de F_i donne le nombre de cellules de Jordan de taille $k - i + 1$ dans la réduction de Jordan canonique de X . Ainsi, dans l'exemple précédent, il n'y a pas de lignes de longueur 4 dans le tableau de Young de X , ce qui donne $\dim F_3 = 0$.

Ces dimensions se lisent aussi, une fois X inséré dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet, dans le diagramme pondéré, puisque $F_i = \text{Ker } Y \cap E_{-k+i}$, où E_α désigne le sous-espace propre de H associé à la valeur propre α .

La proposition suivante ne sera pas vraiment démontrée²⁹, et le lecteur est invité à consulter [Cart], page 158. La topologie dont il est question est évidemment la topologie de Zariski.

Proposition 1. *La composante neutre $\overset{\circ}{Z}(X)$ du centralisateur dans $SL(E)$ de l'opérateur X opère transitivement sur les familles de Kostant qui sont associées à X .*

Démonstration. On se contentera ici de vérifier que l'action est bien définie. Un élément $g \in GL(E)$ envoie un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle Y, H, X \rangle$ sur un autre \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle gYg^{-1}, gHg^{-1}, gXg^{-1} \rangle$. Comme $g(F_i) = \text{Ker } gYg^{-1} \cap E_{-k+i}(gHg^{-1})$, il s'ensuit que la famille $g(F_1), \dots, g(F_k)$ est une famille

²⁹ La version dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de cet énoncé sera examinée soigneusement dans la proposition 0-C.9.3.3.

de Kostant associée à gXg^{-1} qui est égal à X quand g est dans le centralisateur de X . ■

Continuons.

Proposition 2. *L'élément Y du \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle Y, H, X \rangle$ est entièrement déterminé par les éléments X et H .*

Démonstration. Il s'agit de prouver qu'il existe un unique antécédent de H sous l'action de $\text{ad } X$, antécédent qui doit vérifier $[H, Y] = -2Y$. Ceci découle immédiatement de ce que, dans la pyramide pondérée de $\text{ad } X$, la verticale passant par le poids -2 ne rencontre pas le côté extrême droit : en effet, l'unicité de Y provient alors de ce que la restriction de $\text{ad } X$ au sous-espace propre $\mathcal{L}(E)_{\text{ad } H}(-2)$ de $\text{ad } H$ est injective. ■

Commentaire. On constate donc à quel point les représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, les \mathfrak{sl}_2 -triplets et la réduction de Jordan sont intimement liés. La détermination d'une base de Jordan pour tout X contient à vrai dire en elle tous les ingrédients du théorème de Jacobson-Morozov et des représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, un peu comme lorsqu'on trace un triangle sans dessiner ses médianes (bien concourantes).

0-C.6.8. Le caractère formel d'une représentation. À une représentation π de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ nous allons associer un élément de l'anneau $\mathbb{Z}[X, 1/X]$ qu'on appelle le *caractère formel* de π et qui la caractérise entièrement³⁰. Le coefficient de X^m , où $m \in \mathbb{Z}$, est donné par la dimension³¹ de l'espace propre de H associé à la valeur propre (ou si l'on préfère, au poids) m . Dans l'exemple considéré, le caractère est donné par le polynôme réciproque

$$\mathcal{X}_\pi(X) = X^{-5} + X^{-4} + X^{-3} + 3X^{-2} + 2X^{-1} + 3 + 2X + 3X^2 + X^3 + X^4 + X^5.$$

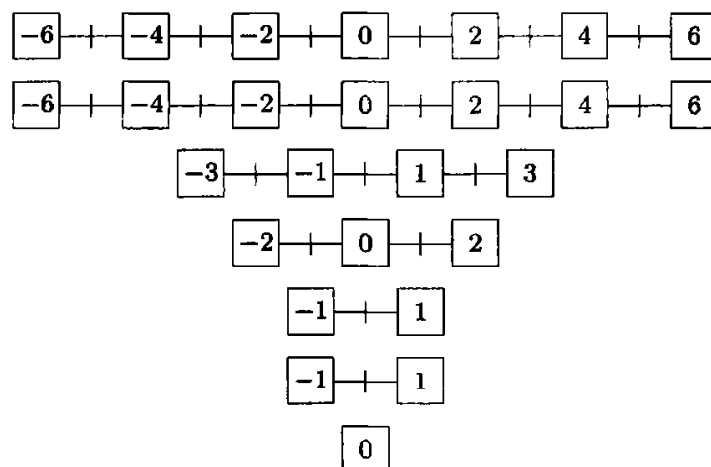
Un coup d'œil rapide montre bien que l'on peut récupérer π à partir de son caractère : on procède à partir du plus grand poids ρ en rayant les poids $\rho, \rho - 2, \rho - 4, \dots$. Ainsi le polynôme

$$2X^{-6} + 2X^{-4} + X^{-3} + 3X^{-2} + 3X^{-1} + 5 + 3X + 3X^2 + X^3 + 2X^4 + 2X^6,$$

³⁰ Aucune confusion n'est à craindre entre l'indéterminée X et la matrice nilpotente X .

³¹ Les coefficients sont donc des entiers naturels.

provient bien d'une représentation, à savoir



ce qui n'est pas le cas du polynôme $X^{-2} + X^2$, qui ne peut être le caractère formel d'une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

Il est clair que le caractère formel d'une somme directe de représentations est la somme de leurs caractères formels. L'intérêt de ces objets est donné en fait par la proposition suivante.

Proposition 1. *Le caractère formel du produit tensoriel de deux représentations est le produit de leurs caractères formels.*

Démonstration. On rappelle que l'espace de la représentation $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$, produit tensoriel des représentations π_1 et π_2 , est donné par l'espace $V = V_1 \otimes V_2$, produit tensoriel des espaces respectifs des représentations au départ, et que $\pi(L) = \pi_1(L) \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \pi_2(L)$. On écrit $V_1 = \bigoplus_k V_{1,H}(k)$ et $V_2 = \bigoplus_l V_{2,H}(l)$ pour la décomposition de V_i en la somme directe des sous-espaces-poids de H . Par suite,

$$V = V_1 \otimes V_2 = \bigoplus_m \bigoplus_{k+l=m} (V_{1,H}(k) \otimes V_{2,H}(l));$$

mais si $v \in V_{1,H}(k)$ et $w \in V_{2,H}(l)$, il est clair que $\pi(H)(v \otimes w) = (k + l)(v \otimes w)$. Il s'ensuit donc que la somme $\bigoplus_{k+l=m} (V_{1,H}(k) \otimes V_{2,H}(l))$ est contenue dans le sous-espace-poids $V_H(m)$; en fait on a égalité, puisque $V = \bigoplus_m V_H(m)$. ■

Remarque. Notons aussi que le caractère formel d'une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ est égal à celui de sa *représentation duale* : si $\pi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est donnée par $L \mapsto \pi(L)$, alors $\pi^* : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$ est donnée par $\pi^*(L) = -{}^t(\pi(L))$. Par suite, les multiplicités des poids de H sont les mêmes dans les deux cas. On en déduit donc que les deux représentations sont isomorphes.

On est en mesure maintenant de déterminer le tableau de Young de $\text{ad } X$ quand la matrice X est nilpotente, ce qui revient à expliciter dans un

cas particulier la *formule de Clebsch-Gordan*³². On insère X dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle Y, H, X \rangle$. On a donc une représentation π de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. On remarque alors que le problème revient à décomposer la représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ sur $M(n, \mathbb{K})$ donnée par $L \mapsto \text{ad } L$, puisque l'opérateur $\text{ad } X$ se trouve inséré dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet, à savoir $\langle \text{ad } Y, \text{ad } H, \text{ad } X \rangle$. Mais lorsque l'on identifie $M(n, \mathbb{K})$ avec $V \otimes V^*$, où $V = \mathbb{K}^n$, la représentation $L \mapsto \text{ad } L$ est isomorphe à $\pi \otimes \pi^*$ (exercice standard laissé au lecteur). Le caractère formel de la représentation ad est donc le carré du caractère de π ! Il s'agit donc d'explicitier alors la représentation qui est associée à ce caractère carré. Nous faisons d'abord cela dans quelques cas particuliers où l'on rencontrera notamment les identités

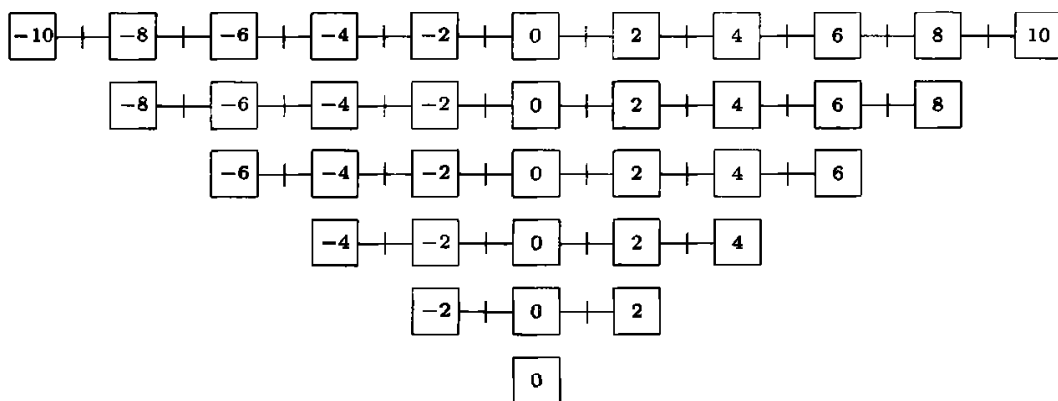
$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Remarquons au passage que la première se voit dans le « carrelage »³³

$$\square + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \text{ puis } \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \dots$$

Proposition 2. Soit X une matrice nilpotente dans $M(n, \mathbb{K})$ semblable à la cellule de Jordan J_n . Le tableau de Young de $\text{ad } X : Z \mapsto [X, Z]$ est le tableau de n lignes dont la $(n-i)^{\text{ième}}$ ligne a pour longueur le $i^{\text{ième}}$ nombre impair. En particulier, l'indice de nilpotence de $\text{ad } X$ est donc $2n - 1$, et si $[X, Z]$ commute avec X , alors $[X, Z] = [X, [X, T]]$ pour un T adéquat.

Démonstration. Le caractère formel à considérer est le carré de $\mathcal{X}_\pi(X) = X^{-n+1} + X^{-n+3} + \dots + X^{n-3} + X^{n-1}$. Le calcul est facile et nous l'effectuons pour $n = 6$ par exemple : cela donne $\mathcal{X}_{\text{ad}}(X) = X^{-10} + 2X^{-8} + 3X^{-6} + \dots + X^{10}$ d'où l'on déduit la pyramide



³² La formule générale donne la décomposition en somme de représentations irréductibles (cf. 0-C.6.5) du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. Nous considérons ici le cas du produit tensoriel d'une représentation irréductible par sa duale.

³³ Il est amusant de constater que si le dernier terme impair ajouté est lui-même un carré, par exemple 49, on obtient une solution (non triviale) en nombres entiers de l'équation de Fermat $x^2 + y^2 = z^2$, par exemple $24^2 + 7^2 = 25^2$.

La deuxième identité se voit au passage dans le décompte des cases apparaissant dans les sous-espaces-poids de $\text{ad } H$. L'assertion suivante dans la proposition est claire si l'on remarque que la restriction x de $\text{ad } X$ à son image est un endomorphisme qui vérifie $\dim(\text{Ker } x^2) = 2 \dim(\text{Ker } x)$ (la deuxième colonne du tableau de Young de $\text{ad } X$ a même longueur que la troisième colonne); il vérifie donc aussi (voir l'exercice 0-C.11.57) $\text{Ker } x \subset \text{Im } x$. ■

Remarquons que la ligne comportant trois cases est celle du \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle Y, H, X \rangle$. Il est clair qu'on ne saurait déduire l'existence de celui-ci de la connaissance préalable du tableau de Young de $\text{ad } X$, car les cases de la pyramide ne peuvent être référées à des droites que lorsqu'elles sont pondérées, ce qui suppose l'introduction de $\text{ad } H$.

Il nous reste à examiner le cas où X est générale. Vu l'additivité des caractères formels, il suffit donc d'examiner le cas où le tableau de Young de X comporte deux lignes, et de déterminer la contribution des doubles produits quand on élève au carré le caractère \mathcal{X}_π . Là aussi, un exemple adéquatement traité clarifie parfaitement la situation. On prend pour tableau de Young de X le tableau $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}$ où il s'agit donc de calculer le double du produit

$$(X^{-4} + X^{-2} + 1 + X^2 + X^4)(X^{-2} + 1 + X^2),$$

expression qui donne la contribution

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{-6} & + & \boxed{-4} & + & \boxed{-2} & + & \boxed{0} & + & \boxed{2} & + & \boxed{4} & + & \boxed{6} \\ & & \boxed{-4} & + & \boxed{-2} & + & \boxed{0} & + & \boxed{2} & + & \boxed{4} \\ & & & & \boxed{-2} & + & \boxed{0} & + & \boxed{2} \end{array}$$

et qu'on peut trouver dans le *découpage* d'un rectangle ayant pour côtés les longueurs 5 et 3 des deux lignes de départ

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array},$$

où les longueurs 7, 5 et 3 sont données par le nombre de cases détachées du rectangle lors des étapes successives décrites précédemment.

Pour une paire (ordonnée) de lignes de longueur respectives k et l avec $k \geq l$, on définit la *contribution* de Clebsch-Gordan comme le tableau de Young à l lignes obtenu à partir d'un rectangle de côtés k et l par le processus précédent : on trouve des lignes de longueurs

$$k + l - 1, k + l - 3, \dots, k - l + 1.$$

Enfin, la contribution d'une ligne de longueur m est définie comme le tableau de Young correspondant à $\text{ad } J_m$.

On est en mesure de paraphraser la formule de Clebsch-Gordan.


Proposition 3. *Le tableau de Young de $\text{ad } X$ s'obtient à partir du tableau de Young de X en superposant la contribution correspondant à chaque ligne avec deux fois les contributions des paires (ordonnées) de lignes.*

Démonstration. La formule

$$\left(\sum_{\mu=0}^{k-1} X^{k-1-2\mu} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{l-1} X^{l-1-2\nu} \right) = \sum_{j=0}^{l-1} \left(\sum_{\nu=0}^{k+l-2-2j} X^{k+l-2-2j-2\nu} \right)$$

implique clairement notre résultat. ■

On remarque que l'on retrouve en particulier le fait que la dimension du centralisateur de X est donnée par la somme des nombres $\min(p_i, p_j)$, où p_i désigne la longueur de la $i^{\text{ème}}$ ligne du tableau de Young de X .

On pourra établir à titre d'exercice que le tableau ci-contre est celui de l'endomorphisme $\text{ad } X$, où X admet le tableau autodual . Le nombre de cellules de Jordan de taille 1 dans la réduction de Jordan de $\text{ad } X$, qui est égal dans l'exemple à 5, est bien la somme des carrés des dimensions des sous-espaces d'une même famille de Kostant de X .

On termine la section par la

Proposition 4. *Si les deux matrices nilpotentes X_1 et X_2 sont telles que $\text{ad } X_1$ et $\text{ad } X_2$ sont conjugués, alors elles le sont aussi.*

Démonstration. L'égalité $\mathcal{X}_{X_1}^2 = \mathcal{X}_{X_2}^2$, ayant lieu dans un anneau intègre, entraîne l'égalité $\mathcal{X}_{X_1} = \mathcal{X}_{X_2}$, car on sait par ailleurs que les coefficients sont des entiers ≥ 0 . ■

0-C.7 Le théorème de Jacobson-Morozov dans les algèbres de Lie semi-simples

Lemme 1. *Soit H et X deux matrices vérifiant $[H, X] = 2X$ et telles que H soit un crochet en X (c'est-à-dire que H est dans l'image de $\text{ad } X$). Alors, on peut les compléter en un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle Y, H, X \rangle$. En particulier, H est diagonalisable et ses valeurs propres sont entières.*

Démonstration. On commence par remarquer que la matrice X est nilpotente [voir l'énoncé a) de la page 200]. On établit ensuite le fait nécessaire suivant : pour p assez grand, le produit commutatif $(H - p\text{Id}) \cdots (H - 2\text{Id})(H - \text{Id})H$ est nul sur $\text{Ker } X$. Il s'ensuit en particulier que la restriction de H à $\text{Ker } X$ est diagonalisable avec des valeurs propres entières positives ou nulles. On remarque pour cela que H envoie $\text{Ker } X$ dans l'intersection $\text{Ker } X \cap \text{Im } X$ et que $H - \text{Id}$ envoie $\text{Ker } X \cap \text{Im } X$ dans $\text{Im } X^2 \cap \text{Ker } X$, comme il résulte de l'égalité $X^2 Z - Z X^2 = -2(H - \text{Id})X$ où

$H = [X, Z]$, qui se démontre simplement par $X^2Z - ZX^2 = X(H + ZX) - ZX^2 = HX - 2X + XZX - ZX^2 = (H - 2\text{Id} + XZ - ZX)X = 2(H - \text{Id})X$. On procède successivement en établissant que $H - k\text{Id}$ envoie $\text{Im } X^k \cap \text{Ker } X$ dans $\text{Im } X^{k+1} \cap \text{Ker } X$ moyennant l'égalité $X^{k+1}Z - ZX^{k+1} = (k+1)(H - k\text{Id})X^k$. Le même raisonnement peut être fait avec $\text{ad } X$ et $\text{ad } H$. On peut donc affirmer que la restriction de $\text{ad } H + 2\text{Id}$ à $\mathfrak{z}(X)$ est bijective. On vérifie facilement que $[H, Z] + 2Z = (\text{ad } H + 2\text{Id})Z$ commute avec X , il existe donc $T \in \mathfrak{z}(X)$ tel que $(\text{ad } H + 2\text{Id})(T) = (\text{ad } H + 2\text{Id})(Z)$. L'élément $Y = Z - T$ répond à notre problème. ■

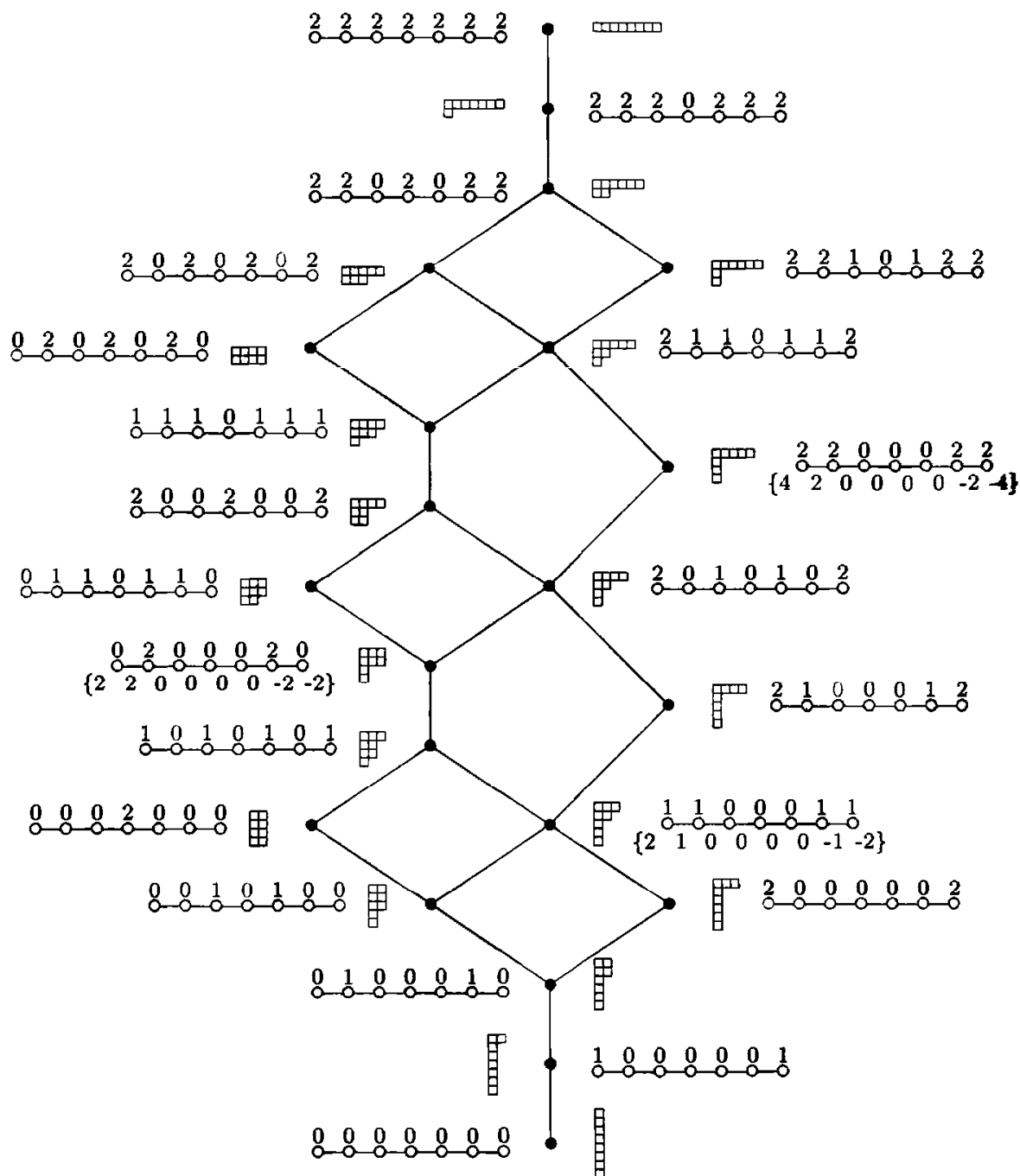
Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie *semi-simple*, c'est-à-dire telle que la forme bilinéaire symétrique $(X, Y) \mapsto K(X, Y) = \text{tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y)$, qu'on appelle la *forme de Killing* de \mathfrak{g} , soit non dégénérée. On admettra que le centre de \mathfrak{g} est nul et que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Une sous-algèbre de Lie semi-simple de $M(n, \mathbb{K})$ est donc dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$. On dira que X est *nilpotent* s'il vérifie que $\text{ad } X$ est nilpotent (aucune confusion n'est possible, car dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$, dire que X est une matrice nilpotente équivaut à dire que $\text{ad } X$ est nilpotent).

Proposition 2. Soit X un élément nilpotent d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} . Alors, on peut le mettre dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet.

Démonstration. Nous allons trouver H dans \mathfrak{g} tel que $[H, X] = 2X$, l'élément H étant un crochet en X . On plonge \mathfrak{g} dans $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ au moyen de l'application adjointe et on complète X en un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle Y_1, H_1, X \rangle$ de $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Le sous-espace \mathfrak{g} est non singulier pour la forme quadratique $X \mapsto \text{tr } X^2$, et l'on peut écrire $\mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp$ avec $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\perp] \subset \mathfrak{g}^\perp$. Les composantes respectives H et Z de H_1 et de Y_1 sur \mathfrak{g} vérifient $[H, X] = 2X$ et $[X, Z] = H$. La démonstration du lemme précédent permet d'affirmer que la restriction de $\text{ad } H + 2\text{Id}$ à $\mathfrak{z}(X) \subset \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ est bijective, ainsi donc que sa restriction à $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$. L'élément T , et donc $Y = Z - T$, peuvent ainsi être choisis dans \mathfrak{g} . ■

Lecture utile. On pourra se reporter à ce stade à l'ouvrage [Cart], et comprendre les diagrammes de Dynkin pondérés qui remplacent, dans le cadre des algèbres de Lie semi-simples, la classification des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ au moyen de la réduction de Jordan. On se limitera ici à décrire le processus de passage d'un tableau de Young (associé à une orbite nilpotente) au diagramme pondéré correspondant. Partant donc d'un tableau de Young, on reconstitue la pyramide pondérée (suspendre le tableau de Young comme on l'aurait fait pour un collier et laisser agir la pesanteur); on écrit dans une suite ordonnée tous les poids y apparaissant puis on place les sauts (c'est-à-dire les différences entre deux poids consécutifs) au-dessus du diagramme de Dynkin (il s'agit, dans le cas de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$, d'une chaîne de $n - 1$ petites boules). Noter que les sauts sont toujours dans $\{0, 1, 2\}$, mais ne peuvent être quelconques. Constater enfin qu'à partir d'un diagramme pondéré possible, on peut reconstituer le tableau de Young dont il provient (penser à diviser par deux la somme des pondérations).

Le lecteur pourra vérifier, à titre d'exercice, que les diagrammes de Dynkin pondérés pour $\mathfrak{sl}(8, \mathbb{K})$ sont bien ceux qui apparaissent dans le graphe de la page suivante.

Orbites nilpotentes pondérées de $\mathfrak{gl}(8, \mathbb{C})$ 

0-C.8 Appendice 1 – Quadriques affines et classes de similitude dans $M(2, \mathbb{R})$

L'objet de cet appendice est d'examiner les classes de similitude pour les matrices réelles d'ordre 2. On profitera de cette étude pour bien comprendre les quadriques affines de l'espace à trois dimensions; cela n'est pas surprenant puisque, par exemple, l'ensemble des matrices d'ordre 2 de déterminant nul et de trace égale à 1, qui n'est autre que la classe de similitude de la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

est tout simplement un hyperboloïde à une nappe !

0-C.8.1. Les quadriques de l'espace affine. On sait depuis l'Antiquité que l'ellipse, la parabole et l'hyperbole s'obtiennent comme sections coniques (d'où le nom de coniques); de façon plus précise, chacune de ces courbes s'obtient comme intersection d'un « vrai » cône de \mathbb{R}^3 avec un plan ne passant pas par le sommet. Les cinq quadriques

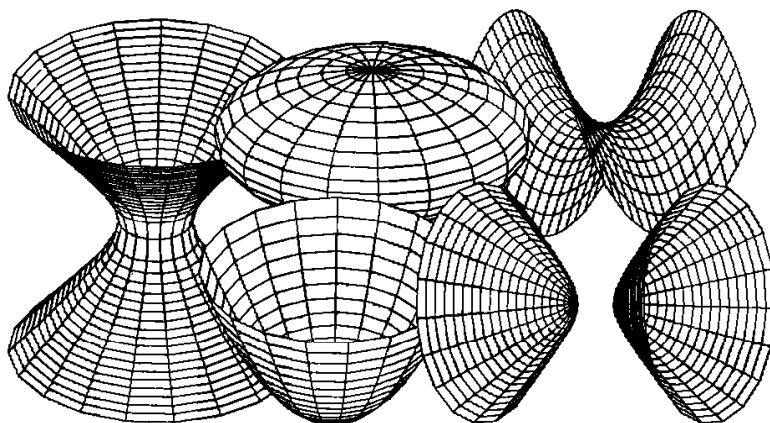


FIGURE 25

que sont l'ellipsoïde, le parabolôïde elliptique, l'hyperboloïde à une ou deux nappes, et enfin le parabolôïde hyperbolique, devraient s'obtenir comme sections de « vrais » cônes de \mathbb{R}^4 avec des hyperplans ne passant pas par le sommet. C'est comme cela qu'on va les examiner. On doit procéder d'abord à une bonne manipulation des cônes quadratiques de l'espace usuel et de l'espace à quatre dimensions.

Il existe sur \mathbb{R}^4 cinq classes de formes quadratiques non dégénérées se distinguant les unes des autres par leurs signatures. À chaque classe est associé un *type* de cônes quadratiques, le même pour une classe de formes quadratiques de signature (r, s) ou une classe de formes quadratiques de signature (s, r) . De façon plus précise, étant donnée une forme

quadratique q sur \mathbb{R}^n , on définit le cône isotrope de q comme l'ensemble $\mathcal{C}(q) = \{x \in \mathbb{R}^n; q(x) = 0\}$. Ainsi, le cône isotrope de la forme quadratique en trois variables donnée par $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$, ou celui de la forme quadratique donnée par $(x, y, z) \mapsto -x^2 - y^2 + z^2$, est le même cône usuel de \mathbb{R}^3 d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Le cône isotrope de la forme quadratique en quatre variables donnée par $(x, y, z, t) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ est la partie de \mathbb{R}^4 réduite à $\{0\}$; c'est le même pour une forme quadratique définie négative. On se doit, dans ce qui suit, d'étudier les deux cônes non dégénérés et non réduits à $\{0\}$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 . Ces deux cônes se distinguent par maints aspects l'un de l'autre. On rencontrera au fur et à mesure quelques-uns de ces signes distinctifs. Pour le moment, annonçons le fait que, pour le cône de type $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$, l'espace tangent en un point s'appuie sur le cône suivant la génératrice qui passe par ce point, alors que dans le cas du cône de type $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$, l'espace tangent en un point s'appuie sur le cône suivant deux plans qui se coupent selon la génératrice. Cet aspect des choses est crucial pour la suite : en effet seuls l'hyperboloïde à une nappe et le parabololoïde hyperbolique, parmi les cinq quadriques, contiennent des droites

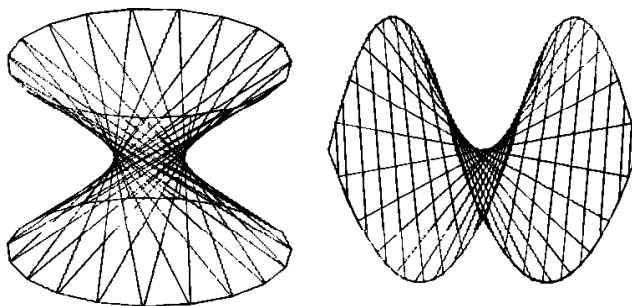


FIGURE 26

Plus précisément, par un point quelconque de l'une ou l'autre de ces deux quadriques, il passe deux droites. Or, justement, ces deux quadriques sont les seules à s'obtenir comme sections hyperplanes du cône $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$, alors que les trois autres proviennent du cône $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$. Ceci se comprend *a priori* par le fait que ces droites-là ne sont autres que les intersections de la section hyperplane avec l'hyperplan tangent au cône de \mathbb{R}^4 (comparer avec le cas des sections coniques dans l'espace usuel).

Pour accéder rapidement à une bonne compréhension des caractères distinctifs de nos deux cônes, on va les réaliser respectivement, une fois \mathbb{R}^4 identifié avec $M(2, \mathbb{R})$, comme l'ensemble des matrices dont le carré est de trace nulle et comme l'ensemble des matrices de déterminant nul. On se propose d'examiner ce problème et celui des classes de similitude dans $M(2, \mathbb{R})$ sous forme d'une série d'exercices faciles, rédigés de façon à être accessibles à un étudiant de premier cycle des universités.

0-C.8.2. Un bien long problème élémentaire.**0-C.8.2.1.**

a) Montrer que l'application déterminant définit sur $M(n, \mathbb{R})$ une forme quadratique si et seulement si $n = 2$. Dans ce cas, on notera q cette forme quadratique. On écrira donc

$$q : M(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad q(A) = q\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc.$$

b) Montrer que cette forme quadratique est non dégénérée et de signature $(2, 2)$.

c) On désigne par T la forme bilinéaire associée. Montrer que

$$T(A, B) = \frac{1}{2}[\text{tr}(A) \text{tr}(B) - \text{tr}(AB)].$$

On pourra établir cela directement, ou bien passer par les valeurs propres.

d) Le cône isotrope de q est l'ensemble $\mathcal{C}(q) = \{A \in M(2, \mathbb{R}); q(A) = 0\}$. Vérifier que $\mathcal{C}(q) - \{0\}$ n'est autre que l'ensemble des matrices 2×2 de rang 1.

0-C.8.2.2. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $M(2, \mathbb{R})$ donnée par $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$.

a) Montrer que l'on munit ainsi $M(2, \mathbb{R})$ d'un produit scalaire qui en fait un espace euclidien.

b) Calculer les orthogonaux, pour ce produit scalaire, de la droite formée par les matrices scalaires et de la droite formée par les matrices antisymétriques.

c) Montrer que la base canonique $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ est une base de $M(2, \mathbb{R})$ orthonormée pour ce produit scalaire et située sur le cône isotrope de q .

d) Écrire la matrice de la forme quadratique q dans cette base. Montrer que parmi les six plans de coordonnées, il y en a quatre qui sont contenus dans le cône isotrope de q .

e) Montrer qu'il existe des bases orthonormées pour le produit scalaire, telles que les matrices de q dans ces bases soient diagonales.

f) Exhiber une telle base \mathcal{B}' qui soit formée d'une matrice scalaire, d'une matrice antisymétrique et de deux matrices symétriques de trace nulle.

0-C.8.2.3.

a) Soit X une matrice de rang 1. Montrer que X est semblable à

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou à } \lambda \cdot P, \text{ avec } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

suivant que $\lambda = \text{tr}(X)$ est nul ou pas.

b) Soit A un point du cône isotrope de q , distinct de l'origine. Montrer que l'espace tangent \mathcal{T}_A en ce point au cône s'identifie à l'hyperplan vectoriel

$$\mathcal{T}_A = \{X \in M(2, \mathbb{R}); \text{tr}(AX) = \text{tr}(A) \text{tr}(X)\}.$$

INDICATION.— L'espace tangent est donné par le noyau de la différentielle de q au point A . Il est par ailleurs facile de prouver que $dq(A)(X) = 2T(A, X)$.

c) Expliciter ces espaces tangents pour les deux points particuliers P et N .

d) Pourquoi l'espace tangent au point $\lambda \cdot P$ est-il indépendant de λ ?

e) Montrer, en se ramenant aux matrices P et N , que l'espace tangent en un point quelconque X du cône $\mathcal{C}(q)$ distinct de l'origine rencontre ce cône suivant deux plans $P_1(X)$ et $P_2(X)$. Montrer aussi que ces deux plans se coupent suivant la génératrice passant par X .

0-C.8.2.4. L'identification de \mathbb{R}^4 avec $M(2, \mathbb{R})$ n'est pas dans la nature du problème, et cache au contraire l'isotropie physique de l'ensemble des génératrices du cône. Elle permet néanmoins d'éviter de faire appel au groupe d'isométries de la situation géométrique présente, en se contentant d'un de ses sous-groupes, à savoir le groupe $GL(2, \mathbb{R})$ tel que réalisé ci-dessus. Tout se passe comme si, pour appréhender les lieux d'un territoire, on y construisait une ville : ce qui n'est qu'un point sur une carte de topographe devient alors un numéro de rue ou une pièce dans un appartement...

0-C.8.2.5. Avant de poursuivre, rappelons comment se distinguent entre elles les différentes coniques affines non dégénérées et comment se passent les choses lors de l'examen du même problème pour les quadriques. Un plan affine H de l'espace \mathbb{R}^3 ne passant pas par l'origine découpe sur le cône standard une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que le plan vectoriel H_0 qui lui est associé rencontre le cône suivant son sommet, une génératrice ou deux génératrices respectivement. Ceci s'exprime aussi par le fait que la restriction de la forme quadratique (qui définit le cône) au plan H_0 est définie (positive ou négative), dégénérée ou de signature $(1, 1)$ respectivement. Cette forme quadratique restreinte ne peut être nulle, car le cône ne peut contenir de plans.

Un hyperplan affine H de \mathbb{R}^4 découpera sur le cône standard de signature $(3, 1)$ un ellipsoïde, un parabolôïde elliptique, ou enfin un hyperboloïde à deux nappes suivant que la restriction de la forme quadratique (qui définit ce cône) à l'hyperplan vectoriel H_0 est définie (positive ou négative), dégénérée, ou de signature $(2, 1)$ respectivement. Remarquons qu'on ne

peut avoir une signature $(1,2)$, car cela impliquerait l'existence de plans vectoriels sur lesquels la forme quadratique est définie négative; or on a choisi au départ une forme quadratique de signature $(3,1)$, et non $(1,3)$ (les termes de la signature ne peuvent que décroître lors d'une opération de restriction).

Un hyperplan affine H de \mathbb{R}^4 découpera enfin sur le cône standard de signature $(2,2)$ un hyperboloïde à une nappe ou un paraboloïde hyperbolique, suivant que la restriction de la forme quadratique (qui définit le cône) à l'hyperplan vectoriel H_0 est non dégénérée ou pas. Dans le cas où elle est non dégénérée, cette restriction est de signature $(2,1)$ ou $(1,2)$ (pourquoi ?), autrement dit, le plan H_0 coupe le cône $(2,2)$ suivant un vrai cône de \mathbb{R}^3 . Par ailleurs, cette restriction ne peut être nulle, car l'indice d'une forme quadratique (c'est-à-dire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel totalement isotrope, dimension qui « se voit » dans le cône isotrope) non dégénérée, de signature (r,s) , est précisément $\min(r,s)$. Les paraboloïdes s'obtiennent donc, dans l'un ou l'autre des types de cônes, lorsque l'hyperplan H_0 est tangent. Le contact entre le cône et son espace tangent est réduit à une génératrice dans le cas du type $(3,1)$, et à deux plans quand le type est $(2,2)$. Ce contact correspond au cône isotrope de la restriction de la forme quadratique à l'hyperplan tangent. Aussi, la signature de cette restriction est $(2,0)$ dans le premier cas, et obligatoirement $(1,1)$ dans le second.

On adoptera donc la démarche suivante pour reconnaître, sur l'équation d'une quadrique affine non dégénérée \mathcal{Q} , la nature de celle-ci : on homogénéisera le polynôme (non homogène) de degré deux en les variables x, y, z qui définit \mathcal{Q} en introduisant une nouvelle variable t . La forme quadratique q' en quatre variables ainsi obtenue (étant non dégénérée par hypothèse) donne naissance à un cône $\mathcal{C}(q')$, dont l'intersection avec l'hyperplan $t = 1$ est précisément notre quadrique. Pour décider de la nature de notre quadrique non dégénérée, il s'agit donc de déterminer le type du cône $\mathcal{C}(q')$ et la signature de la restriction de q' à l'hyperplan vectoriel $t = 0$. Pour résumer : on homogénéise, on vérifie que l'on a bien un cône non dégénéré, on détermine son type, ensuite on fait $t = 0$ et on détermine la signature de la forme quadratique qui reste (ce sont les termes de degré deux exactement, dans l'équation de départ de la quadrique). Tout ceci peut souvent se faire en un clin d'œil. On conserve dans la suite les notations des parties précédentes.

a) Montrer que l'hyperplan vectoriel $H_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ formé par les matrices de trace nulle n'est pas tangent au cône isotrope $\mathcal{C}(q)$. Montrer qu'il en est de même de l'hyperplan H_S formé par les matrices symétriques.

b) Montrer que l'intersection du cône isotrope $\mathcal{C}(q)$ avec chacun de ces

hyperplans est un brave cône de l'espace à trois dimensions.

c) Montrer que l'intersection de $\mathcal{C}(q)$ avec chacun des deux hyperplans affines parallèles respectivement à H_0 et H_S et passant par le point $N+P =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est un hyperboloïde à une nappe.

d) Montrer que l'intersection de $\mathcal{C}(q)$ avec l'hyperplan affine constitué des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$ est un parabolôïde hyperbolique. Remarquer que l'espace vectoriel associé à cet hyperplan affine est bien tangent à notre cône.

0-C.8.2.6.

a) Soit α et β deux nombres réels distincts. Montrer que l'ensemble des matrices $M \in M(2, \mathbb{R})$ ayant α et β comme valeurs propres est une quadrique à centre dont on déterminera le centre et la nature.

INDICATION.— On se ramène, par une translation de vecteur $-\beta \text{Id}$, à examiner l'ensemble des matrices ayant $\alpha - \beta$ et 0 comme valeurs propres. C'est en fait la classe de similitude de la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

C'est donc l'intersection du cône $\mathcal{C}(q)$ et de l'hyperplan des matrices de trace égal à $\alpha - \beta$. On trouve un hyperboloïde à une nappe de centre $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. L'ensemble de départ est donc un hyperboloïde à une nappe de centre $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

b) Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes non nulles est la classe de similitude de N , et que cet ensemble s'identifie à un cône de \mathbb{R}^3 auquel on a enlevé le sommet. Il a donc deux composantes connexes.

c) Déterminer la nature de la classe de similitude des matrices de trace nulle et ayant λ^2 comme déterminant. Montrer en particulier qu'elle n'est pas connexe.

INDICATION.— C'est l'ensemble des matrices semblables à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Il s'identifie dans l'hyperplan $H_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ à la quadrique d'équation $-x^2 + yz = \lambda^2$: c'est un hyperboloïde à deux nappes, comme il résulte du fait qu'il apparaît comme l'intersection de l'hyperplan affine formé des points $(x, y, z, 1) \in \mathbb{R}^4$ avec le cône d'équation $x^2 + yz + \lambda^2 t^2 = 0$. Le cône est de type $(3, 1)$ et la forme quadratique apparaissant dans l'équation du cône a une restriction à l'hyperplan vectoriel d'équation $t = 0$ qui est de signature $(2, 1)$.

0-C.8.2.7.

a) Montrer que les deux plans $P_1(X)$ et $P_2(X)$ associés à un point $X \in \mathcal{C}(q)$ (cf. 0-C.8.2.3) ne sont autres que les ensembles formés des opérateurs ayant respectivement même noyau et même image que l'opérateur X . (On pourra se ramener au cas des matrices P et N rencontrées ci-dessus.)

b) On appelle plan générateur du cône $\mathcal{C}(q)$ n'importe quel plan contenu dans $\mathcal{C}(q)$. Les couples de deux génératrices du cône $\mathcal{C}(q)$ se répartissent donc en deux familles : les couples pour lesquels les deux génératrices sont dans un même plan générateur du cône, et les couples pour lesquels le plan des deux génératrices n'est pas contenu dans le cône $\mathcal{C}(q)$.

i) Montrer que deux matrices de rang 1 ayant même noyau et même image sont proportionnelles.

ii) Montrer que deux plans générateurs de la forme $P_1(X)$ et $P_1(Y)$ sont identiques ou transverses suivant que la droite noyau de X est la même ou pas que celle de Y .

iii) Montrer que deux plans générateurs de la forme $P_1(X)$ et $P_2(Y)$ se coupent toujours suivant une génératrice du cône.

iv) Quand on identifie \mathbb{R}^4 à $M(2, \mathbb{R})$, on peut associer à chaque génératrice du cône deux droites D_1 et D_2 qui correspondent respectivement au noyau et à l'image des matrices appartenant à la génératrice. Montrer que ces droites sont égales ou distinctes suivant que les matrices de la génératrice sont nilpotentes ou pas.

v) Montrer que les applications $X \mapsto {}^tX$ et $X \mapsto X - \text{tr}(X)\text{Id}$ définissent des involutions de $M(2, \mathbb{R})$, et, par induction, des involutions du cône $\mathcal{C}(q)$. Comment se transforment les couples de droites associées à une même génératrice sous l'action de ces involutions ?

INDICATION.— Pour la première involution, on pensera au fait que l'image et le noyau d'une matrice symétrique sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique. Pour la seconde, remarquer qu'une matrice X du cône vérifie d'après le théorème de Cayley-Hamilton $X(X - \text{tr}(X)\text{Id}) = 0$; le noyau et l'image de X sont donc égaux respectivement à l'image et au noyau de $X - \text{tr}(X)\text{Id}$.

c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(q) - \{0\}$ est flexé³⁴.

INDICATION.— On pourra examiner deux cas, suivant que les génératrices passant par nos deux points sont dans un même plan générateur ou pas. On se ramène dans le premier cas au fait qu'un plan privé d'un point est flexé.

³⁴ Une partie F d'un espace affine est dite *flexée* si deux points quelconques A et B de F peuvent être joints dans F par un accent circonflexe, c'est-à-dire s'il existe C dans F tel que les segments $[AC]$ et $[CB]$ sont dans F . C'est un joli exercice que de démontrer que le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$ est flexé.

Dans le second cas, les deux paires de plans générateurs du cône attachées aux génératrices donnent par intersection deux autres génératrices; tout revient alors à remarquer qu'un dièdre dans \mathbb{R}^3 privé d'un point de son axe est encore flexé. (Ceci est un cas particulier de l'exercice 0.11.65.)

0-C.8.2.8.

a) Montrer qu'un hyperplan linéaire de \mathbb{R}^4 qui contient un plan générateur de $\mathcal{C}(q)$ est nécessairement tangent au cône.

INDICATION.— La restriction de q à l'hyperplan considéré est une forme quadratique en trois variables, d'indice au moins deux; elle est donc dégénérée. Un élément X de son noyau est sur le cône $\mathcal{C}(q)$, et son orthogonal dans \mathbb{R}^4 (orthogonal qui n'est autre que l'espace tangent au cône) contient notre hyperplan initial: ils sont donc égaux. La traduction géométrique de ce résultat est à première vue surprenante: les plans de l'espace usuel qui se meuvent autour d'une droite située sur un hyperboloïde à une nappe sont tous tangents à cet hyperboloïde.

b) Expliquer pourquoi les seules quadriques non dégénérées qui contiennent des droites sont précisément celles qui apparaissent comme sections hyperplanes du cône $\mathcal{C}(q)$?

INDICATION.— L'espace tangent en un point X_0 à une quadrique non dégénérée n'est autre que l'intersection de l'hyperplan tangent \mathcal{T}_{X_0} en X_0 au cône $\mathcal{C}(q)$ avec l'hyperplan affine contenant la quadrique: c'est donc un plan affine de \mathcal{T}_{X_0} qui rencontre les plans générateurs du cône passant par X_0 suivant deux droites se coupant, quant à elles, en X_0 .

0-C.8.2.9.

a) Montrer que le noyau d'une matrice symétrique de rang 1 de $M(2, \mathbb{R})$ est égal à son cône isotrope.

b) Montrer que deux matrices symétriques de rang 1 ayant même cône isotrope sont proportionnelles (se rappeler qu'elles ont la même image, qui est l'orthogonal de leur noyau commun).

c) Montrer que si S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques non proportionnelles de rang 1, la matrice symétrique $S = S_1 S_2 + S_2 S_1$ est de signature $(1, 1)$.

INDICATION.— Si x est dans le noyau de S_1 ou de S_2 , on a $((S_1 S_2 + S_2 S_1)(x), x) = 0$. Le cône isotrope de S contient deux droites distinctes. Il reste à remarquer que S est non nulle. (Voir la question suivante.)

d) Soit S_1 et S_2 deux matrices symétriques réelles de taille quelconque qui anticommulent. Montrer que si l'une définit une forme quadratique non nulle positive ou négative, alors l'autre est nulle.

INDICATION.— Remarquer que la deuxième s'annule sur tous les vecteurs propres de la première, car dans le cas contraire elle enverrait un vecteur propre associé à λ sur un vecteur propre associé à $-\lambda$.

0-C.8.2.10.

a) Soit $A \in M(2, \mathbb{R})$ de trace nulle et de déterminant négatif. Montrer qu'il y a un moyen naturel d'associer à A deux génératrices du cône nilpotent.

INDICATION.— On considère les deux droites propres et l'on examine les endomorphismes nilpotents ayant pour image et noyau l'une, puis l'autre des droites considérées. Les génératrices ainsi obtenues sont les traces, sur le cône nilpotent, des plans issus de A et tangents au cône.

b) Montrer que le crochet $[A, B] = AB - BA$ de deux matrices nilpotentes non proportionnelles A et B est de déterminant strictement négatif.

INDICATION.— Le crochet laisse le noyau de l'une d'elles stable. Le crochet qui est de trace nulle a donc des valeurs propres réelles et opposées. Reste à voir pourquoi le crochet n'est pas de déterminant nul. En fait, le crochet est porté par la polaire du plan des deux droites de départ. (Cf. lemme 0-C.9.1.1.)

c) Montrer que deux matrices 2×2 de trace nulle qui ont un crochet nul sont proportionnelles. (Calculer directement en les trigonalisant simultanément dans \mathbb{C} .)

d) Montrer que pour deux matrices nilpotentes A et B , la matrice $ABAB + BABA$ est une matrice scalaire positive. (Penser à Cayley-Hamilton pour $AB - BA$.)

0-C.8.2.11. Le cône de \mathbb{R}^4 de type $(3, 1)$ donne pour les sections hyperplanes non vectorielles l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes, et enfin le paraboloïde elliptique.

a) Soit H un hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^4 . Montrer que la restriction de la forme quadratique $l : (x, y, z, t) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ (comme Lorentz) à H est de signature $(3, 0)$ ou $(2, 1)$ quand elle est non dégénérée, et de signature $(2, 0)$ quand elle est dégénérée.

INDICATION.— Se rappeler que le cône $(3, 1)$ ne peut contenir de plan et que lorsque la restriction est dégénérée l'hyperplan est tangent.

b) Discuter de la nature de l'intersection du cône lorentzien avec un hyperplan affine non vectoriel H_a en fonction de la restriction de l à l'hyperplan vectoriel H associé à H_a .

c) En identifiant \mathbb{R}^4 à $M(2, \mathbb{R})$, on peut réaliser l par la forme quadratique

$$l(A) = l\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \text{tr}(A^2) = a^2 + d^2 + 2bc.$$

Montrer que les formes quadratiques l et q ont des restrictions proportionnelles sur l'hyperplan H_0 des matrices de trace nulle. De façon plus précise, montrer que, si $\text{tr}(A) = 0$, on a $\text{tr}(A^2) = 2 \det(A)$. Ces restrictions ont le même cône isotrope, à savoir le cône nilpotent.

d) Le cône $\mathcal{C}(l)$ rencontre l'hyperplan H_S des matrices symétriques suivant $\{0\}$. En déduire que $\mathcal{C}(l) - \{0\}$ a deux composantes connexes.

e) Montrer que l'ensemble des matrices de la forme

$$M = \begin{bmatrix} x & 1+y \\ y & z \end{bmatrix}$$

dont le carré est de trace nulle est un ellipsoïde.

f) Montrer que l'ensemble des matrices

$$M = \begin{bmatrix} 1+x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$$

dont le carré est de trace nulle est un hyperboloïde à deux nappes.

g) Déterminer toutes les matrices A telles que l'hyperplan $H(A) = \{X \in M(2, \mathbb{R}); \text{tr}(AX) = 0\}$ soit tangent au cône $\mathcal{C}(l)$.

INDICATION.— Ce sont exactement les matrices telles que $\text{tr}(A^2) = 0$. (L'hyperplan $H(A)$ n'est autre que le plan polaire de A par rapport au cône $\mathcal{C}(l)$. Ceci donne l'équation tangentielle du cône!)

h) Montrer que, si $\text{tr}(A^2) = 0$, l'ensemble des matrices X telles que $\text{tr}(AX) = 1$ et $\text{tr}(X^2) = 0$ est un paraboloïde elliptique. En particulier, l'ensemble des matrices X telles que $\text{tr}(X^2) = 0$ et $\text{tr}(XN) = 1$, où N désigne toujours la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, est un paraboloïde elliptique.

i) Déterminer toutes les matrices A telles que l'hyperplan $H(A)$ soit tangent au cône $\mathcal{C}(q)$.

INDICATION.— L'hyperplan $H(A)$ est tangent si et seulement si $\det(A - \text{tr}(A)\text{Id}) = 0$. En effet, l'hyperplan formé des matrices X telles que $\text{tr}[(A - \text{tr}(A)\text{Id})X] = \text{tr}(A - \text{tr}(A)\text{Id})\text{tr}(X)$ est alors tangent au cône. C'est l'hyperplan $H(A)$. On vérifie bien que l'hyperplan rencontré plus

haut et formé des matrices M de la forme $M = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix}$, qui n'est autre que $H(P)$, est tel que $\det(P - \text{tr}(P)\text{Id}) = 0$.

j) Montrer que, sous l'effet de l'application transposée dans $M(2, \mathbb{R})$, un hyperplan tangent au cône $\mathcal{C}(q)$ le reste.

0-C.8.2.12.

a) Montrer que le complémentaire du cône nilpotent dans $H_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est formé de trois composantes connexes, et qu'il en est de même du com-

plémentaire du cône des matrices symétriques de déterminant nul dans H_S . Le déterminant est négatif à l'extérieur de chacun de ces cônes.

INDICATION.— Les formes quadratiques restreintes sont, dans les deux cas, de signature $(1, 2)$, et les plans qui rencontrent ces cônes en $\{0\}$ seulement sont des plans où les formes quadratiques restreintes sont définies négatives.

b) Montrer que les matrices symétriques respectivement définies positives, définies négatives, et de signature $(1, 1)$ donnent, dans le deuxième cas, les trois composantes.

c) Montrer que les matrices symétriques de signature $(1, 0)$ et $(0, 1)$ donnent les composantes connexes du cône privé de son sommet.

d) Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle et de déterminant strictement positif possède deux composantes connexes permutable par transposition.

INDICATION.— On peut distinguer si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ appartient à l'une ou l'autre des composantes grâce au signe de $b - c$.

e) Montrer que le complémentaire du cône $\mathcal{C}(q)$ a deux composantes connexes, alors que le complémentaire de $\mathcal{C}(l)$ en a trois. Comment les distinguer ?

INDICATION.— Ce sont dans le premier cas les composantes connexes du groupe linéaire réel. Elles sont indifférenciées si l'on oublie la réalisation matricielle. Dans le second cas, il y a une composante qui contient des sous-espaces de dimension 3 (privés de l'origine) – par exemple les matrices symétriques : c'est l'extérieur du cône. Les deux autres composantes sont indifférenciées géométriquement. On les distingue dans la réalisation matricielle par le signe de $(b - c)$ comme précédemment.

f) Montrer que l'intersection des deux cônes $\mathcal{C}(q)$ et $\mathcal{C}(l)$ n'est autre que le cône nilpotent.

g) Montrer que l'ensemble des matrices M de trace α et de déterminant β s'identifie à celui des matrices M telles que $l(M) = \alpha^2 - 2\beta$ et $\text{tr}(M) = \alpha$. En déduire que si les valeurs propres de A sont imaginaires pures (non nulles), cas qui correspond donc à $\alpha^2 - 4\beta < 0$, la matrice $M = A - \lambda \text{Id}$ (où λ est un réel tel que $2\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - 2\beta = 0$) vérifie $l(A) = 0$ et $\text{tr}(M) = \alpha - 2\lambda$. Il s'ensuit donc que la classe de similitude de A est un hyperboloïde à deux nappes. Retrouver le résultat par un calcul direct. On retient donc que les classes de similitude non nilpotentes apparaissent, au moyen de translations adéquates, comme intersections de nos deux cônes avec des hyperplans affines dont l'hyperplan associé est H_0 . L'intersection de $H_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ avec chacun des deux cônes étant le cône nilpotent, on ne peut obtenir des classes de similitude qui soient des paraboloides ou des

ellipsoïdes.

h) Montrer que la classe de similitude d'une matrice quelconque de $M(2, \mathbb{R})$ est ou bien un point, ou bien un cône usuel privé de son sommet, ou enfin un hyperboloïde à une ou deux nappes. Le polynôme $\text{tr}(A - \lambda \text{Id})^2$ est une sorte de pendant du polynôme caractéristique. Ces racines sont réelles quand les valeurs propres sont imaginaires pures, et inversement.

i) Montrer que les deux équations du second degré $\det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ et $\text{tr}(A - \lambda \text{Id})^2 = 2\lambda^2 - 2\text{tr}(A)\lambda + \text{tr}(A^2) = 0$ ont des racines en quadrangle harmonique (les deux formes quadratiques définies par ces équations sont conjuguées par rapport à la conique fondamentale). De plus, les demi-sommes de chaque paire de racines sont égales. Les racines sont donc les sommets d'un carré. Un meilleur argument pour établir cela consisterait à relever que les deux équations, rendues à coefficient dominant égal à 1, ont même somme de racines et des discriminants opposés.

0-C.8.2.13.

a) On considère la forme quadratique d qui à la matrice X associe le discriminant de son polynôme caractéristique. De façon plus précise, soit $d(X) = (\text{tr } X)^2 - 4\det(X) = 2\text{tr}(X^2) - (\text{tr } X)^2$. Montrer que c'est une forme quadratique dégénérée de signature (2,1). Son cône isotrope est donc un cylindre à base conique qui se voit comme l'union des translatés du cône nilpotent par les matrices scalaires. Son complémentaire dans $M(2, \mathbb{R})$ est donné par les matrices ayant des valeurs propres distinctes, réelles ou pas. Il a trois composantes connexes. L'une de ces composantes est formée des matrices ayant des valeurs propres réelles distinctes. Les matrices ayant des valeurs propres imaginaires et telles que $b - c > 0$ (respectivement $b - c < 0$) forment les deux autres composantes.

b) On se propose d'étudier l'intersection de ce cône dégénéré avec les hyperplans affines de $M(2, \mathbb{R})$, autrement dit, d'étudier les quadriques dégénérées. On commence par examiner les sections par les hyperplans vectoriels.

i) Montrer que le noyau de la forme quadratique d est la droite $\mathbb{R}\text{Id}$.

ii) En déduire que si $\text{tr}(A) \neq 0$, l'hyperplan

$$H(A) = \{X \in M(2, \mathbb{R}); \text{tr}(AX) = 0\}$$

rencontre le cône $\mathcal{C}(d)$ suivant un cône usuel de l'espace à trois dimensions. (La restriction de d à cet hyperplan est alors en fait non dégénérée, et donc de signature (2,1).)

iii) On suppose donc $\text{tr}(A) = 0$ et $A \neq 0$. Montrer que, par une translation, on peut se ramener à déterminer l'intersection de l'hyperplan polaire de A dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ par rapport au cône nilpotent (voir la section suivante,

notamment le lemme 0-C.9.1.1) avec ce même cône. Montrer donc que l'intersection de $\mathcal{C}(d)$ avec $H(A)$ est la droite $\mathbb{R}\text{Id}$ si A a ses valeurs propres imaginaires pures, que cette intersection est le plan $\langle A, \text{Id} \rangle$ quand la matrice A est nilpotente, et enfin que c'est un dièdre dont l'axe est la droite des homothéties quand la matrice A est à valeurs propres réelles distinctes.

iv) Retrouver l'intersection $\mathcal{C}(d) \cap H(A)$ quand A de trace nulle est à valeurs propres imaginaires, en montrant que s'il y avait dans cette intersection des matrices non scalaires, on aurait $\text{tr}(B(\lambda \text{Id} + N)) = 0$ avec $B = P^{-1}AP$, et donc, puisque $\text{tr}(B) = \text{tr}(A) = 0$ et $N \neq 0$, que la matrice B est trigonale, c'est-à-dire que A a des valeurs propres réelles.

c) Examinons les plans affines non vectoriels.

i) Quand $\text{tr}(A) = 0$, on est ramené par translation à chercher l'intersection dans $H_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. On trouve suivant les cas un cylindre à base parabolique, elliptique ou hyperbolique.

ii) Déterminer la nature de l'ensemble des matrices qui ont des valeurs propres doubles et qui sont de la forme $\begin{bmatrix} a & 1 \\ c & d \end{bmatrix}$.

INDICATION.— Notre ensemble se présente comme l'intersection du cône $\mathcal{C}(d)$ avec l'hyperplan des matrices X telles que $\text{tr}(AX) = 1$ où $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. C'est donc un cylindre à base parabolique.

iii) Déterminer l'ensemble des matrices ayant des valeurs propres doubles et telles que les termes diagonaux diffèrent de 2.

INDICATION.— C'est l'intersection de $\mathcal{C}(d)$ avec l'hyperplan des matrices telles que $\text{tr}(AX) = 2$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. C'est un cylindre à base hyperbolique.

iv) Il reste l'intersection de $\mathcal{C}(d)$ avec les hyperplans affines non vectoriels associés à $H(A)$ lorsque $\text{tr}(A) \neq 0$. Montrer que c'est encore un cône usuel, et ce en translatant X par une matrice scalaire de façon à se ramener au cas de l'intersection de $\mathcal{C}(d)$ avec un hyperplan vectoriel.

v) Déterminer l'ensemble des matrices ayant des valeurs propres doubles et telles que la somme de leurs termes soit égale à 2.

INDICATION.— C'est l'intersection de $\mathcal{C}(d)$ avec l'hyperplan des matrices telles que $\text{tr}(AX) = 2$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On trouve un cône usuel. (Considérer $A - \text{Id}$.)

d) On trouve donc, pour résumer, un premier cas qui est celui où l'hyperplan est transverse à l'arête du cylindre conique, cas qui fournit une intersection qui est un cône; puis un second cas où l'hyperplan contient l'arête, et qui donne l'arête toute seule, ou bien un plan, ou bien un dièdre;

puis un dernier cas où l'hyperplan est parallèle à l'arête sans la contenir, et qui donne des cylindres à base parabolique, elliptique ou hyperbolique et dont la direction est l'arête.

0-C.9 Appendice 2 – L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

On ne saurait suffisamment insister sur la place remarquable qu'occupe cette algèbre de Lie dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples. C'est d'ailleurs avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ des matrices antihermitiennes d'ordre 2 et de trace nulle la seule algèbre de Lie semi-simple réelle de dimension 3. Le théorème de Jacobson-Morozov témoigne déjà amplement de son rôle. On se propose ici d'examiner les propriétés les plus simples de cette algèbre de Lie. On décrira notamment l'effet qu'a sur elle l'action adjointe du groupe $SL(2, \mathbb{R})$, et l'on classifiera ses sous-algèbres de Cartan. La plupart des résultats sont encore valables pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$; on laisse au lecteur le soin de les reconnaître.

0-C.9.1. On aura besoin d'un joli lemme.

Lemme 1. *Deux matrices A et B de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sont proportionnelles si et seulement si elles commutent. Quand ce n'est pas le cas, la droite définie par leur crochet $[A, B] = AB - BA$ n'est autre que la polaire du plan qu'elles engendrent par rapport au cône nilpotent.*

Démonstration. La première assertion a été rencontrée dans la section précédente (cf. 0-C.8.2.10). Pour la seconde, il s'agit de vérifier que le crochet $[A, B]$ est orthogonal à l'une et l'autre des matrices A et B , relativement à la forme bilinéaire T_0 qui définit le cône isotrope. Comme T_0 est la restriction à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de la forme quadratique T rencontrée dès la page 217, il s'agit de vérifier que $\text{tr}([A, B]A)$ et $\text{tr}([A, B]B)$ sont nulles, ce qui est immédiat. ■

La construction géométrique du plan polaire d'une droite par rapport à un cône, ainsi que la construction de la polaire d'un plan par rapport au cône, s'obtiennent par des procédés bien connus (se rappeler d'une part que la conjugaison de deux points par rapport au cône³⁵ est une relation symétrique et correspond à leur orthogonalité par rapport à « la » forme

³⁵ Deux points A et B sont dits conjugués par rapport au cône si les quatre droites coplanaires OA , OB , Δ_1 et Δ_2 (où Δ_1 et Δ_2 sont les génératrices du cône situées dans le plan OAB) forment une division harmonique, c'est-à-dire si le birapport $[OA, \Delta_1, OB, \Delta_2]$ vaut -1 .

bilinéaire définissant le cône³⁶, et d'autre part que toute génératrice du cône est orthogonale (toujours au sens de la forme bilinéaire) au plan tangent au cône suivant cette génératrice).

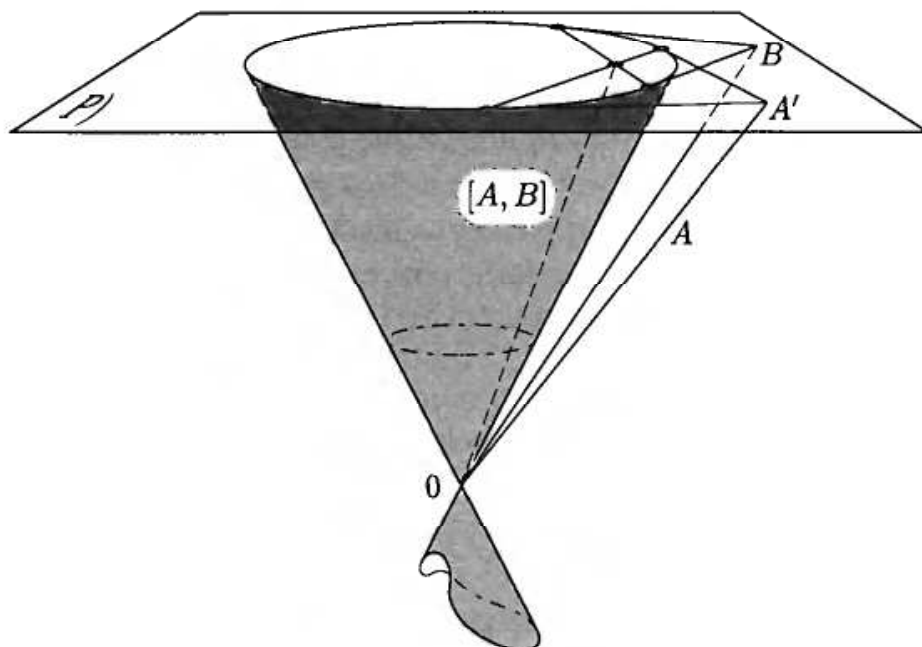


FIGURE 27

On dispose par ailleurs sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ d'un produit scalaire naturel (sic), donné par $X \mapsto \langle X, X \rangle = 2 \operatorname{tr}(X^t X)$. La présence du scalaire 2 va nous permettre d'affirmer

Lemme 2. *Si A et B sont deux matrices de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, alors leur crochet $[A, B]$ est donné par le symétrique, par rapport au plan des matrices symétriques de trace nulle, du produit vectoriel des vecteurs A et B de l'espace euclidien à trois dimensions $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Comme la symétrie par rapport au plan des matrices symétriques est donnée par la transposition, il suffit d'établir que pour tout X on a $\operatorname{tr}(X \cdot [A, B]) = \operatorname{tr}(X^t(A \wedge B)) = 1/2 \langle X, A \wedge B \rangle$. Or on est là en présence de deux formes trilinéaires alternées en (X, A, B) sur un espace vectoriel de dimension 3 : celles-ci sont donc proportionnelles, et le coefficient de proportionnalité est égal à 1, comme le prouve le remplacement de X par $H_0/2$, de A par $X_0/\sqrt{2}$ et de B par $Y_0/\sqrt{2}$, sachant que la base $H_0/2, X_0/\sqrt{2}, Y_0/\sqrt{2}$ est une base orthonormée. ■

³⁶ Si $\mathbb{R}V$ et $\mathbb{R}W$ sont deux points de la conique projective définie par le cône isotrope, les droites $\mathbb{R}(V + W)$ et $\mathbb{R}(\lambda V + W)$ sont orthogonales si et seulement si le birapport $\lambda = [\mathbb{R}V, \mathbb{R}W, \mathbb{R}(V + W), \mathbb{R}(\lambda V + W)]$ est égal à -1 .

L'orthogonalité dans la suite concernera toujours la forme bilinéaire définissant le cône. Rappelons à cet égard le résultat suivant déjà constaté (voir également l'exercice 0.11.46) : l'orthogonal de $\mathfrak{z}(A) = \mathbb{R}A$ est donné par $\text{Im}(\text{ad}(A))$.

Proposition 3. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est simple.*

Démonstration. Soit \mathfrak{i} un idéal non nul de \mathfrak{g} . Si $A \neq 0$ est dans \mathfrak{i} , le plan donné par l'image de $\text{ad}(A)$ est contenu dans \mathfrak{i} . L'idéal sera donc égal à \mathfrak{g} tout entier s'il existe A qui n'appartienne pas à son orthogonal, c'est-à-dire A ne figurant pas sur le cône. Mais ceci est réalisé en remplaçant au besoin A par un élément de son plan orthogonal, lequel plan ne peut être contenu dans le cône. ■

Remarque. On aurait pu obtenir cela comme conséquence du fait (déjà rencontré, cf. remarque page 64) que l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur \mathfrak{g} est irréductible.

0-C.9.2. Nous laissons au lecteur le soin de déduire facilement de la section précédente (voir aussi les exercices) que les orbites de $SL(2, \mathbb{R})$, opérant par conjugaison (c'est l'action adjointe) sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, sont les suivantes

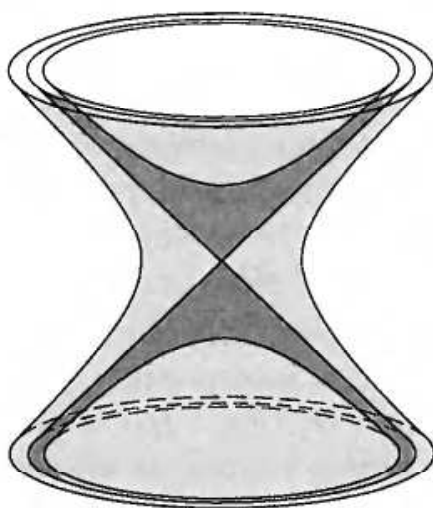


FIGURE 28

- (i) le sommet du cône nilpotent est laissé fixe,
- (ii) chaque composante du cône privé de son sommet est une orbite,
- (iii) les points situés en dehors du cône (il s'agit des matrices dont les valeurs propres sont réelles non nulles) ont pour orbites des hyperboloïdes à une nappe (asymptotes au cône nilpotent),
- (iv) et enfin les orbites des points situés dans chacune des composantes de

l'intérieur du cône sont données par des (moitiés d') hyperboloïdes à deux nappes (asymptotes aussi au cône nilpotent).

Proposition 1. *Les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de dimension deux sont données par les plans tangents au cône. Ce sont les sous-algèbres de Borel, vu qu'elles sont résolubles (maximales). Elles sont par ailleurs toutes conjuguées sous l'action adjointe du groupe $SL(2, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Vu le lemme 0-C.9.1.1, une sous-algèbre de dimension deux contient son orthogonal : elle est donc tangente au cône. Le reste est clair, car la forme T_0 est invariante par $SL(2, \mathbb{R})$, et les génératrices du cône sont conjuguées sous l'action de $SL(2, \mathbb{R})$. ■

On en déduit aussitôt que par une matrice nilpotente de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ il « passe » une seule sous-algèbre de Borel. De plus, les éléments d'une même algèbre de Borel ont leurs valeurs propres réelles et sont simultanément trigonalisables. Enfin, il existe exactement deux sous-algèbres de Borel qui passent par une matrice A située en dehors du cône nilpotent ; elles rencontrent l'orbite de A , qui est un hyperboloïde à une nappe, suivant quatre droites qui sont les génératrices de l'hyperboloïde qui passent par A et par son symétrique par rapport au sommet du cône. Une même sous-algèbre coupe l'hyperboloïde suivant deux droites parallèles, symétriques par rapport au sommet et parallèles à sa génératrice d'appui sur le cône nilpotent³⁷ : ceci se vérifie aisément dans le cas particulier de la sous-algèbre de Borel particulière de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ donnée par les matrices triangulaires supérieures de trace nulle et s'en déduit grâce à la conjugaison des différentes sous-algèbres de Borel.

Proposition 2. *Un élément de $SL(2, \mathbb{R})$ qui laisse fixes tous les points d'une sous-algèbre de Borel \mathfrak{b} donnée est égal à $\pm \text{Id}$.*

Démonstration. Soit g un tel élément. On va montrer que toutes les génératrices du cône sont des directions propres pour g ; il s'ensuivra que $\text{Ad}(g)$, et donc g , est scalaire. Soit D une génératrice générale. Le plan tangent \mathfrak{b}_D au cône nilpotent le long de D rencontre \mathfrak{b} suivant une droite qui est laissée par hypothèse invariante ; l'élément g qui transforme une sous-algèbre de Borel en une sous-algèbre ne peut envoyer \mathfrak{b}_D que sur elle-même et laisse donc invariante la droite d'appui D . ■

³⁷ Relevons le fait que l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe avec un plan tangent à son cône asymptote est donnée par deux droites parallèles à la génératrice d'appui du plan tangent le long du cône.

0-C.9.3. Les \mathfrak{sl}_2 -triplets dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Commençons par quelques considérations très simples.

- a) Si $\langle Y, H, X \rangle$ est un \mathfrak{sl}_2 -triplet, il en est de même de $\langle X, -H, Y \rangle$.
- b) Si de plus $g \in GL(2, \mathbb{R})$, alors $\langle g \cdot Y, g \cdot H, g \cdot X \rangle$ en est encore un. Retenons que $SL(2, \mathbb{R})$ transforme un \mathfrak{sl}_2 -triplet en un \mathfrak{sl}_2 -triplet.
- c) Si $\langle Y, H, X \rangle$ est un \mathfrak{sl}_2 -triplet, et si $\lambda \in \mathbb{R}$ est non nul, alors $\langle Y/\lambda, H, \lambda X \rangle$ est encore un \mathfrak{sl}_2 -triplet.

Proposition 1. *Les éléments centraux H des \mathfrak{sl}_2 -triplets vivent tous sur l'hyperboloïde à une nappe donné par l'orbite de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. On appellera leur ensemble l'hyperboloïde principal.*

Démonstration. Si H a pour valeurs propres α et $-\alpha$, l'endomorphisme $\text{ad}(H)$ a pour valeurs propres $-2\alpha, 0$ et 2α . Ceci entraîne $\alpha = \pm 1$. ■

On fixe un élément nilpotent $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, et on cherche à expliciter le degré de liberté dans le choix de H et de Y . On sait déjà que la connaissance de H et de X détermine Y uniquement, et que la composante neutre du stabilisateur de X dans $SL(2, \mathbb{R})$ opère transitivement sur le lieu des H possibles. On va retrouver cela géométriquement.

Proposition 2. *Une fois X nilpotent fixé dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, le lieu des H possibles est donné par une des deux droites formant l'intersection de l'hyperboloïde principal avec la sous-algèbre de Borel contenant X . Si par ailleurs H a été choisi, la matrice Y telle que $\langle Y, H, X \rangle$ soit un \mathfrak{sl}_2 -triplet est alors unique et appartient à la génératrice d'appui le long du cône nilpotent de la deuxième sous-algèbre de Borel passant par H .*

Démonstration. Un élément H possible vérifiant $[H, X] = 2X$ appartient à l'espace tangent en X au cône isotrope. Comme il est aussi sur l'hyperboloïde principal, il est sur leur intersection qui est la réunion de deux droites (D) et (D') parallèles à la génératrice Δ_X du cône passant par X . Choisissons H sur (D) ; l'équation $[H, Y] = -2Y$ a toute une droite de solutions en Y , à savoir la génératrice Δ_Y décrite dans l'énoncé de la proposition.

Il reste à trouver Y vérifiant $[X, Y] = H$. Si on note OH la droite vectorielle passant par H , l'application linéaire $Z \in \Delta \mapsto [X, Z] \in OH$ est bien définie et est injective, car $\mathfrak{z}(X) \cap \Delta = \Delta_X \cap \Delta = \{0\}$; elle est donc bijective. L'antécédent Y de H existe et est unique. ■

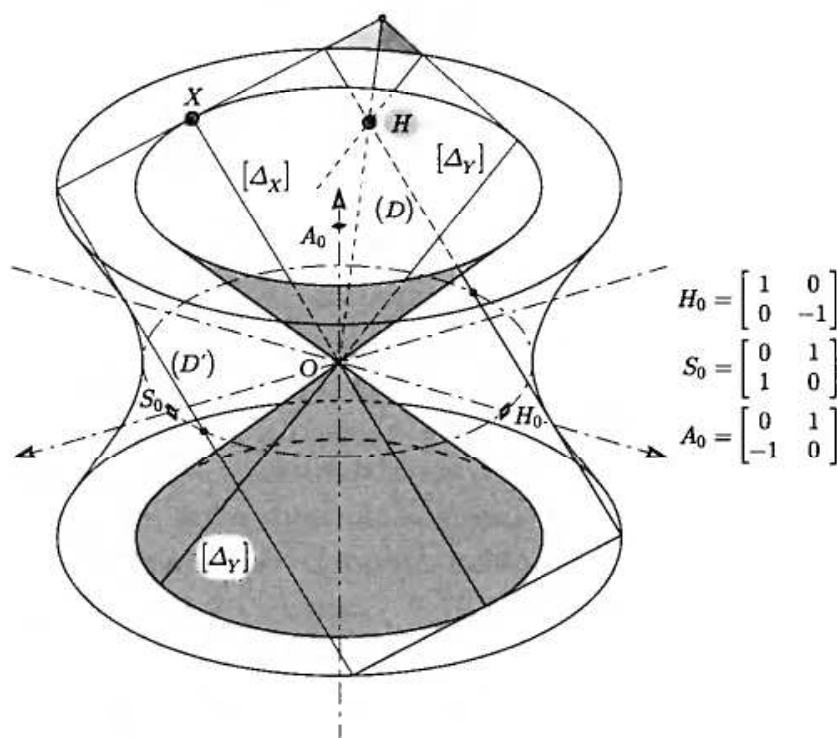


FIGURE 29

Proposition 3. *La composante neutre du stabilisateur dans $SL(2, \mathbb{R})$ de l'élément nilpotent X opère transitivement sur le lieu des H possibles. Il s'ensuit qu'il y a deux classes de conjugaison de \mathfrak{sl}_2 -triplets sous l'action de $SL(2, \mathbb{R})$.*

Démonstration. La deuxième assertion résulte clairement de la première si l'on se souvient, d'une part, qu'il y a deux orbites d'éléments nilpotents non nuls (données par les composantes connexes du cône privé de son sommet), et d'autre part, que les Y sont uniquement déterminés par X et les H possibles. Démontrons la première assertion. Tout d'abord, le stabilisateur de X laisse bien invariant le lieu des H , parce qu'il laisse stable la sous-algèbre de Borel passant par X et aussi, évidemment, l'hyperboloïde principal. Ceci dit, on peut être ramené à faire le calcul pour $X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: la composante neutre du stabilisateur est alors donnée par le groupe U de dimension 1 des matrices unipotentes supérieures, et son action sur la droite (D_0) passant par $H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et parallèle à OX_0 est transitive. Il est instructif d'en donner une autre preuve : l'orbite de $H \in (D)$ sous l'action du groupe U est fermée (ceci peut être constaté dans le cas algébrique à l'exercice 0-C.11.43, mais le résultat est encore valable pour les groupes de Lie réels, cf. [Co-Gr]); elle est donc aussi une sous-variété (fermée) de (D) et ne peut par ailleurs être réduite à un point,

car sinon, on aurait un élément non trivial de $SL(2, \mathbb{R})$ qui laisserait fixe toute l'algèbre de Borel passant par X , ce qui contredit **0-C.9.2.2**. Elle est donc égale à (D) . ■

Remarque. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{C})$ opérant sur les \mathfrak{sl}_2 -triplets de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, il n'y a qu'une seule orbite, car l'ensemble des éléments nilpotents (non nuls) est alors [cf. question d) de **0-C.11.52**] une seule orbite³⁸ sous l'action de $SL(2, \mathbb{C})$. On se doit aussi de noter que, dans le cas complexe, tous les éléments non situés sur le cône nilpotent sont indifférenciés, le complémentaire de cône dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ étant connexe : c'est le lieu des éléments où ne s'annule pas le polynôme déterminant (cf. exercice **0.11.51**), et les orbites des points semi-simples sont toutes des quadriques complexes, et donc difféomorphes à la sphère complexe de dimension deux.

0-C.9.4. Profils dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et sous-groupes de Cartan. On se propose d'étudier les profils de l'action adjointe de $SL(2, \mathbb{R})$. Rappelons que deux orbites ont même profil si les stabilisateurs de leurs points sont conjugués (cf. **0.11.2**). Il s'agit donc de déterminer ces stabilisateurs et d'étudier, pour un même profil, les points qui ont un même stabilisateur. Les orbites des éléments non nilpotents sont géométriquement de deux sortes : des hyperboloïdes à une nappe ou des moitiés d'hyperboloïdes à deux nappes ; cette distinction répartit en fait les orbites de ces éléments suivant leur profil.

Proposition. *Il y a deux profils pour les orbites des éléments semi-simples de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$: l'un coïncide avec la famille des orbites qui sont des hyperboloïdes à une nappe et l'autre avec la famille des orbites (semi-simples) restantes.*

Démonstration. L'idée essentielle est qu'ici les stabilisateurs sont commutatifs et égaux à leurs centralisateurs (il suffit de le vérifier pour les matrices

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix})$$

ils laissent par conséquent fixes les éléments de leurs algèbres de Lie. Inversement, si M est laissé fixe par le stabilisateur S , pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $\exp(tM)$ centralise S ; elle y est donc, et $M \in \text{Lie}(S)$. ■

³⁸ Relever le fait qu'en dimension supérieure ou égale à trois, un cône isotrope (complexe) non dégénéré sur \mathbb{C} auquel on ôte le sommet reste connexe. Retrouver cela à partir de l'irréductibilité (au sens algébrique), dans ce cas, du cône isotrope – cf. exercice **0-C.11.39**.

On appellera *sous-groupe de Cartan* de $SL(2, \mathbb{R})$ l'un quelconque des stabilisateurs des éléments semi-simples (réguliers) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. On peut donc énoncer qu'il existe dans $SL(2, \mathbb{R})$ deux classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan ayant pour représentants respectifs le sous-groupe des matrices diagonales et le sous-groupe orthogonal $SO(2)$.

On appellera *sous-algèbre de Cartan* l'ensemble des points (semi-simples réguliers) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ qui ont un stabilisateur donné. Assez miraculeusement, ce sont des sous-espaces vectoriels, et plus précisément les algèbres de Lie des sous-groupes de Cartan. L'ensemble de toutes les sous-algèbres de Cartan correspondant aux orbites des éléments semi-simples ayant des valeurs propres imaginaires s'identifie à un disque ouvert, alors que l'ensemble formé par les autres sous-algèbres s'identifie à un ruban de Möbius ouvert (c'est ce que l'on obtient quand on ôte un disque fermé au plan projectif formé des droites vectorielles de l'espace $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ que l'on a identifié à \mathbb{R}^3 – cf. exercice 0-C.11.67). On appelle les premières les sous-algèbres de *type fondamental* et les secondes les sous-algèbres de *type Iwasawa*. Le nombre de Weyl des orbites du profil fondamental est trivial, alors qu'il est égal à deux pour les orbites de type Iwasawa : ceci correspond au cardinal de l'intersection d'une sous-algèbre de Cartan avec chaque type d'orbites. Ce point de vue se généralise parfaitement aux groupes semi-simples généraux et donne une façon géométrique d'introduire les sous-groupes de Cartan dans ce cas. Il existe une autre façon de procéder, plus algébrique, qui consiste à traiter d'abord le cas complexe (cf. [Hum] où l'on définit dans le cadre algébriquement clos un sous-groupe de Cartan comme le centralisateur d'un tore maximal...) et à examiner ensuite ce qui se passe sur \mathbb{R} . Le coût est alors assez élevé, mais c'est sans doute la bonne méthode. Quoi qu'il en soit, ce qu'il est important de comprendre, c'est qu'il y a un nombre fini de profils, qui apparaissent « coincés » entre le profil fondamental et le profil Iwasawa. Par ailleurs, dans le cadre de la « méthode des orbites »³⁹, cette manière de faire est tout à fait indiquée, car finalement une sous-algèbre de Cartan n'est rien d'autre (ou presque, car il y a le nombre de Weyl – cf. exercice 0.11.54) qu'un paramétrage des orbites d'un même profil (semi-simple régulier).

³⁹ Cette méthode, proposée par Kirillov, consiste à étudier les représentations d'un groupe de Lie G à la lumière de la géométrie des orbites de G dans la représentation coadjointe, c'est-à-dire dans l'action de G sur le dual \mathfrak{g}^* de son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

0-C.9.5. Les automorphismes de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Nous allons déterminer dans ce paragraphe les automorphismes⁴⁰ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et constater qu'à part l'automorphisme donné par l'identité, ils ont chacun une droite (seulement) de points fixes. On peut dès maintenant le vérifier par exemple pour l'automorphisme $X \mapsto -{}^tX$.

Commençons par calculer la forme de Killing de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire, rappelons-le, la forme quadratique donnée par $X \mapsto \text{tr}(\text{ad } X)^2$. Il est facile (cf. exercice 0.11.51) de montrer que $\text{tr}(\text{ad } X)^2 = \alpha \text{tr}(X^2)$. Pour retrouver simplement la constante α , on fait $X = H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ce qui donne $\alpha = 4$. L'identification de la forme de Killing avec la forme quadratique $X \mapsto \text{tr}(X^2)$ permet de mieux comprendre les vertus de cette dernière forme quadratique, notamment le fait qu'elle est $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante, ou, encore mieux, qu'elle est invariante, comme la forme de Killing, sous l'action de n'importe quel automorphisme Φ de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (puisque $\text{ad } \Phi(X) = \Phi \circ \text{ad } X \circ \Phi^{-1}$).

Proposition. *Les automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sont donnés par les éléments du groupe orthogonal $SO(2, 1)$ de la forme quadratique $X \mapsto \text{tr}(X^2)$. Tout automorphisme non trivial possède donc une et une seule droite de points fixes, et cette droite de points fixes peut être quelconque.*

Démonstration. Les éléments de $SO(2, 1)$ sont caractérisés par le fait qu'ils préservent la forme quadratique $X \mapsto \text{tr}(X^2)$ et la forme trilinéaire alternée $(X, Y, Z) \mapsto 2 \text{tr}(X \cdot [Y, Z])$. La non dégénérescence de la forme de Killing implique clairement qu'ils préservent le crochet [voir aussi la remarque a) plus bas]. Inversement, un élément qui préserve le crochet préserve la forme de Killing, donc aussi la forme trilinéaire alternée; il est donc dans $SO(2, 1)$.

Tout élément Φ non trivial de $SO(2, 1)$ possède un axe de points fixes donné comme intersection des deux plans (non isotropes, c'est-à-dire ici non tangents au cône nilpotent) qui interviennent dans l'écriture de Φ comme produit de deux symétries hyperplanes (théorème de Cartan-Dieudonné – voir par exemple [Art]) par rapport à ces plans non isotropes. Et toute droite de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ peut être réalisée comme intersection de deux semblables plans. Enfin, si un automorphisme était trivial sur un plan tangent, il serait trivial (reproduire la démonstration de la proposition 0-C.9.2.2), et s'il était trivial sur un plan quelconque, il laisserait invariant

⁴⁰ Un automorphisme d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est un isomorphisme linéaire $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ vérifiant $\Phi([X, Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)]$.

son orthogonal qui est alors une droite propre transverse au plan; comme la troisième valeur propre est égale à 1, il serait donc encore trivial. ■

Remarques

a) Il se produit ici la chose suivante : la structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ que l'on peut représenter par une application $\wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est intimement liée tant à la forme quadratique (non dégénérée) $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ donnée par la forme de Killing qu'à la forme trilinéaire alternée rencontrée ci-dessus et que l'on peut représenter par une application $\wedge^3 \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, il est facile de vérifier que la composition

$$\wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

définit une dualité entre $\wedge^2 \mathfrak{g}$ et \mathfrak{g} qui est la même que celle donnée par la composition

$$(\wedge^2 \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \rightarrow \wedge^3 \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

où la première flèche est définie par le produit dans l'algèbre extérieure $\wedge(\mathfrak{g})$. Le crochet s'obtient donc en « quotientant » le déterminant par la forme de Killing; on comprend mieux de ce fait pourquoi les éléments de $SO(2, 1)$ induisent des automorphismes de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

b) Une symétrie hyperplane s'obtient comme la symétrie par rapport à un plan non tangent au cône, parallèlement à sa polaire par rapport au cône nilpotent. Un automorphisme quelconque de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est donc géométriquement facile à décrire.

c) On dispose d'un homomorphisme injectif du groupe connexe $PSL(2, \mathbb{R})$ dans la composante neutre $SO_0(2, 1)$ du groupe $SO(2, 1)$, homomorphisme donné par la représentation adjointe (qui préserve la forme de Killing). La différentielle de cet homomorphisme en l'élément neutre, qui applique l'algèbre de Lie du groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ dans l'algèbre de Lie du groupe $SO(2, 1)$, est encore injective; ces algèbres de Lie étant toutes les deux de dimension 3, la différentielle est donc également surjective, et l'image de l'homomorphisme considéré remplit par conséquent tout un voisinage (connexe) de l'élément neutre dans $SO(2, 1)^{41}$. On en déduit un isomorphisme entre $PSL(2, \mathbb{R})$ et $SO_0(2, 1)$.

Les automorphismes ainsi obtenus préservent tous l'une et l'autre des nappes du cône isotrope; l'automorphisme $X \mapsto -{}^tX$ est donc dans la composante neutre du groupe des automorphismes de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Le groupe $PGL(2, \mathbb{R})$ s'injecte lui aussi dans $SO(2, 1)$, puisqu'il induit aussi des automorphismes de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$; comme il n'est pas égal à $PSL(2, \mathbb{R})$, qui en est un sous-groupe d'indice 2, il est en fait isomorphe à $SO(2, 1)$.

⁴¹ Cf. [Mn-Ts], page 126, pour les détails de ce type de raisonnement, déjà évoqué à la page 137 du présent ouvrage.

d) La propriété pour un automorphisme de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ d'avoir toujours des points fixes non triviaux contraste avec celle de l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{u}(n, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures strictes, pour laquelle il existe de nombreux automorphismes (considérer par exemple les automorphismes qu'induisent par conjugaison les matrices diagonales à valeurs propres distinctes) dont le seul point fixe est la matrice nulle.

e) Lorsqu'on se place sur \mathbb{C} , les mêmes considérations prouvent que le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est quant à lui connexe et isomorphe à $PGL(2, \mathbb{C})$, ou encore à $SO(3, \mathbb{C})$ – voir aussi 0-B.7.6.

f) On trouvera dans l'exercice 0-C.11.69 une présentation élémentaire de l'isomorphisme $PGL(2, \mathbb{R}) \simeq SO(2, 1)$.

0-C.10 Appendice 3 – Scholie informatique pour orbites nilpotentes

A. Arabia a rédigé ce scholie à notre intention personnelle pour nous convaincre de la faisabilité de réaliser par un outil informatique le graphe des orbites nilpotentes. Nous avons pris la liberté d'insérer ce scholie dans le texte.

Comme nous l'avons déjà vu, les orbites nilpotentes de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ sont paramétrées par les partitions $n = a_1 + a_2 + \dots + a_r$ satisfaisant $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r > 0$. Les suites (a_1, a_2, \dots, a_r) vont donc fournir immédiatement les tailles des lignes du tableau de Young associé aux endomorphismes de l'orbite ainsi paramétrée.

Notons $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions de n . La caractérisation récursive de $\mathcal{P}(n)$ procède de l'observation élémentaire que pour tout élément (a_1, a_2, \dots, a_r) de $\mathcal{P}(n)$, la sous-suite $(a'_1, \dots, a'_{r-1}) := (a_2, \dots, a_r)$ détermine un élément de $\mathcal{P}(n - a_1)$ vérifiant $a_1 \geq a'_1$. Ceci nous amène à introduire la notion de *partition bornée*. Pour des entiers positifs ou nuls m et b donnés, notons $\mathcal{P}(m; b)$ l'ensemble des partitions (a_1, a_2, \dots, a_r) de $\mathcal{P}(m)$ telles que $b \geq a_1$. Il est clair que

- a) $\mathcal{P}(m) = \mathcal{P}(m; m)$,
- b) $\mathcal{P}(m; b) = \mathcal{P}(m; \inf(m, b))$,
- c) $\mathcal{P}(m; b) = \emptyset$, si $m = 0$ ou $b = 0$.

Les ensembles $\mathcal{P}(m; b)$ sont liés récursivement par la relation

$$d) \mathcal{P}(m; b) = \coprod_{a=1}^{\inf(m, b)} a \vee \mathcal{P}(m - a; a),$$

où $a \vee \mathcal{P}(m - a; a)$ dénote l'ensemble des suites (a, a_1, \dots, a_r) avec $(a_1, \dots, a_r) \in \mathcal{P}(m - a; a)$. Ainsi, tout langage de programmation adapté aux procédures récursives permettra la création d'un tableau de struc-

tures ou d'une base de données rassemblant toutes les suites de $\mathcal{P}(n)$, et permettant dans un deuxième temps, des recherches particulières.

Dans le cas de $\mathfrak{sl}(15, \mathbb{C})$ par exemple, on a créé la base de données « young » en lui incorporant les dimensions des orbites. Voici son contenu

\Young 1 (210) [15]	\Young 37 (184) [8,4,1,1,1]
\Young 2 (208) [14,1]	\Young 38 (186) [8,3,3,1]
\Young 3 (206) [13,2]	\Young 39 (184) [8,3,2,2]
\Young 4 (204) [13,1,1]	\Young 40 (182) [8,3,2,1,1]
\Young 5 (204) [12,3]	\Young 41 (176) [8,3,1,1,1,1]
\Young 6 (202) [12,2,1]	\Young 42 (178) [8,2,2,2,1]
\Young 7 (198) [12,1,1,1]	\Young 43 (174) [8,2,2,1,1,1]
\Young 8 (202) [11,4]	\Young 44 (166) [8,2,1,1,1,1,1]
\Young 9 (200) [11,3,1]	\Young 45 (154) [8,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 10 (198) [11,2,2]	\Young 46 (192) [7,7,1]
\Young 11 (196) [11,2,1,1]	\Young 47 (190) [7,6,2]
\Young 12 (190) [11,1,1,1,1]	\Young 48 (188) [7,6,1,1]
\Young 13 (200) [10,5]	\Young 49 (188) [7,5,3]
\Young 14 (198) [10,4,1]	\Young 50 (186) [7,5,2,1]
\Young 15 (196) [10,3,2]	\Young 51 (182) [7,5,1,1,1]
\Young 16 (194) [10,3,1,1]	\Young 52 (186) [7,4,4]
\Young 17 (192) [10,2,2,1]	\Young 53 (184) [7,4,3,1]
\Young 18 (188) [10,2,1,1,1]	\Young 54 (182) [7,4,2,2]
\Young 19 (180) [10,1,1,1,1,1]	\Young 55 (180) [7,4,2,1,1]
\Young 20 (198) [9,6]	\Young 56 (174) [7,4,1,1,1,1]
\Young 21 (196) [9,5,1]	\Young 57 (180) [7,3,3,2]
\Young 22 (194) [9,4,2]	\Young 58 (178) [7,3,3,1,1]
\Young 23 (192) [9,4,1,1]	\Young 59 (176) [7,3,2,2,1]
\Young 24 (192) [9,3,3]	\Young 60 (172) [7,3,2,1,1,1]
\Young 25 (190) [9,3,2,1]	\Young 61 (164) [7,3,1,1,1,1,1]
\Young 26 (186) [9,3,1,1,1]	\Young 62 (170) [7,2,2,2,2]
\Young 27 (186) [9,2,2,2]	\Young 63 (168) [7,2,2,2,1,1]
\Young 28 (184) [9,2,2,1,1]	\Young 64 (162) [7,2,2,1,1,1,1]
\Young 29 (178) [9,2,1,1,1,1]	\Young 65 (152) [7,2,1,1,1,1,1,1]
\Young 30 (168) [9,1,1,1,1,1,1]	\Young 66 (138) [7,1,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 31 (196) [8,7]	\Young 67 (186) [6,6,3]
\Young 32 (194) [8,6,1]	\Young 68 (184) [6,6,2,1]
\Young 33 (192) [8,5,2]	\Young 69 (180) [6,6,1,1,1]
\Young 34 (190) [8,5,1,1]	\Young 70 (184) [6,5,4]
\Young 35 (190) [8,4,3]	\Young 71 (182) [6,5,3,1]
\Young 36 (188) [8,4,2,1]	\Young 72 (180) [6,5,2,2]

\Young 73 (178) [6,5,2,1,1]	\Young 114 (154) [5,3,2,2,1,1,1]
\Young 74 (172) [6,5,1,1,1,1]	\Young 115 (146) [5,3,2,1,1,1,1,1]
\Young 75 (180) [6,4,4,1]	\Young 116 (134) [5,3,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 76 (178) [6,4,3,2]	\Young 117 (150) [5,2,2,2,2,2]
\Young 77 (176) [6,4,3,1,1]	\Young 118 (148) [5,2,2,2,2,1,1]
\Young 78 (174) [6,4,2,2,1]	\Young 119 (142) [5,2,2,2,1,1,1,1]
\Young 79 (170) [6,4,2,1,1,1]	\Young 120 (132) [5,2,2,1,1,1,1,1,1]
\Young 80 (162) [6,4,1,1,1,1,1]	\Young 121 (118) [5,2,1,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 81 (174) [6,3,3,3]	\Young 122 (100) [5,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 82 (172) [6,3,3,2,1]	\Young 123 (168) [4,4,4,3]
\Young 83 (168) [6,3,3,1,1,1]	\Young 124 (166) [4,4,4,2,1]
\Young 84 (168) [6,3,2,2,2]	\Young 125 (162) [4,4,4,1,1,1]
\Young 85 (166) [6,3,2,2,1,1]	\Young 126 (164) [4,4,3,3,1]
\Young 86 (160) [6,3,2,1,1,1,1]	\Young 127 (162) [4,4,3,2,2]
\Young 87 (150) [6,3,1,1,1,1,1,1]	\Young 128 (160) [4,4,3,2,1,1]
\Young 88 (160) [6,2,2,2,2,1]	\Young 129 (154) [4,4,3,1,1,1,1]
\Young 89 (156) [6,2,2,2,1,1,1]	\Young 130 (156) [4,4,2,2,2,1]
\Young 90 (148) [6,2,2,1,1,1,1,1]	\Young 131 (152) [4,4,2,2,1,1,1]
\Young 91 (136) [6,2,1,1,1,1,1,1,1]	\Young 132 (144) [4,4,2,1,1,1,1,1]
\Young 92 (120) [6,1,1,1,1,1,1,1,1,1]	\Young 133 (132) [4,4,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 93 (180) [5,5,5]	\Young 134 (158) [4,3,3,3,2]
\Young 94 (178) [5,5,4,1]	\Young 135 (156) [4,3,3,3,1,1]
\Young 95 (176) [5,5,3,2]	\Young 136 (154) [4,3,3,2,2,1]
\Young 96 (174) [5,5,3,1,1]	\Young 137 (150) [4,3,3,2,1,1,1]
\Young 97 (172) [5,5,2,2,1]	\Young 138 (142) [4,3,3,1,1,1,1,1]
\Young 98 (168) [5,5,2,1,1,1]	\Young 139 (148) [4,3,2,2,2,2]
\Young 99 (160) [5,5,1,1,1,1,1]	\Young 140 (146) [4,3,2,2,2,1,1]
\Young 100 (174) [5,4,4,2]	\Young 141 (140) [4,3,2,2,1,1,1,1]
\Young 101 (172) [5,4,4,1,1]	\Young 142 (130) [4,3,2,1,1,1,1,1,1]
\Young 102 (172) [5,4,3,3]	\Young 143 (116) [4,3,1,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 103 (170) [5,4,3,2,1]	\Young 144 (138) [4,2,2,2,2,2,1]
\Young 104 (166) [5,4,3,1,1,1]	\Young 145 (134) [4,2,2,2,2,1,1,1]
\Young 105 (166) [5,4,2,2,2]	\Young 146 (126) [4,2,2,2,1,1,1,1,1]
\Young 106 (164) [5,4,2,2,1,1]	\Young 147 (114) [4,2,2,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 107 (158) [5,4,2,1,1,1,1]	\Young 148 (98) [4,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 108 (148) [5,4,1,1,1,1,1,1]	\Young 149 (78) [4,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]
\Young 109 (166) [5,3,3,3,1]	\Young 150 (150) [3,3,3,3,3]
\Young 110 (164) [5,3,3,2,2]	\Young 151 (148) [3,3,3,3,2,1]
\Young 111 (162) [5,3,3,2,1,1]	\Young 152 (144) [3,3,3,3,1,1,1]
\Young 112 (156) [5,3,3,1,1,1,1]	\Young 153 (144) [3,3,3,2,2,2]
\Young 113 (158) [5,3,2,2,2,1]	\Young 154 (142) [3,3,3,2,2,1,1]

<code>\Young 155 (136) [3,3,3,2,1,1,1,1]</code>	<code>\Young 166 (94) [3,2,2,1,1,1,1,1,1,1]</code>
<code>\Young 156 (126) [3,3,3,1,1,1,1,1,1]</code>	<code>\Young 167 (76) [3,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1]</code>
<code>\Young 157 (136) [3,3,2,2,2,2,1]</code>	<code>\Young 168 (54) [3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]</code>
<code>\Young 158 (132) [3,3,2,2,2,1,1,1]</code>	<code>\Young 169 (112) [2,2,2,2,2,2,2,1]</code>
<code>\Young 159 (124) [3,3,2,2,1,1,1,1,1]</code>	<code>\Young 170 (108) [2,2,2,2,2,2,1,1,1]</code>
<code>\Young 160 (112) [3,3,2,1,1,1,1,1,1,1]</code>	<code>\Young 171 (100) [2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1]</code>
<code>\Young 161 (96) [3,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1]</code>	<code>\Young 172 (88) [2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1]</code>
<code>\Young 162 (126) [3,2,2,2,2,2,2]</code>	<code>\Young 173 (72) [2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1]</code>
<code>\Young 163 (124) [3,2,2,2,2,2,1,1]</code>	<code>\Young 174 (52) [2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]</code>
<code>\Young 164 (118) [3,2,2,2,2,1,1,1,1]</code>	<code>\Young 175 (28) [2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]</code>
<code>\Young 165 (108) [3,2,2,2,1,1,1,1,1,1]</code>	<code>\Young 176 (0) [1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]</code>

L'explication des données suivant la « macro » \TeX « `\Young` » est la suivante

`\Young <#1> (<#2>) [<#3>]`

#1 : Numéro d'ordre lexicographique inverse de la partition.

#2 : Dimension de l'orbite nilpotente correspondante.

#3 : Partition de 15 du cas considéré.

La recherche des tableaux autoduaux a mis en évidence quatre tableaux, dont le contenu est

<code>\Young 45 (154) [8,1,1,1,1,1,1,1]</code>	<code>\Young 103 (170) [5,4,3,2,1]</code>
<code>\Young 83 (168) [6,3,3,1,1,1]</code>	<code>\Young 123 (168) [4,4,4,3]</code>

Une définition *ad hoc* de la macro « `\Young` » permet de représenter ces dernières informations par

$$\begin{array}{ll}
 45) \dim(\mathcal{O} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & & & & \\ \square & & & & & & & \\ \square & & & & & & & \\ \square & & & & & & & \\ \square & & & & & & & \\ \square & & & & & & & \\ \square & & & & & & & \\ \hline \end{array} \right)) = 154 & 83) \dim(\mathcal{O} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & \\ \hline \end{array} \right)) = 168 \\
 103) \dim(\mathcal{O} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \hline \end{array} \right)) = 170 & 123) \dim(\mathcal{O} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right)) = 168
 \end{array}$$

où $\mathcal{O}(\langle \text{tableau} \rangle)$ désigne l'orbite nilpotente paramétrée par $\langle \text{tableau} \rangle$.

Ceci étant, on crée la base de données nommée « *gr* » nécessaire à la représentation du graphe de la relation d'incidence entre les adhérences des orbites nilpotentes. La voici, toujours pour le cas de $\mathfrak{sl}(15, \mathbb{C})$,

$gr(1, [2])$	$gr(6, [7,9])$	$gr(11, [12,16])$
$gr(2, [3])$	$gr(7, [11])$	$gr(12, [18])$
$gr(3, [4,5])$	$gr(8, [9,13])$	$gr(13, [14,20])$
$gr(4, [6])$	$gr(9, [10,14])$	$gr(14, [15,21])$
$gr(5, [6,8])$	$gr(10, [11,15])$	$gr(15, [16,22])$

gr(16, [17,23])	gr(60, [61,63,79])	gr(104, [106,125])
gr(17, [18,25])	gr(61, [64,80])	gr(105, [106,110])
gr(18, [19,26])	gr(62, [63,84])	gr(106, [107,111])
gr(19, [29])	gr(63, [64,85])	gr(107, [108,112])
gr(20, [21,31])	gr(64, [65,86])	gr(108, [115])
gr(21, [22,32])	gr(65, [66,87])	gr(109, [110,126])
gr(22, [23,24,33])	gr(66, [91])	gr(110, [111,127])
gr(23, [25,34])	gr(67, [68,70])	gr(111, [112,113,128])
gr(24, [25,35])	gr(68, [69,71])	gr(112, [114,129])
gr(25, [26,27,36])	gr(69, [73])	gr(113, [114,117,130])
gr(26, [28,37])	gr(70, [71,93])	gr(114, [115,118,131])
gr(27, [28,39])	gr(71, [72,75])	gr(115, [116,119,132])
gr(28, [29,40])	gr(72, [73,76])	gr(116, [120,133])
gr(29, [30,41])	gr(73, [74,77])	gr(117, [118,139])
gr(30, [44])	gr(74, [79])	gr(118, [119,140])
gr(31, [32])	gr(75, [76,94])	gr(119, [120,141])
gr(32, [33,46])	gr(76, [77,81,95])	gr(120, [121,142])
gr(33, [34,35,47])	gr(77, [78,96])	gr(121, [122,143])
gr(34, [36,48])	gr(78, [79,82,97])	gr(122, [148])
gr(35, [36,49])	gr(79, [80,83,98])	gr(123, [124])
gr(36, [37,38,50])	gr(80, [86,99])	gr(124, [125,126])
gr(37, [40,51])	gr(81, [82,102])	gr(125, [128])
gr(38, [39,53])	gr(82, [83,84,103])	gr(126, [127])
gr(39, [40,54])	gr(83, [85,104])	gr(127, [128,134])
gr(40, [41,42,55])	gr(84, [85,105])	gr(128, [129,130,135])
gr(41, [43,56])	gr(85, [86,88,106])	gr(129, [131])
gr(42, [43,59])	gr(86, [87,89,107])	gr(130, [131,136])
gr(43, [44,60])	gr(87, [90,108])	gr(131, [132,137])
gr(44, [45,61])	gr(88, [89,113])	gr(132, [133,138])
gr(45, [65])	gr(89, [90,114])	gr(133, [142])
gr(46, [47])	gr(90, [91,115])	gr(134, [135,150])
gr(47, [48,49])	gr(91, [92,116])	gr(135, [136])
gr(48, [50])	gr(92, [121])	gr(136, [137,139,151])
gr(49, [50,52,67])	gr(93, [94])	gr(137, [138,140,152])
gr(50, [51,53,68])	gr(94, [95])	gr(138, [141])
gr(51, [55,69])	gr(95, [96,100])	gr(139, [140,153])
gr(52, [53,70])	gr(96, [97,101])	gr(140, [141,144,154])
gr(53, [54,71])	gr(97, [98,103])	gr(141, [142,145,155])
gr(54, [55,57,72])	gr(98, [99,104])	gr(142, [143,146,156])
gr(55, [56,58,73])	gr(99, [107])	gr(143, [147])
gr(56, [60,74])	gr(100, [101,102])	gr(144, [145,157])
gr(57, [58,76])	gr(101, [103])	gr(145, [146,158])
gr(58, [59,77])	gr(102, [103,123])	gr(146, [147,159])
gr(59, [60,62,78])	gr(103, [104,105,109,124])	gr(147, [148,160])

$gr(148, [149, 161])$	$gr(158, [159, 163])$	$gr(168, [174])$
$gr(149, [167])$	$gr(159, [160, 164])$	$gr(169, [170])$
$gr(150, [151])$	$gr(160, [161, 165])$	$gr(170, [171])$
$gr(151, [152, 153])$	$gr(161, [166])$	$gr(171, [172])$
$gr(152, [154])$	$gr(162, [163])$	$gr(172, [173])$
$gr(153, [154])$	$gr(163, [164, 169])$	$gr(173, [174])$
$gr(154, [155, 157])$	$gr(164, [165, 170])$	$gr(174, [175])$
$gr(155, [156, 158])$	$gr(165, [166, 171])$	$gr(175, [176])$
$gr(156, [159])$	$gr(166, [167, 172])$	$gr(176, [])$
$gr(157, [158, 162])$	$gr(167, [168, 173])$	

L'explication des paramètres du prédicat « gr » est la suivante

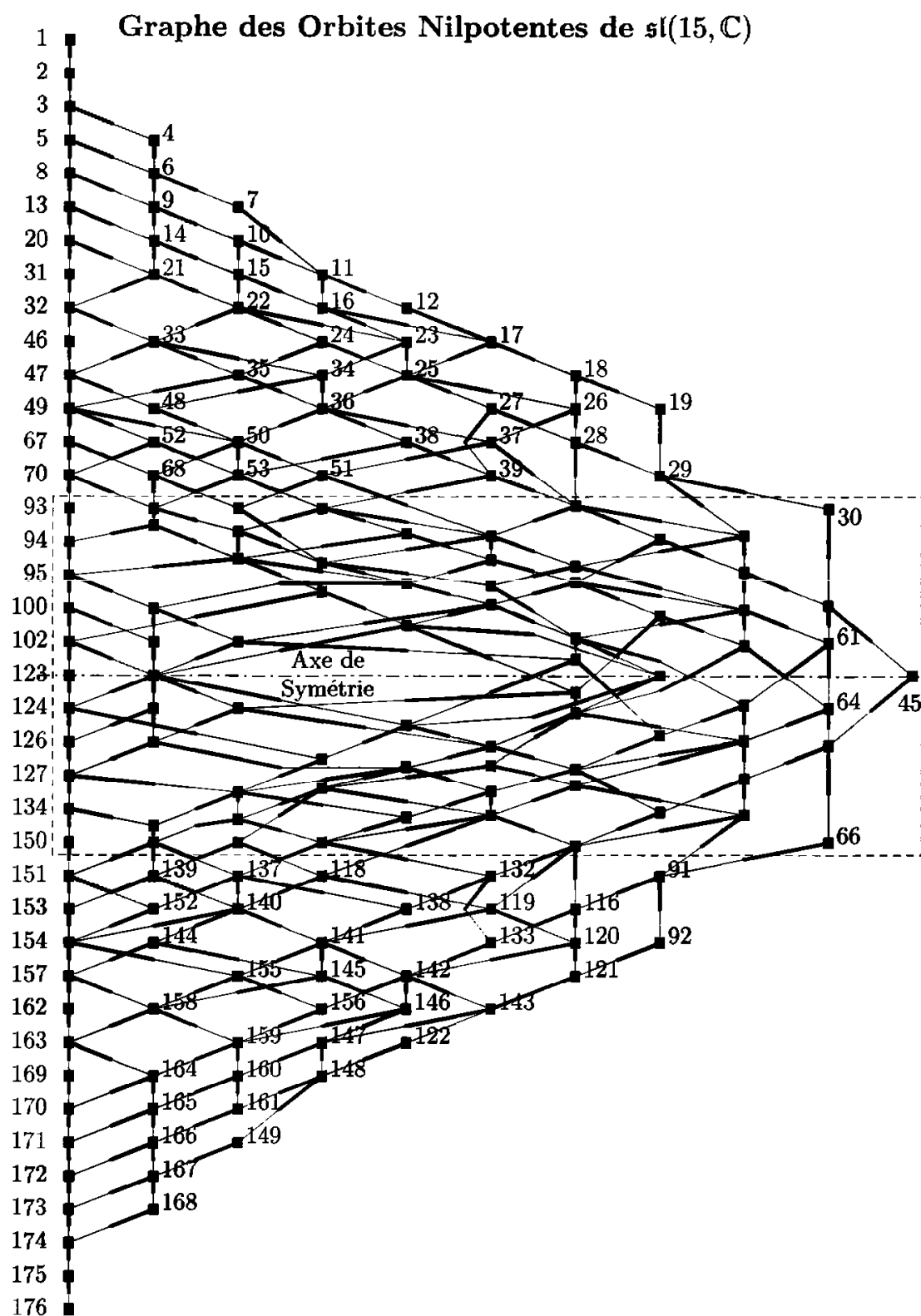
$$gr(\langle \#1 \rangle, [\langle \#2 \rangle])$$

#1 : Numéro d'ordre lexicographique inverse du tableau.

#2 : Liste des numéros d'ordre des tableaux sous-adjacents⁴².

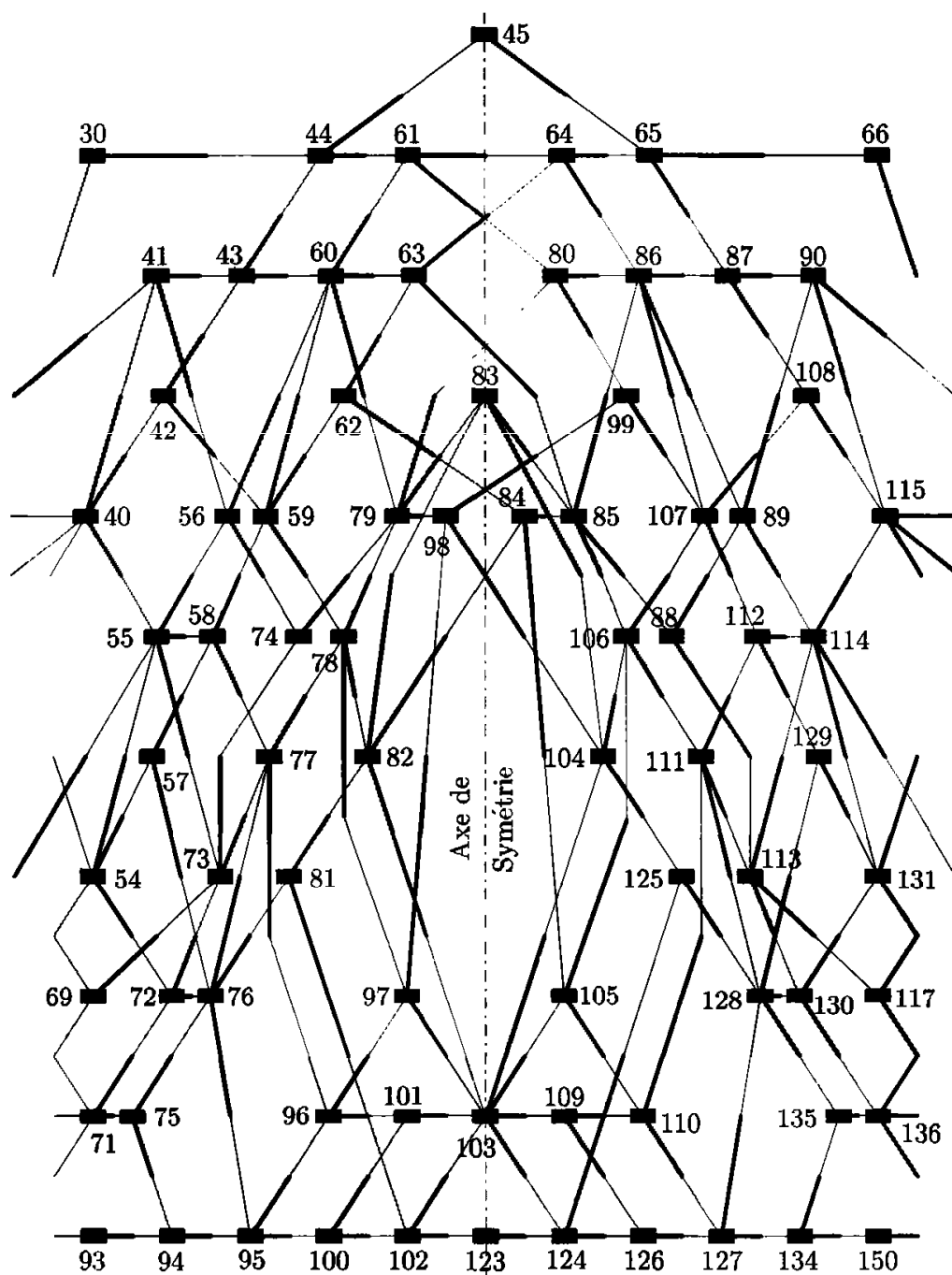
On trouvera enfin, sur la page suivante, la représentation graphique de la relation d'incidence entre les adhérences des orbites nilpotentes de $\mathfrak{sl}(15, \mathbb{C})$. Nous indiquons par $m \text{ --- } n$, ou encore $m \text{ ---} n$, le fait que l'adhérence de l'orbite m contient l'orbite n .

⁴² Dans un ensemble partiellement ordonné (E, \preceq) , nous disons que $m \in E$ est sous-adjacent à $n \in E$, si $m \neq n$, si $m \preceq n$, et si la relation $m \preceq x \preceq n$ est uniquement vérifiée pour $x = m$ ou $x = n$.



Un agrandissement de la partie encadrée, tourné de 90° , est donné ci-contre.

Détail du Graphe des Orbites Nilpotentes de $\mathfrak{sl}(15, \mathbb{C})$



0-C.11 Exercices

Rappelons que les séparateurs horizontaux entre les énoncés indiquent un changement de thème.

0-C.11.1. La réduction de Jordan. Elle se démontre facilement à partir du moment où l'on a en tête les injections de Frobenius : si donc A est une matrice nilpotente d'indice k , on commence par choisir un système de représentants dans E d'une base de $E/\text{Ker } A^{k-1}$, soit b_1, \dots, b_p . Il y aura p cellules de Jordan de taille maximale k obtenues chacune à partir d'un des b_i en l'itérant successivement par A . On recommence ensuite avec un système de représentants dans $\text{Ker } A^{k-1}$ d'une famille d'éléments (éventuellement vide) du quotient $\text{Ker } A^{k-1}/\text{Ker } A^{k-2}$ qui complète la famille libre $\overline{A(b_1)}, \dots, \overline{A(b_p)}$ en une base de ce quotient; chacun de ces représentants (s'il en existe) génère une cellule de Jordan de taille $k-1$ (et également une ligne de longueur $k-1$ dans le tableau de Young!). Le processus ainsi répété donne naissance à une base de E qui, lorsqu'elle est convenablement ordonnée, donne une base pour la réduction de Jordan canonique de A . Vérifier que l'on a bien compris en montrant par exemple que la dimension de $\text{Ker } A \cap \text{Im } A$ est égale au nombre de lignes de longueur supérieure ou égale à 2 dans le tableau de Young (associé à la valeur propre 0) de la matrice A .

0-C.11.2. Valeurs propres. a) Rappeler brièvement comment on établit que pour une matrice A , la multiplicité d'une valeur propre λ dans le polynôme caractéristique est égale à la dimension du sous-espace spectral $F_A(\lambda)$, celui-ci étant le plus grand des noyaux itérés $\text{Ker}(A - \lambda \text{Id})^p$, et que la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de A est le rang à partir duquel la même suite des noyaux devient stationnaire. En déduire qu'une matrice A est diagonalisable si et seulement si, pour toute valeur propre λ , on a $\text{Ker}(A - \lambda \text{Id}) = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})^2$, ou encore si et seulement si le polynôme minimal a toutes ses racines simples, ou encore si et seulement si, pour toute valeur propre λ , on a $E = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id}) \oplus \text{Im}(A - \lambda \text{Id})$, ou encore si et seulement si, pour toute valeur propre λ , la dimension du sous-espace propre associé à λ est égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.

b) Un joli exemple est donné par la matrice $A_{n,a}$ d'ordre n et dont tous les coefficients sont égaux à 1 sauf celui qui est en position $1, n$ et qui vaut a . Montrer que si le corps est de caractéristique nulle, la matrice $A_{n,a}$ est diagonalisable si et seulement si $a \neq (1 - n^2/4)$. Exhiber dans le cas

exceptionnel une base où elle est sous forme de Jordan. Qu'advient-il en caractéristique quelconque ?

INDICATION.— Pour le calcul du polynôme caractéristique, on pourra passer par les mineurs principaux⁴³, qui sont particulièrement faciles à obtenir. Remarquer enfin que dans le cas exceptionnel, on a $[A - (n/2)\text{Id}]^2(e_1) = 0$, où e_1 est le premier vecteur de la base (canonique) de départ.

0-C.11.3. La comatrice. a) Montrer que l'application qui à une matrice X associe sa comatrice \tilde{X} vérifie $X\tilde{X} = \tilde{X}X = \det(X)\text{Id}$ et $\widetilde{\tilde{X}Y} = \tilde{Y}\tilde{X}$.

b) Montrer que si X est d'ordre n , on a $\det(\tilde{X}) = (\det X)^{n-1}$ et $\tilde{\tilde{X}} = \det(X)^{n-2}X$.

c) Déterminer l'image de l'application $X \mapsto \tilde{X}$ définie sur $M(n, \mathbb{C})$.

INDICATION.— On trouve toutes les matrices inversibles, toutes les matrices de rang $n-1$, et la matrice nulle. Pour démontrer que toute matrice de rang $(n-1)$ est atteinte, on pourra penser à l'action de Steinitz.

d) Soit A une matrice non inversible. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\tilde{A} = (-1)^{n-1}A^{n-1}$.

e) On suppose N nilpotente. Montrer que N est semblable à un bloc de Jordan si et seulement si \tilde{N} est non nulle.

f) Soit A une matrice de rang $n-1$. Montrer que la matrice \tilde{A} est diagonalisable si et seulement si elle n'est pas nilpotente, ou encore $\tilde{A}^2 \neq 0$, ou encore $\text{tr}(\tilde{A}) \neq 0$, ou encore $\dim \text{Ker}(A^2) \neq 2$, ou encore 0 est racine simple du polynôme minimal de A , ou encore 0 est racine simple du polynôme caractéristique de A , ou enfin le noyau de A est inclus dans son image.

g) Montrer que si $\text{tr}(\tilde{A}) \neq 0$, alors 0 est au plus racine simple du polynôme caractéristique.

h) Montrer que la matrice carrée $M = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$ d'ordre n , où X et Z

sont d'ordre k et $n-k$ respectivement, est de rang $n-1$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée : ou bien les matrices X et Z sont singulières de rang un de moins que leur ordre, et $\tilde{X}Y\tilde{Z} \neq 0$, ou bien l'une est inversible et l'autre de rang un de moins que son ordre.

INDICATION.— Remarquer que la comatrice de M est

$$\begin{bmatrix} \det(Z)\tilde{X} & -\tilde{X}Y\tilde{Z} \\ 0 & \det(X)\tilde{Z} \end{bmatrix}.$$

⁴³ Le coefficient de X^{n-k} dans le polynôme caractéristique étant égal (au signe près) à la somme des mineurs principaux d'ordre k .

i) Montrer que si X est singulière, la matrice $\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & X \end{bmatrix}$ est de rang $n - 1$

si $\text{tr}(\tilde{X}Y) \neq 0$

INDICATION.— Utiliser le fait que le carré de $\tilde{X}Y$ est non nul, car une matrice de rang un dont la trace est non nulle ne peut être nilpotente (cf. exercice suivant).

j) Montrer que si $A \in M(n, \mathbb{C})$ vérifie $\text{tr}(\tilde{A}) = 0$, alors l'origine est dans l'enveloppe convexe des valeurs propres de A .

INDICATION.— Si $\sum 1/\lambda_i = 0$ alors $\sum (1/|\lambda_i|^2)\lambda_i = 0$.

k) Montrer que pour toute matrice A , la comatrice \tilde{A} est un polynôme en A .

INDICATION.— Considérer le polynôme $C_A(X)$ défini par $[-p_A(X) + \det(A)] = XC_A(X)$, où $p_A(X)$ est le polynôme caractéristique de A .

0-C.11.4. Rang 1 et similitude. L'objet de l'exercice est de proposer une méthode de fabrication de matrices (non trivialement) semblables et qui utilise un minimum de calculs. Cette méthode est fondée sur la classification, pour les matrices de rang 1, des classes d'équivalence pour la relation de similitude.

a) Soit $(E_{ij})_{i,j}$ la base canonique de $M(n, \mathbb{K})$. Déterminer les couples (i, j) tels que E_{12} et E_{ij} soient semblables. De même, déterminer les couples (i, j) tels que E_{ij} et $\lambda \cdot E_{ij}$ (où λ est un scalaire quelconque non nul) soient semblables.

b) Montrer que si la matrice M est de rang 1, alors M est semblable à E_{21} ou à $\mu \cdot E_{nn}$, où μ est un scalaire bien défini. En déduire que deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

c) Montrer que si A et B sont semblables, il en est de même des matrices $A - \lambda \cdot \text{Id}_n$ et $B - \lambda \cdot \text{Id}_n$ pour tout scalaire λ . Compléter les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 2 & * & * \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 6 & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & 1 & * \end{bmatrix}$$

en deux matrices de rang 1 et qui soient semblables. En leur ajoutant $2 \cdot \text{Id}_3$, écrire les deux matrices non trivialement semblables que l'on obtient.

Montrer enfin que les deux matrices

$$\begin{bmatrix} -7 & 6 & 9 \\ 3 & -4 & 9 \\ 6 & 12 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -13 & -9 & -4 \\ 6 & 8 & 8 \\ 9 & 27 & 2 \end{bmatrix}$$

sont semblables, sachant qu'elles ont été fabriquées au moyen du procédé

ci-dessus. Même question pour les matrices

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -3 \\ 2 & 12 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

0-C.11.5. (Pour débutants). Montrer que la cellule de Jordan J_{2n} , où $n > 0$, ne peut être semblable à une matrice antisymétrique A à coefficients dans \mathbb{C} .

La bonne façon de procéder est de dire que le rang d'une matrice antisymétrique est pair alors que le rang de J_{2n} est égal à $2n - 1$. Mais on évitera le résultat concernant le rang d'une matrice antisymétrique, résultat qui suppose quelques rudiments concernant les formes bilinéaires antisymétriques. On raisonne par l'absurde : la matrice A^{2n-1} serait semblable à J_{2n}^{2n-1} . Cette dernière matrice, que l'on peut expliciter, est de rang 1. Or, le fait que tous les mineurs (principaux) d'ordre 2 d'une matrice antisymétrique soient nuls implique qu'elle est nulle.

0-C.11.6. a) Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle et soit $M \in M(n, \mathbb{K})$ une matrice dont les puissances M^k pour $1 \leq k \leq n$ sont toutes de trace nulle. Montrer que M est nilpotente.

INDICATION.— Une première méthode consiste à utiliser les relations entre les fonctions symétriques élémentaires des racines λ_i , $i = 1, \dots, n$ d'un polynôme et leurs sommes de Newton $S_k = \sum \lambda_i^k$, pour établir que le polynôme caractéristique de M est de la forme $(-1)^n X^n$; et l'on conclut grâce au théorème de Cayley-Hamilton. Une autre méthode consiste à déduire d'abord de l'hypothèse que le terme constant dans le polynôme minimal de M est nul; par suite le noyau de M est non nul. Une base de l'espace vectoriel avec un premier vecteur annulé par M ayant été choisie, un raisonnement par récurrence peut s'engager.

b) On suppose que $[A, B] = B$. Montrer que B est nilpotente. Montrer plus généralement que si $[X, Y]$ commute avec X , la matrice $[X, Y]$ est nilpotente.

INDICATION.— On a facilement $[A, B^m] = mB^m$. Si les matrices B^m n'étaient jamais nulles, l'endomorphisme $\text{ad}(A)$ aurait une infinité de valeurs propres.

c) Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes (à coefficients réels ou complexes et d'ordre supérieur ou égal à deux) est d'intérieur vide (pour la topologie de Hausdorff) dans l'espace vectoriel H des matrices de trace nulle [voir la question d) de l'exercice 0.11.41].

INDICATION.— Si un ouvert non vide de H était formé de matrices nilpotentes, la fonction déterminant ou encore la fonction $M \mapsto \text{tr } M^2$ seraient

identiquement nulles sur l'espace vectoriel H (penser à la formule de Taylor ou voir l'exercice 0.11.51).

d) Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes (d'ordre supérieur ou égal à deux) est d'intérieur vide dans l'ensemble des matrices de déterminant nul.

INDICATION.— Constater d'abord qu'une matrice nilpotente triangulaire est clairement limite d'une suite de matrices non nilpotentes de déterminant nul. Opérer ensuite par similitude. (Un argument analogue aurait également fonctionné pour la question précédente.)

0-C.11.7. a) Montrer qu'une matrice N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est dans l'adhérence de sa classe de similitude.

b) Montrer que N est semblable à $2N$ si et seulement si elle est nilpotente.

INDICATION.— Se rappeler que, lorsque $\lambda \neq 0$, $\text{rang } N^k = \text{rang}(\lambda N)^k$, ce qui implique que les tableaux de Young de N et de λN sont identiques.

c) Montrer que toute matrice est semblable à sa transposée.

INDICATION.— On pourra montrer que les facteurs invariants, qui se calculent à partir de mineurs, sont les mêmes pour l'une et l'autre puisqu'un mineur est égal au mineur transposé. On pourra aussi passer par les tableaux de Young attachés à chaque valeur propre et montrer qu'ils sont les mêmes pour A et sa transposée puisque, pour tout k , $\text{rang}(A - \lambda \text{Id})^k = \text{rang}({}^tA - \lambda \text{Id})^k$.

d) On suppose que les matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

sont semblables. Montrer que A et B le sont également.

INDICATION.— On pourra constater par exemple que l'hypothèse implique que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $\text{rang}(A - \lambda \text{Id})^k = \text{rang}(B - \lambda \text{Id})^k$.

0-C.11.8. **Réduction des endomorphismes.** L'objet de cet exercice est de regrouper ce qu'il est bon de retenir des premiers résultats sur la réduction des endomorphismes. On supposera le corps de base algébriquement clos.

a) La multiplicité m_λ d'une valeur propre λ dans le polynôme minimal d'une matrice A est le pas où la suite des noyaux itérés $\text{Ker}(A - \lambda \text{Id})^k$ devient stationnaire.

b) La multiplicité c_λ de λ dans le polynôme caractéristique est la dimension du *sous-espace caractéristique* (appelé aussi sous-espace spectral) $F_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$.

- c) Il est clair que pour tout λ , on a $m_\lambda \leq c_\lambda$. C'est le théorème de Cayley-Hamilton.
- d) L'espace $E = \mathbb{K}^n$ est somme directe des sous-espaces spectraux. Ces derniers sont stables sous l'action de A ; de plus, la restriction de A à $E_\lambda(A)$ s'exprime comme la somme de l'homothétie λId et d'un opérateur nilpotent.
- e) Une matrice A est diagonalisable si et seulement si l'espace E est somme directe des sous-espaces propres $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$, ce qui s'exprime aussi par $\sum \text{corang}(A - \lambda \text{Id}) = n$, pour les λ valeurs propres. Ceci équivaut aussi à dire que les racines du polynôme minimal sont simples, ou encore, que la multiplicité de toute valeur propre λ dans le polynôme caractéristique est égale à la dimension du sous-espace propre associé. On a donc dans ce cas, pour toute valeur propre λ , $\text{Ker}(A - \lambda \text{Id}) = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})^2$, condition équivalente à $E = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id}) \oplus \text{Im}(A - \lambda \text{Id})$.
- f) Pour une valeur propre λ , dire que le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est de dimension 1 équivaut à dire que la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique est la même que sa multiplicité dans le polynôme minimal. Les matrices A dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique sont caractérisées aussi par le fait que pour tout scalaire α , le rang de $(A - \alpha \text{Id})$ est supérieur ou égal à $n - 1$. C'est le cas par exemple des matrices compagnons (cf. exercice 0-C.11.20 plus bas) associées aux polynômes de degré n , ou plus généralement des matrices sous-triangulaires (ce sont les matrices dont tous les coefficients au-dessous de la sous-diagonale sont nuls) dont les coefficients sur la sous-diagonale sont non nuls.

0-C.11.9. La décomposition de Jordan. a) Montrer que toute matrice M à coefficients dans \mathbb{C} se décompose de façon unique comme la somme $M = S + X$ d'une matrice diagonalisable S et d'une matrice nilpotente X qui commutent. On appellera S la composante semi-simple et X la partie nilpotente de M .

INDICATION.— L'existence découle de l'alinéa d) de l'exercice précédent; quant à l'unicité, elle provient du fait que la somme de deux matrices nilpotentes (resp. diagonalisables) qui commutent est encore nilpotente (resp. diagonalisable).

b) Montrer que S et X sont des polynômes en M sans terme constant.

INDICATION.— Il suffit de le faire pour S : on se ramène au cas où S est une homothétie grâce au lemme chinois. On utilise alors le fait que lorsqu'une matrice M est inversible, l'identité est un polynôme en M sans terme constant.

c) On considère la matrice

$$M = \begin{bmatrix} a & x & z \\ 0 & a & y \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

où l'on a supposé $a \neq b$. Montrer que

$$S = \begin{bmatrix} a & 0 & \frac{xy}{b-a} + z \\ 0 & a & y \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

INDICATION.— Le polynôme $p(X) = a + \frac{1}{b-a}(X-a)^2$ vérifie $p(X) \equiv a \pmod{(X-a)^2}$ et $p(X) \equiv b \pmod{(X-b)}$. On a donc $S = p(M)$.

d) Montrer que toute matrice inversible M s'écrit de façon unique comme le produit d'une matrice diagonalisable et d'une matrice unipotente U qui commutent; ces matrices sont appelées respectivement la composante semi-simple et la composante unipotente de M . Y a-t-il risque de confusion ?

INDICATION.— Non, car si $M = S + X$, on a $M = SU$ avec $U = \text{Id} + S^{-1}X$.

e) Traiter le cas où la matrice M est réelle.

f) Comparer le noyau de M à ceux de S et X . (Utiliser b) pour montrer que $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(S) \cap \text{Ker}(X)$). Établir alors que l'ensemble des points fixes d'un automorphisme P est donné par l'intersection des sous-espaces des points fixes des composantes semi-simples et unipotentes de P .

g) Montrer que les matrices $S + X$ et $S + 2X$ sont semblables.

INDICATION.— Diagonaliser S et utiliser le fait que X , commutant avec la matrice S , laisse stable les sous-espaces spectraux de celle-ci. Se ramener alors au cas où S est une homothétie, et appliquer le b) de l'exercice 0-C.11.7.

h) Utiliser la décomposition « en semi-simple plus nilpotent » pour prouver qu'une matrice A de $M(n, \mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont toutes de module strictement inférieur à 1 est telle que la série $\sum_k A^k$ est convergente⁴⁴. La réciproque est facile.

Remarque. On démontre (voir par exemple [Cart], page 11) que si G est un groupe algébrique affine plongé dans $GL(n, \mathbb{K})$ (où le corps \mathbb{K} est algébriquement clos), les composantes semi-simple g_s et unipotente g_u d'un élément g de G sont encore dans G et que les éléments ainsi obtenus ne dépendent pas de la réalisation de G , mais seulement de $g \in G$. Par ailleurs, un homomorphisme $\phi : G \rightarrow G'$ entre groupes algébriques affines envoie

⁴⁴ On trouvera, par exemple dans [Mn-Ts], page 22, une autre approche de ce résultat.

respectivement les composantes semi-simple et unipotente de $g \in G$ sur celles de l'élément $\phi(g) \in G'$.

0-C.11.10. a) Soit A une matrice diagonalisable. Montrer que les matrices M qui ont même polynôme caractéristique que A et qui sont annihilées par le polynôme minimal de A sont exactement les matrices semblables à A . En déduire que la classe de similitude de A est fermée.

b) Réciproquement, montrer que si la classe de similitude de $A = S + X$ est fermée, la matrice A est diagonalisable.

INDICATION.— Montrer en fait que la composante semi-simple d'une matrice M appartient toujours à l'adhérence de l'orbite de M [reprandre la question g) de l'exercice précédent]. Comparer avec la démonstration du corollaire 0-C.6.1.2 qui s'adapte au cadre plus général des algèbres de Lie semi-simples, sachant que le théorème de Jacobson-Morozov s'applique dans l'algèbre de Lie (réductive) des éléments qui commutent avec S .

0-C.11.11. Montrer que $\text{Ker}(A^2)/\text{Ker } A$ est isomorphe naturellement à $\text{Ker } A \cap \text{Im } A = \text{Ker } A|_{\text{Im } A}$. Écrire, plus généralement, un isomorphisme entre le noyau de la puissance $k^{\text{ième}}$ de la restriction de A à $\text{Im } A$ et l'espace quotient $\text{Ker}(A^{k+1})/\text{Ker}(A^k)$. En déduire le résultat annoncé dans la présente note (cf. page 184) sur le tableau de Young de $A|_{\text{Im } A}$.

0-C.11.12. Écrire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E soit la suite des noyaux itérés d'un endomorphisme f nilpotent.

INDICATION.— Il s'agit, comme on peut s'en douter, de la condition qui veut que la suite des dimensions des sous-espaces donnés « s'essouffle » et meure au sommet. On doit vérifier ici qu'elle est suffisante. Par dualité, on se ramène à construire un endomorphisme f dont les images sont des sous-espaces décroissants $E \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_{k-1} \supset \{0\}$, dont la suite des dimensions « a du souffle ». L'endomorphisme f est nul sur F_{k-1} et se doit d'envoyer un supplémentaire de F_{k-1} dans F_{k-2} surjectivement sur F_{k-1} ; c'est précisément possible vu notre condition. Ceci définit f sur F_{k-2} , et l'on continue de la sorte jusqu'à arriver à E .

0-C.11.13. On considère le diagramme $E_1 \xrightleftharpoons[B_1]{A_1} E_2 \xrightleftharpoons[B_2]{A_2} E_3$, où les A_i sont injectives et les B_i surjectives et où $A_1 \circ B_1 = B_2 \circ A_2$. Montrer que $\dim E_2 - \dim E_1 \leq \dim E_3 - \dim E_2$.

0-C.11.14. La relation de similitude dans $M(n, \mathbb{C})$. Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos.

a) Décrire l'ensemble quotient de $M(n, \mathbb{K})$ par la relation d'équivalence : $A \mathcal{P} B$ si et seulement si les polynômes caractéristiques de A et de B sont égaux.

INDICATION.— L'ensemble quotient est en bijection avec les orbites dans \mathbb{K}^n sous l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n (voir l'exercice 0.11.64).

b) Quelles sont les classes d'équivalence correspondant aux points fixes de l'action de \mathfrak{S}_n sur \mathbb{K}^n .

INDICATION.— Le cône nilpotent est l'une de ces classes d'équivalences.

c) Montrer qu'il y a un nombre fini de classes de similitude dans l'ensemble des matrices de $M(n, \mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique $P(x)$ donné. Calculer ce nombre en fonction des multiplicités des racines du polynôme P . Traduire cela au niveau de l'orbite correspondante de \mathfrak{S}_n sur \mathbb{K}^n .

d) Dresser le graphe des orbites de $\mathfrak{gl}(8, \mathbb{C})$ qui ont pour polynôme caractéristique $X^2(X-1)^3(X+1)^3$.

INDICATION.— Ordonner tous les facteurs invariants possibles. En notant $p(k)$ le nombre de partitions de l'entier k , on trouve $p(2)p(3)^2 = 18$ orbites.

0-C.11.15. On se propose dans cet exercice de démontrer que le centralisateur d'une matrice M est réduit aux polynômes en M si et seulement si les polynômes caractéristique et minimal de M sont égaux.

a) Soit $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ une matrice telle que les polynômes caractéristiques de A_1 et A_2 soient premiers entre eux. Montrer que les matrices qui commutent avec A sont, comme A , diagonales en blocs.

INDICATION.— Si $ZA_1 = A_2Z$, alors $ZP(A_1) = P(A_2)Z$ pour tout polynôme P . Prendre alors pour P le polynôme caractéristique de A_1 , et en déduire que la matrice Z est nulle.

b) Montrer que les matrices qui commutent avec un bloc de Jordan sont les polynômes en ce bloc. Démontrer alors la condition suffisante.

INDICATION.— On appliquera à un moment le lemme chinois.

c) Pour la condition suffisante, on est ramené à établir qu'une matrice nilpotente dont le centralisateur a pour dimension le degré de son polynôme minimal est nécessairement semblable à un bloc de Jordan. Ceci revient à dire qu'un tableau de Young dont la somme des carrés des longueurs des colonnes est égale à la longueur de la première ligne est nécessairement réduit à une ligne !

Remarque. La condition nécessaire découle aussi des considérations sur l'application μ (cf. page 195). Pour la condition nécessaire, on peut faire

appel à la pseudo-réduite de Jordan T_N de la matrice nilpotente N et à la forme des éléments T qui commutent avec elle, pour établir que si le noyau de N est de dimension supérieure ou égale à deux, on peut trouver une matrice T , diagonale en blocs, qui n'est pas une homothétie et qui commute avec T_N .

0-C.11.16. Montrer que si n est pair, il y a toujours des orbites nilpotentes de dimension $n^2/2$. Constater que dans le cas $n = 6$, il y a deux telles orbites.

0-C.11.17. Une classe de matrices particulières. a) Montrer que la matrice nulle est la seule matrice nilpotente N dont le rang soit égal à celui de son carré. Montrer que la matrice nulle est aussi la seule matrice nilpotente dont le polynôme minimal soit égal à celui de son carré. (On pourra lire les deux résultats sur le tableau de Young de N .)

b) Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps de caractéristique nulle.

Montrer que les conditions qui suivent sont équivalentes.

i) La matrice A n'a que 0 ou 1 comme valeurs propres, et est semblable à son carré.

ii) La matrice $A^2 - A$ est nilpotente, et $\text{rang}(A) = \text{tr}(A)$.

iii) La matrice A vérifie $A(A - \text{Id})^n = 0$.

iv) La matrice A n'a que 0 ou 1 comme valeurs propres, et, de plus, les polynômes minimaux des matrices A et A^2 sont égaux.

v) La matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \text{Id} + N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec N nilpotente.

INDICATION.— On pourra décomposer la matrice A en semi-simple plus nilpotent et utiliser le résultat qui dit qu'une matrice unipotente est semblable à son carré (ce dernier point résulte de ce qu'une matrice nilpotente est semblable à son double, et l'on passe par l'exponentielle aux matrices unipotentes; on peut remarquer aussi que, si P est une matrice inversible qui commute avec une matrice nilpotente N , alors les matrices PN et N sont nilpotentes et leurs puissances ont même rang: elles sont donc semblables! Par suite $(\text{Id} + N)^p - \text{Id}$ et N sont semblables).

c) Quelles sont les matrices A telles que $\text{rang}(A^k) = \text{tr}(A^k)$ pour tout entier k ?

INDICATION.— Ce sont les matrices A vérifiant les conditions précédentes!

En effet, on peut supposer $A = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$, avec N nilpotente d'ordre m et P inversible. Par suite, la matrice $U = P^m$ vérifie $\text{tr}(U^k) = n - m$ pour tout k , et les traces des puissances successives de $U - \text{Id}$ sont alors nulles. La matrice U est donc unipotente, et les $n - m$ valeurs propres de P sont toutes de module 1; comme enfin $\text{tr}(P) = n - m + \text{rang}(N)$, on en déduit que ces valeurs propres sont toutes égales à 1 et que $\text{rang}(N) = 0$.

d) Montrer que l'ensemble \mathcal{A} des matrices $A \in M(n, \mathbb{R})$ telles que A soit semblable à A^2 est une variété algébrique affine. Déterminer ses $n + 1$ composantes connexes.

INDICATION.— Les composantes connexes \mathcal{A}_l sont données par les matrices ayant une trace constante égale à l .

e) Quelles sont les matrices de rang minimal dans l'ensemble des matrices A de trace l telles que $A^2 - A$ soit nilpotente? Retrouver le fait que \mathcal{A} est fermé.

e) On se place maintenant dans $M(n, \mathbb{C})$ et on conserve les notations précédentes. Montrer que la classe de similitude de la matrice

$$A_l = \begin{bmatrix} \text{Id} + J_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où J_l est le bloc de Jordan d'ordre l , est dense dans \mathcal{A}_l . En déduire que \mathcal{A}_l est irréductible et calculer sa dimension.

INDICATION.— Se rappeler que $GL(n, \mathbb{C})$ est irréductible.

f) Calculer la codimension dans \mathcal{A}_l de la sous-variété formée par les projecteurs de rang l et vérifier qu'elle est « indépendante » de n . (On trouve une codimension égale à $l^2 - l$, ce que l'on peut vérifier facilement dans les cas extrêmes.)

g) On note π l'application qui associe à un élément A de \mathcal{A} sa partie semi-simple qui est dans l'ensemble \mathcal{P} des projecteurs. Montrer que la fibre au-dessus d'un point P_0 est donnée par les éléments de la forme $P_0 + N$ avec $P_0 N = N P_0 = N$ et N nilpotente. Ceci donne une caractérisation de plus des éléments de \mathcal{A} .

h) Une matrice A semblable à A^2 a nécessairement même polynôme minimal que A^2 . Est-ce que la réciproque est exacte?

0-C.11.18. a) Montrer que l'application \mathcal{P} qui associe à une matrice sa partie semi-simple n'est pas continue.

INDICATION.— Elle serait égale à l'identité sur les matrices semi-simples, et par suite constante.

b) Montrer qu'elle est discontinue en tout point qui n'est pas semi-simple.

INDICATION.— Deux fonctions (en l'occurrence, l'application \mathcal{P} et l'identité) égales sur un ensemble dense sont égales en leurs points de continuité.

c) Montrer qu'elle est continue aux points réguliers, c'est-à-dire en les matrices dont les valeurs propres sont toutes distinctes.

d) Montrer que l'application \mathcal{P} n'est continue en 0 que si les matrices sont d'ordre deux.

INDICATION.— Voir l'exercice 0-C.11.9. Considérer la suite de matrices

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon^3 & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^3 & \epsilon \\ 0 & 0 & 2\epsilon^3 \end{bmatrix},$$

et faire tendre ϵ vers 0.

e) Est-ce que sa restriction à l'ensemble \mathcal{A} de l'exercice précédent est continue ?

f) Montrer que les points où l'application \mathcal{P} est continue se limitent aux points réguliers et aux points semi-réguliers (ces derniers étant ceux dont seulement deux valeurs propres sont égales).

0-C.11.19. Soit A et N deux matrices d'ordre n , et soit p un entier tel que $0 < p \leq n$.

a) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Le polynôme caractéristique de $AX + N$ est égal à celui de AX pour toute matrice X de rang p .

ii) La matrice N est nilpotente et $NA = 0$.

INDICATION.— On pourra dans un sens utiliser le fait que deux matrices N et M vérifiant $NM = 0$ sont simultanément trigonalisables dans une extension convenable du corps de base, ou bien écrire $A = PR_rQ$, où R_r est la matrice standard de rang r , et se ramener à $A = R_r$.

Inversement, on pourra établir que N est nilpotente en considérant une suite $(X_k)_k$ de matrices de rang p tendant vers la matrice nulle. Ensuite, on utilisera le fait que, si deux matrices ont des polynômes caractéristiques égaux, il en est de même pour leurs carrés ! Par suite, $\text{tr}(AX + N)^2 = \text{tr}(AX)^2$ pour toute matrice X de rang p , et par (double) linéarité $\text{tr}(NAX) = 0$ pour toute matrice X !

b) Soit B une nouvelle matrice. Dédire de ce qui précède que le produit ABA est nul si et seulement si le polynôme caractéristique de $A(X + B)$ et celui de AX sont égaux quelle que soit la matrice X .

c) Montrer que la matrice A' est l'inverse de A si et seulement si les polynômes caractéristiques de $AX + \text{Id}$ et de $AX + AA'$ sont égaux quelle que soit la matrice X .

0-C.11.20. Les matrices compagnons. a) Montrer qu'un corps \mathbb{K} est algébriquement clos si et seulement si toute matrice à coefficients dans \mathbb{K} est trigonalisable sur \mathbb{K} .

INDICATION.— La difficulté consiste à trouver une matrice dont le polynôme caractéristique est donné (encore faut-il que le coefficient dominant de ce polynôme soit $(-1)^n$). Les matrices compagnons⁴⁵ règlent ce problème : si $\pi(X) = (-1)^n[X^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0]$, la matrice (compagnon) C_π qui a des 1 sur sa sous-diagonale, les a_i sur sa dernière colonne et des zéros partout ailleurs, a le polynôme $\pi(X)$ pour polynôme caractéristique⁴⁶.

b) Montrer qu'une matrice est semblable à une matrice compagnon si et seulement si son polynôme minimal est (au signe près) égal à son polynôme caractéristique, ou encore si et seulement si ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

c) Montrer qu'une matrice est toujours semblable à un tableau diagonal de matrices compagnons (cf. 0-C.2.7.2).

d) Déterminer les points lisses de la variété algébrique formée des endomorphismes non surjectifs entre \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^p , où l'on a supposé $n \geq p$. Appliquer cela à l'étude des matrices dont le polynôme minimal est différent du polynôme caractéristique (cf. remarque suivant le corollaire 0-C.5.1.2).

Remarque. On pourra en s'aidant de l'index rencontrer dans le texte d'autres propriétés des matrices compagnons. On pourra consulter aussi [Mn-Ts].

0-C.11.21. Soit O un ouvert de $M(n, \mathbb{K})$ stable par conjugaison et contenant les matrices diagonales. Montrer qu'il est égal à $M(n, \mathbb{K})$ tout entier.

INDICATION.— Utiliser le corollaire 0-C.6.1.2.

0-C.11.22. (D'après Kraft et Procesi.) Soit N une matrice nilpotente d'ordre p et de rang k . L'ensemble des matrices carrées d'ordre m de la forme AB (où A est de taille (m, p) avec $m \geq 2p - k$ et B de taille (p, m) et où BA , qui est carrée d'ordre p , décrit l'adhérence de l'orbite de N) n'est autre que l'ensemble des matrices nilpotentes ayant un tableau de Young obtenu par dégradations successives à partir du tableau de Young déduit de celui de N par l'adjonction d'une première colonne comportant $m - p$ cases.

⁴⁵ Leur nom provient, sans doute, du fait qu'une telle matrice arrive en compagnie du polynôme qui lui donne naissance.

⁴⁶ Le coefficient en position n , n est évidemment égal à a_{n-1} , comme l'est la trace.

INDICATION.— Utiliser la description de l'adhérence d'une orbite au moyen du rang, puis utiliser le fait que le rang de $(AB)^i$ est inférieur au rang de $(BA)^{i-1}$. Enfin, se souvenir du lien entre le tableau de Young d'un endomorphisme nilpotent et celui de sa restriction à son image.

En déduire le résultat élémentaire suivant que l'on peut établir directement : toute matrice M d'ordre $2n$ vérifiant $M^2 = 0$ est le produit de deux matrices $X \in M(2n, n, \mathbb{K})$ et $Y \in M(n, 2n, \mathbb{K})$ telles que $YX = 0$.

Une autre application est donnée par le résultat suivant : les matrices d'ordre $2n$ de la forme XY avec YX d'ordre n et nilpotente sont caractérisées par le fait qu'elles sont nilpotentes et que leur rang est inférieur ou égal à n .

0-C.11.23. Produit d'éléments singuliers dans le centralisateur d'une matrice. Soit M une matrice nilpotente telle que les deux premières colonnes de son tableau de Young soient de même longueur k (cf. exercice 0-C.11.57). Montrer que si l'on écrit M comme le produit de $k+1$ matrices M_i commutant avec elle, l'une de ces matrices au moins est inversible.

INDICATION.— Pseudo-jordaniser adéquatement la matrice M , et constater que le premier bloc de sa surdiagonale est inversible. Établir que l'une des matrices M_i , soit M_{i_0} , est inversible revient à établir que son premier bloc diagonal, égal d'ailleurs au second, est lui-même inversible. La condition $M = M_1 \cdots M_{k+1}$ nous ramène à établir que si l'on démarre avec $k+1$ matrices singulières X_i d'ordre k dont le produit est nul, alors la matrice

$$\sum_i X_1 \cdots X_{i-1} Y_i X_{i+1} \cdots X_{k+1},$$

où les matrices Y_i sont quelconques, est singulière. Pour cela, on développera le polynôme $\det[(X_1 - \lambda Y_1) \cdots (X_{k+1} - \lambda Y_{k+1})]$, et l'on constatera qu'il admet $\lambda = 0$ comme racine d'ordre $k+1$.

0-C.11.24. Montrer que l'application $r : \mathfrak{z}(M) \rightarrow \text{End}(\text{Ker } M)$ qui, à une matrice commutant avec M , associe sa restriction au noyau de M , est surjective si et seulement si le tableau de Young de M relatif à la valeur propre 0 a une forme rectangulaire.

INDICATION.— Se ramener au cas d'une matrice nilpotente N . Constater alors cela sur la forme des éléments du centralisateur de la matrice nilpotente N , lorsque la matrice N a été pseudo-jordanisée adéquatement. De façon plus précise, la condition exprime tout simplement que le premier

bloc apparaissant dans une matrice $Z \in \mathfrak{z}(N)$ est plein, ce qui se traduit par le fait que les sauts de dimension sont tous égaux.

0-C.11.25. On se donne deux matrices A et B d'ordre n qui commutent. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

d'ordre $2n$ soit diagonalisable.

INDICATION.— Il faut et il suffit que A soit diagonalisable et B nulle. Pour le voir, on pourra écrire $A = S + N$ et

$$M = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N & B \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

et noter que S et B commutent (pourquoi ?). Remarquer au passage que A est la restriction de M aux n premiers vecteurs de base : sa semi-simplicité découle encore plus clairement de celle M .

Une autre méthode consiste à calculer $p(M)$ pour un polynôme p et à constater que le polynôme minimal $r(X)$ de la restriction de A à l'image de B doit diviser le polynôme minimal de M et sa dérivée. La semi-simplicité de M entraîne que $r(X)$ est constant, et donc B nulle.

0-C.11.26. a) Écrire le tableau de Young de la matrice nilpotente

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où A est une matrice carrée d'ordre n .

INDICATION.— Remarquer que $M^2 = 0$ et $\dim \operatorname{Ker}(M) = n + \dim \operatorname{Ker}(A)$.

b) Soit N une matrice nilpotente. Écrire le tableau de Young de la matrice nilpotente

$$M = \begin{bmatrix} N & N \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

à partir de celui de N . Constater qu'elles ont le même polynôme minimal.

INDICATION.— On a $\dim \operatorname{Ker}(M) = 2 \dim \operatorname{Ker}(N)$, puis $\dim \operatorname{Ker}(M^2) = 2 \dim \operatorname{Ker}(N^2)$. . . Le tableau de Young de M s'obtient à partir de celui de N en en doublant les colonnes.

c) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices

$$X = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

soient semblables est que la matrice A soit nilpotente.

INDICATION.— La condition suffisante découle de la question précédente. Pour la condition nécessaire, on pourra passer par le polynôme minimal qui vérifie une équation différentielle très simple.

d) Écrire de même le tableau de Young de

$$M = \begin{bmatrix} N & N \\ N & N \end{bmatrix}.$$

INDICATION.— On a $\dim \operatorname{Ker}(M) = n + \dim \operatorname{Ker}(N)$.

e) Même question pour les matrices

$$\begin{bmatrix} N & \operatorname{Id} \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} N & \operatorname{Id} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

INDICATION.— Le tableau de Young de la première des deux matrices admet pour longueurs des colonnes $C'_1 = 2C_1 + C_2 - 1$, $C'_2 = C_2 + C_3, \dots$, et $C'_{n+1} = 1$. Quant au tableau de Young de la seconde, il s'obtient en ajoutant une première colonne de longueur n au tableau de départ.

f) Existe-t-il une application polynomiale φ qui envoie une matrice nilpotente N d'ordre n sur une matrice nilpotente $\varphi(N)$ d'ordre $2n$ et dont le tableau de Young s'obtienne à partir du tableau de Young de N en en doublant les longueurs des lignes ? Plus simplement, existe-t-il une fonction polynomiale qui double la taille des matrices nilpotentes et qui double aussi l'indice de nilpotence ?

0-C.11.27. Homologie et similitude. Les techniques employées dans l'exercice qui suit trouvent leur origine en algèbre homologique et n'utilisent, de façon surprenante, que la « simple » notion de dimension. Nous les devons à B. Keller.

a) On se donne deux suites exactes d'espaces vectoriels de dimension finie

$$\{0\} \rightarrow V_1 \rightarrow V \xrightarrow{\varphi} V_2$$

et

$$\{0\} \rightarrow V_1 \rightarrow V' \rightarrow V_2 \rightarrow \{0\}.$$

On suppose que les espaces vectoriels V et V' sont isomorphes. Montrer alors que l'application linéaire φ est surjective.

On considère la matrice triangulaire en blocs $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$. Soit alors V l'espace

vectorel des matrices blocs $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ vérifiant

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}.$$

Constater que cet espace vectoriel n'est autre que l'espace vectoriel des homomorphismes des $\mathbb{K}[X]$ -modules associés aux matrices $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ et C .

c) On suppose que les deux matrices

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

sont semblables. Montrer qu'il existe une matrice X telle que $B = AX - XC$.

INDICATION.— On pourra introduire l'application linéaire φ définie sur V qui associe à $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ la matrice Y_2 , en cherchant à appliquer le a).

d) Retrouver alors le résultat de l'exercice précédent qui affirme que si

$$\begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{est semblable à} \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

alors A est nilpotente.

INDICATION.— La matrice A s'écrit donc $A = AX - XA$; elle commute par conséquent avec $AX - XA$; cette dernière est donc nilpotente. Or, elle coïncide avec A .

e) Montrer qu'une matrice B (à coefficients complexes pour simplifier) est de trace nulle si et seulement si il existe une matrice A telle que les deux matrices

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

soient semblables.

INDICATION.— Pour la condition nécessaire, on pourra admettre (ou commencer par prouver) qu'une matrice complexe B de trace nulle s'écrit sous la forme $XY - YX$ ⁴⁷ et utiliser alors

$$\begin{bmatrix} \text{Id} & Y \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & B \\ 0 & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Id} & Y \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix}.$$

f) Vérifier que les deux matrices

$$\begin{bmatrix} A & AX - XC \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

sont toujours semblables.

⁴⁷ Ce résultat élémentaire s'obtient par un calcul de matrices-blocs et une récurrence, une fois la matrice B ramenée à une matrice ayant partout des zéros sur la diagonale.

INDICATION.— Considérer la matrice inversible $\begin{bmatrix} \text{Id} & X \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix}$.

g) Soit A une matrice carrée (non nulle). Montrer que l'ensemble des matrices X telles que les matrices

$$\begin{bmatrix} X & A \\ 0 & X \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

soient semblables est stable par $X \mapsto (X - \lambda \text{Id})$ où λ est quelconque, et par $X \mapsto \lambda X$ où $\lambda \neq 0$. Montrer que le groupe $Z(A)$ des matrices inversibles qui commutent avec A agit par similitude sur cet ensemble.

Déterminer cet ensemble dans le cas où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vérifier en particulier directement que si $A = XY - YX$, alors les matrices X et Y sont triangulaires non nulles.

Commentaire — L'exercice est élaboré d'après l'idée suivante : si l'on note E_M le $\mathbb{K}[X]$ -module associé à une matrice M , une suite exacte de $\mathbb{K}[X]$ -modules de dimension finie

$$\{0\} \rightarrow E_A \longrightarrow E_M \longrightarrow E_C \rightarrow \{0\},$$

dont le terme central est isomorphe à la somme directe $E_A \oplus E_C$ des termes latéraux, est scindable. Une telle suite exacte est en effet scindable si et seulement si l'application Id_{E_C} , et par conséquent *tout* endomorphisme de E_C , est « relevable » en un morphisme de E_C dans E_M , autrement dit si la suite exacte

$$\{0\} \rightarrow \text{Hom}(E_C, E_A) \longrightarrow \text{Hom}(E_C, E_M) \longrightarrow \text{Hom}(E_C, E_C)$$

est prolongeable par $\{0\}$. Remarquons que l'espace $\text{Hom}(E_C, E_A)$ correspond bien au noyau de l'application φ introduite en c) et considérée dans l'exercice.

Le lecteur pourra enfin confectionner un exercice du même type en considérant des $\mathbb{K}[X, Y]$ -modules de dimension finie.

0-C.11.28. a) Soit A et B deux matrices réelles d'ordre n . Montrer que les matrices

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} A + iB & 0 \\ 0 & A - iB \end{bmatrix}$$

sont semblables.

INDICATION.— On pourra commencer par le cas où les matrices sont d'ordre 1 à coefficients réels (exhiber alors une matrice de passage universelle).

b) En déduire que le déterminant de $\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$ est positif ou nul. Retrouver cela par des manipulations sur les lignes et les colonnes (en pensant évidemment à passer dans \mathbb{C}).

c) S'inspirer de l'indication donnée en a) pour établir que le déterminant de la matrice $M \in M(3n, \mathbb{R})$ donnée par

$$M = \begin{bmatrix} A & B & B \\ -B & A & B \\ -B & -B & A \end{bmatrix}$$

est de même signe que le déterminant de la matrice A .

0-C.11.29. a) Montrer que si A est un opérateur nilpotent vérifiant $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$, l'application naturelle $E/\text{Im } A \rightarrow \text{Ker } A$ donnée par $\bar{x} \mapsto A^{k-1}(x)$ est bijective si et seulement si tous les blocs de la réduction de Jordan de A ont même taille.

INDICATION.— Regarder le tableau de Young de A en se souvenant que la dimension de $\text{Ker } A^{k-1}$ est la somme des longueurs des colonnes, excepté la dernière, et que la dimension de $\text{Im } A$ est la somme des longueurs des colonnes excepté la première.

b) Montrer que cette condition sur les blocs intervenant dans la réduction de Jordan de A est réalisée si et seulement si le sous-espace

$$\bar{S}_F := F \oplus A(F) \oplus \cdots \oplus A^{k-1}(F),$$

où F est un supplémentaire quelconque de $\text{Ker } A^{k-1}$ dans E , est égal à E .

INDICATION.— Il suffit en effet de considérer la suite $\{0\} \subset \text{Ker } A \subset \text{Ker } A^2 \subset \cdots \subset \text{Ker } A^{k-1} \subset E$ et de se rappeler les injections de Frobenius induites par A qu'on utilise quand on écrit une réduction de Jordan de A .

0-C.11.30. a) On reprend avec les mêmes notations les données de l'exercice précédent et l'on suppose que A vérifie $(*) f(A(x), y) + f(x, A(y)) = 0$, où f désigne une forme bilinéaire symétrique ou antisymétrique. Montrer que le sous-espace A -stable \bar{S}_F est non isotrope, c'est-à-dire que la restriction de la forme f à $\bar{S}_F \times \bar{S}_F$ est non dégénérée.

INDICATION.— On pourra commencer par démontrer grâce à $(*)$ que $F^\perp \cap A^{k-1}(F) = \{0\}$; remarquer ensuite qu'un élément z orthogonal à la somme directe \bar{S}_F est caractérisé par le fait qu'il se trouve, ainsi que ses transformés par les puissances successives de A , dans F^\perp (utiliser encore $(*)$). S'il est par ailleurs dans \bar{S}_F , alors $A^{k-1}(z) = A^{k-1}(z_1)$, où z_1 désigne la composante de z sur le facteur F de \bar{S}_F ; on voit donc que z_1

est dans $\text{Ker } A^{k-1}$, mais il est aussi dans F : il est donc nul ! On répète successivement le même procédé avec les autres composantes de z .

b) Montrer que, si le tableau de Young de A est un rectangle (c'est la condition rencontrée dans l'exercice précédent), on peut définir sur le quotient $E/\text{Im } A$ une forme bilinéaire non dégénérée \bar{f} en posant $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = f(A^{k-1}(x), y)$. Remarquer que, si f est symétrique, la forme \bar{f} est symétrique ou antisymétrique suivant que k est impair ou pair, et que si f est antisymétrique, la forme \bar{f} est symétrique ou antisymétrique suivant que k est pair ou impair.

0-C.11.31. a) On se donne une matrice nilpotente d'ordre $2n$ de la forme

$$A = \begin{bmatrix} M & S_1 \\ S_2 & -{}^tM \end{bmatrix},$$

où chacune des matrices S_i est symétrique d'ordre n . Montrer que les lignes de longueur impaire qui apparaissent dans son tableau de Young y apparaissent un nombre pair de fois. On pourra remarquer que la matrice A est un élément de l'algèbre $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{K})$ définie comme l'ensemble des opérateurs L de $E = \mathbb{K}^{2n}$ vérifiant $(*) f(L(x), y) + f(x, L(y)) = 0$ pour tous les x, y , où f désigne la forme bilinéaire alternée non dégénérée donnée par la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

INDICATION.— On pourra introduire la notion de sous-espace indécomposable, c'est-à-dire d'un sous-espace X stable par A , non singulier pour la forme symplectique (c'est-à-dire $E = X \oplus X^\perp$) et qui ne peut s'écrire comme somme directe orthogonale de deux sous-espaces A -stables stricts. Il est clair que E est somme directe orthogonale de sous-espaces indécomposables. La restriction de la forme f munit un sous-espace indécomposable d'une structure symplectique; il est donc en particulier de dimension paire. Il suffit alors, pour établir la propriété annoncée, de démontrer que la restriction de A à un sous-espace indécomposable a un tableau de Young dont les lignes sont toutes de même longueur (cf. exercice 0-C.11.29). En supposant E lui-même indécomposable, le sous-espace \bar{S}_F défini précédemment est stable par A ; il est donc égal à E , car il est non singulier (voir l'exercice précédent).

b) On se donne une matrice A nilpotente antisymétrique d'ordre n . Montrer que les lignes de longueur paire qui apparaissent dans son tableau de Young y apparaissent un nombre pair de fois. On pourra remarquer que la matrice A est un élément de l'algèbre $\mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$ définie comme l'ensemble des opérateurs L de $E = \mathbb{K}^n$ vérifiant $(*) f(L(x), y) + f(x, L(y)) = 0$ pour

tous les x, y , où f désigne la forme symétrique non dégénérée donnée par la matrice identité.

INDICATION.— On procède comme dans la question précédente pour se ramener à un sous-espace indécomposable; le quotient $E/\text{Im } A$ étant alors muni, quand k est pair, d'une forme symplectique, il est donc de dimension paire. Il en est donc de même pour l'espace $\text{Ker } A$ qui lui est isomorphe. La dimension de ce dernier est précisément le nombre de lignes dans le tableau de Young !

0-C.11.32. On va retrouver plus directement les résultats de l'exercice précédent.

a) Montrer que les lignes de longueur paire du tableau de Young d'une matrice nilpotente A se répètent un nombre pair de fois si et seulement si les rangs des puissances impaires de A sont pairs.

INDICATION.— Se rappeler que le rang de A^m se lit comme le nombre des cases en dehors des m premières colonnes de son tableau.

b) Montrer que les lignes de longueur impaire du tableau de Young de A se répètent un nombre pair de fois si et seulement si les rangs des puissances paires de A sont pairs.

c) En déduire qu'une matrice A antisymétrique nilpotente a un tableau qui vérifie la condition énoncée dans le a) du présent exercice et qu'une matrice nilpotente de la forme

$$A = \begin{bmatrix} M & S_1 \\ S_2 & -{}^tM \end{bmatrix}$$

a un tableau qui vérifie la condition énoncée dans b).

INDICATION.— Il est bien connu qu'une matrice antisymétrique a un rang pair. Ses puissances impaires, étant encore antisymétriques, vérifient la même chose. Quant aux matrices L de $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{K})$, elles vérifient ${}^tLJ + JL = 0$. Il s'ensuit facilement que les matrices JL^{2m} sont antisymétriques; leurs rangs, qui sont aussi les rangs de L^{2m} , sont donc pairs.

0-C.11.33. Les parties constructibles. Soit X un espace topologique. Une partie L de X est dite *localement fermée* dans X si L est l'intersection d'un ouvert O et d'un fermé F de X .

a) Montrer que dans ce cas $L = O \cap \bar{L}$. En déduire que la partie L est localement fermée si et seulement si elle est ouverte dans son adhérence.

b) Montrer que la partie L est localement fermée si et seulement si la partie $\bar{L} \setminus L$ est fermée dans X .

c) Vérifier que la partie $C = \{(x, y); y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ de \mathbb{R}^2 , muni de sa topologie canonique, n'est pas localement fermée. Vérifier qu'il en est de même de la partie $P = \{(x, y); y > 0\} \cup (\mathbb{Q} \times \{0\})$.

d) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie L de X soit localement fermée est que $(\overline{L} \setminus L) \cap L = \emptyset$.

e) Soit $A \subset X$. On dit que a est un *bon point* de A s'il existe un voisinage V de a dans X tel que $V \cap A$ soit fermé dans V , autrement dit, si $a \in A$ et s'il existe $V \subset X$, et $F \subset X$ tels que $a \in \overset{\circ}{V}$, F soit fermé dans X , et $V \cap A = V \cap F$.

Un voisinage V d'un bon point a de A vérifiant la propriété précédente est dit un *bon voisinage* de $a \in A$.

Vérifier que, pour un bon point $a \in A$, l'intersection d'un voisinage de a et d'un bon voisinage de a est un bon voisinage de a . En déduire que les bons voisinages de a forment une base de voisinages pour a .

f) Soit a un bon point de A et V un bon voisinage *ouvert* de a . Montrer que les points de $V \cap A$ sont tous de bons points de A . En déduire que l'ensemble \mathcal{B}_A des bons points de A est un ouvert de A .

g) Montrer que, si A_1 et A_2 sont deux parties de X , on a $\mathcal{B}_{A_1} \cap \mathcal{B}_{A_2} \subset \mathcal{B}_{A_1 \cup A_2}$.

h) Les points de A qui ne sont pas bons sont dits *mauvais*. Leur ensemble est noté \mathcal{M}_A . Montrer que $\mathcal{M}_A = (\overline{A} \setminus A) \cap A$.

INDICATION.— Considérer les traces de A et de \overline{A} sur un bon voisinage *ouvert* V de $a \in \mathcal{B}_A$ et utiliser le fait que l'ouvert (de X) donné par $V \setminus A$ ne peut rencontrer $\overline{A} \setminus A$ (utiliser le fait qu'un ouvert qui rencontre l'adhérence d'une partie rencontre cette partie).

i) Retrouver le fait que l'ensemble \mathcal{B}_A des bons points de A est un ouvert de A .

j) Déterminer l'ensemble des mauvais points des parties C et P de la question c) ci-dessus.

k) Montrer qu'une partie L de X est localement fermée si et seulement si tous ses points sont de bons points. Justifier alors la terminologie de « locale fermeture » pour une partie L de X .

l) Déterminer les bons points de \mathcal{B}_A . En déduire que \mathcal{B}_A est une partie localement fermée de X .

m) Montrer que \mathcal{B}_A est dense dans A si et seulement si A contient un ouvert dense de son adhérence, ou encore, de façon plus précise, s'il existe une partie ouverte dense dans l'espace topologique \overline{A} qui soit contenue dans A .

n) Soit L_1 et L_2 deux localement fermés de X . Montrer qu'il existe un troisième localement fermé L_3 tel que

$$L_3 \subset L_1 \cup L_2 \subset \overline{L_3}.$$

INDICATION.— Prendre $L_3 = \mathcal{B}_{L_1 \cup L_2}$. Pour montrer que L_3 est dense dans $L_1 \cup L_2$, considérer, par exemple, un point x de L_1 et un bon voisinage ouvert de x , et distinguer deux cas, suivant que V rencontre L_2 ou pas (ce dernier cas est facile, car x est alors un bon point pour la réunion). Si $y \in V \cap L_2$, montrer que y est un bon point pour la réunion $L_1 \cup L_2$, et ce en considérant un bon voisinage $V' \subset V$ de $y \in L_2$, qui est alors un bon voisinage de $y \in L_1 \cup L_2$.

o) En déduire que les constructibles (cf. page 195) sont toujours « coincés » entre un localement fermé et son adhérence, autrement dit qu'ils contiennent un ouvert dense de leur adhérence.

p) Vérifier que la partie C définie dans la question c) est constructible. Montrer par contre que la partie P n'est pas constructible et contient cependant une partie ouverte dense de son adhérence.

INDICATION.— La partie $P \cap \mathbb{R}$ ne peut être constructible, car \mathbb{Q} ne contient pas d'ouvert dense de son adhérence.

q) Relever que dans un espace localement compact séparé tel que \mathbb{R}^n muni de sa topologie canonique, les parties localement fermées coïncident avec les parties localement compactes.

r) (Question difficile) Montrer que la partie de $M(2n, \mathbb{R})$ formée des matrices de rang pair est une partie constructible (réunion de $n+1$ localement fermés), qui ne peut s'écrire comme réunion de n localement fermés⁴⁸.

s) Montrer qu'une partie de \mathbb{C}^n qui est ouverte pour la topologie de Hausdorff et qui est un constructible pour la topologie de Zariski⁴⁹, est un ouvert de Zariski. En déduire qu'une application polynomiale sur \mathbb{C}^n qui est une submersion en tout point est ouverte pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire envoie les ouverts algébriques sur des ouverts algébriques.

0-C.11.34. Images de constructibles. Vérifier sur les trois exemples suivants (où le corps est algébriquement clos, évidemment) le résultat qui dit que l'image d'un constructible par une application polynomiale est constructible

- a) l'application qui à une matrice nilpotente associe son carré;
- b) l'application qui à une matrice M associe sa comatrice \tilde{M} ;
- c) l'application qui à une matrice M , de rang p , associe le produit $M^t M$.

INDICATION.— Pour le premier exemple, remarquer que l'image est réunion

⁴⁸ On trouvera une démonstration de ce résultat et une approche fort élégante des parties constructibles dans la note de J.-P. Allouche aux « Proceedings of the eleventh Summer Conference on General Topology » (à paraître en 96 ou 97 chez New York Academy of Sciences).

⁴⁹ Les constructibles de \mathbb{C}^n pour la topologie de Zariski sont appelés des *constructibles algébriques*.

d'orbites nilpotentes; pour le second, montrer que l'image est l'ensemble des matrices de rang 0, 1 ou n (on aura à comparer la comatrice de M et celle de λM ; pour montrer que toute matrice de rang 1 est atteinte, penser à l'action de Steinitz); enfin, pour le troisième exemple, on trouve l'ensemble de toutes les matrices symétriques de rang r vérifiant $2p - n \leq r \leq p$. Pour cela, on pourra se souvenir d'abord que $\text{Ker}(g \circ f) / \text{Ker } f$ s'injecte naturellement dans $\text{Ker } g$ et en déduire une inégalité sur le rang d'un produit, ensuite se servir du fait que toute matrice symétrique S de rang r s'écrit $S = {}^t P D_r P$ où $D_r = \text{Diag}(\text{Id}_r, 0, \dots, 0)$ et considérer $X = {}^t P D'$ où la matrice D' est la matrice D_r dans laquelle on a inséré sur la diagonale le nombre adéquat de fois la matrice 2×2 , symétrique et de carré nul, donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{où } i^2 = -1.$$

Remarque. Contrairement à ce qu'on pourrait être tenté de croire, le résultat rappelé ci-dessus est un résultat positif; s'il est vrai qu'un ensemble constructible peut être assez compliqué, il a cependant la merveilleuse propriété de toujours contenir un ouvert de son adhérence. C'est loin d'être le cas pour les images de fonctions C^∞ , comme le montre l'exemple (classique) de la courbe (densément) enlacée sur le tore $(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$.

0-C.11.35. L'objet de cet exercice est de démontrer, entre autres, que le groupe $SL(n, \mathbb{K})$, où \mathbb{K} est un corps algébriquement clos, est une variété algébrique affine irréductible. On propose deux démonstrations.

a) Montrer que le polynôme p en n^2 indéterminées donné par $\det(X_{ij}) - 1$ est irréductible. En déduire que le groupe $SL(n, \mathbb{K})$ est un groupe algébrique affine irréductible.

INDICATION.— On écrit $p = X_{nn}d_{n-1} + q$ où la variable X_{nn} ne figure pas dans le polynôme q . Le déterminant d_{n-1} en dimension $n - 1$ est irréductible. On applique le a) de l'exercice **0.11.57** après avoir spécialisé en la matrice nulle.

b) Soit G un groupe algébrique. Si A et B sont deux parties ouvertes denses (pour la topologie de Zariski) de G , alors $G = AB$.

INDICATION.— Si $x \in G$, l'ouvert xA^{-1} rencontre la partie dense B .

c) Montrer que l'image d'un homomorphisme (algébrique) $\phi : G \rightarrow G'$ entre deux groupes algébriques est fermée⁵⁰.

⁵⁰ Ceci diffère considérablement du cas des groupes de Lie, où l'on peut avoir des sous-groupes à un paramètre qui sont denses; cf. par exemple [Mn-Ts], page 184.

INDICATION.— L'image $H = \phi(G)$ est une partie constructible; elle contient donc un ouvert dense de son adhérence. Son adhérence, qui est encore un groupe (pourquoi?), vérifie d'après la question précédente $\overline{H} = HH = H$.

d) Vérifier cela en particulier pour les images H_{ij} des homomorphismes $\phi_{ij} : \mathbb{K} \rightarrow SL(n, \mathbb{K})$ où $i \neq j$ donnés par $\phi_{ij}(\lambda) = \text{Id} + \lambda E_{ij}$. De même, le vérifier pour le plongement du groupe multiplicatif $\mathbb{K} - \{0\}$ comme centre de $GL(n, \mathbb{K})$.

e) Montrer que si H et L sont deux sous-groupes algébriques (fermés) irréductibles de G , le sous-groupe qu'ils engendrent est à la fois fermé et irréductible. Généraliser à un nombre quelconque de sous-groupes.

INDICATION.— (Cf. [Hum], pages 55-56.) Les adhérences des parties H , L , HL , LH , HLH , LHL , ... sont des fermés irréductibles dans la composante irréductible G^0 de l'élément neutre. Supposons, par exemple, que l'adhérence \overline{X} de $X = HLHLH$ soit maximale parmi ces fermés irréductibles. Établir alors que la partie \overline{X} est un sous-groupe contenant toutes les parties évoquées quelques lignes plus haut. Sachant que $X = HLHLH$ est constructible, on déduit que $\overline{X} = XX$; c'est donc le sous-groupe engendré par H et L .

f) En considérant le sous-groupe engendré par les H_{ij} , prouver l'irréductibilité de $SL(n, \mathbb{K})$.

g) Une autre application des considérations qui précèdent est la suivante : soit G un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{K})$ (où \mathbb{K} est supposé de plus de caractéristique nulle) dont les éléments sont tous unipotents. Montrer qu'il est irréductible.

INDICATION.— Les images des homomorphismes suivants (indexés par des matrices nilpotentes N adéquates), définis sur le groupe additif \mathbb{K} et donnés par $\exp_N : \lambda \mapsto \exp(\lambda N)$, sont bien dans le groupe G (l'établir d'abord pour les λ dans \mathbb{Z} , et pour tout λ par densité) et le remplissent. Le résultat découle alors de la généralisation donnée dans e).

Remarquer que l'application exponentielle (définie sur l'algèbre de Lie) est surjective dans le cas d'un groupe tel que G .

h) Une dernière application consiste à établir que le groupe dérivé d'un groupe algébrique est fermé (cf. 0-C.11.45), situation qui contraste aussi avec les groupes de Lie.

0-C.11.36. Valeurs propres et irréductibilité. Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos.

a) Montrer qu'une matrice symétrique à coefficients dans \mathbb{C} est limite d'une suite de matrices symétriques inversibles.

b) Montrer qu'un ouvert dans une variété algébrique irréductible est (Zariski-) dense si et seulement si il est non vide.

c) Étudier l'irréductibilité de la variété algébrique affine W_I formée des couples $(M, v) \in M(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$ tels que $M(v) = 0$.

INDICATION.— On trouve deux composantes irréductibles de même dimension. Noter tout d'abord que l'ouvert principal défini par le déterminant n'est pas dense dans W_I . Les deux composantes irréductibles sont données par $\{(M, 0); M \in M(n, \mathbb{K})\}$ et par $\{(M, v); M(v) = 0 \text{ et } \det(M) = 0\}$. Pour établir l'irréductibilité de la deuxième partie, on pourra montrer qu'elle contient une orbite dense sous l'action de $GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K})$ opérant par

$$(P, Q) \cdot (M, v) = (PMQ^{-1}, Q(v)),$$

à savoir l'orbite du couple $(\text{Diag}(1, \dots, 1, 0), (0, \dots, 0, 1))$. On aura à remarquer, pour cela, que l'action ne change pas si l'on remplace (P, Q) par $(\lambda P, \lambda Q)$.

Notons que l'ouvert constitué par les couples (M, v) tels que v soit non nul est contenu dans la deuxième composante : il est donc irréductible. On en déduit facilement que la variété algébrique formée des couples (M, \mathcal{D}) tels que la droite \mathcal{D} soit dans le noyau de M est irréductible⁵¹.

d) Montrer que l'ensemble V_I des couples $(M, \lambda) \in M(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}$ tels que λ soit valeur propre de la matrice M est une variété algébrique affine irréductible.

INDICATION.— Montrer en raisonnant par récurrence, comme dans l'exercice 0.11.57, que le polynôme en $n^2 + 1$ variables donné par $\det(X_{ij} - X\text{Id})$ est irréductible.

e) Montrer que les points lisses de V_I sont les couples (M, λ) tels que la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique soit la même que dans le polynôme minimal.

INDICATION.— Noter que la différentielle du polynôme caractéristique en (A, α) appliquée au point (M, λ) est donnée par $\text{tr}(A - \alpha\text{Id})'(M - \lambda\text{Id})$. Comme le polynôme caractéristique est irréductible, les points lisses sont exactement les points de la variété où la différentielle est non nulle, c'est-à-dire les points (A, α) tels que le rang de $A - \alpha\text{Id}$ soit égal à $n - 1$.

f) Montrer que l'ensemble des couples (M, λ) tels que λ soit valeur propre de la matrice M inversible est encore une variété algébrique affine irréductible.

INDICATION.— C'est un ouvert principal de V_I .

⁵¹ Il n'est pas difficile de prouver (cf. note sur les fibrés vectoriels rattachée au chapitre 1) que cette dernière variété est un fibré vectoriel non trivial sur l'espace projectif $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{K})$.

0-C.11.37. Valeurs propres et irréductibilité (suite). On se propose d'établir l'irréductibilité de la variété algébrique affine U_I formée des couples (M, λ) tels que $\det(M) = 1$ et que λ soit valeur propre de M .

a) On fait opérer $SL(n, \mathbb{K})$ par conjugaison sur lui-même. Déterminer le quotient catégorique.

INDICATION.— L'application $\varphi : SL(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^{(n-1)}$ définie à partir des $n - 1$ coefficients non triviaux du polynôme caractéristique de M donne le quotient catégorique. On a là une section naturelle (laquelle ?) dont le saturé par l'action est l'ouvert des matrices de $SL(n, \mathbb{K})$ qui ont leur polynôme minimal égal au polynôme caractéristique. Cet ouvert (non vide) est (Zariski-) dense dans $SL(n, \mathbb{K})$, car $SL(n, \mathbb{K})$ est irréductible.

b) On fait opérer maintenant $SL(n, \mathbb{K})$ sur les couples $(M, \lambda) \in X = SL(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}$, par conjugaison sur M sans toucher à λ . Déterminer le quotient catégorique.

c) Montrer que le polynôme $X_1 Y^{n-1} + X_2 Y^{n-2} + \dots + X_{n-1} Y + X_n$ est irréductible.

INDICATION.— Le regarder comme polynôme de degré un en la variable X_{n-1} et lui appliquer le a) de 0.11.57.

d) En déduire que le polynôme caractéristique de M , où M est de déterminant 1, est une fonction polynomiale irréductible dans l'anneau (factoriel !) des fonctions polynomiales de la variété algébrique affine X .

INDICATION.— La factorialité de l'anneau de fonctions $\mathbb{K}[X]$ résulte de ce que X est une variété lisse. On peut donc raisonner comme dans la dernière partie de l'exercice 0.11.57, et se ramener ainsi à l'irréductibilité du polynôme de la question précédente.

0-C.11.38. Produits de matrices pleines. a) Démontrer que toute matrice inversible M à coefficients dans le corps algébriquement clos \mathbb{K} est le produit de deux matrices pleines [cf. question e) de l'exercice 0.11.64].

INDICATION.— Utiliser la question b) de l'exercice 0-C.11.35, sachant que le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ est irréductible, et donc que tout ouvert non vide y est (Zariski-) dense.

b) Soit $k \in [2, n]$; montrer qu'il existe une matrice pleine M telle que $M^k = 0$ et $M^{k-1} \neq 0$.

INDICATION.— Il est facile (modulo une petite difficulté liée à la caractéristique) de construire une matrice pleine N de rang 1 et de trace nulle; elle vérifiera alors $N^2 = 0$ (cf. 0-C.11.4). Ceci règle le cas $k = 2$. Pour k quelconque, on peut raisonner comme suit : l'ensemble des matrices M telles que $M^k = 0$ est une variété algébrique affine irréductible (voir l'exercice 0-C.11.56). D'après ce qui précède, l'ouvert des matrices pleines qui y fi-

gurent est non vide; il est donc dense et rencontre par conséquent l'ouvert des matrices M telles que $M^{k-1} \neq 0$.

c) Montrer qu'en plus du cas trivial où $n = 1$, il existe des matrices qui ne sont pas produit de deux matrices pleines.

INDICATION.— Considérer la matrice E_{11} d'ordre 2 écrite sous la forme XY . Si la matrice Y était inversible, la matrice X aurait même image que E_{11} et ne pourrait être pleine. Dans le cas contraire, elle serait nécessairement de rang 1 et son noyau, étant inclus dans celui de E_{11} , lui serait égal; et donc Y ne serait pas pleine.

d) Montrer qu'en dehors du cas trivial où $n = 1$, toute matrice M est produit de trois matrices pleines.

INDICATION.— Le cas où la matrice M est nulle a déjà été traité. Notons V l'ouvert des matrices pleines, et soit M une matrice de rang r supérieur ou égal à 1. La variété $X = \overline{\mathcal{R}_r}$ des matrices de rang inférieur ou égal à r est irréductible et ne peut donc être contenue dans le complémentaire de V , qui est réunion de n^2 hyperplans; l'ouvert V_r de V formé des matrices pleines de rang inférieur ou égal à r est donc non vide et dense dans X . Si W désigne l'ensemble des matrices pleines inversibles (qui est dense dans $GL(n, \mathbb{K})$), il suffit de démontrer que $Y = W^{-1}MW^{-1}$ contient un ouvert de X . Remarquer pour cela que la partie Y est constructible (elle contient en particulier un ouvert de son adhérence) et dense dans X (ce dernier point résulte de ce que l'adhérence de Y contient toutes les matrices r -équivalentes à M).

e) Expliciter la matrice E_{11} d'ordre 2 comme produit de trois matrices pleines.

INDICATION.— Calculer, par exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} E_{11} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

0-C.11.39. Cônes isotropes. On se propose dans cet exercice de montrer que, lorsque le corps de base est algébriquement clos, le noyau (ou radical) d'une forme quadratique q se lit (géométriquement) dans son cône isotrope; de façon plus précise, le noyau est donné par l'ensemble des points singuliers du cône isotrope, sauf lorsque le rang est inférieur ou égal à 1.

a) Montrer que si le cône isotrope est un hyperplan, il est égal au noyau de la forme quadratique.

INDICATION.— La forme quadratique est alors de rang 1.

b) Montrer que lorsque la forme quadratique est de rang deux, le cône isotrope est la réunion de deux hyperplans, et le noyau est alors leur intersection.

c) Montrer que si le rang de la forme quadratique q est supérieur ou égal à 3, le polynôme homogène que définit q est irréductible, et les points lisses du cône isotrope sont exactement les points qui n'appartiennent pas au noyau.

INDICATION.— Le polynôme homogène défini par q est réductible si et seulement si il est produit de deux formes linéaires [cf. d) de 0.11.57]. On conclut en vérifiant que la différentielle de q au point v est donnée par $w \mapsto B(v, w)$, où B est la forme bilinéaire associée à q .

d) Régler enfin le cas où q est nulle.

Remarque. Lorsque le corps de base est \mathbb{R} et que la forme quadratique est positive ou négative (pas nécessairement définie), son cône isotrope est un sous-espace vectoriel qui coïncide avec son radical. En dehors de ces cas, le cône isotrope n'est jamais un sous-espace vectoriel, et le radical correspond alors à l'ensemble des points singuliers du cône isotrope.

0-C.11.40. Singularité première dans le cône nilpotent

(D'après Slodowy⁵².) Une matrice nilpotente N de $M(n, \mathbb{C})$ dont la classe de similitude est de dimension $n^2 - n - 2$ sera appelée *sous-régulière*. Une telle matrice est caractérisée par le fait que son indice de nilpotence est exactement $n - 1$, ou encore que $\dim(\text{Ker } N) = 2$ et $\dim(\text{Ker } N^2) = 3$. On sait qu'une telle matrice appartient au lieu singulier du cône nilpotent et que c'en est un point lisse. Le but de l'exercice est de comprendre la nature de cette singularité (plus facile que les autres), ou encore de voir « l'allure » du cône nilpotent au voisinage d'une telle singularité.

a) On prend pour X la matrice (sous-régulière) d'ordre n obtenue en bordant le bloc de Jordan de taille $n - 1$ par une ligne et une colonne de zéros. On insère la matrice X dans le \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle Y, H, X \rangle$ où $H = \text{Diag}(n - 2, n - 4, \dots, 2 - n, 0)$. Expliciter la matrice Y et vérifier en particulier que tous ses coefficients sont nuls à l'exception des termes y_{ij} tels que $j = i - 1$ et $i = 2, \dots, n - 1$.

b) Expliquer pourquoi l'étude de la singularité au voisinage des points sous-réguliers revient à considérer la sous-variété des matrices nilpotentes de l'espace affine $Y + \mathfrak{z}(X)$.

INDICATION.— Tous les points sous-réguliers se ressemblent (ils forment une orbite); on peut donc se placer en Y . L'espace tangent en Y au lieu singulier est donné par $\text{Im}(\text{ad } Y)$. On comprend la singularité en Y en coupant le cône nilpotent par un espace affine passant par Y et dont l'espace vectoriel associé est transverse à l'espace tangent en Y au lieu singulier (comparer avec la singularité définie par les points appartenant à l'axe

⁵² Cet exercice est un cadeau de B. Keller.

d'un dièdre). Il s'agit donc de justifier le fait que le noyau de $\text{ad}(X)$ est en somme directe avec l'image de $\text{ad}(Y)$. Mais ceci est trivial dans la pyramide associée au \mathfrak{sl}_2 -triplet $(\text{ad}(Y), \text{ad}(H), \text{ad}(X))$.

c) Déterminer la forme des éléments de $\mathfrak{z}(X)$ dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

INDICATION.— Un élément quelconque dépend de $n + 1$ paramètres que l'on choisira de noter $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y, z$. Il s'écrira $x_1 \text{Id} + x_2 X + \dots + x_{n-1} X^{n-2} + y E_{1n} + z E_{n, n-1} - n x_1 E_{nn}$.

d) Montrer que la sous-variété de l'espace affine $Y + \mathfrak{z}(X)$ formée des matrices nilpotentes est donnée par des équations de la forme $x_i = \alpha_i x_1^i$ pour $i = 2, \dots, n$ et $c x_1^n + yz = 0$ où les α_i et c sont des constantes dans \mathbb{C}^* .

INDICATION.— Une matrice A de la sous-variété considérée est caractérisée par le fait que $\text{tr}(\wedge^k A) = 0$ pour $k = 2, \dots, n$. Ces traces sont des sommes de mineurs principaux d'ordre k qui, lorsqu'ils sont examinés successivement pour $k = 2, \dots, n-1$, montrent que $x_i = \alpha_i x_1^i$, où α_i est une constante non nulle et $i = 2, \dots, n-1$. Ce fait quelque peu délicat peut être constaté facilement pour les valeurs petites de n , mais s'obtient, dans le cas général, par un raisonnement subtil explicité en h) plus bas. Enfin, le calcul du déterminant donne la dernière équation cherchée.

e) Représenter (sur machine) la surface de \mathbb{R}^3 donnée par les points réels de la variété algébrique affine $x^3 + yz = 0$.

f) Pour $t \in \mathbb{C}^*$, on pose $D(t) = \text{Diag}(t^{n-2}, t^{n-4}, \dots, t^{4-n}, t^{2-n}, 1)$. On définit alors une action de \mathbb{C}^* sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ par $t \cdot M = t^2 D(t) M D(t)^{-1}$. Vérifier que $t \cdot Y = Y$, $t \cdot X = t^4 X$ et $t \cdot \mathfrak{z}(X) \subset \mathfrak{z}(X)$ pour tout $t \in \mathbb{C}^*$.

En déduire que cette action préserve le sous-espace affine $Y + \mathfrak{z}(X)$ et sa sous-variété formée des matrices nilpotentes.

g) Montrer que le sous-espace affine $Y + \mathfrak{z}(X)$ ne contient aucun point sous-régulier en dehors de Y .

INDICATION.— Comme $\mathfrak{z}(X)$ est transverse à l'espace tangent en Y à la sous-variété régulière, il est clair qu'il existe un petit voisinage U de Y dont Y est le seul point sous-régulier. Or si l'on calcule $t \cdot A$ où $A = Y + x_1 \text{Id} + x_2 X + \dots + x_{n-1} X^{n-2} + y E_{1n} + z E_{n, n-1} - n x_1 E_{nn}$, on voit que la réunion des $t \cdot U$, pour $t \in \mathbb{C}^*$, est égale à $Y + \mathfrak{z}(X)$.

h) Montrer que l'élément A est nilpotent si et seulement si $x_i = \alpha_i x_1^i$, pour $i = 1, \dots, n-1$ et $c x_1^n + yz = 0$, où les α_i et c sont des scalaires non nuls.

INDICATION.— Il s'agit de résoudre le système d'équations $\text{tr} \wedge^k A = 0$, avec $k = 2, \dots, n$. L'action de \mathbb{C}^* sur $Y + \mathfrak{z}(X)$ donne lieu à une action de \mathbb{C}^* sur l'algèbre des polynômes sur $Y + \mathfrak{z}(X)$. Par exemple, $(t \cdot \text{tr} \wedge^k)(A) = \text{tr} \wedge^k (t^2 D(t) A D(t)^{-1}) = t^{2k} \text{tr} \wedge^k A$. Pour cette action, les coordonnées x_i sont homogènes de degré $2i$ et y, z sont homogènes de degré n . Le polynôme $\text{tr} \wedge^i A$, homogène de degré $2i$, est donc combinaison linéaire des monômes

$x_i, x_1x_{i-1}, x_1^2x_{i-2}, x_2x_{i-2}, \dots, x_1^i$. Remarquer que x_i intervient directement avec un coefficient non nul. Par récurrence sur i , en déduire que $\text{tr } \wedge^i A = 0$, pour $i = 2, \dots, n-1$, est équivalent à $x_i = \alpha_i x_1^i$ pour $i = 2, \dots, n$. La dernière équation cherchée s'obtient en développant $\det(A)$ par rapport à la dernière colonne.

bordants de la

0-C.11.41. On considère la variété algébrique affine V formée des matrices d'ordre n à coefficients dans (le corps algébriquement clos) \mathbb{K} qui annulent les $(n-p)^2$ mineurs bordants (d'ordre $p+1$) de la matrice X' formée avec les p premières lignes et p premières colonnes de la matrice générale $X = (X_{ij})$.

a) Montrer que l'ouvert V' de V donné par les matrices M telles que la sous-matrice M' d'ordre p formée avec les p premières lignes et colonnes de M soit inversible est un ouvert irréductible de codimension $(n-p)^2$ et formé de matrices qui sont toutes de rang p exactement.

INDICATION.— Le fait que les matrices de V' sont de rang p est un résultat facile d'algèbre linéaire (cf. [Mn-Ts], page 145). Le fait que V' est irréductible résulte de ce que c'est aussi un ouvert de la variété irréductible $\overline{\mathcal{R}}_p$ des matrices de rang inférieur ou égal à p .

Il est à remarquer que la variété $\overline{\mathcal{R}}_p$ est contenue dans la variété V . L'inclusion est stricte sauf lorsque $p = n-1$. En dehors de ce cas la variété V n'est pas irréductible, sinon l'ouvert V' y serait dense!

b) Déterminer les composantes irréductibles de la variété V .

INDICATION.— Remarquer que la variété V contient les sous-espaces vectoriels de codimension n définis respectivement par la nullité de tous les coefficients figurant sur l'une des p premières lignes ou colonnes. Quand $p \neq n-1$, on obtient là p^2 composantes irréductibles qu'il faut ajouter à V' . En particulier, la variété V n'est dans ce cas équidimensionnelle que lorsque n est un carré, soit $n = k^2$, et lorsque $p = n - k$.

Remarque. La considération de la sous-variété V' donne au passage un moyen rapide pour se rappeler la dimension de $\overline{\mathcal{R}}_p$. Un autre moyen est de savoir que l'espace tangent en la matrice $R_p = \text{Diag}(\text{Id}_p, 0, \dots, 0)$, qui est un point lisse de $\overline{\mathcal{R}}_p$, est donné par l'espace vectoriel des matrices telles que la sous-matrice formée avec les $n-p$ dernières lignes et colonnes soit nulle.

0-C.11.42. Orbite de Richardson. a) Montrer que le morphisme (algébrique) qui, à une matrice triangulaire supérieure inversible T d'ordre 2,

associe la matrice $TE_{21}T^{-1}$ applique le groupe $T(2, \mathbb{K})$ sur l'ensemble des matrices nilpotentes auquel on a ôté une droite (cf. exercice 0-C.11.34).

b) Montrer que les matrices nilpotentes supérieures E_{12} et E_{1n} de $M(n, \mathbb{K})$ sont semblables, mais qu'on ne peut cependant les conjuguer par une matrice triangulaire supérieure (sauf si $n = 2$).

c) Montrer par contre qu'une matrice triangulaire supérieure T_0 qui est semblable au bloc de Jordan J_n lui est aussi conjuguée par une matrice de passage triangulaire supérieure inversible.

INDICATION.— Il s'agit de trouver T telle que $TJ_n = T_0T$. Les coefficients de la surdiagonale de T_0 sont tous non nuls. On engage donc un raisonnement par récurrence en considérant ses $n - 1$ premières colonnes, d'où une matrice triangulaire inversible qu'on complète (et cela est possible) en une matrice triangulaire supérieure T d'ordre n dont la dernière colonne (à déterminer) devra avoir un coefficient t_{nn} non nul. On calculera à cet effet la valeur de J_{n-1} sur un vecteur colonne. Voir aussi l'exercice suivant.

d) On généralise maintenant en considérant l'espace vectoriel \mathfrak{p} des matrices triangulaires (supérieures) en blocs. On supposera pour simplifier que tous ces blocs sont de même taille b et que $n = kb$. Calculer la dimension de \mathfrak{p} . Montrer que les matrices nilpotentes dans \mathfrak{p} dont les blocs diagonaux sont tous nuls et les blocs surdiagonaux tous inversibles sont conjuguées, et qu'elles continuent à l'être sous l'action du groupe (parabolique) P des matrices triangulaires (supérieures inversibles) en les mêmes blocs. Vérifier que P possède une seule orbite dense⁵³ quand il opère sur le sous-espace \mathfrak{u} des matrices de \mathfrak{p} dont les blocs diagonaux sont nuls.

0-C.11.43. Orbites de groupes unipotents. a) Rappeler la démonstration du fait (évoqué dans le texte de la présente note) que, dans la topologie de Zariski, l'adhérence d'une orbite sous l'action d'un groupe algébrique est réunion de l'orbite et de sa frontière (ceci parce que l'orbite est localement fermée), que cette frontière est réunion d'orbites de dimensions plus petites et qu'en particulier, il y a toujours, dans ces adhérences d'orbites, des orbites fermées qui apparaissent comme les orbites de dimension minimale. L'existence d'orbites fermées nous servira dans les trois exercices suivants.

b) Prouver que les orbites d'un groupe algébrique *unipotent* (c'est-à-dire d'un groupe formé d'éléments unipotents) sur une variété affine X sont toutes fermées.

INDICATION.— Si Y est une orbite non fermée, considérer une fonction $f \in \mathbb{K}[\bar{Y}]$ nulle sur le fermé (G -stable) $F = \bar{Y} - Y$, mais pas sur Y . Les

⁵³ C'est l'orbite de Richardson du parabolique P sur l'algèbre de Lie \mathfrak{u} de son radical unipotent.

translatées de f sous l'action de G vivent dans un espace vectoriel (non nul) de dimension finie V (cf. 0.7.3.0) et s'annulent toutes sur F . Sachant qu'un élément unipotent reste unipotent dans une représentation (grâce à l'exponentielle – cf. 0-C.11.35, ceci revient à montrer qu'une matrice nilpotente reste nilpotente dans une représentation d'algèbres de Lie, ce qui a été constaté dans le texte de la note. Voir aussi la remarque qui suit l'exercice 0-C.11.9), il existe dans V une fonction h non nulle et invariante sous l'action de tous les éléments de G [cf. question r) dans 0.11.66]. Une telle fonction est constante sur les orbites et donc sur Y en particulier. Mais alors, elle est aussi constante sur \bar{Y} . Elle est donc nulle, d'où une contradiction.

c) Vérifier que les orbites du groupe $U(n, \mathbb{K})$ des matrices unipotentes supérieures sur \mathbb{K}^n sont bien fermées.

INDICATION.— Un calcul direct donne, comme orbites, les hyperplans affines $z_n = c$ où c est une constante non nulle et les sous-espaces affines de codimension deux donnés par $z_n = 0$ et $z_{n-1} = c$ où $c \neq 0$ et ainsi de suite jusqu'à toute une droite de points fixes. La présence des espaces affines se comprend mieux si l'on remarque que l'orbite du point v coïncide en fait avec l'ensemble des $v + N(v)$ où N décrit l'espace vectoriel des matrices nilpotentes triangulaires supérieures.

d) Déterminer les orbites du groupe $U(n, \mathbb{K})$ opérant par conjugaison sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{u}(n, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures nilpotentes. Démontrer en particulier que, si X désigne une matrice triangulaire supérieure ayant des zéros sur sa diagonale et sur sa surdiagonale, la similitude entre le bloc de Jordan J_n (de taille n) et la matrice $J_n + X$ peut être exprimée avec une matrice de passage dans $U(n, \mathbb{K})$.

INDICATION.— On démontrera tout d'abord que si $N_0 \in \mathfrak{n}$ a, comme J_n , un centralisateur de dimension minimum (égale à $n - 1$), l'orbite de N est donnée par l'espace affine $N_0 + [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. En effet, d'une part, l'orbite est bien contenue dans cet espace affine puisque $(\text{Id} + N)N_0(\text{Id} - N + N^2 - \dots) = N_0 + [N, N_0] + \dots \in N_0 + [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$, et d'autre part, elle est fermée comme toute orbite de groupe unipotent. On conclut alors en remarquant que sa dimension est celle de l'espace affine en question.

On peut aussi raisonner élémentairement et retrouver ainsi ce qui précède: si N_0 est une matrice de \mathfrak{n} telle que tous les termes de sa surdiagonale, soit a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , sont non nuls, alors elle est semblable à $N_0 + X$ où X est quelconque dans $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. On remarquera que la famille $\{e_n, N_0(e_n)/a_{n-1}, N_0^2(e_n)/a_{n-2}a_{n-1}, \dots\}$ n'est autre que la base canonique (à l'ordre près), et que la famille construite de façon analogue avec $N_0 + X$ à la place de N_0 est encore une base; on notera ensuite que la matrice de passage est dans $U(n, \mathbb{K})$.

Les autres orbites, qui sont toutes dans la variété algébrique affine $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} = 0$, ne sont pas systématiquement des sous-espaces affines; ainsi par exemple, l'orbite de $E_{23} \in \mathfrak{u}(4, \mathbb{K})$ est un paraboloïde hyperbolique. Remarquons qu'en caractéristique zéro, les orbites d'un groupe unipotent G dans la représentation coadjointe (c'est-à-dire sur le dual \mathfrak{g}^* de son algèbre de Lie) présentent toutes une certaine forme de platitude. En effet, il existe toujours des sous-espaces affines (bien particuliers) passant par $f \in \mathfrak{g}^*$, contenus dans l'orbite de f et de dimension la moitié de la dimension (paire) de celle-ci. Il s'agit des sous-espaces affines $f + \mathfrak{p}^\perp$ (l'orthogonalité est entendue au sens de la dualité), où \mathfrak{p} est une polarisation en f , c'est-à-dire un sous-espace vectoriel totalement isotrope maximal pour la forme bilinéaire alternée $(X, Y) \mapsto f([X, Y])$, et en même temps une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} . Une fois l'existence de polarisations en f établie, le schéma de la preuve est le suivant: la question de la dimension est facile; ensuite, si P est le sous-groupe associé à \mathfrak{p} , on montre que $P \cdot f = f + \mathfrak{p}^\perp$; cette égalité résulte de ce que l'orbite $P \cdot f$ est contenue dans l'espace affine en question (écrire $\text{Ad}^*(\exp X)f(Y) = f(Y) - f([X, Y]) + 1/2 f([X, [X, Y]]) + \dots$ et se rappeler que \mathfrak{p} est une sous-algèbre et qu'elle est totalement isotrope), qu'elle y est (Zariski)-fermée [d'après la question b) ci-dessus], et enfin qu'elle possède la même dimension.

0-C.11.44. Soit M une matrice orthogonale complexe diagonalisable. Montrer que les matrices qui lui sont semblables sous l'effet d'une matrice de passage dans $O(n, \mathbb{C})$ forment une variété algébrique affine⁵⁴.

INDICATION.— Considérer l'ensemble V des matrices Z de $O(n, \mathbb{C})$ annihilées par le polynôme minimal de M et telles que l'application $\text{Ad}(Z) : X \mapsto ZXZ^{-1}$ restreinte à l'espace vectoriel $E = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ des matrices antisymétriques ait même polynôme caractéristique que $\text{Ad}(M)|_E$. L'ensemble V est une variété algébrique affine sur laquelle opère par conjugaison le groupe $O(n, \mathbb{C})$. Toutes les orbites ont même dimension (se rappeler que $\text{Ad}(Z)$ est, comme Z , diagonalisable; par conséquent, le sous-espace propre de $\text{Ad}(Z)$ associé à la valeur propre 1 a pour dimension la multiplicité de 1 dans le polynôme caractéristique): d'après l'exercice précédent, elles sont donc fermées.

0-C.11.45. Un théorème de point fixe dû à Borel. On se propose de démontrer qu'un groupe algébrique résoluble irréductible agissant sur une variété complète non vide (cf. page 15) admet un point fixe. Ce joli

⁵⁴ Il s'agit de la classe de conjugaison dans $O(n, \mathbb{C})$ de l'élément semi-simple M .

théorème joue un rôle fondamental dans l'étude des sous-groupes de Borel d'un groupe algébrique (pour plus de détails, se référer à [Hum], page 134).

a) Montrer que le groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe algébrique G est fermé.

INDICATION.— Appliquer la généralisation dans la question e) de 0-C.11.35 aux images des applications $y \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$. Ces images ne sont pas des sous-groupes, mais cette hypothèse qui apparaît dans cette même question e) n'est pas vraiment vitale.

b) On suppose que le groupe G opère sur la variété X . Montrer que l'ensemble des points fixes sous $D(G)$ est fermé, et laissé stable par G .

INDICATION.— Le fait que cet ensemble-là soit fermé est facile à établir. La stabilité sous G résulte du fait que le sous-groupe dérivé $D(G)$ est distingué.

c) On dit qu'un groupe algébrique H est *résoluble* si la suite des groupes dérivés successifs aboutit au sous-groupe trivial $\{e\}$. On suppose que H opère sur X et que X est complète. En raisonnant par récurrence sur la dimension du groupe H , montrer que H possède dans X un point fixe⁵⁵.

INDICATION.— On fait opérer H sur la variété (non vide, d'après l'hypothèse de récurrence) complète (pourquoi ?) des points fixes sous l'action de $D(H)$, qui est de dimension strictement inférieure à la dimension de H (pourquoi ?). On choisit dans cette sous-variété une orbite de dimension minimale : elle est fermée (cf. exercice 0-C.11.43), donc complète. Dans le cas de la caractéristique nulle, la bijection entre l'orbite et le quotient est un isomorphisme. Aussi, le quotient est une variété complète qui est quasi-projective, donc projective; de plus, elle est affine, car H_x est un sous-groupe distingué (il contient $D(H)$). Elle est donc finie, et comme H est irréductible, elle est réduite à un point !! Quand la caractéristique n'est pas nulle, la complétude de l'orbite implique, malgré tout, la complétude du quotient.

d) En déduire le théorème de Lie : tout sous-groupe résoluble irréductible H de $GL(n, \mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe $T(n, \mathbb{C})$ des matrices triangulaires supérieures.

INDICATION.— Le groupe H opère sur la variété des drapeaux (maximaux) de \mathbb{C}^n . Démontrer qu'elle est projective, ou regarder simplement dans [Hum].

e) Un *sous-groupe de Borel* d'un groupe algébrique G (irréductible) est un sous-groupe algébrique irréductible (fermé) résoluble maximal. Tous les sous-groupes de Borel ont même dimension et sont conjugués. Leur ensemble est donné par G/B où B est l'un d'eux (un sous-groupe de Borel est égal à son propre normalisateur). (Cf. [Hum].) Le lecteur est invité à

⁵⁵ Les orbites fermées de l'action de H sur X sont donc réduites à un point.

se reporter au livre de Humphreys et à le lire, la matière qui y figure est maintenant à portée de main !

f) On démontre aussi que la réunion de tous les sous-groupes de Borel est égale à G (ce qui se traduit dans $G = GL(n, \mathbb{C})$ par le fait que toute matrice est trigonalisable !). Si le groupe G est de dimension 1, ceci implique que G est résoluble (un sous-groupe de Borel ne peut être réduit à $\{0\}$) et, par suite, commutatif (considérer $D(G)$). On démontre (et ce n'est point facile quand le corps est de caractéristique positive) que les seuls groupes algébriques de dimension 1 sont le groupe additif \mathbb{K} et le groupe multiplicatif \mathbb{K}^* . Ces deux derniers groupes ne sont pas isomorphes, puisqu'une application polynomiale quelconque du premier dans le second est constante (c'est le théorème de d'Alembert-Gauss).

Il y a dans [Hum], page 131, une jolie démonstration élémentaire (en ce sens qu'elle utilise seulement la notion d'ensemble constructible) du fait évoqué plus haut, à savoir que tout groupe algébrique affine irréductible de dimension 1 est commutatif : si, hypothèse *a posteriori* absurde, un élément $g \in G$ n'était pas central, son centralisateur serait fini, et donc sa classe de conjugaison serait dense (car infinie) ; mais elle est aussi localement fermée comme toute orbite. Elle contient donc un ouvert, et son complémentaire est alors fini. Si G était réalisé dans $GL(n, \mathbb{K})$ (cf. note 20 en bas de la page 17), les polynômes caractéristiques de ses éléments seraient en nombre fini. L'irréductibilité de G implique qu'il n'y en a qu'un seul, et les éléments de G sont tous unipotents ; il s'ensuit, vu le théorème de Kolchin [voir la question r) dans 0.11.66], que G est différent de son groupe dérivé, et donc que $D(G)$ est trivial, d'où une contradiction.

0-C.11.46. Tores algébriques. On se propose dans cet exercice d'examiner les propriétés les plus simples des tores. Le corps de base est algébriquement clos. Un groupe algébrique est appelé *tore* (notion déjà rencontrée dans la section 0-B.10) s'il est isomorphe à un groupe de matrices diagonales $D(n, \mathbb{K})$.

a) Montrer que l'ensemble des points (z_1, z_2) de \mathbb{K}^2 tels que $z_1^2 + z_2^2 = 1$ peut être muni d'une structure de tore de dimension 1.

INDICATION.— Écrire $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2)$ et se rappeler que \mathbb{K}^* s'identifie à l'ensemble des couples (x, y) tels que $xy = 1$.

b) Déterminer les caractères⁵⁶ du groupe $D(n, \mathbb{K})$.

Pour $n = 1$, il s'agit de chercher les morphismes algébriques ϕ de \mathbb{K}^* dans lui-même vérifiant $\phi(zz') = \phi(z)\phi(z')$. En multipliant ϕ par une puissance adéquate de z , on peut supposer que ϕ est un polynôme, et le caractère

⁵⁶ C'est à dire les homomorphismes (algébriques) du groupe à valeurs dans \mathbb{K}^* .

multiplicatif est valable partout. Si z_0 est une racine, il en est de même de $z_0 z$ pour tout z , ce qui entraîne que $z_0 = 0$, et donc que $\phi(z) = z^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer qu'un sous-groupe commutatif de $GL(n, \mathbb{K})$ qui est formé d'éléments semi-simples est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales inversibles.

INDICATION.— Diagonaliser simultanément.

d) Montrer que, pour l'action d'un tore T sur une variété projective X , il y a toujours des points fixes. Le vérifier d'abord pour l'action naturelle de $D(n, \mathbb{K})$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de l'action sur \mathbb{K}^n , mais aussi pour le cas du groupe $D(4, \mathbb{K})$ sur la grassmannienne des plans de \mathbb{K}^4 .

INDICATION.— C'est un cas particulier du théorème du point fixe de Borel. On peut en donner cependant une démonstration un peu plus courte : le quotient du tore par le stabilisateur d'un point appartenant à une orbite fermée (pour l'existence d'orbites fermées, cf. exercice 0-C.11.43) est une variété complète, irréductible, et enfin affine, car le groupe est commutatif (cf. page 14); le quotient est donc réduit à un point.

e) Que signifie l'existence d'un point fixe pour l'action d'un tore T sur la variété des sous-groupes de Borel de l'exercice précédent ?

INDICATION.— Tout simplement le fait trivial qu'il existe un sous-groupe de Borel contenant T .

f) Donner un exemple d'une action sans point fixe d'un tore sur une variété affine.

INDICATION.— Le groupe \mathbb{K}^* opérant sur lui-même par multiplication.

g) Existe-t-il des sous-groupes de $GL(n, \mathbb{C})$ dont les éléments forment une base de l'espace $M(n, \mathbb{K})$?

INDICATION.— Quand $n = p^2$ où p est premier, un tel sous-groupe est commutatif, et ses éléments sont semi-simples, car il est fini; il est donc contenu dans un conjugué du tore maximal $D(n, \mathbb{K})$, et ne peut tout engendrer.

h) Montrer qu'il existe un sous-groupe (nécessairement infini) du groupe des éléments inversibles de l'algèbre $\mathbb{K}[T]$ des fonctions régulières sur le tore $T = D(n, \mathbb{K})$ dont les éléments forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[T]$. De façon plus précise, montrer que l'algèbre $\mathbb{K}[T]$ est engendrée par les $2n$ caractères $\text{Diag}(d_1, \dots, d_n) \mapsto d_i$ ou $1/d_i$ rappeler du résultat classique connu sous le nom de *lemme de Dedekind* et qui dit que des caractères distincts sont linéairement indépendants).

i) On trouvera dans [Hum] plusieurs résultats profonds sur les tores. Le résultat qui suit est relativement élémentaire sans toutefois être trivial : les sous-groupes (fermés) irréductibles d'un tore sont aussi des tores.

INDICATION.— Le cas de la dimension 1 est très facile, vu que les fermés

stricts de \mathbb{K}^* sont des ensembles finis. La démonstration du cas général passe par la considération du groupe des caractères du tore $T = D(n, \mathbb{K})$, qui est isomorphe à \mathbb{Z}^n (cf. [Hum], page 104).

Un autre résultat déclare qu'il existe, dans un groupe G non résoluble, au moins deux sous-groupes de Borel distincts contenant un tore donné. La vérification dans $GL(n, \mathbb{K})$ est facile : il existe $n!$ sous-groupes de Borel différents contenant le tore maximal $D(n, \mathbb{K})$.

j) Montrer qu'il existe dans $GL(n, \mathbb{K})$ un sous-groupe de Borel B' tel que $B \cap B' = D(n, \mathbb{K})$, où $B = T(n, \mathbb{K})$. Exhiber une matrice de permutation qui conjugue B et B' .

INDICATION.— La permutation de l'enfant Gauss conjugue une matrice triangulaire supérieure en une matrice triangulaire inférieure.

0-C.11.47. Conjugaison des tores maximaux. a) Soit T une matrice triangulaire à coefficients complexes. On suppose que T est diagonalisable. Montrer qu'on peut la diagonaliser avec une matrice de passage triangulaire.

INDICATION.— Traiter d'abord le cas où $T \in T(2, \mathbb{C})$. Puis, raisonner par récurrence en considérant la restriction de T au sous-espace engendré par les $n - 1$ premiers vecteurs de base, restriction qui est encore diagonalisable !

b) En déduire que l'ensemble G_s des éléments semi-simples du groupe $G = T(n, \mathbb{K})$ est donné par la réunion de tous les conjugués dans G du tore (maximal) $D(n, \mathbb{K})$.

c) Montrer que l'ensemble T' des matrices de la forme

$$\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha_1)E_{n1}$$

est un tore maximal. Vérifier qu'il est conjugué du tore $D(n, \mathbb{K})$.

INDICATION.— Conjuguer par la matrice (unipotente) $\text{Id} + E_{1n}$; c'est d'ailleurs comme cela qu'a été trouvé le tore T' .

d) On démontre que les tores maximaux d'un groupe résoluble irréductible sont tous conjugués (cf. [Hum], page 123). En déduire alors la conjugaison des tores maximaux d'un groupe algébrique irréductible quelconque. (Considérer les sous-groupes de Borel de G .)

0-C.11.48. On se propose dans cet exercice d'examiner une situation qui relève des espaces symétriques. On démarre avec l'ensemble \mathfrak{g}_- des matrices d'ordre $m + n$ de la forme

$$M = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_m \end{bmatrix},$$

où la notation 0_k désigne la matrice nulle d'ordre k . La matrice A , par exemple, est une matrice à m lignes et n colonnes. On pourra, pour simplifier l'écriture, représenter symboliquement la matrice M par le couple (A, B) .

a) Vérifier que la matrice M est nilpotente si et seulement si le produit AB (ou le produit BA , ce qui est équivalent) est nilpotent.

b) Le groupe G_+ des matrices (bi-blocs diagonales) inversibles de la forme

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \text{ opère par conjugaison sur les matrices de } \mathfrak{g}_-, \text{ et l'on a donc}$$

$$P \cdot (A, B) = (P_2 A P_1^{-1}, P_1 B P_2^{-1}).$$

Soit N une matrice nilpotente de \mathfrak{g}_- . Montrer que la dimension de son orbite \mathfrak{o} sous l'action du groupe G_+ est la moitié de la dimension (paire) de son orbite \mathcal{O} dans $\mathfrak{g} = M(m+n, \mathbb{K})$ sous l'action du groupe $G = GL(m+n, \mathbb{K})$.

INDICATION.— Soit σ l'involution de \mathfrak{g} donnée par $X \mapsto I_{m,n} X I_{m,n}$, où la matrice $I_{m,n}$ est la matrice diagonale ayant m fois 1, puis n fois -1 sur la diagonale. On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ la décomposition de \mathfrak{g} en somme directe des sous-espaces propres de l'involution σ . Désignons par K la forme bilinéaire symétrique donnée par $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$. L'involution σ conserve clairement K et la somme directe ci-dessus est donc orthogonale pour K . La dimension de \mathcal{O} est celle de l'espace symplectique $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(N)$, où $\mathfrak{z}(N)$ désigne (abusivement) l'ensemble des matrices qui commutent avec N dans \mathfrak{g} . Ce dernier espace se décompose bien suivant la somme directe précédente, et l'on peut écrire $\mathfrak{z}(N) = \mathfrak{z}_+(N) \oplus \mathfrak{z}_-(N)$ puisque le centralisateur $\mathfrak{z}(N)$ est stable par σ : $[\sigma(X), N] = [X, \sigma(N)] = -[X, N] = 0$, où le crochet $[X, Y] = XY - YX$ est le crochet de Lie de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On écrit maintenant

$$(*) \quad \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(N) = \mathfrak{g}_+/\mathfrak{z}_+(N) \oplus \mathfrak{g}_-/\mathfrak{z}_-(N).$$

On lit évidemment la dimension de l'orbite \mathfrak{o} comme la dimension de $\mathfrak{g}_+/\mathfrak{z}_+(N)$, et il suffit donc pour conclure d'établir que les deux composantes de la somme directe $(*)$ sont totalement isotropes : en effet, ceci impose une limitation à leurs dimensions, et vu qu'ils sont en somme directe, ce sont donc des *lagrangiens* (c'est-à-dire des sous-espaces totalement isotropes maximaux). Calculons donc $\text{tr}(N[X, Y])$ pour X et Y dans $\mathfrak{z}_+(N)$, puis dans $\mathfrak{z}_-(N)$: il est clair que, si X et Y sont tous les deux dans \mathfrak{g}_+ ou \mathfrak{g}_- , leur crochet est dans \mathfrak{g}_+ . On termine en se rappelant que N , qui est dans \mathfrak{g}_- , est K -orthogonal à \mathfrak{g}_+ .

0-C.11.49. Connexité et classes de similitude réelles. La classe de similitude d'une matrice complexe est clairement connexe puisque le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ l'est; par contre, on sait que ce n'est généralement pas le cas pour les matrices réelles. On examine, dans cet exercice et dans l'indication qui suit, le problème de la connexité avec un minimum de connaissances préalables.

Montrer que la classe de similitude d'une matrice M_0 de $M(2, \mathbb{R})$ est connexe si et seulement si la matrice M_0 est diagonalisable sur \mathbb{R} .

INDICATION.— Pour établir la condition suffisante, on part de

$$M_0 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

L'écriture $PM_0P^{-1} = PDM_0D^{-1}P^{-1}$, où

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

prouve que la classe de similitude de M_0 est une orbite pour $GL^+(2, \mathbb{R})$. Réciproquement, si l'orbite est connexe, l'application

$$\varphi : M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \varphi(M) = (b - c)$$

applique une classe de similitude sur une partie de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0 (utiliser le fait qu'une matrice est semblable à sa transposée, ou, plus simplement, le fait que $M = (m_{ij})$ est semblable à $M^\sigma = (m_{\sigma(i)\sigma(j)})$ pour toute permutation σ). Vérifier que φ s'annule nécessairement sur la classe de similitude de M_0 .

0-C.11.50. (Variante du précédent). a) Montrer que dans $M(2, \mathbb{R})$ une matrice est semblable à son opposée si et seulement si elle est de trace nulle.

b) Montrer que

$$\varphi : M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \varphi(M) = (b - c)$$

applique la classe de similitude d'une matrice M dans \mathbb{R}^* si et seulement si M est non diagonalisable sur \mathbb{R} .

c) Montrer que les matrices réelles semblables à $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ forment une classe de similitude non connexe.

d) Montrer que les matrices réelles semblables à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ forment une classe de similitude non connexe.

e) Déterminer pour une matrice M dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ l'image par l'application φ de la classe de similitude de M .

INDICATION.— Il s'agit de constater que l'application φ s'exprime simplement au moyen de la projection orthogonale sur l'axe du cône des éléments nilpotents, et de discuter alors suivant la forme des classes de similitude. On constate en particulier que l'image est \mathbb{R}^* si et seulement si la matrice M est nilpotente non nulle. Par ailleurs, quand la matrice a ses valeurs propres imaginaires pures, soit $i\lambda$ et $-i\lambda$ avec $\lambda > 0$, l'image est donnée par la réunion des deux intervalles $] -\infty, -2\lambda]$ et $[2\lambda, +\infty[$.

f) En remarquant que $\varphi(M) = \varphi(M - \lambda \text{Id})$, déterminer l'image par φ de la classe de similitude de M quand M est quelconque dans $M(2, \mathbb{R})$. Constater en particulier que cette image est \mathbb{R} tout entier si et seulement si les valeurs propres de la matrice M sont réelles distinctes, ce qui dans un sens se voit directement grâce à

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x(a-b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Constater enfin qu'une matrice est scalaire si et seulement si l'image par φ de sa classe de similitude est réduite à un point.

g) Établir, soit directement, soit d'après ce qui précède, que la classe de similitude d'une matrice de $M(2, \mathbb{R})$ est connexe si et seulement si cette matrice est scalaire ou bien a toutes ses valeurs propres réelles et distinctes.

h) Montrer que le fait que l'image par φ d'une classe de similitude est toujours symétrique par rapport à l'origine résulte aussi de ce qu'une matrice M d'ordre 2 est semblable à sa comatrice $\tilde{M} = -M + \text{tr}(M)$.

0-C.11.51. (Suite des deux précédents). a) Montrer que la classe de similitude d'une matrice réelle M_0 est connexe si et seulement si il existe une matrice de déterminant strictement négatif qui commute avec M_0 (on remarquera au passage que cette condition ne dépend que de la classe de similitude de M_0).

INDICATION.— En effet, si tel est le cas, toute matrice semblable à M_0 peut s'écrire QM_0Q^{-1} avec Q dans $GL^+(n, \mathbb{R})$. Inversement, si toutes les matrices du centralisateur $Z(M_0)$ sont de déterminant strictement positif, l'application naturelle

$$GL(n, \mathbb{R})/Z(M_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})/GL^+(n, \mathbb{R}),$$

étant surjective, ne peut être définie sur un connexe.

Variante : on remarque d'abord que, si l'orbite est connexe, elle est connexe par arcs (pourquoi ?). On montre ensuite que l'action de $GL^+(n, \mathbb{R})$ sur l'orbite est transitive, et ce moyennant des relèvements de chemins (cf.

[Mn-Ts], page 159). Enfin, tout élément dans $GL(n, \mathbb{R})$ est alors égal à un élément de $GL^+(n, \mathbb{R})$ modulo un élément du stabilisateur.

(On a besoin, dans les raisonnements qui précèdent, de l'homéomorphisme entre l'orbite et l'espace homogène; cf. 0.5.2.3.)

b) Vérifier qu'une matrice réelle d'ordre deux est diagonalisable sur \mathbb{R} si et seulement si son centralisateur contient une matrice de déterminant strictement négatif.

c) Montrer que les classes de similitude dans $M(n, \mathbb{R})$ où n est impair sont toujours connexes. (Penser à $-\text{Id.}$)

d) Montrer que la classe de similitude de $M_0 \in M(n, \mathbb{R})$ où n est pair est connexe si et seulement si il existe une décomposition de \mathbb{R}^n en une somme directe de deux sous-espaces de dimension impaire stables par M_0 . Vérifier que ceci est bien cohérent avec le résultat pour les matrices d'ordre deux. Vérifier également que si cette propriété est vraie pour A , elle l'est aussi pour tA .

INDICATION. Dans un sens, on pensera à une matrice diagonale ayant des 1 et des -1 en nombre impair sur la diagonale; pour la réciproque, on pourra décomposer l'espace suivant les sous-espaces caractéristiques associés aux facteurs irréductibles du polynôme caractéristique de M commutant avec M_0 , et regrouper les sous-espaces associés aux valeurs propres strictement négatives.

e) Soit maintenant N_0 une matrice nilpotente. Montrer que, si l'un des blocs de Jordan de la réduite de Jordan de N_0 est d'ordre impair, la classe de similitude de N_0 est connexe. Montrer inversement que, si toutes les lignes du tableau de Young de N_0 sont de longueur paire, toute matrice commutant avec M_0 est de déterminant positif ou nul.

INDICATION.— On pourra procéder par un calcul direct, ou bien utiliser les questions précédentes en remarquant que la restriction d'une matrice nilpotente est nilpotente et que le tableau de Young d'une somme directe de deux matrices nilpotentes est la « somme » des tableaux de Young associés. (Se demander si une pseudo-jordanisation ne donne pas aussi le résultat.)

0-C.11.52. a) Soit Z une sous-variété algébrique affine d'un espace vectoriel complexe E qui contient une forme réelle F (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel réel V sous-jacent à E et tel que $V = F \oplus C(F)$, où l'on a noté $C : E \rightarrow E$ la structure complexe de E donnée par la multiplication par le scalaire i). Montrer que Z est nécessairement égale à E tout entier.

INDICATION.— Si une fonction polynomiale P , que l'on peut supposer réelle et définie sur V , ne s'annule pas en $f_1 + if_2$, l'application polynomiale qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ associe $P(f_1 + \lambda f_2)$ n'est pas identiquement nulle, et par suite la fonction polynomiale P n'appartient pas à l'idéal de définition de Z .

On remarquera que ceci s'exprime aussi en disant qu'un ouvert de Zariski de E rencontre toutes les formes réelles, ou encore que les points réels sont Zariski-denses.

b) En déduire que deux matrices A et B à coefficients réels semblables dans $M(n, \mathbb{C})$ sont semblables dans $M(n, \mathbb{R})$. Constater que le résultat pourrait être faux si A ou B cessaient d'être réelles.

INDICATION.— Considérer l'espace vectoriel complexe des matrices $P \in M(n, \mathbb{C})$ telles que $PA = BP$ et son intersection avec $M(n, \mathbb{R})$, qui en est (pourquoi ?) une forme réelle.

c) On suppose que A et \bar{A} sont simultanément semblables à B et \bar{B} dans $M(n, \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice dans $GL(n, \mathbb{R})$ qui conjugue A et B .

d) Montrer que deux matrices de $M(n, \mathbb{C})$ conjuguées sous l'action de $GL(n, \mathbb{C})$ le sont aussi sous l'action de $SL(n, \mathbb{C})$. De même, deux matrices réelles conjuguées sous l'action de $GL^+(n, \mathbb{R})$ le sont aussi sous l'action de $SL(n, \mathbb{R})$.

e) Montrer que l'on ne peut trouver dans $M(3, \mathbb{R})$ deux matrices singulières A et B qui commutent et soient telles que $A^2 + B^2$ est inversible alors que $A - B$ et $A + B$ sont singulières.

0-C.11.53. a) Montrer que toute matrice qui conjugue

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et $-J$ est nécessairement de déterminant strictement négatif.

INDICATION.— On peut évidemment faire le calcul, ou bien raisonner (si on pense au groupe symplectique) comme suit : si la matrice P de déterminant strictement positif vérifie $P^{-1}JP = -J$, on peut d'après l'exercice précédent la choisir dans $SL(2, \mathbb{R}) = Sp(1, \mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant ${}^tPJP = J$, ce qui donne, en multipliant les deux égalités, $-{}^tPP = \text{Id}$: l'identité serait donc symétrique définie négative !

b) On suppose $n = 2m$, et l'on note J_n le bloc de Jordan d'ordre n . Montrer que les matrices J_n et tJ_n (respectivement, les matrices J_n et $-J_n$) sont dans la même composante connexe sous l'action de $GL^+(n, \mathbb{R})$ si et seulement si m est pair. En déduire que, si P est une matrice réelle telle que $P{}^tJ_n + J_nP = 0$, alors le déterminant de P est positif. Peut-on voir cela directement ?

INDICATION.— Considérer la matrice de permutation associée à la permutation (de l'enfant Gauss) donnée par $\sigma(i) = n + 1 - i$ qui est de signature $(-1)^m$. Elle conjugue la matrice J_n en sa transposée (les coefficients $j_{k,k+1}$, tous égaux à 1, sont envoyés en $j_{n+1-k,n-k}$).

Remarque. Il s'agit en réalité de montrer, pour n quelconque, que les deux matrices nilpotentes X et $\tau(X) = -{}^tX$ sont dans la même composante connexe de leur classe de similitude. On le voit pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$; ensuite, on insère X dans un $\mathfrak{sl}(2)$ -triplet qui est muni d'une involution de Cartan (cf. [Hel]), qu'on prolonge à $M(n, \mathbb{R})$ en une involution de Cartan τ' (la donnée d'une involution de Cartan, c'est essentiellement la donnée d'un sous-groupe compact maximal, et l'on sait que tout sous-groupe compact est contenu dans un compact maximal). Les deux involutions de Cartan τ et τ' sont conjuguées (les compacts maximaux sont conjugués).

0-C.11.54. a) Soit M_1 et M_2 deux matrices de $M(n, \mathbb{C})$ ayant des polynômes caractéristiques différents. Montrer que la réunion de leurs orbites n'est pas connexe.

b) On suppose que M_1 et M_2 ont même polynôme caractéristique. Montrer alors que les orbites ont une réunion connexe si et seulement si elles sont comparables pour l'ordre naturel sur les orbites.

INDICATION.— Pour la condition suffisante, se rappeler qu'un ensemble coïncé entre un connexe et son adhérence est encore connexe. Pour la condition nécessaire, considérer la différence symétrique⁵⁷ des adhérences des deux orbites.

c) On considère le fermé $\overline{\mathcal{O}_X}$, où X est une matrice nilpotente d'ordre 6 ayant $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ & \square & \square \\ & & \square \end{smallmatrix}$ pour tableau de Young. Montrer que la variété algébrique affine définie par $V = \overline{\mathcal{O}_X} \setminus \mathcal{O}_X$ n'est pas irréductible, et que l'ensemble $\mathcal{O}_{X_1} \cup \mathcal{O}_{X_2}$, où X_1 et X_2 ont respectivement $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ & \square \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ & \square & \square \\ & & \square \end{smallmatrix}$ pour tableau de Young, coïncide avec l'ensemble des points réguliers de V . Ceci confirme le résultat classique et non trivial qui affirme qu'une variété algébrique affine complexe est irréductible si et seulement si l'ensemble de ses points réguliers est connexe.

0-C.11.55. Matrices d'ordre deux et similitude. a) Montrer que deux matrices d'ordre deux sont semblables si et seulement si elles ont même trace et même déterminant et enfin lorsque l'une est scalaire l'autre l'est aussi. En déduire que toute matrice de $M(2, \mathbb{K})$ est semblable à sa comatrice et que, en caractéristique différente de deux, une matrice de $M(2, \mathbb{K})$ est semblable à son opposée si et seulement si sa trace est nulle. Donner par ailleurs une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice inversible P d'ordre deux soit semblable à son inverse P^{-1} .

INDICATION.— La condition est que P appartienne à l'ensemble $SL(2, \mathbb{K})$ des matrices de déterminant 1 ou à l'ensemble des matrices de trace nulle

⁵⁷ La différence symétrique de deux ensembles F_1 et F_2 est définie par $F_1 \Delta F_2 = (F_1 \cup F_2) \setminus (F_1 \cap F_2)$.

et de déterminant -1 . Ce dernier ensemble est, dans le cas réel, un hyperboloïde à une nappe; quant à $SL(2, \mathbb{R})$, c'est un groupe de Lie de dimension 3. L'ensemble des matrices inversibles de $M(2, \mathbb{R})$ semblables à leur inverse est ainsi un fermé qui est réunion d'une sous-variété différentiable connexe (non compacte) de dimension 3 et d'un hyperboloïde à une nappe qui ne se coupent pas : il a donc en particulier deux composantes connexes.

b) Montrer que toute matrice d'ordre deux est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix}.$$

INDICATION.— Se ramener à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, et constater que le plan (vectoriel) formé par les matrices

$$\begin{bmatrix} a & c \\ -c & -a \end{bmatrix}$$

coupe le cône nilpotent : il rencontre par conséquent toutes les orbites.

c) Montrer que toute matrice d'ordre deux est semblable à une matrice de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$.

d) Montrer que toute matrice d'ordre deux qui n'est pas une homothétie est semblable à une matrice de la forme $\begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix}$.

e) Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Que doit vérifier $xt + yz$ pour que la matrice $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ soit semblable à A ?

0-C.11.56. Montrer que l'ensemble \mathcal{N}_k des matrices nilpotentes X d'ordre n telles que $X^k = 0$ est irréductible.

On pourra vérifier qu'il apparaît comme l'adhérence d'une orbite (laquelle?).

0-C.11.57. Une classe particulière de matrices nilpotentes. a) Soit X un endomorphisme nilpotent. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

- i) $2 \dim \operatorname{Ker} X = \dim \operatorname{Ker} X^2$.
- ii) $\operatorname{Ker} X \subset \operatorname{Im} X$.
- iii) Il n'y a pas de cellules de Jordan de taille 1 dans la réduction de Jordan de X .
- iv) La dimension de la dernière composante (qui est un sous-espace) d'une famille de Kostant de X est nulle.

Quand l'endomorphisme nilpotent X satisfait l'une ou l'autre de ces conditions, on dit qu'il est de *type* $\bar{\delta}$.

b) Montrer que $\text{ad } X$ n'est jamais de type $\bar{\delta}$. Plus précisément, établir que le nombre de cellules de Jordan de taille 1 dans la réduction de Jordan de $\text{ad } X$, nombre qui est égal à la dimension de la dernière composante d'une famille de Kostant de $\text{ad } X$, est égal à la somme des carrés des dimensions des sous-espaces composantes d'une même famille de Kostant de X .

INDICATION.— On pourra se reporter au mode d'obtention du tableau de Young de $\text{ad } X$ et y détecter les contributions de chaque ligne et des paires de lignes de même longueur

c) Montrer que le nombre de lignes de taille maximale dans le tableau de Young de $\text{ad } X$ est égal au carré du nombre de lignes de taille maximale de X . En déduire un calcul de la dimension des premières composantes des familles de Kostant de $\text{ad } X$.

d) Soit x la restriction de $\text{ad } X$ à son image. Montrer que x est de type $\bar{\delta}$ si et seulement si le tableau de Young de X ne comporte pas deux lignes qui diffèrent en longueur d'une seule case. Montrer dans ce cas que, si $[X, Z]$ commute avec X , alors il existe T tel que $[X, Z] = [X, [X, T]]$.

0-C.11.58. On se propose dans cet exercice d'établir un résultat dû à B. Klarès et qui affirme qu'une matrice M à coefficients dans \mathbb{C} est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(\text{ad } M) = \text{Ker}(\text{ad } M)^2$.

a) On écrit $M = S + N$ et l'on note $\mathfrak{z}(S)$ le centralisateur de la composante semi-simple de M . Rappeler pourquoi $M(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{z}(S) \oplus [S, M(n, \mathbb{C})]$.

b) Montrer que la somme directe précédente est orthogonale pour la forme quadratique $X \mapsto \text{tr } X^2$ définie sur $M(n, \mathbb{C})$.

c) Montrer que $\text{ad}(M)$ laisse stable $\mathfrak{z}(S) = \text{Ker}(\text{ad } S)$ et que les restrictions de $\text{ad } M$ et de $\text{ad } N$ à $\mathfrak{z}(S)$ coïncident. Montrer alors que la restriction de $\text{ad } N$ à $\mathfrak{z}(S)$ appartient à la classe des endomorphismes f qui vérifient $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

d) En déduire que la matrice N commute avec tous les éléments de $\mathfrak{z}(S)$.

e) Montrer que $\text{tr}(NX) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{z}(S)$. Conclure.

On aura noté que, si le centralisateur de S est contenu dans le centralisateur de N (ou, ce qui est équivalent, si les centralisateurs de M et de S sont égaux), alors M est diagonalisable. On aurait pu aussi obtenir ce résultat grâce à la décomposition spectrale de M .

0-C.11.59. (Exercice difficile) Si X nilpotent commute avec $[X, Z]$, alors XZ est nilpotent (B. Kostant).

0-C.11.60. a) Soit $\lambda \neq \bar{\lambda}$ dans \mathbb{C} .

Montrer que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

n'est semblable à aucune matrice réelle.

INDICATION.— On pourra montrer qu'elle n'est pas semblable à sa matrice conjuguée \bar{A} , ou bien constater que son polynôme minimal $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})^2$ n'est pas réel.

b) Montrer qu'une matrice M de $M(n, \mathbb{C})$ qui est semblable à sa conjuguée \bar{M} est semblable à une matrice réelle.

INDICATION.— Constater que les facteurs invariants de M sont nécessairement réels; tout revient alors à montrer qu'étant donnée une famille de polynômes adéquats sur \mathbb{R} , on peut trouver une matrice réelle dont ils sont les facteurs invariants. On pourra à cette fin penser à un tableau de matrices compagnons.

c) Montrer qu'une matrice d'ordre deux ou trois à coefficients complexes est semblable à une matrice réelle si et seulement si son polynôme caractéristique est à coefficients réels.

0-C.11.61. a) Soit A et B deux matrices dans $M(n, \mathbb{K})$. On suppose qu'il existe C inversible telle que $AB = AC^{-1} + CB$. Montrer que AB et BA sont semblables.

INDICATION.— L'égalité $(C - A)(C^{-1} - B) = \text{Id}$ implique l'égalité $(C^{-1} - B)(C - A) = \text{Id}$.

b) On suppose $C = \text{Id}$, dans la question précédente. Montrer que $AB = BA$.

c) On suppose A et B quelconques. Montrer que les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique, mais qu'elles ne sont en général pas semblables.

INDICATION.— On pourra remarquer que, lorsque A est inversible, $AB = A(BA)A^{-1}$. Se rappeler aussi que l'on peut avoir $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

d) Montrer que les matrices AB et BA sont cependant semblables quand AB et BA sont toutes les deux de rang 1, ou bien quand elles sont toutes les deux des projecteurs. Vérifier que, d'une façon générale, deux matrices M et M' semblables s'écrivent toujours $M = XY$ et $M' = YX$ pour X et Y bien choisies.

INDICATION.— Se rappeler que la trace classe les classes de similitude des matrices de rang 1 et les classes de similitude des projecteurs.

e) Soit $A \in M(n, \mathbb{C})$. On note A^* sa matrice adjointe. Montrer que les matrices AA^* et A^*A sont semblables.

f) On écrit

$$AB = Q \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} Q^{-1} \quad \text{et} \quad BA = R \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} R^{-1},$$

où les matrices N_i sont nilpotentes et les matrices P_i inversibles. Montrer que P_1 et P_2 sont semblables.

INDICATION.— La question c) montre que P_1 et P_2 sont de même ordre. Par ailleurs, ces matrices P_1 et P_2 , sont respectivement les matrices des endomorphismes \overline{AB} et \overline{BA} déduits de AB et BA par passage aux quotients de $E = \mathbb{K}^n$ par les sous-espaces caractéristiques respectifs \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 associés à la valeur propre nulle (et ce dans des bases adéquates). Les applications naturelles $\overline{B} : E/\mathcal{C}_1 \rightarrow E/\mathcal{C}_2$ et $\overline{A} : E/\mathcal{C}_2 \rightarrow E/\mathcal{C}_1$ sont bijectives (puisque leurs composées le sont !) et l'on a $\overline{B} \circ \overline{AB} = \overline{BA} \circ \overline{B}$.

g) Donner un exemple de deux matrices A et B telles que $\text{rang } AB = \text{rang } BA$ et telles que AB et BA ne soient pas semblables.

INDICATION.— On cherchera deux matrices A et B d'ordre (au moins) 4 telles que AB et BA soient nilpotentes, de rang 2 et déjà jordanisées. On écrira ensuite chacune des matrices ABA et BAB de deux manières différentes. Les matrices suivantes conviennent :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

0-C.11.62. a) Soit $M = (m_{ij}) \in M(n, \mathbb{C})$. On note \overline{M} la matrice (\overline{m}_{ij}) obtenue à partir de M par conjugaison des coefficients. On suppose que la matrice $M\overline{M}$ est nilpotente. Montrer que $M\overline{M}$ et $\overline{M}M$ sont semblables.

INDICATION.— Remarquer que la réduction de Jordan montre que la matrice $M\overline{M}$ est semblable à une matrice réelle ! Plus généralement, une matrice nilpotente complexe M est toujours semblable à \overline{M} .

b) Montrer que $M\overline{M}$ et $\overline{M}M$ sont toujours semblables.

INDICATION.— On remplace A et B dans f) de l'exercice précédent par M et \overline{M} respectivement, en prenant soin de supposer que les matrices N_i ont été réduites à leurs formes de Jordan.

c) En déduire que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $M\overline{M}$ sont à coefficients réels. Retrouver cela directement. Montrer aussi que, pour tout scalaire λ , $\text{rang}(M\overline{M} - \lambda \text{Id}) = \text{rang}(\overline{M}M - \overline{\lambda} \text{Id})$.

d) Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour

que les matrices $M = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et \bar{M} (qui sont semblables dans $M(2, \mathbb{C})$) soient conjuguées par une matrice réelle. Vérifier en particulier qu'elles ne le sont pas si $z = 1 + i$.

0-C.11.63. Montrer que la matrice nilpotente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vérifie $A\bar{A} = 0$, mais ne vérifie pas $A^2 = 0$. Montrer par contre que toute matrice nilpotente M d'ordre 3 qui vérifie $M\bar{M} = 0$ vérifie aussi $M^2 = 0$.

0-C.11.64. a) Soit S une matrice symétrique réelle. Montrer que S est semblable à $-S$ si et seulement si le polynôme caractéristique de S est pair.

b) Soit S_n la partie symétrique de la matrice $M = J_n + J_n^{n-1}$. Montrer que pour tout entier m , la matrice S_{2m} est semblable à son opposée.

INDICATION.— Remarquer que si P_n est la matrice de permutation associée à la permutation circulaire de n éléments, on a $S_n = P_n + P_n^{-1}$. On se rappellera enfin que les valeurs propres de P_n sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

0-C.11.65. (Élémentaire). Cet exercice facile, mais néanmoins utile (nous pensons entre autres aux systèmes de racines dans les algèbres de Lie semi-simples), contient un piège pour les étudiants débutants.

a) Montrer que, si E_{ij} est une matrice fixée de la base canonique de $M(n, \mathbb{K})$ telle que $i \neq j$, le nombre de matrices E_{kl} qui commutent avec elle est égal à $(n^2 - 2n + 1)$ (on rappelle que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$). Constater que le coefficient non nul d'une telle matrice E_{kl} figure en dehors de la réunion de la $i^{\text{ième}}$ colonne et de la $j^{\text{ième}}$ ligne. Décrire alors l'espace des matrices qui commutent avec E_{ij} et calculer sa dimension.

INDICATION.— S'assurer que la codimension du centralisateur de E_{ij} est bien paire (cf. proposition 0.4.1.1), et ne pas faire l'erreur de croire qu'on peut extraire de la base canonique une base du centralisateur.

b) Vérifier que $\langle E_{ij}, E_{ii} - E_{jj}, E_{ji} \rangle$ est un \mathfrak{sl}_2 -triplet contenant la matrice nilpotente E_{ij} , et que la matrice $E_{ii} + E_{jj}$ commute avec E_{ij} .

- c) Vérifier que, lorsqu'il est non nul, le crochet $[E_{ij}, E_{kl}]$ est encore une matrice de la base canonique. Indiquer schématiquement comment localiser dans ce cas son terme non nul à partir de ceux de E_{ij} et de E_{kl} .
- d) Vérifier aussi que le crochet $[D, E_{ij}]$, où $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$, est égal à $(d_i - d_j)E_{ij}$. Déterminer alors, sans calcul, le crochet de D et d'une matrice nilpotente triangulaire supérieure. De même, déterminer la droite affine des matrices diagonales Δ telles que $[\Delta, J_n] = J_n$.
- e) Quelles sont les matrices diagonales D telles que le crochet $[D, J_n]$ soit semblable à J_n (attention, à partir de $n = 3$ on trouve davantage que les matrices diagonales à valeurs propres distinctes) ?
- f) Quelles sont les matrices diagonales D telles que $[D, J_n^2]$ soit semblable à J_n^2 ?
- g) Montrer que la matrice E_{ij} est à un scalaire près la seule matrice M telle que pour toute matrice diagonale D , on ait $[D, M] = (d_i - d_j)M$.

0-C.11.66. Soit $\langle Y, H, X \rangle$, un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans $M(n, \mathbb{K})$. On suppose que H et X appartiennent à une sous-algèbre de Lie \mathfrak{g} de $M(n, \mathbb{K})$ vérifiant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

a) Montrer que les sous-espaces propres de la restriction de $\text{ad } H$ à \mathfrak{g} associés à des poids opposés ont même dimension.

b) (Question difficile) L'élément Y est-il aussi dans \mathfrak{g} ?

INDICATION.— Pour a), considérer la pyramide pondérée associée au \mathfrak{sl}_2 -triplet $\langle \text{ad } Y, \text{ad } H, \text{ad } X \rangle$. On a une décomposition de $\mathcal{L}(M(n, \mathbb{K}))$ en somme de sous-espaces poids $\mathcal{L}(\alpha)$ pour $\text{ad } H$, et il est facile de vérifier que $(\text{ad } X)^p$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{L}(-p)$ et $\mathcal{L}(p)$ (se rappeler comment on lit le noyau de $\text{ad } X$, $\text{ad } X^2$, ... dans la pyramide). Les endomorphismes $\text{ad } X$ et $\text{ad } H$ laissent stable \mathfrak{g} ; la restriction de $\text{ad } H$ à \mathfrak{g} est diagonalisable, ce qui permet d'écrire \mathfrak{g} comme somme directe des traces $\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g} \cap \mathcal{L}(\alpha)$ des sous-espaces poids sur \mathfrak{g} , et l'on a même un diagramme pondéré induit. Vérifier qu'il a les mêmes propriétés de symétrie par rapport à sa colonne centrale que la pyramide elle-même : pour cela, remarquer d'abord que les endomorphismes $(\text{ad } X)^p$ induisent des injections $\mathfrak{g}(-p) \hookrightarrow \mathfrak{g}(p)$; comme l'élément H est une combinaison de commutateurs de \mathfrak{g} , la trace de la restriction $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ est nulle. En déduire que les injections précédentes sont des isomorphismes.

0-C.11.67. Le ruban de Möbius. a) Vérifier que le bord d'un ruban de Möbius est un cercle. Montrer que si l'on colle un disque au ruban de Möbius suivant ce cercle, on obtient le plan projectif. Autrement dit, si l'on

ôte un disque (ouvert) au plan projectif, on retrouve le ruban de Möbius (avec bord).

INDICATION.— Partir d'un rectangle dans lequel on identifie chaque couple de points opposés du bord. Lui ôter un (petit) rectangle et prouver que ce qui reste est homéomorphe à un ruban de Möbius, en opérant une coupure et en recollant astucieusement. Voir aussi l'indication du b).

b) Montrer que le compactifié d'Alexandroff du ruban de Möbius ouvert est donné par le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

INDICATION.— Enlever un point au plan projectif revient à enlever à la sphère \mathbb{S}^2 deux points pour la quotienter ensuite par la relation qui identifie deux points opposés. Ceci revient encore à quotienter le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ par la même relation, ce qui donne le ruban de Möbius (ouvert).

c) Retrouver le ruban de Möbius ouvert en quotientant un hyperboloïde à une nappe (centré sur l'origine) par la relation qui identifie chaque couple de points opposés.

d) (Variante) Montrer que l'ensemble \mathcal{H} des matrices réelles semblables à la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ est stable par $M \mapsto -{}^tM$, et que le quotient de \mathcal{H} par la relation qui identifie M à $-{}^tM$ est le ruban de Möbius (ouvert).

e) Montrer que si l'on colle deux rubans de Möbius suivant leur bord, on obtient la bouteille de Klein.

0-C.11.68. a) Montrer que l'intersection d'une quadrique non dégénérée avec un plan est une conique (dégénérée ou non).

INDICATION.— En homogénéisant avec la variable t , on est ramené à déterminer l'intersection des trois ensembles suivants : un cône de signature $(3, 1)$ ou $(2, 2)$, un hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^4 , et enfin l'hyperplan $t = 1$. L'intersection des deux premiers donne, selon la nature du cône et selon que l'hyperplan vectoriel est tangent au cône ou pas, un cône usuel, une droite ou un dièdre; il s'agit de couper cela avec l'intersection des deux derniers, qui est un plan affine de l'espace usuel.

b) Déterminer l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe avec un plan tangent à son cône asymptote.

INDICATION.— On trouve deux droites parallèles à la génératrice d'appui du plan tangent le long du cône. Se servir pour cela de l'indication précédente : on a un plan parallèle à l'axe du dièdre d'appui d'un espace vectoriel tangent le long d'un cône isotrope de signature $(2, 2)$.

c) Peut-on obtenir des ellipses en coupant un paraboloïde hyperbolique par un plan ?

d) Montrer que l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe avec un plan

ne peut être réduite à une droite, alors que cela est possible pour les paraboloides hyperboliques.

e) Montrer que l'on ne peut obtenir d'hyperbole en coupant un paraboloides elliptique par un plan, mais que cela est possible dans le cas d'un paraboloides hyperbolique. Ceci explique dans une certaine mesure la terminologie.

0-C.11.69. Un isomorphisme $PGL(2, \mathbb{R}) \simeq SO(1, 2)$. On se propose, entre autres, d'établir de façon élémentaire l'isomorphie déjà constatée (cf. page 237) des deux groupes considérés⁵⁸.

On rappelle que la forme quadratique q donnée par le déterminant sur $M(2, \mathbb{R})$ est de signature $(2, 2)$, et que la forme bilinéaire T qui lui est associée est donnée par $T(A, B) = \frac{1}{2}[\text{tr}(A) \text{tr}(B) - \text{tr}(AB)]$.

a) Montrer que l'application qui à une matrice de $M(2, \mathbb{R})$ associe sa comatrice est un automorphisme orthogonal pour q .

INDICATION.— Cette application est en fait la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par Id parallèlement à l'hyperplan $N = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ des matrices de trace nulle.

b) On se donne deux matrices X et Y de $M(2, \mathbb{R})$ qui anticommulent. Montrer que la matrice $X^2 Y^2$ est une matrice scalaire.

INDICATION.— Noter que la trace de XY est nulle. Le théorème de Cayley-Hamilton implique alors que le carré de XY est une matrice scalaire. On écrit enfin $XYXY = -X^2 Y^2$.

c) On se donne deux matrices A et B d'ordre deux de trace nulle. Montrer que $AB + BA = \text{tr}(AB)\text{Id}$.

INDICATION.— On se ramène par polarisation à supposer que $A = B$.

d) Montrer que l'application $(A, B, C) \mapsto \text{tr}(ABC)$ est une forme trilinéaire alternée *non nulle* sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

INDICATION.— Deux matrices A et B de trace nulle sont orthogonales pour le déterminant si et seulement si elles le sont pour la forme quadratique $A \mapsto \text{tr}(A^2)$, ou encore si et seulement si elles anticommulent. On considère alors deux matrices inversibles A et B qui anticommulent (noter qu'une matrice de trace nulle est inversible si et seulement si elle n'est pas nilpotente). La matrice AB est de trace nulle, et l'on a alors $\text{tr}(AB \cdot A \cdot B) = -2 \det(AB) \neq 0$.

⁵⁸ Cet exercice s'inspire d'un problème de concours (ENSET 76).

On a d'ailleurs l'identité

$$\text{tr} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & -a'' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}.$$

e) Rappeler quelles sont les classes de similitude dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

INDICATION.— À part la classe formée par la matrice nulle, on trouve les matrices nilpotentes non nulles, qui sont toutes semblables à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, puis les matrices non nilpotentes qui ont un même polynôme caractéristique donné, qui sont semblables

$$\text{à } \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou à } \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$$

avec λ et μ non nuls.

f) On note q_0 la restriction de q à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Vérifier que la signature de q_0 est $(1, 2)$.

g) Montrer que, dans $M(2, \mathbb{R})$, une matrice est de carré scalaire si et seulement si elle est de trace nulle ou est elle-même scalaire.

h) Soit s un automorphisme de l'algèbre $M(2, \mathbb{R})$. Montrer que s envoie toute matrice de trace nulle sur une matrice de trace nulle. En déduire que s conserve la trace.

i) Montrer que la restriction s' de s à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ conserve le déterminant.

INDICATION.— Écrire $\det(s(M))\text{Id} = -s(M)^2 = -s(M^2) = \det(M)\text{Id}$.

j) En déduire, en utilisant la question e), que s envoie toute matrice de trace nulle sur une matrice qui lui est semblable. Montrer alors que les automorphismes de l'algèbre $M(2, \mathbb{R})$ conservent les classes de similitude.

k) Montrer que, si s est un automorphisme de l'algèbre $M(2, \mathbb{R})$, sa restriction s' est alors de déterminant 1.

INDICATION.— Lire le déterminant dans la forme trilinéaire alternée introduite à la question d) ci-dessus, sachant par ailleurs que s conserve la trace.

l) Soit s un élément du groupe orthogonal $O(2, 2)$ de $q = \det$ laissant fixe l'identité. On pose

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h = fg = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $s(fg) = \pm s(f)s(g)$.

INDICATION.— L'application s conserve l'orthogonal $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}\text{Id}$. Par ailleurs, les matrices f , g et h forment une base orthogonale pour q_0 . L'application s va les envoyer sur une base orthogonale f' , g' , h' de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Comme f' et g' anticommulent, leur produit $f'g'$ est de trace nulle. Un

calcul facile montre que $f'g'$ anticommute avec f' et avec g' : il est donc proportionnel à h' .

m) Montrer que si s est un endomorphisme de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ qui conserve le déterminant et qui est de déterminant 1 (i.e. $s \in SO(1, 2)$), alors s se prolonge en un automorphisme de l'algèbre $M(2, \mathbb{R})$.

INDICATION.— On pose $s(\text{Id}) = \text{Id}$; l'hypothèse $\det(s) = 1$, lue dans la forme trilinéaire alternée précédente, entraîne que $f'g' = h'$.

La table de multiplication de f', g', h' est la même que celle de f, g, h . La bilinéarité du produit de matrices permet de conclure.

n) Montrer que tout automorphisme de l'algèbre $M(2, \mathbb{R})$ est intérieur⁵⁹.

INDICATION.— Un tel automorphisme s conserve les classes de similitude.

Aussi, en le composant avec un automorphisme intérieur, on peut supposer

qu'il laisse fixe h . Notons $n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. On a $hn = n$, par suite $s(n)$

est de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Il est alors facile de trouver une matrice qui

commute avec h et qui conjugue n et αn . En composant s de nouveau par un automorphisme intérieur, on peut supposer qu'il laisse fixe toutes les

matrices triangulaires supérieures. On écrit enfin $nf = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, et l'on en

déduit que $s(f) = f$: l'automorphisme s est donc l'application identique.

o) Établir que $PGL(2, \mathbb{R}) = GL(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$ est isomorphe à $SO(1, 2)$.

p) Montrer que tout élément de $SO(1, 2)$ possède un point fixe.

INDICATION.— On a déjà vu dans le texte de la note (cf. page 236) un premier argument. Nous allons en donner dans ce qui suit trois autres.

Considérer un automorphisme intérieur $i_P : X \mapsto PXP^{-1}$, et noter que toute matrice commutant avec P , par exemple Id ou P , est un point fixe de i_P . Le sous-espace vectoriel des points fixes est assez grand pour rencontrer l'hyperplan $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Une deuxième méthode : travailler sur une valeur propre $\lambda \neq \pm 1$ de s associée à un vecteur propre isotrope v . Le plan (tangent au cône) donné par $(\mathbb{R}v)^\perp$ est stable par s . Le cas de figure gênant est celui où s admet $\lambda, -1/\lambda$ et -1 comme valeurs propres. Soit w un vecteur propre (nécessairement) isotrope associé à $-1/\lambda$. Les plans orthogonaux à v et w se coupent suivant une droite Δ stable qui porte donc les vecteurs propres associés à -1 . On écrit alors les matrices M_q et M_s de q_0 (qui est de signature $(1, 2)$) et de s dans une base de vecteurs propres, et l'on vérifie qu'on ne peut avoir ${}^tM_s M_q M_s = M_q$.

⁵⁹ Ce résultat est encore valable dans $M(n, \mathbb{R})$ pour tout n . On l'établira au chapitre suivant.

Enfin, et c'est peut-être le plus simple des arguments : écrire pour $M \in SO(1, 2)$:

$$\begin{aligned}\det(M - \text{Id}) &= \det(JM - J) = \det({}^t M J M - {}^t M J) \\ &= \det(J - {}^t M J) = \det(\text{Id} - {}^t M),\end{aligned}$$

où J est la matrice de la forme quadratique $(x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 - z^2$ dans la base canonique canonique de \mathbb{R}^3 .

q) Montrer que, pour tout réel λ , il existe un élément de $SO(1, 2)$ qui admet λ comme valeur propre.

INDICATION.— Choisir P qui conjugue les matrices nilpotentes n et λn ; l'automorphisme intérieur défini par P induit un tel élément de $SO(1, 2)$...

r) Déterminer les orbites de $SO(1, 2)$ sur \mathbb{R}^3 .

INDICATION.— Ce sont les mêmes que les orbites de $GL(2, \mathbb{R})$ opérant par similitude sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$: ce sont donc l'origine, le cône isotrope épointé, des hyperboloïdes à une nappe et des hyperboloïdes à deux nappes. On note au passage que les orbites données par les hyperboloïdes à deux nappes témoignent de la non connexité de $SO(1, 2)$.

0-C.11.70. Groupes abéliens finis. Les méthodes de cette note sur la similitude peuvent être appliquées avec succès pour déterminer la structure des groupes abéliens finis que l'on étudie usuellement comme modules de type fini sur l'anneau principal \mathbb{Z} . Commencer, dans le cadre de la réduction des endomorphismes, par l'examen des opérateurs nilpotents revient dans le cadre des groupes abéliens finis à examiner en premier les p -groupes abéliens. Au théorème de décomposition de l'espace vectoriel en sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme A , correspond la décomposition du groupe abélien G en la somme de ses *composantes* p -*primaires*⁶⁰. Le principal résultat, qui affirme que tout groupe abélien fini est somme directe de groupes cycliques, peut donc être établi pour les p -groupes abéliens.

a) Soit G un groupe abélien fini et p un nombre premier. On notera f l'endomorphisme⁶¹ de G qui à x associe px . La suite des noyaux itérés de l'endomorphisme f vérifie les mêmes propriétés que la suite des itérés des noyaux de l'endomorphisme A . Dire alors que la suite (qui est croissante) remplit G équivaut à dire que G est un p -groupe. À chaque

⁶⁰ Si p est un nombre premier divisant le cardinal de G , la composante p -primaire associée est le sous-groupe formé des éléments de G annulés par une puissance de p . Remarquer pour l'anecdote que cet ensemble coïncide avec l'unique p -Sylow de G .

⁶¹ On aura noté le besoin, à ce stade, de supposer le groupe G commutatif.

p -groupe est alors associé un tableau de Young constitué à partir de ses colonnes⁶²; la longueur l_k de la $k^{\text{ième}}$ colonne est donnée par la dimension du $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel $\text{Ker } \mathbf{f}^{k+1} / \text{Ker } \mathbf{f}^k$. Notons que le cardinal de $\text{Ker } \mathbf{f}^k$ est donc p^l , où $l = \sum_{1 \leq i \leq k} l_i$. En adaptant à ce cadre les ingrédients de la réduction de Jordan, démontrer que tout p -groupe abélien est somme de groupes cycliques⁶³.

b) En déduire que le nombre (à isomorphisme près) de p -groupes abéliens de cardinal p^n est égal au nombre $p(n)$ des partitions de n , et que le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est celui qui correspond à un tableau de Young n'ayant qu'une ligne.

c) Montrer que le p -groupe abélien G est cyclique si et seulement si son sous-groupe de p -torsion $G_p = \{x \in G; px = 0\}$ est d'ordre p .

d) Montrer que le p -groupe abélien G est isomorphe à un groupe de la forme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus H$ si et seulement si $\text{Ker } \mathbf{f}$ n'est pas inclus dans $\text{Im } \mathbf{f}$. (Cf. exercice 0-C.11.57.)

e) Montrer que si G est un groupe abélien d'ordre n , il est cyclique si et seulement si $m \cdot G \neq \{0\}$ pour tout diviseur strict m de n .

f) Comment déterminer, pour un groupe abélien fini G , le p -tableau de Young du groupe $G \times G$, connaissant celui du groupe G ? Déduire du résultat que, si les groupes abéliens finis $G \times G$ et $G' \times G'$ sont isomorphes, il en est de même des groupes G et G' .

g) Soit G un groupe abélien fini. Montrer que le nombre de compléments du sous-groupe G dans le produit direct $G \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est égal au cardinal du sous-groupe de n -torsion dans G . Vérifier cela dans le graphe du treillis des sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

⁶² Dans le cadre de la réduction de l'endomorphisme A , on associe à chaque scalaire λ le λ -tableau de Young de A , qui n'est autre que le tableau de Young de la composante nilpotente de l'endomorphisme $A - \lambda \text{Id}$. Les éléments irréductibles dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$, où le corps \mathbb{K} est supposé algébriquement clos, sont en effet paramétrés par les scalaires.

⁶³ La structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel des quotients des noyaux itérés permet de remédier à l'inconvénient que présente dans le cadre des groupes abéliens le fait qu'un sous-groupe n'a pas toujours de « supplémentaire ».

Bibliographie

- [ACGH] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A., Harris, J., *Geometry of Algebraic Curves*, Volume I, Springer, 1985.
- [Art] Artin, E., *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, 1972.
- [Ber] Berger, M., *Géométrie*, tomes 1 et 2, nouvelle édition, Nathan, 1990.
- [Bor] Borel, A., *Linear Algebraic Groups*, Second enlarged edition, Springer, 1991.
- [Carm] Carmichael, R. D., *Introduction to the Theory of Groups of Finite Order*, Dover Pub., 1956.
- [Cart] Carter, R. W., *Finite Groups of Lie Type*, Wiley Interscience, 1985.
- [Co-Gr] Corwin, L., Greenleaf, F., *Representations of Nilpotent Lie Groups*, Part I, Cambridge University Press, 1990.
- [Dxm] Dixmier, J., *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974.
- [Dorn] Dornhoff, L., *Group Representation Theory* (2 parts), M. Dekker, 1971.
- [Frk] Frenkel, J., *Géométrie pour l'Élève-professeur*, Hermann, 1973.
- [Garn] Garnier, R., *Leçons d'Algèbre et de Géométrie* (deux tomes), Gauthier-Villars, 1935, 1936.
- [G-MP] Gelfand, I. M., MacPherson, R. D., Geometry in Grassmannians and a Generalisation of the Dilogarithm, *Advances in Mathematics*, 44 (1982), 279–312.
- [Gz-L] Glazman, I., Liubitch, Y., *Analyse linéaire dans les espaces de dimension finie*, Éditions MIR, 1972.
- [Gd] Godement, R., *Cours d'Algèbre*, Hermann, 1963.
- [Hal] Hall, M., *The Theory of Groups*, The Macmillan Company, 1959.
- [Har] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- [Hel] Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962.
- [Hum] Humphreys, J. E., *Linear Algebraic Groups*, Springer, 1975.
- [Hup-Bla] Huppert, B., Blackburn, N., *Finite Groups III*, Springer, 1982.
- [Kp] Kaplansky, I., *Linear Algebra and Geometry – A second course*, Allyn and Bacon, 1969.
- [Kir] Kirillov, A., *Éléments de la théorie des représentations*, Éditions MIR, 1974.
- [Kr-Pr] Kraft, H., Procesi, C., Closures of Conjugacy Classes of Matrices are Normal, *Inventiones Mathematicae*, 53 (1979), 227–247.
- [LeP] Le Potier, J., *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Publications mathématiques de l'université Paris VII, 1995.
- [Loo] Loos, O., *Symmetric Spaces*, W. A. Benjamin, 1969.
- [Mn-Ts] Mneimné, R., Testard, F., *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.
- [Mn-Ts-92] Mneimné, R., Testard, F., On Products of Singular Elements, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, Série 2, Vol. 3 (1991), 337–350.

- [Per] Perrin, D., *Cours d'Algèbre*, E.N.S.J.F., 1988. (Réédité par Ellipses en 1996.)
- [Ser] Serre, J.-P., *Représentations linéaires des groupes finis* (deuxième édition), Hermann 1971.
- [Suz] Suzuki, M., *Group Theory* (I–II), Springer, 1982–1986.
- [Tsu] Tsuzuki, T., *Finite Groups and Finite Geometries*, Cambridge University Press, 1976.
- [Vgn] Vergne, M., Representations of Lie Groups and the Orbit Method in “Emmy Noether in Bryn Mawr”, *Proceedings of a Symposium Sponsored by the Association for Women in Mathematics in Honor of Emmy Noether's 100th Birthday*, Springer, 1983.
- [Wn] Weinstein, M., *Examples of Groups*, Polygonal, 1977.

Index

- action
 - d'un groupe, 2, 121
 - de Steinitz, 4, 6, 15, 17, 22, 184, 247, 269
 - k -transitive, 61
 - libre, 76, 78, 79, 157, 178
 - propre, 75
 - simplement transitive, 7, 62, 121
 - transitive, 2, 3, 4, 7, 30, 76, 196
- adhérence (d'orbite), iv, 155, 157, 158, 182, 184–186, 189, 193, 195, 197, 200, 202, 203, 250, 253, 277, 290
- Alexandroff (compactifié de), 74, 296
- algèbre de Lie, 4, 73, 202, 228
 - semi-simple, 202, 213, 228
- application
 - déterminant, 47, 217
 - équivariante, 3, 12, 28, 64, 77
 - orbitale, 56, 156, 158
 - projective, 33, 123, 126, 136, 137, 143
 - séparable, 14, 56
- automorphisme
 - d'algèbre de Lie, 236
 - de Frobenius, 113
 - intérieur, 23, 24, 26, 35, 84, 91, 99, 108
- Baire (propriété de), 10
- bijection canonique équivariante, 3, 9, 11, 14
- birapport, v, 4, 33, 121–124, 126–128, 132, 134, 136, 144, 147, 155–157, 160, 176, 177, 228, 229
- bon
 - paramétrage, 11, 59, 79
 - point, 74, 267
 - voisinage, 267
- bonne (application polynomiale), 198, 199
- Borel
 - sous-groupe de, 14, 72, 280, 282, 283
 - théorème du point fixe de, 279, 282
- bouteille de Klein, 77, 296
- Bruhat (décomposition de), 44, 175
- Burnside (théorème de), 61, 65
- caractère
 - d'un groupe, 281
 - d'une représentation, 17
 - formel, 208, 210, 211
- Cartan
 - involution de, 289
 - sous-algèbre de, 28, 64, 228, 235
 - sous-groupe, 234, 235
 - sous-groupe de, 52
- Cartan-Dieudonné (théorème de), 236
- Cauchy (matrice de), 176
- Cayley-Hamilton (théorème de), 36, 93, 223, 249, 251, 297
- centralisateur, 4, 47, 65, 72, 87, 185, 186, 188, 189, 191, 194, 212, 254, 259, 278, 286, 291, 294
- Chevalley, 13, 17
- Chevalley (ordre de), 182
- chinois (lemme), 251, 254
- classe de conjugaison
 - d'un élément dans un groupe, iii, 36, 37, 39, 103, 114
 - de sous-groupes (ou de compléments), 26, 28, 52, 76, 98, 99, 173, 235
- classe de similitude, iv, 4, 11, 36, 49, 59, 63, 102, 181, 182, 193, 195, 200, 201, 250, 253, 256, 274, 285, 286, 289, 292, 298

- Clebsch-Gordan
 - contribution de, 211
 - formule de, 210, 211
- Cohen-Macaulay-Serre
 - critère de, 199
- comatrice, 40, 48, 247, 248, 268, 286, 289, 297
- compacité, 9–11, 15, 57, 58, 69, 73, 75, 171, 181, 268, 296
- compacité locale, (voir compacité)
- compactification, 122, 127, 155
- complément (sous-groupe), 24, 26, 76, 164, 301
- complexe octaédral, 122, 130, 150, 152, 154–156, 178
- cône
 - isotrope, 60, 135, 143, 144, 169, 216, 229, 273, 300
 - nilpotent, vii, 193, 195, 197, 199, 200, 223, 225, 228, 230–232, 234, 274, 290
- congruence, 3, 5, 17, 40, 49, 51, 60
- conique, 215, 218
 - birapport de quatre points d'une, 122, 134
 - fondamentale, 134, 135, 137, 138, 148, 226
- conjugaison, 3, 28, 30, 114
- connexité, iv, 10, 14, 27, 46, 52, 55, 57, 73, 75, 142, 171, 196, 197, 220, 224, 226, 233, 237, 285–289
- constructible, iv, 13, 195, 266, 268, 270, 273, 281
- contribution de Clebsch-Gordan, 211
- corps
 - de fonctions, 14, 195
 - des quaternions, 71, 81
- critère
 - de Kostant, 198
 - de normalité de
 - Cohen-Macaulay-Serre, 199
- cyclique (groupe ou sous-groupe), 39, 68, 89, 91, 102, 166, 300, 301
- d'Alembert-Gauss (théorème de), 281
- décomposition
 - de Bruhat, 44, 175
 - de Frobenius, 187
 - de Jordan, 251
- Dedekind (lemme de), 282
- dénombrable à l'infini, 10, 74
- densité, iv, 14, 18–20, 22, 48, 50, 72, 74, 158, 182, 193, 195, 196, 257, 267, 269, 271, 273, 277, 281, 288
- 2-Sylow, 32, 36, 86, 93, 94, 98, 105, 116, 125, 161, 162, 172
- diagramme de Dynkin pondéré, 213
- Dieudonné (théorème de Cartan-), 236
- différentiel (calcul ou géométrie), 4, 5, 11, 12, 14, 22, 47, 151, 185, 194, 195, 198, 199, 218, 237, 271, 274, 290
- dilatation, 56–59
- dimension finie, 3, 6, 16, 40, 43, 47, 55, 59, 64, 66, 178, 186, 204, 250, 261, 278, 287, 294, 301
- discriminant (d'un polynôme), 50–52, 226
- drapeau, 16, 49, 78, 175, 203, 280
- Dynkin (diagramme pondéré de), 213
- élément
 - nilpotent, 213
 - semi-simple, 82
- ensemble
 - des orbites, 2, 176
 - flexé, 59, 221
- équivariante
 - application, 3, 12, 28, 64, 77
 - bijection canonique, 3, 9, 11, 14
- espace
 - homogène, 3, 8, 26, 73, 113, 287
 - irréductible, 48
 - localement compact, 73
 - localement euclidien, 11
 - symétrique, 26, 283
 - tangent de Zariski, 197

espace homogène (des p -Sylow), 32
 Euler (indicateur de), 30, 91, 114, 174
 exacte (suite), 23–25, 69, 70, 95, 104, 163, 164, 261
 extension (de groupes abéliens), 70

 facteurs invariants, 187, 191, 250, 254, 292
 factoriel (anneau), 21, 22, 40, 49, 54, 55, 272
 famille (de Kostant), 189, 207, 212, 290
 flexé (ensemble), 59, 221
 fonction
 polynomiale invariante, 17, 49
 régulière, 14
 forme de Killing, 213, 236
 formule de Clebsch-Gordan, 210, 211
 Frégier
 involution de, 138, 148, 169, 172
 point de, 138, 146, 148, 169, 172
 Frobenius
 automorphisme de, 113
 décomposition de, 187
 injections de, 185, 187, 246

 Gauss
 permutation de l'enfant, 283, 288
 pivot de, 43
 réduction de, 5
 Théorème de D'Alembert-, 281
 Gordan
 contribution de Clebsch-, 211
 formule de Clebsch-, 210, 211
 graphe nilpotent, 182, 191, 193
 grassmannienne, 73, 149, 282
 grosse orbite, 7, 197

groupe
 algébrique, 182
 algébrique affine, 13
 circulaire, 138, 140, 142, 172
 de Klein, 77, 100, 116, 125, 161, 162
 de Lie, v, 6, 11, 26, 137, 170, 235
 de Mathieu, 87
 de Möbius, 122, 142, 148
 de Takif, 25
 dérivé, 34, 35, 84, 88, 93, 98, 105, 109, 118, 163, 164, 171, 270, 280, 281
 des automorphismes d'un groupe, iv, 38, 70, 83–85, 91, 99, 100, 108, 109, 115–117, 122, 161, 163, 165, 166, 172, 174
 des homographies, 140, 146, 148, 172, 173
 discret, 73, 75
 hamiltonien, 81
 holomorphe d'un, 116
 opérant, 2
 projectif, 7, 126
 quaternionique, 81
 réductif, 20
 résoluble, 118, 166, 280
 simple, 32, 34, 36, 37, 61, 87, 172
 unimodulaire, 9, 81
 unipotent, 277

Hausdorff (la topologie de), 13, 50, 249
 Hilbert, 4, 18, 20–23, 49, 198
 holomorphe d'un groupe, 116
 homéomorphie, 9–11, 69, 79, 287, 296
 homographie, 126, 136, 140, 142, 147, 148, 172, 173
 hyperboloïde, 296, 300

immersion, 11
 indicateur d'Euler, 30, 91, 114, 174

- infini
 - corps, 49, 50
 - dénombrable à, 10, 74
 - hyperplan (ou droite ou plan) à, 143
 - point à, 139, 140, 144, 171
- injections de Frobenius, 185, 187, 246
- intègre (anneau ou algèbre), 14, 54, 195, 212
- intégralement clos, 21, 195, 200
- intersection complète, iv, 199
- invariants de Hilbert, 49
- inversion, 140–142, 148
- involution, 61
 - de Cartan, 289
 - de Frégier, 138, 148
- Jordan
 - base de, 191, 206, 246, 247
 - bloc (ou matrice, ou cellule) de, 7, 43, 47, 72, 77, 185, 195, 203, 207, 210, 212, 246, 247, 249, 254, 277, 278, 288
 - décomposition de, 251
 - pseudo-base de, 188
 - pseudo-bloc de, 188
 - pseudo-réduction de, 189, 190, 255, 259, 287
 - réduction de, vi, 7, 183, 189, 203, 206, 208, 301
 - réduite de, vi, 182, 183, 246, 287
 - représentation de, 65
- Killing (forme de), 213, 236
- Kirillov, 235
- Klein
 - (programme d'Erlangen), 148
 - bouteille de, 77, 296
 - groupe de, 77, 100, 116, 125, 161, 162, 170
 - suite exacte de, 163, 164
- Kostant
 - critère de, 198
 - famille de, 189, 207, 212, 290
- lagrangien, 26, 284
- lemme de Schur, 64, 65
- lieu singulier, 196, 274
- lisse (point ou variété), 56, 196–199, 258, 271, 272, 274, 276
- localement fermé, 11, 13, 15, 74, 151, 182, 195, 266, 277, 281
- Macaulay-Serre (critère de Cohen-), 199
- Mathieu (groupe de), 87
- matrice
 - de permutation, 44, 54, 65, 66, 78
 - antimagique, 67
 - antisymétrique, 40, 42, 176, 249, 265, 266, 279
 - compagnon, 20, 54, 187, 195, 251, 258, 292
 - de Cauchy, 176
 - de permutation, 8, 146, 175, 283, 288, 294
 - idempotente, (voir aussi projecteur), 63
 - invertible, 7, 41–44, 46, 50–52, 62, 67, 68, 117, 176, 191, 247, 251, 252, 255, 259, 270–272, 276, 289, 292, 293, 297
 - magique, 65
 - monomiale, 52
 - nilpotente, iv, 7, 8, 45, 57, 58, 60, 62, 63, 72, 77, 112, 181–184, 186–190, 195, 200, 201, 206, 209, 210, 212, 213, 220, 223, 247, 249–251, 254, 255, 259, 260, 262, 265, 274, 278, 287, 290, 293
 - nilpotente sous-régulière, 274
 - pleine, 63, 272
 - régulière, 52
 - semi-simple régulière, 52
 - singulière, ii, 22, 43, 46, 197, 259
 - symétrique, iv, 5, 42, 45, 51, 221, 222, 269, 270, 294
 - unipotente, 8, 9, 25, 68, 252, 255, 278, 283

matrices
 congruentes, 4, 6, 40, 51
 diagonalisables, iv, 18, 45, 50, 88, 201, 246, 251, 253, 260, 283, 285, 287, 291
 semblables, 5, 15, 19, 20, 41, 46, 56, 57, 181, 182, 188, 204, 248, 250, 252, 253, 255, 261–263, 277, 285, 288, 289, 292, 293, 296
 trigonalisables, 38, 45, 52, 68, 84, 94, 231, 257, 258, 281
 mauvais (point), 267
 mineur (d'une matrice), 15, 54, 68, 184, 185, 187, 198, 247, 249, 250, 275, 276
 Möbius
 groupe de, 122, 142, 148
 ruban de, 235, 295
 morphisme (algébrique), 14, 20, 21, 23, 58, 195, 276, 281

 Newton (sommes ou polynômes de), 18, 249
 noethérien (anneau), 18
 nombre de Weyl, 28, 47, 52, 235
 normalité, 21, 199

 octaèdre, 153
 opérateur d'entrelacement, 64
 opération
 continue, 9
 d'un groupe, 2
 de Steinitz, 4, 6, 15, 17, 22, 184, 247, 269
 orbite, 2
 de Richardson, 276, 277
 ordre de Chevalley, 182
 ouvert principal, 13, 21, 22, 48, 52, 53, 271

 p -groupe, 8, 31, 114, 300
 p -Sylow, 4, 8, 8, 29, 31, 32, 113
 paraboloïde (elliptique ou hyperbolique), 215, 218–220, 224, 225, 279, 296

 paramétrage (bon), 11, 59, 79
 Pascal (théorème de), 148
 pfaffien, 40, 176, 178
 pivot de Gauss, 43
 plan
 général, 150
 hyperbolique, 40
 supergénéral, 150
 pleine (matrice), 63, 272
 plongement de Segre, 56, 58
 poids, 206
 poids d'une matrice magique, 66
 point
 de Frégier, 138, 146, 148
 lisse, 196
 régulier, 197
 singulier, iv, 179, 196, 197, 199, 273
 polynôme homogène, 13, 49, 53, 54, 274, 275
 polynôme
 minimal, 20, 42, 43, 56, 82, 112, 185, 188, 190, 194, 195, 199, 246, 247, 249–251, 253–255, 258, 260, 271, 272, 279, 292, 293
 caractéristique, 19, 20, 42, 43, 50, 51, 53, 54, 62, 181, 185, 193, 194, 197, 199, 201, 202, 226, 246–250, 253, 254, 257, 258, 271, 272, 279, 287, 289, 292, 294
 déterminant, 22, 53, 54, 234
 polynôme irréductible, 22, 23, 39, 41, 54, 272, 274, 301
 principe
 de dégradations successives, 183, 186, 191, 258
 de symétrie, 1
 produit
 direct, 24, 25, 69, 71, 85, 92, 98, 301
 en couronne, 116
 semi-direct, 23, 26, 70, 162
 semi-direct interne, 24, 71, 76
 profil, 28, 47, 52, 234, 235
 programme d'Erlangen, 148

- projecteur, 42, 111, 144, 171, 178, 256, 292
- projection stéréographique, 122, 141, 143, 144, 171
- proprement, (voir action propre)
- propriété de Baire, 10
- pseudo-bloc de Jordan, 188
- pseudo-réduction de Jordan, 188, 259
- pyramide pondérée, 205, 208, 213, 275, 295

- quadrangle harmonique, 132, 133, 135, 140, 226
- quadrilatère équiangular harmonique, 176
- quadrique, 143, 149, 178, 215, 216, 218–220, 222, 226, 234, 296
- quasi-invariant, 55
- quotient catégorique, iv, 20, 20, 21, 27, 53, 54, 56, 200, 272

- récurrence (raisonnement par), 6, 10, 40, 50, 204, 249, 262, 271, 276, 277, 280, 283
- r-équivalence, 4, 6, 41–43, 187
- radical
 - d'un idéal, 22, 198
 - d'une forme, 5, 273
- rang d'une matrice, iv, 4, 6, 15, 21–23, 40–44, 48, 49, 56, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 68, 74, 151, 176, 181, 184, 197, 198, 217, 221, 247, 248, 251, 255, 268, 271, 273, 276, 292
- réduction
 - d'un endomorphisme, 250
 - de Gauss, 5
 - de Jordan, 187
- réduite de Jordan, 181, 186, 246

- représentation
 - contragrédiente, 96, 169
 - d'algèbre de Lie, 202
 - de Jordan, 65
 - de \mathfrak{sl}_2 , vii, 204–206, 208
 - de Steinitz, 65, 67
 - duale, 209
 - fidèle, 61
 - irréductible, 17, 64, 65, 67, 169, 170, 204, 206
 - linéaire, 17
 - orthogonale, 17
 - unitaire, 17
- Richardson (orbite de), 276
- ruban de Möbius, 235, 295

- Schur (lemme de), 64, 65
- scindée et/ou scindable (suite exacte), 25, 26, 164, 263
- section d'une application, 20, 23, 24, 25, 53, 69, 104
- Segre (plongement de), 56, 58
- semi-régularité, 47, 257
- Serre
 - critère de Cohen-Macaulay-, 199
- similitude de matrices, vi, 1, 3, 18, 20, 42, 47, 56, 181, 248, 261, 278, 289
- \mathfrak{sl}_2 -triplet, 202–204, 206, 207, 212, 232, 233, 274, 289, 294, 295
- sous-algèbre
 - de Borel, 231
 - de Cartan, 28, 64, 228, 235
 - de type fondamental, 235
 - de type Iwasawa, 235
- sous-espace
 - spectral (ou caractéristique), 201, 202, 246, 250, 252, 287
- sous-espace transverse, 59, 73, 149, 274, 275

- sous-groupe, 14
 - caractéristique, 94, 100, 161, 164
 - complément, 24, 26, 76, 164, 301
 - conjugué, 2, 27
 - de Borel, 14, 72, 280, 282, 283
 - de Cartan, 52, 234, 235
 - de Lie, 5, 73
 - de Sylow, 4, 8, 29, 31, 113
 - dérivé, 34, 82
 - distingué, 9, 14, 23, 24, 26, 27, 29, 32, 33, 35, 36, 69, 71, 76, 81, 83, 91, 93, 94, 100, 101, 114, 118, 161, 162, 165, 280
 - normalisateur, 27, 114
 - parabolique, 14, 16, 49, 72, 277
- stabilisateur, 1, 2, 4, 8, 9, 13, 27, 28, 30, 31, 35, 77, 94, 185, 232, 234, 235
- Steinitz
 - action ou opération de, 4, 6, 15, 17, 22, 184, 247, 269
 - représentation de, 65, 67
 - théorème de, iv
- structure quotient, 13
- suite exacte, 23–25, 69, 70, 95, 104, 163, 164, 261
 - de Klein, 163, 164
 - scindée (ou scindable), 25
- Suleima (les bagues de), vii, 30
- surface de Véronèse, 60
- Sylow
 - sous-groupe de, 113
 - sous-groupe de, 4, 8, 29, 31
 - théorème de, iii, 29, 31
- tableau
 - autodual, 193
 - de Young, vi, 182–186, 191, 193, 200, 206, 207, 209, 213, 250, 253–255, 258–260, 264, 265, 287, 291, 301
- Taylor (la formule de), 50, 250
- théorème
 - de Cayley-Hamilton, 36, 93, 223, 249, 251, 297
 - de d'Alembert-Gauss, 281
 - de Tietze-Urysohn, 51
 - de Burnside, 61, 65
 - de Jacobson-Morozov, 201, 212
 - de Kolchin, 68, 281
 - de Lie, 280
 - de Pascal, 148
 - de Sylow, iii, 8, 29, 31
 - de Weyl, 205
 - des invariants de Hilbert, 20
 - des zéros de Hilbert, iv, 21–23, 49, 198
 - du point fixe de Borel, 279, 282
- théorie des invariants, 16
- Tietze-Urysohn (théorème de), 51
- topologie
 - de Hausdorff, 50
 - de Zariski, 13, 15, 18, 22, 48, 58, 72, 151, 182, 197, 207, 268, 269, 271, 272, 277, 288
 - quotient, 9
- tore
 - algébrique, 281
 - maximal, 235, 283
- trace (d'un opérateur ou d'une matrice), 45, 47, 50, 54, 56, 57, 59, 62, 63, 65, 69, 148, 170, 200, 205, 215, 216, 223, 248, 249, 256, 262, 275, 285, 289, 292, 297
- transvection, 1, 19, 57, 58
- transverse, (voir sous-espace transverse)
- triquadrangle harmonique, 122, 132, 135, 138, 173
- 3-Sylow, 89, 92
- type
 - de cônes quadratiques, 215
 - fondamental, 235
 - Iwasawa, 235
- type $\bar{\delta}$, 291

Urysohn (théorème de Tietze-), 51

valeur propre, iv, 6, 8, 25, 42, 47,
50, 52, 55, 63, 64, 181, 201,
204, 212, 217, 220, 226, 246,
248–250, 252, 257, 259, 270,
272, 279, 286, 293, 294

variété de drapeaux, 16

variété

algébrique, 13

affine, 13, 21

complète, 15, 58, 279, 282

irréductible, iv, 14, 15, 22, 48,
49, 55, 195–198, 203, 256,
269, 271, 272, 276,
280–282, 289, 290

normale, 21, 21, 199

projective, 13

quasi-affine, 21

quasi-projective, 13, 154

symplectique, 5

Véronèse (surface de), 60

Weyl

groupe de, 64

nombre de, 28, 47, 52, 235

théorème de, 205

Zariski

espace tangent de, 197

topologie de, 13, 15, 18, 22, 48,
58, 72, 151, 182, 197, 207,
268, 269, 271, 272, 277, 288

IMPRIMÉ ET RELIÉ EN GRANDE-BRETAGNE
PAR CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
DÉPÔT LÉGAL AVRIL 1997

L'auteur exprime avec ce livre une conception résolument novatrice de l'enseignement de la géométrie. Il affirme sa conviction que cet enseignement ne peut qu'évoluer dans le sens que son exposé indique : place grandissante donnée, dès le premier cycle, à la notion de groupes opérant ; nécessité de fournir à l'apprenti mathématicien des moyens nouveaux pour affronter la prolifération des connaissances et la complexité des nouvelles techniques ; priorité au travail de prospection et de réflexion à partir d'une « situation » donnée et abandon du traditionnel exposé magistral linéaire.

Rompant avec certaines classifications habituelles en mathématiques, R. Mneimné propose un parcours varié, guidé par la notion centrale de l'ouvrage : celle d'action de groupe. Du birapport aux groupes de Sylow, des triquadrangles harmoniques aux orbites nilpotentes, des groupes algébriques affines à la famille des sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ au grand complet, de la réduite de Jordan aux représentations de $sl(2, \mathbb{C})$, le lecteur n'apprendra pas seulement de belles mathématiques, il se convaincra de la vertu unifiante et organisatrice de l'idée de groupe opérant. Il se rendra compte, de surcroît, qu'en travaillant le corps du texte et ses plus de deux cents exercices, il a appris beaucoup d'algèbre linéaire et même de géométrie algébrique élémentaire.

Affranchi de toute contrainte de programme ou de niveau, l'auteur a réuni ici une matière suffisamment variée pour intéresser l'étudiant de maîtrise, l'agrégatif, le bon taupin, le futur chercheur, le professeur. Tous devraient trouver dans ce livre une note de bonheur mathématique. Si le « principe de symétrie » est une des sources de la beauté, les actions de groupes sont une des façons savantes de parler de cette symétrie, et de mieux la comprendre.

Rached Mneimné a été longtemps assistant à l'E.N.S. de Saint-Cloud où il a notamment assuré la préparation à l'agrégation, accompagnant ainsi une quinzaine de promotions d'où sont sortis de nombreux mathématiciens de talent. Il est coauteur avec F. Testard d'un ouvrage sur les groupes de Lie qui est devenu un classique. Il est actuellement maître de conférences à l'Université Paris VII-Denis Diderot.

C A S S I N I