pierre samuel

géométrie projective

puf

MATHÉMATIQUES

Géométrie projective

COLLECTION DIRIGÉE PAR PAUL DEHEUVELS

MATHÉMATIQUES

Géométrie projective

PIERRE SAMUEL

Professeur à l'Université de Paris-Sud (Orsay)

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

ISBN 2 13 039367 5
ISSN 0246-3822

Dépôt légal — 1re édition : 1986, mai

108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

SOMMAIRE

Introduction

Lorsque j'étais taupin à la fin des années 30, j'étais émerveillé par la Géométrie qu'on appelait alors, et depuis la fin du XIX^e siècle, « moderne » : une algèbre qu'on connaissait si bien que les calculs effectifs sur les coordonnées étaient devenus presque inutiles et que des calculs « virtuels » suffisaient. J'étais fasciné par des énoncés comme :

— *Si une droite a au moins 3 points communs avec une conique, elle fait partie de celle-ci, qui est alors décomposée en 2 droites ;*
— *Une conique qui a un point double est décomposée ; de même pour une cubique avec 2 points doubles et une quartique avec 4 points doubles ;*
— *L'intersection d'une quadrique par un plan tangent est décomposée en 2 droites, d'où 2 systèmes de génératrices rectilignes sur cette quadrique.*

Et l'on continuait avec les polaires réciproques, les cubiques, les quartiques, etc., jusqu'aux cercles de Villarceau sur le tore. A l'horizon, l'on nous faisait admettre le théorème de Bezout : « Deux courbes planes de degrés p et q ont pq points communs, réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou à l'infini. »

L'on ne s'étonnera donc pas de ce que, quelques années plus tard, je me sois spécialisé dans la Géométrie algébrique et, plus particulièrement, dans la théorie des intersections. Je le fis malgré les (ou peut-être à cause des) avertissements de mon ami Laurent Schwartz contre l'abus des raisonnements fondés sur le principe : « Une correspondance algébrique (adjectif parfois omis alors) et biunivoque (entre des droites, des *coniques, etc.) est homographique. » En effet, nous disait-il, prenons dans le plan deux droites imaginaires conjuguées* D *et* D′ *; elles se coupent en un point réel* P *; toute droite réelle coupe* D *en un point* M *et* D′ *en son conjugué* M′ *; on a ainsi établi, entre* D *et* D′, *une correspondance qui est algébrique et biunivoque ; comme le point* P *se correspond à lui-même, un théorème connu (cf. chap.* II, § E*) dit que les droites joignant les points homologues* M, M′ *de cette correspondance passent par un point fixe ; autrement dit, toutes les droites réelles du plan passent par un même point !*

Cet avertissement, puis l'influence de mon maître Claude Chevalley, qui insistait sur l'importance des corps finis et de la caractéristique p, m' incitèrent à prêter attention au choix du corps de base (la correspondance ci-dessus entre M *et* M′ *est une application rationnelle sur* **R**, *mais pas sur* **C***) et j'appris vite que, en caractéristique* $p \neq 0$, *la biunivocité d'une application rationnelle ne suffit pas à la rendre homographique. Mais, une fois le langage bien précisé (au moyen de plus ou moins d'Algèbre), toute la beauté de la vieille « Géométrie moderne » subsistait. Les récents développements de la Géométrie algébrique ont d'ailleurs montré que le « vieux » et le « neuf » s'y marient fort harmonieusement moyennant la mise en place de l'appareil algébrique nécessaire, qu'il s'agisse des correspondances sur une courbe en caractéristique* $p \neq 0$ *(André Weil), de la conjecture de Mordell enfin démontrée, ou de la mise en forme des vieux résultats de Halphen sur les courbes gauches (Gruson-Peskine).*

*Sur un plan plus élémentaire et didactique, j'eus assez souvent l'occasion de mettre à profit mes souvenirs taupinaux, éventuellement mâtinés d'un peu d'Algèbre, lors de la discussion de leçons d'Agrégation où intervenaient la Géométrie projective, les coniques et quadriques ou le groupe circulaire. Je méditais de systématiser ces exposés un peu épars, faits de pièces et de morceaux, lorsque mon ami Francis Hirsch m'en donna l'occasion en me demandant de faire à l'*ENSET *un cours d'Algèbre et de Géométrie destiné essentiellement à éclairer les agrégatifs sur les points du programme qu'ils connaissaient le moins bien, tout en leur ouvrant l'esprit. Or les parties du programme d'Agrégation qui leur causaient le plus de tracas étaient justement celles où l'Algèbre était appliquée à des situations géométriques qui leur étaient peu familières : Géométrie projective (et parfois affine), homographies, birapport, coniques, quadriques et autres courbes ou surfaces ; par un retournement de la situation antérieure (le « A bas Euclide » de Jean Dieudonné), il semblerait que la Géométrie n'est plus guère enseignée dans les lycées, taupes comprises, ni dans les universités. J'ai donc essayé de faire partager à ces étudiants* *les joies que j'avais eues lorsque j'étais taupin et de systématiser les exposés que j'avais fait antérieurement.*

*Les pages qui suivent sont donc issues de cet enseignement, qui m'a donné beaucoup de plaisir. En les rédigeant, j'ai été amené à aller un peu plus loin que je ne l'avais fait dans mes cours de l'*ENSET *(où il y avait aussi à traiter pas mal de questions sans lien avec la Géométrie projective).*

Le prérequis est assez mince : une bonne familiarité avec l'Algèbre linéaire, des rudiments sur les formes quadratiques et les extensions de corps, quelques notions sur la factorialité des anneaux de polynômes et sur l'irréductibilité des polynômes.

Tout en m'efforcant de rester élémentaire, je me suis gardé de me borner aux corps **R** *ou* **C**. *Sauf la caractéristique 2 en ce qui concerne la classification des quadriques et la dualité par rapport à celles-ci, la caractéristique p « ne coûte pas plus cher » et donne parfois lieu à des résultats frappants (par exemple chap.* III, § D*) ou à des phénomènes amusants.*

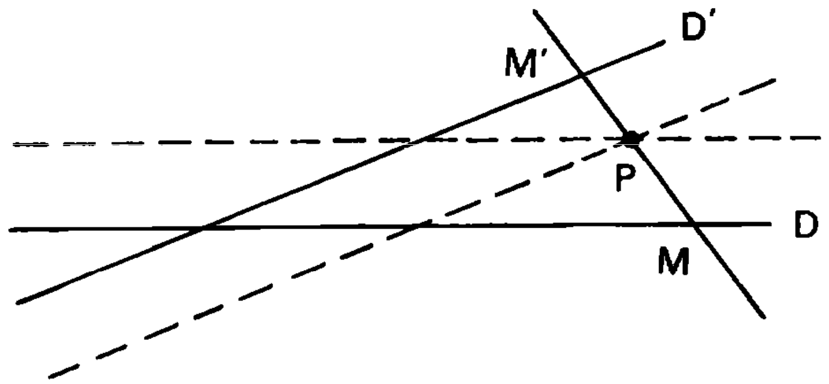
Les figures, tracées (croit-on) sur **R**, *ne sont là que pour aider à saisir l'agencement des points, droites et autres courbes intervenant dans les énoncés et les raisonnements, qui eux, sont valables sur un corps (à peu près) quelconque. Pour en faciliter l'exécution, toutes les coniques qui y figurent ont été tracées comme si c'étaient des cercles ; c'est le plus souvent sans inconvénient car il s'agit de propriétés projectives et que toute conique peut être transformée en un cercle par transformation projective.*

CHAPITRE PREMIER

Espaces projectifs

§ A / Définition, repères projectifs

Qui dit « géométrie projective » dit « projection » et « projetantes ». Considérons, dans le plan, deux droites D et D′ non parallèles et un P extérieur à ces droites. A tout point M de D faisons correspondre le point $M' = p(M)$ où la droite PM rencontre D′. On note que ce point n'est pas défini lorsque PM est parallèle à D′ ; d'autre part le point A′



où D′ rencontre la parallèle à D menée par P n'est pas obtenu par ce procédé. Il « manque » donc quelque chose à D et à D′, et le bon objet paraît être l'ensemble des « projetantes », c'est-à-dire des droites passant par le centre de projection P. D'où la définition :

DÉFINITION 1. — *Etant donné un espace vectoriel* E *sur un corps* K, *on appelle espace projectif associé à* E *et l'on note* **P**(E) *l'ensemble des droites (vectorielles) de* E.

Ici le corps K n'a pas besoin d'être commutatif ; pour fixer les idées, E sera un espace vectoriel à gauche sur K.

On peut aussi voir **P**(E) comme le quotient de l'ensemble E − (0) des éléments *non nuls* par la relation d'équivalence « y est de la forme $y = ax$ avec $a \in K$ » (bien entendu $a \neq 0$). On a donc une application canonique p de E − (0) sur **P**(E) qui, à tout « vecteur » x, fait correspondre la droite vectorielle $\mathbf{K}x$ qui le contient.

DÉFINITION 2. — *La dimension* dim(**P**(E)) *est, par définition,* dim (E) − 1.

L'espace projectif $\mathbf{P}(K^{n+1})$ est noté $\mathbf{P}_n(K)$; il est de dimension n. On appelle droite projective (resp. plan projectif) un espace projectif de dimension 1 (resp. 2).

On notera que **P**(0) est vide ; d'après la déf. 2, sa dimension est − 1. Un espace projectif de dimension O est réduit à un point.

DÉFINITION 3. — *On appelle variété linéaire projective* (vlp) *de* **P**(E) *l'image par* p *d'un sous-espace vectoriel* V *de* E.

Pour être tout à fait correct, on devrait dire « l'image de V − (0) par p ». On écrira cependant, pour simplifier, $L = p(V)$. On notera que la vlp L est l'espace projectif **P**(V) associé à l'espace vectoriel V.

Toute intersection de vlp est ainsi une vlp, éventuellement vide. Etant donnée une partie A de **P**(E), il y a donc une *plus petite* vlp contenant A ; on dit qu'elle est *engendrée* par A et on la note (provisoirement) $v(A)$. Elle correspond au sous-espace vectoriel engendré par $p^{-1}(A)$.

THÉORÈME 1. — *Si* L *et* L′ *sont deux vlp de* **P**(E), *on a la « formule de dimensions » :*

$$\dim(L) + \dim(L') = \dim(L \cap L') + \dim(v(L \cup L')).$$

Moyennant la déf. 2, c'est une traduction de la formule classique pour les sous-espaces vectoriels :

$$\dim(V) + \dim(V') = \dim(V \cap V') + \dim(V + V').$$

COROLLAIRE. — *Si* $\dim(L) + \dim(L') \geqslant \dim(\mathbf{P}(E))$, *alors* $L \cap L'$ *est non vide.*

En effet le th. 1 donne $\dim(L \cap L') \geqslant 0$ et seule la vlp vide est de dimension < 0.

On dit que des points d'un espace projectif sont *projectivement indépendants* (ou qu'ils forment un système projectivement libre) s'ils proviennent de vecteurs (ou, ce qui revient au même, de droites) linéairement indépendant(e)s.

Coordonnées homogènes. — La donnée d'une base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de E (supposé de dimension *finie*, ce qui sera le cas dans toute la suite) permet d'associer à tout point A de **P**(E) des systèmes $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $n + 1$ éléments de K, à savoir les systèmes des coordonnées des vecteurs $x \in$ E tels que $A = p(x)$. Par définition de p, ces systèmes sont tous *non nuls* ($\neq (0, 0, \ldots, 0)$) et *proportionnels* : si $(x_0, \ldots, x_n)$ est l'un d'eux, les autres seront de la forme $(ax_0, \ldots, ax_n)$ avec a non nul dans K. Ces systèmes sont appelés les *systèmes de coordonnées homogènes* du point A. On va chercher à les caractériser au moyen de données faisant uniquement intervenir l'espace projectif **P**(E) :

Théorème 2. — *Les systèmes de coordonnées homogènes des points de* **P**(E) *sont uniquement déterminés par la donnée (si* K *est commutatif)*

— *des points* $P_0, \ldots, P_n$ *de* **P**(E) *qui sont les images des éléments d'une base de* E, *(« points base ») ;*
— *du point* P_{n+1} *de coordonnées homogènes* $(1, 1, \ldots, 1)$ *(« point unité »).*

En effet, la donnée des points $P_0, \ldots, P_n$ ne détermine pas entièrement la base $(e_0, \ldots, e_n)$ de E dont les systèmes de coordonnées homogènes pourraient provenir : ce pourrait tout aussi bien être $(a_0e_0, \ldots, a_ne_n)$ avec des a_i non nuls dans K. Mais la donnée du point unité P_{n+1} demande qu'il soit aussi bien l'image du vecteur $e_0 + e_1 + \ldots + e_n$ que du vecteur $a_0e_0 + a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$; cela demande que ces deux vecteurs soient proportionnels, c'est-à-dire que tous les a_j soient égaux à un même élément (non nul) a de K. Les bases correspondantes sont alors proportionnelles $(e_0, \ldots, e_n)$ et $(ae_0, \ldots, ae_n)$. Si, dans la première, les coordonnées homogènes d'un point M de **P**(E) sont $(x_0, \ldots, x_n)$, elles seront, dans la seconde, $(x_0a^{-1}, \ldots, x_na^{-1})$, donc proportionnelles (à gauche) aux premières si K est commutatif.

Dans le cas non commutatif, il existe en tout cas une base de E dans laquelle les coordonnées homogènes des points $P_0, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sont $(1, 0, \ldots, 0), \ldots (0, 0, \ldots, 1), (1, 1, \ldots, 1)$.

Définition 4. — *Un système de* $n + 2$ *points* $(P_0, \ldots, P_n, P_{n+1})$ *de* **P**(E) *comme dans le th. 2 est appelé un repère projectif.*

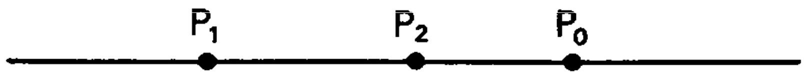
COROLLAIRE. — *Un système de $n + 2$ points d'un espace projectif de dimension n est un repère projectif ssi (« si et seulement si ») $n + 1$ quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants.*

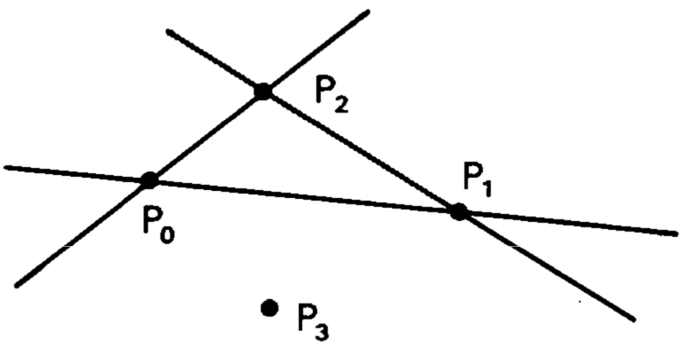
Il revient au même de dire qu'aucun hyperplan (= vlp de dimension $n - 1$) ne contient $n + 1$ d'entre eux. La nécessité est évidente. Réciproquement, on relève $P_0, \ldots, P_n$ en une base $(e_0, \ldots, e_n)$ de E ; un vecteur u relevant P_{n+1} a des coordonnées b_j toutes non nulles dans cette base, et la base $(b_0e_0, \ldots, b_ne_n)$ convient.

Ce raisonnement reste valable dans le cas non-commutatif.

Exemples. — 1) Un repère d'une droite projective est formé de trois points distincts (« deux à deux distincts » disent les puristes).

2) Dans un plan projectif, un repère est formé de 4 points, dont les 3 premiers forment un « vrai » triangle et dont le quatrième n'est sur aucun des côtés de celui-ci. Aucun des triplets n'est formé de points alignés.





L'usage des coordonnées homogènes permet d'écrire des *équations* des vlp de **P**(E). Ainsi, dans une base $(e_0, \ldots, e_n)$ de l'espace vectoriel E, un hyperplan H a une équation de la forme

$$x_0b_0 + x_1b_1 + \ldots + x_nb_n = 0 \quad (b_j \text{ dans K, non tous nuls}) \quad (1)$$

qui exprime que le point de coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ est sur l'hyperplan H. La même équation (1) exprime que le point de coordonnées homogènes $(x_0, \ldots, x_n)$ de **P**(E) est dans l'hyperplan (projectif) p(H) ; on notera que tout autre système $(ax_0, \ldots, ax_n)$ de coordonnées homogènes de ce point satisfait aussi à l'équation (1).

Une vlp, étant une intersection d'hyperplans, sera définie par un système d'équations homogènes de la forme (1). Plus précisément, si cette vlp L est de codimension d (dim(L) $= n - d$), elle pourra être définie par un système de d équations dont les premiers membres sont des formes linéaires indépendantes.

NB. — On notera que, dans (1), les coefficients s'écrivent *à droite* des variables. En effet, si f est une forme linéaire dont l'hyperplan H est le noyau, on écrit $f(x_0e_0 + \ldots + x_ne_n) = x_0f(e_0) + \ldots + x_nf(e_n) = 0$.

Lorsque K est *commutatif*, on peut considérer les parties (dites « *algébriques* ») de l'espace vectoriel E qui, dans une base $(e_0, \ldots, e_n)$, sont définies par des systèmes d'équations *polynomiales*

$$F_j(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, q) \tag{2}$$

Un changement de base modifie, bien sûr, ces équations mais n'altère pas leur caractère polynomial ni leurs degrés. Pour le passage à l'espace projectif **P**(E) et aux coordonnées homogènes, il vaut mieux supposer que les polynômes F_j sont *homogènes* : alors les équations (2) seront simultanément satisfaites (ou non) par tous les systèmes de coordonnées homogènes d'un même point. Elles définissent ce qu'on appelle une *partie algébrique* de **P**(E).

Dénombrements sur un corps fini

Prenons pour K le corps fini $\mathbf{F}_q$ à q éléments. Si **P**(E) est de dimension n, sa caractérisation comme quotient de E $-$ (0) montre aussitôt que

$$\mathrm{card}(\mathbf{P}(E)) = (q^{n+1} - 1)/(q-1) = q^n + q^{n-1} + \ldots + q + 1. \tag{3}$$

Ainsi une droite projective sur $\mathbf{F}_q$ a $q + 1$ éléments (donc au moins 3 car $q \geqslant 2$) et un plan projectif a $q^2 + q + 1$ éléments.

Comme le nombre de bases de E est $(q^{n+1} - 1)(q^{n+1} - q) \ldots (q^{n+1} - q^n)$ (choix d'un vecteur non nul, puis choix d'un vecteur non proportionnel au premier, etc.) et comme un repère projectif est déterminé par la donnée d'une base à une homothétie près (th. 2), on a

$$\text{Nombre de repères projectifs de } \mathbf{P}(E) = (q^{n+1} - 1)(q^{n+1} - q) \ldots (q^{n+1} - q^{n-1})q^n \tag{4}$$

Pour une droite (resp. un plan) ce nombre de repères est

$$q(q^2 - 1) = q(q - 1)(q + 1)$$
$$(\text{resp. } q^2(q^3 - 1)(q^3 - q) = q^3(q - 1)^2(q + 1)(q^2 + q + 1)).$$

Il y a autant de vlp de dimension d dans $\mathbf{P}(E)$ que de sous-espaces vectoriels de dimension $d+1$ de E. Un système libre à $d+1$ éléments détermine un tel sous-espace V et il y a, au total,

$$(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\dots(q^{n+1}-q^d)$$

tels systèmes libres. Ceux qui déterminent V sont les bases de V et il y en a $(q^{d+1}-1)(q^{d+1}-q)\dots(q^{d+1}-q^d)$. Donc :

$$\text{Nombre de vlp de dim.}\, d \text{ de } \mathbf{P}(E) = (q^{n+1}-1)\dots(q^{n+1}-q^d)/(q^{d+1}-1)\dots(q^{d+1}-q^d) \quad (5)$$

Pour q grand, ce nombre est de l'ordre de $q^{(d+1)(n-d)}$.

En particulier le nombre de droites dans $\mathbf{P}(E)$ est

$$(q^{n+1}-1)(q^n-1)/(q-1)^2(q+1).$$

§ B / Applications projectives, homographies, groupe projectif

Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Comme $u(ax)=au(x)$ pour a dans K et x dans E, u est susceptible de « passer aux quotients » et de donner une application de $\mathbf{P}(E)$ dans $\mathbf{P}(F)$. Encore faut-il pour cela que $x \neq 0$ implique $u(x) \neq 0$, c'est-à-dire que u soit *injective.* Elle donne alors une application, notée $\mathbf{P}(u)$ de $\mathbf{P}(E)$ dans $\mathbf{P}(F)$, qu'on appelle une *application projective*, ou une *homographie* lorsqu'elle est bijective (c'est-à-dire lorsque

$$\dim(\mathbf{P}(E)) = \dim(\mathbf{P}(F)).$$

Si u n'est pas injective, on obtient seulement une application qui n'est définie qu'en dehors de $p(\mathrm{Ker}\,(u))$.

Si l'on se donne aussi une application linéaire injective v de F dans un troisième espace vectoriel G, on a évidemment

$$\mathbf{P}(v \circ u) = \mathbf{P}(v) \circ \mathbf{P}(u)$$
$$\text{(et naturellement } \mathbf{P}(\text{identité}) = \text{identité}) \quad (6)$$

THÉORÈME 3. — *Soient u et u' deux applications linéaires injectives de* E *dans* F. *On suppose* $\dim(E) \geqslant 2$. *Alors on a* $\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(u')$ *ssi il existe un élément a du centre de* K *tel que* $u'(x) = au(x)$ *pour tout x dans* E.

On laisse au lecteur le cas où $\mathbf{P}(E)$ est vide ou réduit à un point.

La condition est évidemment suffisante (la centralité de a assurant que au est linéaire). Réciproquement, si $\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}(u')$, il existe, pour tout x dans E, un élément non nul $a(x)$ de K tel que $u'(x) = a(x)u(x)$. En prenant x et y linéairement indépendants et en calculant $u'(x + y)$ de deux manières, on voit que $a(x) = a(x + y) = a(y)$. Pour x et y quelconques, l'existence d'un élément z de E qui n'est proportionnel ni à x, ni à y, montre qu'on a encore $a(x) = a(y)$. Ainsi $a(x)$ est un élément *fixe* a de K. Pour b quelconque dans K et x non nul dans E, on a $u'(bx) = au(bx) = abu(x)$ et aussi $u'(bx) = bu'(x) = ba.u(x)$; d'où $ab = ba$ (car $u(x) \neq 0$) et a est bien dans le centre de K. CQFD.

COROLLAIRE. — *Un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *qui transforme tout vecteur en un vecteur proportionnel est une homothétie centrale.*

Dans le cas commutatif, on peut aussi raisonner sur les sous-espaces propres de l'endomorphisme.

Il résulte de (6) que les homographies de $\mathbf{P}(E)$ sur $\mathbf{P}(E)$ forment un groupe, appelé le *groupe projectif* de $\mathbf{P}(E)$ et noté PGL(E). En notant GL(E) le groupe linéaire de E et Z le centre de K, le th. 3 donne aussitôt :

$$\mathrm{PGL(E)} = \mathrm{GL(E)/Z^*} \qquad (\text{si } \dim(\mathbf{P}(E)) \geqslant 1)\,. \tag{7}$$

On notera que les *points fixes* d'une homographie $h = \mathbf{P}(u)$ sont les images des *vecteurs propres* (non nuls) de u.

Lorsque K est commutatif et qu'on se donne une base de E (à un facteur près si l'on veut), une homographie de $\mathbf{P}(E)$ est caractérisée par une *classe de matrices* (inversibles) *proportionnelles*. Elles définissent, à un facteur près, une transformation linéaire portant sur les coordonnées homogènes des points de $\mathbf{P}(E)$, qu'on a l'habitude d'écrire :

$$ay_j = b_{j0}x_0 + b_{j1}x_1 + \ldots + b_{jn}x_n$$
$$(j = 0, 1, \ldots, n\,;\ a \neq 0 \text{ arbitraire dans K}) \tag{8}$$

THÉORÈME 4. — *Soient* $\mathbf{P}(E)$ *et* $\mathbf{P}(E')$ *deux espaces projectifs de même dimension* n *sur un corps commutatif* K, $(P_0, \ldots, P_n, P_{n+1})$ *et* $(P'_0, \ldots, P'_n, P'_{n+1})$ *des repères projectifs de* $\mathbf{P}(E)$ *et* $\mathbf{P}(E')$. *Il existe alors une unique homographie* h *de* P(E) *sur* $\mathbf{P}(E')$ *telle que* $h(P_i) = P'_i$ *pour* $i = 0, 1, \ldots, n, n + 1$.

On relève $P_0, \ldots, P_n$ en une base $(e_0, \ldots, e_n)$ de E telle que $p(e_0 + \ldots + e_n) = P_{n+1}$ (cf. § A, th. 2). Idem avec $(e'_0, \ldots, e'_n)$ dans E'. Si h existe et est de la forme $h = \mathbf{P}(u)$, $u(e_i)$ doit être de la forme $a_i e'_i$ avec a_i non nul dans K pour $i = 0, \ldots, n$. Comme $h(P_{n+1}) = P'_{n+1}$, $u(e_0 + \ldots + e_n)$ est de la forme $b(e'_0 + \ldots + e'_n)$. Ainsi tous les a_i sont égaux à b, ce qui détermine u à un facteur près et donc $h = \mathbf{P}(u)$ de façon unique (th. 3). L'existence de h est évidente : définir u par $u(e_i) = e'_i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

Dans le cas non-commutatif, c'est l'unicité qui fait problème. Soient a et b dans K tels que $ab \neq ba$. Soit u l'application linéaire qui envoie la base canonique (e, f) de KxK en (ae, af). Alors $h = \mathbf{P}(u)$ laisse fixes les points (de coordonnées homogènes $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$) du repère « canonique » de $\mathbf{P}$(KxK). Mais, comme $u(e + b.f) = a.e + ba.f$ n'est pas de la forme $c(e + b.f)$ (sinon $c = a$ et $ab = ba$), $\mathbf{P}(u)$ n'est pas l'identité.
Ce raisonnement montre d'ailleurs que l'assertion d'unicité de h dans le th. 4 est équivalente à la commutativité du corps de base K.

Remarque. — Si K est le corps *fini* $\mathbf{F}_q$, le th. 4 montre que le nombre d'éléments de PGL(E) est égal au nombre de repères projectifs de $\mathbf{P}$(E), lequel est donné par la formule (4) du § A.

§ C / Espaces projectifs et espaces affines

Rappel sur les espaces affines

Rappelons qu'un espace affine est un ensemble E sur lequel le groupe additif d'un espace vectoriel (qu'on note v(E) ou $\vec{\mathrm{E}}$) opère de façon simplement transitive. On dit souvent que les éléments de E sont des « points » et ceux de v(E) des « vecteurs », ou des « translations » de E. Le transformé du point a par la translation t se note souvent $t + a$, d'où les formules

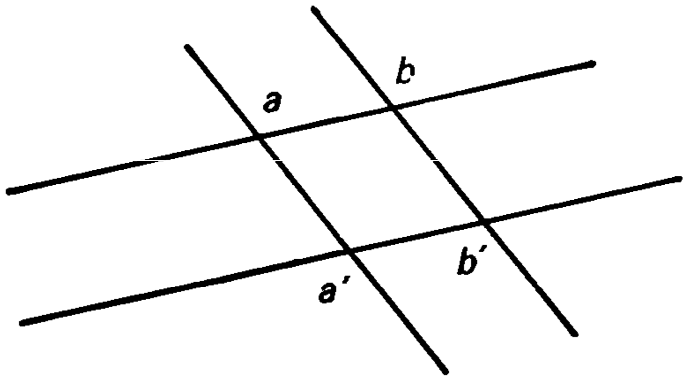
$$s + (t + a) = (s + t) + a \qquad 0 + a = a$$

qui traduisent le fait qu'il s'agit d'une loi d'opération d'un groupe sur un ensemble. L'unique translation qui amène le point a au point b est notée $b - a$ (ou $\overrightarrow{ab}$). Ainsi on a

$$(c - b) + (b - a) = c - a \quad (\text{« Formule de Chasles »}) \qquad (9)$$

La commutativité du groupe $v(\mathrm{E})$ équivaut à la « règle du parallélogramme » :

$$b-a = b'-a' \quad \text{équivaut à } a-a' = b-b'. \tag{10}$$



Le choix d'un point a de E (appelé « *pointage* » de E en a) identifie l'espace affine E à l'espace vectoriel $v(\mathrm{E})$: à tout point m de E correspond le vecteur $m-a$ de $v(\mathrm{E})$. Bien que ce ne soit pas absolument intrinsèque, on pointe souvent les espaces affines pour faciliter les calculs.

Un *repère affine* de E est formé d'un point a_0 et d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $v(\mathrm{E})$. Les coordonnées d'un point m dans ce repère sont celles du vecteur $m-a_0$ dans la base donnée. Il revient au même de se donner les $n+1$ points $a_0, a_1 = e_1 + a_0, \ldots, a_n = e_n + a_0$.

Une *variété linéaire affine* L est une partie de E qui est vide ou de la forme $\mathrm{L} = \mathrm{V} + a$ où V est un sous-espace vectoriel de $v(\mathrm{E})$ et où a est un point de E. On a $\mathrm{V} + a = \mathrm{V}' + a'$ ssi $\mathrm{V} = \mathrm{V}'$ et $a'-a \in \mathrm{V}$, de sorte que le sous-espace vectoriel V est uniquement déterminé par L ; on l'appelle la *direction* de L ; deux vla de même direction sont dites *parallèles*. Lorsqu'on pointe E, une vla n'est autre qu'un translaté d'un sous-espace vectoriel (ou la partie vide). Toute intersection de vla est une vla, d'où la notion de vla engendrée par une partie A de E.

Etant donnés des points $m_1, \ldots, m_q$ de E et des éléments $a_1, \ldots, a_q$ du corps de base K tels que $a_1 + \ldots + a_q = 1$, on définit leur *barycentre* comme étant l'unique point g tel que, pour tout point p de E, on ait

$$g - p = a_1(m_1 - p) + \ldots + a_q(m_q - p).$$

La prise de barycentres est « associative » : un barycentre de barycentres des points m_i est un barycentre des m_i. On montre que l'ensemble des barycentres des points m_i n'est autre que la vla engendrée par les m_i.

En particulier les parties stables par la prise de barycentres ne sont autres que les vla.

Remarque. — Pour $K \neq \mathbf{F}_2$ les parties stables par la prise de barycentres de *deux* points sont les vla. Sur $\mathbf{F}_2$ les barycentres de deux points sont eux-mêmes, de sorte que la prise de barycentres de deux points n'ajoute rien à une partie de E.

Dans un repère affine, coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, une vla est définie par un système d'équations du premier degré

$$x_1 a_{j1} + \ldots + x_n a_{jn} = b_j \quad (j = 1, \ldots, q\,;\ a_{ji},\ b_j \in K)\,.$$

On peut choisir les formes linéaires des premiers membres linéairement indépendantes ; alors la dimension de la vla est $n - q$ (en appelant, comme de bien entendu, dimension d'une vla celle de sa direction).

Cela s'applique à une vla non vide. La vla vide peut être, par exemple, définie par les équations $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$.

Exemple d'espace affine : le complémentaire d'un hyperplan d'un espace projectif.

Théorème 4. — *Soient* P *un espace projectif de dimension* n *et* H *un hyperplan de* **P**. *On note* T *l'ensemble formé de l'identité et des homographies de* **P** *qui laissent fixes tous les points de* H *et eux seulement. Alors* T *est un groupe isomorphe au groupe additif d'un espace vectoriel de dimension* n *et opère de facon simplement transitive sur* $P - H$.

En effet, écrivons $P = \mathbf{P}(V_1)$ et $H = \mathbf{P}(H_1)$ où V_1 est un espace vectoriel sur K et H_1 un hyperplan de V_1 ; ainsi V_1 est somme directe de H_1 et d'une droite Kz. Soit $u \in GL(V_1)$ telle que $\mathbf{P}(u) \in T$ et $\mathbf{P}(u) \neq 1$. Comme $\mathbf{P}(u)$ laisse fixes les points de H, il existe a dans K tel $u(x) = ax$ pour tout x dans H_1. Quant à $u(z)$, il est de la forme $u(z) = h + bz$ avec h dans H_1 et b dans K. Les points fixes de $\mathbf{P}(u)$ correspondent aux vecteurs $x + cz$ ($x \in H_1$, $c \in K$) tels que $u(x + cz) = d(x + cz)$ avec d dans K ; cela équivaut à $ax + c(h + bz) = dx + dcz$, c'est-à-dire au système

$$\text{(S)} \qquad (a - d)x + ch = 0, \qquad cb = dc.$$

L'existence d'un point fixe de $\mathbf{P}(u)$ en dehors de H équivaut à celle d'une solution (c, d, x) de (S) avec $c \neq 0$. Si $h = 0$, il y a une telle solution avec $c = 1$, $d = b$, $x = 0$; l'hypothèse $\mathbf{P}(u) \in T$ exige alors $\mathbf{P}(u) = 1$, donc $a = b$. Si $h \neq 0$, et $c \neq 0$, (S) implique $d = cbc^{-1}$ et $(a - cbc^{-1})x = -ch$;

ce système a donc une solution avec $c \neq 0$ sauf si $a - cbc^{-1}$ est nul pour tout c non nul, c'est-à-dire sauf si a et b sont égaux et appartiennent au centre de K. On peut alors normaliser u par la condition $a = b = 1$, de sorte que u est l'identité sur H_1 et que $u(z)$ est de la forme $u(z) = h_u + z$ avec h_u dans H_1. Alors $\mathbf{P}(u)$ détermine uniquement l'élément h_u de H_1 et l'on voit aussitôt que, pour $\mathbf{P}(u)$ et $\mathbf{P}(v)$ dans T, on a $h_{u \circ v} = h_u + h_v$. D'où la structure de groupe de T. Sa simple transitivité sur $P - H$ résulte de la simple transitivité des translations h_u sur $z + H_1$.

Plongements d'un espace affine dans un espace projectif

Soient E un espace affine sur K, $v(E)$ son espace vectoriel associé et a un point de E. Par définition, la *clôture projective* de E est l'espace

$$\hat{E} = \mathbf{P}(v(E) \times K). \tag{11}$$

On définit une injection j_a de E dans $\hat{E}$ par

$$j_a(m) = p(m - a, 1) \qquad \text{pour } m \text{ dans E}. \tag{12}$$

Celle-ci est déterminée à une translation près par le point a. L'image $j_a(E)$ est le complémentaire de l'hyperplan $\mathbf{P}(v(E) \times 0)$ de $\hat{E}$.

Soient E et F deux espaces affines sur K et f une *application affine* de E dans F. Elle définit une application linéaire $v(f) : v(E) \to v(F)$ telle que $v(f)(m - m') = f(m) - f(m')$ pour tous m, m' dans E. Si f est injective, elle définit ainsi une application projective :

$$\hat{f} = \mathbf{P}(v(f) \times I_K) : \hat{E} \to \hat{F}. \tag{13}$$

Elle « prolonge f » en ce sens qu'on a :

$$\hat{f}(j_a(m)) = j_{f(a)}(f(m)) \qquad \text{pour tout point } m \text{ de E}. \tag{14}$$

En effet $\hat{f}(j_a(m))$ est l'image canonique dans $\hat{F}$ de $(f(m) - f(a), 1)$. Avec des notations évidentes, on a

$$\hat{u} \quad \hat{v} = (u \;\hat{}\; v) \tag{15}$$

de sorte que le groupe affine de E s'injecte dans le groupe des homographies de $\hat{E}$; son image est formée des homographies qui laissent l'hyperplan « à l'infini » $\mathbf{P}(v(E) \times 0)$ globalement invariant.

Coordonnées affines et coordonnées homogènes

Ainsi tout espace affine E peut être vu comme le complémentaire $P - H$ d'un hyperplan d'un espace projectif. Cet hyperplan, et les points, droites, etc., qu'il contient sont dits « *à l'infini* ». On notera que deux vla sont parallèles ssi elles ont les mêmes points à l'infini (plus rigoureusement, mais nous ferons souvent l'abus de langage, ssi leurs clôtures projectives ont les mêmes points à l'infini).

Inversement, lorsqu'on choisit un hyperplan H d'un espace projectif P et qu'on fixe son attention sur la structure affine de $P-H$, on dit souvent que H est *l'hyperplan à l'infini*, ou qu'on a envoyé H à l'infini. On choisit alors les systèmes de coordonnées homogènes $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ des points de P de sorte que H soit l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$. Pour un point m de $P-H$ $(x_0 \neq 0)$, $(x_0^{-1}x_1, \ldots, x_0^{-1}x_n)$ est un système de coordonnées affines de m. Si une vlp L de P, non située à l'infini, est définie par le système d'équations (homogènes)

$$x_0a_{j0} + x_1a_{j1} + \ldots + x_na_{jn} = 0 \quad (j = 1, \ldots, q),$$

son intersection avec $P-H$ est la vla définie par les équations (affines) $a_{j0} + y_1a_{j1} + \ldots + y_na_{jn} = 0$. Lorsque K est commutatif et qu'on a une partie algébrique L de P, non contenue dans H, et définie par les équations polynomiales homogènes $F_j(x_0, \ldots, x_n) = 0$ $(j = 1, \ldots, q)$, son intersection avec $P-H$ est définie par les équations $F_j(1, y_1, \ldots, y_n) = 0$. Bref, pour passer du projectif à l'affine, on fait $x_0 = 1$.

Lorsque L est à l'infini, le système d'équations affines obtenu par ce procédé est, comme on dit, « impossible », il n'a pas de solutions, même sur la clôture algébrique de K.

Dans l'autre sens, soit E un espace affine muni d'un repère affine ; notons $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées d'un point m de E. Plongeons E dans $\hat{E} = P$ au moyen de l'injection j_a associée à l'origine a du repère donné. D'après (11) et (12), $(1, y_1, \ldots, y_n)$ est un système de coordonnées homogènes de $j_a(m)$ (provenant de la base évidente de $K \times v(E)$). Si L est une vla de E définie par les équations $y_1a_{j1} + \ldots + y_na_{jn} = b_j$ $(j = 1, \ldots, q)$, sa clôture projective est définie par les équations $x_1a_{j1} + \ldots + x_na_{jn} = x_0b_j$; si on la note $\hat{L}$, on a $L = (P-H) \cap \hat{L}$, où H est l'hyperplan à l'infini.

L'on suppose maintenant K commutatif et l'on considère une « partie algébrique » A de l'espace affine E, définie par *une seule équation* polynomiale $F(y_1, \ldots, y_n) = 0$. L'on note d le degré total de F et l'on *homogénéise* F, c'est-à-dire qu'on forme le polynôme homogène de degré d :

$$F_h(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^dF(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0). \tag{15}$$

La partie algébrique de P définie par l'équation homogène $F_h(x_0, \ldots, x_n) = 0$ est appelée la *clôture projective* de A et est notée $\hat{A}$. Comme on a $F_n(1, y_1, \ldots, y_n) = F(y_1, \ldots, y_n)$, A est l'intersection de $\hat{A}$ avec $P-H$. Les points de $\hat{A}-A$ sont appelés les points à l'infini de A ; ils forment une partie algébrique de H.

Nous nous sommes bornés aux parties algébriques définies par une seule équation, appelées les *hypersurfaces* (courbes dans le plan, surfaces en dimension 3). Dans toutes les théories raisonnables de la dimension (tant dans l'affine que dans le projectif), ce sont les parties algébriques de dimension $n-1$. Pour des parties algébriques de plus basse dimension de E, définies par *plusieurs* équations polynômes, l'on ne saurait se contenter de les homogénéiser ; il faut homogénéïser tous les polynômes de l'idéal qu'elles engendrent.

Ainsi, en dimension 3 (sur C), si l'on homogénéise les deux équations $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ d'un certain cercle C, l'on obtient les équations (où la « variable d'homogénéité » x_0 est notée t) :

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2xt = 0,$$

qui définissent la réunion de C et de la courbe $x^2 + y^2 + z^2 = t = 0$, courbe à l'infini qu'on appelle l'ombilicale. La « vraie » clôture projective de C s'obtient en ajoutant à C ses deux points communs avec l'ombilicale. Algébriquement, il faudrait remplacer l'une des deux équations de sphères définissant C par celle, $2x - 1 = 0$, du plan radical de ces sphères.

Enfin, lorsqu'on se donne un espace projectif P muni de coordonnées homogènes $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, les hyperplans H_i d'équations $x_i = 0$ $(i = 0, \ldots, n)$ ont une intersection vide, de sorte que P est *la réunion* des $n+1$ espaces affines $P-H_i$. Les coordonnées affines dans $P-H_i$ d'un point de coordonnées homogènes $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sont

$$(x_i^{-1}x_0, \ldots, x_i^{-1}x_j, \ldots, x_i^{-1}x_n) \quad (j \neq i).$$

Si l'on part d'un point de $P-H_0$, de coordonnées affines $(y_1, \ldots, y_n)$ et s'il est aussi dans $P-H_i$ $(y_i \neq 0)$, ses coordonnées homogènes sont $(1, y_1, \ldots, y_n)$ et ses coordonnées affines dans $P-H_i$ sont

$$(y_i^{-1}, y_i^{-1}y_1, \ldots, y_i^{-1}y_{i-1}, y_i^{-1}y_{i+1}, \ldots, y_i^{-1}y_n) \tag{16}$$

Dans les calculs pratiques, on se permet parfois des abus de notation. Par exemple, si l'on part de la courbe affine $C : x^3 + xy + 1 = 0$, on note z la variable d'homogénéité et l'on écrit $x^3 - xyz + z^3 = 0$ l'équation de sa clôture projective ; pour étudier le point $(x=z=0, y=1)$ de celle-ci, qui est l'unique point à l'infini de C, on passe au « morceau affine » $y \neq 0$ en faisant $y = 1$, d'où l'équation affine $x^3 + z^3 - xz = 0$; bien entendu, les lettres x, y, z n'ont pas la même signification dans les trois équations.

Intersections avec une droite, points simples et points multiples des hypersurfaces

On suppose ici le corps K commutatif et infini. Soit V une hypersurface affine d'équation $F(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Nous écrirons le polynôme F sous la forme

$$F(Y) = F_0 + F_1(Y) + \ldots + F_d(Y) \qquad (\text{où } Y = (Y_1, \ldots, Y_n)) \quad (17)$$

où F_j est homogène de degré j et où $F_d \neq 0$; l'entier d s'appelle le *degré de* V. Soit D la droite affine de représentation paramétrique $y_i = a_i + b_i t$ ($t \in K$, $i = 1, \ldots, n$) ; elle passe par le point A de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$. Les paramètres de ses points d'intersection avec V sont les racines de l'équation

$$F(a_1 + b_1 t, \ldots, a_n + b_n t) = 0 \qquad (18)$$

Cette équation se réduit à $0 = 0$ et est toujours vérifiée ssi V contient D (en effet K est infini), cas que nous exclurons. Sinon elle est de degré $\leqslant d$, de sorte que D a au plus d points communs distincts, $P_1, \ldots, P_r$, avec V ; soient $t_1, \ldots, t_r$ leurs paramètres sur D. La multiplicité m_j de la racine t_j de (18) ne dépend que du point P_j : elle n'est pas modifiée par un changement de repère affine ni par un changement (affine) de paramètre sur D, car cela revient à des transformations affines de l'équation (18) ; l'entier m_j est appelé *la multiplicité d'intersection* de V et D en P_j.

Si le point A est sur V ($F(a_1, \ldots, a_n) = 0$), $t = 0$ est racine de (18). Elle est simple ssi le coefficient de t dans (18) est $\neq 0$. D'après la formule de Taylor, celui-ci vaut $F_1'(a)b_1 + \ldots + F_n'(a)b_n$, où $F_i'(a)$ désigne la valeur de la $i$ème dérivée partielle de F au point $(a_1, \ldots, a_n)$. Si ces dérivées partielles ne sont pas toutes nulles en A, on dit que A est un *point simple* de V. Alors la racine $t = 0$ est simple sauf si le vecteur $(b_1, \ldots, b_n)$ est tel que $F_1'(a)b_1 + \ldots + F_n'(a)b_n = 0$; cela revient à dire que son extrémité $(y_1, \ldots, y_n)$ satisfait à l'équation

$$F_1'(a)(y_1 - a_1) + \ldots + F_n'(a)(y_n - a_n) = 0 \qquad (19)$$

celle-ci est celle d'un hyperplan, appelé *l'hyperplan tangent* à V en A. Les droites de celui-ci qui passent par A, dont la multiplicité d'intersection avec V en A est $\geqslant 2$, sont dites *tangentes* à V en A.

Un point $A = (a_1, \ldots, a_n)$ de V tel que $F'_1(a) = \ldots = F'_n(a) = 0$ est dit *multiple* (ou *singulier*) ; ces points forment une partie algébrique de V, définie par $n + 1$ équations. Pour étudier de plus près un tel point, on y place l'origine ; alors, dans (17), $F_0 = F_1 = 0$; soit m le plus petit entier tel que le polynôme homogène F_m soit non nul ; on l'appelle la *multiplicité* de A sur V. L'équation (18) qui décrit l'intersection de V avec la droite de représentation paramétrique $y_i = b_i t$ ($i = 1, \ldots, n$, $t \in K$) s'écrit alors

$$F_m(b_1, \ldots, b_m)t^m + \ldots + F_d(b_1, \ldots, b_m)t^d = 0 . \tag{20}$$

La multiplicité d'intersection de V et D en A est m sauf si D est contenue dans le « cône des tangentes » d'équation $F_m(y_1, \ldots, y_m) = 0$.

Supposons maintenant que toutes les racines de (18) sont dans K (ce qui est le cas si K est algébriquement clos), que chaque point P_j soit compté avec sa multiplicité d'intersection m_j et que l'équation (18) soit vraiment de degré d. Alors on peut dire que D *et* V *ont* d *points communs.*

Mais, dans (18), le terme en t^d a pour coefficient $F_d(b_1, \ldots, b_n)$. S'il est nul, l'équation, comme on dit, « tombe » à un degré $< d$ et il n'est plus vrai que V et D aient d points communs. Où sont passés les autres ? A l'infini, bien entendu. En effet la relation $F_d(b_1, \ldots, b_n) = 0$ exprime que le point à l'infini de D est dans V (ou plutôt dans $\hat{V}$) ; on dit alors que la direction de D est une *direction asymptotique* de V.

Exemples. — L'intersection de la courbe plane $x^4 - y^4 - xy = 0$ avec la droite $y = bx$ se traduit par l'équation $(1 - b^4)x^4 - bx^2 = 0$. Elle admet $x = 0$ comme racine double (l'origine est point double). Elle tombe au degré 2 pour $b = 1, -1, i, -i$, pentes des directions asymptotiques de la courbe.

La surface $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ n'admet que l'origine pour point multiple dans l'espace affine : en effet, si les dérivées partielles $2x$, $3y^2$, $5z^4$ sont toutes nulles, cela implique $x = y = z = 0$ en caractéristique $\neq 2, 3, 5$; en caractéristique 2, 3 ou 5, deux des nombres x, y, z sont nuls, et le troisième aussi à cause de l'équation de la surface. Ses directions asymptotiques, données par l'annulation des termes de plus haut degré 5, sont celles contenues dans le plan $z = 0$. La droite $z = t = 0$ de ce plan est la courbe à l'infini de la clôture projective de la surface ; elle est formée de points qui sont singuliers sur celle-ci (sur le morceau affine $y \neq 0$, l'équation s'écrit $t^2 + x^2t^3 + z^5 = 0$).

On est ainsi amenés à étudier, *dans un espace projectif* P, l'intersection d'une hypersurface V d'équation homogène $G(x_0, \ldots, x_n) = 0$ et d'une droite D de représentation paramétrique $x_i = c_i u + d_i v$

($i = 0, \ldots, n$), où les couples (u, v) dans K^2 sont distincts de $(0, 0)$ et où deux couples proportionnels donnent le même point. L'intersection de V et de D est gouvernée par l'équation :

$$G(c_0 u + d_0 v, \ldots, c_n u + d_n v) = 0. \tag{21}$$

C'est une équation homogène de degré d (d = degré de G) en u et v. Quitte à remplacer K par une extension algébrique, son premier membre se décompose en un produit de facteurs linéaires en (u, v) : en mettant à part les facteurs u, on forme l'équation satisfaite par v/u (faire $u = 1$), dont chaque racine e_j fournit un facteur $v - e_j u$. En comptant chaque facteur avec son exposant dans le premier membre de (21), on obtient ainsi d solutions (u, v), normalisées soit sous la forme $(0, 1)$ (facteurs u), soit $(1, e_j)$. L'on obtient ainsi *exactement d points communs* à V et D. Comme on disait autrefois, V et D ont d points communs « réels ou imaginaires (extension de K), distincts ou confondus (prise en compte des multiplicités), à distance finie ou à l'infini (remplacement d'une hypersurface affine par sa clôture projective) ».

Lorsque l'équation (18) « tombe » du degré d au degré $d-k$, on voit ainsi où sont passés les k points d'intersection perdus. On prend pour G le polynôme homogénéisé de F. La représentation paramétrique affine $y_i = a_i + b_i t$ de D ($i = 1, \ldots, n$) donne la représentation paramétrique projective $x_0 = u$, $x_i = a_i u + b_i v$ ($i = 1, \ldots, n$) ; ainsi $c_0 = 1$, $d_0 = 0$, $c_i = a_i$, $d_i = b_i$. Alors (21) s'écrit

$$G(u, a_1 u + b_1 v, \ldots, a_n u + b_n v) = 0. \tag{22}$$

En posant $v = tu$, cette équation donne $u^n G(1, a_1 + b_1 t, \ldots, a_n + b_n t) = 0$, c'est-à-dire $F(a_1 + b_1 t, \ldots, a_n + b_n t) = 0$, soit (18), si $u \neq 0$. Ses $d-k$ racines t_j dans K donnent $d-k$ facteurs $v - t_j u$ du premier membre de (22) ; mais ce premier membre a aussi k facteurs u, correspondant au point à l'infini de D compté k fois. On notera que les multiplicités d'intersection sont les mêmes dans l'affine et dans le projectif.

Étudions enfin les questions de *simplicité* et d'*hyperplan tangent* dans l'espace projectif. Avec les notations de (21), supposons que le point A de coordonnées homogènes $(c_0, \ldots, c_n)$ est sur V, de sorte que le coefficient de u^d dans le premier membre de (21) est nul. D'après la formule de Taylor, celui de $u^{d-1}v$ est $d_0 G_0'(c) + \ldots + d_n G_n'(c)$, où $G_i'(c)$ désigne la valeur en $(c_0, \ldots, c_n)$ de la dérivée partielle de G par rapport à la variable d'indice i. Ainsi u sera facteur simple du premier membre de (21), et A point d'intersection de multiplicité 1 de D et V, ssi ce coefficient est non nul. Donc A est un point *simple* de V ssi les $G_i'(c)$ ne sont pas tous nuls ; les points multiples de V sont donc définis par les $n+2$ équations $G(x) = G_i'(x) = 0$. Si A est un point simple de V, les droites qui sont *tangentes* à V en A (c'est-à-dire qui intersectent V en A avec multiplicité $\geqslant 2$) sont donc celles qui sont contenues dans *l'hyperplan tangent* d'équation :

$$x_0 G_0'(c) + x_1 G_1'(c) + \ldots + x_n G_n'(c) = 0. \tag{23}$$

Remarque. — D'après la formule d'Euler $x_0 G_0'(x) + \ldots + x_n G_n'(x) = d.G(x)$, un point où toutes les dérivées partielles de G sont nulles est sur V lorsque d n'est pas multiple de la caractéristique de K.

Si $G(x_0, \ldots, x_n)$ est l'homogénéisé de $F(y_1, \ldots, y_n)$ on voit aisément que $G_i'(1, y_1, \ldots, y_n) = F_i'(y_1, \ldots, y_n)$ pour $i = 1, \ldots, n$, d'où

$$G_0'(1, y_1, \ldots, y_n) = dF(y) - y_1 F_1'(y) - \ldots - y_n F_n'(y).$$

En appliquant cette formule à un point simple $A = (1, a_1, \ldots, a_n)$ de V, on voit, puisque $F(a) = 0$, que l'équation projective (23) de l'hyperplan tangent devient $-a_1 F_1'(a) - \ldots - a_n F_n'(a) + y_1 F_1'(a) + \ldots + F_n'(a) y_n = 0$, ce qui est l'équation affine (19) de l'hyperplan tangent.

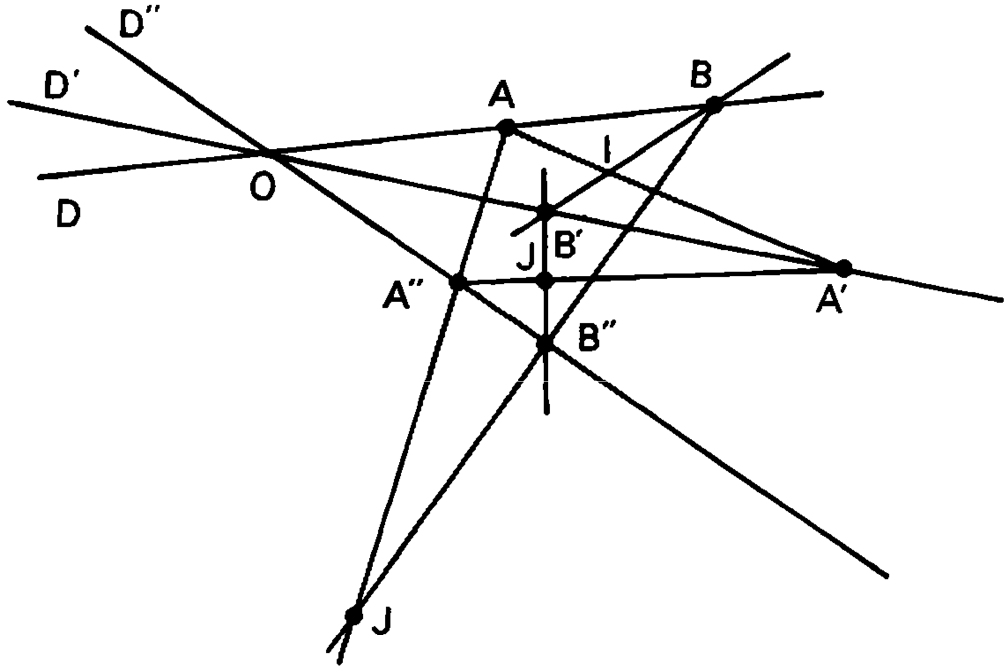
Trois théorèmes importants

Nous utiliserons souvent des locutions inspirées de la géométrie élémentaire comme « mener une droite par deux points », « points alignés » (c'est-à-dire appartenant à une même droite), « droites concourantes », « droites coplanaires », etc. La droite passant par deux points a, b (distincts) d'un espace projectif ou affine sera notée D_{ab} (ou même simplement ab).

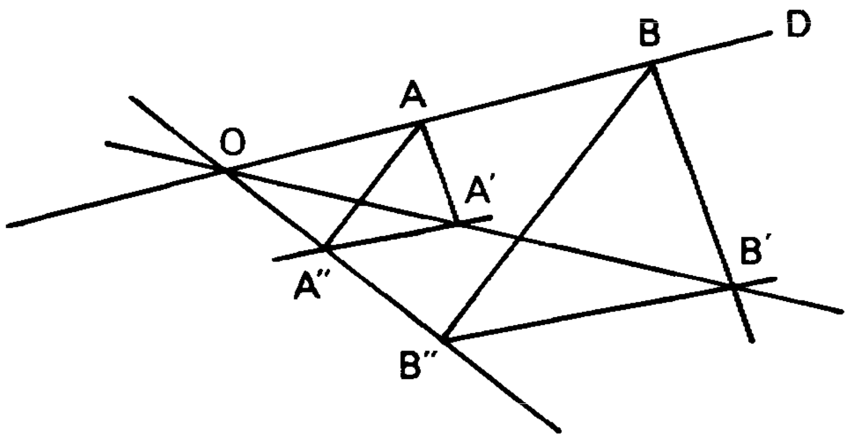
THÉORÈME 5 (Desargues). — *Dans un espace projectif* P, *soient* D, D′, D″ *trois droites distinctes ayant en commun un point* O. *On prend sur chacune deux points distincts* A, B, A′, B′, A″, B″, *tous distincts de* O. *Alors les trois points d'intersection* $I = D_{AA'} \cap D_{BB'}$ $J = D_{AA''} \cap D_{BB''}$ *et* $K = D_{A'A''} \cap D_{B'B''}$ *sont alignés.*

Les points I, J, K sont bien définis : D et D′ sont dans un même plan donc $D_{AA'}$ et $D_{BB'}$ sont dans ce plan ; elles sont distinctes et l'on applique le th. 1 du § A. Si D, D′, D″ ne sont pas coplanaires, elles engendrent une vlp de dimension 3. Dans celle-ci, les plans AA′A″ et BB′B″ ont une droite en commun *(ibid.)*, qui contient I, J et K.

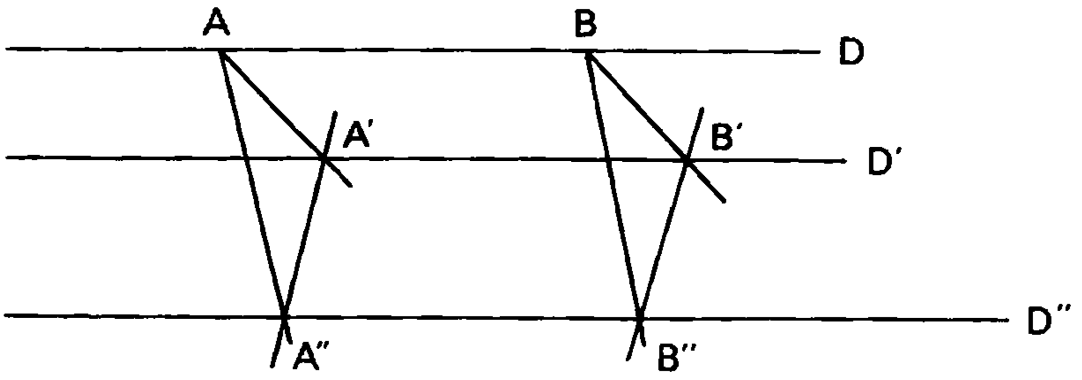
On peut en déduire, par projection, le cas où D, D′, D″ sont coplanaires. Mais nous donnerons une démonstration directe. On se place



dans ce plan, on prend D_{IJ} comme droite à l'infini et O pour origine s'il n'est pas sur cette droite. Les points A, B, ..., B'' peuvent alors être vus comme des vecteurs et il y a des éléments a, a', a'' de K tels que $B = aA$, $B' = a'A'$ et $B'' = a''A''$. Comme AA' et BB' sont parallèles, il existe c dans K tel que $B' - B = c(A' - A)$, c'est-à-dire $a'A' - aA = cA' - cA$, d'où $a' = a = c$ car les vecteurs A et A' sont linéairement indépendants. De même $a = a''$ car J est à l'infini. D'où $B'' - B' = a(A'' - A')$, ce qui montre que les droites $D_{A'A''}$ et $D_{B'B''}$ sont parallèles et se coupent donc (en K) sur la droite de l'infini D_{IJ}.



Enfin, si O est sur la droite de l'infini D_{IJ}, D, D', D'' sont parallèles et ABB'A', ABB''A'' sont des parallélogrammes : la translation B − A amène A' en B' et A'' en B''. On en déduit que $D_{A'A''}$ et $D_{B'B''}$ sont parallèles, donc que K est sur la droite de l'infini D_{IJ}. CQFD.

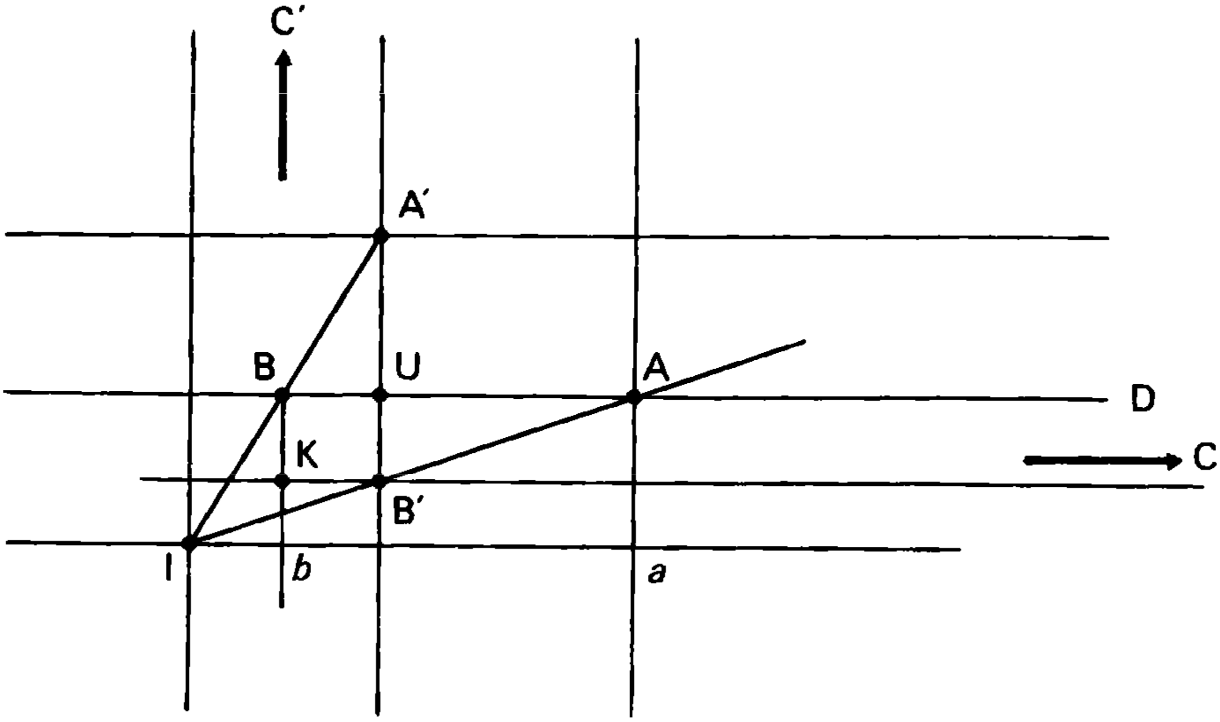


THÉORÈME 6 (Pappus). — *Soit* P *un plan projectif sur un corps* K. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Quelles que soient les droites distinctes* D, D′ *et les points* A, B, C *sur* D, A′, B′, C′ *sur* D′, *tous distincts, les points* $I = D_{AB'} \cap D_{BA'}$, $J = D_{AC'} \cap D_{CA'}$ *et* $K = D_{BC'} \cap D_{CB'}$ *sont alignés ;*

b) *Le corps de base est commutatif.*

On prend I, C, C′ comme points base, $D_{CC'}$ comme droite à l'infini et le point U commun à D et D′ comme point unité. Notons que des points de coordonnées affines (p, q) (p', q') sont alignés avec l'origine I ssi $p^{-1}q = p'^{-1}q'$. Soient a et b les abscisses de A et B, qui ont donc pour coordonnées $(a, 1)$ et $(b, 1)$. Comme A, B′ et I sont alignés et que B′ a pour abscisse 1, ses coordonnées sont $(1, a^{-1})$. De même A′ a pour



coordonnées $(1, b^{-1})$. Ainsi J a pour coordonnées (a, b^{-1}) et K a pour coordonnées (b, a^{-1}). Leur alignement avec l'origine I s'exprime donc par $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, c'est-à-dire par $ab = ba$. Comme a et b sont arbitraires (non nuls), cet alignement équivaut donc à la commutativité du corps. CQFD.

THÉORÈME 7 (théorème fondamental de la géométrie projective). — *Soient* $P = \mathbf{P}(v)$ *et* $P' = \mathbf{P}(V')$ *deux espaces projectifs de même dimension* $n \geqslant 2$ *sur deux corps* K *et* K'. *Si* f *est une bijection de* P *sur* P' *qui transforme points alignés en points alignés, alors elle provient par passage aux quotients d'une bijection* g *de* V *sur* V' *qui est additive et telle que* $g(ax) = s(a)g(x)$, *où* s *est un isomorphisme (fixe) du corps* K *sur le corps* K'

On dit que g est une application semi-linéaire (relative à s) de V sur V'. On voit aussitôt qu'une bijection semi-linéaire de V sur V' passe aux espaces projectifs et qu'elle transforme trois vecteurs linéairement dépendants en des vecteurs linéairement dépendants ; ainsi la réciproque du th. 7 est (trivialement) vraie.

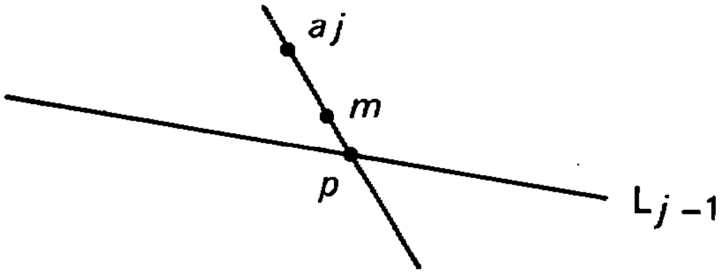
On notera aussi qu'il suffit que f transforme tout *triplet* de points alignés en un triplet de points alignés : elle transforme alors tout ensemble A de points alignés en un ensemble de points alignés car, pour a, b (fixes) et x (variable) dans A, $f(x)$ est sur la droite $D_{f(a),f(b)}$.

COROLLAIRE. — *Toute bijection d'un espace projectif de dimension* $\geqslant 2$ *sur lui-même qui conserve les alignements est composée d'un automorphisme du corps de base et d'une homographie.*

Si ce corps est $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{F}_p$ (p premier), il n'admet pas d'automorphisme non identique et la bijection en question est une simple homographie.

Démontrons le th. 7. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des points projectivement indépendants de P. Pour $j = 0, \ldots, n$, notons L_j la vlp engendrée par $a_0, \ldots, a_j$ et L'_j la vlp engendrée par $f(a_0), \ldots, f(a_j)$. Par récurrence sur j, on a

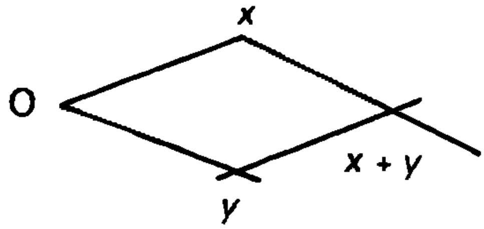
$$f(L_j) \subset L'_j$$



car, pour m dans L_j, la droite $a_j m$ rencontre L_{j-1} en un point p ; comme $f(m)$ est aligné avec $f(a_j)$ et $f(p)$, qui est dans $L'_{j-1} \subset L'_j$, $f(m)$ est dans L'_j. Pour $j = n$, on a $L_n = P$, d'où, comme f est surjective, $L'_n = P'$. Il en résulte que $f(a_0), \ldots, f(a_n)$ sont projectivement indépendants. De plus, si un point m de P est en dehors de L_j, on voit, en complètant le système $(a_0, \ldots, a_j, m)$ en un système de $n + 1$ points projectivement indépendants, que $f(a_0), \ldots, f(a_j)$, $f(m)$ sont projectivement indépendants et donc que $f(m)$ est en dehors de L'_j ; la surjectivité de f et la formule $f(L_j) \subset L'_j$ montrent alors qu'on a $f(L_j) = L'_j$.

Choisissons dans P une origine O et un hyperplan à l'infini H. Alors $f(H)$ est un hyperplan H′ de P′, qu'on prend comme hyperplan à l'infini. Prenons $O' = f(0)$ comme origine. Alors f donne une bijection de $E = P - H$ sur $E' = P' - H'$, et E et E′ sont des espaces vectoriels. Il suffit de montrer que *f est semi-linéaire* (car $g = f \times s$ est alors l'application cherchée de $V = E \times K$ sur $V' = E' \times K'$).

L'application f de E sur E′ transforme droites en droites et droites parallèles en droites parallèles. Comme $f(0) = 0'$, la « règle du parallélogramme » montre qu'on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$ lorsque x et y sont linéairement indépendants. Sinon, on a $y \in Kx$ et l'on prend z en dehors de Kx ($\dim(E) \geqslant 2$), de sorte que z est linéairement indépendant de x,



de y, de $x + y$ et que $y + z$ est linéairement indépendant de x. On forme alors

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f((x+y)+z) = f(x+y) + f(z) = f(x+(y+z)) \\ &= f(x) + f(y+z) = f(x) + f(y) + f(z), \end{aligned}$$

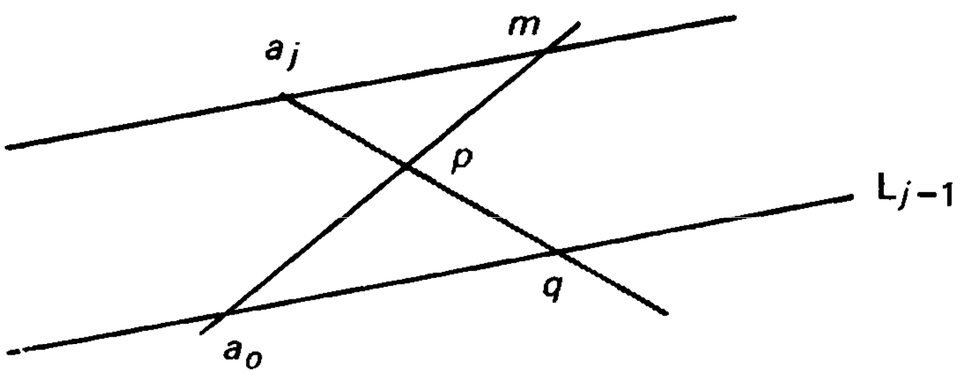
de sorte que l'additivité de f est toujours valable.

Pour a dans K et $x \neq 0$, les points O, x et ax sont alignés, de sorte que O′, $f(x)$ et $f(ax)$ le sont aussi. Il existe donc $s(a, x)$ dans K′ tel que $f(ax) = s(a, x) f(x)$. Lorsque x et y sont linéairement indépendants, et donc $f(x)$ et $f(y)$ aussi, l'on voit, en calculant $f(a(x + y))$ de deux manières, qu'on a $s(a, x) = s(a, y) = s(a, x + y)$; cela reste vrai pour x, y linéairement dépendants, par passage via un vecteur z qui ne leur est pas collinéaire ; ainsi $s(a, x)$ ne dépend que de a et on le note $s(a)$.

Pour $x \neq 0$, et donc $f(x) \neq 0'$, les formules $f((a+b)x) = f(ax) + f(bx)$ et $f(a(bx)) = f((ab)x)$ donnent aussitôt $s(a+b) = s(a) + s(b)$ et $s(ab) = s(a)s(b)$. Comme $f(\mathrm{K}x) = \mathrm{K}'f(x)$, s est une surjection, et donc un isomorphisme, de K sur K′.

Remarque sur l'analogue affine du théorème 7. — Soit f une bijection d'un espace affine A (sur K) sur un espace affine A′ (sur K′) de mêmes dimensions $n \geqslant 2$, qui transforme tout triplet de points alignés en un triplet de points alignés. Lorsque K est le corps $\mathbf{F}_2$, l'hypothèse sur les alignements est *vide* car les droites n'ont que deux éléments. Cependant, *si* $\mathrm{K} \neq \mathbf{F}_2$, *on peut conclure que* f *est semi-linéaire* (en pointant A et A′ en des points O et $\mathrm{O}' = f(0)$.

Comme dans le th. 7, on prend des points affinement indépendants $a_0, \ldots, a_n$ de A, on note L_j la vla engendrée par $a_0, \ldots, a_j$ et L'_j la vla engendrée par $f(a_0), \ldots, f(a_j)$ et il s'agit de montrer, par récurrence sur j, qu'on a $f(\mathrm{L}_j) \subset \mathrm{L}'_j$. Pour m dans L_j, il n'y a pas de difficulté si la droite D_{ma_j} rencontre L_{j-1}. Mais, sinon, elle est parallèle à une direction de L_{j-1} ; on prend alors un *troisième* point p sur la droite ma_0 ;



alors la droite a_jp, non parallèle à L_{j-1}, rencontre cette vla en un point q ; l'alignement a_jpq montre que $f(p)$ est dans L'_j et l'alignement mpa_0 montre que $f(m)$ est aussi dans L'_j.

Cela étant, la surjectivité de f permet, comme dans le th. 7, de montrer qu'on a $f(\mathrm{L}_j) = \mathrm{L}'_j$ pour tout j. On en déduit que f transforme droites en droites et droites parallèles en droites parallèles. L'application de la règle du parallélogramme et les petits calculs du th. 7 permettent de conclure.

§ D / Présentation axiomatique des plans projectif et affine

Axiomes d'incidence ; cas projectif

Le théorème fondamental de la géométrie projective (th. 7, § C) laisse deviner que l'on peut reconstruire la géométrie projective à partir de la notion d'*alignement*. C'est ce que nous allons faire, axiomatiquement, dans le cas du plan.

On se donne un ensemble P d'éléments appelé le *plan* et une famille non-vide de parties distinctes de P et non-vides, appelées *droites*. On suppose vérifiés les axiomes suivants (dits « axiomes d'incidence ») :

(A.1) *Par deux points distincts de* P *il passe une droite et une seule.* Ainsi deux droites distinctes ont au plus un point commun. Plus précisément :

(A.2) *Deux droites distinctes ont exactement un point commun.*

Remarques. — 1) On notera la *symétrie* des assertions « une seule droite par deux points », « un seul point sur deux droites ». Nous y reviendrons au § E sur la dualité des espaces projectifs.

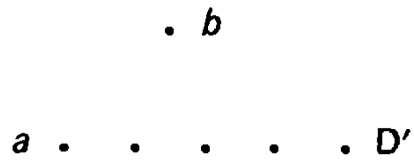
2) Une axiomatique de l'espace projectif P *de dimension* n comporterait la donnée de $n-1$ familles de parties de P — les vlp de dimension j pour $j = 1, \dots, n-1$ —, l'assertion d'unique détermination d'une vlp de dimension j par $j+1$ points non contenus dans une vlp de dimension $j-1$, et enfin celle que toute intersection de vlp est une vlp (d'où la notion de vlp engendrée), la « formule de dimensions » du th. 1 (§ A) étant supposée vraie. C'est assez simple à expliciter dans le cas $n = 3$.

On peut aussitôt déduire quelques conséquences des axiomes (A.1) et (A.2). Nous noterons D_{ab} (ou ab) la droite passant par les points a, b.

a) Comme P admet une partie non vide D distincte de P, P a au moins 2 points.

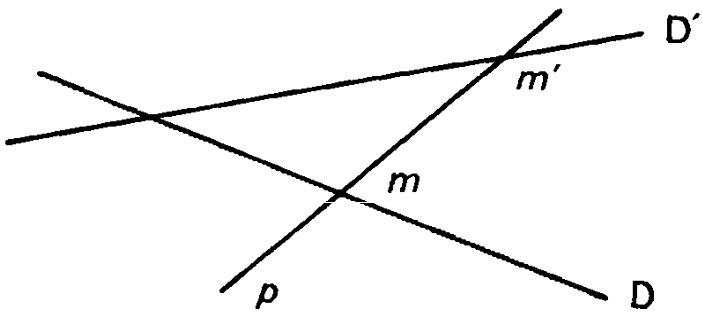
b) Aucune droite n'est réduite à un point a. Sinon, par (A.2), toute droite passerait par a ; alors, en prenant un second point b, la droite bm coïnciderait avec ab (A.1) pour tout point $m \neq a, b$, de sorte que ab serait le plan tout entier. On voit de même qu'il n'y a aucune relation d'inclusion entre deux droites.

c) *La réunion* $D \cup D'$ *de deux droites est-elle distincte de* P ? Sinon notons a le point commun à D et D'. S'il y a deux points b, c sur D distincts de a, et deux points b', c' sur D' distincts de a, le point commun à bb' et cc' est en dehors de D et de D'. Le seul cas où $P = D \cup D'$ est donc celui où, par exemple, D a un seul point $b \neq a$ et où D' est donc le



complémentaire de b. Un tel plan sera dit « sans intérêt » et sera exclus de la suite de l'étude.

d) *Deux droites quelconques* D *et* D′ *sont en bijection.* En effet, on prend un point p en dehors de D et D′ et on projette D sur D′ à partir de p : à tout point m de D on associe l'unique point m' de D′ où pm rencontre D′ ; l'application réciproque est évidente et on a bien une bijection.



e) *Si le cardinal commun des droites est fini et qu'on le note* $q + 1$, *le plan contient* $q^2 + q + 1$ *points et aussi* $q^2 + q + 1$ *droites.* En effet, prenons une droite D et un point a en dehors de D. Les droites par a sont en bijection avec les points de D, et il y en a donc $q+1$. Chacune contient q points $\neq a$, d'où card(P) $= (q + 1)q + 1$. Pour compter les droites on note que, à part D, il y en a q par chacun des $q + 1$ points de D, d'où, au total, $1 + q(q + 1)$ droites.

f) *On a* $q \geqslant 2$, *de sorte qu'une droite a au moins 3 points et qu'on a* card(P) $\geqslant 7$. En effet, si $q = 1$, les droites ont 2 points et toutes les parties à 2 éléments de P sont des droites par (A.1) ; si card(P) $\geqslant 4$, on aurait des droites disjointes, contrairement à (A.2) ; alors card(P) $= 3$, mézalor le plan est « sans intérêt ».

Un plan projectif est dit *arguésien* s'il satisfait à l'axiome suivant :

(A.3) (axiome de Desargues). — *Quelles que soient les droites concourantes distinctes* D, D′, D″ *et les points* a, b *de* D, a', b' *de* D′ *et* a'', b'' *de* D″(*tous distincts et distincts du point commun à* D, D′, D″), *les points* $D_{aa'} \cap D_{bb'}$ $D_{aa''} \cap D_{bb''}$ *et* $D_{a'a''} \cap D_{b'b''}$ *sont alignés.*

Axiomes d'incidence : cas affine

Soit P un plan projectif qui n'est pas sans intérêt. Notons $A = P - D_0$ le complémentaire d'une droite D_0 (« la droite de l'infini »). Appelons « droites » de A les intersections de A avec les droites de P autres que D_0 ; celles-ci sont non vides (par (*b*)) et distinctes de A (par (*c*)). Appelons « parallèles » deux droites de A telles que les droites de P dont elles proviennent se rencontrent « à l'infini ». L'axiome (A.1) donne :

(A'.1) *Par deux points distincts de* A *passe une droite et une seule.*

Il en résulte que deux droites distinctes de A ont au plus un point commun. Il résulte de (A.2) que deux droites sans point commun sont parallèles. L'application de (A.1) à un point de A et à un point à l'infini (c'est-à-dire de D_0) donne :

(A'2) *Par tout point de* A *il passe une parallèle et une seule à une droite donnée.*

Si $q + 1$ est le cardinal commun des droites de P, toutes les droites de A ont q éléments (donc au moins 2 éléments, voir (*f*)). Le plan affine A contient q^2 points et $q^2 + q$ droites.

Réciproquement, appelons « *plan affine* » un ensemble A de points, muni d'une famille non vide de parties non vides et distinctes de A, appelées droites, telle que (A'.1) et (A'.2) soient vrais. Plus précisément, il résulte de (A'.1) que deux droites distinctes ont au plus un point commun. On dit que deux droites sont « parallèles » si elles sont confondues ou sans point commun. Le parallélisme est une *relation d'équivalence :* réflexivité et symétrie sont évidentes et, si D est parallèle à D' et à D'', ou bien D' et D'' sont disjointes, ou bien, si elles ont un point commun a, on a $D' = D''$ (par (A'.2) appliqué à a et D). Appelons « directions » les classes d'équivalence et D_0 l'ensemble de ces directions.

En adjoignant D_0 à A on obtient un ensemble P. Par définition, les « droites » de P sont D_0 et les parties $\hat{D}$ obtenues en adjoignant à chaque droite de A sa direction (appelée aussi « son point à l'infini ») ; ces parties sont non vides et distinctes de P. On voit aussitôt que P est un *plan projectif :* (A.1) résulte de (A'.1) et (A'.2), et (A.2) du fait que deux droites disjointes de A ont un point commun à l'infini. De plus ce plan projectif n'est pas « sans intérêt ».

Sinon il contient une droite E dont le complémentaire est un point a (cf. (*c*)). On a $E \neq D_0$ car A, qui contient des parties non vides et distinctes de A, ne saurait être réduit à un point. Donc E provient d'une droite D de A. Comme

$A \neq D$, a n'est pas à l'infini. Alors la droite joignant a à un point b de D a un autre point à l'infini que celui de D, d'où au moins deux points (a et ce dernier) en dehors de E.

Donc, si l'on exclut les plans « sans intérêt », l'étude des plans affines et celle des plans projectifs se ramènent l'une à l'autre, situation parallèle à celle du § C.

Un plan affine A est dit *arguésien*, s'il satisfait l'axiome suivant (qui est un cas particulier de (A.3)) :

(A'.3) *Soient* D, D', D'' *trois droites distinctes de* A, *concourantes ou parallèles, a, b des points de* D, *a', b' des points de* D', *a'', b'' des points de* D'', *tous distincts du point commun éventuel à* D, D', D''. *Si* $D_{aa'}$ *et* $D_{bb'}$ *sont parallèles, et* $D_{aa''}$ *et* $D_{bb''}$ *aussi, alors* $D_{a'a''}$ *et* $D_{b'b''}$ *sont parallèles.*

Le théorème fondamental

Nous dirons que deux plans projectifs (resp. affines) sont *isomorphes* s'il existe une bijection f de l'un sur l'autre qui applique la famille des droites du premier sur la famille des droites du second.

THÉORÈME 8. — *a) Tout plan projectif arguésien* P *est isomorphe à un plan* P(V) *où* V *est un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps.*
b) Tout plan affine arguésien E *est isomorphe à un plan affine sur un corps* K.

Il suffit de démontrer *b*) car, si P est un plan projectif et D_0 une droite de P, on applique *b*) à $P - D_0$, ce qui donne *a*) en vertu du § C. On notera que, en vertu du th. 5 (§ C), le cas particulier (A'.3) de l'axiome de Desargues implique ainsi l'axiome complet (A.3).
La démonstration du th. 8, *b*) va être longue. Elle comporte les étapes suivantes :

— traitement direct des « petits » plans affines ($q = 2$ et 3), afin d'avoir ultérieurement de la place pour surmonter les difficultés dues aux cas où certains points sont alignés ;
— définition d'une relation d'équivalence (« l'équipollence ») sur les couples de points de E ;
— les classes d'équivalence (« vecteurs ») opèrent (« par translations ») sur E et forment un groupe additif V ;
— définition de certains endomorphismes de V (« homothéties ») et démonstration du fait qu'ils forment un corps K.

Les petits plans. — Si $q = 2$, E a 4 points, ses droites sont les parties à 2 éléments, ce qui est le cas pour le plan affine sur $\mathbf{F}_2$.

Pour $q = 3$, on choisit deux droites sécantes D, D′ et on repère leurs points par 0, 1, 2. On considère les 6 droites parallèles à D ou à D′, ce qui permet de repérer les points de E par les couples (i, j) où $i, j = 0, 1, 2$.

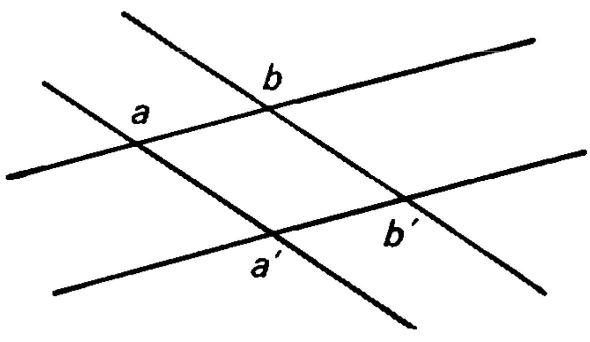
$$\begin{array}{cccc} 2 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Toute autre droite — et il y en a 6 puisque $q^2 + q = 12$ — rencontre chaque parallèle à D (resp. D′) en un point et un seul ; une telle droite est donc l'ensemble des $(i, s(i))$ où s est une permutation de $(1, 2, 0)$; toutes les permutations donnent donc des droites de E. Or, dans $\mathbf{F}_3 \times \mathbf{F}_3$, les droites non parallèles aux axes de coordonnées sont de la forme $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbf{F}_3,\ a \neq 0)$ et correspondent aussi aux 6 permutations de $\mathbf{F}_3\ (= (0, 1, 2))$.

L'équipollence des couples de points

Etant donnés 4 points non alignés et distincts a, b, a', b', on pose

$$(a, b)\mathrm{R}(a', b') \tag{1}$$



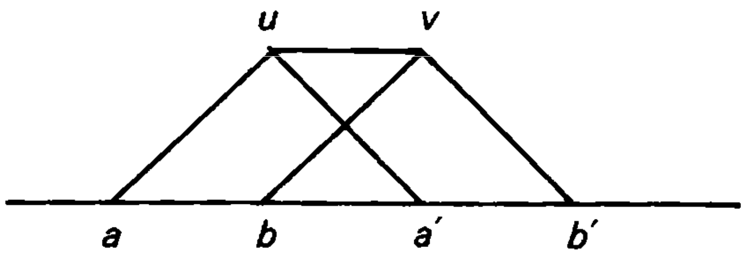
si $\mathrm{D}_{a'b'}$ est parallèle à D_{ab} et si $\mathrm{D}_{bb'}$ est parallèle à $\mathrm{D}_{aa'}$. Cette relation équivaut à $(b, a)\mathrm{R}(b', a')$, à $(a, a')\mathrm{R}(b, b')$ et à $(a', a)\mathrm{R}(b', b)$. Elle est symétrique. La donnée de 3 des points détermine le 4^{e}.

Lemme 1. — *Si les droites D_{ab}, $\mathrm{D}_{a'b'}$ et $\mathrm{D}_{a''b''}$ sont distinctes, la relation* R *est transitive :* $(a, b)\mathrm{R}(a', b')$ *et* $(a', b')\mathrm{R}(a'', b'')$ *implique* $(a, b)\mathrm{R}(a'', b'')$.

Cela résulte de l'axiome (A'.3) (de Desargues) : les parallélismes de $D_{aa'}$ avec $D_{bb'}$ et de $D_{a'a''}$ avec $D_{b'b''}$ impliquent le parallélisme de $D_{aa''}$ avec $D_{bb''}$.

Maintenant, si a, b, a', b' sont sur une même droite D, avec $a \neq b$, on pose

$$(a, b)\mathrm{R}(a', b') \tag{2}$$



s'il existe des points u, v en dehors de D tels que $(a, b)\mathrm{R}(u, v)$ et $(u, v)\mathrm{R}(a', b')$.

Cette relation est réflexive et symétrique. Si u est donné, v est déterminé de façon unique.

LEMME 2. — *Pour des points alignés a, b, a', b', la relation* R *définie par* (2) *est indépendante du point u.*

En effet, si on a aussi $(a, b)\mathrm{R}(u', v')$ et $(u', v')\mathrm{R}(a', b'_1)$ et si u' est en dehors de D et de D_{uv}, on applique le lemme 1 et on obtient $b'_1 = b'$. Sinon, on prend un point u'' en dehors de D et de D_{uv} (c'est possible car $q \geqslant 3$) et le point v'' tel que $(u'', v'')\mathrm{R}(u, v)$; l'application du lemme 1 à (a, b), (u, v), (u'', v'') et à (u'', v''), (u', v'), (a', b'_1) montre encore que $b' = b'_1$.

COROLLAIRE. — *Pour a, b, a' donnés sur une droite* D, *il y a un unique point b' de* D *tel que $(a, b)\mathrm{R}(a', b')$.*

LEMME 3. — *La relation* R *entre couples (a, b), (a', b') de points distincts ($a \neq b$, $a' \neq b'$) définie par* (1) *ou par* (2) *est une relation d'équivalence. La donnée de 3 des points détermine le quatrième.*

La symétrie a été vue. La réflexivité résulte du lemme 2. La transitivité résulte du lemme 1 si D_{ab}, $D_{a'b'}$ et $D_{a''b''}$ sont distinctes ; sinon l'on passe par un couple (u, v) situé sur une parallèle distincte de celles-ci ($q \geqslant 3$).

Enfin, pour $a = b$, on pose

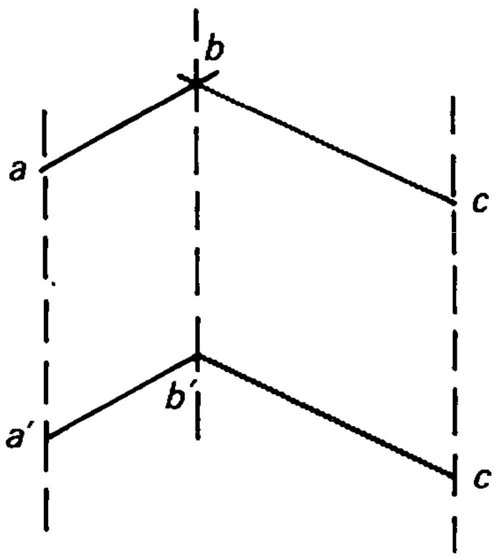
$$(a, a)\mathrm{R}(a', b') \qquad \text{ssi } a' = b' . \tag{3}$$

La relation R ainsi définie pour tous les couples de « bipoints » (a, b) est toujours une relation d'équivalence. On l'appelle l'équipollence.

Vecteurs et translations

On appelle *vecteur* toute classe d'équivalence, pour R, de couples de points de E. La classe du couple (a, b) est notée $b - a$, et on dit que (a, b) est un représentant de $b - a$. L'unique détermination du 4[e] point par les trois premiers dans $(a, b)\mathrm{R}(a', b')$ montre qu'un vecteur x a un unique représentant (a, b) d'origine a donnée. La classe des couples (a, a) s'appelle le vecteur nul, noté 0. Pour tous les représentants (a, b) d'un vecteur x non nul donné, toutes les droites D_{ab} sont parallèles ; leur direction commune est appelée la direction de x.

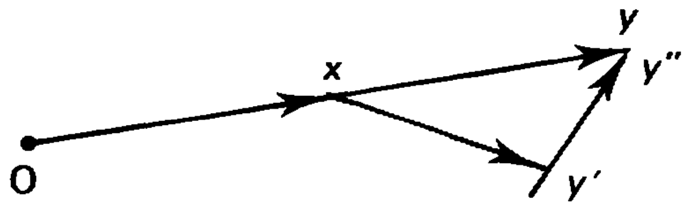
La *somme de deux vecteurs* x, y est ainsi définie : on choisit un point a, on note (a, b) le représentant de x d'origine a, (b, c) le représentant de y d'origine b, et l'on considère le vecteur $z = c - a$. Il est *indépendant du point a choisi*. En effet, si l'on fait la construction à partir d'un point a',



les droites $\mathrm{D}_{aa'}$, $\mathrm{D}_{bb'}$, $\mathrm{D}_{cc'}$ sont parallèles. La relation $c' - a' = c - a$ résulte de l'axiôme de Desargues (A'.3) si la figure n'est pas « aplatie », c'est-à-dire si $\mathrm{D}_{aa'}$ n'est parallèle ni à D_{ab}, ni à D_{ac}, ni à D_{bc} ; sinon, on va de a à a' en évitant ces 3 directions, ce qui est possible car $q \geqslant 4$, donc qu'on dispose de 5 directions et que 2 restent disponibles, l'une pour aller de a en un point a'' et l'autre pour aller de a'' à a'.

La somme ainsi définie des vecteurs x, y est notée $x + y$. L'associativité est évidente. La commutativité résulte de la définition de R par (1) (« la règle du parallélogramme ») lorsque les directions de x et de y sont distinctes ; sinon l'on écrit $y = y' + y''$, où les directions de y' et de y'' sont distinctes de celle de x ; alors

$$\begin{aligned} x+y &= x+(y'+y'') = (x+y')+y'' = (y'+x)+y'' \\ &= y'+(x+y'') = y'+(y''+x) = y+x. \end{aligned}$$



Le vecteur 0 est évidemment élément neutre et $b-a$ est l'opposé de $a-b$. *L'ensemble* V *des vecteurs est donc un groupe commutatif.*

Lemme 4. — *Les relations $b-a=b'-a'$ et $a'-a=b'-b$ sont équivalentes.*

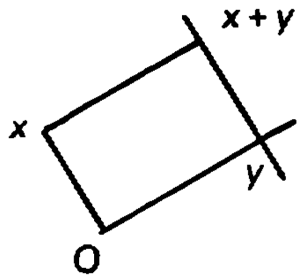
Cela a été vu lorsque les 4 points a, b, a', b' ne sont pas alignés. En général, si $b-a=b'-a'$, on a $a'-a=(a'-b)+(b-a)$ (définition de la somme de deux vecteurs) $= (b'-a')+(a'-b) = b'-b$.

Soit enfin x un vecteur. Pour tout point m de E, notons $T_x(m)$ l'unique point m' tel que $m' - m = x$. D'après la définition de la somme de deux vecteurs, on a $T_y(T_x(m)) = T_{x+y}(m) = T_{y+x}(m)$; de plus $T_x = 1_E$ ssi $x = 0$. Les applications T_x sont donc des bijections de E sur E. On appelle T_x la *translation* de vecteur x. Ce qui a été vu montre que le groupe V opère, « par translations », de façon simplement transitive sur E : l'unique translation qui amène a en b est T_{b-a}.

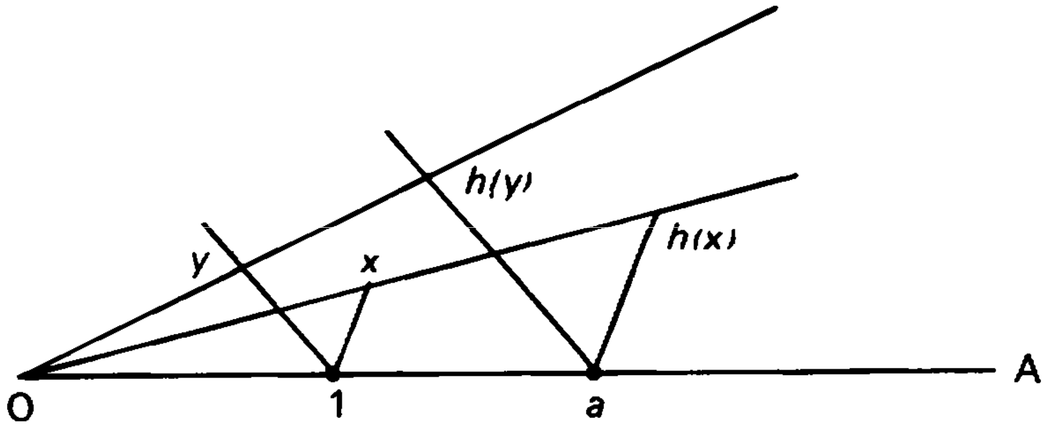
Le corps des homothéties

On choisit un point O dans P, ce qui permet d'identifier tout point a au vecteur $a-0$. Alors E s'identifie au groupe commutatif V, la somme de deux points non alignés avec O s'obtenant par la « règle du parallélogramme ». On notera que *toute droite passant par O est un sous-groupe* de E, car la somme de deux vecteurs de même direction a la même direction que ceux-ci.

On fixe ensuite une droite A passant par O et un point noté 1 ($1 \neq 0$) dessus. Pour tout point a de A et tout point x en dehors de A, on mène



par a la parallèle à D_{1x} ; elle coupe Ox en un point qu'on notera $h_a(x)$. On a $h_0(x) = 0$ et $h_1(x) = x$ pour tout point x en dehors de A. On fixe momentanément un point $a \neq 0$ sur A et on pose $h = h_a$.



LEMME 5. — *Si x et y sont deux points distincts non situés sur* A, $D_{h(x)h(y)}$ *est parallèle à* D_{xy}.

C'est évident si D_{xy} passe par 0 ou par 1. Sinon, cela résulte de l'axiome de Desargues (A'.3).

COROLLAIRE. — *A l'exception de leurs points d'intersection avec* A, *h transforme toute droite* D *en une droite parallèle.*

LEMME 6. — *Si x, y et $x + y$ sont en dehors de* A, *on a*

$$h(x + y) = h(x) + h(y).$$

Si x et y ne sont pas alignés avec 0, on applique le lemme 5 et la règle du parallélogramme. Si y est sur la droite $D = D_{0x}$, on prend un point u tel que $u \notin D$, $u \notin A$, $x + y + u \notin A$ et $y + u \notin A$: c'est possible puisque $q \geqslant 4$, car u doit éviter 3 parallèles à A et D ; on le prend sur une quatrième parallèle à A et on évite son point d'intersection avec D.

Alors, comme x, y et $x + y$ sont sur D, on a $y + u \notin$ D, $x + y + u \notin$ D, d'où

$$h(x+y+u) = h(x+y) + h(u) \quad \text{et} \quad h(x+y+u) = h(x) + h(y+u) = h(x) + h(y) + h(u).$$

D'où la conclusion. CQFD.

On va maintenant définir $h(x)$ pour x dans A. On prend $u \notin$ A et on considère $d(u) = h(x+u) - h(u)$. Pour $v \notin$ A, $h(x+v) - h(v) = h(x+u) - h(u)$ équivaut à $h(x+u) + h(v) = h(x+v) + h(u)$, dont les deux membres valent $h(x+u+v)$ lorsque $x+u+v \notin$ A ; ainsi $d(u) = d(v)$ si $x+u+v \notin$ A. Lorsque $x+u+v \in$ A, on passe par un point w tel que $x+u+w \notin$ A et $x+v+w \notin$ A (éviter deux parallèles à A). Ainsi $d(u)$ est indépendant de u et l'on peut poser :

$$h(x) = h(x+u) - h(u) \quad \text{pour n'importe quel } u \notin \text{A} \tag{24}$$

LEMME 7. — *L'application h ainsi définie est un endomorphisme du groupe* E.

La relation $h(x+y) = h(x) + h(y)$, valable pour x, y, $x+y$ en dehors de A d'après le lemme 6, le reste par (24) si l'un de ces trois points est dans A. Si x, y, et donc $x + y$ sont dans A, l'on calcule de deux façons $h(x + y + u)$ avec $u \notin$ A, air connu.

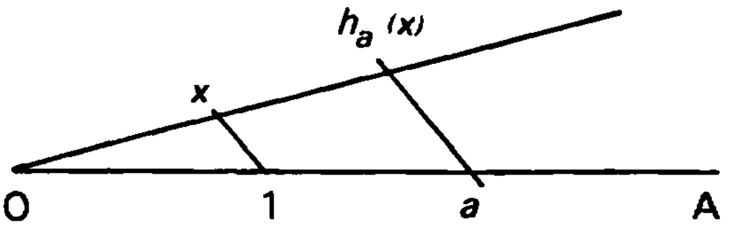
LEMME 8. — *On a* $h_a(x) + h_b(x) = h_{a+b}(x)$ *pour tous* $a, b \in$ A *et* $x \in$ E.

Par différence, on peut supposer $x \notin$ A. Par construction, les vecteurs $h_a(x) - a$ et $h_b(x) - b$ ont même direction que $x - 1$. Il en est de même de leur somme, qui est $h_a(x) + h_b(x) - (a+b)$. Ainsi $h_a(x) + h_b(x)$ est le point d'intersection de D_{0x} avec la parallèle à D_{1x} menée par $a + b$; c'est donc $h_{a+b}(x)$.

LEMME 9. — *Pour* $a \in$ A, h_a *est l'unique endomorphisme du groupe* E *qui applique toute droite dans une droite parallèle et tel que* $h_a(1) = a$. *C'est un automorphisme pour* $a \neq 0$.

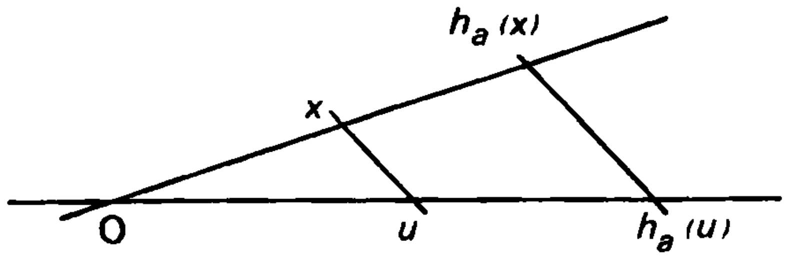
L'unicité de $h_a(x) = y$ résulte de la construction pour $x \notin$ A (car D_{0x} est stable par h_a et car y est donc l'intersection de D_{0x} avec la parallèle menée par a à D_{1x}) ; pour $x \in$ A, cette unicité résulte de (24).

Montrons que h_a a les propriétés indiquées. Si D est une droite qui passe par O, on a vu que $h_a(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$ si D $\neq$ A ; pour toute parallèle u + D à D, on a $h_a(u + \mathrm{D}) = h_a(u) + h_a(\mathrm{D}) \subset h_a(u) + \mathrm{D}$. Le cor. au lemme 5 montre que, pour toute parallèle v + A à A ($v \notin$ A), $h_a(v + \mathrm{A})$ est contenu dans une parallèle à v + A, qui est nécessairement $h_a(v)$ + A. Comme h_a est un endomorphisme, on en déduit $h_a(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$, d'où l'assertion sur



l'image d'une droite. En particulier, pour $x \notin A$, $h_a(D_{1x})$ est contenu dans la parallèle à D_{1x} menée par $h_a(x)$; par définition de $h_a(x)$, celle-ci passe par a; comme $h_a(1)$ est sur cette droite et sur A, on a $h_a(1) = a$.

Enfin, si $a \neq 0$, tout $y \in E$ est dans $h_a(E)$ car c'est l'image de point x où la parallèle à D_{ay} passant par 1 rencontre D_{0y} ; par différence on en déduit la surjectivité de h_a. Il applique donc toute droite *sur* une droite parallèle. D'après la construction, $x \notin A$ implique $h_a(x) \neq 0$; alors, pour $u \neq 0$ dans A, $h_a(u)$ est l'intersection de A avec la parallèle à D_{xu} menée par $h_a(x)$ et est donc $\neq 0$; d'où l'injectivité de h_a. CQFD.



Nous voilà au bout de nos peines. Pour a, b dans A, $h_a \circ h_b$ est un endomorphisme de E qui applique toute droite dans une droite parallèle ; il est donc de la forme h_c avec $c \in A$. On pose $c = ab$; c'est là une multiplication, évidemment associative, sur A et 1 est élément unité. On a $ab = h_{ab}(1) = h_a(h_b(1)) = h_a(b)$, d'où $a(b + b') = ab + ab'$ car h_a est additive. L'autre distributivité $(a+a')b = ab + a'b$ résulte du lemme 8, de sorte que A est un anneau. Enfin, pour $a \neq 0$, l'automorphisme h_a^{-1} transforme toute droite en une droite parallèle et est donc de la forme $h_{a'}$ (lemme 9) ; on a $aa' = a'a = 1$, de sorte que A est un *corps*.

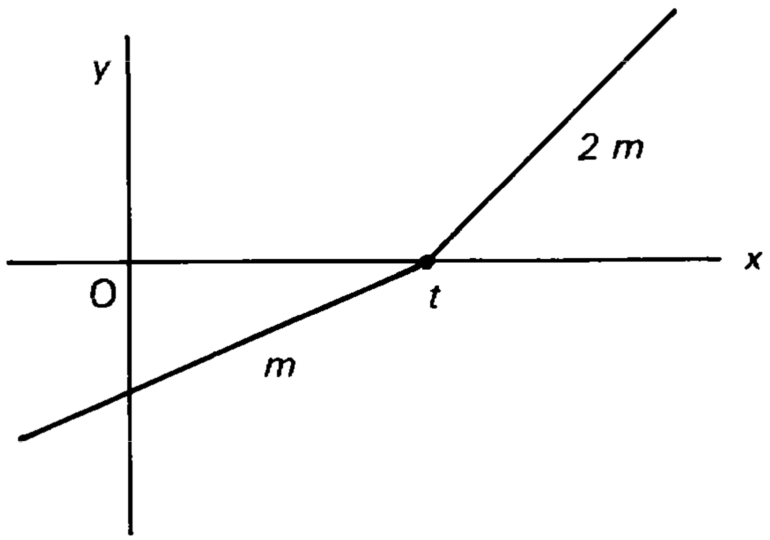
Les formules démontrées montrent que, si l'on pose $ax = h_a(x)$ pour $a \in A$ et $x \in E$, E est un *espace vectoriel à gauche* sur A. Toute droite D passant par O est un sous-espace vectoriel de dimension 1 car, si l'on fixe u non nul sur D, $a \mapsto au$ est une bijection de A sur D (la projection parallèle à D_{u1}). Par la règle du parallélogramme, 2 éléments de E non alignés avec O forment une base de E, qui est donc de dimension 2 sur A. Translatées des droites passant par O, les droites de E ne sont autres que ses sous-espaces affines de dimension 1. Ceci démontre le th. 8.

Commentaires sur l'axiome de Desargues

a) Il est *indépendant* des deux premiers axiomes d'incidence. Voici un exemple de *plan affine non-arguésien.* Dans $\mathbf{R}^2$ on appelle « droites » (avec guillements) :

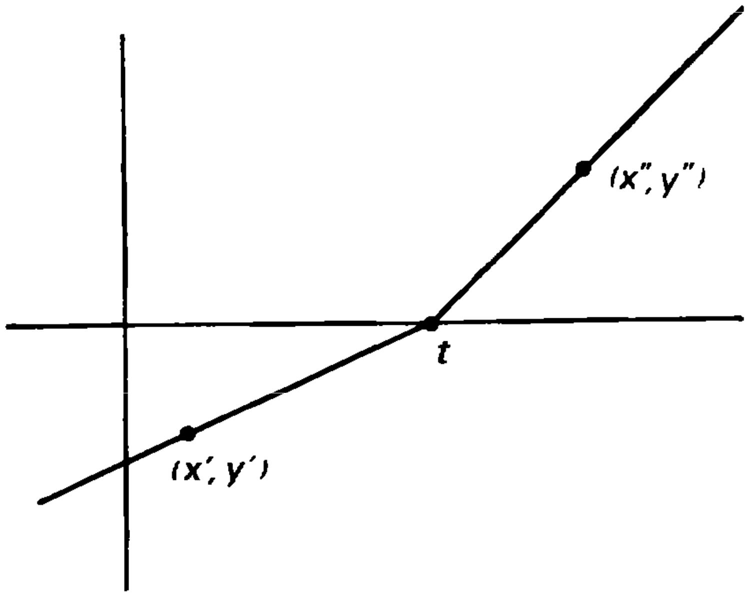
— les droites ordinaires si elles sont horizontales, verticales ou de pente négative ;
— les « droites brisées » d'équations de la forme

(E) $\qquad y = m(x-t)$ pour $x \leqslant t$, $\quad y = 2m(x-t)$ pour $x \geqslant t \; (m > 0)$.



On notera D_{ab}(resp. D'_{ab}) la droite ordinaire (resp. la « droite ») passant par les points a et b ; en effet l'axiome (A'. 1) est vrai ; c'est clair si la pente de ab est négative, nulle ou infinie ; si elle est positive et si l'on appelle (x', y'), (x'', y'') les coordonnées de a et b, c'est encore clair si y' et y'' sont de même signe (tracer la droite joignant a et b jusqu'à Ox et la prolonger au-delà par une demi-droite vérifiant (E)) ; enfin, pour $y' < 0$, $y'' > 0$, donc $x' < x''$, (E) implique qu'on trouve $t \in \mathbf{R}$ tel que $y''/(x''-t) = 2y'/(x'-t)$, équation qui a une seule solution

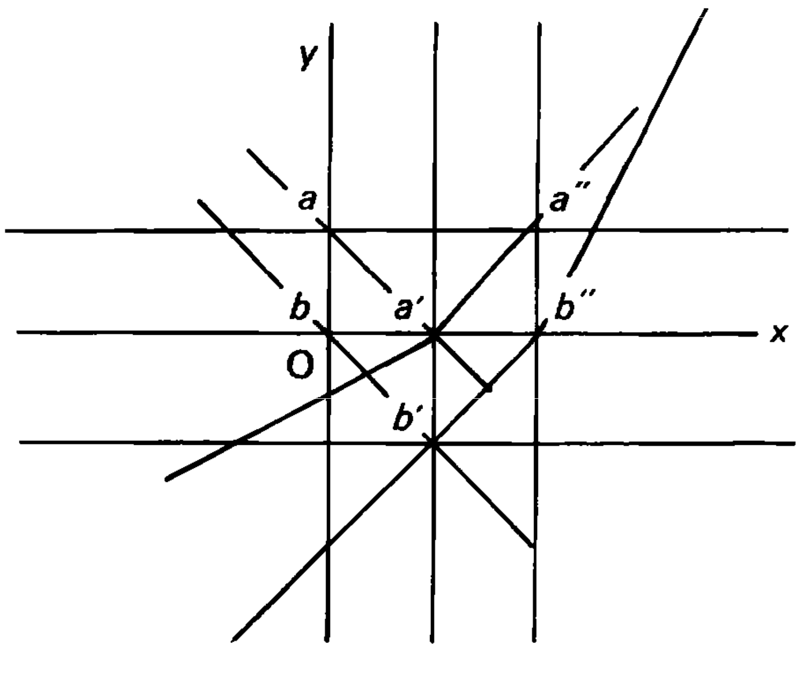
$$t = (x'y'' - 2y'x'')/(y'' - 2y').$$



Pour vérifier l'axiome « d'Euclide » (A′.2), on peut se borner aux « droites brisées » ; soient D, D′ deux telles « droites », de paramètres (m, t), (m', t') dans (E) ; l'éventuel point commun (x, y) à leurs demi-droites « inférieures » (resp. « supérieures ») est tel que $m(x-t)=m'(x-t')$ (resp. $2m(x - t) = 2m'(x - t')$), ce qui est la même équation

$$(m - m')x = mt - m't'.$$

Ainsi D et D′ ont un unique point commun ssi $m \neq m'$; elles sont « parallèles » ssi $m = m'$, c'est-à-dire si elles se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle à Ox. La validité de (A′.2) est alors claire.



Montrons enfin que le plan ainsi obtenu n'est pas arguésien. Prenons pour « droites » D, D′, D″ les verticales d'abscisses 0, 1, 2 et considérons les points a (0, 1), b (0, 0), a' (1, 0), b' (1, −1), a'' (2, 1) et b'' (2, 0). Les « droites » $D'_{aa'}$ et $D'_{bb'}$ sont ordinaires et parallèles ; de même $D'_{aa''}$ et $D'_{bb''}$. Mais les « droites brisées » $D'_{a'a''}$ et $D'_{b'b''}$ qui ont même pente dans le demi-plan inférieur et dans le demi-plan supérieur, ne sauraient être « parallèles ».

b) L'étude des plans (projectifs ou affines) *finis* est liée à des questions de statistique et de combinatoire. Soit q le cardinal commun des droites affines d'un tel plan. Si le plan est arguésien, q est le nombre d'éléments d'un *corps fini* (th. 8) et q est une puissance p^r d'un nombre premier. Comme tout corps fini est commutatif, le th. de Pappus (§ C, th. 6) est vrai.

Il existe des *plans non arguésiens finis*. Par exemple, pour p premier impair et $r \geqslant 2$, on met sur $\mathbf{F}_{p^r}$ la multiplication « tordue » :

$$x \circ y = \frac{1}{2}(u(x)u(y)^p + u(x)^p u(y)) \qquad \text{où} \quad u(x) = \frac{1}{2}(x + x^p).$$

Cette multiplication, qui est bi-additive, fait de $\mathbf{F}_{p^r}$ une algèbre non associative, qui permet de construire un plan non-arguésien. Il y a une construction analogue pour $q = 2^r$ avec $r \geqslant 4$. Pour $q = p$ premier, et pour $q = 4, 8$, seuls les plans arguésiens existent.

On sait peu de choses sur les autres valeurs de q. Des considérations combinatoires montrent qu'il n'y a pas de plan projectif avec $q = 6, 14, 21, 22$. Le cas $q = 10$ semble encore ouvert.

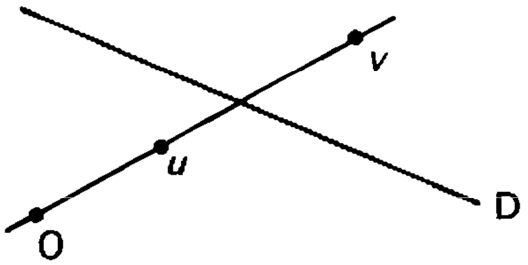
Pour plus de détails voir :

— M. Hall, *The theory of groups* (New York, Macmillan, 1959, chap. 20).
— G. Pickert, *Projektive Ebene* (2ᵉ éd., Springer, 1975).

c) Si un plan projectif peut être *plongé*, comme vlp, dans un espace projectif (axiomatique) de dimension $\geqslant 3$, alors il est *arguésien :* en effet (cf. démonstration du th. 5, § C) toute configuration plane de Desargues peut être regardée comme une « projection » d'une configuration « dans l'espace », où les points I, J, K sont nécessairement alignés sur la droite d'intersection des plans AA′A″ et BB′B″. La réciproque est claire par le th. 8.

d) L'axiome de Desargues est équivalent à *l'existence de suffisamment d'automorphismes du plan projectif* P (ceux-ci sont parfois appelés « collinéations » car ils sont définis par le fait qu'ils transforment points alignés en points alignés). Considérons, par exemple, l'assertion :

(A) *Quels que soient, dans* P, *la droite* D, *le point* O *extérieur à* D, *et les points* u, v *alignés avec* O, *distincts de* O *et extérieurs à* D, *il existe un automorphisme* f *de* P *qui laisse fixes* O *et les points de* D *et tel que* $f(u) = v$.



Elle est vraie pour un plan arguésien : en effet, en prenant D comme droite de l'infini et O pour origine, $P-D$ devient un espace vectoriel sur un corps K (th. 8) et l'homothétie $f(x) = ax$ ($a \in K$) qui amène u en v convient (celle-ci n'est que semi-linéaire lorsque K n'est pas commutatif car, pour b dans K, on a $f(bx) = (aba^{-1})f(x) = s(b)f(x)$ où s est un automorphisme intérieur de K). Réciproquement si, comme dans (A.3), on se donne 3 droites concourantes E, E′, E″, des points u, v, u', v', u'', v'' sur ces droites et les points $i = D_{uu'} \cap D_{vv'}$, $j = D_{uu''} \cap D_{vv''}$ et $k = D_{u'u''} \cap D_{v'v''}$, on prend, dans (A), pour O le point commun à E, E′, E″ et pour D la droite D_{ij} ; l'automorphisme f qui amène u en v transforme $D_{uu'}$ en $D_{vv'}$ (car il laisse i fixe) ; comme, pour tout point x de P, $f(x)$ est aligné avec O et x, $f(u')$ est le point $v' = E' \cap D_{vv'}$; de même $f(u'') = v''$, en raisonnant sur j ; ainsi f transforme $D_{u'u''}$ en $D_{v'v''}$, donc laisse k fixe, de sorte que k est sur D_{ij} (car $k \neq 0$).

Une élégante axiomatique du plan affine, fondée sur les axiomes d'incidence (A′.1) et (A′.2) et sur l'existence de suffisamment d'automorphismes, a été développée par Emil Artin dans :

E. Artin, « Geometric Algebra », Interscience Publ., New York, 1957 (traduction française, par M. Lazard, sous le titre « Algèbre Géométrique »).

§ E / Espaces projectifs d'hyperplans, dualité

Systèmes linéaires d'hyperplans

Rappelons que, si E est un espace vectoriel (à gauche) sur K, l'ensemble E^* des formes linéaires sur E est un espace vectoriel (à droite) sur K, qu'on appelle le *dual* de E. En dimension finie, on a

$$\dim(E^*) = \dim(E). \tag{24}$$

A toute forme linéaire f faisons correspondre son noyau $\mathrm{Ker}(f)$. Si $f \neq 0$, c'est un *hyperplan* de E. Deux formes linéaires f, f' ont même noyau ssi elles sont proportionnelles, $f' = fc$ avec c dans K. *Ainsi l'ensemble des hyperplans de* E, *ou de* P(E) *ce qui revient au même, s'identifie à l'espace projectif* $\mathbf{P}(E^*)$. Nous supposerons P(E) de *dimension finie n.*

Si l'on a des coordonnées homogènes dans P(E) — provenant, disons, d'une base de E — l'hyperplan d'équation $x_0u_0 + \ldots + x_nu_n = 0$ a pour coordonnées homogènes $(u_0, \ldots, u_n)$ dans le système qui provient de la base duale de la base donnée sur E.

Une vlp S de $\mathbf{P}(E^*)$ s'appelle un *système linéaire d'hyperplans* ; si $\dim(S) = 1$ (resp. 2) on l'appelle un *faisceau* (resp. *réseau*) linéaire d'hyperplans.

THÉORÈME 9. — *Etant donné un système linéaire* S *d'hyperplans de* P(E), *il existe une vlp* B(S) *telle que* S *soit l'ensemble des hyperplans contenant* B(S) *(la « base » de* S*). On a* $\dim(B(S)) = \dim(P(E)) - \dim(S) - 1$.

Raisonnons au niveau des espaces vectoriels. Rappelons que, si W est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel V, l'ensemble W′ des formes linéaires nulles sur W est un sous-espace de V*, qui s'identifie au dual de V/W ; d'où $\dim(W') = \mathrm{codim}(W)$ par (24). Appliquons cela au sous-espace T de E* d'où provient S. Notons (« bidualité ») que chaque élément x_0 de E définit une forme linéaire sur E* (la valeur en x_0 de la forme $f \in E^*$), de sorte que, par (24), E s'identifie au dual de E*. Ainsi le sous-espace T′ de E est l'ensemble des zéros communs aux formes linéaires $f \in T$, c'est-à-dire l'intersection des hyperplans correspondants. L'ensemble $(T')'$ des formes linéaires nulles sur T′ contient évidemment T ; comme $\dim((T')') = \mathrm{codim}(T') = \dim(T)$, on a $(T')' = T$. En posant $B(S) = p(T')$, on voit donc que les hyperplans de S ne sont autres que ceux qui contiennent B(S). Comme

$$\dim(B(S)) = \dim(T') - 1 = \mathrm{codim}(T) - 1 = \dim(E) - \dim(T) - 1,$$

la formule sur les dimensions est démontrée.

Exemples. — Un faisceau (resp. réseau) d'hyperplans est formé par les hyperplans qui contiennent une vlp de codimension 2 (resp. 3). Dans un espace de dimension 3, un faisceau (resp. réseau) de plans est l'ensemble des plans qui passent par une droite (resp. un point). Dans le plan, un faisceau de droites est formé de droites concourantes ; dans le plan affine, il y a les faisceaux de droites concourantes et les faisceaux de droites parallèles (dont le point base est à l'infini).

Dualité

Tout théorème sur les vlp d'un espace projectif s'applique évidemment aux systèmes linéaires d'hyperplans. A la notion de vlp engendrée par des points a_i correspond celle de plus petit système linéaire contenant les hyperplans H_i, c'est-à-dire, en vertu du th. 9, l'*intersection* des H_i. Inversement, à une intersection de vlp correspond une intersection de systèmes linéaires S_i et la base de celle-ci est la vlp engendrée par les bases $B(S_i)$ (th. 9). Ces remarques permettent d'établir un « *dictionnaire* » traduisant en termes de systèmes linéaires d'hyperplans des énoncés généraux sur les vlp. Explicitons ce dictionnaire dans le cas du plan :

Point	Droite
Droite	Faisceau de droites, point base du faisceau
Points alignés	Droites concourantes
Droite par deux points	Intersection de deux droites.

A cause de la bidualité, ce tableau se lit dans les deux sens.

A titre d'exemple, effectuons la traduction des théorèmes de Desargues et de Pappus (th. 5 et 6, § C) :

1) Soient D, D′, D″ trois droites concourantes.	Soient a, a', a'' trois points alignés.
Prenons des points a, b sur D, a', b' sur D′, a'', b'' sur D″.	Soient D, E des droites par a, D′, E′ des droites par a', D″, E″ des droites par a''.
Soit i (resp. j, k) le point d'intersection des droites aa' et bb' (resp. aa'' et bb'', $a'a''$ et $b'b''$).	Soit I (resp. J, K) la droite joignant les points $D \cap D'$ et $E \cap E'$ (resp. $D \cap D''$ et $E \cap E''$, $D' \cap D''$ et $E' \cap E''$).
Alors i, j, k sont alignés.	Alors I, J, K sont concourantes.
2) On suppose K commutatif.	On suppose K commutatif.
Soient D, D′ deux droites, a, b, c des points de D, a', b', c' des points de D′.	Soient a et a' deux points, A, B, C des droites passant par a, A′, B′, C′ des droites passant par a'.
Soit i (resp. j, k) le point commun aux droites ab' et ba' (resp. ac' et ca', bc' et cb').	Soit I (resp. J, K) la droite joignant les points $A \cap B'$ et $B \cap A'$ (resp. $A \cap C'$ et $C \cap A'$, $B \cap C'$ et $C \cap B'$).
Alors i, j, k sont alignés.	Alors I, J, K sont concourantes.

L'origine de cette dualité entre points et droites a suscité des controverses entre les géomètres de la première partie du 19e siècle. Les uns, comme Gergonne, la fondaient sur l'identité des équations linéaires portant sur les coordonnées de points d'une part, sur les coordonnées de droites d'autre part (ex. joindre deux points et intersecter deux droites) ; en termes contemporains, cela revient à dire que l'espace projectif des points et celui des droites ont la *même structure*, ce qui est le point de vue exposé ici. Poncelet, au contraire, fondait cette dualité sur la « transformation par polaires réciproques » par rapport à une conique (cf. chap IV, § C), ce qui revient essentiellement à se donner, grâce à une forme quadratique non dégénérée, un *isomorphisme* d'un espace vectoriel (ou projectif) sur son dual. Comme Poncelet était général commandant l'Ecole Polytechnique, et Gergonne simple capitaine d'artillerie, c'est le point de vue de Poncelet qui a prévalu, au moins parmi leurs contemporains français. Bien qu'allant moins au fond des choses, le point de vue de Poncelet est bien adapté aux questions métriques (cf. chap. IV, § D).

§ F / L'espace projectif des cercles

Coordonnées affines et homogènes

Dans un repère orthonormé, un cercle du plan affine euclidien (réel) E a une équation de la forme $x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$. Afin de prendre aussi en compte les cercles sans points réels (comme $x^2 + y^2 + 1 = 0$), il y a intérêt à passer au complexifié E_C de E. Afin d'étudier aussi des transformations, comme les inversions (voir ci-dessous), qui font intervenir les points à l'infini, il y a aussi intérêt à se placer dans la clôture projective de E_C, qui est essentiellement $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ et à « rendre homogènes » les coefficients des équations des cercles. Bref, nous appellerons « *cercle* », l'ensemble des points de $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ dont les coordonnées homogènes (x, y, t) satisfont à une équation de la forme :

$$a(x^2 + y^2) + bxt + cyt + dt^2 = 0 \tag{24}$$

où $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$. Deux équations de ce type définissent le même ensemble ssi elles sont proportionnelles. Plus généralement :

THÉORÈME 10. — *Deux équations homogènes de degré 2,* $\mathrm{F}(x, y, t)=0$ *et* $\mathrm{G}(x, y, t)=0$ *qui définissent la même partie* C *d'un plan projectif* P *sur un corps algébriquement clos sont proportionnelles.*

Si F est le carré d'une forme linéaire, C est une droite (« comptée 2 fois »), qui détermine la forme linéaire à un facteur près. Sinon

C contient 3 points non alignés, qu'on prend pour points base de P. Les équations sont alors de la forme

$$uxy + vyt + wtx = 0 \qquad u'xy + v'yt + w'tx = 0$$

Si u (resp. v, w) est nul, C est réunion de deux droites ($t = 0$ et une autre), d'où l'assertion. Sinon, pour les points « à distance finie » ($t \neq 0$) de C, on a les relations affines $y = -wx/(ux+v) = -w'x(u'x+v')$; d'où, pour une infinité de valeurs de x, $(wu' - uw')x^2 + (wv' - vw')x = 0$, ce qui implique $u'/u = v'/v = w'/w$. CQFD.

Nous verrons au chap. III sous quelles conditions la conclusion reste valable sur un corps quelconque. Elle n'est pas vraie, au sens strict, pour des équations de degré $\geqslant 3$, car $x^2y = 0$ et $xy^2 = 0$ définissent la même réunion de deux droites ; voir cependant le § H.

Un cercle est donc caractérisé par le point de coordonnées homogènes (a, b, c, d) de l'espace projectif $\mathbf{P}_3$, de sorte que *les cercles forment un espace projectif de dimension 3*. Dans cette optique, on a inclus, sous le nom de « cercles » :

— les « vrais » cercles, $a \neq 0$;
— les réunions de la droite de l'infini et d'une autre droite ($a=0$, $(b, c) \neq (0, 0)$) ;
— la droite de l'infini comptée deux fois ($(a, b, c) = (0, 0, 0)$, $d \neq 0$).

Appelons « *conique* » l'ensemble des points d'un plan projectif dont les coordonnées homogènes satisfont à une équation de degré 2. Alors :

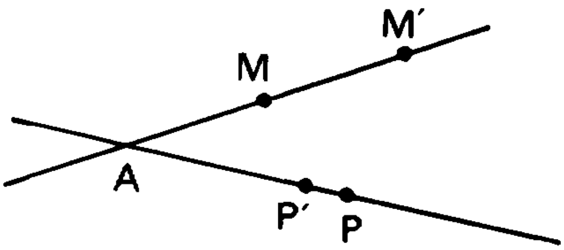
THÉORÈME 11. — *Une conique* C *de* $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ *est un cercle ssi elle passe par les points* (x, y, t) *tels que* $x^2 + y^2 = t = 0$ (*coordonnées homogènes* $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$).

Soit $ax^2 + bxy + cy^2 + dxt + eyt + ft^2 = 0$ l'équation de C. Son intersection avec la droite de l'infini $t = 0$ est définie par l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$; les racines (en y/x) de celle-ci sont i et $-i$ ssi $b=0$ et $a=c$ (somme nulle, produit 1). CQFD.

Les points à l'infini, $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$, communs à tous les cercles, s'appellent les *points cycliques*. Leur caractérisation montre qu'ils sont indépendants du repère orthonormé choisi dans le plan affine. Une droite dont le point à l'infini est cyclique est dite *isotrope* ; les vecteurs parallèles à ces droites sont ceux sur qui la forme quadratique $x^2 + y^2$ s'annulle ; on les appelle *isotropes* (comme dans la théorie des formes quadratiques). Les droites isotropes issues du centre d'un vrai cercle sont tangentes à ce cercle aux points cycliques (par symétrie par rapport au centre) ; on peut donc dire que ce sont les *asymptotes* du cercle.

Inversions

Etant donnés un point A d'un plan euclidien réel E et un nombre réel $k \neq 0$, on appelle *inversion de pôle* A *et de puissance* k l'application qui, à tout point $M \neq A$ du plan, fait correspondre le point M′ de D_{AM} tel que $\overline{AM}.\overline{AM'} = k$. C'est une permutation *involutive* de $P - A$.



Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ vaut $(k/\overline{AM}^2)\overrightarrow{AM}$. Dans un repère orthonormé d'origine A, l'inversion se traduit donc par les formules

$$x' = kx/(x^2 + y^2), \qquad y' = ky/(x^2 + y^2). \tag{25}$$

On *prolonge* cette transformation à $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ en faisant correspondre, autant que c'est possible, au point de coordonnées homogènes (x, y, t) le point de coordonnées homogènes (x', y', t') données par :

$$x' = kxt, \qquad y' = kyt, \qquad t' = x^2 + y^2$$
(on rend x', y' homogènes). (26)

Cette transformation est définie en dehors du pôle A et des points cycliques I, J. Tout autre point de la droite de l'infini D_{IJ} (resp. de D_{AI}, de D_{AJ}) a pour image A (resp. I, J). Dans le complémentaire de la réunion de ces 3 droites, l'inversion donne une permutation involutive. Ses points fixes sont ceux du cercle $x^2 + y^2 = k$ (« cercle d'inversion » ; il a des points réels ssi $k > 0$).

Voyons comment un cercle se transforme par inversion. En reportant dans (24) (avec coordonnées x', y', t') les valeurs de x', y', t' données par (26), on obtient $ak^2t^2(x^2+y^2)+(bkxt+ckyt)(x^2+y^2)+d(x^2+y^2)^2=0$. On supprime le facteur parasite $x^2 + y^2$ (qui correspond aux points des droites isotropes, dont les images sont les points cycliques) et l'on obtient l'équation :

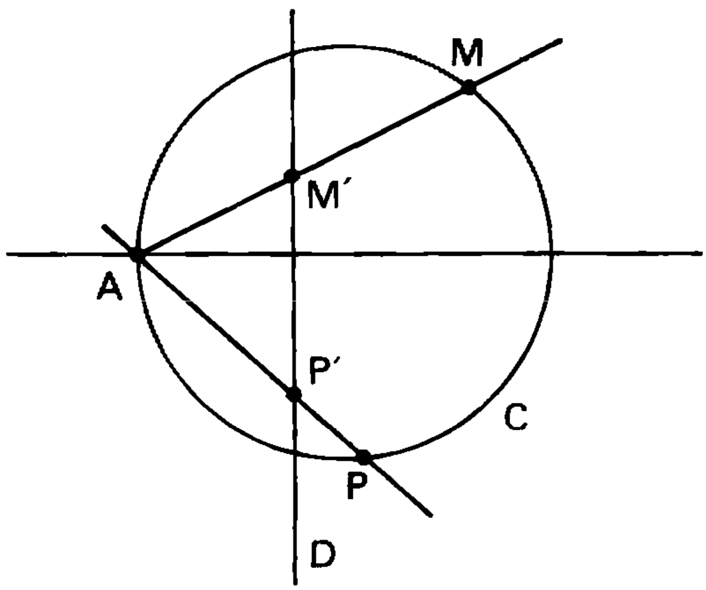
$$d(x^2 + y^2) + bkxt + ckyt + ak^2t^2 = 0. \tag{27}$$

THÉORÈME 12. — *L'inversion de pôle* A *(pris comme origine) et de puissance k transforme le cercle de coordonnées homogènes* (a, b, c, d) *en celui de coordonnées homogènes* (d, kb, kc, k^2a).

L'inversion donne donc une *homographie involutive* de l'espace des cercles. L'examen de (24) et (27) montre que :

— à un vrai cercle ne passant pas par A ($a \neq 0$, $d \neq 0$) correspond un vrai cercle ne passant pas par A ;
— à un vrai cercle passant par A ($a \neq 0$, $d = 0$) correspond la réunion de la droite de l'infini et d'une autre droite (et inversement, c'est involutif) ;
— à la droite de l'infini comptée 2 fois ($a=b=c=0$, $d \neq 0$) correspond la réunion ($x^2 + y^2 = 0$) des deux isotropes de A, qui est le « cercle de rayon nul » de centre A (et inversement).

On pourra noter que l'autre droite correspondant à un cercle C passant par A est *orthogonale* à la droite qui joint A au centre de ce cercle (car la figure est symétrique par rapport à cette droite ; on peut aussi faire le facile calcul).



Orthogonalité

Un cercle d'équation affine $x^2+y^2-2ux-2vy+w=0$ a (u, v) pour centre et u^2+v^2-w pour carré du rayon. L'orthogonalité de ce cercle avec celui d'équation $x^2+y^2-2u'x-2v'y+w'=0$ s'exprime par « carré de la distance des centres = somme des carrés des rayons », c'est-à-dire par $(u-u')^2+(v-v')^2 = u^2+v^2-w+u'^2+v'^2-w'$, ou encore

$2(uu' + vv') - (w + w') = 0$. Pour deux cercles C, C′ de coordonnées homogènes (a, b, c, d), (a', b', c', d') *l'orthogonalité se traduit par :*

$$bb' + cc' - 2(ad' + da') = 0 \tag{28}$$

(prendre $u = -b/2a$, $v = -c/2a$, $w = d/a$, etc. et multiplier par aa').

En tenant compte des cercles « dégénérés », (28) donne les propriétés suivantes (où D_0 désigne la droite de l'infini) :

a) C de rayon nul et C′ quelconque ($\neq 2D_0$) sont orthogonaux ssi le centre de C est sur C′ ;
b) un vrai cercle C et $D + D_0$ sont orthogonaux ssi D passe par le centre de C ;
c) $D + D_0$ et $D' + D_0$ sont orthogonaux ssi les droites D, D′ sont orthogonales ;
d) C est orthogonal à $2D_0$ ssi C est de la forme $D + D_0$.

Tout cela, en particulier (*b*) et (*c*), est très raisonnable. On peut dire que le centre d'un « cercle » de la forme $D + D_0$ est à l'infini dans la direction orthogonale à D.

Le premier membre de (28) est une *forme bilinéaire symétrique.* Sa forme quadratique associée est $b^2 + c^2 - 4ad$ et est donc *non dégénérée.* Ses éléments isotropes ($b^2 + c^2 - 4ad = 0$) correspondent aux cercles de rayon nul ($u^2 + v^2 - w = 0$ avec les notations du début).

Remarque. — Lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux vrais cercles et qu'à leurs points réels, on peut faire correspondre au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + w = 0$ le point (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$. Sa projection (u, v) est le centre du cercle. Les cercles de rayon nul correspondent aux points du paraboloïde de révolution $w = u^2 + v^2$, les cercles sans point réel aux points intérieurs au paraboloïde et les cercles ordinaires aux points extérieurs. L'orthogonalité des cercles correspond à la conjugaison par rapport au paraboloïde (cf. chap. IV).

Faisceaux et réseaux de cercles

Un faisceau (resp. *réseau*) *de cercles est une droite* (resp. *un plan*) *de l'espace projectif* $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ *des cercles.*

Si $F(x, y, t) = 0$ et $G(x, y, t) = 0$ sont des équations de deux cercles (distincts) d'un faisceau, *l'équation générale* des cercles du faisceau est

$$uF(x, y, t) + vG(x, y, t) = 0 \tag{29}$$

(où $(u, v) \neq (0, 0)$ et où deux couples (u, v) proportionnels donnent le même cercle). Les points communs aux cercles $F = 0$ et $G = 0$ sont communs à tous les cercles du faisceau ; on les appelle les *points base* du faisceau ; les points cycliques I et J sont parmi eux.

THÉORÈME 13. — *Par tout point* (x_0, y_0, t_0) *distinct des points base d'un faisceau de cercles, il passe un cercle et un seul du faisceau.*

En effet si, par exemple, $F(x_0, y_0, t_0) \neq 0$, on prend $u = G(x_0, y_0, t_0)$ et $v = -F(x_0, y_0, t_0)$ dans (29).

La bilinéarité de la relation (28) d'orthogonalité des cercles montre aussitôt que, si un cercle est orthogonal à deux cercles d'un faisceau, il est orthogonal à tous les cercles de ce faisceau. Plus précisément, les résultats classiques sur l'orthogonalité des sous-espaces vectoriels par rapport à une forme bilinéaire non dégénérée se traduisent par :

THÉORÈME 14. — *a) L'ensemble des cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau* F *est un faisceau* F', *appelé l'orthogonal de* F. *L'orthogonal de* F' *est* F.

b) Un réseau de cercles est l'ensemble des cercles orthogonaux à un cercle donné.

Si ce cercle est de la forme $D + D_0$, le réseau est l'ensemble des cercles centrés sur D (plus les droites orthogonales à D) ; s'il est de rayon nul, le réseau est l'ensemble des cercles qui passent par son centre.

Passons maintenant à la *classification des faisceaux de cercles.* Si un faisceau F contient deux cercles décomposés, $D_0 + D$ et $D_0 + D'$, t est en facteur dans l'équation (29), la droite de l'infini D_0 est formée de points base et le reste de F est un *faisceau de droites* (concourantes ou parallèles).

Sinon, comme une combinaison linéaire convenable des termes en $x^2 + y^2$ dans (29) les fait disparaître, le faisceau F contient un seul cercle décomposé $D + D_0$; la droite D s'appelle l'*axe radical* du faisceau F, qui est donc déterminé par la donnée de D et d'un vrai cercle C du faisceau.

Le cercle de coordonnées homogènes (a, b, c, d) a pour centre le point de coordonnées homogènes $(b, c, -2a)$, triplet qui est fonction linéaire de (a, b, c, d). Donc, si le cercle C parcourt un faisceau F, son centre parcourt une droite L, ou est fixe. S'il est fixe, on a affaire à un faisceau de *cercles concentriques*, d'équation générale

$$u((x - x_0t)^2 + (y - y_0t)^2) + vt^2 = 0 ;$$

son axe radical est la droite à l'infini D_0.

Sinon la droite L s'appelle la *ligne des centres* du faisceau. Elle est orthogonale à l'axe radical D car le « centre » de D + D_0 est à l'infini dans la direction orthogonale à D. Pour classifier les faisceaux de cercles à coefficients réels, nous prendrons L pour axe Ox, et D pour axe Oy ; le faisceau sera défini par D et par un cercle (réel ou imaginaire) de centre O, de sorte que son équation générale (affine) est de la forme :

$$x^2 + y^2 - k - 2wx = 0. \tag{30}$$

Le centre du cercle C_w correspondant au paramètre w est $(w,0)$; son carré de rayon est $k + w^2$. Trois cas peuvent se présenter suivant le signe de k :

1) $\underline{k > 0}$. — Le cercle C_0 est réel, de rayon $k^{\frac{1}{2}}$. Il coupe l'axe radical en deux points réels A et B, de coordonnées $(0, k^{\frac{1}{2}})$, $(0, -k^{\frac{1}{2}})$, qui sont les points base (non cycliques) du faisceau. On dit alors que le faisceau est un *faisceau à points base*. Il est formé de tous les cercles passant par A et B (car on voit facilement que (30) est leur équation générale). Aucun cercle à centre réel du faisceau n'est de rayon nul.

2) $\underline{k < 0}$. — Le cercle C_0 est imaginaire. Les points base du faisceau sont complexes conjugués. La puissance de O par rapport aux cercles du faisceau est la constante positive $-k$, de sorte que O est extérieur à ces cercles. Le cercle C_w a des points réels ssi $w \geqslant (-k)^{\frac{1}{2}}$. Les cercles de rayon nul ayant pour centres les points $((-k)^{\frac{1}{2}}, 0)$ et $(-(-k)^{\frac{1}{2}}, 0)$ font partie du faisceau ; on les appelle les *points de Poncelet* du faisceau et on dit qu'on a affaire à un *faisceau à points de Poncelet*.

3) $\underline{k = 0}$. — Alors (30) est l'équation générale des cercles tangents en O à l'axe radical Oy. Le seul point base non cyclique est O (mais on le compte 2 fois en lui adjoignant, comme on dit, son « point infiniment voisin » dans la direction de Oy). On dit qu'on a affaire à un *faisceau de cercles tangents*.

Voyons quels sont les *faisceaux orthogonaux* aux faisceaux décrits.

— Droites concourantes en A	Cercles concentriques de centre A
— Droites parallèles	Droites parallèles de direction orthogonale.

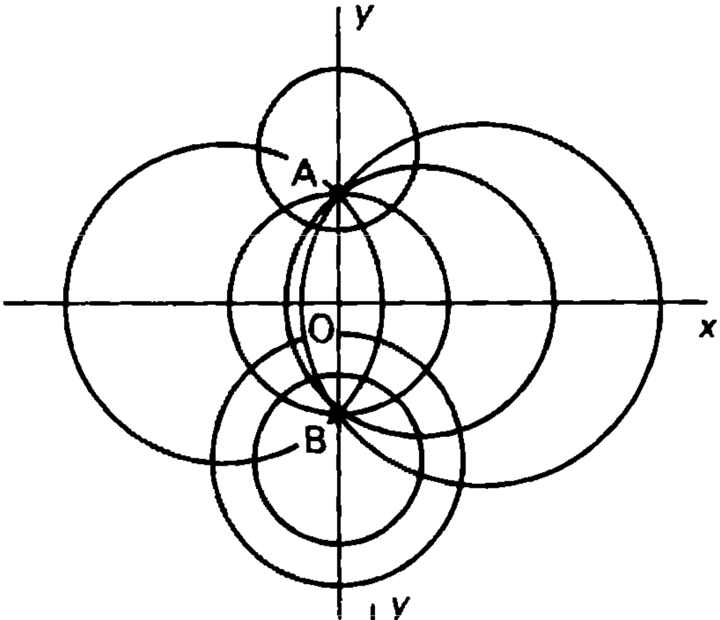
Pour les faisceaux d'équation générale (30), remarquons que la ligne des centres Ox et le cercle $x^2 + y^2 + k = 0$ sont orthogonales à tous les cercles du faisceau (30) ; le faisceau orthogonal a donc pour équation générale :

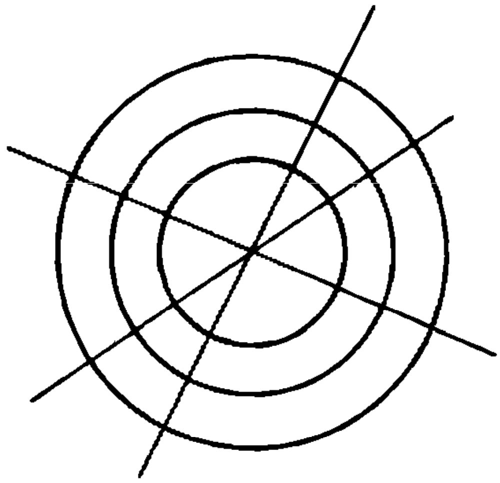
$$x^2 + y^2 + k - 2w'y = 0 . \tag{31}$$

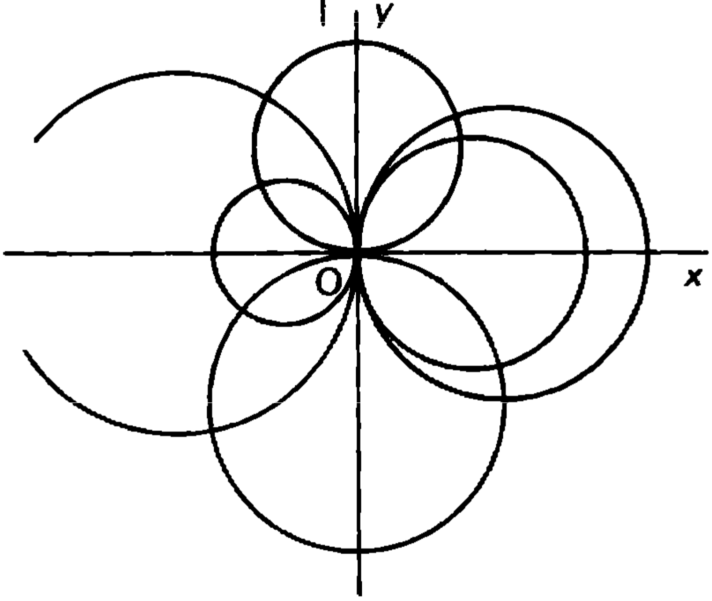
La ligne des centres et l'axe radical sont *échangés.* Comme k a été changé en $-k$, les trois types ci-dessus s'échangent :

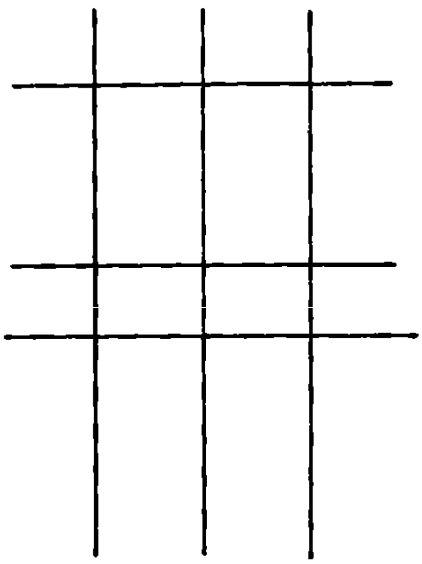
— Faisceau à points base	Faisceau à points de Poncelet
— Faisceau à points de Poncelet	Faisceau à points base
— Faisceau de cercles tangents	Faisceau de cercles tangents.

Les points base d'un faisceau sont les points de Poncelet de l'orthogonal.









Enfin, comme une *inversion* est une homographie de l'espace des cercles, elle transforme faisceaux en faisceaux, ce qui permet de simplifier l'étude des faisceaux en les ramenant à des « formes réduites ». La relation d'orthogonalité (28) étant conservée par inversion (th. 12), deux faisceaux orthogonaux sont transformés en faisceaux orthogonaux. Si F est un faisceau de points base A et B, une inversion j de pôle A transforme F en le faisceau des droites passant par j(B). Par orthogonalité, un faisceau de points de Poncelet A et B est transformé par j en le faisceau des cercles concentriques de centre j(B). Enfin un faisceau de cercles tangents en O à une droite est transformé par une inversion de pôle O en un faisceau de droites parallèles à celle-ci.

§ G / L'espace projectif des coniques

Irréductibilité

Une *conique* est l'ensemble des points d'un plan projectif P (sur un corps commutatif K) dont les coordonnées homogènes (x, y, t) satisfont à une équation homogène du second degré :

$$F(x, y, t) = ax^2 + by^2 + ct^2 + a'yt + b'xt + c'xy = 0. \tag{32}$$

L'ensemble des points de la conique détermine la forme quadratique F à un facteur près lorsque K est algébriquement clos (th. 10, § F) et dans bien d'autres cas (voir chap. III, § A).

La conique est dite *irréductible* (ou non décomposée, non dégénérée, vraie) si le polynôme F est irréductible sur la clôture algébrique de K. Sinon F est produit de deux formes linéaires, de sorte que la conique est :

— soit la réunion de deux droites distinctes ;
— soit une droite « comptée deux fois » (lorsque F est proportionnelle à un carré).

THÉORÈME 15. — *Une conique* C *est irréductible ssi tous ses points sont simples.*

En effet, si C est décomposée en deux droites (distinctes ou confondues), tout point commun à ces deux droites est double (cf. § C). Inversement, si C admet un point multiple A, la droite qui le joint à un autre point de C a au moins 3 points communs avec C, et est donc contenue dans C (voir § C, p. 26) ; ce qui reste de C est alors une droite. CQFD.

Ainsi C est *décomposée* ssi les équations $F'_x = F'_y = F'_t = 0$, $F = 0$

ont une solution commune non nulle. Cela implique que le déterminant des 3 premières, qui sont linéaires, est nul, soit :

$$\begin{vmatrix} 2a & c' & b' \\ c' & 2b & a' \\ b' & a' & 2c \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

En vertu de l'identité d'Euler, cette condition suffit en caractéristique $\neq 2$; elle exprime d'ailleurs que la forme quadratique F est dégénérée (donc de rang 1 ou 2).

En caractéristique 2, les 3 équations linéaires ($2ax+c'y+b't=0$, etc.) ont toujours la solution (a', b', c') et l'on voit sans malice que c'est la seule (à un facteur près) à moins que $a'=b'=c'=0$, cas où F est un carré sur la clôture algébrique de K. Donc C est décomposée ssi on a $F(a', b', c') = 0$, c'est-à-dire :

$$aa'^2 + bb'^2 + cc'^2 + a'b'c' = 0\,.$$

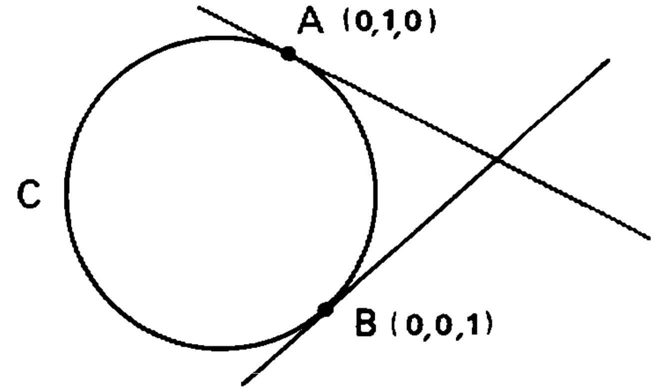
Le point (a', b', c') est également intéressant lorsque la conique C (toujours en caractéristique 2) est irréductible : *toutes les tangentes à* C *passent par ce point* ! En effet (voir la formule (23) de la tangente § C, p. 26), on a

$$\begin{aligned} a'F'_x+b'F'_y+c'F'_t &= a'(c'y+b't)+b'(c'x+a't)+c'(b'x+a'y) \\ &= 2a'c'y+2b'c'x+2b'a't=0\,. \end{aligned}$$

Intersection de deux coniques

THÉORÈME 16. — *A moins qu'elles n'aient une droite en commun, deux coniques distinctes* C, C′ *ont au plus 4 points communs, et exactement 4 si on les compte avec leurs multiplicités et que* K *est algébriquement clos.*

C'est clair si l'une au moins des coniques est décomposée. Sinon, l'on prend un point A de C qui n'est pas sur C′ et un autre point B de C. On prend A pour point base (0, 1, 0), la tangente en A pour droite de l'infini, B pour point base (0, 0, 1) et l'intersection de la droite de l'infini avec la tangente en B comme dernier point base (1, 0, 0). Prenons (32) comme équation de (C). L'examen de son intersection avec la droite de l'infini $t = 0$ montre qu'on a $b = c' = 0$; de même, en exprimant que $y = 0$ est tangente en (0, 0, 1), on voit que $c = b' = 0$. L'équation de C se réduit donc à $ax^2 + a'yt = 0$. Comme C et C′ n'ont pas de point commun à l'infini, on passe en coordonnées affines, où en remplaçant y par $-a'y/a$, l'équation de C est $y = x^2$ (la plus simplette des paraboles !). En reportant dans l'équation de C′, on obtient une équation en x qui



est exactement de degré 4 car le terme uy^2 de l'équation de C′ est non nul, puisque (0, 1, 0) n'est pas sur C′.

La géométrie élémentaire nous a porté à croire que deux *cercles* ont au plus 2 points communs (de multiplicité 1). Les deux autres sont les *points cycliques* (§ F) ; mais on ne les « voit » pas car ils sont à l'infini et, pire encore, imaginaires.

THÉORÈME 17. — *Par 5 points distincts du plan projectif tels qu'aucune droite ne contienne 4 d'entre eux, il passe une conique et une seule.*

Le passage par les 5 points (x_i, y_i, t_i) $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ s'exprime par 5 équations linéaires homogènes en les 6 coefficients a, b, c, a', b', c' de l'équation (32) de la conique. Celles-ci ont une solution non triviale mais il n'est pas évident qu'elle soit unique à un facteur près (c'est-à-dire que les 5 équations sont indépendantes). Supposons donc que deux coniques distinctes, C et C′, passent par les 5 points. D'après le th. 16, elles ont une droite D en commun. Par hypothèse, D contient au plus 3 des 5 points ; au moins 2 autres sont en dehors de D ; ils déterminent donc de façon unique la seconde droite dont se composent C et C′ ; d'où C = C′. CQFD.

Si 4 des 5 points sont sur une droite D, toute réunion de D et d'une droite passant par le cinquième point répond à la question.

Systèmes linéaires de coniques

En appelant coordonnées homogènes d'une conique les 6 coefficients (a, b, c, a', b', c') de son équation, on voit que les coniques forment un *espace projectif de dimension 5*. Ses vlp sont appelées des systèmes linéaires de coniques, des faisceaux et des réseaux en dimensions 1 et 2. Les cercles forment un système linéaire de coniques de dimension 3 :

ce sont, rappelons-le, les coniques qui passent par les points cycliques I et J.

Pour étudier les coniques qui passent par 2 points du plan projectif, il peut être commode d'effectuer une homographie qui les envoie aux points cycliques. On est alors ramené à une étude de cercles.

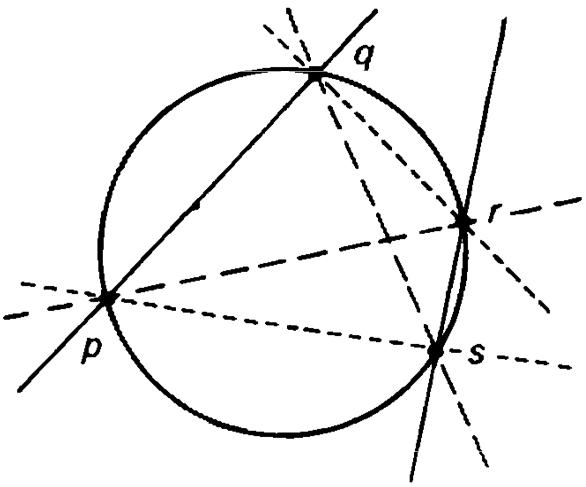
Un *faisceau de coniques* a une équation générale de la forme

$$uF(x, y, t) + vG(x, y, t) = 0, \tag{33}$$

où F et G sont des polynômes homogènes de degré 2 non proportionnels, où $(u, v) \neq (0, 0)$ et où deux couples (u, v) proportionnels donnent la même conique. Un faisceau est uniquement déterminé par 2 coniques qui lui appartiennent. Les points tels que $F(x, y, t) = G(x, y, t) = 0$ sont communs à toutes les coniques du faisceau ; on les appelle ses *points base.* Comme pour les cercles (th. 13, § F) on voit que, par tout point distinct des points base, il passe une conique et une seule du faisceau.

Nous écarterons le cas où l'ensemble des points base du faisceau contient une droite D : alors le premier membre de l'équation de D est en facteur dans (33) et les coniques du faisceau sont réunions de D et d'une droite D′ qui parcourt un faisceau de droites. Dans le cas contraire, un faisceau de coniques a *au plus 4 points base* (th. 16).

Le cas le plus général est celui d'un faisceau ayant *quatre points base distincts*, p, q, r, s. Trois d'entre eux ne sauraient être sur une même



droite D car, ayant au moins 3 points communs avec toute conique du faisceau, D serait contenue dans celles-ci, cas qui a été écarté. Les coniques décomposées du faisceau ne peuvent être que $D_{pq} + D_{rs}$, $D_{pr} + D_{qs}$ et $D_{ps} + D_{qr}$. En prenant p, q, r, s comme points base et point unité d'un repère du plan, l'équation générale du faisceau prend la forme réduite :

$$ux(y - t) + vy(x - t) = 0 \tag{34}$$

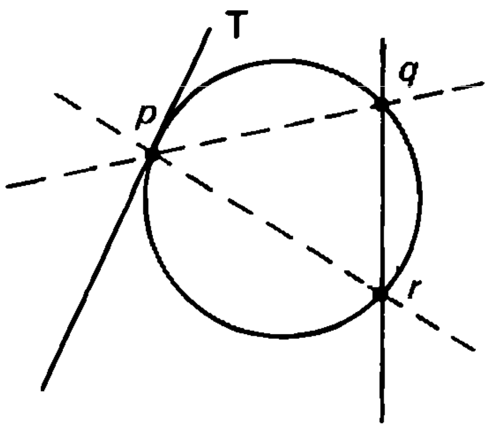
Réciproquement :

Théorème 18. — *Les coniques passant par 4 points, tels qu'aucune droite ne contienne 3 d'entre eux, forment un faisceau.*

On prend un repère où ces points sont points base et point unité. Les coniques passant par les 3 points base ont des équations de la forme $axy + byt + ctx = 0$ (et forment donc un réseau). Le passage par le point unité (1, 1, 1) s'exprime par $a + b + c = 0$, d'où (34) avec $u = -c$ et $v = -b$.

On peut aussi considérer 2 coniques (décomposées par exemple), $F = 0$ et $G = 0$, passant par les 4 points et le faisceau $uF + vG = 0$. Si une conique C passe par les 4 points, on prend un 5ᵉ point m dessus et l'on considère l'unique conique C′ du faisceau qui passe par m. Comme elles ont 5 points communs non alignés, C et C′ coïncident (th. 16).

Si un faisceau a *trois points base p, q, r*, ils ne sont pas alignés (sinon on est dans le cas écarté). En l'un d'eux, p par exemple, deux coniques quelconques du faisceau doivent avoir une intersection de multiplicité 2 ; comme la seule conique du faisceau ayant p pour point double ne peut être que $D_{pq} + D_{pr}$, les autres sont toutes tangentes entre elles en p,

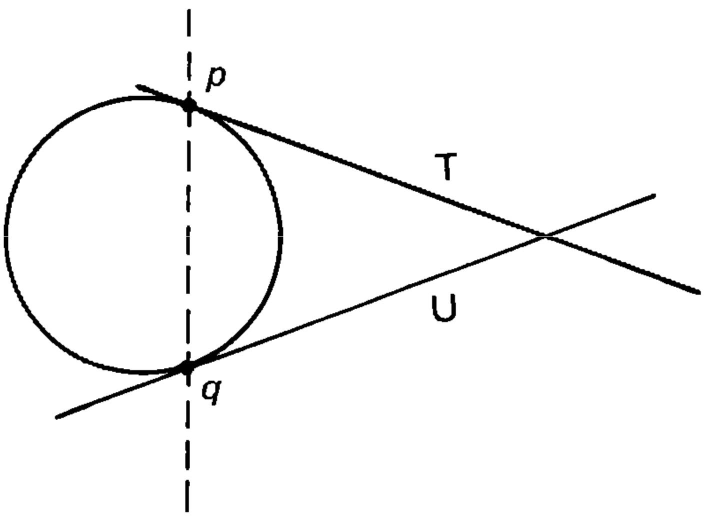


donc toutes tangentes à une même droite T passant par p. Alors il n'y a qu'une autre conique décomposée dans le faisceau : $T + D_{qr}$. En prenant un repère où p, q, r sont les points base ($p = (0, 0, 1)$) et où le point unité est sur T, l'équation générale du faisceau prend la forme réduite

$$uxy + vt(y - x) = 0 .$$

Exemple : un faisceau de cercles tangents (q et r sont les points cycliques et p est le point de contact des cercles).

Si un faisceau a *deux points base* p, q, deux cas peuvent se produire : ou bien les coniques du faisceau se coupent avec multiplicité 2 en p et en q ; ou bien elles se coupent avec multiplicité 1 en p et 3 en q. Dans le *cas* (*2, 2*), les seules coniques du faisceau susceptibles d'avoir un point double en p sont de la forme $2D_{pq}$ ou $D_{pq} + D'$; mais il y en a une seule de ce type sinon on est dans le cas qu'on a écarté ; de même en q ; mais la présence dans le faisceau de $D_{pq} + D'$ et $D_{pq} + D''$ (D' passant par p et D'' par q) est exclue car le faisceau aurait alors un 3[e] point base,

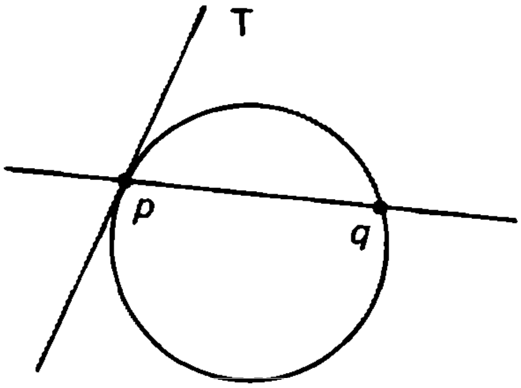


$D' \cap D''$. Ainsi $2D_{pq}$ est la seule conique du faisceau à avoir des points doubles en p et en q. Les autres sont toutes tangentes en p à une même droite T, et en q à une même droite U (« faisceau de coniques bitangentes »). La seule autre conique décomposée du faisceau est T + U. Avec p, q, T et U dans un repère, l'équation générale du faisceau a la forme réduite :

$$uxy + vt^2 = 0\,. \tag{35}$$

Exemple : un faisceau de cercles concentriques car ils sont tous tangents en les points cycliques aux droites isotropes de leur centre commun.

Passons au *cas* (*3, 1*). Comme une conique ne saurait avoir de point triple, la seule conique décomposée du faisceau ne peut être que $D_{pq} + T$, T étant la tangente commune en p aux coniques du faisceau. Il s'agit d'exprimer qu'elles se coupent avec multiplicité 3 en p. C'est une question



affine. Mettons l'origine en p, le point à l'infini sur px en q et prenons T pour axe $py\,(x = 0)$. L'équation affine d'une conique tangente à T en p et passant par q s'écrit $x+cxy+dy^2=0$ ou $(1+cy)x+dy^2=0$. Les points communs à cette conique et à une autre $(1+c'y)x+d'y^2=0$ satisfont la relation $(1+cy)d'y^2-(1+c'y)dy^2=0$ (différence). La solution (double) $y=0$ donne $x=0$, c'est-à-dire le point p. Il reste $(dc'-cd')y=d'-d$. Mais $cd'-dc' \neq 0$ car, sinon, les deux coniques auraient les mêmes points à l'infini, d'où 2 points base à l'infini. Si $d-d' \neq 0$, on aurait une solution avec $y \neq 0$ à distance finie, donc distincte de p ; c'est impossible. On a donc $d' = d$ et toutes les coniques du faisceau ont le même coefficient de y^2 dans $x+cxy+dy^2=0$. En remplaçant x par x/d et en rendant homogène, on obtient l'équation générale :

$$u(xt + y^2) + vxy = 0 . \tag{36}$$

Passons enfin aux pauvres faisceaux qui n'ont qu'*un seul point base p*. Les coniques d'un tel faisceau ont une intersection de multiplicité 4 en p. Celles qui sont décomposées sont nécessairement réunions de 2 droites par p. Si le faisceau contient 2 telles réunions, d'équations $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ (p étant à l'origine et F et G étant des polynômes homogènes de degré 2), son équation générale est de la forme :

$$uF(x, y) + vG(x, y) = 0 \tag{37}$$

et tous ses éléments sont des coniques décomposées en 2 droites par p.

Si le faisceau contient 2 droites doubles, son équation se ramène à $ux^2+vy^2=0$. Il n'en contient donc pas d'autres, sauf en caractéristique 2, où il est uniquement formé de droites doubles.

Maintenant, si le faisceau contient au plus une réunion de 2 droites par p, deux coniques irréductibles du faisceau se coupent avec multiplicité 4 en p (on dit qu'elles sont « surosculatrices »), et sont en particulier tangentes en p à une même droite T. En prenant p pour origine et T pour droite $x = 0$ les équations affines de 2 coniques du faisceau s'écrivent $x + F(x, y) = 0$, $x + G(x, y) = 0$, F et G étant des polynômes homogènes de degré 2. Par différence la conique $G(x, y) - F(x, y) = 0$ est une conique du faisceau, nécessairement décomposée, nécessairement égale à 2T ; ainsi $G = F + kx^2$. L'équation générale du faisceau peut donc s'écrire :

$$u(xt + F(x, y)) + vx^2 = 0. \tag{38}$$

Il n'y a pas lieu de normaliser la forme $F(x, y)$ car les points à l'infini des coniques du faisceau sont « mobiles ».

En résumé, les seuls faisceaux dont tous les éléments sont des coniques décomposées sont donc :

— les faisceaux dont les éléments sont réunions d'une droite fixe et d'une droite mobile autour d'un point ;
— ceux dont les éléments sont réunions de 2 droites passant par un point fixe.

Les seuls faisceaux dont les éléments ont des points multiples « mobiles » sont les faisceaux de droites doubles $ux^2 + vy^2 = 0$ en caractéristique 2.

Tous les autres ont *au plus trois éléments décomposés.* En effet la décomposition d'une conique s'exprime par l'annulation d'un polynôme homogène de degré 3 en ses coefficients (équation (33) ou son analogue en caractéristique 2, p. 61). Donc la décomposition d'une conique $uF(x, y, t) + vG(x, y, t) = 0$ d'un faisceau s'exprime par une équation $H(u, v) = 0$ qui est homogène de degré 3 en les paramètres (u, v) (on a $H = 0$ si toutes les coniques du faisceau sont décomposées).

Cela donne une interprétation géométrique du fait que *la résolution d'une équation du quatrième degré se ramène à celle d'équations de degrés 3 et 2.* En excluant la caractéristique 2 pour alléger, une équation du 4^e^ degré se ramène à $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$. En posant $y = x^2$ elle équivaut au système $y - x^2 = 0$, $y^2 + ay + bx + c = 0$ (donc à l'intersection de 2 paraboles). Elles font partie du faisceau d'équation générale affine

$$y^2 + ay + bx + c + v(y - x^2) = 0.$$

Par (33) (p. 61), les paramètres v des coniques décomposées de ce faisceau sont les racines de l'équation $v(v + a)^2 + 4cv + b^2 = 0$ (petit calcul). Soit v_0 l'une d'elles. Elle détermine rationnellement le point double de la conique décomposée correspondante, car ses coordonnées sont solutions d'un système linéaire (voir p. 61). Les pentes des deux droites qui la composent sont solutions d'une équation de degré 2. Leurs intersections avec la parabole $y = x^2$ (c'est-à-dire les points base du faisceau) sont alors données par des équations de degré 2. Comme les équations de degré 3 (méthode de Cardan) et 2 sont résolubles par radicaux, il en est de même pour les équations de degré 4.

§ H / Espaces projectifs de diviseurs en géométrie algébrique

Nous avons vu au § C qu'il valait mieux compter les points d'intersection avec leurs multiplicités. Nous venons de qualifier les coniques dont l'équation est un carré de « droites doubles » (ou de droites comptées 2 fois). Nous avons noté que deux équations non proportionnelles, comme $x^2y = 0$ et $xy^2 = 0$, pouvaient définir la même partie algébrique.

Nous dirons qu'une hypersurface (projective ou affine) est *irréductible* si le premier membre de son équation est un polynôme irréductible. Et nous appellerons *diviseur* (dans un espace affine ou projectif) une *combinaison linéaire formelle à coefficients entiers d'hypersurfaces irréductibles.*

On l'a fait sans le dire en notant certaines coniques $D + D'$ ou $2D$.

Un diviseur s'écrit donc $n_1H_1 + \dots + n_qH_q$.

Soient maintenant K un corps algébriquement clos et $F(x_0, \dots, x_n)$ un polynôme homogène de degré d sur K. Comme l'anneau des polynômes à $n + 1$ variables sur K est factoriel, F se décompose de façon essentiellement unique en un produit $F = F_1^{n_1}F_2^{n_2} \dots F_q^{n_q}$ de polynômes irréductibles (nécessairement homogènes), les F_j étant non deux à deux proportionnels. En notant H_j l'hypersurface $F_j(x_0, \dots, x_n) = 0$, nous définissons le *diviseur de* F comme étant

$$(F) = n_1H_1 + \dots + n_qH_q. \tag{39}$$

THÉORÈME 19. — *Deux polynômes homogènes* F *et* G *ont même diviseur ssi ils sont proportionnels.*

La suffisante est évidente. Inversement il suffit de montrer que, si deux polynômes homogènes irréductibles P et Q définissent la même hypersurface, ils sont proportionnels. Or un théorème de Géométrie

Algébrique élémentaire, appelé le théorème des zéros de Hilbert, dit que (sur un corps algébriquement clos), si un polynôme Q s'annulle en tout zéro commun des polynômes $P_1, \ldots, P_r$, alors une puissance Q^s de Q est dans l'idéal engendré par $P_1, \ldots, P_r$ dans l'anneau des polynômes ; nous l'admettrons. Ainsi une puissance Q^s de Q est un multiple de P ; comme l'anneau de polynômes est factoriel et que Q est irréductible, on en déduit que Q divise P. De même P divise Q. Ainsi Q/P est un élément inversible de l'anneau des polynômes, donc une constante $\neq 0$.

On notera que, par définition, tout diviseur de $\mathbf{P}_n(K)$ est le diviseur d'un polynôme homogène (déterminé à un facteur constant près) ; on appelle *degré* de ce diviseur le degré de ce polynôme homogène. Comme les polynômes homogènes de degré d à $n+1$ variables forment un espace vectoriel $\left(\text{de dimension } \binom{n+d}{d}\right)$ sur K, on voit que *les diviseurs de degré d forment un espace projectif* $\left(\text{de dimension } \binom{n+d}{d} - 1\right)$.

Ainsi, dans $\mathbf{P}_2$ (resp. $\mathbf{P}_3$), les diviseurs de degré d forment un espace projectif de dimension $\frac{1}{2}(d+2)(d+1)-1=\frac{1}{2}d(d+3)$ (resp. $d(d^2+6d+11)/6$). Les diviseurs de $\mathbf{P}_1$ sont les combinaisons linéaires formelles de points ; en degré d, ils forment un espace projectif de dimension d ; les coordonnées homogènes d'un tel diviseur sont les coefficients d'un polynôme homogène $F(u, v)$ (de degré d) qui lui correspond ; ceux-ci sont fonctions symétriques élémentaires des coordonnées homogènes des points dont se compose le diviseur. Ainsi la somme $P + P'$ des points (x, y), (x', y') a pour coordonnées homogènes $(xx', -(xy'+yx'), yy')$ (faire le produit des formes linéaires $vx-uy$ et $vx'-uy'$).

CHAPITRE II

Géométrie projective de dimension 1

§ A / Abscisse projective, birapport, applications rationnelles

Dans tout ce chapitre, le corps de base K est *commutatif.* On rappelle qu'une *droite projective* est un espace projectif de dimension 1, qu'un repère projectif sur une droite projective D est formé de 3 points distincts (a, b, c) (chap. I, § A) et qu'il y a une unique homographie qui amène un repère en un repère (chap. I, § B) ; en particulier le groupe des homographies d'une droite projective D opère de façon simplement transitive sur les triplets de points distincts de D.

Abscisse projective

Etant donnée une droite projective D munie d'un repère, chaque point de D admet des systèmes de coordonnées homogènes (x, y) tous non nuls et proportionnels. Si $x \neq 0$, ces systèmes sont uniquement déterminés par le rapport $t = y/x$; d'autre part, il y a *un seul* point de D tel que $x = 0$ et l'on pose $t = \infty$ pour celui-ci. L'élément t ainsi défini s'appelle l'*abscisse projective* du point de D (dans le repère donné).

L'ensemble des abscisses projectives des points de D est donc la réunion du corps K et d'un symbole noté ∞. Nous noterons cet ensemble $\hat{K}$. Il est en bijection canonique avec $\mathbf{P}_1(K)$.

Lorsque K est muni d'une *valeur absolue* non discrète f, on munit $\hat{K}$ d'une topologie qui induit sur K celle donnée par f et où un système fondamental de voisinages de ∞ est formé par les complémentaires des boules de K (auxquels on adjoint ∞). Lorsque K est localement compact, $\hat{K}$ est donc le compactifié d'Alexandroff de K : c'est la sphère de dimension 1 (resp. 2) lorsque $K = \mathbf{R}$ (resp. $K = \mathbf{C}$).

Soit h une *homographie* d'une droite projective D sur une droite projective D'. Si l'on munit D et D' de repères, les coordonnées homogènes (x', y') de l'image $h(m)$ d'un point m de D sont fonctions linéaires des coordonnées homogènes (x, y) de m (chap. I, § B) :

$$x' = dx + cy, \quad y' = bx + ay \; (ad - bc \neq 0).$$

L'abscisse projective $t' = y'/x'$ de $h(m)$ est donc donnée, en fonction de $t = y/x$, par la formule :

$$t' = (at + b)/(ct + d) \tag{40}$$

valable, *a priori*, pour t fini et $ct+d \neq 0$. Si $ct+d = 0$, on a $x' = dx+cy = 0$ d'où $t' = \infty$, ce qui conduit à assigner la valeur ∞ à une fraction dont le dénominateur est nul. Pour $t = \infty$, on a $x = 0$, d'où $y'/x' = a/c$ si $c \neq 0$ et $t' = y'/x' = \infty$ si $c = 0$. Avec ces conventions, la formule (40) définit une application (partout définie) de $\hat{K}$ dans $\hat{K}$; c'est une bijection et elle *traduit* l'homographie h en termes d'abscisses projectives. Une application de $\hat{K}$ dans $\hat{K}$ donnée par une formule de la forme $t' = (at + b)/(ct + d)$ $(ad - bc \neq 0)$, avec les conventions ci-dessus, s'appelle une *application homographique*.

Lorsque K est muni d'une valeur absolue et $\hat{K}$ de la topologie ci-dessus, une application homographique est continue ; c'est le prolongement par continuité de la fonction ordinaire $f(t) = (at + b)/(ct + d)$ (définie sur K privé de l'éventuel pôle de f).

Birapport de quatre points

On a vu que $\hat{K} = \mathbf{P}_1(K)$ est une droite projective (dite « droite projective type ») ; les points ∞, 0, 1 de celle-ci forment un repère.

Définition. — Etant donnés 4 points a, b, c, d d'une droite projective D, *les 3 premiers étant distincts, on appelle birapport de ces points, et on note* (a, b, c, d) *(ou* $[a, b, c, d]$*), l'élément* $h(d)$ *de* $\hat{K}$ *où* h *est l'unique homographie de* D *sur* $\hat{K}$ *qui amène* a, b, c *en* ∞, 0, 1.

THÉORÈME 20. — *Soient* D, D' *deux droites projectives,* a, b, c, d *des points de* D *et* a', b', c', d' *des points distincts de* D'. *Alors il existe une homographie* u *de* D *sur* D' *telle que* $u(a) = a'$, $u(b) = b'$, $u(c) = c'$, $u(d) = d'$ *ssi les birapports* (a, b, c, d) *et* (a', b', c', d') *sont égaux.*

Soit h (resp. h') l'unique homographie de D (resp. D') sur $\hat{K}$ qui amène a, b, c (resp. a', b', c') en $\infty, 0, 1$. Si u est l'homographie de D sur D' qui amène a, b, c en a', b', c', on a $h(m) = h'(u(m))$ pour tout m dans D d'après l'unicité. Si $u(d) = d'$, on en déduit

$$(a, b, c, d) = h(d) = h'(d') = (a', b', c', d').$$

Réciproquement, si ces birapports sont égaux, on a $h(d) = h'(d')$ et aussi $h(d) = h'(u(d))$; d'où $u(d) = d'$ car h' est injective.

THÉORÈME 21. — *Soient a, b, c, d quatre éléments de $\hat{K}$, les 3 premiers étant distincts. Alors le birapport (a, b, c, d) est donné par la formule*

$$(a, b, c, d) = (c - a)(d - b)/(c - b)(d - a) \tag{41}$$

avec les conventions de calcul usuelles sur 0 et ∞.

Par exemple, si $c = \infty$, $(c-a)/(c-b)$ vaut 1 ; si $d = a$, $(a, b, c, d) = \infty$.

En effet l'homographie h de $\hat{K}$ sur $\hat{K}$ qui amène a, b, c en $\infty, 0, 1$ admet a pour pôle et b pour zéro. Elle est donc de la forme $h(t) = k(t-b)/(t-a)$. Comme $h(c) = 1$, on a nécessairement $k = (c - a)/(c - b)$. D'où (41).

COROLLAIRE. — *Le birapport (a, b, c, d) de 4 éléments de $\hat{K}$ est fonction homographique de chacun de ces 4 éléments.*

Applications rationnelles

Les fractions rationnelles sur un corps K sont les éléments du corps des fractions K(T) de l'anneau des polynômes à une variable K[T]. Une telle fraction rationnelle $r(T)$ s'écrit donc comme le quotient $r(T) = p(T)/q(T)$ de deux polynômes ; par simplification, on peut supposer que $p(T)$ et $q(T)$ sont premiers entre eux, et on dit alors que $r(T)$ est mise *sous forme réduite* ; celle-ci est uniquement déterminée par $r(T)$ si l'on s'arrange pour que le dénominateur $q(T)$ soit unitaire.

THÉORÈME 22. — *Toute fraction rationnelle $r(T)$ définit une application (partout définie) de $\hat{K}$ dans $\hat{K}$, prolongeant la fonction rationnelle usuelle.*

Ecrivons $r(T) = p(T)/q(T)$ sous forme réduite. Pour t dans K tel que $q(t) \neq 0$, on prend $r(t) = p(t)/q(t)$. Pour t dans K tel que $q(t) = 0$ (et donc $p(t) \neq 0$, on pose $r(t) = \infty$. Enfin $r(\infty)$ se calcule en posant $T = 1/U$, $s(U) = r(1/U)$ et en formant $s(0)$. On a ainsi :

— $r(\infty) = 0$ si $d^0p < d^0q$;
— $r(\infty) = a/b$ si $d^0p = d^0q$, en notant a et b les coefficients dominants de p et q ;
— $r(\infty) = \infty$ si $d^0p > d^0q$.

Lorsque K est muni d'une valeur absolue non discrète et $\hat{K}$ de la topologie ci-dessus, l'application décrite dans le th. 22 est le prolongement par continuité de la fonction rationnelle ordinaire $r(t)$ (définie sur K provê des zéros de $q(T)$).

Une application décrite par le th. 22 est appelée une *application rationnelle* de $\hat{K}$ dans $\hat{K}$.

THÉORÈME 23. — *Si* $r(T) = p(T)/q(T)$ *est une fraction rationnelle non constante écrite sous forme réduite, le corps* $K(T)$ *est une extension de degré fini du sous-corps* $K(r(T))$ *engendré par* K *et* $r(T)$ *et on a*

$$[K(T) : K(r(T))] = \max(d^0p, d^0q). \tag{42}$$

Posons $r = r(T)$ et montrons d'abord que r est « *transcendant* » sur K, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients dans K. Sinon on aurait une relation $a_nr^n + \ldots + a_1r + a_0 = 0$ avec $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$; d'où $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$, de sorte que p divise q^n et est donc constant car il est premier à q ; de même q est constant et r aussi, ce qui est exclu. Ainsi le sous-anneau $K[r]$ est isomorphe à un anneau de polynômes sur K.

Soit alors X une autre variable. Le polynôme $q(X) - rp(X)$ sur $K(r)$ admet T pour racine et il est de degré $\max(d^0p, d^0q)$ (pas de simplifications à cause de la transcendance de r). Reste à montrer qu'il est *irréductible* sur $K(r)$ ou, *a fortiori*, sur $K[r]$. Or $K[r][X]$ peut être vu comme un anneau de polynômes à 2 variables $K[r, X]$, qui s'écrit aussi $K[X][r]$. Vu comme un polynôme en r sur $K[X]$, $q(X) - rp(X)$ est irréductible sur $K(X)$ (car de degré 1) et primitif sur $K[X]$ (car $q(X)$ et $p(X)$ sont premiers entre eux) ; d'après l'étude de la décomposition des polynômes sur un anneau factoriel, $q(X) - rp(X)$ est donc irréductible.

CQFD.

Le nombre $\max(d^0p, d^0q)$ est appelé le *degré* de la fraction rationnelle (non constante) $r(T)$. On le note d^0r. Si K est algébriquement clos, l'application rationnelle correspondante de $\hat{K}$ dans $\hat{K}$ est surjective et ses « fibres » (= images réciproques des points) ont toutes d^0r éléments si on les compte avec des multiplicités convenables.

Pour une image a donnée dans $\hat{K}$, ces éléments sont les racines, finies ou infinies (cf. chap. I, § C, p. 24-29), de l'équation $q(X) - ap(X) = 0$.

Les fractions rationnelles *de degré 1* sont les fractions *homographiques*, de la forme $r(T) = (aT + b)/(cT + d)(ad - bc \neq 0)$. Elles donnent des applications rationnelles *bijectives*, mais ce ne sont pas les seules en caractéristique $p \neq 0$ (par exemple $r(T) = T^p$ a cette propriété).

Si $r(T)$ et $s(T)$ sont des fractions rationnelles non constantes, on peut substituer $r(T)$ à T dans s et former la composée $s(r(T))$; on la note $s \circ r$. Elle définit la composée des applications rationnelles associées à s et r.

THÉORÈME 24. — *Si $r(T)$ et $s(T)$ sont des fractions rationnelles non constantes, on a $d^0(s \circ r) = d^0 s . d^0 r$.*

En effet, comme $r(T)$ est transcendant sur K (th. 23), on a un K-isomorphisme f du corps $K(T)$ sur $K(r(T))$ tel que $f(T) = r(T)$. Il transforme $s(T)$ en $s(r(T))$, de sorte que $[K(T) : K(s(T))] = [K(r(T)) : K(s(r(T)))]$. La multiplicativité des degrés dans la suite de corps $K(s(r(T))) \subset K(r(T)) \subset K(T)$ et le th. 23 donnent la conclusion.

COROLLAIRE. — *Si une application rationnelle de $\hat{K}$ dans $\hat{K}$ admet une application réciproque qui est rationnelle, elle est homographique.*

En effet $d^0 r . d^0 s = 1$ implique $d^0 r = 1$ et $d^0 s = 1$.

Il résulte aussi du th. 24 que le degré d'une fraction rationnelle ne change pas si on la compose (à gauche ou à droite) avec une fraction homographique. Comme les changements de repère sur une droite projective se traduisent par des formules homographiques, la notion d'*application rationnelle d'une droite projective sur une autre* a un sens et le *degré* d'une telle application rationnelle est bien défini. Les homographies sont ainsi les applications rationnelles de degré 1 et les degrés se multiplient par composition (th. 24).

La traduction du cor. au th. 24 en termes de théorie des corps est : tout K-*automorphisme* du corps de fractions rationnelles $K(T)$ amène T en une fraction homographique.

§ B / Birapports et permutations

Etant donnés 4 points a_1, a_2, a_3, a_4 (distincts) d'une droite projective D et une permutation $s \in S_4$, peut-on calculer le birapport

$$(a_{s(1)}, a_{s(2)}, a_{s(3)}, a_{s(4)})$$

en fonction de (a_1, a_2, a_3, a_4)? Oui car :

LEMME. — *Si* $(a_1, a_2, a_3, a_4)=(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$, *alors*

$$(a_{s(1)}, a_{s(2)}, a_{s(3)}, a_{s(4)}) = (a'_{s(1)}, a'_{s(2)}, a'_{s(3)}, a'_{s(4)}) .$$

En effet, si h est l'homographie qui amène a_i en a'_i (th. 20), elle amène $a_{s(i)}$ en $a'_{s(i)}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Ainsi le birapport $(a_{s(1)}, a_{s(2)}, a_{s(3)}, a_{s(4)})$ est uniquement déterminé par $t = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ et par la permutation s. On peut donc le noter $R_s(t)$. La formule de composition

$$R_{ss'}(t) = R_s(R_{s'}(t)) \qquad (s, s' \in S_4) \tag{43}$$

est évidente. Pour calculer $R_s(t)$ (pour t dans $\hat{K}$), on se souvient que $t=(\infty, 0, 1, t)$ et on effectue la permutation s; par exemple, si c'est la transposition (2.3), on a $R_s(t) = (\infty, 1, 0, t) = 1 - t$ (th. 21). Comme un birapport est fonction homographique de chacune de ses 4 variables, on en déduit :

THÉORÈME 25. — *Le birapport « permuté »* $R_s(t)$ *est une fonction homographique de* t *et l'application* $s \mapsto R_s$ *est un homomorphisme du groupe symétrique* S_4 *dans le groupe des homographies de* $\hat{K}$, *c'est-à-dire dans* $PGL(K^2)$.

Pour le calcul effectif de $R_s(t)$, on remarque :

1) La formule $(a, b, c, d)=(c-a)(d-b)/(c-b)(d-a)$ (th. 21) montre que le birapport est inchangé par les permutations $(1, 2)(3, 4)$, $(1, 3)(2, 4)$ et $(1, 4)(2, 3)$ qui, avec l'identité, forment un sous-groupe H d'ordre 4 de S_4. Il y a donc au plus $24/4 = 6$ homographies R_s.

2) Pour $s = (1, 2)$, la même formule montre que $R_s(t) = 1/t$. Pour $s' = (2, 3)$, on calcule $R_{s'}(t) = (\infty, 1, 0, t) = (t-1)/(0-1) = 1-t$.

3) Par composition des homographies R_s et $R_{s'}$ de 2), on obtient les 6 homographies $R(t) = t$, $1/t$, $1-t$, $1/(1-t)$, $1-(1/t)$, $t/(t-1)$. D'où

COROLLAIRE. — *L'homomorphisme* $s \mapsto R_s$ *de* S_4 *dans le groupe des homographies a pour image le sous-groupe* G *à 6 éléments formé de*

$$t, \quad 1/t, \quad 1-t, \quad 1/(1-t), \quad (t-1)/t, \quad t/(t-1). \tag{44}$$

Son noyau est le sous-groupe H *à 4 éléments ci-dessus, qui est donc distingué.*

On notera que les 6 homographies (44) sont distinctes, même sur le corps F_2. Elles permutent librement les éléments $\infty, 0, 1$ de $\hat{K}$; ainsi $G = S_4/H$ est isomorphe au groupe symétrique S_3.

Comme $\hat{F}_2$ se réduit aux 3 éléments ∞, 0, 1, $PGL(F_2^2)$ est isomorphe à S_3.

§ C / Division harmonique

Nous allons étudier les *orbites* du groupe G à 6 éléments opérant sur $\hat{K}$. Elles ont 6 éléments sauf pour les éléments t de $\hat{K}$ tels qu'au moins 2 des valeurs données par (44) sont égales. Comme il s'agit d'une opération de groupe, ce sont les éléments t de $\hat{K}$ tels qu'une des relations suivantes soit vraie :

$$t = 1/t, \quad t = 1 - t, \quad t = 1/(1-t), \quad t = (t-1)/t, \quad t = t/(t-1).$$

On trouve :

a) $t = 1$; les autres valeurs données par (44) sont alors $\infty, 0$;

b) $t = -1$; autres valeurs 2 et $\frac{1}{2}$;

a') $t = \infty$; autres valeurs 0, 1 (cf. (*a*)) ;

b') $2t - 1 = 0$, $t = \frac{1}{2}$; autres valeurs $-1, 2$ (cf. (*b*)) ;

c) $t(1-t) = 1$, $t^2 - t + 1 = 0$; $t = -j$, $-j^2$ (racines cubiques de l'unité) ; autres valeurs $-j^2$, $-j$;

c') $t = (t-1)/t$, $t^2 - t + 1 = 0$, voir (*c*) ;

a'') $t = t/(t-1)$; $t = 0$ ou $t = 2$; voir (*a*) et (*b*).

THÉORÈME 26. — *Les orbites de* G *dans* $\hat{K}$ *ont toutes 6 éléments à l'exception de* $\{\infty, 0, 1\}$, $\left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ *et* $\{-j, -j^2\}$.

Le birapport (a, b, c, d) est dans la première de ces orbites lorsque 2 des 4 points sont *confondus*. On dit que 4 points forment une *division harmonique* (ou un « quadrangle harmonique » lorsque le corps de base est C) si $(a, b, c, d) = -1$; ces points sont distincts en caractéristique $\neq 2$. On attache l'adjectif « équianharmonique » aux birapports $-j$, $-j^2$.

Les permutations laissant fixe le birapport -1 forment un sous-groupe à $8 = 24/3$ éléments de S_4, engendré par H et par la transposition $(1, 2)$.

Le sous-groupe des permutations laissant fixe le birapport $-j$ a $24/2 = 12$ éléments ; c'est le groupe alterné $\mathbf{A}_4$.

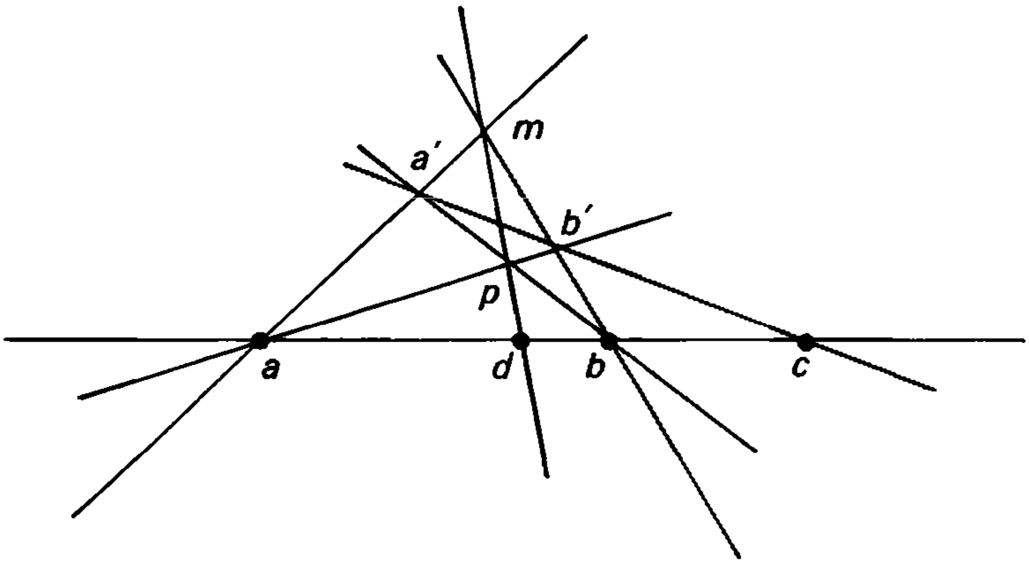
THÉORÈME 27. — *Soit* K *un corps de caractéristique* $\neq 2$. *Alors :*
a) $(a, b, c, d) = -1$ *équivaut à* $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$;
b) $(a, b, c, \infty) = -1$ *équivaut à* $2c = a + b$;
c) $(a, -a, c, d) = -1$ *équivaut à* $cd = a^2$.

En effet, d'après le th. 21, $(a, b, c, d) = -1$ équivaut à

$$(c - a)(d - b) + (c - b)(d - a) = 0,$$

d'où *a*) par un petit calcul. On en déduit aussitôt *c*). Les conventions de calcul sur ∞ donnent *b*).

Lorsque la droite projective D est plongée dans un plan projectif, la figure ci-contre donne une *construction du « quatrième harmonique »* avec la règle seulement (c'est-à-dire du point d tel que $(a, b, c, d) = -1$, a, b, c étant donnés) : on joint a et b à un point m hors de D ; une droite par c coupe D_{ma} et D_{mb} en a' et b' ; si p est le point commun à $D_{ab'}$ et $D_{ba'}$, alors D_{mp} coupe D en point d cherché. Pour justifier cette construction, on prend a, b, m pour points base du plan, D_{am} étant le droite de l'infini ;



en notant $(-u, 0)$ les coordonnées affines de c et $(0, v)$ celles de b', l'équation de $D_{cb'}$ est $y = (x + u)u^{-1}v$; celle de D_{bp}, qui lui est parallèle, est $y = xu^{-1}v$; les coordonnées de p sont donc (u, v) car la seconde est v ; ainsi celles de d sont $(u, 0)$ et on a $(a, b, c, d) = (\infty, 0, -u, u) = -1$ (th. 27, *b*)).

THÉORÈME 28. — *Soient* K *un corps de caractéristique* $\neq 2$ *et* f *une bijection de* $\hat{K}$ *sur* $\hat{K}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) f *est composée d'une homographie et d'un automorphisme* s *de* K *(autrement dit,* f *est de la forme* $f(t) = (as(t)+b)/(cs(t)+d)$ *pour* t *dans* $\hat{K}$);

b) f *conserve les divisions harmoniques.*

Si s est un automorphisme de K, la rationalité de la formule (41) (th. 21) montre qu'on a

$$(s(a), s(b), s(c), s(d)) = s((a, b, c, d)). \tag{45}$$

Comme une homographie conserve les birapports (th. 20) et que $s(-1) = -1$, cela montre que *a*) implique *b*). Réciproquement, quitte à composer f avec une homographie, on peut supposer que f laisse ∞, 0 et 1 fixes. Alors, d'après le th. 27, *b*), f conserve les milieux :

$$f\left(\frac{1}{2}(a + b)\right) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))\,;$$

comme $f(0) = 0$, on en déduit, pour $b = 0$, $f\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}f(a)$ pour tout a ; la formule de conservation des milieux montre alors que f est *additive*. D'autre part, la formule $(a, -a, a^2, 1) = -1$ (th. 27, *c*)) montre que f conserve les carrés : $f(a^2) = f(a)^2$ pour tout a dans K. Enfin l'identité $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$, jointe à l'additivité de f, montre qu'on a $f(4xy) = 4f(x)f(y)$, d'où $f(xy) = f(x)f(y)$. Ainsi f est multiplicative, et c'est donc un automorphisme de K.

COROLLAIRE. — *Si* $K = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{F}_p$ (p premier impair), *toute bijection* f *de* $\hat{K}$ *sur* $\hat{K}$ *qui conserve les divisions harmoniques est une homographie.*

Il suffit de voir que tout automorphisme s de K est l'identité. De $s(1) = 1$, on déduit par additivité et récurrence sur n que $s(n.1) = n.1$ pour tout n dans **N**. D'où l'assertion pour $\mathbf{F}_p$, et aussi $s(m) = m$ pour m dans **Z**. Pour une fraction m/n, la multiplicativité de s donne

$$s(n/m) = s(n)/s(m) = n/m\,;$$

d'où l'assertion pour **Q**. Pour **R** enfin, on note que ses éléments positifs ne sont autres que ses *carrés* ; donc s(positif) = positif, de sorte que s est croissant ; comme la restriction de s à **Q** est l'identité et que **Q** est dense dans **R** pour la structure d'ordre (coupures), s est l'identité sur **R**.

CQFD.

La construction du quatrième harmonique « à la règle » et le th. 28 montrent qu'une bijection du plan projectif sur lui-même qui conserve les alignements induit des « semi-homographies » entre les droites de ce plan. Ceci est aussi une conséquence du th. 7, chap. I, § C (« théorème fondamental de la géométrie projective »).

§ D / Homographies et involutions sur une droite projective

Soit h une homographie d'une droite projective D sur elle-même. En termes d'abscisses projectives elle se traduit par

$$t' = (at+b)/(ct+b) \qquad \text{ou} \qquad ctt' + dt' - at - b = 0 \quad (ad - bc \neq 0). \tag{46}$$

On dit que h est une *involution* si $h \neq 1$ et $h^2 = 1$; cela veut dire que la relation (46) est *symétrique* en t et t', c'est-à-dire $d = -a$.

THÉORÈME 29. — *Soit h une homographie d'une droite projective* D *sur elle-même. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) h est une involution ;

b) h est de la forme $\mathbf{P}(u)$ *où u est une application linéaire de trace nulle ;*

c) il existe un point m de D *tel que $h(m) \neq m$ et $h^2(m) = m$.*

Avec les notations de (46), les applications linéaires u telles que $h = \mathbf{P}(u)$ ont des matrices proportionnelles à $M = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$. Comme $\mathrm{Tr}(M) = d + a$, l'équivalence de *a*) et *b*) a été vue. Il est clair que *a*) implique *c*). Si *c*) est vraie, on peut prendre m et $h(m)$ pour points base ∞, 0 : $h(\infty) = 0$ et $h(0) = \infty$; alors on a $a = d = 0$ dans (46), qui s'écrit $tt' = b/c$, relation symétrique.

COROLLAIRE. — *Une involution h est uniquement déterminée par la donnée de deux couples (p, p'), (q, q') de points homologues non fixes.*

En effet l'unique homographie h telle que $h(p) = p'$, $h(p') = p$ et $h(q) = q'$ est une involution par le th. 29, *c*).

Avec les notations de (46) les *points fixes* d'une homographie h ont pour abscisses projectives les racines (finies ou infinies) de l'équation

$$ct^2 + (d - a)t - b = 0. \tag{47}$$

Si $h \neq 1$, il y en a donc *au plus deux*

THÉORÈME 30. — *Si une homographie h de D sur D a deux points fixes distincts p et q, le birapport $(p, q, m, h(m))$ est une constante k indépendante du point m de D. Cette constante est le rapport des valeurs propres des transformations linéaires u telles que $h = \mathbf{P}(u)$. L'homographie h est une involution ssi $k = -1$, c'est-à-dire si $p, q, m, h(m)$ est une division harmonique.*

En effet, prenons p, q comme points base d'un repère. En termes d'abscisses projectives, h se traduit alors par $t' = kt$. Ainsi

$$(p, q, m, h(m)) = (\infty, 0, t, kt) = k\,.$$

La matrice de u peut être prise égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, d'où l'assertion sur les valeurs propres. Enfin $t' = kt$ est une involution ssi $k = -1$.

Formes réduites. — Si une homographie a 2 points fixes, on vient de voir que, dans un repaire convenable, elle se traduit par

$$t' = kt \quad (\text{« homothétie »}). \tag{48}$$

Si elle a un point fixe double et qu'on le met à l'infini, elle se traduit par :

$$t' = t + b \quad (\text{« translation »}). \tag{49}$$

Lorsque h est une *involution* $(d = -a)$, l'équation (47) s'écrit $ct^2 - 2at - b = 0$. Comme $a^2 + bc = bc - ad \neq 0$, ses racines sont distinctes en caractéristique $\neq 2$ et la forme réduite de l'involution, donnée par (48), est $t' = -t$ (« symétrie »). En caractéristique 2, l'équation a une racine double et l'involution se traduit, dans un repère convenable, par $t' = t + b$ (qui équivaut à $t + t' = b$).

Ce qui précède suppose que les racines de (47) sont dans K (ou qu'on n'a pas vu d'inconvénient à le remplacer par une extension quadratique). D'autres formes réduites sont valables sans cette hypothèse. On part d'un point non fixe p de l'homographie h et l'on prend p et $h(p)$ pour points base $(h(0) = \infty)$. Alors h se traduit par une formule de la forme $t' = (at + b)/t$. Si h est une *involution*, on a $h(\infty) = 0$, d'où $a = 0$ et l'on obtient la forme réduite

$$t' = b/t \qquad \text{ou} \qquad tt' = b\,. \tag{50}$$

Si h n'est *pas* une involution, $h(\infty)$ est distinct de 0 (et de ∞) et on le prend comme point unité : $h(\infty) = 1$; ainsi $a = 1$ et on obtient la forme réduite

$$t' = (t + b)/t. \tag{51}$$

La formule (50) montre qu'une involution a des points fixes confondus en caractéristique 2, distincts sinon (car $b \neq 0$). Pour (51), les points fixes sont donnés par l'équation $t^2 - t - b = 0$; ils sont toujours distincts en caractéristique 2, de sorte que, dans cette caractéristique, les involutions sont *caractérisées* par l'existence d'un point fixe double.

THÉORÈME 31. — *Toute homographie h de* D *sur* D *est produit d'au plus 2 involutions.*

On raisonne sur (51) : on pose $t'' = -b/t$; alors $t' + t'' = 1$.

Involutions et diviseurs de degré 2.

On a défini au chap. I, § H, les diviseurs d'une droite projective D comme les combinaisons linéaires formelles de points de D. Les diviseurs de degré donné n peuvent aussi être vus comme les orbites du groupe symétrique $\mathbf{S}_n$ opérant sur D^n par permutations des facteurs.

On rappelle que les diviseurs de degré 2 sur D forment un espace projectif de dimension 2 : la somme des points de coordonnées homogènes (x, y), (x', y') a pour coordonnées homogènes $(xx', -(xy'+yx'), yy')$. Si l'on repère les deux points de D par leurs abscisses projectives $t = y/x$ et $t' = y'/x'$ (supposées finies), l'on peut prendre $(1, -(t+t'), tt')$ pour coordonnées homogènes de leur somme. Comme une *involution j* sur D se traduit par une relation de la forme $att' + b(t + t') + c = 0$, on peut la voir comme un *faisceau linéaire de diviseurs de degré 2.* Ces diviseurs sont, bien entendu, les $m + j(m)$ où m parcourt D.

En toute rigueur, il vaudrait mieux supposer K algébriquement clos car, pour tt' et $t + t'$ donnés dans K, t et t' sont en général dans une extension quadratique.

D'autre part, pour a fixé sur D, les diviseurs $a + m$ (où m parcourt D) forment un faisceau linéaire, qu'on peut qualifier de dégénéré, et qui ne correspond pas à une vraie involution.

Un faisceau linéaire de diviseurs de degré 2 correspond aussi à un faisceau linéaire *d'équations du second degré.* D'où :

THÉORÈME 31 (Desargues-Sturm). — *Un faisceau linéaire* F *de coniques du plan projectif découpe une involution sur toute droite* D *ne passant par aucun point base de* F (cf. chap. I, § G).

En effet l'intersection d'une conique C avec D est décrite par une équation du second degré dont les coefficients sont fonctions linéaires de ceux de l'équation de C. L'hypothèse sur les points base est destinée à éviter les faisceaux dégénérés.

Autre démonstration. — Par tout point m de D passe une unique conique C de F, qui recoupe D en un point $j(m)$ (chap. I, § G). L'abscisse projective de $j(m)$ est fonction rationnelle de celle de m. De plus $j(j(m)) = m$. On conclut par le cor. au th. 24 (§ A).

Homographies et involutions sur un faisceau linéaire de droites.

Un faisceau linéaire de droites est l'ensemble des droites qui passent par un point d'un plan projectif. L'abscisse projective d'une droite D dans un tel faisceau s'appelle souvent sa *pente*.

Plaçons-nous, en particulier, dans la clôture projective d'un plan *euclidien* et soit F le faisceau des droites passant par un point O de celui-ci (cf. chap. I, § F). Dans un repère orthonormé, la pente d'une droite D de F est tgV où V est l'angle des droites Ox et D. Appelons I et J les *droites isotropes* de O ; on se propose de calculer le birapport (I, J, D, D′). La formule du th. 21 amène à calculer $(\mathrm{tgV} - i)/(\mathrm{tgV} + i)$ et son analogue pour D′. En notant encore V l'angle de Ox et de l'une des demi-droites portées par D, ce rapport vaut $(\sin\mathrm{V} - i\cos\mathrm{V})/(\sin\mathrm{V} + i\cos\mathrm{V}) = e^{2i\mathrm{V}}$, et le birapport cherché vaut $e^{2i(\mathrm{V}-\mathrm{V}')}$. Or $\mathrm{V} - \mathrm{V}'$ est l'angle W de l'une des deux demi-droites portées par D′ avec l'une des demi-droites portées par D et l'on rappelle que 2W ne dépend que des droites D′ et D. D'où :

$$(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{D}, \mathrm{D}') = e^{2i\mathrm{W}} = \cos(2\mathrm{W}) + i\sin(2\mathrm{W}) \qquad (\text{« Formule de Laguerre »}) . \quad (52)$$

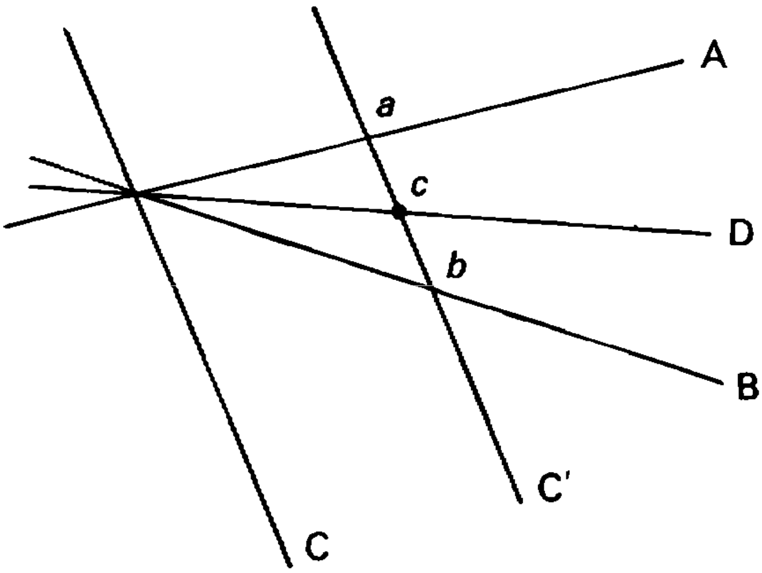
Alors le th. 30 donne aussitôt :

THÉORÈME 32. — *Dans le plan euclidien, une homographie h d'un faisceau* F *de droites sur lui-même, qui admet les droites isotropes comme éléments fixes, est induite par une rotation. Son angle est droit ssi h est une involution.*

Ainsi deux droites sont orthogonales ssi elles forment une division harmonique avec les droites isotropes ; d'ailleurs $(i, -i, m, m') = -1$ équivaut à $mm' = -1$ (th. 27, c)).

Application. — Soit a, b, c un triangle du plan euclidien et d l'intersection de deux de ses hauteurs. Soit G le faisceau des coniques passant par a, b, c, d (chap. I, § G). Il contient les coniques décomposées $D_{ad} + D_{bc}$ et $D_{bd} + D_{ac}$. L'involution qu'il découpe sur la droite de l'infini (th. 31) a deux couples qui correspondent à des droites orthogonales ; c'est donc l'involution « d'orthogonalité » (cor. du th. 29 et th. 32). La troisième conique décomposée de G, $D_{cd} + D_{ab}$, est donc formée de deux droites orthogonales ; on retrouve le fait que les 3 hauteurs d'un triangle sont *concourantes*. De plus, toutes les coniques passant par a, b, c, d ont leurs asymptotes orthogonales ; si celles-ci sont réelles, on dit que ces coniques sont des *hyperboles équilatères*.

Une construction. — Etant données 3 droites concourantes A, B, C, dans un plan affine sur un corps de caractéristique $\neq 2$, la « quatrième harmonique » D ($(A, B, C, D) = -1$) peut se construire de la façon suivante : on mène une parallèle C′ à C ; elle rencontre A et B en a et b ; la droite D est celle qui joint le point commun à A, B, C, au *milieu* c de a et b. En effet c est conjugué harmonique du point à l'infini de C′ par rapport à a et b (th. 27, b)).

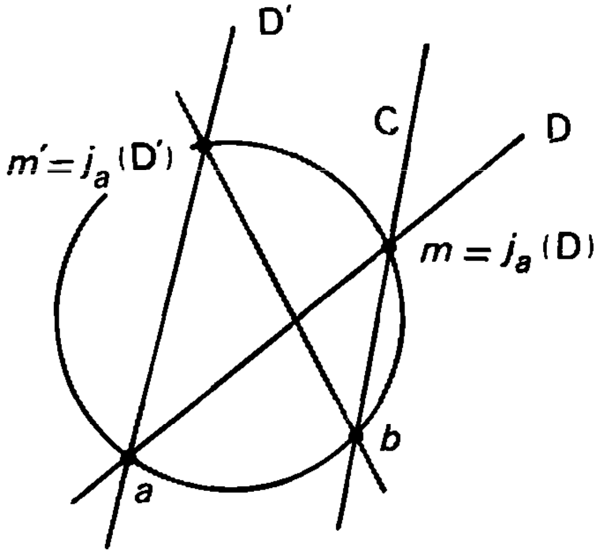


Si le plan est euclidien et si C et D sont *orthogonales*, cela montre que A et B sont symétriques par rapport à C (ou à D, c'est équivalent) ; autrement dit, C et D sont les *bissectrices* des droites A, B.

Or l'identification des involutions aux faisceaux linéaires de diviseurs de degré 2 (voir ci-dessus) montre que deux involutions (distinctes) sur un même support *ont exactement un couple commun*. Donc une involution sur un faisceau F de droites du plan euclidien *admet un couple de droites orthogonales.* Les droites fixes de cette involution sont symétriques par rapport à l'une quelconque de ces droites orthogonales.

§ E / Structure de droite projective sur une conique

Soient C une conique irréductible du plan projectif et a un point de C. A chaque droite D du faisceau F_a de base a, on fait correspondre le second point où D coupe C ; notons le $j_a(D)$. Lorsque D est la tangente à C en a, $j_a(D)$ est le point a. Ainsi j_a est une bijection de F_a sur C. Elle permet de *transporter* à C la structure de droite projective de F_a : la « pente » t d'une droite D par a sera prise comme abscisse projective



du point $j_a(D)$ de C. Reste à voir que cette structure de droite projective sur C est *intrinsèque,* c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du point a. Cela résulte du théorème suivant :

THÉORÈME 33. — *Avec les notations précédentes, et si b est un autre point de C, alors $j_b^{-1} \circ j_a$ est une homographie de F_a sur F_b.*

En effet, pour $D \in F_a$, les coordonnées de $j_a(D)$ sont fonctions rationnelles de la pente t de D car, en paramétrant D, $j_a(D)$ correspond à la seconde racine d'une équation du second degré dont la première — le paramètre de a — est connue. La pente t' de la droite $j_b^{-1}(j_a(D))$ — qui joint b à $j_a(D)$ — est donc fonction rationnelle de t. Par échange des rôles de a et b, t est fonction rationnelle de t'. On conclut par le cor. au th. 24 (§ A).

Pour ceux qui ne seraient pas convaincus par un calcul aussi « virtuel », voici une démonstration plus explicite. On prend un repère du plan dans lequel les coordonnées homogènes de a et b sont $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. L'équation générale des coniques passant par a et b est alors

$$pz^2 + qxy + ryz + sxz = 0 . \tag{53}$$

Ecrivons $y = tz$ et $x = t'z$ les équations de droites D et D′ passant respectivement par a et par b. Le point commun à D et D′ est sur C ssi on a $p + qtt' + rt + st' = 0$, ce qui est une relation homographique entre t et t'.

Cela étant, la bijection j_a fournit une *représentation paramétrique* de la conique C : en notant t la pente d'une droite variable passant par a, les coordonnées affines du point $j_a(\mathrm{D})$ sont des fonctions rationnelles de t. Par exemple, avec les notations de la seconde démonstration du th. 33, ce point a pour coordonnées affines

$$x = -(rt + p)/(qt + s), \qquad y = t ;$$

ses coordonnées homogènes peuvent être prises égales à :

$$(-(rt + p), \quad t(qt + s), \quad qt + s) . \tag{54}$$

Plus généralement, une courbe plane qui admet une représentation paramétrique (affine) de la forme $x = r(t)$, $y = s(t)$, où $r(t)$ et $s(t)$ sont des *fonctions rationnelles* d'un paramètre t (qui parcourt $\hat{\mathrm{K}}$) est dite *unicursale* (ou rationnelle). En chassant les dénominateurs, elle admet une « représentation paramétrique homogène », où les coordonnées homogènes d'un point de la courbe sont fonctions *polynômes de t* :

$$(x, y, z) = (\mathrm{P}(t), \mathrm{Q}(t), \mathrm{R}(t)) ;$$

on supposera que les polynômes P, Q, R sont *premiers entre eux* dans leur ensemble.

La représentation paramétrique homogène (54) montre que la conique C est *une courbe unicursale pour laquelle* $\max(d^0\mathrm{P}, d^0\mathrm{Q}, d^0\mathrm{R}) = 2$. Ce fait est indépendant du repère choisi dans le plan (combinaisons linéaires de P, Q, R) ; il n'est pas non plus altéré par un changement homographique du paramètre t (« hogénéiser » t en (u, v) et faire une transformation linéaire sur (u, v)).

L'invariance du maximum des degrés de P, Q, R est vraie pour toute courbe unicursale. Nous interpréterons ce nombre au § suivant : moyennant une précaution, c'est le degré de la courbe C.

Le théorème 33 admet la réciproque suivante :

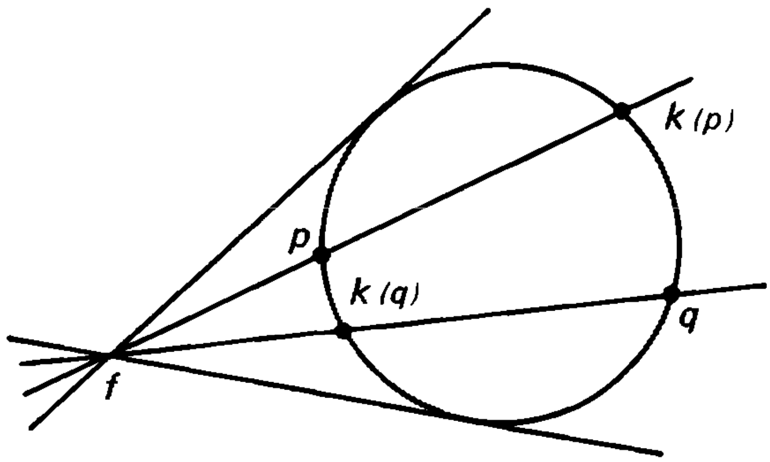
THÉORÈME 34. — *Soient, dans le plan projectif,* F_a *et* F_b *les faisceaux de droites de points base a et b, et soit h une homographie de* F_a *sur* F_b. *Lorsque* D *parcourt* F_a, *le point* $D \cap h(D)$ *parcourt une conique* C, *qui passe par a et b. Si* $h(D_{ab}) = D_{ba}$, C *est décomposée en* D_{ab} *et une autre droite. Sinon* C *est irréductible.*

Prenons les notations de la seconde démonstration du th. 33. La conique $pz^2+qxy+ryz+sxz=0$, qui passe par a et b, est obtenue pour l'homographie $t' = -(rt+p)/(qt+s)$. Or toute homographie de F_a sur F_b est de cette forme, avec $pq - rs \neq 0$. La conique ne peut être décomposée en une droite par a et une droite par b, sinon $pq - rs = 0$. Elle ne peut donc être décomposée qu'en D_{ab} (équation $z = 0$) et une autre droite, ce qui veut dire $q = 0$; alors l'homologue de ∞ par l'homographie est ∞, ce qui signifie que D_{ab} correspond à elle-même par celle-ci.

Exemple. — Prenons pour a et b des points du plan euclidien et pour h la composée de la translation de a à b et d'une rotation d'angle W autour de b. La conique C est alors l'ensemble des points d'où l'on « *voit* » le segment ab sous l'angle (de droites) W. Comme h transforme une droite isotrope du point a en la droite isotrope parallèle passant par b (voir § D), la conique C passe par les points cycliques et est donc un cercle (passant, bien entendu, par a et b).

THÉORÈME 35 (Frégier). — *Soient* C *une conique (irréductible) et f un point du plan non situé sur* C ; *l'application j qui, à tout point m de* C, *fait correspondre celui où* D_{fm} *recoupe* C *est une involution sur* C. *Réciproquement toute involution k sur* C *est de cette forme.*

En effet j est une application rationnelle de C dans C et on a évidemment $j^2 = 1$. C'est donc une homographie — et aussi une invo-



lution — par le cor. au th. 24. Réciproquement, si k est une involution sur C, on prend deux points p, q (non homologues) sur C et on pose $f = \mathrm{D}_{pk(p)} \cap \mathrm{D}_{qk(q)}$; l'involution définie par le point f a deux couples de points homologues en commun avec k et coïncide donc avec k (cor. au th. 29).

Une démonstration par le calcul est fort simple elle aussi. Soit $(x, y, z) = \mathrm{P}(t), \mathrm{Q}(t), \mathrm{R}(t))$ une représentation paramétrique homogène de C. Les polynômes P, Q, R sont linéairement indépendants (sinon C serait une droite) et forment donc une base de $\mathrm{K} + \mathrm{K}t + \mathrm{K}t^2$. Par changement de repère, on peut supposer qu'on a $x = t^2$, $y = t$, $z = 1$. Alors l'alignement des points de C de paramètres t et t' avec le point $f = (a, b, c)$ s'écrit $\begin{vmatrix} a & t^2 & t'^2 \\ b & t & t' \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, soit, après simplification par $t - t'$, $a - b(t + t') + ctt' = 0$. C'est bien là une involution sur C et, pour un choix convenable du point (a, b, c), toute involution sur C est ainsi obtenue. CQFD.

Le point f autour duquel pivotent les droites $\mathrm{D}_{mj(m)}$ s'appelle le *point de Frégier* de l'involution j.

Remarque. — L'involution $t' = (bt - a)/(ct - b)$ est « dégénérée » ssi $b^2 - ac = 0$; cela veut dire que le point (a, b, c) est sur C.

Exemples. — 1) Considérons, *en caractéristique 2*, l'involution $t + t' = 0$ sur une conique C. C'est l'identité, de sorte qu'elle est découpée sur C par les tangentes à C. Celles-ci passent donc toutes par son point de Frégier (cf. chap. I, § G).

2) Soit a un point d'une conique C du plan euclidien. L'involution « d'orthogonalité » (th. 32, § D) sur le faisceau des droites passant par a induit une involution sur C. Autrement dit, si un angle droit pivote autour de a et si l'on appelle m, m' les points où ses côtés recoupent C, la droite mm' passe par un point fixe f. En prenant la tangente à C en a pour l'un des côtés de l'angle droit, on voit que le point de Frégier f est sur la *normale* à C en a. C'est là l'énoncé original de Frégier (Ann. de Math., 1816).

Lorsque C est un cercle, f est évidemment son centre.

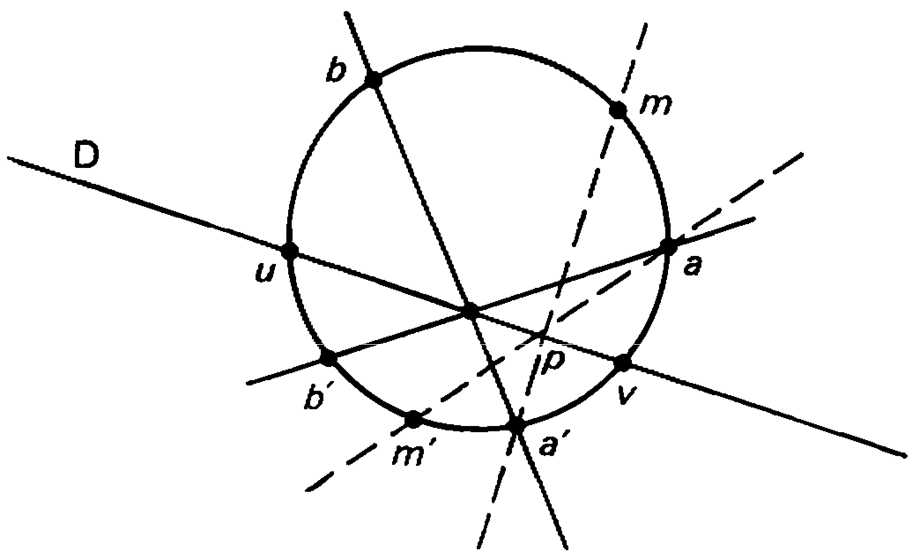
Lorsque C est une *hyperbole équilatère* (asymptotes orthogonales), la droite de l'infini est une position particulière de la droite mm', de sorte que le point de Frégier f est à l'infini sur la normale à C en a. L'involution est alors découpée sur C par les parallèles à cette normale.

Réciproquement, considérons l'involution j découpée sur une hyperbole équilatère C par les droites parallèles à une droite donnée D. Soient a et b les deux points de C où la tangente est orthogonale à D. Alors l'involution d'orthogonalité sur le faisceau des droites passant par a (resp. b) induit sur C l'involution j. Autrement dit, *les cercles ayant pour diamètres les cordes mm' de C parallèles à* D passent tous par les points a et b (et forment donc un faisceau linéaire de cercles).

Le point de Frégier $f(a)$ de l'involution découpée sur une conique C par l'involution d'orthogonalité sur le faisceau des droites passant par un point a de C n'est pas un point quelconque du plan (il est fonction, d'ailleurs rationnelle, d'*un* paramètre — celui de a sur C — et non de *deux*). On a vu que c'est le centre de C si C est un cercle et qu'il parcourt la droite de l'infini si C est une hyperbole équilatère. Sinon il décrit une courbe, en général du 4^e degré.

3) Les points fixes d'une involution sur une conique C sont les points de contact des tangentes menées à C par le point de Frégier.

4) L'existence d'un unique couple commun à 2 involutions est immédiate si on les regarde comme des involutions sur une même conique : mener la droite joignant leurs points de Frégier.



THÉORÈME 36 (Pascal). — *On considère 6 points, 1, 2, 3, 4, 5, 6 d'une conique irréductible* C. *Alors les points* $i = D_{12} \cap D_{45}$, $j = D_{23} \cap D_{56}$ *et* $k = D_{34} \cap D_{61}$ *sont alignés.*

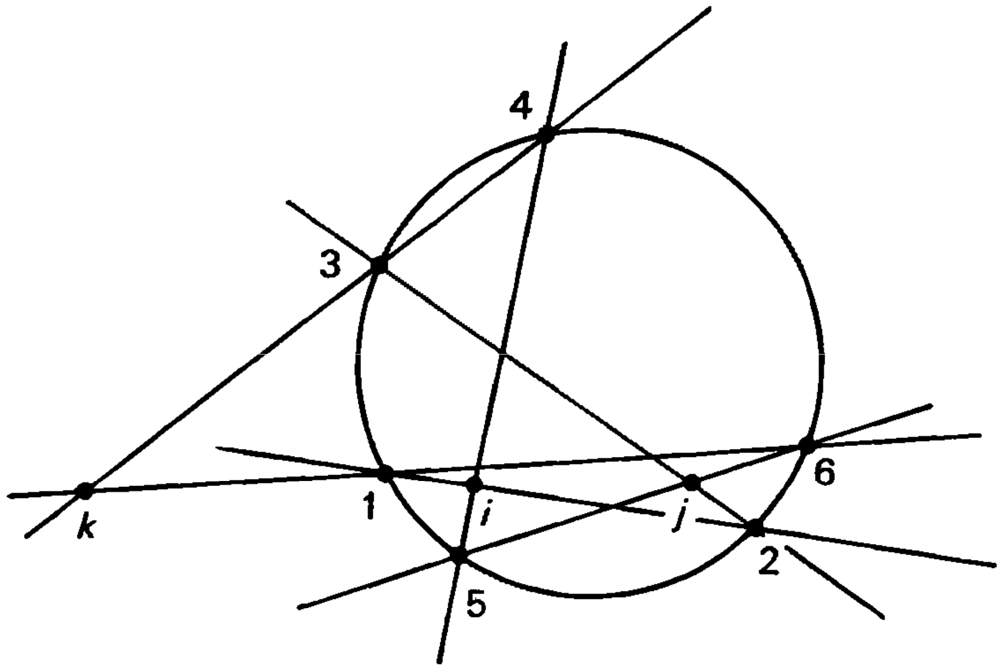
LEMME. — *Soient* C *une conique irréductible,* D *une droite, u et v ses points communs avec* C, *et a, b, a', b' des points de* C. *Il existe une homographie h sur* C, *de points fixes u et v, telle que $h(a) = a'$ et $h(b) = b'$ ssi $D_{ab'}$ et $D_{ba'}$ se coupent sur* D.

En effet, pour tout point m de C, notons p le point où $D_{ma'}$ rencontre D et m' le point où D_{ap} recoupe C ; posons $m' = h(m)$; l'application h est rationnelle et admet une application réciproque qui l'est aussi ; c'est donc une homographie ; on a $h(a) = a'$ et m est fixe par h ssi il est commun à C et D. Si $D_{ab'}$ et $D_{ba'}$ se coupent sur D, on a évidemment $h(b) = b'$. La réciproque est vraie car une homographie est déterminée par ses valeurs en u, v et a.

Si D est tangente à C en u, u est point fixe double de h. Le lemme reste vrai car, alors, h est déterminée par sa valeur en un autre point (voir forme réduite $t' = t + b$, (49), § D).

Lorsque les droites ab' et ba' se coupent sur D, il y a aussi une homographie k de points fixes u, v telle que $k(a) = b$ et $k(a') = b'$.

Passons à la démonstration du th. 36. Soient u, v les points communs à C et à $D = D_{ij}$. D'après le lemme, il y a une homographie h sur C, de points fixes u, v, telle que $h(2) = 5$; alors $h(1) = 4$ et $h(3) = 6$. En utilisant le lemme dans l'autre sens, on voit que D_{16} et D_{34} se coupent sur D. Donc i, j et k sont alignés. CQFD.



Ce qui importe dans la donnée, c'est l'ordre « circulaire » des points 1, 2, 3, 4, 5, 6. S'ils se succèdent, dans cet ordre, sur une ellipse, parabole ou branche d'hyperbole réelle, ils forment un hexagone convexe inscrit à C et le th. 36 exprime que les 3 points de rencontre de ses côtés opposés sont alignés.

Si C est décomposée en 2 droites, avec 1, 3, 5 sur l'une et 2, 4, 6 sur l'autre, l'énoncé est celui du théorème de Pappus (chap. I, § C, th. 6), mais la démonstration donnée ici n'est pas valable dans ce cas.

COROLLAIRE. — *a) Si a, b, c, d sont 4 points d'une conique irréductible* C, *les tangentes en a et c à* C *se coupent sur la droite qui joint les points* $D_{ab} \cap D_{cd}$ *et* $D_{bc} \cap D_{da}$ (considérer la suite a, a, b, c, c, d).

b) Si un triangle a, b, c est inscrit dans une conique irréductible C, *les points d'intersections des tangentes en a, b, c avec les côtés opposés sont alignés.*

Si C est le cercle circonscrit à a, b, c, on obtient la droite de Simpson.

§ F / Courbes unicursales

On rappelle qu'on appelle *unicursale* une courbe qui admet une représentation paramétrique (affine) de la forme $x = r(t)$, $y = s(t)$, où $r(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions *rationnelles* d'un paramètre t. Cette notion se généralise aussitôt aux courbes de K^n ou de $\mathbf{P}_n(K)$.

Exemples. — 1) *Toute courbe algébrique plane de degré d qui admet un point multiple de multiplicité* $d - 1$ *est unicursale.*

On met ce point à l'origine, de sorte que l'équation affine de la courbe est de la forme $F_d(x, y) + F_{d-1}(x, y) = 0$, où F_i est un polynôme homogène de degré i. On pose $y = tx$, c'est-à-dire qu'on coupe la courbe par les droites passant par O. L'équation donne

$$x^d F_d(1, t) + x^{d-1} F_{d-1}(1, t) = 0 .$$

La solution $x^{d-1} = 0$ correspond au point O. Reste le point

$$x = -F_{d-1}(1, t)/F_d(1, t) .$$

Sa seconde coordonnée est $y = tx = -tF_{d-1}(1, t)/F_d(1, t)$. D'où la représentation paramétrique cherchée.

Pour $d = 2$, on retrouve les représentations paramétriques des coniques étudiées au § E.

2) *Toute quartique* C *qui admet 3 points doubles est unicursale.*

On rappelle qu'une quartique est une courbe de degré 4. On prend les 3 points doubles comme points base d'un repère du plan projectif. Le fait que $(0, 0, 1)$ est point double équivaut au fait que l'équation homogène de C ne contient pas de termes en z^4, en z^3x ni en z^3y. *Idem* pour les autres variables. Bref, les variables x, y, z figurent dans l'équation avec des exposants $\leqslant 2$. Celle-ci est donc de la forme

$$ax^2y^2 + by^2z^2 + cz^2x^2 + a'xyz^2 + b'yzx^2 + c'zxy^2 = 0\,.$$

On pose alors $x = 1/x'$, $y = 1/y'$, $z = 1/z'$ (« transformation quadratique »). En multipliant l'équation obtenue par $(x'y'z')^2$, on obtient l'équation

$$az'^2 + bx'^2 + cy'^2 + a'x'y' + b'y'z' + c'z'x' = 0\,.$$

C'est là l'équation d'une *conique*, qu'on paramétrise comme au § E. De la représentation paramétrique homogène $(x', y', z') = (\mathrm{P}(t), \mathrm{Q}(t), \mathrm{R}(t))$ de cette conique, on déduit celle, $(x, y, z) = (\mathrm{Q}(t)\mathrm{R}(t), \mathrm{R}(t)\mathrm{P}(t), \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t))$, de la quartique.

NB. — Le signe « = » pour les représentations paramétriques homogènes veut dire, bien entendu, « proportionnel ».

Une représentation paramétrique $x = r(t)$, $y = s(t)$ d'une courbe unicursale *est dite propre si le paramètre t est fonction rationnelle de x et y.* Alors, sauf un nombre fini de points exceptionnels où $t = p(x, y)/q(x, y)$ se présente sous la forme 0/0, on a une bijection entre la courbe et l'ensemble $\hat{\mathrm{K}}$ des valeurs du paramètre.

Exemples. — 1) La représentation paramétrique ci-dessus d'une courbe de degré d admettant un point de multiplicité $d - 1$ est propre car $t = y/x$. Les valeurs de t telles que $\mathrm{F}_{d-1}(1, t) = 0$ donnent toutes le point O ; il y en a en général plusieurs ; les valeurs de t telles que $\mathrm{F}_d(1, t) = 0$ donnent les points à l'infini de la courbe ; on n'ometttra pas de donner à t la valeur ∞. On pourra s'exercer sur la courbe

$$x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3 + xy = 0\,,$$

et aussi sur $x^3 - y^2 = 0$.

La représentation paramétrique ci-dessus de la quartique à 3 points doubles est, elle aussi, propre (car celle d'une conique l'est).

2) Soit C la courbe de représentation paramétrique $x = t^2 + t^{-2}$, $y = t^3 + t^{-3}$. Cette représentation n'est *pas propre* car deux valeurs inverses quelconques de t donnent le même point (x, y). Mais, si l'on pose $u = t + t^{-1}$, on a $x = u^2 - 2$ et $y = u^3 - 3u$. Comme $u^3 = u \,.\, u^2 = u(x+2)$, on en déduit $y = u(x + 2) - 3u = u(x - 1)$; d'où $u = y/(x - 1)$ et la nouvelle représentation paramétrique est propre.

On notera que $u=0/0$ pour $x=1$ et $y=0$; ce point est obtenu pour les valeurs $u=+3^{\frac{1}{2}}$ et $u=-3^{\frac{1}{2}}$; c'est un point double de la courbe. On notera aussi que l'ancien paramètre t n'est pas fonction rationnelle du nouveau paramètre u : il est quadratique sur $K(u)$.

Ce qu'on a vu dans l'ex. 2) est général : toute représentation peut être rendue propre. Plus précisément, si l'on regarde t comme une indéterminée sur le corps de base K, $x = r(t)$ et $y = s(t)$ sont des éléments du corps de fractions rationnelles $K(t)$. Ils engendrent un sous-corps $F = K(x, y)$ de $K(t)$, dont il s'agit de montrer qu'il est engendré (sur K) par un seul élément u (donc de la forme $K(u)$) : en effet x et y sont alors fonctions rationnelles du nouveau paramètre u, et u est fonction rationnelle de x et y. Or on a le théorème suivant :

THÉORÈME 37 (Lüroth). — *Soient* $E = K(t)$ *un corps de fractions rationnelles à une variable sur* K *et* F $(\neq K)$ *un corps intermédiaire entre* K *et* E. *Alors* F *est de la forme* $F = K(u)$, *avec* u *transcendant sur* K. *En particulier toute courbe unicursale admet une représentation propre.*

En effet, comme F contient une fraction rationnelle non constante, E est une extension algébrique de degré fini de F (th. 23). Soit n ce degré et soit $f(X) = X^n + k_1X^{n-1} + \ldots + k_{n-1}X + k_n$ $(k_j \in F)$ le polynôme minimal de t sur F. L'un au moins des k_j n'est pas dans K (sinon t serait algébrique sur K) ; notons le u et montrons que $F = K(u)$. En écrivant $u = g(t)/h(t)$ comme quotient de deux polynômes premiers entre eux, et en posant $m = \max(d^0g, d^0h)$, E est de degré m sur $K(u)$ (th. 23). Comme $K(u)$ est contenu dans F, on a $m \geqslant n$ (m est même un multiple de n). Il suffit donc de montrer qu'on a $m \leqslant n$.

Or l'indéterminée t est racine du polynôme $g(X) - uh(X)$, qui a ses coefficients dans F. C'est donc un multiple du polynôme minimal $f(X)$:

$$\text{(E)} \qquad g(X) - uh(X) = q(X)f(X) \qquad \text{avec} \quad q(X) \in F[X].$$

On peut écrire chaque k_j $(j = 1, \ldots, n)$ sous la forme $c_j(t)/c_0(t)$ où $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des polynômes premiers entre eux dans leur ensemble. Posons alors

$$\text{(F)} \qquad P(X, t) = c_0(t)f(X) = c_0(t)X^n + c_1(t)X^{n-1} + \ldots + c_n(t) ;$$

c'est, par hypothèse, un polynôme primitif en X sur $K[t]$.

Comme u est l'un des k_j, soit $u = k_i$, on a $u = g(t)/h(t) = c_i(t)/c_0(t)$ et donc, comme $(g, h) = 1$, $d^0g \leqslant d^0c_i$ et $d^0h \leqslant d^0c_0$. Ainsi :

(G) l'entier $m = \max(d^0g, d^0h)$ est au plus égal au degré de $P(X, t)$ par rapport à t.

Maintenant, dans (E), remplaçons u par $g(t)/h(t)$ et les coefficients de $q(X)$ par leurs expressions comme fonctions rationnelles de t. On en déduit que, dans $K(t)[X]$, $P(X, t)$ divise $g(X)h(t) - h(X)g(t)$. Or ces polynômes sont tous deux dans $K[t, X]$ et on a vu que $P(X, t)$ est primitif en X. Il existe donc un polynôme $Q(X, t) \in K[X, t]$ tel que :

$$\text{(H)} \qquad g(X)h(t) - h(X)g(t) = Q(X, t)P(X, t).$$

Le degré par rapport à X du premier membre est au plus m et celui de $P(X, t)$ est $n \leqslant m$. Ils sont donc tous deux égaux à m et on a $n = m$.

CQFD.

De plus le polynôme $Q(X, t)$ est de degré 0 en X et ne dépend que de t. Comme le premier membre de (H) ne change que de signe si l'on échange les indéterminées X et t, on voit que $Q(X, t)$ est une constante et que $P(X, t)$ est aussi de degré $m = n$ en t.

Remarque. — La généralisation du théorème de Lüroth aux corps de fractions rationnelles à plusieurs variables est un problème qui a longtemps intéressé les géomètres algébristes. Vers 1900, en utilisant des outils assez puissants de la théorie des surfaces algébriques, G. Castelnuovo a démontré que, si $K = C$, tout sous-corps F de degré de transcendance 2 de $K(X, Y)$ (c'est-à-dire sur lequel $K(X, Y)$ est algébrique) est isomorphe à $K(X, Y)$ (comme on dit, c'est une extension transcendante pure de K). La conclusion n'est pas vraie lorsque K n'est pas algébriquement clos (contre-exemple de B. Segre pour $K = R$). Elle reste vraie pour un corps algébriquement clos K de caractéristique $p \neq 0$ à condition de supposer que $K(X, Y)$ est séparable sur F (O. Zariski, vers 1955).

Contrairement au théorème de Lüroth, on ne connaît pas de démonstration de pure théorie des corps pour les théorèmes de Castelnuovo et Zariski. Leurs démonstrations font appel à la Géométrie Algébrique. On dit qu'une variété algébrique V (de dimension d) est *unirationnelle* si les coordonnées (affines pour fixer les idées) (x_i) des points de V peuvent s'exprimer comme fonctions rationnelles de d paramètres indépendants (t_j) ; elle est dite *rationnelle* si, de plus, on peut s'arranger pour que les paramètres s'expriment, inversement, comme fonctions rationnelles des coordonnées. Comme on l'a vu, le théorème de Lüroth signifie que toute courbe unirationnelle est rationnelle. Les démonstrations de Castelnuovo et Zariski consistent à montrer que certains invariants d'une surface unirationnelle sont nuls et que cette nullité implique la rationalité de la surface (qui est alors, dans un certain sens — l'équivalence birationnelle — « isomorphe » au plan projectif).

Ce n'est que dans les années 1970 qu'on a pu donner des exemples convaincants de variétés unirationnelles de dimension 3 qui ne sont pas rationnelles. L'un d'eux est l'hypersurface cubique dite « de Fano » (équation affine $F(x, y, z, t) = 0$ avec F de degré 3 assez général), dont l'unirationalité était connue depuis le début du siècle ; une étude assez délicate a montré que le groupe de ses « automorphismes » (transformations birationnelles sur elle-même) est beaucoup plus « petit » que celui de l'espace projectif de dimension 3, de sorte qu'elle ne peut être rationnelle.

THÉORÈME 38. — *Une courbe (plane) unicursale* C *est algébrique et irréductible.*

On peut raisonner dans l'affine. Soit $x = r(t)$, $y = s(t)$ une représentation propre de C; alors t est une fonction rationnelle, $t = G(x, y)$, de x et y. Dans le corps de fractions rationnelles $K(t)$, $x = r(t)$ est non constante (sinon C est une droite), donc transcendant sur K, et y est algébrique sur $K(x)$ (th. 23); soit $F(x, Y)$ son polynôme minimal; on peut supposer que les coefficients des Y^j sont des éléments de $K[x]$, donc essentiellement des polynômes en x, premiers entre eux dans leur ensemble. Etant irréductible sur K(X) et primitif sur K[X], le polynôme F(X, Y) est irréductible. Comme $F(r(t), s(t)) = 0$ est une identité en t, tout point $(x(a), y(a))$ de C ($a \in \hat{K}$) vérifie $F(x(a), y(a)) = 0$. Inversement, si (b, c) est un zéro de F(X, Y) dans K^2, on pose $a = G(b, c)$; alors l'identité $t = G(x, y) = G(r(t), s(t))$ montre que le K-homomorphisme h de $K[x, y]$ dans K défini par $h(x) = b$, $h(y) = c$ se prolonge à t par $h(t) = a$; ainsi $b = h(r(t)) = r(a)$ et $c = s(a)$, de sorte que le point (b, c) est sur C. Si $G(b, c)$ est infini, on passe en $t' = 1/t$.

Plus précisément, en prenant un anneau de valuation de $K(t)$ qui contient x et y, on voit que l'homomorphisme h peut se prolonger à t ou à $1/t$.

Une représentation paramétrique *homogène* $(P(t), Q(t), R(t)$ d'une courbe unicursale C est dite propre si la représentation paramétrique affine $x = P(t)/R(t)$, $y = Q(t)/R(t)$ est propre. A un nombre fini d'exceptions près, elle donne une *bijection* de $\hat{K}$ sur la courbe projective C. Les points d'intersection d'une droite D, $ax + by + cz = 0$, avec C correspondent aux racines, finies ou infinies, de l'équation

$$aP(t) + bQ(t) + cR(t) = 0.$$

On admettra que les multiplicités de ces racines sont égales aux multiplicités d'intersection de C et D définies au chap. I, § C (où C était définie par son équation et D par une représentation paramétrique), étant entendu que, si un point P (exceptionnel) de C est obtenu pour plusieurs valeurs du paramètre t, il faut ajouter les multiplicités correspondantes pour obtenir la multiplicité d'intersection de C et D en P. Cela étant, *le nombre* $\max(d^0P, d^0Q, d^0R)$ *est le degré* de la courbe plane C (à condition, bien entendu, que les polynômes P, Q, R soient premiers entre eux dans leur ensemble).

On a vu que ce maximum des degrés est 2 pour une conique et 4 pour une quartique avec 3 points doubles.

Remarque. — Les exemples donnés au début de ce § donnent à penser qu'une courbe est unicursale ssi elle a *suffisamment de points doubles.* C'est exact et l'on peut montrer qu'une courbe irréductible C de degré d est unicursale ssi elle admet $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ points doubles, à condition de compter plusieurs fois comme points doubles les points multiples de nature plus compliquée ; ainsi un point triple est compté pour 3 points doubles ; comme on l'a vu au début du §, une quartique à point triple est aussi unicursale qu'une quartique à 3 points doubles. Dans le cas général, ce « comptage » des points doubles fait appel à de l'Algèbre assez fine (l'étude des clôtures intégrales d'anneaux locaux) et à des résultats généraux sur les courbes algébriques (notion de « genre », théorème de Riemann-Roch).

Une courbe algébrique de degré d dont le nombre de points doubles (compté correctement) est $> \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ est nécessairement *décomposée.* Vérifions-en les premiers cas :

— une conique qui a 1 point double est décomposée en 2 droites (cf. chap I, § G, th. 15) ;
— une cubique qui a 2 points doubles a et b est décomposée en une droite et une conique ; en effet la droite D qui joint a et b à 4 points communs avec la cubique et est donc contenue dans celle-ci ;
— une quartique qui a 4 points doubles est décomposée en 2 coniques ; en effet, faisons passer une conique par ces 4 points doubles et par un cinquième point de la quartique ; cette conique et la quartique ont alors $4 \times 2 + 1 = 9$ points communs, et non 8, de sorte que la première est contenue dans la seconde.

Il n'est pas très difficile de montrer qu'une courbe C de degré d qui a $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ points doubles (distincts) est unicursale : on fait passer par ces points doubles, et par quelques autres points de C, un faisceau linéaire de courbes de degré $d-2$ qui recoupent C en un seul point variable. La réciproque est plus délicate. Nous nous contenterons de donner une démonstration ad hoc dans le cas des cubiques :

THÉORÈME 39. — *Une cubique plane irréductible* C *est unicursale ssi elle admet un point double.*

Si C admet un point double, on fait pivoter des droites par celui-ci et l'on obtient une représentation (propre) de C (cf. ex. 1)). Inversement, soit $(P(t), Q(t), R(t))$ une représentation paramétrique homogène de C, qu'on peut supposer propre (th. 37). Alors $\max(d^0P, d^0Q, d^0R) = 3$.

Ainsi $V = KP + KQ + KR$ est un sous-espace de $K + Kt + Kt^2 + Kt^3$; il est de dimension 3, sinon C est une droite. Quitte à changer de repère, on peut remplacer $(P(t), Q(t), R(t))$ par n'importe quelle base de V.

L'intersection de V avec le sous-espace $K + Kt$ est de dimension 2 ou 1.

a) Si elle est de dimension 2, V contient 1 et t et a une base de la forme $(1, t, at^3 + bt^2)$, d'où la représentation paramétrique $x = 1$, $y = t$, $z = at^3 + bt^2$; ainsi $z = ay^3 + by^2$, c'est-à-dire, en rendant homogène, $zx^2 = ay^3 + bxy^2$. Le point $(0, 0, 1)$ est point double (de rebroussement) de la courbe.

b) Si cette intersection se réduit à K, on peut prendre $x = 1$, y de degré 2 et z de degré 3. Par translation sur y (remplacement par $y + kx$) et transformation affine de t, on peut supposer que $y = t^2$. Par homothétie sur z et combinaisons linéaires avec x et y, on peut supposer que $z = t^3 + at$. D'où $z = t(y+a)$, $z^2 = t^2(y+a)^2 = y(y+a)^2$ et enfin $z^2x = y(y+ax)^2$ en en rendant homogène. Le point $z = 0$, $y + ax = 0$, c'est-à-dire $(1, -a, 0)$, est double.

c) Si cette intersection est de dimension 1 sans se réduire à K, elle est engendrée par un polynôme de degré 1, qu'on peut supposer être t après transformation affine. Ainsi $x = t$, y de degré 2, z de degré 3. Par homothétie et combinaison linéaire de y avec x, on peut supposer que $y = t^2 + a$. Si $a \neq 0$, une combinaison linéaire de z avec x et y en fait disparaître le terme en t et le terme constant, d'où, après homothétie, $z = t^3 + ct^2$. On passe aux coordonnées affines $u = y/x = (t^2 + a)/t$ et $v = z/x = t^2 + ct = t(t + c)$. On a alors $ut = v - ct + a$, d'où $t = (v + a)/(u + c)$. Posons $X = u + c$, $Y = v + a$, d'où $t = Y/X$ et $t + c = (Y + cX)/X$; ainsi on a $Y - a = v = t(t + c) = Y(Y + cX)/X^2$, d'où l'équation affine $X^2(Y - a) - Y(Y + cX) = 0$ qui montre que l'origine est point double.

Dans le cas $a = 0$, on se ramène comme ci-dessus à $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3 + b$. D'où la représentation affine $u = y/x = t, v = z/x = (t^3 + b)/t$ et l'équation $uv = u^3 + b$. En rendant homogène, $uvw = u^3 + bw^3$, on voit apparaître le point double $(0, 1, 0)$.

Un peu de géométrie sur une cubique unicursale

Soit C une cubique unicursale. On place l'origine des coordonnées affines en son point double, de sorte que son équation s'écrit

$$F(x, y) + G(x, y) = 0,$$

où F (resp. G) est un polynôme homogène de degré 3 (resp. 2). On suppose K algébriquement clos. Deux cas peuvent se présenter pour G :

1) G est produit de deux formes linéaires distinctes *(« point double à tangentes distinctes »)*. Par changement de coordonnées, on peut écrire $G(x, y) = -xy$, d'où l'équation $F(x, y) - xy = 0$. On paramétrise en posant $y = tx$, d'où la représentation paramétrique :

$$x = t/F(1,t) \quad y = t^2/F(1,t) \quad \text{ou} \quad (t, t^2, F(1,t)) \text{ en homogène} \tag{55}$$

On notera que $F(1, t)$ est vraiment de degré 3, sinon x est en facteurs dans l'équation de C. Les points d'intersection de C avec la droite $ax + by + cz = 0$ correspondent aux racines (finies ou infinies, simples ou multiples) de

$$at + bt^2 + cF(1, t) = 0 .$$

Le terme en t^3 et le terme constant de cette équation proviennent de de $F(1, t)$, où ils sont non nuls (sinon x ou y serait en facteurs) ; le quotient de leurs coefficients est donc *indépendant* de la droite $ax + by + cz = 0$; or c'est, au signe près, le *produit des racines* de l'équation. Les paramètres t, t', t'' des points d'intersection de C avec une droite quelconque satisfont donc à $tt't' = \text{cte}$; après homothétie sur t, on peut écrire cette relation $tt't'' = 1$. Réciproquement, si les paramètres t, t', t'' de 3 points M, M′, M″ de C sont tels que $tt't'' = 1$, la droite joignant M à M′ recoupe C en un point dont le paramètre t''_1 vérifie $tt't''_1 = 1$; on a donc $t''_1 = t''$ et les points M, M′, M″ sont alignés.

Le point double O correspond aux valeurs 0 et ∞ de t. Son (trivial) alignement avec un point quelconque de C amène à écrire $0 . \infty . t = 1$, ce qui n'est pas déraisonnable.

b) Si les facteurs linéaires de $G(x, y)$ sont confondus *(« point de rebroussement »)*, on peut supposer que $G(x, y) = -x^2$, d'où l'équation $F(x, y) - x^2 = 0$ de C. En posant $y = tx$, on obtient la représentation paramétrique

$$x = 1/F(1, t), \; y = t/F(1, t) \; (\text{ou } (1, t, F(1, t)) \text{ en homogène}). \tag{56}$$

L'intersection de C avec une droite D, $ax + by + cz = 0$, se traduit par l'équation $a + bt + cF(1, t) = 0$. Ici les termes en t^2 et t^3 ne proviennent que de $F(1, t)$, de sorte que le rapport de leurs coefficients est fixe ; or, au signe près, ce rapport est la somme des racines de l'équation. Ainsi les paramètres t, t', t'' des points où C rencontre une droite quelconque satisfont à $t + t' + t'' = k$ (constante). La réciproque se démontre « par coïncidence » comme dans le cas *a*).

Après translation sur t, on peut écrire cette condition $t + t' + t'' = 0$, sauf en caractéristique 3.

Le point de rebroussement correspond à la valeur ∞ du paramètre. Son alignement avec un point quelconque de C amène à écrire $\infty + \infty + t = k$, ce qui n'est pas déraisonnable (il n'y a qu'un seul ∞ ; même sur **R**, il n'a pas de signe).

THÉORÈME 40. — *Dans une représentation paramétrique convenable d'une cubique unicursale* C, *les points de paramètres* t, t', t'' *de* C *sont alignés ssi :*

— $tt't'' = 1$ *pour une cubique à point double, dite « nodale » ;*
— $t + t' + t'' = k$ (constante) *pour une cubique à point de rebroussement, dite « cuspidale ».*

Voici quelques applications de ce théorème.

1) On appelle *tangentiel* d'un point (simple) M de C le point M′ où la tangente à C en M recoupe C. Si t est le paramètre de M, le paramètre u du tangentiel est donc $u = 1/t^2$ (resp. $k - 2t$). Un tout petit calcul montre que les tangentiels de 3 points alignés sont alignés. En caractéristique 2, on a $k - 2t = k$, de sorte que toutes les tangentes à une cubique cuspidale passent par un même point : le point de paramètre k de C.

2) Par un point M de C, de paramètre u, combien passe-t-il de tangentes à C, autres que la tangente en M ? Les paramètres t de leurs points de contact sont les solutions de $ut^2 = 1$ dans le cas nodal ; il y a 2 solutions en général, une seule en caractéristique 2. Dans le cas cuspidal, l'équation s'écrit $2t + u = k$; elle a une solution en général, pas de solution en caractéristique 2 (sauf si M est le point de concours des tangentes).

3) Un *point d'inflexion* I d'une courbe plane C est un point simple où la tangente à C coupe C avec multiplicité $\geqslant 3$. Les 3 points communs à une cubique C et à une tangente d'inflexion sont donc confondus au point de contact. Pour une cubique nodale, le paramètre t d'un point d'inflexion vérifie donc $t^3 = 1$; d'où, en général, 3 points d'inflexion de paramètres $1, j, j^2$, d'ailleurs alignés car $1 . j . j^2 = 1$; en caractéristique 3, il y en a un seul, paramètre $t = 1$. Pour une cubique cuspidale,

l'équation est $3t = k$; il y a donc un seul point d'inflexion en général ; en caractéristique 3, il n'y a pas de point d'inflexion à moins que $k = 0$, auquel cas tous les points de C sont d'inflexion ; par exemple toutes les tangentes à la courbe $y = x^3$ sont horizontales ($y' = 3x^2 = 0$) et coupent la courbe avec multiplicité 3.

4) D'après la nature de sa représentation paramétrique ($y = tx$), une *homographie ou une involution* sur une cubique unicursale C est induite sur C par une homographie ou une involution sur le faisceau des droites passant par son point singulier O. Les involutions particulières de la forme $tt' =$ cte dans le cas nodal ($t + t' =$ cte dans le cas cuspidal) sont ainsi définies : deux points M et M′ de C sont homologues ssi ils sont alignés avec un point fixe F *de* C (situation analogue à celle du théorème de Frégier). Sur le faisceau des droites passant par O, cela veut dire que 0 et ∞ sont homologues, c'est-à-dire que les deux tangentes à C en O sont homologues, dans le cas nodal (resp. que ∞, c'est-à-dire la tangente de rebroussement, est élément fixe de l'involution dans le cas cuspidal). On laisse au lecteur le soin d'expliciter les particularités des cas de caractéristique 2 ou 3.

5) Le théorème 40 se généralise aisément *aux 3d points d'intersection de* C *avec une courbe* D *de degré d*. Si $G(x, y, z) = 0$ est l'équation homogène de D, ces points correspondent aux racines de l'équation $G(t, t^2, F(1, t)) = 0$ dans le cas nodal (resp. $G(1, t, F(1, t)) = 0$ dans le cas cuspidal), avec les notations ci-dessus. Les termes en t^{3d} et constant (resp. en t^{3d} et t^{3d-1}) proviennent uniquement du terme en z^d de G. Ainsi le produit (resp. la somme) des racines de l'équation est *fixe*, c'est-à-dire indépendant de D. En prenant une courbe D décomposée en d droites, on voit que les paramètres t_i des $3d$ points d'intersection de C avec une courbe quelconque D de degré d satisfont à :

$$t_1 t_2 \ldots t_{3d} = 1 \quad (\text{resp. } t_1 + t_2 + \ldots + t_{3d} = dk). \tag{56}$$

La réciproque se démontre « par coïncidence » après avoir remarqué qu'il existe (au moins) une courbe de degré d passant par $3d - 1$ points donnés (par exemple une conique par 5 points, une cubique par 8 points, etc. ; le nombre des coefficients du polynôme $G(x, y, z)$ est $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ et surpasse $3d$). Ainsi les courbes de degré d passant par $3d - 2$ points fixes de C découpent, en dehors de ceux-ci, une involution sur C du type décrit au 4).

Il résulte de (56) qu'une conique D est *tritangente* à C, supposée nodale, aux points de paramètres t, t', t'' ssi $t^2t'^2t''^2 = 1$, c'est-à-dire $tt't'' = 1$ ou $tt't'' = -1$. Dans le premier cas les 3 points sont alignés et la conique D est deux fois la droite qui les joint. Dans le second (et sauf en caractéristique 2), il s'agit d'une vraie conique ; les points de contact sont les « conjugués » de 3 points alignés, en appelant conjugués deux points M et M_1 de C dont les tangentes à C se rencontrent sur C ; d'après 2), cela veut dire, en effet, que leurs paramètres t et t_1 sont opposés. Le cas cuspidal est laissé au lecteur.

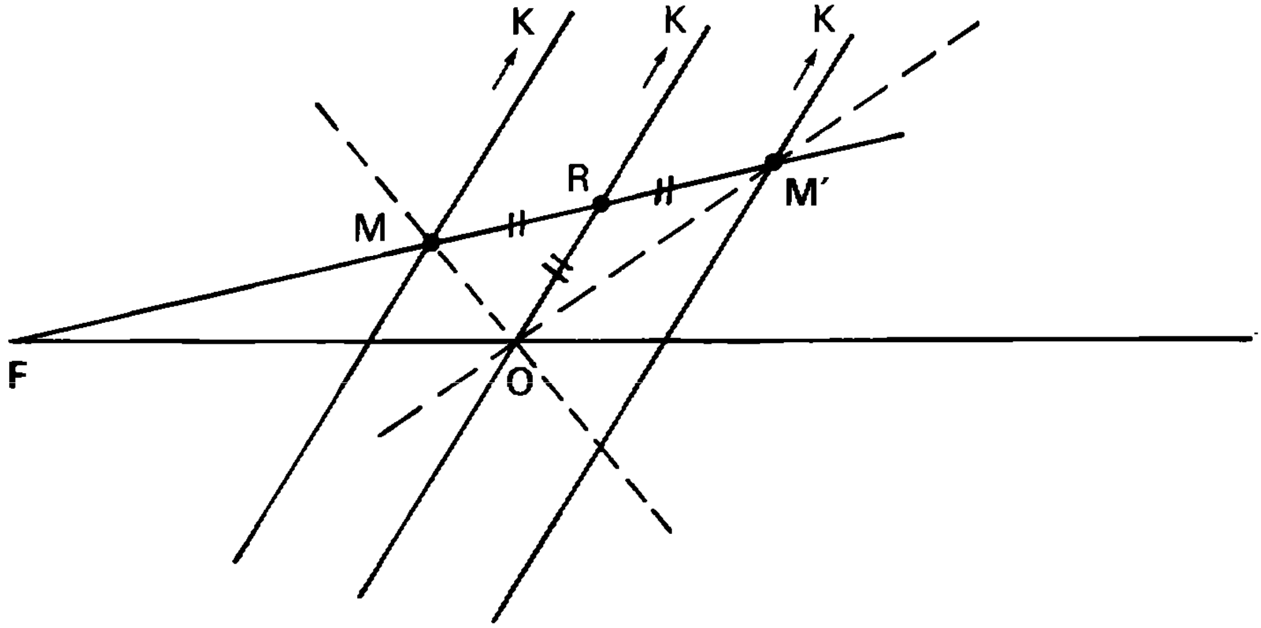
6) Une courbe C du plan euclidien est dite *circlaire* si elle passe par les points cycliques (chap I, § F). Soit C une cubique circulaire nodale (resp. cuspidale). Appelons c et $\bar{c}$ les paramètres des points cycliques sur C. D'après (56), 4 points de C, de paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 sont *cocycliques* (= situés sur un même cercle) ssi

$$t_1t_2t_3t_4c\bar{c} = 1 \quad (\text{resp. } t_1+t_2+t_3+t_4+c+\bar{c}=2k).$$

On notera que $1/c\bar{c}$ (resp. $k-c-\bar{c}$) est le paramètre du troisième point à l'infini (réel celui-ci) de C. Bien que le paramètre t soit la pente y/x, on ne peut affirmer qu'on a $c = i$ que si les axes Ox, Oy sont rectangulaires. Il est toujours possible de les choisir ainsi lorsque C est cuspidale, la seule contrainte étant que la tangente de rebroussement est Oy. Mais, dans le cas nodal, les axes sont les deux tangentes à C en O et celles-ci n'ont aucune raison d'être orthogonales ; si elles le sont, C répond au nom de *strophoïde*.

Le *cercle osculateur* en un point de paramètre t d'une cubique circulaire nodale (resp. cuspidale) C recoupe C au point de paramètre $u = 1/t^3c\bar{c}$ resp. $u = 2k-c-\bar{c}-3t$). Un tout petit calcul, comme dans 1), montre que les cercles osculateurs à C en 4 points cocycliques recoupent C en 4 points cocycliques.

7) Soit C une *strophoïde*. Comme les paramètres i, $-i$ des points cycliques sont opposés, ces points sont « conjugués » au sens du 5) : les tangentes en ces points se rencontrent en un point F situé sur C (on l'appelle le « foyer singulier » de C). Soit j l'involution découpée sur C par les droites qui passent par F ; les points cycliques sont fixes pour j (cf. 4)). L'involution correspondant à j sur le faisceau des droites passant par O a donc les droites isotropes comme droites fixes ; deux droites homologues sont donc orthogonales (th. 32). Ainsi, si M et M' sont deux points de C alignés avec F, les droites OM et OM' sont orthogonales.



Par le calcul : F a pour paramètre $1/i^2 = 1/(-i)^2 = -1$; donc les paramètres t, t' de M et M′ sont reliés par $tt' = -1$.

D'autre part le point à l'infini réel K de C a pour paramètre 1 car $i(-i)1 = 1$. La droite KM (M : paramètre t) recoupe C au point P de paramètre $u = 1/t$; si M′ et P′ sont les points de paramètres t', u' tels que $tt' = uu' = -1$, ils sont alignés avec K. Donc la droite KM détermine sans ambiguïté et de façon rationnelle la droite KM′. Ainsi KM $\mapsto$ KM′ est une involution. Ses droites fixes sont KO et la droite de l'infini. Donc le point d'intersection R de KO avec MM′ est conjugué harmonique du point à l'infini par rapport à M, M′ (th. 30); autrement dit, R est le milieu de MM′. Comme le triangle OMM′ est rectangle en O, les segments RM, RM′ et RO sont égaux. Cela donne une définition élémentaire de la strophoïde : on se donne deux points O et F et une droite D (= OK) passant par O ; sur toute droite passant par F on porte, à partir du point R où elle rencontre D, deux segments de longueur égale à OR ; leurs extrémités M, M′ décrivent la strophoïde.

Ses tangentes au point double O sont les bissectrices des droites D et OF. Si D est orthogonale à OF, la strophoïde est dite « droite ».

8) Une cubique circulaire cuspidale s'appelle une *cissoïde*. Equation de la forme $(x^2 + y^2)(ax + by) - x^2 = 0$. Les paramètres des points cycliques étant i et $-i$, celui du point à l'infini réel est k (notations du th. 40 : $t+t'+t''=k$ est la condition d'alignement). Une parallèle D à

l'asymptote réelle recoupe C en deux points M, M′ de paramètres t, t' tels que $t+t'+k=k$, soit $t+t'=0$; ainsi les droites OM et OM′ sont symétriques par rapport aux axes, c'est-à-dire par rapport à la tangente de rebroussement. Si D est tangente à C, on a $t=t'=0$ et le point de contact est sur la droite orthogonale à la tangente de rebroussement et passant par O (c'est Ox).

9) Soit, enfin, C une cubique unicursale quelconque. Si deux droites D et D′ la coupent en a, b, c et a', b', c', alors les points a'', b'', c'' où $D_{aa'}$, $D_{bb'}$, $D_{cc'}$ recoupent C sont *alignés*. En effet (en identifiant points et paramètres), on a $abc = 1$, $a'b'c' = 1$, $a'' = 1/aa'$, $b'' = 1/bb'$, $c'' = 1/cc'$, d'où $a''b''c'' = 1$ dans le cas nodal. *Idem* dans le cas cuspidal.

§ G / Droite projective complexe. Groupe circulaire

La droite projective complexe $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) = \hat{\mathbf{C}}$ s'obtient en adjoignant au plan C de la variable complexe un « point à l'infini », noté ∞.

Ce n'esi pas la même chose que le plan projectif réel, où l'on adjoint au plan ordinaire toute une droite de points à l'infini. Le plan projectif réel et la droite projective complexe ne sont d'ailleurs pas homéomorphes au sens de la topologie : la seconde est « orientable » et le premier ne l'est pas.

La construction de $\hat{\mathbf{C}}$ est concrétisée par la *projection stéréographique* de la sphère unité S, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. La droite qui joint le pôle Nord N (0, 0, 1) au point $(u, v, 0)$ du plan de l'équateur ($z = 0$) recoupe S au point

$$x = 2u/(u^2 + v^2 + 1), \quad y = 2v/(u^2 + v^2 + 1),$$
$$z = (u^2 + v^2 - 1)/(u^2 + v^2 + 1). \quad (57)$$

Inversement, étant donné un point (x, y, z) de S, distinct de N, la droite qui le joint à N coupe le plan de l'équateur au point de coordonnées

$$u = x/(1 - z), \qquad v = y/(1 - z). \quad (58)$$

On a ainsi obtenu une bijection (et même un homéomorphisme) du plan de l'équateur, qu'on identifie à C, avec la sphère S privée du pôle Nord.

Les formules (57) et (58) montrent que S est une surface rationnelle au sens du § F.

On peut donc *identifier* $\hat{\mathbf{C}}$ *avec la sphère* S.

Les *cercles* de S sont ses intersections avec les plans $ax+by+cz+d=0$. Par (57), l'image plane d'un tel cercle a pour équation

$$(c+d)(u^2+v^2)+2au+2bv+(d-c)=0. \qquad (59)$$

C'est là l'équation d'un cercle, à moins que $c+d=0$, ce qui signifie que le plan, et donc le cercle de S, *passe par* N ; l'image plane est alors une droite. Inversement, en s'arrangeant avec a, b, c, d, on voit que tout cercle et toute droite du plan de l'équateur sont ainsi obtenus.

On est ainsi amenés à appeler *cercle-droite* de $\hat{\mathbf{C}}$ tout cercle de la sphère S. Sa trace sur **C** est un cercle ou une droite ordinaires. *Les droites sont les cercles-droites qui passent par le point à l'infini.*

THÉORÈME 41. — *Quatre points a, b, c, d de $\hat{\mathbf{C}}$ sont cocycliques ou alignés ssi leur birapport (a, b, c, d) est réel.*

Rappelons, en effet, que $(a, b, c, d)=(c-a)(d-b)/(c-b)(d-a)$ (th. 21, § A). L'argument V de $(c-a)/(c-b)$ est l'angle des vecteurs $c-b$ et $c-a$; de même l'argument de $(d-a)/(d-b)$ est l'angle W des vecteurs $d-b$ et $d-a$. Ainsi le birapport (a, b, c, d) est réel ssi l'angle V$-$W est nul ou plat. Il revient au même de dire que les angles de droites $\widehat{(D_{bc}, D_{ac})}$ et $\widehat{(D_{bd}, D_{ad})}$ sont égaux. Or, d'après la Géométrie Elémentaire, c'est là une condition de cocyclicité ou d'alignement.

Appelons *groupe circulaire* **G** de $\hat{\mathbf{C}}$ le groupe formé par les homographies $(h(z)=(az+b)/(cz+d))$ et les *anti-homographies* $(j(z)=(a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d))$. Le groupe des homographies PGL($\mathbf{C}^2$) est un sous-groupe d'indice 2 de **G**. Une homographie conserve les birapports (th. 20, § A), une anti-homographie les conjugue (formule (45), § C). D'après le th. 41, les éléments du groupe circulaire conservent donc les cercles-droites ; nous démontrerons la réciproque plus loin.

Exemples d'homographies et d'anti-homographies

1) Les transformations circulaires de $\hat{\mathbf{C}}$ de la forme $s(z)=az+b$ ou $t(z)=a\bar{z}+b$ sont celles qui laissent fixe le point à l'infini. Comme elles sont composées de translations $(f(z)=z+b)$, de rotations autour de O $(r(z)=uz$, avec $u\bar{u}=1)$, d'homothéties de centre O $(h(z)=kz$ avec k réel non nul) et de la symétrie par rapport à l'axe réel $(g(z)=\bar{z})$, on voit que ce sont des *similitudes* de **C**. Réciproquement, toute similitude du plan euclidien est de cette forme (en composant avec une homo-

thétie et une translation, on se ramène à une isométrie qui laisse O fixe ; on sait alors, par la Géométrie Elémentaire, que c'est une transformation **R**-linéaire dont la matrice dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (rotation) ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ (symétrie par rapport à une droite) avec $a^2 + b^2 = 1$; l'exposé de ceci est particulièrement simple si on a *défini* **C** comme l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

On rappelle que cette utilisation des nombres complexes est fort commode pour l'étude des transformations géométriques élémentaires. Elle montre aussitôt l'existence et l'unicité du point fixe d'une similitude directe ($s(z) = az + b$) qui n'est pas une translation ($a \neq 1$) ; d'où la structure de s. Pour une similitude *inverse*, $t(z) = a\bar{z} + b$, on montre de même qu'elle a un unique point fixe si ce n'est pas une isométrie ; en général, une isométrie inverse ($a\bar{a} = 1$) n'a pas de point fixe et est une « symétrie glissée » (composée de la symétrie par rapport à une droite D et d'une translation parallèle à D) ; lorsqu'une isométrie inverse a un point fixe, elle a une droite D de points fixes et c'est la symétrie par rapport à D.

2) L'*inversion* de pôle O et de puissance (réelle non nulle) k est décrite par $z' = k/\bar{z}$ (chap. I, § F) : cela résulte des formules (25) *(ibid.)*, ou du fait que z et $1/\bar{z}$ ont même argument, le produit des mesures algébriques de Oz et Oz' étant alors k. L'inversion de pôle a et de puissance k est alors décrite par

$$z' - a = k/\overline{(z - a)} = k/(\bar{z} - \bar{a}). \tag{60}$$

C'est évidemment une anti-homographie involutive. Réciproquement :

THÉORÈME 42. — *Toute anti-homographie involutive est une « inversion-symétrie » (c'est-à-dire une inversion ou une symétrie par rapport à une droite).*

En effet, si le point à l'infini est fixe, il s'agit d'une similitude inverse $s(z) = a\bar{z} + b$; comme $z = s^2(z) = a\bar{a}z + a\bar{b} + b$, on a $a\bar{a} = 1$ et s est une isométrie ; en prenant un point non-fixe c de s, on voit que le milieu de c, $s(c)$ est fixe et que la médiatrice D de ces points est fixe aussi ; donc s est la symétrie par rapport à D.

Sinon, soit m l'homologue du point à l'infini par l'anti-homographie involutive f. Comme $f(z) - m$ est infini pour $z = m$ et nul pour z infini, il est de la forme $d/(\bar{z}-\bar{m})$. Ainsi, en posant $f(z)=t$, on a $(t-m)(\bar{z}-\bar{m})=d$. En échangeant z et t, on voit que d est son propre conjugué, donc est réel. Ainsi f est une inversion (de centre m et de puissance d).

Remarque sur les points fixes. — On sait qu'une homographie ($\neq 1$) a 2 ou 1 points fixes (§ D). Une inversion a un cercle de points fixes si sa puissance est positive, pas de point fixe si elle est négative.

Si une antihomographie f a au moins un point fixe, alors une jfj^{-1}, pour une homographie j convenable, a un point fixe à l'infini, ce qui nous ramène au cas d'une similitude inverse. Or on a vu qu'elle a (à distance finie), soit un point fixe (cas général), soit 0 point fixe (symétrie glissée), soit une droite de points fixes (symétrie) et que c'est là le seul cas où elle est involutive. En revenant à f (qui est involutive en même temps que jfj^{-1}), on voit que les cas suivants peuvent se présenter :

— pas de point fixe ;
— un seul point fixe (conjuguée d'une symétrie glissée) ;
— 2 points fixes (cas général parmi les anti-homographies ayant au moins un point fixe) ;
— un cercle-droite de points fixes, auquel cas f est une symétrie ou une inversion de puissance positive.

THÉORÈME 43. — *Une bijection f de* **C** *sur* **C** *transforme tout cercle-droite en un cercle-droite ssi c'est un élément du groupe circulaire (c'est-à-dire une homographie ou une anti-homographie).*

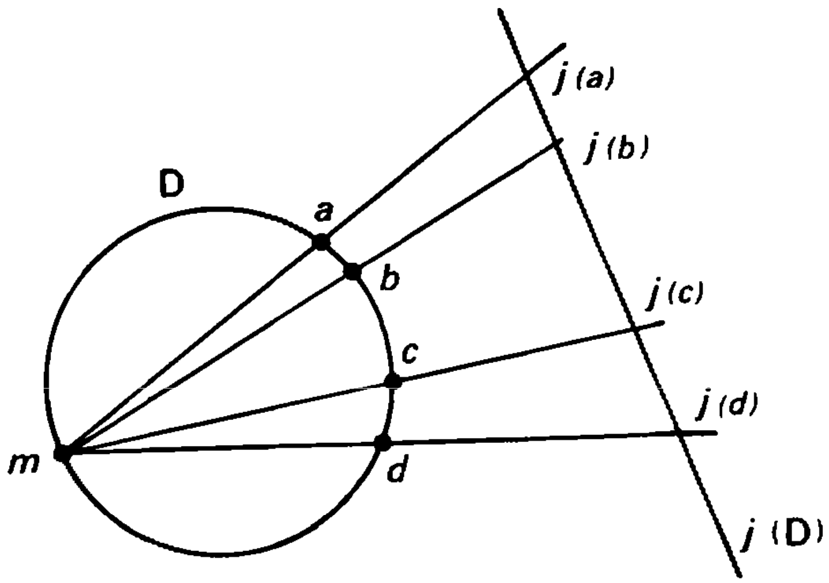
La suffisance a été vue. Pour la nécessité on peut, quitte à composer f avec une homographie, supposer que le point à l'infini est fixe pour f. Alors f transforme toute (vraie) droite en (vraie) droite et tout (vrai) cercle en (vrai) cercle. Ainsi, en termes imagés, f conserve tout ce qui se construit avec la règle et le compas. Or on va voir que c'est le cas de la figure formée par 4 points a, b, c, d tels que $(a, b, c, d) = -1$ (« *Quadrangle harmonique* »).

Alors, la conservation des quadrangles harmoniques acquise, le th. 28 (§ C) montre que f est composée d'une homographie et d'un automorphisme s de **C**. Comme f transforme points cocycliques en points cocycliques, le th. 41 montre que s transforme tout nombre réel en un nombre réel. Donc s induit l'identité sur **R** (cf. cor. au th. 28) et est par conséquent l'identité ou la conjugaison de **C**.

Reste à montrer que la construction du 4^e sommet d'un quadrangle harmonique se fait « avec la règle et le compas ». On aura besoin du lemme suivant :

LEMME. — *Soient a, b, c, d 4 points d'un cercle-droite* D. *Alors le* *birapport* $(a, b, c, d)_{\mathbf{C}}$ *(calculé dans* $\hat{\mathbf{C}}$*) est égal au birapport* $(a, b, c, d)_{\mathrm{D}}$ *(calculé pour la structure de droite projective réelle de la droite ou de la conique D).*

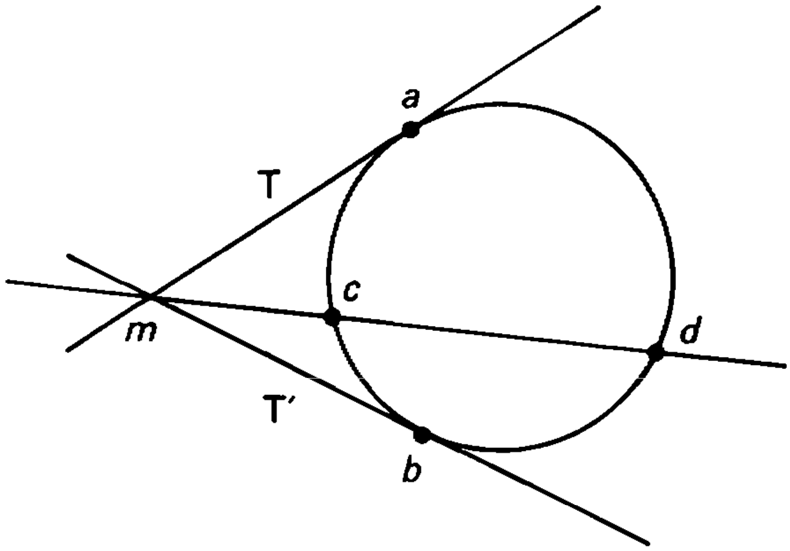
Si D est une droite, elle a une représentation paramétrique $z = pt + q$ où p et q sont complexes et où t parcourt $\mathbf{R}$; d'où le résultat. Si D est un cercle, on fait une inversion j dont le pôle m est sur D. Par définition, le birapport $(a, b, c, d)_{\mathrm{D}}$ est celui des droites ma, mb, mc, md (§ E, th. 33),



donc celui des points $j(a)$, $j(b)$, $j(c)$, $j(d)$ de la droite $j(\mathrm{D})$. Ce dernier vaut $(j(a), j(b), j(c), j(d))_{\mathbf{C}}$ d'après la première partie de la démonstration. Comme j est une anti-homographie, ce birapport est le conjugué de $(a, b, c, d)_{\mathbf{C}}$. Mais $(a, b, c, d)_{\mathbf{C}}$ est réel (th. 41). On a gagné.

L'égalité des birapports n'est pas vraie pour une conique autre qu'un cercle : celui calculé dans **C** n'est d'ailleurs pas réel si les 4 points ne sont pas cocycliques.

Alors, si 4 points forment un quadrangle harmonique — $(a, b, c, d) = -1$ — ils sont sur un même cercle-droite D et, d'après le lemme, c et d sont homologues dans l'involution (sur D) de points fixes a et b (th. 30, § D). Lorsque D est un cercle, cela veut dire que c et d sont alignés avec le point de Frégier de l'involution (th. 35, § E), c'est-à-dire avec le point de rencontre des tangentes à D en a et en b. Ainsi le 4^{e} harmonique d se construit avec la règle et le compas à partir de a, b, c, construction qui se transporte à $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$. Si D est une droite, on utilise la construction du 4^{e} harmonique avec la règle seule (§ C). CQFD.



Pour ceux qui préfèrent une démonstration plus formelle, la voici. Soient a, b, c, d tels que $(a, b, c, d) = -1$. Supposons les, pour fixer les idées, sur un même cercle D. Par hypothèse, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ et $f(d)$ sont sur le cercle $f(\mathrm{D})$. Si T (resp. T′) est la tangente à D en a (resp. b), $f(\mathrm{T})$ (resp. $f(\mathrm{T}')$), qui est une droite, ne peut être que la tangente à $f(\mathrm{D})$ en $f(a)$ (resp. $f(b)$). Soit m le point commun (à distance finie ou à l'infini) à T et T′ ; alors $f(m)$ est le point commun à $f(\mathrm{T})$ et $f(\mathrm{T}')$. Comme m, c, d sont alignés (Frégier), il en est de même de $f(m)$, $f(c)$, $f(d)$. On a donc $(f(a), f(b), f(c), f(d)) = -1$.

Remarque. — Ce qui précède donne une description d'une involution j de $\hat{\mathbf{C}}$ lorsqu'elle a 2 points fixes a et b : pour tout point m (en dehors de la droite ab), on trace le cercle D qui passe par a, b et m et ses tangentes T, T′ en a et b. Elles se rencontrent en un point p et $j(m)$ est le second point d'intersection de la droite pm avec D.

Autre démonstration du th. 43. — On peut encore supposer que f transforme droites en droites et que $f(0) = 0$. Alors, d'après la remarque suivant le th. 7, § C, chap. I, f est une permutation *semi-linéaire* du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$. Tout automorphisme de $\mathbf{R}$ étant trivial, f est $\mathbf{R}$-linéaire. Comme elle conserve les cercles, elle multiplie la forme $x^2 + y^2$ par une constante ; c'est donc une similitude, directe ou inverse.

THÉORÈME 44. — *a) Toute anti-homographie f est produit d'au plus 3 inversions-symétries.*

b) Toute homographie g est produit d'au plus 4 inversions-symétries.

c) On ne peut pas faire mieux.

Démontrons *a*). Par conjugaison – opération qui respecte l'involutivité des éléments —, on peut supposer que $f(\infty)$ est un nombre fini a. Soit i une inversion de pôle a. Alors $if(\infty) = \infty$ et if est une similitude directe. Soient b son rapport et h l'homothétie de centre a et de rapport $1/b$. Alors hif est une isométrie directe, rotation ou translation, connue pour être le produit ss' de deux symétries. D'autre part hi est une inversion j de pôle a. D'où $jf = ss'$ et $f = jss'$.

En composant g avec une inversion-symétrie, b) se ramène à a).

Pour question d'imparité, le 3 de a) ne pourrait être amélioré que par 1 ; or il y a d'autres anti-homographies que les inversions-symétries (p. ex. $z' = 3\bar{z}$). Pour les homographies, le 4 de b) ne pourrait être amélioré que par 2. Considérons une similitude $h(z) = az$ qui n'est ni une homothétie, ni une rotation (p. ex. $h(z) = 23iz$). Si h était le produit de 2 inversions, elles devraient avoir le même pôle (car $h(\infty) = \infty$) et h serait une homothétie, ce qui est exclus. Si h était le produit de deux symétries, ce serait une isométrie, ce qui est exclus aussi. Enfin, si h était produit d'une inversion et d'une symétrie, on aurait $h(\infty) \neq \infty$, ce qui n'est pas. Ceci démontre c).

En fait, on peut voir qu'une homographie qui est produit de 2 inversions-symétries est conjuguée d'une isométrie ou d'une homothétie.

§ H / Topologie des espaces projectifs

Nous nous bornerons ici à des corps de base K *localement compacts* non discrets. On rappelle que ceux-ci sont : 1) **R** et **C** ; 2) Les extensions finies des *corps p-adiques* $\mathbf{Q}_p$, complétés de **Q** pour la valeur absolue p-adique (p : nombre premier) ; 3) Les corps **F**((X)) des séries formelles à une variable sur un corps fini **F** (voir, p. ex., Bourbaki, Algèbre Commutative, chap. VI). Un espace vectoriel topologique E de dimension finie n sur un tel corps K a nécessairement la topologie produit, celle de K^n (voir Bourbaki, Espaces Vectoriels Topologiques, chap. I) ; il est donc localement compact. Un tel corps K est valué par une valeur absolue v, et E est normé par une norme N. On supposera que, pour tout x dans E, il existe a dans K tel que $N(x) = v(a)$.

C'est automatique pour $K = \mathbf{R}$ ou **C** : on prend $a = N(x)$, qui est réel. Sinon, l'on peut s'arranger avec la norme N pour qu'il en soit ainsi (prendre une « norme sup »).

Cette condition veut dire que toute droite vectorielle de E rencontre la « *sphère unité* » S, définie par $N(x) = 1$.

THÉORÈME 45. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, l'espace* *projectif* $\mathbf{P}(E)$, *muni de la topologie quotient de celle de* $E-(0)$, *est séparé et compact. C'est aussi le quotient* S/U *de la sphère unité* S *par le sous-groupe* U *des éléments de valeur absolue* 1 *de* K *(opérant sur* S *par homothéties).*

Rappelons (Bourbaki, *Topologie générale*, chap. I) que l'espace quotient d'un espace topologique V par une relation d'équivalence R est *séparé* ssi :

a) le saturé de tout ouvert U est ouvert,
b) le graphe de la relation R dans $V \times V$ est fermé.

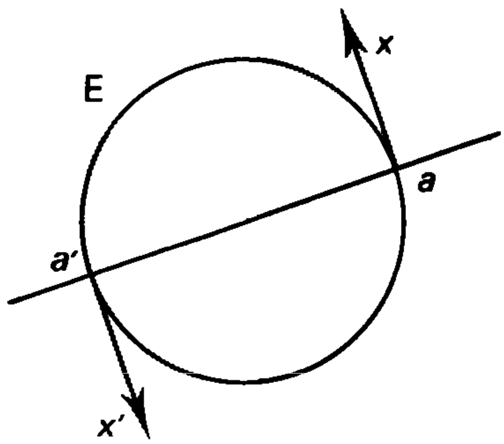
Ici, où V est $E-(0)$ et où R est la relation de collinéarité, le saturé d'un ouvert U est la réunion de ses homothétiques aU ($a \in K^*$), une réunion d'ouverts, qui est ouverte. D'autre part, en prenant des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans E et les coordonnées correspondantes $(y_1, \ldots, y_n)$ dans le second facteur de $E \times E$, le graphe de R est défini par les équations polynômes $x_i y_j - x_j y_i = 0$ $(i \neq j)$ et est donc fermé. Donc $\mathbf{P}(E)$ est séparé.

L'application canonique p de $E-(0)$ sur $\mathbf{P}(E)$ est continue par définition et on a $p(S) = \mathbf{P}(E)$. Ainsi $\mathbf{P}(E)$ est l'image continue d'un compact dans un espace séparé et est donc compact. C'est aussi le quotient de la sphère S par la relation d'équivalence induite par R sur S ; or, si $N(x) = N(y) = 1$, on a une relation de la forme $x = ay$ ($a \in K^*$) ssi $v(a) = 1$; autrement dit, $\mathbf{P}(E) = S/U$.

Exemple des espaces projectifs réels. — Pour $K = \mathbf{R}$, le groupe U se réduit à $+1$ et -1, de sorte que $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ est le quotient de la sphère unité S^n de $\mathbf{R}^{n+1}$ par la relation dite *d'antipodisme*, où l'on identifie les couples de points diamétralement opposés de S^n.

Pour $n = 1$, S^1 s'identifie au groupe des nombres complexes de module 1 dont l'endomorphisme h défini par $h(z) = z^2$ a justement pour noyau U. Ainsi, $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ s'identifie à $Im(h)$, qui est *le cercle* S^1.

Pour $n = 2$, on obtient aussi $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ en prenant l'hémisphère Nord H de la sphère unité S^2 et en y identifiant les couples de points diamétralement opposés de l'équateur E. Cette identification se visualise assez mal ; on montre d'ailleurs qu'on ne peut pas plonger $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ comme surface de $\mathbf{R}^3$ sans qu'elle se recoupe. Ce plan projectif réel est une surface *non orientable* : en effet prenons, en un point a de l'équateur E un repère tangent à S^2 où l'axe ax pointe vers l'est et l'axe ay vers le nord ; déplaçons a le long de E pour aller au point diamétralement opposé a' (par exemple en allant vers l'est) ; dans le repère $a'x', a'y'$ obtenu par ce déplacement, $a'x'$ pointe toujours vers l'est et $a'y'$ vers



le nord ; mais le repère en a obtenu à partir de ce dernier par antipodisme a son premier axe ax_1 qui pointe vers l'est et son second axe ay_1 qui pointe vers le sud ; ce repère (ax_1, ay_1) a ainsi l'orientation opposée à celle du repère initial (ax, ay). L'exemple le plus connu de surface non orientable est *la bande de Möbius* ; celle-ci, ayant un bord, ne peut être homéomorphe à $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$; mais $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ contient des bandes de Möbius ; prenons deux points assez rapprochés a et b de l'équateur E ; les plans menés par a et b parallèlement au plan médiateur de ab découpent sur l'hémisphère nord H une bande sphérique B, qui est limitée sur l'équateur par l'arc ab et par l'arc $a'b'$ diamétralement opposé ; l'identification de ab avec $a'b'$ conduit à tordre B.

Bien entendu, les droites de $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ sont les images des grands cercles, sections de la sphère par les plans passant par 0.

La sphère S^3 a une structure de groupe (non commutatif) induite par la multiplication des quaternions. L'espace projectif $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ s'identifie donc au *groupe* $S^3/(+1, -1)$. En tant que groupe, cet espace projectif est, cette fois, *orientable* : on obtient une orientation cohérente en transportant par translations à gauche un repère tangent en l'élément unité.

Ce raisonnement montre que S^2 ne peut pas être munie d'une structure de groupe « raisonnable ».

On montre que $(+1, -1)$ est le centre du groupe S^3.

Exemple des espaces projectifs complexes. — Pour $K = \mathbf{C}$, le groupe U du th. 45 est celui des nombres complexes de module 1, homéomorphe au cercle S^1. La sphère unité S de $\mathbf{C}^n$, définie par l'équation

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \ldots + z_n\bar{z}_n = 1 ,$$

est de dimension réelle $2n - 1$.

Ainsi $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ est l'espace des *orbites* du groupe U opérant sur S^3. Ces orbites sont des cercles et leur donnée est ce qu'on appelle la *fibration de Hopf* de S^3. Or on a vu au début du § G que $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ est homéomorphe à S^2. La « base » de la fibration de Hopf, c'est-à-dire l'espace quotient, est donc S^2. On dit que S^3 est fibrée par des cercles sur S^2.

En choisissant un exemplaire de **C** dans le corps des quaternions, on peut regarder U comme un sous-groupe de S^3. Mais celui-ci n'est pas un sous-groupe distingué, de sorte que l'ensemble S^3/U des classes Ux n'est pas un groupe.

Plus généralement, S^{2n+1} est fibrée par des cercles sur $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$.

CHAPITRE III

Classifications des coniques et quadriques

Une hypersurface d'un espace affine ou projectif qui est définie par une équation de degré 2 est appelée une *hyperquadrique* ou, plus simplement, une *quadrique*; une quadrique d'un plan affine ou projectif est donc une *conique*.

Classifier les quadriques d'un certain espace E, c'est énumérer leurs orbites sous l'action d'un groupe bien choisi G d'automorphismes de E :

— groupe projectif si E est un espace projectif;
— groupe affine si E est un espace affine;
— groupe des isométries (ou similitudes) si E est un espace euclidien sur **R**.

Pour cela, on pourra, par exemple, exhiber un élément de chaque orbite. Comme G opère de façon simplement transitive sur les repères de E, on peut, pour trouver l'orbite d'une quadrique S, prendre un repère R intrinsèquement lié à S; l'orbite de S est alors formée des quadriques ayant, dans les autres repères de E, la même équation que S dans R.

Les éléments de G qui laissent la quadrique S stable forment un sous-groupe G(S) de G et l'orbite de S est en bijection avec l'ensemble des classes G/G(S). Elle est d'autant plus petite que G(S) est plus grand.

§ A / Qu'est-ce qu'une quadrique ?

On a vu, au chap. I, § H, que sur un corps K *algébriquement clos*, l'équation d'une quadrique est déterminée, à un facteur près, par l'ensemble de ses points. Il n'en est pas de même sur un corps K quelconque : l'ensemble des points « *rationnels* » (c'est-à-dire à coordonnées, affines ou homogènes, dans K) d'une quadrique S ne détermine pas toujours son équation.

Par exemple, dans $\mathbf{R}^2$, les équations $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et $x^2 + xy + y^2 + 3 = 0$ définissent le même ensemble (vide). Dans $\mathbf{R}^3$, les équations $x^2 + y^2 = 0$ et $3x^2 + 5y^2 = 0$ définissent l'axe Oz $(x = y = 0)$; de même $x^2 - 2y^2 = 0$ et $3x^2 - y^2 = 0$ dans $\mathbf{F}_5^3$.

Cependant :

THÉORÈME 46. — *Soit* $F(x) = 0$ *une équation d'une quadrique* S *d'un espace affine* (resp. *projectif*) *sur un corps* K. *Si elle est satisfaite par un point* simple *de* S, *et si* $K \neq \mathbf{F}_2$ *dans le cas affine, toute autre équation de* S *est proportionnelle à* F.

Commençons par le cas affine et prenons le point simple donné pour origine. L'équation $F(x) = 0$ s'écrit alors $Q(x) + L(x) = 0$, où Q est une forme quadratique et L une forme linéaire en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et où $L \neq 0$. Soit $Q^0(x) + L^0(x) = 0$ une autre équation définissant la partie S de K^n. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME. — *Soit* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *un polynôme homogène de degré 2 sur un corps* K.

a) Si $P(a) = 0$ *pour tout* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *de* K^n, *alors* $P = 0$.

b) Si $P(a) = 0$ *pour tout* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *de* K^n *tel que* $a_1 \neq 0$ *et si* $K \neq \mathbf{F}_2$, *alors* $P = 0$.

c) Si $P(0, a_2, \ldots, a_n) = 0$ *pour tout* $(a_2, \ldots, a_n)$ *de* K^{n-1}, *alors* P *est multiple de* x_1.

En effet, écrivons $P(x_1, \ldots, x_n) = cx_1^2 + x_1P_1(x_2, \ldots, x_n) + P_2(x_2, \ldots, x_n)$, où P_i est homogène de degré i. Pour *a*), on fait une récurrence sur n à partir du cas trivial $n = 1$. En prenant $a_1 = 0, a_2, \ldots, a_n$ quelconques, la récurrence donne $P_2 = 0$; ce qui démontre d'ailleurs *c*). En prenant $a_1 = 1, a_2 = \ldots = a_n = 0$, on voit que c est nul. Enfin, pour $a_1 = 1$ et $a_2, \ldots, a_n$ quelconques, on a $P_1(a_2, \ldots, a_n) = 0$, d'où $P_1 = 0$ car c'est une forme linéaire.

Passons à *b*). La relation $P(1, 0, \ldots, 0) = 0$ donne $c = 0$. Si $P_1 = 0$, alors $P = P_2$, qui est nul par *a*). Sinon, soit b dans K^{n-1} tel que $P_1(b) \neq 0$; on a alors $a_1P_1(b) + P_2(b) = 0$, soit $a_1 = -P_2(b)/P_1(b)$ pour tout a_1 non nul dans K, ce qui est impossible si $K \neq \mathbf{F}_2$.

Sur $\mathbf{F}_2$, le polynôme $xy + y^2$ ne vérifie pas *b*).

Démontrons le th. 46 affine. On coupe S par les droites $x' = tx$ ($t \in K$) passant par O (comme pour paramétrer S). L'équation (en t) $O = Q(tx) + L(tx) = t^2Q(x) + tL(x)$ a pour racines $t = 0$ et celle de (E) : $tQ(x) + L(x) = 0$. Donc (E) et l'équation analogue (E^0) : $tQ^0(x) + L^0(x) = 0$ ont les mêmes racines pour tout x de K^n.

Si $L(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$, la racine est $t = 0$, d'où $L^0(x) = 0$. Si $L(x) = 0$ et $Q(x) = 0$, (E) est toujours vérifiée, donc (E^0) aussi, d'où $Q^0(x) = L^0(x) = 0$. En tout cas $L(x) = 0$ implique $L^0(x) = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}(L^0)$ et L^0 est une forme linéaire proportionnelle à L : $L^0 = cL$ avec c dans K.

Enfin, le déterminant $Q(x)L^0(x) - L(x)Q^0(x)$ de (E) et (E^0) est toujours nul (sinon la solution $(t, 1)$ du système serait $(0, 0)$). Comme $L^0 = cL$, cela s'écrit $(Q^0(x) - cQ(x))L(x) = 0$ pour tout x de K^n. En appliquant le *b*) du lemme, on voit que $Q^0 = cQ$, d'où $Q^0 + L^0 = c(Q + L)$. CQFD.

Passons enfin au th. 46 projectif. Pour $K \neq \mathbf{F}_2$, il se ramène à l'énoncé affine. Prenons donc $K = \mathbf{F}_2$ et soient $G(x) = 0$ et $G^0(x) = 0$ deux équations homogènes du même ensemble S. Comme $G(x) \neq 0$ veut dire ici $G(x) = 1$, et de même pour G^0, les formes G et G^0 prennent partout la même valeur et sont donc égales par le *a*) du lemme.

Les coniques affines $x^2 + xy + y^2 + x = 0$ et $xy + y^2 = 0$ sur $\mathbf{F}_2$ ont les mêmes points rationnels $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Mais la première n'a pas de point rationnel à l'infini tandis que la seconde en a 2.

L'hypothèse d'existence d'un point rationnel simple n'a pas été utilisée lorsque $K = \mathbf{F}_2$ dans le cas projectif.

§ B / Classifications affine et euclidienne des quadriques

Nous considérons ici des quadriques dans un espace affine E de dimension n sur un corps K *de caractéristique* $\neq 2$. Cela nous permettra d'utiliser la décomposition en carrés des formes quadratiques. Nous donnerons au fur et à mesure, dans des alinéas marqués (**R**) (resp. (EUCL)), les compléments relatifs au cas où $K = \mathbf{R}$ (resp. où E est un espace euclidien réel).

Lorsqu'on a fait choix d'une origine dans E, l'équation d'une quadrique S s'écrit $Q(x) + L(x) + k = 0$, où Q est une forme quadratique, L une forme linéaire et k une constante. Le déplacement de l'origine en a transforme cette équation en $Q(x + a) + L(x + a) + k = 0$, c'est-à-dire, en notant B la forme bilinéaire associée à Q:

$$Q(x) + (2B(x, a) + L(x)) + Q(a) + L(a) + k = 0\,;$$

la forme Q est donc *intrinsèque*; la forme $L(x)$ est remplacée par

$$L'(x) = L(x) + 2B(x, a)\,. \tag{61}$$

Notons r ($\leqslant n$) le *rang* de Q et prenons une base orthogonale pour Q.

(EUCL) On prend ici une base *orthonormale* pour le produit scalaire euclidien $(x.y)$ et orthogonale pour Q.

Rappelons la démonstration d'existence d'une telle base. Comme le produit scalaire $(x.y)$ est non dégénéré, il y a, pour x dans E, un unique $s(x)$ tel que $B(x, y) = (s(x).y)$ et s est linéaire. La symétrie de B se traduit par $(s(x).y) = (x.s(y))$. On en déduit que si un sous-espace F de E est stable par s, son orthogonal F^0 pour le produit scalaire l'est aussi (prendre x dans F^0 et y dans F). Soit a une valeur propre, *a priori* complexe, de s et soit z un vecteur propre correspondant dans le complexifié de E : $s(z) = az$. Alors $s(\bar{z}) = \overline{az}$, $(s(z).\bar{z}) = (z.s(\bar{z}))$, c'est-à-dire $a(z.\bar{z}) = \bar{a}(z.\bar{z})$. Si a n'était pas réel, on en déduirait $(z.\bar{z}) = 0$, d'où, en posant $z = x + iy$, $(x, y \in E$, $(x.x) + (y.y) = 0$; alors $x = y = 0$, $z = 0$, impossible. Donc a et z sont réels. On normalise z et on le prend comme premier vecteur de base. On passe alors à l'orthogonal $(\mathbf{R}z)^0$ de $\mathbf{R}z$ et l'on procède par récurrence sur la dimension n.

Dans une telle base $(e_1, \ldots, e_n)$, l'équation de S s'écrit

$$a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n + k = 0\,,$$

où $a_1, \ldots, a_r$ sont non nuls. Le sous-espace N engendré par $e_{r+1}, \ldots, e_n$ est le *noyau* N de la forme Q (c.-à-d. l'orthogonal pour Q de l'espace entier).

(EUCL) De plus $\mathbf{R}e_1 + \ldots + \mathbf{R}e_r$ est l'orthogonal N^0 de N pour le produit scalaire.

Quitte à remplacer x_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) par $x_i + (b_i/2a_i)$ (translation de l'origine), on se ramène à

$$a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + b_{r+1}x_{r+1} + \ldots + b_nx_n + k = 0\,.$$

Deux cas peuvent se produire, selon que les b_i sont tous nuls ou non :

a) S'ils sont tous nuls, l'équation prend la forme

$$a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + k = 0\,. \tag{62}$$

C'est trivialement le cas lorsque $r = n$. Intrinsèquement, cela veut dire qu'on a $N \subset \mathrm{Ker}(L)$ avec les notations du début, condition indépendante de l'origine en vertu de (61).

b) S'ils sont non tous nuls, on choisit une base de N telle que la forme $b_{r+1}x_{r+1} + \dots + b_n x_n$ soit proportionnelle à une forme coordonnée, qu'on notera encore bx_{r+1}. Par translation sur x_{r+1}, on y fait rentrer la constante k.

(EUCL) La base choisie dans N peut être supposée orthonormale.

D'où, dans le cas *b*), l'équation :

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 + bx_{r+1} = 0. \tag{63}$$

Si $r < n$ dans le cas *a*) (resp. $r + 1 < n$ dans le cas *b*)), S est le produit d'une quadrique de K^r (resp. K^{r+1}) et d'un espace affine de dimension $n - r$ (resp. $n - r - 1$). On dit que c'est un *cylindre*.

Dans le cas *a*), l'origine et les axes sont centre et axes *de symétrie* de S. Lorsque $r = n$, un tout petit calcul montre que ce centre de symétrie est *unique*; on dit qu'on a affaire à une *quadrique à centre*.

On verra au chap. IV que le centre de S est le pôle de l'hyperplan à l'infini.

Classification sur un corps algébriquement clos. — Lorsque K est algébriquement clos, plus généralement lorsque tout élément de K est un carré, on peut faire rentrer les coefficients a_i de (62) ou (63) dans les x_i correspondants, et, dans (63), b dans x_{r+1}. La classification est alors :

— cas *a*), valeur du rang r, nullité ou non du terme constant k (si $k \neq 0$, on peut prendre $k = 1$);
— cas *b*), valeur du rang r.

Classification affine sur **R**. — La loi d'inertie de Sylvester montre que le nombre p des a_i qui sont positifs (resp. le nombre q des a_i qui sont négatifs) est un invariant de Q; le couple (p, q) $(p + q = r)$ est appelé la *signature* de Q. Comme tout réel positif est un carré, on peut remplacer les premiers par $+1$ et les autres par -1 dans (62) ou (63). D'où la classification :

— cas *a*), valeur de la signature (p, q), nullité ou non de k (si $k \neq 0$, on peut prendre $k = 1$ ou $k = -1$);
— cas *b*), valeur de (p, q), on prend $b = 1$ dans (63).

La classification est encore « discrète » comme sur un corps algébriquement clos.

Le changement de tous les signes dans l'équation de S montre que les signatures (p, q) et (q, p) donnent des quadriques affinement équivalentes dans le cas *a*) si $k = 0$, et dans le cas *b*).

Nous allons expliciter les cas de dimension 2 et 3.

Classification affine des coniques de $\mathbf{R}^2$.

Si Q est de *rang 2*, on est dans le cas *a*). Si $k \neq 0$, on normalise par $k = -1$ et on obtient 3 équations possibles (à permutation près des coordonnées x, y) :

— $-x^2 - y^2 - 1 = 0$, conique vide, dite « ellipse imaginaire », (EI);
— $x^2 - y^2 - 1 = 0$, conique appelée « hyperbole » (H), asymptotes $y = x$ et $y = -x$; l'axe Ox est dit transverse (il rencontre H en deux points réels), et l'axe Oy est dit non transverse;
— $x^2 + y^2 - 1 = 0$, conique appelée « ellipse » (E).

Si $k = 0$, on obtient, à permutation près des coordonnées, 2 équations :

— $x^2 + y^2 = 0$, deux droites complexes conjuguées par O;
— $x^2 - y^2 = 0$, deux droites réelles par O.

Si Q est de *rang 1*, le cas *a*) donne l'équation

— $x^2 + k = 0$ avec $k = 1, -1, 0$; on a affaire à deux droites parallèles, complexes conjuguées si $k = 1$, réelles si $k = -1$, confondues si $k = 0$.

Dans le cas *b*), on a la seule équation :

— $x^2 + y = 0$, conique appelée « parabole » (P).

Seules (EI), (H), (E) et (P) sont des coniques irréductibles.

Classification euclidienne des coniques de $\mathbf{R}^2$.

Ici il n'est plus loisible de faire « rentrer » des coefficients dans des variables, ce qui revient à multiplier celles-ci par des nombres réels. La classification n'est plus « discrète » et fait intervenir des nombres réels positifs a, b, p. Bornons-nous aux coniques irréductibles :

(EI) $(x/a)^2 + (y/b)^2 + 1 = 0$;
(H) $(x/a)^2 - (y/b)^2 - 1 = 0$;
(E) $(x/a)^2 + (y/b)^2 - 1 = 0$;
(P) $x^2 - 2py = 0$.

Pour (EI) et (E), on peut supposer $a \geqslant b$.

Classification affine des quadriques de $\mathbf{R}^3$.

Si Q est de *rang 3* et si $k \neq 0$, on normalise par $k = -1$. Les signatures de Q se ramènent à $(+++)$, $(++-)$, $(+--)$ et $(---)$. D'où les équations :

— $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, « ellipsoïde », (E) ;
— $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, « hyperboloïde à une nappe », (H.1) ;
— $x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$, « hyperboloïde à deux nappes », (H.2) ;
— $-x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$, quadrique vide, « ellipsoïde imaginaire » (EI).

Affinement, un ellipsoïde est une sphère. Un hyperboloïde à une (resp. deux) nappe(s) s'obtient en faisant tourner une hyperbole autour de son axe non-transverse (resp. transverse). On peut montrer que, si l'on fait tourner une droite D autour d'un axe qui ne lui est pas coplanaire, on obtient un (H.1) (« faisceau de macaronis »).

Si $k = 0$, on a, au signe près, deux signatures pour Q :

— $(+++)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, cône imaginaire de sommet O ;
— $(++-)$ $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, cône réel de sommet O.

Si Q est *de rang 2*, on obtient, dans le cas *a*), les 5 équations des coniques dont la forme quadratique est de rang 2 et les quadriques correspondantes sont des *cylindres* sur ces coniques : cylindre imaginaire, cylindre hyperbolique, cylindre elliptique, deux plans complexes conjugués passant par Oz, deux plans réels passant par Oz. Dans le cas *b*), l'équation $ax^2 + a'y^2 + bz = 0$ donnée par (63) peut être normalisée par $b = -1$ et, quitte à changer z en $-z$, on peut supposer a positif, c'est-à-dire $a = 1$. D'où, suivant le signe de a', les deux équations :

— $z = x^2 + y^2$, « paraboloïde elliptique », (PE) ;
— $z = x^2 - y^2$, « paraboloïde hyperbolique », (PH).

Le paraboloïde elliptique s'obtient en faisant tourner la parabole $z = x^2$, $y = 0$ autour de son axe Oz.

Si Q est *de rang 1*, on obtient, dans le cas *a*), les équations $x^2 + k = 0$ pour $k = 1, -1, 0$: deux plans complexes conjugués, réels ou confondus. Dans le cas *b*), on a une seule équation, qui est

$-x^2 + y = 0$, « cylindre parabolique ».

Enfin Q ne saurait être de rang nul, sinon l'équation de S « tomberait » au premier degré et on aurait un plan.

Les quadriques irréductibles sont (E), (H.1), (H.2), (EI), (PE), (PH), les 4 cylindres et les 2 cônes.

THÉORÈME 47. — *A l'exception des cylindres, cônes et réunions de plans, les seules quadriques qui contiennent des droites réelles sont* (H.1) *et* (PH).

En effet, dans les autres cas, l'abscisse x d'un point réel de la quadrique est soumise à des contraintes : $|x| \leqslant 1$ pour (E), $|x| \geqslant 1$ pour (H.2), aucun x pour (EI), $x \geqslant 0$ pour le (PE) $x = y^2 + z^2$; donc ces 4 quadriques ne peuvent contenir de droite d'équations $y = ax + p$, $z = bx + q$. Quant aux droites où x est une constante c, les sections de ces quadriques par le plan $x = c$ ne sont décomposées que si $x^2 = 1$ ($x = 0$ pour le (PE)) et alors la section, $y^2 + z^2 = 0$, est décomposée en deux droites non réelles.

Reste à montrer que (H.1) et (PH) contiennent des droites réelles. Pour cela, on écrit leurs équations sous la forme

$$(x-1)(x+1) = (z-y)(z+y) \quad \text{et} \quad z = (x-y)(x+y).$$

Pour s et t réels, les droites D_s et D_t^0 d'équations

$$\begin{array}{lll} (D_s) & x-1=s(z-y),\ z+y=s(x+1) & \text{ou} \quad x-y=s,\ z=s(x+y) \\ (D_t^0) & x-1=t(z+y),\ z-y=t(x+1) & \text{ou} \quad x+y=t,\ z=t(x-y) \end{array}$$

sont manifestement sur (H.1) ou (PH). Ces quadriques admettent donc *deux systèmes* (à un paramètre, s ou t) de droites réelles, appelées leurs *génératrices rectilignes.*

On voit facilement que deux génératrices D_s, $D_{s'}$, (ou D_t^0, $D_{t'}^0$) d'un même système n'ont pas de point commun, ni à distance finie ni à l'infini. Par contre deux génératrices de systèmes différents, D_s et D_t^0, ont un unique point commun : $x = (1+st)/(1-st)$, $x + 1 = 2/(1-st)$, $x - 1 = 2st/(1-st)$, $z + y = 2s/(1-st)$, $z - y = 2t/(1-st)$ dans le cas du (H.1) ; $x - y = s$, $x + y = t$, $z = st$ dans le cas du (PH).

Cette situation sera précisée et généralisée au § suivant par l'étude des « variétés de Segre ».

La classification euclidienne des quadriques de $\mathbf{R}^3$ raffine la classification affine par l'introduction de coefficients réels dans les équations.

§ C / Classification projective des quadriques réelles

Une quadrique S de $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ est définie par une équation $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$, où F est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées homogènes $(x_0, \ldots, x_n)$. Les quadriques sont classifiées par le rang et par la signature (p, q) de la forme F, étant entendu, par changement de signe de l'équation, que les signatures (p, q) et (q, p) donnent des quadriques projectivement équivalentes.

Avec les notations du § B, le cas où F est de *rang maximal* $n + 1$ (ce qui veut dire que S n'a pas de point multiple) correspond, dans l'espace affine :

— soit au « cas *a*) », équation (62) avec $r = n$ et $k \neq 0$, ce qui donne l'équation homogène $a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 + kx_0^2 = 0$;

— soit au « cas *b*) », équation (63) avec $r = n - 1$ et $b \neq 0$, ce qui donne l'équation homogène $a_1x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + bx_nx_0 = 0$.

Ce cas *b*), celui des *paraboles et paraboloïdes*, est celui où *l'hyperplan à l'infini* ($x_0 = 0$) *est tangent à* S (en fait, au point $(0, 0, \ldots, 0, 1)$).

Ce qui précède est valable sur tout corps K de caractéristique $\neq 2$. Comme $4x_nx_0 = (x_n + x_0)^2 - (x_n - x_0)^2$, l'équation du « cas *b*) » se ramène à celle du « cas *a*) » avec a_n et k de signes contraires.

Passons à la classification dans le cas du *rang maximal*.

1) *Dans le plan*, les seules répartitions de signes des coefficients a_1, a_2 et k sont $(+ + +)$ et $(+ + -)$. La première correspond à l'ellipse imaginaire (EI), la seconde aux trois autres courbes — hyperbole, ellipse et parabole. Ces dernières sont projectivement équivalentes. Ce qui les différencie est le choix de la droite à l'infini : elle coupe la conique en 2 points réels dans le cas de l'hyperbole, lui est tangente dans le cas de la parabole, et la coupe en 2 points complexes conjugués dans le cas de l'ellipse.

2) *Dans l'espace de dimension 3*, les répartitions de signes sont $(+ + + +)$, $(+ + + -)$ et $(+ + - -)$. La première correspond à l'ellipsoïde imaginaire. La seconde correspond à l'ellipsoïde (E), à l'hyperboloïde à 2 nappes (H.2) et au paraboloïde elliptique (PE) ; le premier coupe l'hyperplan à l'infini suivant une ellipse imaginaire, le suivant le coupe suivant une conique irréductible à points réels, le troisième lui est tangent (et le coupe suivant deux droites complexes conjuguées). La répartition $(+ + - -)$ correspond à l'hyperboloïde à une nappe (H.1) ou au paraboloïde hyperbolique (PH).

Les quadriques qui contiennent des droites réelles sont donc celles dont la répartition de signes est $(+ + - -)$ (th. 47). Ces droites sont très faciles à mettre en évidence si l'on écrit l'équation d'une telle quadrique sous la forme $xt = yz$: pour p et q dans $\hat{\mathbf{R}}$, elle contient les droites (D_p) $x = py$, $z = pt$ et (D_q^0) $x = qz$, $y = qt$.

Deux génératrices D_p, $D_{p'}$ (ou $D_q^0, D_{q'}^0$) d'un même système n'ont aucun point commun. Deux génératrices D_p, D_q^0 de systèmes différents ont un point commun unique, de coordonnées homogènes $t = 1$, $z = p$, $y = q$, $x = pq$. Tout point de la quadrique S est ainsi obtenu et les droites D_p, D_q^0 qui passent par ce point forment *l'intersection de* S *et de son plan tangent.* L'application qui à $(p, q) \in \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}}$ fait correspondre le point d'intersection de D_p et D_q^0 est ainsi une *bijection* de $\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}}$ sur S, qui peut ainsi être vue comme un *produit* de 2 droites projectives. C'est ce que nous allons généraliser.

Variétés de Segre

Soient $\mathbf{P}_n$ et $\mathbf{P}_q$ deux espaces projectifs de dimensions n et q sur un corps *quelconque* K. Aux points de coordonnées homogènes $(x_0, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{P}_n$ et $(y_0, \ldots, y_q)$ de $\mathbf{P}_q$, on fait correspondre le point de coordonnées homogènes $z_{ij} = x_i y_j$ $(i = 0, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, q)$ de $\mathbf{P}_{(n+1)(q+1)-1}$. Ce point est bien déterminé par les points donnés car la multiplication des x_i ou des y_j par un même facteur multiplie les z_{ij} par ce facteur. Il est situé sur la sous-variété S de $\mathbf{P}_{(n+1)(q+1)-1}$ définie par les équations

$$Z_{ij}Z_{i'j'} - Z_{ij'}Z_{i'j} = 0 \quad \text{pour tous } i' \neq i \text{ et } j' \neq j \tag{64}$$

(soit $n(n+1)q(q+1)/4$ équations).

Réciproquement, indexons les coordonnées homogènes dans $\mathbf{P}_{(n+1)(q+1)-1}$ par les couples (i, j) $(i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, q)$ et considérons un point (z_{ij}) de cet espace dont les coordonnées homogènes satisfont à (64). L'une d'elles est non nulle, disons z_{00} pour fixer les idées. Alors les points de coordonnées homogènes $x_i = z_{i0}$ de $\mathbf{P}_n$ et $y_j = z_{0j}$ de $\mathbf{P}_q$ sont bien déterminés, et ils sont indépendants de la coordonnée homogène non nulle z_{00} choisie : en effet, si $z_{uv} \neq 0$, on a $z_{i0}z_{0v} = z_{iv}z_{00}$ par (64), de sorte que les systèmes (z_{i0}) et (z_{iv}) (tous deux non nuls car $z_{00} \neq 0$ et $z_{uv} \neq 0$) sont proportionnels; de même pour les systèmes (z_{0j}) et (z_{uj}). Enfin si, comme au début, on forme les produits $x_i y_j = z_{i0}z_{0j}$, on voit qu'ils valent $z_{00}z_{ij}$ par (64) et donnent donc le point de S d'où l'on est partis.

Bref, l'application qui, aux points (x_i) de $\mathbf{P}_n$ et (y_j) de $\mathbf{P}_q$, fait correspondre le point $(z_{ij} = x_i y_j)$ de $\mathbf{P}_{(n+1)(q+1)-1}$, est une *bijection de* $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_q$ *sur la sous variété* S *définie par les équations* (64). Celle-ci est appelée la *variété de Segre* (pour les dimensions n et q) et la bijection répond au nom de morphisme de Segre. Ainsi on a plongé un produit d'espaces projectifs dans un espace projectif.

En particulier, si $n = q = 1$, on a 4 coordonnées homogènes z_{00}, z_{01}, z_{10} et z_{11}, de sorte que la variété de Segre est dans $\mathbf{P}_3$. Le système (64) se réduit à *une seule* équation $z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10} = 0$, de sorte que S est la quadrique d'équation $xt - yz = 0$ (avec des notations plus ordinaires). Les images sur S des « horizontales » et des « verticales » du produit $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ ne sont autres que les *génératrices rectilignes* D_p et D_q^0 de S.

Le produit $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ se plonge dans $\mathbf{P}_5$, et le produit $\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2$ dans $\mathbf{P}_8$.

§ D / Classification des coniques et quadriques sur un corps fini

Nous nous plaçons sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ que, pour simplifier, nous supposons de caractéristique $\neq 2$. Le résultat suivant est essentiel :

THÉORÈME 48. — *Tout polynôme homogène de degré 2 en au moins 3 variables sur $\mathbf{F}_q$ admet un zéro non-trivial. Sauf en dimension 0, toute quadrique sur $\mathbf{F}_q$ admet un point rationnel.*

En effet, par décomposition en carrés et annulation des autres variables, on est ramené à un polynôme de la forme $ax^2 + by^2 + cz^2$. On peut supposer a, b, c non nuls car, si $c = 0$, on a le zéro $(0, 0, 1)$. Cherchons une solution avec $z = 1$, c'est-à-dire une solution de $by^2 + c = -ax^2$. On rappelle que $\mathbf{F}_q$ contient $\frac{1}{2}(q-1)$ carrés non nuls, donc $\frac{1}{2}(q+1)$ carrés en comptant 0. Lorsque y parcourt $\mathbf{F}_q$, le premier membre de l'équation prend, par homothétie et translation, $\frac{1}{2}(q+1)$ valeurs et le second membre aussi. Comme $\frac{1}{2}(q+1) + \frac{1}{2}(q+1)$ est strictement supérieur à q, ces deux ensembles de valeurs ont au moins un élément en commun, d'où une solution (x, y), qui donne le zéro non trivial $(x, y, 1)$.

Ce résultat est un cas particulier du théorème de Chevalley : tout polynôme homogène de degré d en au moins $d + 1$ variables sur un corps fini admet un zéro non trivial.

Classification des coniques. — Dès qu'une conique irréductible admet un point rationnel, elle en admet d'autres par la représentation paramétrique du chap. II, § E ; elle a ici $q + 1$ points rationnels dans le plan *projectif*. Par le choix d'un repère convenable (p. ex. chap. I, § G, th. 16 ; ou représentation paramétrique homogène $(1, t, t^2)$, chap. II, § E) son équation se ramène à $x^2 - yz = 0$, de sorte qu'il y a *une seule* orbite de coniques irréductibles. D'autre part, comme $\mathbf{F}_q$ admet une seule extension quadratique, il y a 3 types de coniques décomposées : 2 droites rationnelles ; 2 droites quadratiques conjuguées (équation $x^2 - ny^2 = 0$, où n est un non-carré de $\mathbf{F}_q$) ; 2 droites confondues.

Dans le plan *affine*, la classification des coniques irréductibles est fondée sur la nature de leurs points à l'infini : 2 points rationnels (« hyperbole ») ; 2 points quadratiques conjugués (« ellipse ») ; 2 points confondus (« parabole », tangente donc à la droite de l'infini). On peut aussi se fonder sur les équations (62) et (63) du début du § B. Pour une conique à centre, on normalise (62) en $ax^2 + by^2 - 1 = 0$. En se souvenant que, dans la décomposition en carrés d'une forme quadratique, le premier vecteur de base est arbitraire parmi les vecteurs non isotropes, on peut prendre pour celui-ci un vecteur qui joint le centre à un point rationnel de la conique ; ainsi $ax^2 - 1 = 0$ a ses racines dans $\mathbf{F}_q$, de sorte que a est un carré et peut rentrer dans x^2. En fixant un non-carré n de $\mathbf{F}_q$, le coefficient b de y^2 peut de même être ramené à valoir 1 ou n ; d'où les deux équations possibles : $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (hyperbole), $x^2 - ny^2 - 1 = 0$ (ellipse). D'autre part, (63) s'écrit $ax^2 + by = 0$ qui, par division par a et homothétie sur y, se ramène à $x^2 - y = 0$ (parabole). Enfin, il y a 3 types de coniques décomposées en droites concourantes (resp. parallèles).

A part l'absence des « ellipses imaginaires », la classification sur $\mathbf{F}_q$ est la même que sur $\mathbf{R}$.

Classification des quadriques d'un espace de dimension 3. — Si une telle quadrique admet un point double, on est ramené, par projection à partir de celui-ci, à une classification plane. Nous nous bornerons donc aux quadriques sans point double, *a fortiori* irréductibles.

Soit alors S une telle quadrique *dans l'espace projectif* et soit A un point rationnel de S (th. 48). A l'exception de celles qui sont dans le plan tangent T en A, les droites rationnelles passant par A recoupent S en un second point rationnel (« projection stéréographique »). Ainsi S a q^2 points rationnels en dehors de T. Deux choses peuvent alors se produire selon la nature des 2 droites qui composent l'intersection de T et S :

1) Elles sont rationnelles et leur réunion a alors $2(q+1)-1 = 2q+1$ points rationnels. Ainsi S a $q^2 + 2q + 1 = (q+1)^2$ points rationnels.

2) Elles sont quadratiques conjuguées, et leur réunion a un seul point rationnel, A. Dans ce cas S a $q^2 + 1$ points rationnels.

Comme $(q + 1)^2 \neq q^2 + 1$, si le cas 1) (resp. 2)) se produit en un point A, il se produit *partout*. Dans le cas 1), il y a, sur S, deux systèmes de génératrices rectilignes (rationnelles), formé chacun de $q + 1$ droites (une par chaque point de S, mais contenant $q + 1$ points de S) ; c'est le cas où S peut être vue comme un produit de 2 droites projectives (cf. § C), ce qui explique son nombre d'éléments $(q + 1)^2$; on dira alors que S est *réglée*.

Pour voir que ces 2 cas existent réellement et donnent chacun des quadriques projectivement équivalentes, on met l'origine en un point rationnel de S et on prend le plan tangent pour plan $z = 0$. L'équation homogène de S s'écrit alors $P(x, y, z) + zt = 0$ avec P homogène de degré 2, ou encore $G(x, y) + z(ax + by + cz + t) = 0$ où G est encore homogène de degré 2. Quitte à remplacer t par $ax + by + cz + t$, on obtient l'équation $G(x, y) + zt = 0$. Alors, par décomposition en carrés de $G(x, y)$ et fixation d'un non carré n de $\mathbf{F}_q$, on se ramène aux deux équations possibles :

1) $x^2 - y^2 + zt = 0$ (sur laquelle les droites sont visibles en l'écrivant $(y - x)(y + x) = zt$) ;

2) $x^2 - ny^2 + zt = 0$.

Bref, il y a *deux orbites* de quadriques sans point double dans l'espace projectif : celle des *quadriques réglées* et celle des *quadriques non réglées*.

La *classification affine* des quadriques sans point double S fait intervenir aussi la nature de l'intersection de S avec le plan à l'infini. Mais ici cette intersection, qui est une conique définie sur $\mathbf{F}_q$, a toujours un point rationnel (th. 48). C'est donc, soit une conique irréductible, soit une conique décomposée en deux droites (auquel cas le plan à l'infini est tangent à S, qui prend le nom de « paraboloïde »). Il y a donc *quatre orbites* : hyperboloïdes réglés, hyperboloïdes non réglés, paraboloïdes réglés et paraboloïdes non réglés.

On peut retrouver ce résultat par le calcul à partir des équations (62) et (63) du début du § B. Dans le cas des quadriques à centre, on normalise (62) en $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$. Comme dans le plan, le th. 48 permet de supposer que les 2 premiers axes de la décomposition en carrés coupent la quadrique en des points rationnels, de sorte que a et b sont des carrés, qui rentrent dans x^2 et y^2. Quant au troisième axe, uniquement déterminé par les 2 premiers (auquel il est orthogonal), il fait ce qu'il peut de sorte que, en notant n un non carré fixe de $\mathbf{F}_q$, on obtient les deux équations :

— $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ (hyperboloïde réglé) ;
— $x^2 + y^2 - nz^2 - 1 = 0$ (hyperboloïde non réglé).

Pour les paraboloïdes, l'équation (63), $ax^2 + a'y^2 + bz = 0$, donne, après division par a, homothétie sur z et homothétie sur y, les deux équations :

— $x^2 - y^2 - z = 0$ (paraboloïde réglé) ;
— $x^2 - ny^2 - z = 0$ (paraboloïde non réglé).

Les *nombres d'éléments* de ces quadriques affines sont :

— $(q + 1)^2 - (q + 1) = q^2 + q$ pour l'hyperboloïde réglé ;
— $(q^2 + 1) - (q + 1) = q^2 - q$ pour l'hyperboloïde non réglé ;
— $(q + 1)^2 - (2q + 1) = q^2$ pour le paraboloïde réglé ;
— $(q^2 + 1) - 1 = q^2$ pour le paraboloïde non réglé.

Pour les paraboloïdes, leurs équations $z = x^2 - y^2$ et $z = x^2 - ny^2$ redonnent ce résultat car on peut y prendre x et y arbitraires dans $\mathbf{F}_q$, ce qui détermine z.

CHAPITRE IV

Dualité par rapport à une quadrique

Les clefs de ce qui est fait dans ce chapitre sont fort simples : l'orthogonalité par rapport à une forme bilinéaire symétrique ; le fait qu'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel E définit un isomorphisme de E sur son dual.

Nous nous placerons sur un corps K *de caractéristique* $\neq 2$ afin de ne pas avoir d'ennuis dans la correspondance entre formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques. On le suppose aussi algébriquement clos, si nécessaire.

§ A / Conjugaison, hyperplans polaires et pôles

Une quadrique S d'un espace projectif $\mathbf{P}(E)$ est définie par une équation homogène $Q(x) = 0$, où Q est une forme quadratique. Soit B sa forme bilinéaire associée ($Q(x) = B(x, x)$). Deux points a, b de $\mathbf{P}(E)$ sont dits *conjugués* par rapport à S si $B(a, b) = 0$ (en notant de la même façon, ce que nous ferons dans ce chapitre, un point de $\mathbf{P}(E)$, un de ses représentants dans E, ou un système de coordonnées homogènes).

Si B est *non dégénérée*, ce qui signifie que S est *sans point double*, l'application f qui, à tout x de E, fait correspondre la forme linéaire $f(x)$ telle que $f(x)(y) = B(x, y)$ pour tout y de E, est un *isomorphisme* de E sur son dual E^*, qui donne un isomorphisme $\mathbf{P}(f)$ de $\mathbf{P}(E)$ sur $\mathbf{P}(E^*)$, c'est-à-dire sur *l'espace des hyperplans* de $\mathbf{P}(E)$ (chap. I, § E). L'hyperplan $\mathbf{P}(f)(a)$ est appelé *l'hyperplan polaire* du point a ; son équation est $B(a, x) = 0$.

Si D est la droite vectorielle de E correspondant à a, l'hyperplan polaire est ainsi l'image du sous-espace orthogonal D^0.

A toute vlp $V' = \mathbf{P}(V)$ de $\mathbf{P}(E)$, correspond par $\mathbf{P}(f)$ un système linéaire d'hyperplans dont la *base* (chap. I, § E, th. 9) est $\mathbf{P}(V^0)$; elle est appelée la vlp *conjuguée* de V'. La conjugaison par rapport à S correspond à l'orthogonalité par rapport à B. Entre une vlp V' et sa conjuguée V'' on a la formule de dimensions :

$$\dim(V') + \dim(V'') = \dim(\mathbf{P}(E)) - 1. \tag{65}$$

La conjuguée d'un hyperplan par rapport à S est ainsi un point, appelé son *pôle*. En dimension 3, la conjuguée d'une droite est une droite. La relation de conjugaison, comme celle d'orthogonalité, est *symétrique*.

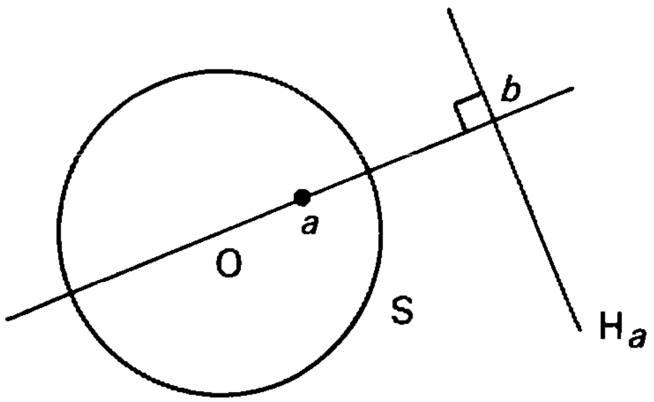
THÉORÈME 49. — *Soient* S *une quadrique sans point double et a, a' deux points de* $\mathbf{P}(E)$ *; notons m, m' les points où* $D_{aa'}$ *rencontre* S.

a) Si ni a ni a' ne sont sur S, *ils sont conjugués par rapport à* S *ssi ils sont conjugués harmoniques par rapport à m et m'* ($(a, a', m, m') = -1$).
b) Si a est sur S, *alors a, a' sont conjugués ssi* $D_{aa'}$ *est tangente à* S.

En effet, les points d'intersection m, m' correspondent aux racines de l'équation $Q(a+ta')=0$ $(t \in \hat{K})$. Elle s'écrit $Q(a')t^2+2B(a,a')t+Q(a)=0$. Si $Q(a') \neq 0$ et $Q(a) \neq 0$, la relation $B(a, a') = 0$ veut dire que les deux racines sont opposées, c'est-à-dire conjuguées harmoniques par rapport aux paramètres 0 et ∞ de a et a' ; d'où *a*). Si $Q(a) = 0$, l'équation a la racine $t = 0$ et $B(a, a') = 0$ veut dire que cette racine est double, donc que $D_{aa'}$ est tangente à S.

COROLLAIRE. — *L'hyperplan polaire d'un point a de* S *est l'hyperplan tangent à* S *en a.*

Exemples. — 1) Si l'hyperplan à l'infini n'est pas tangent à une qua-



drique affine S, son pôle est *centre* de S. Sinon S répond au nom de *paraboloïde.*

2) L'ensemble des milieux des cordes d'une quadrique affine S parallèles à une direction donnée est l'hyperplan polaire du point à l'infini de cette direction ; il passe par le centre de S ou par le point de contact de S avec l'hyperplan à l'infini.

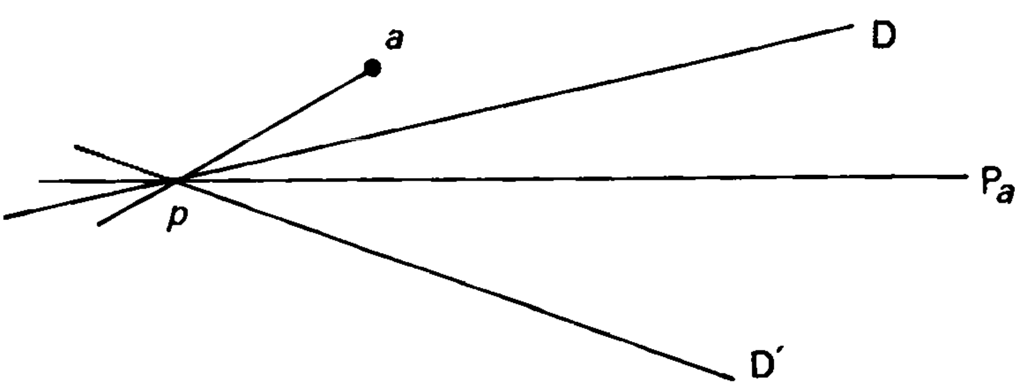
3) Si S est une sphère euclidienne de centre O et de rayon R, l'hyperplan polaire d'un point a est orthogonal à la droite D_{Oa} et il la rencontre en un point b tel que $\overline{Oa}.\overline{Ob} = R^2$.

§ B / Polaires et pôles par rapport aux coniques

Comme il est intéressant d'étudier les propriétés de polarité par rapport aux coniques d'un faisceau linéaire (chap. I, § G) et que certaines de celles-ci sont dégénérées, il faut regarder ce que deviennent les notions de polaire (= droite polaire d'un point) et de pôle (d'une droite) dans ce cas.

On gardera à l'esprit le fait que la relation de conjugaison, $B(x, y)=0$, est *linéaire* en chacun des points x, y et aussi par rapport aux *coefficients* de la forme B, c'est-à-dire par rapport à ceux de l'équation $Q(x) = 0$ de la conique considérée. La notion de *points conjugués* a toujours un sens.

1) *Pour une conique décomposée en 2 droites* D, D′, la relation $B(p, x) = 0$ est toujours vérifiée lorsque p est leur point d'intersection. Sinon $B(a, x) = 0$ est l'équation d'une droite P_a par p ; c'est D (resp. D′) lorsque le point a est sur D (resp. D′). Lorsque $a \notin D \cup D'$, le th. 49, a) reste valable de sorte que les droites D, D′, D_{pa}, P_a forment une division harmonique (dans le faisceau des droites par a). Bref, on peut parler de la *polaire* d'un point a distinct de p ; elle passe toujours par p.

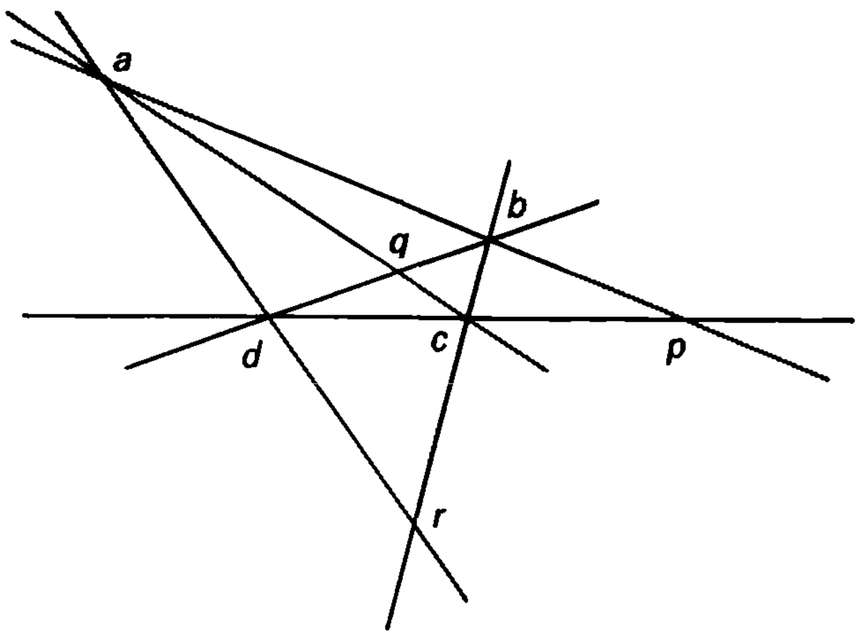


Mais une droite E par p est la polaire de tous les points $a \neq p$ tels que $(D, D', E, D_{pa}) = -1$, et une droite qui ne passe pas par p n'est la polaire d'aucun point. La notion de pôle d'une droite n'a donc pas de sens.

2) *Lorsque la conique est une droite double* 2D, l'équation $B(a, x)=0$ est toujours vérifiée lorsque a est sur D. Lorsque a est en dehors de D, c'est l'équation de D. On peut donc parler de la *polaire* d'un point a en dehors de D. La notion de pôle a encore moins de sens que ci-dessus.

Nous noterons $P_C(a)$ la polaire d'un point a par rapport à une conique C (dont a n'est pas un point double). Nous nous proposons d'étudier les polaires d'un point m par rapport aux coniques *d'un faisceau linéaire* F. Si l'on écrit $Q(x) + tQ^0(x) = 0$ l'équation générale de F et qu'on note $C(t)$ la conique de F correspondant à t, les coefficients de l'équation de $P_{C(t)}(m)$ sont des fonctions du premier degré de t, de sorte que cette polaire parcourt un faisceau linéaire de droites, ou est fixe. Examinons les cas de fixité, en fonction de la nature du faisceau F (cf. chap. I, § G).

a) *Si* F *a 4 points-base, a, b, c, d* (sans triplet aligné), il contient 3 coniques décomposées $D_{ab} + D_{cd}$, $D_{ac} + D_{bd}$ et $D_{ad} + D_{bc}$. Notons p, q, r leurs points doubles ; on dit que p, q, r est le *triangle diagonal* du « *quadrangle* » formé par les 4 points a, b, c, d. Si m est distinct de p, q



et r, la polaire P de m par rapport à chacune des 3 coniques décomposées est bien définie ; si $P_{C(t)}(m)$ était fixe, elle devrait passer par p, q, r, qui ne sont pas alignés (car la caractéristique de K est $\neq 2$).

On pourra le vérifier en donnant à a, b, c, d les coordonnées homogènes $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$.

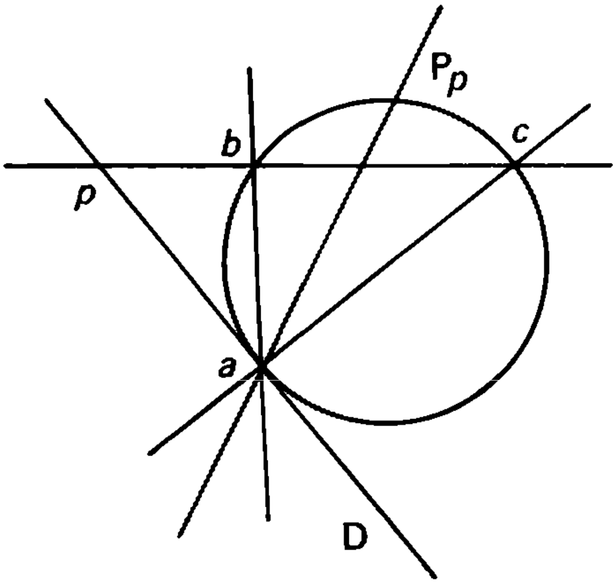
Mais, si $m = p$, la construction du « quatrième harmonique » donnée au chap. II, § C montre que D_{qr} est sa polaire par rapport à chacune des deux coniques décomposées qui ne passent pas par p. Par linéarité, c'est la polaire de p par rapport à *toutes* les coniques du faisceau. *Idem* pour q et r. Les 3 sommets du triangle diagonal p, q, r sont donc 2 à 2 conjugués par rapport à chacune des coniques de F. En appelant *triangle conjugué* à une conique C un triangle dont les sommets sont 2 à 2 conjugués par rapport à C, on peut dire que p, q, r est un *triangle conjugué commun* aux coniques de F et que c'est le seul.

En d'autres termes, si les coniques correspondant à 2 formes quadratiques à 3 variables $Q(x)$ et $Q^0(x)$ ont 4 points communs distincts, il existe une base qui est *orthogonale pour ces 2 formes*, et elle est essentiellement unique.

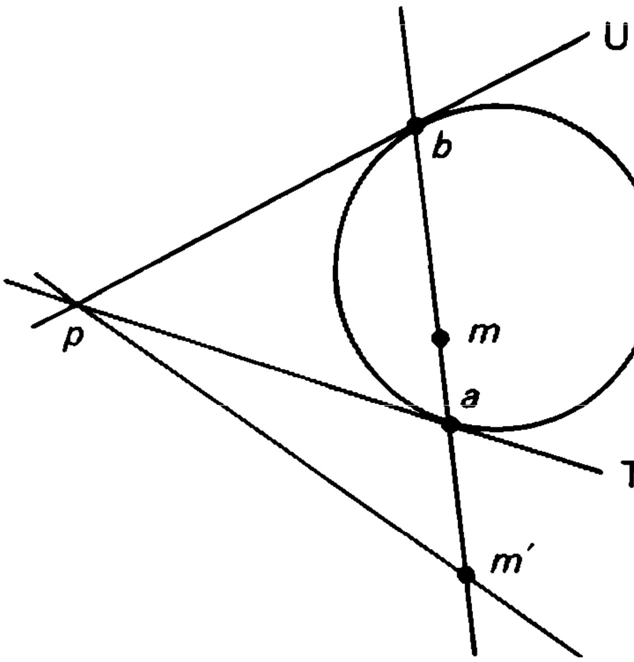
L'existence d'une base orthonormale pour le produit scalaire de $\mathbf{R}^3$ et orthogonale pour une autre forme quadratique Q s'en déduit à condition que les coniques $Q(x, y, z) = 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ aient 4 points communs distincts. En effet, ceux-ci sont conjugués 2 à 2 : $a, \bar{a}, b, \bar{b}$; deux « côtés opposés » du quadrangle sont réels ; les deux autres couples sont formés de droites complexes conjuguées, dont les intersections sont réelles. Le triangle diagonal est donc réel. Cette base est unique aux signes près.

Remarque. — Pour construire un triangle p, q, r conjugué à une conique C, on peut prendre p arbitraire, q sur la polaire $P_C(p)$ et r conjugué harmonique de q par rapport aux points communs à $P_C(p)$ et C.

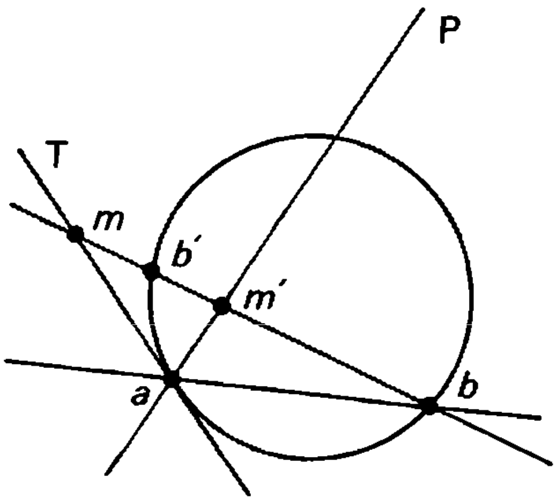
b) Si F *est formé des coniques tangentes à une droite* D *en a et passant par 2 autres points b, c* (type (2, 1, 1)), ses coniques décomposées sont $D + D_{bc}$ et $D_{ab} + D_{ac}$; points doubles p et a. Si un point m, distinct de a et p, a une polaire $P_{C(t)}(m)$ fixe, elle ne peut être que $D_{ap} = D$; alors l'application du 1) ci-dessus à $D + D_{bc}$ force m à être sur D ; mais il ne saurait être en même temps sur la conjuguée harmonique de D par rapport à D_{ab} et D_{ac}. On a donc $m = a$ ou $m = p$. La polaire de a par rapport aux vraies coniques du faisceau est leur tangente commune D (th. 49, *b*)). Celle de p est la conjuguée harmonique de D par rapport à D_{ab} et D_{ac}. Le faisceau n'a pas de triangle conjugué commun.



c) Si F *est formé des coniques tangentes à une droite* T *en a et à une droite* U *en b* (« type (2, 2) »), ses coniques décomposées sont T + U et $2D_{ab}$; points doubles p et tous ceux de D_{ab}. Si un point m en dehors de D_{ab} a une polaire $P_{C(t)}(m)$ fixe, celle-ci ne peut être que D_{ab} ; on a alors $m = p$ car le pôle d'une droite par rapport à une conique propre C est l'intersection des tangentes aux points où cette droite coupe C (propriété utile, résultant du th. 49, *b*)). Si m est sur D_{ab}, sa polaire par rapport aux coniques du faisceau est $D_{pm'}$ où m' est le conjugué harmonique de m par rapport à a et b. Le faisceau a toute une famille de triangles conjugués communs, de la forme p, m, m', avec m, m' sur D_{ab} et $(a, b, m, m') = -1$.



d) *Si* F *est formé des coniques osculatrices entre elles en un point a et passant par un autre point b* (« type (3, 1) »), sa seule conique décomposée est $D_{ab} + T$, où T est la tangente commune aux coniques en a ; point double a. Si un point $m \neq a$ a une polaire $P = P_{C(t)}(m)$ fixe, celle-ci passe par a, de sorte que m est conjugué de a et que m est sur T (th. 49, *b*)) ; mais alors le second point d'intersection b' de D_{mb} avec C(t) est fixe car c'est le conjugué harmonique de b par rapport à m et à $m' = D_{mb} \cap P$; c'est impossible. Donc a est le seul point qui ait une polaire fixe et celle-ci est évidemment la tangente commune T. Le faisceau n'a pas de triangle commun.



e) *Si* F *est formé des coniques surosculatrices entre elles en un point a* (« type (4) »), sa seule conique décomposée est 2T, où T est la tangente commune en a. Si un point m en dehors de T a une polaire fixe, celle-ci ne peut être que T ; mais, comme le pôle de T par rapport à une conique propre C(t) est a, on a $m = a$, impossible. Mais, si m est sur T, il a une polaire fixe car, en écrivant $xz + F(x, y) + tx^2 = 0$ l'équation de C(t) (formule (38) du chap. I, § G, où F est homogène de degré 2), la polaire de $m = (0, y_0, z_0)$ est $z_0 x + y_0 F'_y(x, y) = 0$, une droite par $a = (0, 0, 1)$ qui ne dépend que de m et non de t. Un triangle conjugué commun aux coniques C(t) étant tel que ses 3 sommets ont des polaires fixes, ceux-ci devraient être sur T et, pour raison de conjugaison, de la forme m, a, a.; il n'y a donc point de tels triangles.

Un mot sur les faisceaux dont *toutes* les coniques sont décomposées :

f) Si elles sont de la forme $D + D'$, où D et D′ passent par un point fixe a, D et D′ sont homologues dans une involution j du faisceau des droites par a (chap. II, § D, th. 31). En notant F, F′ les droites fixes de j, les points m à polaire fixe sont ceux de F (resp. F′) et cette polaire est F′ (resp. F).

g) Si elles sont de la forme D + F, où F est une droite fixe et où D parcourt le faisceau des droites passant par un point a, un point m extérieur à F ne peut avoir une polaire P fixe : elle doit passer par le point $D \cap F$, qui est mobile, si $a \notin F$; et, si a est sur F, D serait fixe comme 4ème harmonique de D_{am}, P, F. Mais, lorsque m est sur F, sa polaire F est fixe.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 50. — *Soit* F *un faisceau de coniques contenant des coniques propres. Si m est un point du plan, distinct des points doubles des coniques décomposées de* F, *l'application qui, à toute conique* C(*t*) *de* F, *fait correspondre la polaire* $P_{C(t)}(m)$ *de m par rapport à* C(*t*), *est une homographie de* F *sur le faisceau des droites passant par un point m'. Les points doubles des coniques décomposées de* F *ont des polaires fixes par rapport aux coniques de* F. *Celles-ci admettent un* (resp. *plusieurs*) *triangle(s) conjugué(s) communs ssi* F *a 4 points-base distincts* (resp. *est formé de coniques bitangentes*).

Remarque. — Les coniques auxquelles un triangle donné est conjugué forment un système linéaire de dimension 2 : en prenant les sommets pour points-base du plan, l'équation de ces coniques est $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. Les coniques par rapport auxquelles 2 points sont conjugués (resp. un point et une droite sont pôle et polaire) forment un système linéaire de dimension 4 (resp. 3).

COROLLAIRE. — *Les coniques conjuguées à un triangle et passant par un point donné p, ou bien passent par 3 autres points fixes, ou bien sont bitangentes en p et en un autre point q. Le second cas a lieu ssi p est sur l'un des 3 côtés du triangle.*

En effet, d'après la remarque, ces coniques forment un faisceau. On applique le th. 50 et on regarde les figures du *a*) et du *c*) qui le précèdent.

THÉORÈME 51. — L'*ensemble des pôles d'une droite fixe* D *par rapport aux coniques propres d'un faisceau* F *ayant 4 points-base distincts, est une conique* S *circonscrite au triangle conjugué commun* (p, q, r).

En effet, prenons sur D deux points a, b distincts de p, q, r. Lorsque C(t) parcourt F, les polaires $P_{C(t)}(a)$ et $P_{C(t)}(b)$ parcourent des faisceaux de droites, de points-base a' et b', et s'y correspondent homographiquement (th. 50). Leur point d'intersection, qui est le pôle de D par rapport à C(t), parcourt donc une conique S passant par a' et b' (th. 34, § E chap. II). En prenant pour a un point commun à D et à D_{pq}, ses polaires $P_{C(t)}(a)$ passent par r, de sorte que $a' = r$ et que r est sur S ; de même pour p et q.

A proprement parler, l'ensemble de ces pôles est S moins les 3 points qui correspondent aux valeurs de t pour lesquelles $C(t)$ est décomposée. Ces 3 points sont p, q et r.

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner les cas où la conique S est décomposée (cf. th. 34) et d'étendre le th. 51 aux autres faisceaux de coniques.

Corollaire 1. — *Dans le plan affine, l'ensemble des centres des coniques circonscrites à un quadrangle est une conique.*

On prend pour D la droite de l'infini.

Cette conique a pour points à l'infini les points à l'infini des paraboles circonscrites au quadrangle. Elle passe par les *milieux* des 6 côtés du quadrangle, car un tel milieu est conjugué, par rapport à toutes les coniques du faisceau, du point à l'infini du côté sur lequel il se trouve. D'où :

Corollaire 2. — *Dans le plan affine, les milieux des 6 côtés d'un quadrangle et les 3 sommets de son triangle diagonal sont 9 points d'une même conique.*

Lorsque le quadrangle est formé par les 3 sommets d'un triangle et par son orthocentre, on a vu (chap. II, § D, application du th. 32) que les coniques circonscrites à ce quadrangle sont des hyperboles équilatères. Les points cycliques sont conjugués par rapport à ces hyperboles. La conique du cor. 2 est alors un cercle ; on retrouve le *cercle des 9 points*, qui est aussi (cor. 1) l'ensemble des centres des hyperboles équilatères circonscrites au triangle.

Théorème 52. — *Soit* (p, q, r) *un triangle conjugué à une conique* C *et soit* S *une conique circonscrite à* (p, q, r). *Alors tout point* a *de* S *est sommet d'un triangle* (a, b, c) *inscrit dans* S *et conjugué à* C.

Pour ceux qui ne sont pas familiers avec ce vieux langage, précisons qu'un triangle (a, b, c) est « inscrit » dans une courbe S et que S est « circonscrite » à ce triangle si les sommets a, b, c appartiennent à S.

En effet, notons P la polaire $P_C(a)$; elle rencontre S en deux points b et c et C en deux points m et m'. Appelons j et k les points de rencontre de P avec D_{ap} et D_{qr}. Comme D_{ap}, qui joint le pôle a de P et le pôle p de D_{qr}, est la polaire de k par rapport à C, on a $(j, k, m, m') = -1$. De même, en appelant j', k', j'', k'' les points de rencontre de D avec D_{aq}, D_{pr}, D_{ar}, D_{pq}, on a $(j', k', m, m') = (j'', k'', m, m') = -1$. Donc (j, k), (j', k') et (j'', k'') sont des couples de points homologues dans l'involution g de points fixes m, m'. D'autre part, ils sont découpés sur P par les coniques $D_{ap}+D_{qr}$, $D_{aq}+D_{pr}$ et $D_{ar}+D_{pq}$, lesquelles appartiennent au faisceau F de points-base a, p, q, r. Or les coniques de F découpent sur P une involution (chap. II, § D, th. 31 de Desargues-Sturm) qui, ayant 3 couples communs avec g, coïncide avec g. Comme la conique S est dans F et découpe (b, c) sur P, on voit que l'on a $(c, b, m, m') = -1$. Autrement dit, b et c sont conjugués par rapport à C et (a, b, c) est un triangle conjugué à C.

On dit parfois que la conique S du th. 52 est *harmoniquement circonscrite* à la conique C.

COROLLAIRE 1. — *Les sommets de deux triangles conjugués à une conique* C *sont 6 points d'une même conique. Inversement, si a, b, c, a', b', c' sont 6 points d'une conique* S, *alors les triangles (a, b, c) et (a', b', c') sont conjugués à une même conique* C.

Si (a, b, c), (a', b', c') sont conjugués à C, on fait passer une conique S par les 5 points a', b', c', a et b ; la polaire $P_C(a)$ coupe S en deux points, dont l'un est b et dont l'autre, c_1, est le pôle de D_{ab} par rapport à C d'après le th. 52 ; mais ce pôle est c par hypothèse ; donc $c = c_1$ est sur S.

Inversement, les coniques conjuguées à (a', b', c') forment un système linéaire de dimension 2 ; leur demander en outre d'admettre a et D_{bc} pour pôle et polaire se traduit par 2 conditions linéaires, de sorte qu'au moins une conique C répond à la question. Or, d'après le th. 52, le triangle (a, b, c) est conjugué à C.

COROLLAIRE 2. — *Dans le plan euclidien, les cercles harmoniquement circonscrits à une hyperbole équilatère* H *passent par son centre. L'ensemble des centres des hyperboles équilatères conjuguées à un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle.*

Comme les points cycliques i, j sont conjugués par rapport à H, ce sont les sommets d'un triangle (i, j, c) conjugué à H, et c est le centre de H (car pôle de la droite à l'infini D_{ij}) ; d'où la première assertion par le cor. 1. La seconde en résulte.

§ C / Transformation par polaires réciproques. Equations tangentielles

Comme au § A, on considère une quadrique S sans point double dans un espace projectif P(E) et son équation homogène $Q(x) = 0$, où Q est une forme quadratique *non dégénérée.* La forme bilinéaire B associée à Q définit un *isomorphisme* f de E sur son dual E^* par $f(x)(y) = B(x, y)$. En transportant Q au moyen de f sur E^*, on obtient la forme quadratique

$$Q^0(u) = Q(f^{-1}(u)), \qquad \text{pour tout } u \text{ de } E^* \tag{66}$$

appelée *forme inverse* de Q. Sa forme bilinéaire associée B^0 est définie par $B^0(u, v) = B(f^{-1}(u), f^{-1}(v))$.

THÉORÈME 53. — *L'hyperplan* H *d'équation* $u(x) = 0$ *est tangent à* S *ssi* $Q^0(u) = 0$.

L'hyperplan tangent au point x_0 de S a pour équation $B(x_0, x) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0)(x) = 0$. Si on l'écrit $u(x) = 0$, le contact signifie que $u \in f(S)$, $f^{-1}(u) \in S$, $Q(f^{-1}(u)) = 0$ et finalement $Q^0(u) = 0$.

L'équation $Q^0(u) = 0$ s'appelle *l'équation tangentielle* de S.

COROLLAIRE. — *Si* $M = (B(e_i, e_j))$ *est la matrice de* B *(ou* Q*) dans une base* (e_i) *de* E, *la matrice de la forme inverse dans la base duale de* E^* *est* M^{-1}.

Pour x et y dans E, écrivons $B^0(f(x), f(y)) = B(x, y)$; notons M^0 la matrice de B^0 dans la base duale et X, Y les vecteurs colonnes correspondant à x, y. On a alors ${}^tX.{}^tM(f).M^0.M(f).Y = {}^tX.M.Y$, où $M(f)$ désigne la matrice de f dans la base donnée de E et la base duale de E^*. Comme on a $f(e_i)(e_j) = B(e_i, e_j)$, la matrice $M(f)$ est M et on a ${}^tM = M$ car B est symétrique. D'où ${}^tXMM^0MY = {}^tXMY$ pour tous vecteurs colonnes X, Y, ce qui donne $MM^0M = M$, d'où $M^0 = M^{-1}$ car M est inversible.

Ce corollaire est utile pour calculer les équations tangentielles des quadriques. La relation $Q^0(u_0e_0 + \ldots + u_ne_n) = 0$ exprime que l'hyperplan $u_0x_0 + \ldots + u_nx_n$ est tangent à S.

Exemples. — 1) L'équation tangentielle de la quadrique

$$u_0x_0^2 + \ldots + a_nx_n^2 = 0 \quad \text{est} \quad a_0^{-1}u_0^2 + a_1^{-1}u_1^2 + \ldots + a_n^{-1}u_n^2 = 0\,.$$

2) Dans le plan, soit S la conique $ayz + bzx + cxy = 0$. On a $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$. Son déterminant est $2abc$. Le calcul de sa matrice inverse donne, pour équation tangentielle de S,

$$au^2 + bv^2 + cw^2 - abuv - acuw - bcvw = 0.$$

3) Dans le plan toujours, il peut être plus commode d'exprimer que la droite $ux + vy + wz = 0$ est tangente à la conique $F(x, y, z) = 0$ en écrivant que l'équation homogène $F(x, y, -(ux + vy)/w) = 0$ (en x, y), ou mieux encore, $F(wx, wy, -ux - vy) = 0$, a une racine double par annulation de son discriminant.

Ce dernier procédé se généralise. Nous nous bornerons au *plan* pour alléger. Soit C une *courbe algébrique* du plan projectif, d'équation homogène $F(x, y, z) = 0$. Comme ci-dessus, l'annulation d'un discriminant montre que la condition pour qu'une droite $ux + vy + wz = 0$ soit tangente à C (ou passe par l'un de ses points multiples) est algébrique et homogène en u, v, w. En la débarrassant des facteurs $au + bv + cw$ qui expriment le passage par un point multiple (a, b, c), on obtient une équation polynomiale homogène $F^0(u, v, w) = 0$ qu'on appelle *l'équation tangentielle* de C. Son degré est appelé la *classe* de C.

Lorsque F est de degré n, l'étude du discriminant d'une équation de degré n montre que, avant enlèvement des facteurs linéaires correspondant aux points multiples de C, le degré de la relation entre u, v, w est $n(n - 1)$. Si C n'a, comme points multiples, que d points doubles à tangentes distinctes et r points de rebroussement ordinaires, on peut montrer que la classe de C est $c = n(n - 1) - 2d - 3r$ (« formule de Plücker »).

Ainsi une *cubique* sans point multiple est de classe 6, une cubique nodale de classe 4 et une cubique cuspidale de classe 3 (cf. chap. II, § F).

La classe d'une courbe plane C est donc, par dualité (chap. I, § E), le *nombre de tangentes* (« réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues ») *qu'on peut mener à C à partir d'un point quelconque du plan.*

D'après le th. 53, *une conique sans point double est une courbe de seconde classe.*

L'ensemble E des droites $ux + vy + wz = 0$ du plan projectif dont les « coordonnées » (u, v, w) satisfont à une équation polynomiale homogène $G(u, v, w) = 0$ de degré c est parfois appelé une « *enveloppe de classe c* ». Par tout point du plan il passe, si G n'a pas de facteurs linéaires, c droites (« réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues ») appartenant à cette « enveloppe » E.

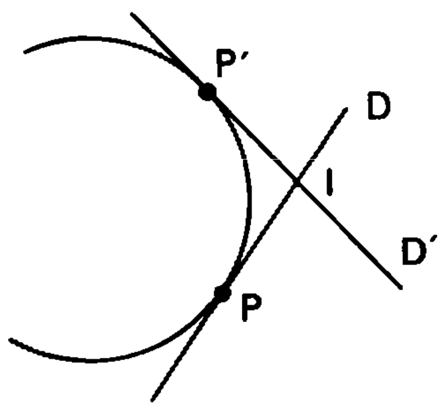
En appliquant à G le calcul de discriminant qui a permis de passer de l'équation ponctuelle $F(x, y, z) = 0$ d'une courbe C à son équation tangentielle $F^0(u, v, w) = 0$, on obtient une équation homogène $G^0(x, y, z) = 0$. Elle exprime que, parmi les droites de l'enveloppe E qui passent par le point (x, y, z), il y en a au moins 2 qui sont confondues.

Lorsque $G(u, v, w) = 0$ est l'équation tangentielle $F^0(u, v, w) = 0$ d'une courbe C d'équation ponctuelle $F(x, y, z) = 0$, il n'est *nullement évident* que $G^0(x, y, z) = 0$ est l'équation ponctuelle $F(x, y, z) = 0$ dont on est partis, autrement dit que $F^{00} = F$ (éventuellement à un facteur près). C' est même faux en caractéristique $p \neq 0$ à cause des courbes, comme $y = x^p$, dont toutes les tangentes passent par un même point.

C'est cependant *vrai* (en caractéristique $\neq 2$) lorsque C est une *conique* sans point double car la forme inverse d'une forme inverse est la forme quadratique initiale : $F^{00} = F$ (cf. th. 53).

Précisons le problème général. Rappelons (chap. I, § C) que la tangente T en un point simple $P = (a, b, c)$ d'une courbe C d'équation $F(x, y, z) = 0$ est la droite par P qui coupe C avec multiplicité $\geqslant 2$ en P ; son équation est $xF'_x(a, b, c) + yF'_y(a, b, c) + zF'_z(a, b, c) = 0$ (*ibid.*, formule (23)). En traduisant cela pour une enveloppe E d'équation $G(u, v, w) = 0$, on prend une droite D « simple » dans E (c'est-à-dire n'annulant pas les 3 dérivées partielles $G'_u, \ldots$) et l'on cherche le point K de D pour lequel, parmi les droites de E passant par K, plusieurs sont confondues en D ; ses coordonnées homogènnes sont $(G'_u(p, q, r), G'_v(p, q, r), G'_w(p, q, r))$ en notant $px + qy + rz = 0$ l'équation de D ; on l'appelle le *point caractéristique de* D. Le problème précisé est alors le suivant : lorsque E est l'ensemble des tangentes à une courbe C et D la tangente en un point P de C, *le point caractéristique* K *de* D *est-il le point de contact* P ?

Lorsque le corps de base K est localement compact, **R** ou **C** en particulier, et que le plan projectif est muni de la topologie compacte décrite au chap. II, § H, de même que la tangente en P à une courbe C est la limite de la droite joignant P à un point voisin P', le point caractéristique de la tangente D est la *limite* du point d'intersection I de D et de la tangente D' en un point voisin. En prenant le point P pour origine des coordonnées affines et la tangente D pour axe Ox, l'équation de la



courbe C se traduit par un développement en série $y = ax^k + bx^{k+1} + \dots$ ($a \neq 0$) convergent au voisinage de l'origine. L'équation de la tangente D′ au point (x, y) de C est $Y - y = y'(X - x)$; elle coupe D ($Y = 0$) au point d'abscisse $X = x - (y/y')$; si l'exposant k du terme de plus bas degré de y n'est *pas multiple de la caractéristique* (ce qui est toujours le cas en caractéristique 0), y/y' est équivalent à x/k lorsque x tend vers 0 et l'abscisse du point I tend vers 0. D'où :

THÉORÈME 54. — *Lorsque le corps de base est* **R**, *ou* C, *ou une extension finie de* $\mathbf{Q}_p$ (c.-à-d. *localement compact de caractéristique 0*), *le point caractéristique de la tangente à une courbe algébrique plane est son point de contact. En particulier, si l'on note* $F^0(u, v, w) = 0$ *l'équation tangentielle de la courbe d'équation ponctuelle* $F(x, y, z) = 0$, *les équations* $F^{00}(x, y, z) = 0$ *et* $F(x, y, z) = 0$ *sont équivalentes.*

On peut même montrer qu'elles sont proportionnelles (ce qui revient, si F est irréductible, à dire que F^{00} n'est pas une puissance de F ; cf. chap. I, § H). Ce sera le cas si l'on a pris soin de « nettoyer » F^0 de ses facteurs multiples ou parasites.

Comme chacune des assertions du th. 54 ne fait intervenir qu'un nombre fini d'éléments du corps de base, et comme toute extension de type fini de **Q** peut se plonger dans C, le th. 54 est valable pour tout corps de caractéristique 0.

Ce qui précède est utile pour l'étude de la *transformation par polaires réciproques.* On se donne une conique sans point double S du plan projectif, équation $Q(x, y, z) = 0$. A tout point a du plan, on fait correspondre sa polaire $P(a)$ par rapport à S et à toute droite D son pôle $p(D)$; d'après le § A, ces deux applications sont des *isomorphismes réciproques* entre le plan projectif et son dual. Donc points alignés sont transformés en droites concourantes, et droites concourantes en points alignés, etc.

Il est sans inconvénient en général et commode pour les propriétés euclidiennes de donner à S l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Alors le point de coordonnées (x, y, z) et la droite de coefficients (u, v, w) se correspondent par cette transformation ssi l'on a, à un facteur près :

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = -w. \tag{66}$$

Avec une équation plus générale pour S, u, v, w sont des formes linéaires, $Q'_x(x, y, z)$ etc., de x, y, z, et inversement.

Soit maintenant C une courbe algébrique de degré d et de classe c, avec $F(x, y, z) = 0$ pour équation ponctuelle et $F^0(u, v, w) = 0$ pour équation tangentielle. On fait correspondre à C :

— d'une part l'enveloppe E′ formée par les polaires des points de C ; son équation est $F(u, v, -w) = 0$ d'après (66) ; elle est de classe d ;
— d'autre part la courbe C′ formée par les pôles des tangentes à C ; son équation est $F^0(x, y, -z) = 0$; elle est de degré c.

En caractéristique 0 (et aussi en caractéristique $p \neq 2$ si C est une conique), E′ *est l'ensemble des tangentes à* C′ *(et, dualement,* C′ *est l'ensemble des points caractéristiques de* E′*)* d'après le th. 54 : en effet l'équation tangentielle de C′ est $F^{00}(u, v, -w)=0$, équivalente à $F(u, v, -w)=0$. On dit que C′ est la *transformée par polaires réciproques de* C (par rapport à S). On voit aussitôt que C est aussi la transformée par polaires réciproques de C′. Degré et classe s'échangent.

Exemples. — Si C est une cubique cuspidale ($d = 3$, $c = 3$), C′ en est une autre. Si C est une cubique nodale ($d = 3$, $c = 4$), C′ est une quartique de classe 3, c'est-à-dire, à en croire la formule de Plücker, une quartique avec 3 points de rebroussement ($3 = 4(4-1) - 3.3$).

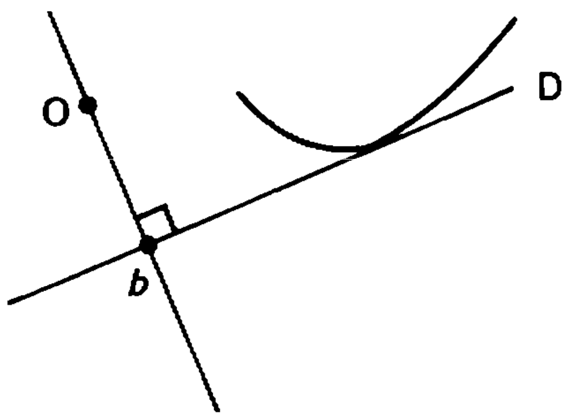
En tout cas, si C est unicursale, C′ l'est aussi car, de la représentation paramétrique homogène $(P(t), Q(t), R(t))$ de C, on déduit que la tangente à C au point de paramètre t a pour équation

$$(Q(t)R'(t) - R(t)Q'(t))x + (R(t)P'(t) - P(t)R'(t))y + (PQ' - QP')z = 0.$$

Ainsi $(QR' - RQ', RP' - PR', -PQ' + QP')$ est une représentation paramétrique homogène. Elle semble être de degré $d(d-1)$ où $d = \mathrm{Max}(d^0P, d^0Q, d^0R)$ ($= d^0C$ si la représentation est propre), mais des simplifications se produisent.

Ainsi, pour la cubique nodale $(t, t^2, t^3 + a)$, on obtient pour C′ la représentation $(t^4 - 2at, -2t^3 + a, t^2)$, ce qui est bien une quartique. Si C est la cubique cuspidale $(1, t, t^3)$, on obtient $(2t^3, -3t^2, -1)$, autre cubique cuspidale (poser $t = 1/u$).

Dans le plan euclidien, on a vu (§ A) que, par rapport au cercle unité $x^2 + y^2 - 1 = 0$, le pôle d'une droite D est l'inverse a, dans l'inversion de



pôle O et de puissance 1, de la projection orthogonale b de O sur D. Lorsque D parcourt l'ensemble des tangentes à une courbe C, la courbe parcourue par la projection orthogonale b s'appelle la *podaire* de O par rapport à C (ainsi la podaire du foyer d'une parabole par rapport à celle-ci est la tangente au sommet). La transformée C′ de C par polaires réciproques est ainsi *l'inverse de cette podaire.*

§ D / Applications aux coniques

Certaines applications utilisent uniquement le th. 53, qui dit essentiellement qu'une conique propre est une enveloppe de seconde classe et ne font que *traduire* en termes de tangentes des énoncés sur les points des coniques :

a) (Traduction du th. 34, § E, chap. II sur la génération des coniques par deux faisceaux en relation homographique). — Soit h une homographie d'une droite D sur une droite D′. Lorsque m parcourt D, la droite $D_{mh(m)}$ enveloppe une conique C tangente à D et D′, à condition que le point a commun à D et D′ soit tel que $h(a) \neq a$. Si $h(a) = a$, les droites $D_{mh(m)}$ $(m \neq a)$ passent par un point fixe.

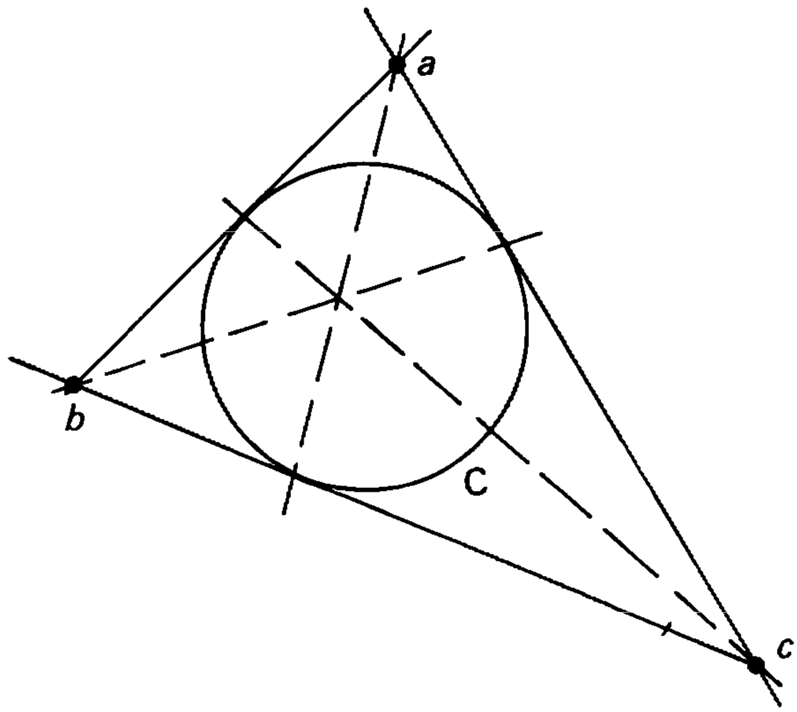
Si, dans le plan affine, l'application h est affine, le point à l'infini de D′ est l'image par h de celui de D et l'enveloppe C est une *parabole.*

b) (Traduction du th. de Frégier, th. 35, *ibid.*). — Soit j une involution sur une conique propre C. Lorsque m parcourt C, le point d'intersection des tangentes à C en m et en $j(m)$ parcourt une droite D, qui passe par les points fixes de j.

Dans le plan affine, une parabole P admet une seule tangente de direction D et celle-ci est fonction homographique de D (car l'autre tangente à P menée par le point à l'infini de D est la droite de l'infini et est fixe). Donc, dans le plan euclidien, les points de P où les tangentes sont orthogonales se correspondent dans une involution. Ainsi le point d'intersection de ces tangentes parcourt une droite, qui passe par les points de P où les tangentes sont isotropes ; on verra que c'est la directrice de P.

c) (Traduction du th. de Pascal, th. 36, *ibid.*). — Soient T_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 6 tangentes à une conique propre C. On note i le point $T_i \cap T_{i+1}$ (avec $T_7 = T_1$). Alors les droites D_{14}, D_{25} et D_{36} sont concourantes. Cet énoncé est appelé le théorème de Brianchon.

En particulier, lorsqu'une conique C est tangente aux 3 côtés d'un triangle (a, b, c), les droites qui joignent les sommets a, b, c aux points de contact des côtés opposés sont concourantes (cf. cor. au th. 36).



Correspondance entre les décompositions ponctuelles et tangentielles

En vue de résultats où interviennent des coniques décomposées, étudions ces cas de décomposition. De même qu'une conique ponctuelle peut se décomposer en 2 droites, D + D′, ou en une droite double 2D, une enveloppe de seconde classe (dite aussi « conique tangentielle »), équation $G(u, v, w) = 0$, peut se décomposer :

— soit en 2 faisceaux linéaires de droites (G produit de 2 formes linéaires), auquel cas on dit qu'elle est décomposée en les *deux points* base b, b' et on la note $b + b'$;
— soit (si G est le carré d'une forme linéaire) en un faisceau de droites, « compté deux fois » ; si b est son point base, on dit que l'enveloppe est décomposée en un *point double*, b, et on la note $2b$.

Le th. 53 fournit une correspondance (bijective) entre coniques ponctuelles et tangentielles non décomposées. Nous allons la *prolonger* aux coniques décomposées. Notons P (resp. P^0) l'espace projectif de dimension 5 des coniques ponctuelles (resp. tangentielles). On va définir le *graphe* dans $P \times P^0$ de la correspondance cherchée. Pour cela, on écrit les coefficients de la conique ponctuelle

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'zx + 2c'xy = 0$$

sous la forme de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c' & b' \\ c' & b & a' \\ b' & a' & c \end{pmatrix}$ de la forme bilinéaire associée. De même $M^0 = \begin{pmatrix} A & C' & B' \\ C' & B & A' \\ B' & A' & C \end{pmatrix}$ pour les coefficients d'une conique tangentielle $Au^2 + \ldots + 2C'uv = 0$. Par le th. 53, ce graphe est défini, pour les coniques propres, par la relation

$$\text{La matrice } MM^0 \text{ est proportionnelle à la matrice unité.} \quad (67)$$

NB. — La relation $MM^0 = I$ n'est pas homogène et ne pourrait pas être prolongée.

Elle se traduit par 6 équations du genre

$$aC' + c'B + b'A' = 0, \text{ etc.} \quad (68)$$

pour les termes non diagonaux de MM^0, et par

$$aA + c'C' + b'B' = c'C' + bB + a'A' = b'B' + a'A' + cC \quad (69)$$

pour les termes diagonaux.

On pourra noter que ces équations deviennent linéaires après identification de $P \times P^0$ à la variété de Segre dans P_{35} (chap. III, § C).

Pour une conique décomposée en 2 droites, $D + D'$, qu'on peut supposer être $xy = 0$, seul c' est non nul. Les équations (68) donnent alors $B = 0$, $A' = 0$, $A = 0$, $B' = 0$, et les équations (69) $C' = C' = 0$. Ainsi seul C est non nul dans M^0 et une seule conique tangentielle, $w^2 = 0$, correspond à $D + D'$; c'est 2 fois le point d'intersection de D et D'.

Pour une droite double 2D, qu'on peut supposer être $x^2 = 0$, seul a est non nul. Les 6 équations (68) se réduisent à $C' = B' = 0$ et (69) donne $A = 0 = 0$. Les coniques tangentielles correspondant à 2D ont ainsi pour équations $Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw = 0$. Ce sont tous les couples de points situés sur D.

La correspondance prolongée est donc définie par :

— à 2 droites, $D + D'$, correspond 2 fois le point d'intersection de D et D' ;

— à une droite double 2D correspondent tous les couples de points de D.

Et, par symétrie :

— à un couple de points, $b + b'$, correspond $2D_{bb'}$;
— à un point double $2b$ correspondent toutes les $D + D'$, où D et D′ sont des droites passant par b.

Faisceaux linéaires tangentiels

Un faisceau linéaire tangentiel est l'ensemble des coniques tangentielles $E(t)$ dont l'équation est de la forme $F(u, v, w) + tG(u, v, w) = 0$ ($t \in \hat{K}$). Il admet un nombre fini de *droites-base*, tangentes à toutes les coniques du faisceau. Etant donnée une droite distincte des droites-base, elle est tangente à une unique conique du faisceau (cf. chap. I, § G).

L'exemple le plus général de faisceau linéaire tangentiel est l'ensemble des *coniques tangentes à 4 droites*, sans triplet de droites concourantes (cf. *ibid.* th. 18). Les autres types de faisceaux tangentiels (contenant des coniques propres) sont définis par 4 conditions de contact avec des droites et de passage par des points de certaines d'entre elles : par exemple (« type (2, 1, 1) ») coniques tangentes à une droite donnée en un point donné et tangentes à 2 autres droites. On notera que les conditions *symétriques* en points et en droites définissent des faisceaux linéaires tangentiels qui sont, *en même temps*, des faisceaux linéaires ponctuels ; ce sont uniquement :

— (type (2, 2)) coniques tangentes à deux droites données D, D′ en deux points donnés a, a' ;
— (type (4)) coniques surosculatrices, tangentes en un point donné à une droite donnée.

Même dans ces deux cas, les coniques ponctuelles et tangentielles décomposées du faisceau ne sont, bien entendu, pas les mêmes. Dans le type (2, 2), ce sont, du point de vue ponctuel, $D + D'$ et $2D_{aa'}$; du point de vue tangentiel, ce sont $a + a'$ et $2(D \cap D')$.

Dans le faisceau tangentiel des coniques tangentes à 4 droites données, il y a 3 coniques décomposées, formées par les couples de « sommets opposés » du « quadrilatère » formé par ces 4 droites. Plus formellement, il y a 6 points d'intersection de ces droites A, B, C, D prises deux à deux ; on les associe « par complémentarité », par exemple $A \cap C$ avec $B \cap D$.

On voit aussi (cf. th. 17, *ibid.*) qu'il y a une seule conique tangentielle *tangente à 5 droites données* dont aucun quadruplet n'est formé de droites concourantes. Elle est propre ssi aucun triplet de ces droites n'est formé de droites concourantes.

Par rapport à une *conique propre* S, les notions de points conjugués, droites conjuguées, pôle et polaire, entendues au sens ponctuel et au sens tangentiel, *coïncident* : en effet (cf. début du § C), l'orthogonalité par rapport à la forme quadratique Q est « transportée » en l'orthogonalité par rapport à la forme inverse Q^0. C'est d'ailleurs là le fondement de la transformation par polaires réciproques par rapport à S.

Cela nous permet de *traduire* l'essentiel du § B. Par rapport à une conique tangentielle éventuellement décomposée, la notion de *pôle* d'une droite a toujours un sens, mais celle de polaire d'un point n'en a pas. Alors :

1) (Traduction du th. 50). — Si une droite D est distincte de celles qui joignent les points des coniques décomposées d'un faisceau linéaire tangentiel F, les pôles de D par rapport aux coniques de F parcourent une droite D′, et l'application de F sur D′ ainsi obtenue est une homographie.

En particulier, dans le plan affine, on voit, en prenant pour D la droite de l'infini, que les *centres* des coniques tangentes à 4 droites données parcourent une droite D′. Celle-ci passe par les 3 milieux des « sommets opposés » du quadrilatère formé par ces 4 droites, qui sont donc alignés.

2) (Traduction du th. 51). — Soit F le faisceau tangentiel des coniques tangentes aux 4 côtés d'un (vrai) quadrilatère. Les polaires d'un point fixe p par rapport aux coniques propres de F sont tangentes à une conique C, qui est aussi tangente aux 3 « diagonales » (= droites joignant 2 sommets opposés) de ce quadrilatère.

En particulier, dans le plan affine, lorsque le quadrilatère est formé de 2 couples de droites parallèles (parallélogramme), la conique C est une parabole tangente aux diagonales du parallélogramme.

Foyers

Dans le plan *euclidien*, on appelle *foyer* d'une courbe algébrique C tout point f tel que *les deux droites isotropes de f soient tangentes à* C.

Une courbe de *classe* c a en général c^2 foyers : en effet, on peut mener c tangentes à C par chacun des points cycliques ; ainsi une conique propre a, en général, *quatre foyers.* Ce nombre s'abaisse si la droite qui joint les points cycliques, c'est-à-dire la droite de l'infini, est tangente à C (il y aura alors, en général, $(c-1)^2$ foyers), ou si C passe par les points cycliques (si elle y passe simplement, les tangentes à C en chaque point cyclique comptent pour 2, et il y a $(c-1)^2$ foyers).

L'abaissement est encore plus grand si la droite de l'infini est bitangente ou osculatrice à C, ou si les points cycliques sont points multiples de C (courbes bi-, tri-, multi-circulaires).

En particulier, une parabole a *un seul* foyer; un cercle a un seul foyer, qui est son centre (car les asymptotes d'un cercle sont les droites isotropes de son centre).

Etudions les 4 foyers d'une conique à centre C, distincte d'un cercle et à coefficients *réels*. Soient T et U les tangentes à C issues du point cyclique i; les tangentes issues de l'autre point cyclique $\bar{i}$ sont les droites conjuguées $\overline{\mathrm{T}}$ et $\overline{\mathrm{U}}$. Les points d'intersection $\mathrm{T} \cap \overline{\mathrm{T}}$ et $\mathrm{U} \cap \overline{\mathrm{U}}$ sont *deux foyers réels*; les deux autres sont deux foyers complexes conjugués. Les symétries par rapport aux axes, disons Ox et Oy, de la conique échangent les points cycliques, échangent T et $\overline{\mathrm{T}}$, et aussi U et $\overline{\mathrm{U}}$; il en résulte que les 2 foyers réels sont sur l'un des axes de C (et symétriques par rapport au centre) et les 2 foyers conjugués sur l'autre (et symétriques aussi).

On voit de même que le foyer d'une parabole est sur son axe. On notera que la donnée des 2 foyers réels (resp. conjugués) détermine les 2 autres : ce sont les autres points d'intersection, non cycliques, des isotropes des foyers donnés.

La recherche des coordonnées (x, y) des foyers d'une conique C donnée par son équation est particulièrement facile s'il s'agit de son *équation tangentielle* $\mathrm{G}(u, v, w) = 0$. En effet la droite isotrope $\mathrm{Y} - y = i(\mathrm{X} - x)$ a pour coordonnées $u = -i$, $v = 1$, $w = ix - y$, d'où l'équation $\mathrm{G}(-i, 1, ix - y) = 0$; l'autre isotrope donne l'équation $\mathrm{G}(i, 1, -ix - y) = 0$. Bien entendu, si G est à coefficients réels, on remplace ces équations par leur somme et leur différence.

Par exemple, l'ellipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 - 1 = 0$ a pour équation tangentielle $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$ (voir début du § C), d'où les équations

$$-a^2 + b^2 - (ix + y)^2 = 0 \quad \text{et} \quad -a^2 + b^2 - (ix - y)^2 = 0.$$

Elles équivalent à $4ixy = 0$ et $2(-a^2 + b^2 + x^2 - y^2) = 0$. Si O$x$ est le grand axe ($a > b$) et qu'on pose $c = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtient les 4 foyers $(c, 0)$, $(-c, 0)$, $(0, ic)$ et $(0, -ic)$. Ainsi les foyers réels sont les foyers bien connus sur le grand axe.

Pour l'hyperbole $(x/a)^2 - (y/b)^2 - 1 = 0$, l'équation tangentielle est $a^2u^2 - b^2v^2 - w^2 = 0$. En posant $c = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtient de même les 4 foyers $(c, 0)$, $(-c, 0)$, $(0, ic)$, $(0, -ic)$. Les foyers réels sont sur l'axe transverse et sont bien connus.

La parabole $x^2 - 2py = 0$ a pour équation tangentielle $pu^2 - 2vw = 0$. D'où les équations $-p - 2(ix - y) = -p + 2(ix + y) = 0$, qui ont pour unique solution $x = 0$, $y = \frac{1}{2}p$, le foyer bien connu élémentairement.

Les coniques de foyers donnés f, f' — non situés sur une même droite isotrope, par exemple deux points réels — sont dites *homofocales*. Elles forment un *faisceau linéaire tangentiel* H car ce sont les coniques tangentes aux 4 isotropes de f et f'. Les coniques décomposées de H sont $f + f'$, $i + \bar{i}$ (points cycliques) et $g + g'$ (les 2 autres foyers). Les coniques de H ont toutes le même centre, milieu de ff'. Soient m un point du plan et F_m le faisceau des droites passant par m. La traduction tangentielle du théorème de Desargues-Sturm (chap. II, § D, th. 31) montre que les 2 tangentes menées par m à une conique variable de H se correspondent dans une involution j de F_m. Il y a donc 2 coniques de H qui passent par m : celles dont les tangentes en m sont les droites fixes T, U de j (si les foyers f, f' sont réels, l'une de ces coniques est une ellipse et l'autre une hyperbole). A cause de la conique décomposée $i + \bar{i}$, les droites isotropes de m sont homologues pour j, de sorte que T et U sont *orthogonales* (chap. II, § D). Comme D_{mf} et $D_{mf'}$ sont homologues elles aussi, elles sont symétriques par rapport à T et U, qui sont ainsi les *bissectrices* des droites D_{mf} et $D_{mf'}$. On retrouve encore des propriétés bien connues.

La *polaire* par rapport à une conique C d'un foyer f de C s'appelle la *directrice* associée à ce foyer. Elle joint les points de contact a, a' des isotropes I, I' de f avec C. Ainsi C fait partie du faisceau linéaire ponctuel des coniques tangentes à I en a et à I' en a'. Il contient I + I' et $2D_{aa'}$. En mettant l'origine en f et en écrivant $px + qy + r = 0$ une équation de la directrice $D_{aa'}$, l'équation de C est donc de la forme :

$$x^2 + y^2 - t(px + qy + r)^2 = 0. \qquad (70)$$

Elle exprime que C est *l'ensemble des points dont le rapport des distances au foyer f et à la directrice* D *associée est constant.*

En fait, il vaut $(t(p^2 + q^2))^{\frac{1}{2}}$. On voit facilement qu'il vaut 1 ssi la somme des termes de degré 2 dans (70) est un carré, c'est-à-dire ssi C est une parabole.

On notera que la distance $d(f, m)$ du foyer f à un point variable de la conique C est (au signe près) une fonction affine des coordonnées (x, y) de m. Plus généralement, supposons qu'on ait une courbe réelle C et un point f tels que la distance $d(f, m)$ de f à un point variable m de C soit une *fonction rationnelle* $\mathrm{R}(x, y)$ des coordonnées (x, y) de m (au signe près). Avec f à l'origine et R quotient P/Q de deux polynômes, on a

$$(x^2 + y^2)\mathrm{Q}(x, y)^2 - \mathrm{P}(x, y)^2 = 0. \tag{71}$$

Cela n'est pas une identité, valable pour tous x et y, car $x^2 + y^2$ n'est pas un carré. Si on choisit R (qui n'est déterminé que modulo l'équation de C), puis P et Q, de telle sorte que $\max(d^0\mathrm{P}, d^0\mathrm{Q})$ soit minimal, on peut montrer que le premier membre de (71) est irréductible, donc est l'équation de C. Elle montre que les points d'intersection de C avec les isotropes $y = ix$ et $y = -ix$ de f ont *tous* une multiplicité paire. Mais tous les foyers des courbes algébriques planes n'ont pas cette propriété. L'équation (71) montre facilement qu'une telle courbe doit être *de degré pair* (ce qui exclut les cubiques, même circulaires, même nodales ou cuspidales comme la strophoïde et la cissoïde). Après les coniques, l'exemple le plus simple de telles courbes est la quartique

$$(x^2 + y^2)\mathrm{L}(x, y)^2 - \mathrm{P}(x, y)^2 = 0$$

où $\mathrm{L}(x, y) = 0$ est l'équation d'une droite et $\mathrm{P}(x, y) = 0$ celle d'une conique.

Enfin, étant données une conique C et un point m, voyons à quelle condition la *podaire* de m par rapport à C (c'est-à-dire l'ensemble des projections orthogonales de m sur les tangentes à C) est *un cercle ou une droite.* On a vu (fin du § C) que cette podaire P est l'inverse, dans l'inversion de pôle m et de puissance 1, de la conique C^0 polaire réciproque de C par rapport au cercle S de centre m et de rayon 1. Donc la podaire P est un cercle ou une droite ssi il en est de même de C^0 (chap. I, § F). Cela signifie que C^0 passe par les points cycliques. Or les polaires des points cycliques par rapport à S sont les droites isotropes de m, qui sont donc tangentes à C. D'où

THÉORÈME 55. — *La podaire* P *d'un point m par rapport à une conique propre* C *est un cercle ou une droite ssi m est un foyer de* C.

Dire que P est une droite veut dire que C^0 passe par m, ce qui signifie que C est tangente à la polaire de m par rapport à S, laquelle est la droite de l'infini. Donc :

COROLLAIRE. — *La podaire de m par rapport à une conique* C *est une droite ssi* C *est une parabole et m son foyer.*

En général, si on met l'origine en m et si l'on écrit l'équation de C^0 sous la forme $F_2(x, y) + F_1(x, y) + k = 0$ (F_i homogène de degré i), l'équation de la podaire P s'obtient en remplaçant x par $x/(x^2 + y^2)$ et y par $y/(x^2 + y^2)$ (chap. I, § F, formule (25)). On obtient donc l'équation

$$F_2(x, y) + (x^2 + y^2)F_1(x, y) + k(x^2 + y^2)^2 = 0 . \tag{72}$$

Si $k \neq 0$ (et si m n'est pas un foyer de C), c'est celle d'une *quartique* dont les points cycliques sont points doubles (« quartique bicirculaire »). Si $k = 0$ (ce qui veut dire que C^0 passe par m et que C est une parabole), on obtient une *cubique circulaire* ayant m pour point double ; elle est cuspidale (cf. chap. II, § F) ssi F_2 est un carré, ce qui veut dire que C^0 est une parabole, c'est-à-dire que C passe par m ; sinon la cubique est nodale et c'est une strophoïde (tangentes au point double orthogonales) ssi C^0 est une hyperbole équilatère, ce qui veut dire que les tangentes à C menées par m sont orthogonales.

Comme C est unicursale, sa podaire l'est aussi.

APPENDICE

Correspondances (2, 2)

Une correspondance entre deux ensembles D, D′ est une partie B du produit D × D′. Au point a de D correspond la partie $\mathrm{pr}_{D'}((a \times D') \cap B)$ de D′ (couper B par la verticale de a et projeter) ; *idem* pour un point a' de D′.

Ici, D et D′ seront des variétés algébriques contenues dans des espaces projectifs **P**, **P**′ et leur produit est une partie de **P** × **P**′, lui-même plongé comme variété de Segre (chap. III, § C) dans un espace projectif **P**″. Même si D et D′ sont de simples droites projectives, on est conduits à faire de la Géométrie algébrique de dimension (au moins) 3, dont les fondements sont un peu plus élaborés que ceux qui ont suffi pour les questions planes. Ces fondements consistent, pour notre usage, en un certain nombre de faits, que nous admettrons.

Faits admis

a) Les parties d'un espace projectif $\mathbf{P}_n$ définies par des systèmes $(F_j(x) = 0)$ d'équations polynomiales homogènes sont dites *algébriques*. Les réunions finies et les intersections quelconques de parties algébriques sont algébriques. L'ensemble, ordonné par inclusion, des parties algébriques de $\mathbf{P}_n$ satisfait à la condition minimale : toute famille non vide de parties algébriques admet un élément minimal ; il revient au même de dire que toute suite décroissante de parties algébriques est stationnaire. En appelant *irréductible* une partie algébrique non vide A qui n'est pas réunion de deux parties algébriques A′, A″ distinctes de A, on en déduit que toute partie algébrique B est *réunion finie* de parties irréductibles. On dit souvent « *variété algébrique* » ou « variété » au lieu de « partie algébrique irréductible ». Une représentation $B = V_1 \cup \ldots \cup V_q$ de B comme union de variétés V_i, dont aucune n'est contenue dans une autre, est *unique* et les V_i sont appelées les *composantes irréductibles* (ou composantes) de B.

b) Par des méthodes algébriques et analytiques variées, on attache à toute variété algébrique V un entier appelé sa *dimension*, dim(V), qui généralise la notion connue pour les vlp. Les variétés de dimension 0 sont les points (si l'on opère, comme nous le faisons sur un corps *algébriquement clos*).

c) Une partie algébrique de $\mathbf{P}_3$ (resp. $\mathbf{P}_n$) dont toutes les composantes sont de dimension 2 (resp. $n - 1$) s'appelle une *surface* (resp. hypersurface) ; ces parties ne sont autres que celles qui sont définies *par une seule équation* polynomiale homogène $F(x, y, z, t) = 0$ (resp. $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$; cf. chap. I, § C). On peut supposer F sans facteurs carrés (et alors l'ensemble S la détermine à un facteur constant près ; cf. chap. I, § H) ; alors S est une variété ssi F est irréductible ; le *degré* de F est appelé le degré de la surface (resp. hypersurface) S ; notation $d^0(S)$; c'est le nombre de points d'intersection, comptés avec leurs multiplicités, de S avec toute droite non contenue dans S.

d) Une partie algébrique dont toutes les composantes sont de dimension 1 s'appelle une *courbe*. L'intersection $S \cap S'$ de 2 surfaces de $\mathbf{P}_3$ (sans composante commune) est une courbe. On peut affecter une multiplicité $m(i)$ (ou $m(C_i ; S.S')$) à chaque composante C_i ($i = 1, \ldots q$) de cette intersection ; la somme formelle $m(1)C_1 + \ldots + m(q)C_q$ (appelée « cycle de dimension 1 ») est appelée le cycle intersection de S et S', et est notée $S.S'$. On a $m(i) = 1$ ssi il existe un point de C_i où les plans tangents à S et S' sont distincts.

Inversement, toute courbe irréductible C est *une composante* de l'intersection de deux surfaces, mais n'est *pas* nécessairement une « *intersection complète* », c'est-à-dire l'intersection de deux surfaces S, S' (plus précisément le cycle $S.S'$, avec $m(C ; S.S') = 1$).

e) Etant données une courbe C et une surface S qui ne contient aucune composante de C, l'intersection $S \cap C$ est formée d'un nombre fini de points P_j ($j = 1, \ldots, r$). On peut affecter chacun d'une multiplicité $m(j)$ (ou $m(P_j ; C.S)$). Le nombre de ces points, comptés avec leurs multiplicités, est un multiple $nd^0(S)$ du degré de S ; le nombre n, qui ne dépend que de C, est appelé le *degré de la courbe* C, notation $d^0(C)$; la courbe C est une droite ssi $d^0(C) = 1$; une courbe C rencontre un plan en $d^0(C)$ points. La somme des degrés des composantes (comptées avec leurs multiplicités) de l'intersection de deux surfaces S, S′ est $d^0(S)d^0(S')$.

Par linéarité, cela se généralise à un diviseur S et à un cycle C de dimension 1.

La somme formelle $m(1)P_1 + \ldots + m(r)P_r$, appelée cycle de dimension 0, est notée S.C (« cycle intersection »).

f) On admettra que tous les calculs raisonnables de multiplicités d'intersection (par exemple comme multiplicités de racines d'équations polynômes) donnent *le même résultat*.

Etant données 3 surfaces (ou diviseurs) S, S′, S″, on a la formule d'associativité $(S.S').S'' = S.(S'.S'')$ (lorsque les deux membres sont définis).

g) Soit P un point de l'intersection C de deux surfaces S et S′. Alors P est *simple* sur C ssi il est simple sur S et S′ et si les plans tangents à S et S′ en P sont distincts. Ainsi l'intersection de deux surfaces tangentes en un point P (par exemple une surface et son plan tangent) admet P pour point multiple.

Pour une surface et son plan tangent, cela résulte d'un calcul très simple.

Comme l'intersection d'une quadrique et d'un plan est une conique, l'intersection d'une quadrique et d'un plan tangent est décomposée en deux droites.

Correspondances entre deux droites projectives

Soient D et D′ deux droites projectives. Nous nous bornerons aux correspondances qui sont des *courbes* (ou cycles de dimension 1) de $D \times D'$. En prenant des abscisses projectives u, v sur D et D′, une telle correspondance C est décrite par une relation polynôme

$$F(u, v) = 0. \qquad (a)$$

En notant p le degré de F par rapport à u et q son degré par rapport à v, on dit qu'on a *une correspondance* (p, q). L'équation (a) ne définit *pas* une courbe du plan affine K^2, ni de $\mathbf{P}_2(K)$, car u et v peuvent prendre la valeur infinie.

Rappelons que $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ ne sont pas isomorphes. Sur $\mathbf{R}$, l'un est un tore, l'autre une surface non orientable (chap. II, § H). Sur un corps fini, ils n'ont pas le même cardinal ($(q + 1)^2$ et $q^2 + q + 1$).

En toute rigueur, il vaut mieux prendre des coordonnées homogènes (u', u'') sur D $(u = u'/u'')$ et (v', v'') sur D' $(v = v'/v'')$. Alors $u''^p v''^q F(u'/u'', v'/v'')$ est un polynôme $F_h(u', u''; v', v'')$, homogène de degré p en (u', u'') et de degré q en (v', v''). L'habitude qu'on a prise des calculs avec ∞ (p. ex. des racines infinies des équations) nous dispensera souvent de recourir à cette écriture plus lourde.

Les points de D' qui correspondent à un point u_0 de D, ceux de $\mathrm{pr}_{D'}((u_0 \times D').C)$, sont tout simplement les *racines* (finies ou infinies, distinctes ou confondues) de l'équation $F(u_0, v) = 0$. Pour une correspondance (p, q), *il y en a q*. *Idem* pour v_0 donné sur D'.

Une correspondance C est dite *décomposée* si elle ne se réduit pas à une courbe irréductible. Elle est dite *dégénérée* si une ou plusieurs « horizontales » $(D \times v_0)$ ou « verticales » $(u_0 \times D')$ figurent dans sa décomposition. Une correspondance $(p, 0)$ (resp. $(0, q)$) est formée de p verticales (resp. q horizontales) ; si un point u_0 de D n'est pas sur celles-ci, aucun point de D' ne lui correspond.

Pour une *correspondance* (1, 1), (a) s'écrit $auv+bu+cv+d=0$; c'est donc une *homographie*, sauf si $ad - bc = 0$. Si on représente $D \times D'$ par la quadrique de Segre S, $xt - yz = 0$, avec $x = u'v'$, $y = u'v''$, $z = u''v'$ et $t = u''v''$ (chap. III, § C), l'équation homogénéisée de la correspondance

$$au'v' + bu'v'' + cu''v' + du''v'' = 0$$

se traduit par $ax + by + cz + dt = 0$, de sorte que la correspondance C est l'intersection de S et d'un plan, donc une *conique*. Les correspondances (1, 1) telles que $ad - bc = 0$ sont les intersections de S avec ses *plans tangents* ; elles sont décomposées en les 2 génératrices du point de contact, c'est-à-dire en une verticale et une horizontale.

Une *correspondance* (2, 1) s'écrit $(au^2+bu+c)v+(a'u^2+b'u+c')=0$. Si elle est irréductible, c'est une *application rationnelle* de degré 2 de D sur D'. Rendons son équation homogène :

$$(au'^2 + bu'u'' + cu''^2)v' + (a'u'^2 + b'u'u'' + c'u''^2)v'' = 0\,.$$

Le premier membre n'est *pas* fonction des seuls produits $x = u'v', \ldots, t = u''v''$, et la correspondance C ne se présente pas aussitôt comme l'intersection de S et d'une autre surface T ; c'est d'ailleurs impossible car les génératrices de l'un et l'autre système de S couperaient T en le même nombre $d^0(\mathrm{T})$ de points. Plus généralement, ce raisonnement et un calcul analogue à celui fait pour les homographies montrent :

THÉORÈME A. — *Les correspondances qui sont l'intersection (complète) de la quadrique de Segre* S *et d'une autre surface* T *sont les correspondances* (n, n) *avec* $n = d^0(\mathrm{T})$.

Une correspondance (2, 1) irréductible C est coupée en 3 points par tout plan tangent à S (2 points sur une génératrice, 1 sur l'autre). C'est donc une courbe de degré 3 ; elle n'est pas plane, sinon ce serait l'intersection de S et d'un plan, donc une conique ; on lui donne ainsi le nom de *cubique gauche.* D'ailleurs l'équation $\mathrm{P}(u)v + \mathrm{Q}(u) = 0$ (P, Q polynômes de degré 2) et la représentation paramétrique ($x = uv$, $y = u$, $z = v$, $t = 1$) de S montrent que C est une *courbe unicursale* de représentation paramétrique homogène $(-u\mathrm{Q}(u), u\mathrm{P}(u), -\mathrm{Q}(u), \mathrm{P}(u))$; cela montre à nouveau qu'elle est de degré 3 ; la représentation est propre.

Une cubique gauche n'est jamais l'intersection complète de deux surfaces T, T′ car la relation $d^0(\mathrm{T})d^0(\mathrm{T}') = 3$ l'obligerait à être plane.

La somme de C et d'une horizontale G (p. ex. $v = 0$) est une intersection complète de S et d'une surface T (multiplier l'équation homogène de C par v') ; c'est une correspondance (2, 2) dégénérée.

Correspondance (2, 2) *et biquadratiques ; cas de décomposition*

Soit B une correspondance (2, 2) entre deux droites projectives D, D′. Son équation est de la forme

$$au^2v^2 + uv(bu + b'v) + cuv + c'u^2 + c''v^2 + du + d'v + e = 0 \qquad (b)$$

et son homogénéisée est :

$$\begin{aligned} au'^2v'^2 + u'v'(bu'v'' + b'v'u'') + cu'v'u''v'' + c'u'^2v''^2 \\ + c''v'^2u''^2 + du'u''v''^2 + d'v'v''u''^2 + eu''^2v''^2 = 0. \end{aligned}$$

C'est donc l'intersection de la quadrique de Segre S avec la quadrique T :

$$ax^2 + x(by + b'z) + cxt + c'y^2 + c''z^2 + dyt + d'zt + et^2 = 0. \qquad (c)$$

L'équation de T n'est déterminée que modulo l'équation, $xt - yz$, de S ; on aurait pu écrire cyz, ou $c_1yz + (c - c_1)xt$, au lieu de cxt. Donc la quadrique T est la quadrique la plus générale. D'où :

THÉORÈME B. — *Toute correspondance* (2, 2) *est intersection de la* *quadrique de Segre* S *et d'une quadrique quelconque* T $\neq$ S. *Toute quadrique* T′ *du faisceau linéaire déterminé par* S *et* T *donne la même correspondance que* T.

La courbe T.S s'appelle une *biquadratique* de S. Elle a 4 points communs, distincts ou confondus, avec un plan quelconque P : les points communs aux coniques P.S et P.T ; une biquadratique est donc *de degré* 4. Ses projections sur les plans de $\mathbf{P}_3$ sont en général des quartiques.

Les *notations* suivantes seront utiles pour décrire et étudier les cas de décomposition d'une biquadratique :

— B = biquadratique irréductible ;
— C (resp. C′) = cubique gauche irréductible, correspondance (1, 2) (resp. (2, 1)) ;
— H, H′ = coniques irréductibles, homographies ;
— G_i = génératrices verticales (u = cte) ;
— G'_i = génératrices horizontales (v = cte).

Les *cas de décomposition* d'une correspondance (2, 2), E, sont les suivants :

a) E = H + H′. Cela veut dire que le faisceau de quadriques déterminé par S et T contient la somme P + P′ de deux plans ; leur droite commune P.P′ rencontre S, et aussi T, en deux points p, p' où S et T sont *tangentes* (car leurs plans tangents en p (resp. p') contiennent les tangentes à H et à H′). Réciproquement, si S et T sont tangentes en 2 points p, p', leurs sections par tout plan P passant par p et p' sont bitangentes en ces points et ne peuvent avoir d'autre point commun si elles ne sont pas confondues ; comme E = S.T contient d'autres points que p et p', les sections de S et T par au moins un de ces plans P sont confondues, et S et T ont une conique H en commun ; le reste de E est une conique H′.

b) E = 2H. Cela veut dire que le faisceau contient un plan double, celui de H. Ainsi S *et* T *sont tangentes en tous les points de* H. Réciproquement, si S et T sont tangentes le long d'une conique commune, on est dans ce cas.

c) E = C + G. Cela veut dire que S et T ont une seule droite commune, G, qui rencontre la cubique C en 2 points (distincts ou confondus) car c'est une correspondance (1, 2) ; ainsi, en général, S et T sont *tangentes en 2 points d'une même génératrice* G *de* S. Réciproquement, G est alors bitangente à T et est donc contenue dans T.

c') $\underline{E = C' + G'}$. Cas symétrique du précédent : $(2, 1) + (0, 1)$.

d) $\underline{E = H + G + G'}$. Cela veut dire que le faisceau déterminé par S et T contient la somme d'un plan tangent à S (au point commun à G et G') et d'un autre plan.

e) $\underline{E = G_1 + G_2 + G'_1 + G'_2}$. Cela veut dire que le faisceau déterminé par S et T contient la somme de 2 plans tangents à S, et cela de deux façons différentes. La forme réduite de son équation générale est $xt - qyz = 0$ $(q \in \hat{K})$.

Correspondances symétriques et symétrisables

Nous nous plaçons désormais sur un corps K (algébriquement clos) *de caractéristique* $\neq 2$.

Soit C une correspondance entre un ensemble D *et lui-même*. On pourrait qualifier C de symétrique si les relations $(p, q) \in C$ et $(q, p) \in C$ sont équivalentes. Lorsque D est une droite projective et C une correspondance algébrique d'équation $F(u, v) = 0$, cela veut dire qu'on a $F(v, u) = kF(u, v)$ avec $k \in K$ (cf. chap. I, § H) ; on en déduit aussitôt $k^2 = 1$, d'où $k = 1$ ou $k = -1$. Nous réserverons ici le nom de *symétriques* pour les correspondances telles que $F(u, v) = F(v, u)$, autrement dit pour celles dont le *polynôme* $F(u, v)$ est *symétrique* en u et v (et est donc un polynôme en $u + v$ et uv).

Ainsi l'identité, $u - v = 0$, n'est *pas* une correspondance symétrique mais « antisymétrique » $(k = -1)$. Pour un polynôme antisymétrique $F(u, v)$ $(= -F(v, u))$, on a $F(u, u) = 0$, de sorte que $F(u, v)$ est multiple de $u - v$. Une correspondance $(2, 2)$ antisymétrique est ainsi somme de l'identité et d'une involution sur D.

Les *degrés* en u et v d'une correspondance symétrique (ou antisymétrique) sont *égaux* ; c'est donc une correspondance (n, n), intersection complète de la quadrique de Segre S (th. A).

Une correspondance $(1, 1)$ symétrique a une équation de la forme $auv + b(u + v) + c = 0$; si elle n'est pas dégénérée, c'est une *involution*. L'équation générale d'une correspondance $(2, 2)$ symétrique est :

$$au^2v^2 + buv(u+v) + cuv + c'(u^2+v^2) + d(u+v) + e = 0. \qquad (d)$$

Cette propriété de symétrie est *intrinsèque* : elle est préservée si l'on effectue *la même* transformation homographique sur les abscisses projectives u et v.

La notion de correspondance symétrique n'a pas de sens sur un produit $D \times D'$ de droites projectives distinctes. Cependant le résultat suivant est intéressant et utile :

THÉORÈME C. — *Soit* B *une correspondance* (2, 2) *entre deux droites projectives* D *et* D'. *Sauf dans des cas d'exception évidents où* B *est dégénérée, il y a au moins une homographie h de* D *sur* D' *telle que la correspondance* B' *sur* $D \times D$ *définie par* « $(p, q) \in B'$ ssi $(p, h(q)) \in B$ » *soit symétrique.*

En d'autres termes on peut, dans l'équation $F(u, v) = 0$, *transformer homographiquement* l'abscisse projective v de façon à rendre symétrique la relation entre u et la nouvelle abscisse projective v_1.

Pour démontrer le th. C, on voit B comme une biquadratique intersection de la quadrique de Segre S et d'une autre quadrique T'. Dans le faisceau linéaire de quadriques déterminé par S et T', il y a au moins une quadrique T dont l'équation est une forme quadratique dégénérée, c'est-à-dire un *cône* : en effet, en notant $Q + rQ' = 0$ (Q, Q' formes quadratiques, $r \in \hat{K}$) l'équation générale du faisceau, la dégénérescence de $Q + rQ'$ s'exprime par l'annulation d'un déterminant d'ordre 4, ce qui donne une équation de degré 4 en r ; en général, dans le faisceau, il y a 4 cônes « distincts ou confondus ».

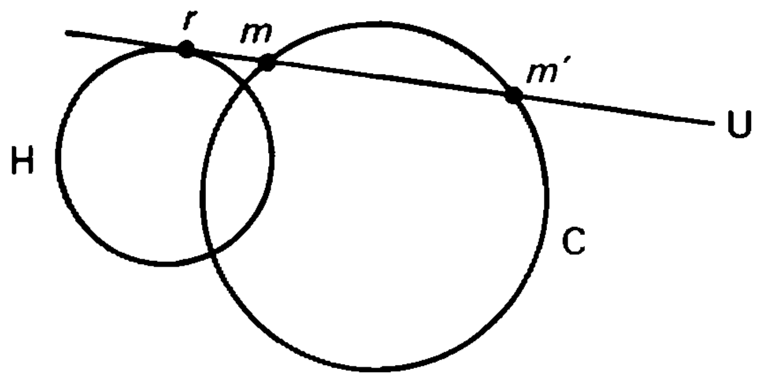
Soit s le sommet d'un tel cône T. Nous allons effectuer une *projection de centre s.* Les points de contact avec S des droites passant par s et tangentes à S décrivent la conique H intersection de S et du plan polaire P de s (chap. IV, § A, th. 49) ; ces tangentes forment donc un cône de degré 2.

H est ce qu'on appelle le « contour apparent » de la projection de S à partir de s.

Une génératrice G de S a pour projection sur P la tangente à H au point $G.P = G.H$; ainsi deux génératrices G, G' de systèmes différents ont la même projection U sur P ssi leur point de rencontre p est sur H.

Soit alors C la conique intersection du plan P et du cône T. Les points d'intersection de la génératrice G (resp. G') avec la biquadratique B ont pour projections sur P les points m, m' communs à C et à la tangente U à H en $G.P$ (resp. $G'.P$). Les points correspondants de $G.B$ (resp. $G'.B$) sont $G.D_{ms}$ et $G.D_{m's}$ (resp. $G'.D_{ms}$ et $G'.D_{m's}$).

Prenons alors pour h *l'homographie de graphe* H sur $D \times D'$. Pour p dans D et q dans D', la relation $(p, h(q)) \in B$ signifie que les génératrices G_p (« verticale ») et $G'_{h(q)}$ (« horizontale ») se rencontrent sur la biquadratique B. Or, par définition de h, $G'_{h(q)}$ est la génératrice « horizontale »



qui rencontre G_q sur H ; de même $G'_{h(p)}$ et G_p. Comme les points m et m' sont les mêmes pour G_q et $G'_{h(q)}$, et aussi pour G_p et $G'_{h(p)}$, les relations $(p, h(q)) \in B$ et $(q, h(p)) \in B$ sont équivalentes. D'où la symétrie de la correspondance B′ de l'énoncé.

Ce raisonnement suppose que l'un des cônes T du faisceau est un vrai cône. Voyons maintenant les cas où « il leur arrive quelque chose » : sommet situé sur S, décomposition en 2 plans. Supposons d'abord que B est *irréductible* (ce qui exclut la décomposition de T en 2 plans). Si le sommet s de T est sur S, toutes les autres quadriques du faisceau ont même plan tangent en s et s est *point double* de B. Le plan polaire P de s est le plan tangent, H est décomposée en 2 génératrices de S et ne fournit pas une vraie homographie. En mettant ce point double en $u = 0$, $v = 0$, on a $d = d' = e = 0$ dans l'équation (b) de B, qui s'écrit donc

$$au^2v^2 + bu^2v + b'uv^2 + cuv + c'u^2 + c''v^2 = 0\,. \qquad (e)$$

Afin de préserver $v = 0$, on essaie une transformation homographique remplaçant v par $v/(pv + q)$ $(q \neq 0)$. Alors (e) devient

$$\begin{aligned} au^2v^2 + bu^2v(pv + q) + b'uv^2 + cuv(pv + q)& \\ + c'u^2(pv + q)^2 + c''v^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

La condition de symétrie (égalité des coefficients de uv^2 et vu^2, et aussi de u^2 et v^2) s'écrit : $bq + 2c'pq = b' + cp$ et $c'q^2 = c''$. Comme $c' \neq 0$ et $c'' \neq 0$ (sinon u ou v est en facteurs dans (e) et B est décomposée), l'équation $c'q^2 = c''$ fournit 2 valeurs non nulles (et opposées) pour q. L'autre, qui s'écrit $(2c'q - c)p = b' - bq$, fournit au moins une valeur pour p car les deux valeurs possibles pour q n'annulent pas toutes deux $2c'q - c$ (car $c' \neq 0$).

La relation $2c'q = c$ implique $4c'^2q^2 = c^2$, donc $4c'c'' = c^2$, ce qui veut dire que le point double de B est un point de rebroussement.

Voyons les cas où B est décomposée. Si elle est la somme de deux homographies k, k' de D sur D′, on peut les *symétriser simultanément* : en effet, on écrit $k^{-1}k'$ comme produit jj' de 2 involutions de D (chap. II, § D, th. 31); on pose $h = k'j' = kj$; cette homographie de D sur D′ répond à la question. C'est encore plus simple si $B = 2H$. Lorsque $B = H + G + G'$, on prend $u = 0$ pour G, $v = 0$ pour G′; l'homographie s'écrit $auv + bu + cv + d = 0$; une simple homothétie sur v la rend symétrique à moins que $b \neq 0$ et $c = 0$ (ou $b = 0$ et $c \neq 0$); mézalor on symétrise $auv + bu + d = 0$ en remplaçant v par $v/(v + q)$ ($q \neq 0$), ce qui donne $auv + bu(v + q) + d(v + q) = 0$, qui est symétrique si l'on prend $q = d/b$, qui est non nul car, sinon, $d = 0$ et l'homographie est dégénérée. Enfin, si $B = G_1 + G_2 + G'_1 + G'_2$, les G_i et G'_i étant simultanément distinctes ou confondues, un choix d'abscisses projectives sur D et D′ donne à G_1 et G'_1, et aussi à G_2 et G'_2, les mêmes abscisses projectives.

Dans les autres cas, $B = C + G$, $B = C' + G'$, $B = 2G + G'_1 + G'_2$, $B = G_1 + G_2 + 2G'$, la correspondance n'est évidemment pas symétrisable.

Points critiques

Soit toujours B une correspondance (2, 2) sur $D \times D'$. Un point u de D (resp. v de D′) est dit *critique* si les 2 points de D′ (resp. D) qui lui correspondent, soit ceux de $(u \times D').B$, sont confondus. Cela s'exprime en écrivant que (b), vu comme équation en v, soit

$$(au^2+b'u+c'')v^2+(bu^2+cu+d')v+c'u^2+du+e=0, \qquad (b')$$

a une racine double (finie ou infinie), ce qui veut dire :

$$(bu^2+cu+d')^2-4(au^2+b'u+c'')(c'u^2+du+e)=0. \qquad (e)$$

Ceci est une équation du *quatrième degré* en u. Il y a donc 4 points critiques, distincts ou confondus sur D; leur somme formelle, notée **d**, est appelée le *diviseur critique* de B sur D. On dit qu'il est non défini si l'équation (e) est satisfaite quel que soit u. De même sur D′, où le diviseur critique sera noté **d′**.

Cette notion correspond à celle de discriminant en Théorie des Nombres. Comme le diviseur critique **d** est formé des projections des points de B où la tangente est verticale (ou des points multiples de B), c'est, en somme, un « contour apparent ».

Les diviseurs critiques d'une correspondance symétrique sur $D \times D$ sont évidemment égaux. On déduit donc du th. C :

THÉORÈME D. — *Sauf pour les correspondances dégénérées évidemment dissymétriques, il y a une homographie h de* D *sur* D′ *qui amène* **d** *en* **d**′.

Si les 4 racines de (e) sont distinctes, leur *birapport* est donc égal à celui des 4 racines de l'équation analogue pour v, si du moins on les ordonne convenablement.

Appelons *type* d'un diviseur de degré 4 la suite des coefficients de ses points : (1, 1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 3), (2, 2) et (4). Sauf pour les correspondances dégénérées évidentes, les diviseurs critiques sur D et D′ ont même type (th. D). Voici quelques constatations utiles pour l'étude de ce (ou ces) type(s) :

1) Si B est *dégénérée* et contient la verticale $u \times D'$, u figure *avec coefficient* $\geqslant 2$ (en général 2) dans **d** : on le voit en prenant $u = 0$; alors u est en facteur dans (b'), d'où $c'' = d' = e = 0$ et 0 est racine multiple de (e).

2) Si B admet un *point double* (u, v), alors u figure dans **d** avec coefficient 2 si B y a des tangentes distinctes et $\geqslant 3$ les tangentes y sont confondues. On le voit en prenant $u = v = 0$; alors $d = d' = e = 0$ et l'équation (e) devient $(bu + c)^2u^2 - 4c'(au^2 + b'u + c'')u^2 = 0$; sa racine 0 est double si $c^2 - 4c'c'' \neq 0$, triple au moins si $c^2 - 4c'c'' = 0$, quadruple si, de plus, $bc - 2b'c' = 0$. La correspondance B peut être irréductible dans le cas d'une racine triple. Mais, si $c^2 - 4c'c'' = 0$ et $bc = 2b'c'$, on a, soit $c' = 0$ ou $c'' = 0$ et B est dégénérée, soit (en prenant $c' = 1$) $c'' = c^2/4$ et $b' = \frac{1}{2}bc$, auquel cas (b') s'écrit

$$au^2v^2 + buv\left(u + \frac{1}{2}cv\right) + \left(u + \frac{1}{2}cv\right)^2 = 0\,;$$

alors B se décompose en 2 homographies, dont les graphes sont tangents en (0, 0).

3) Si B est de la forme C + G, on peut supposer que (0, 0) est sur C.G, de sorte que $c'' = d' = e = d = 0$ et que (e) s'écrit

$$(bu^2 + cu)^2 - 4(au^2 + b'u)c'u^2 = 0\,.$$

La racine $u = 0$ est triple ssi $c = 0$, ce qui veut dire que C, dont l'équation est $auv^2 + v(bu + b'v) + cv + c'u = 0$ est tangente à G ($u = 0$) au lieu de la couper en 2 points ; mais cette racine ne saurait être quadruple, sinon $b'c' = 0$ et l'équation de C aurait u ou v en facteur. D'autre part, le diviseur critique de $B = C + G$ sur D', donné par le discriminant $(b'v^2+cv)^2=0$ de l'équation (en u) $(av^2+bv+c')u^2+(b'v^2+cv)u=0$, est de type (2, 2) si $c \neq 0$ ou (4) si $c = 0$.

4) Inversement, si u figure avec coefficient $\geqslant 2$ dans **d**, on peut supposer que c'est $u = 0$ et que $v = 0$ lui correspond ; alors $d' = e = 0$ et (e) s'écrit $(bu + c)^2u^2 - 4(au^2 + b'u + c'')(c'u + d)u = 0$. Elle admet 0 pour racine multiple ssi $c''d = 0$; si $c'' = 0$, u est en facteur dans (b') et B contient $0 \times D'$; si $d = 0$, (0, 0) est point multiple de B.

Ces constatations permettent de préciser le type du (ou des) diviseur(s) critique(s) en fonction de la nature géométrique de la correspondance (2, 2) donnée. Dans le tableau qui suit, les notations B, C, C', H, G, G' ont les mêmes significations que ci-dessus.

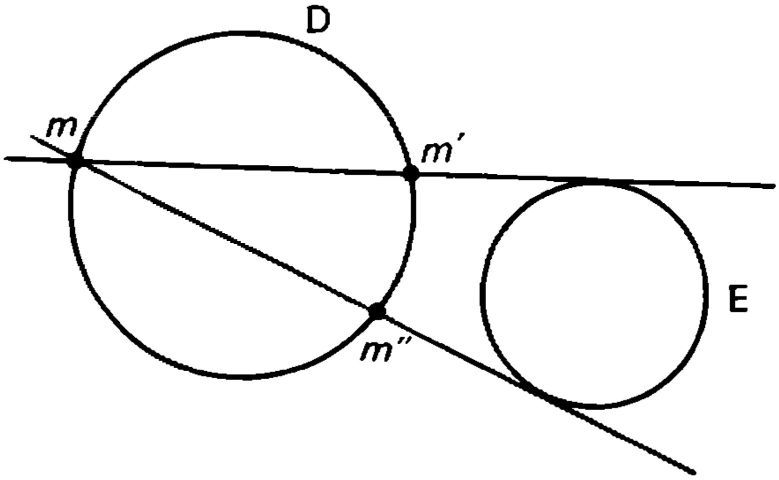
Correspondance	*Type du diviseur critique*
B sans point multiple	(1, 1, 1, 1)
B avec pt. double, tg. distinctes	(2, 1, 1)
B avec rebroussement	(3, 1)
C + G, C non tangente à G	(2, 1, 1) sur D, (2, 2) sur D'
C + G, C tangente à G	(3, 1) sur D, (4) sur D'
C' + G', C' non tangente à G'	(2, 2) sur D, (2, 1, 1) sur D'
C' + G', C' tangente à G'	(4) sur D, (3, 1) sur D'
H + H' avec 2 points communs	(2, 2)
H + H' avec contact	(4)
2H	non défini
H + G + G' avec point G.G' pas sur H	(2, 2)
H + G + G' avec point G.G' sur H	(4)
$G_1 + G_2 + G'_1 + G'_2$ (distinctes)	(2, 2)
2G + 2G'	non défini
$G_1 + G_2 + 2G'$	non défini sur D, (4) sur D'
$2G + G'_1 + G'_2$	(4) sur D, non défini sur D'

L'examen de ce tableau montre aussitôt :

THÉORÈME E. — *La nature géométrique d'une correspondance* (2, 2) *non dégénérée est uniquement déterminée par le type de son diviseur critique. Si l'on inclut les correspondances dégénérées « symétrisables », seuls les types* (2, 2) *et* (4) *donnent lieu à ambiguïté.*

Interprétation géométrique des correspondances (2, 2) *symétriques*

Soit D une *conique propre*, donc munie d'une structure de droite projective (chap. II, § E). Un exemple de correspondance (2, 2) sur D × D est le suivant : on se donne une *enveloppe de seconde classe* E



et l'on dit que 2 points m et m' de D se correspondent ssi la droite $D_{mm'}$ appartient à E : en effet comme, par tout point m de D, il passe 2 droites de la famille E, les 2 points où elles recoupent D sont ceux qui correspondent à m. Réciproquement :

Théorème F. — *Toute correspondance* (2, 2) *symétrique sur une conique propre* D *est définie par une enveloppe de seconde classe* E *et s'écrit* $D_{mm'} \in E$.

Dans un repère convenable, on peut prendre $x = t$, $y = t^2$, $z = 1$ comme représentation paramétrique de D. La droite $D_{mm'}$ joignant les points m, m' de paramètres t, t' de D a pour équation $-(t + t')x + y + tt'z = 0$. Soit $F(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle de E, que nous explicitons en

$$Lu^2 + L'v^2 + L''w^2 + Mvw + M'wu + M''uv = 0\,.$$

La relation $D_{mm'} \in E$ s'écrit $F(-(t + t'), 1, tt') = 0$, soit

$$L(t+t')^2 + L' + L''t^2t'^2 + Mtt' - M'tt'(t+t') - M''(t+t') = 0.$$

Elle s'identifie à la relation biquadratique symétrique générale

$$at^2t'^2 + btt'(t + t') + ctt' + c'(t^2 + t'^2) + d(t + t') + e = 0$$

en prenant $L = c'$, $L' = e$, $L'' = a$, $M = c - 2c'$, $M' = -b$, $M'' = -d$. CQFD.

Lorsque l'enveloppe E est *décomposée* en 2 points $p + p'$, la correspondance B est la somme H + H′ des involutions de Frégier (chap. II, § E, th. 35) définies par p et p' lorsque ces points ne sont pas sur D. Si p' est sur D, mais pas p, B est de la forme H + G + G′. Si p et p' sont sur D, B est décomposée en 4 génératrices.

Lorsque E est un point double $2p$, on a B = 2H si p n'est pas sur D, et B = 2G + 2G′ si p est sur D.

Nous supposerons désormais que l'enveloppe E n'est *pas décomposée.* Elle est alors formée par les *tangentes* à une conique propre, notée aussi E.

On aurait pu prendre l'interprétation géométrique *duale*, où 2 points m, m' d'une conique D se correspondent ssi les tangentes à D en m et m' se coupent sur une autre conique E′.

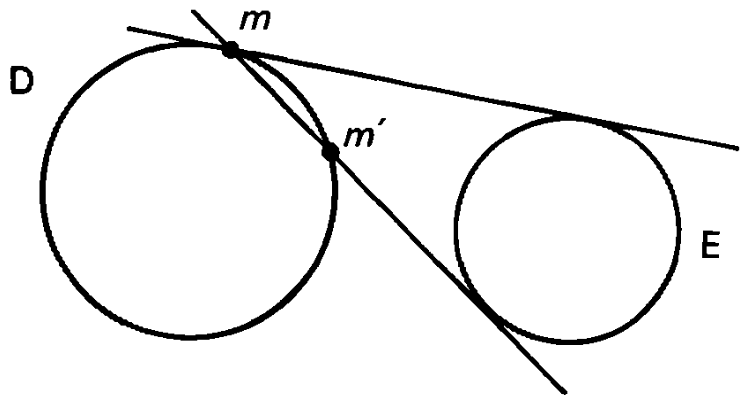
Interprétons deux notions importantes :

1) On dit qu'un point m de D est un *point fixe* d'une correspondance B sur D × D s'il se correspond à lui-même, c'est-à-dire si $(m, m) \in B$. On trouve les points fixes :

— soit en faisant $t = t'$ dans l'équation de B ; d'où une équation de degré 4 et 4 points fixes, ou plutôt un diviseur **f** de degré 4 ;

— soit en intersectant B avec la diagonale I ; comme celle-ci est une section plane de la quadrique de Segre S et que B est une courbe de degré 4, B . I est un diviseur de degré 4 ; on a admis que sa projection sur D est **f** ;

— soit, enfin, en cherchant les points m de la conique D tels que la tangente à D en m soit aussi tangente à E ; autrement dit, ces points fixes correspondent aux *tangentes communes* à D et E, dont on sait



qu'elles sont au nombre de 4. Les points correspondant à m sont m lui-même et le point m' où l'autre tangente menée par m à E recoupe D ; on a $m' = m$ ssi m est sur E, c'est-à-dire ssi D et E sont tangentes en m et alors m compte pour au moins 2 points fixes.

2) Un point a de D est *point critique* ssi les 2 tangentes à E menées par a sont confondues, c'est-à-dire ssi a est sur E. Cela suggère :

THÉORÈME G. — *Avec les notations ci-dessus, le diviseur critique* **d** *sur* D *est égal au cycle intersection* D.E.

C'est évident si D et E ont 4 points communs distincts et « y'aurait pas de Bon Dieu » si, dans les autres cas, les coefficients des points communs à D et E se répartissaient différemment dans **d** et dans D.E. Donnons cependant une démonstration. Soit $F(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle de E. La droite (u, v, w) passe par le point (x, y, z) ssi $ux + vy + wz = 0$. Alors $F(-(vy + wz), vx, wx)$ est un polynôme homogène de degré 2 en v, w, dont le discriminant $F^0(x, y, z)$ est le premier membre de l'équation ponctuelle de E (chap. IV, § C). Comme dans le th. F, substituons $(t, t^2, 1)$ à (x, y, z). Alors $F^0(t, t^2, 1)$ est le discriminant du polynôme homogène $F(-(vt^2+w), vt, wt)$ et aussi celui du polynôme ordinaire $F(-(t^2 + W), t, tW)$ $(W = w/v)$, ou encore, en posant $W = tT$, celui de $F(-(t + T), 1, tT)$. Or on a vu dans le th. F que $F(-(t+t'), 1, tt')=0$ est l'équation de la correspondance B, de sorte que $F^0(t^2, t, 1) = 0$ est bien celle de son diviseur critique.

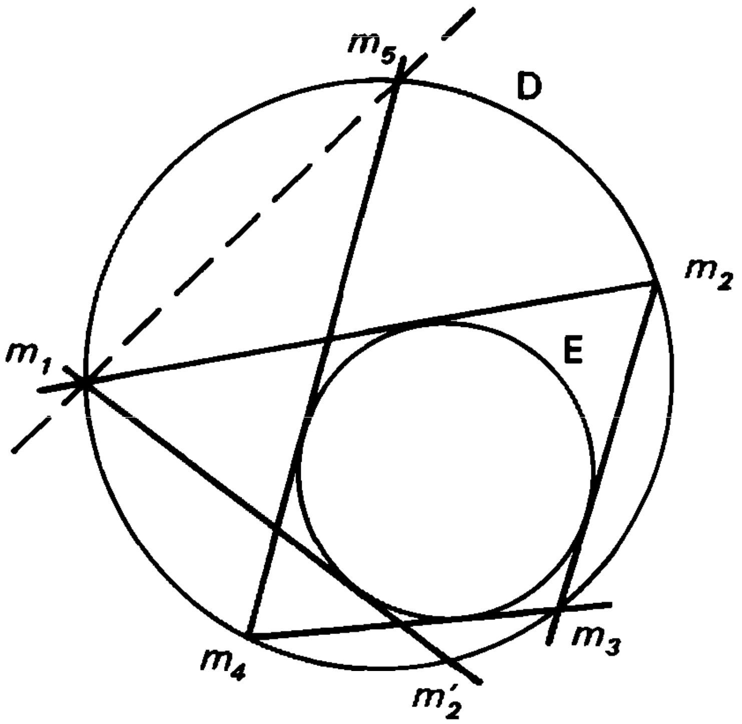
Nous venons de démontrer une condition nécessaire à l'existence de Dieu (mais non une condition suffisante !).

Le tableau précédant le théorème E montre alors :

COROLLAIRE :

— B *est une biquadratique sans point multiple ssi* D *et* E *ont 4 points communs distincts :* (1, 1, 1, 1) ;
— B *est une biquadratique avec point double à tangentes distinctes ssi* D *et* E *sont tangentes en un point :* (2, 1, 1) ;
— B *est une biquadratique à rebroussement ssi* D *et* E *sont osculatrices :* (3, 1) ;
— B *est somme* H + H' *de deux homographies ayant 2 points communs, ssi* D *et* E *sont bitangentes :* (2, 2) ;
— B *est somme* H + H' *de deux homographies à graphes tangents ssi* D *et* E *sont surosculatrices :* (4).

La « composition avec elle-même » d'une correspondance (2, 2), B, sur une conique D permet une étude, due à Poncelet, des polygônes inscrits à D et circonscrits à une conique E. Soit B la correspondance (2, 2) sur D définie par « $D_{mm'}$ est tangente à E ». Par un point m_1 de D, on mène les tangentes à E ; elles recoupent D en des points m_2 et m'_2. Par m_2 (resp. m'_2), on mène *l'autre* tangente à E (distincte de $D_{m_1m_2}$), qui recoupe D en m_3 (resp. m'_3). De même, l'autre tangente à E menée par m_3 (resp. m'_3)



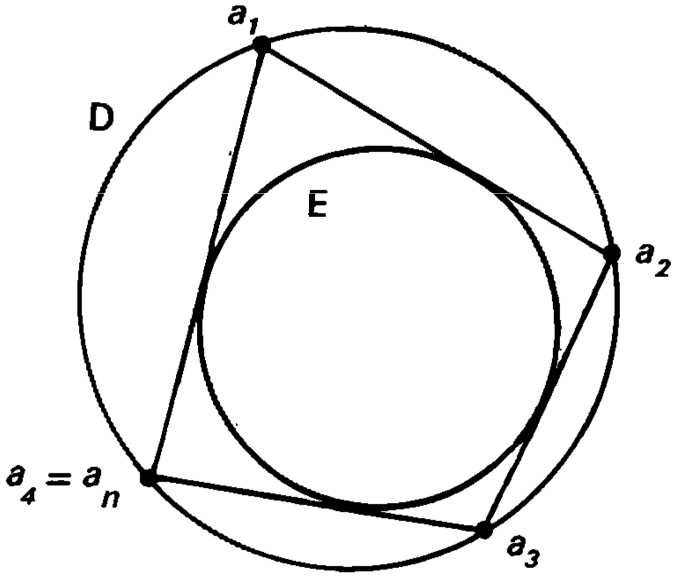
recoupe D en m_4 (resp. m'_4) et ainsi de suite. Pour tout n, on fait ainsi correspondre à m_1 deux points m_n, m'_n qui sont fonctions *rationnelles* de m_2 et m'_2 (eux-mêmes quadratiques sur $K(m_1)$), de sorte que les couples (m_1, m_n) et (m_1, m'_n) parcourent une correspondance algébrique B_n sur $D \times D$. En parcourant à l'envers le « polygône » $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, on voit que B_n *est une correspondance* (2, 2) *symétrique* sur D, donc découpée sur D par les droites d'une enveloppe de seconde classe E_n, formée en général par les tangentes à une conique propre E_n (th. F). Autrement dit, *lorsque* m_1 *parcourt* D, *les droites « de fermeture »* $D_{m_1m_n}$ *et* $D_{m_1m'_n}$ *enveloppent, en général, la conique* E_n.

THÉORÈME H (Poncelet). — *Si elle est propre, la conique* E_n *appartient au faisceau linéaire ponctuel défini par les coniques* D *et* E *(au moins si elles ont 4 points communs distincts).*

En effet, si m_1 est point critique de B, m_2 et m'_2 coïncident, donc aussi, par récurrence, m_n et m'_n ; donc m_1 est point critique de B_n. D'où le résultat par le th. G, au moins si les 4 points communs à D et E sont distincts. Comme « y'a un Bon Dieu », il reste valable dans les autres cas ; cela résulte, *grosso modo*, de la préservation des relations algébriques lorsqu'on donne des valeurs particulières à des coefficients indépendants, ici ceux de l'équation tangentielle générale d'une conique E (cf. démonstration du th. G).

THÉORÈME I (Poncelet). — *Avec les notations précédentes, on suppose qu'il existe un point a_1 de* D *et un entier $n \geqslant 3$ tels que le polygône $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1)$ soit circonscrit à* E *(ce qui veut dire que $D_{a_n a_1}$ est tangente à* E) *et que $D_{a_j a_1}$ ne soit tangente à* E *pour aucun j entre 3 et $n-1$. Alors, pour tout point m_1 de* D, *le polygône $(m_1, m_2, \ldots, m_n, m_1)$ est circonscrit à* E *(de sorte que $m'_2 = m_n, m'_3 = m_{n-1}, \ldots, m'_n = m_2$).*

Considérons, en effet, la correspondance B_{n+1}. Il s'agit de montrer que c'est l'identité I, ou plutôt 2I. Les 2 points qui correspondent à a_1 par B_{n+1} sont confondus en a_1 (parcourir le polygône dans les deux sens), de sorte que a_1 est *point fixe double* de B_{n+1} (ce qui veut dire que (a_1, a_1) figure avec coefficient $\geqslant 2$ dans le cycle intersection $I . B_{n+1}$,

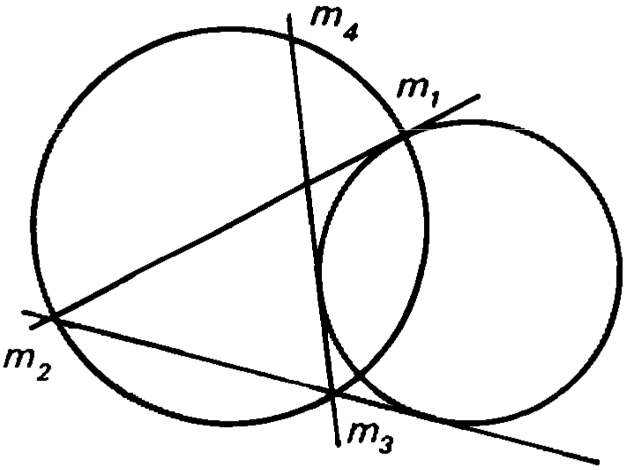


si celui-ci est défini). En parcourant le polygône à partir de a_j on en déduit que les a_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) sont aussi des points fixes doubles. Comme, par hypothèse, le polygône « ne se referme pas » avant a_n, B_{n+1} a donc au moins $2n \geqslant 6$ points fixes. Cette correspondance contient donc la diagonale I (sinon elle n'aurait que 4 points communs avec I). Le reste est, soit une homographie H, soit une somme G + G′ de 2 génératrices, et doit contenir les n points (a_j, a_j) ; c'est impossible si H $\neq$ I car H n'aurait alors que 2 points fixes ; dans l'autre cas, ces n points ne seraient pas des points fixes doubles de B_{n+1}. On a donc $B_{n+1} = 2I$. CQFD.

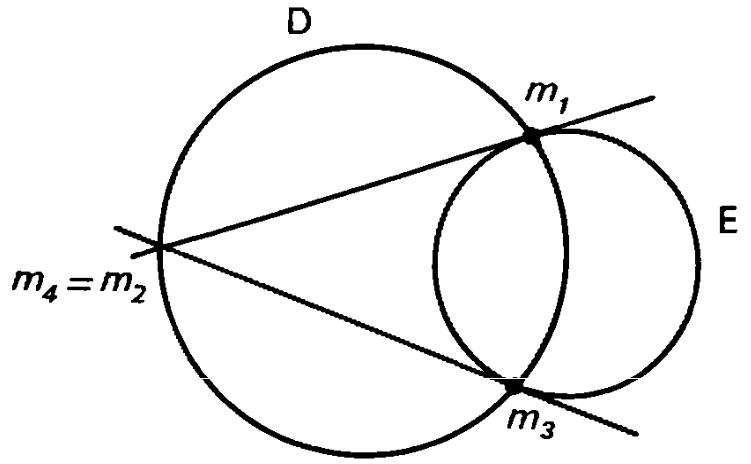
Une autre démonstration se fonde sur les points critiques, mais suppose que a_1 n'est pas un point commun à D et E. Comme ci-dessus on voit que les a_j sont points critiques de B_{n+1} et le diviseur critique est donc de degré $\geqslant 4 + 1$ (th. G). Il est donc non défini et, d'après le tableau précédant le th. E, B_{n+1} est de la forme 2H, où H est une homographie. Comme celle-ci admet $n \geqslant 3$ points fixes, les a_j, elle ne peut être que l'identité.

Explicitons la conclusion du th. I dans quelques *cas spéciaux* :

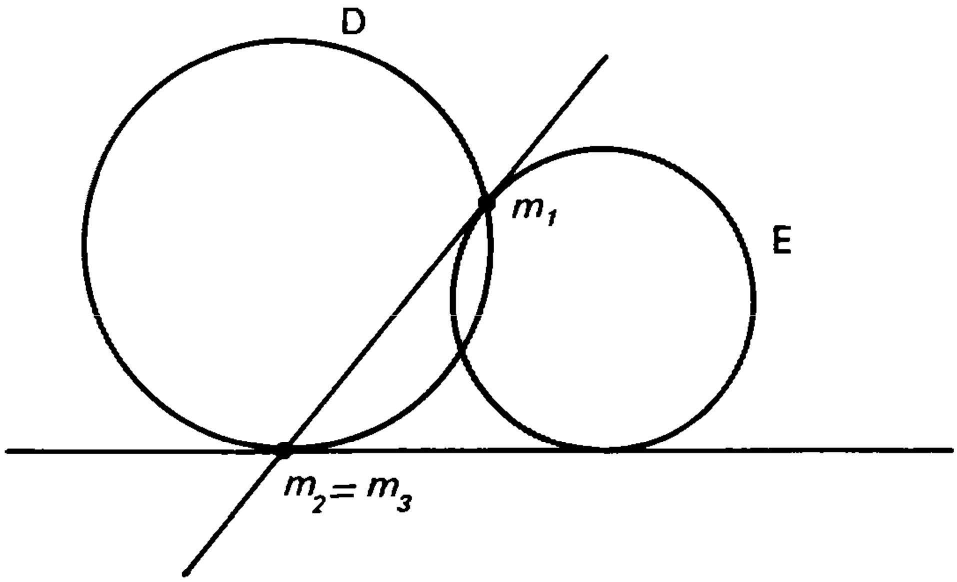
a) *On part d'un point* m_1 *commun à* D *et* E. Si D et E y sont tangentes, on reste en m_1 dans la construction précédant le th. H. Sinon m_2 et m'_2 sont confondus au point où la tangente en m_1 à E recoupe D; d'où $m_3 = m'_3$, etc. Le polygône « ne se referme » que si $D_{m_n m_1}$ est tangente à E, ce qui veut dire $m_n = m_2$; d'où $m_{n-1} = m_3, m_{n-2} = m_4, m_{n-j+2} = m_j$.



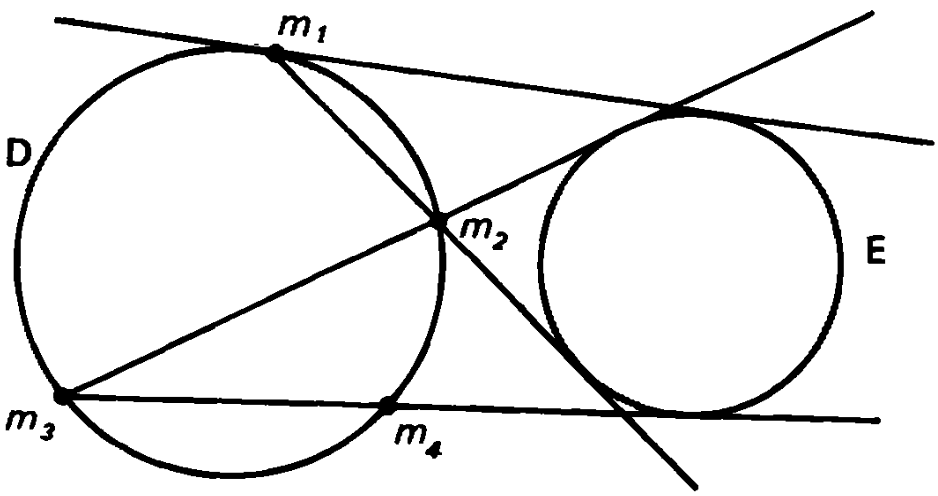
Si n est *pair*, $n = 2q$, le milieu de la suite $(m_1, m_2, \ldots, m_{2q}, m_1)$ est $(\ldots, m_q, m_{q+1}, m_q, \ldots)$ et le polygône « rebrousse chemin » en m_{q+1}, ce qui signifie que les 2 tangentes à E menées par m_{q+1} coïncident avec $D_{m_{q+1}m_q}$, donc que m_{q+1} *est un point commun* à D et E, distinct par hypothèse de m_1.



Si n est *impair*, $n = 2q - 1$, le milieu de la suite est $(\ldots, m_{q-1}, m_q, m_q, m_{q-1}, \ldots)$, de sorte que la tangente à D en m_q est aussi tangente à E. Ainsi m_q est point de contact de D avec l'une des *tangentes communes* à D et E. Les deux dernières figures illustrent les cas $n = 4$ et $n = 3$.



b) Si l'on part d'un point m_1 situé sur une tangente commune à D et E (et si $m_2 \neq m_1$, ce qui signifie que m_1 n'est pas point commun à D et E), on a $m_n = m_1$, $m_{n-1} = m_2$, $m_{n-2} = m_3$, etc. Comme ci-dessus, si n est impair, $n = 2q - 1$, le polygône rebrousse chemin en m_q, qui est point commun à D et E. Si n est pair, $n = 2q$, le polygône rebrousse chemin en m_{q+1}, qui est point de contact d'une autre tangente commune.



On aura noté que la suite désignée par $(m'_3, m'_2, m_1, m_2, m_3)$ dans la construction précédent le th. H prend (à symétrie près) la forme :

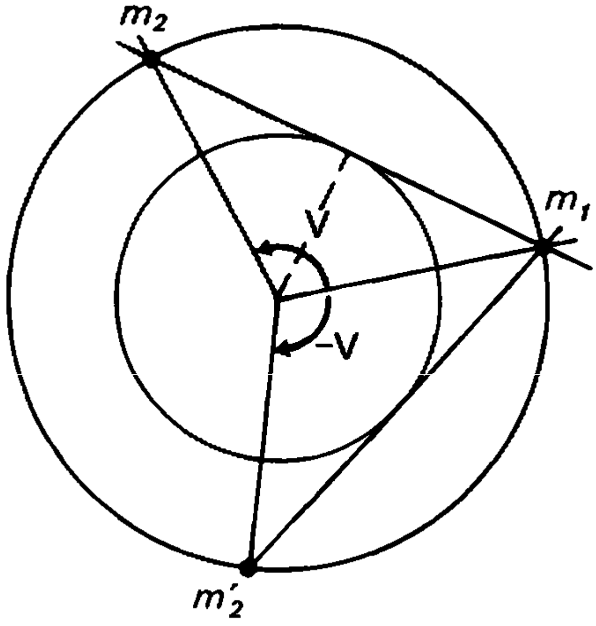
— $(m_3, m_2, m_1, m_2, m_3)$ si m_1 est point commun à D et E ;

— $(m_2, m_1, m_1, m_2, m_3)$ si m_1 est point de contact d'une tangente commune.

c) Les coniques D *et* E *sont bitangentes ou surosculatrices.* On a vu (cor. au th. G) que B est alors de la forme H + H′, où H et H′ sont des homographies dont les graphes ont 2 points communs, ou sont tangents. Comme H + H′ est symétrique, les deux homographies sont *réciproques* l'une de l'autre ; notons les h et h^{-1}. Elles ont les mêmes points fixes, distincts si D et E sont bitangentes, confondus si D et E sont surosculatrices. L'assertion du théorème de Poncelet (th. I) revient à dire qu'on a $h^n = 1$; c'est toujours vrai, pour un certain n, si D et la correspondance B ont leurs coefficients dans un corps fini.

Lorsque D et E sont bitangentes et qu'on donne les valeurs 0 et ∞ aux paramètres de leurs points communs, h prend la forme $h(t) = ct$ (chap. II, § D) et l'énoncé du th. I veut dire que c est une racine n-ème de l'unité. Lorsque D et E sont surosculatrices et qu'on donne la valeur ∞ à leur point commun, h prend la forme $h(t) = t + d$ *(ibid.)* ; alors h n'est *jamais* d'ordre fini n en caractéristique 0 (on n'est donc pas dans un cas d'application du th. I), mais est *toujours* d'ordre p en caractéristique $p \neq 0$.

Lorsque D et E sont bitangentes dans $P_2(C)$, une transformation homographique envoie leurs points communs aux points cycliques, de sorte que D et E deviennent des *cercles concentriques* (chap. I, § F). Les homographies h et h^{-1} sont alors des *rotations*, d'angles V et $-$ V, autour de leur centre commun (chap. II, § D, th. 32). Si l'on note r et r'



les rayons de D et E, on a $\cos\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{V}\right) = r'/r$. La conclusion du th. I est vraie ssi la rotation h est d'ordre fini n (c'est-à-dire $e^{2i\mathrm{V}}$ est racine primitive n-ème de l'unité) ; cela se traduit par une relation arithmétique entre les rayons r et r' ($r = 2r'$ pour $n = 3$; $r^2 = 2r'^2$ pour $n = 4$; $r'^2 - 2rr' = r^2 = 0$ pour $n = 5$; $4r'^2 - 3r^2 = 0$ pour $n = 6$; etc.).

Notions sur les courbes tracées sur une quadrique S

Nous nous bornerons aux quadriques sans point double, celles dont l'équation est une forme quadratique de rang maximal, 4. Comme on s'est placés sur un corps algébriquement clos, l'équation d'une telle quadrique S se réduit à $xy - zt = 0$ et S peut être vue comme le produit de deux droites projectives, dont nous notons u et v les abscisses projectives.

Une *intersection complète* de S avec une surface T d'équation homogène $\mathrm{P}(x, y, z, t) = 0$ est une correspondance (n, n) ($n = d^0(\mathrm{T})$) dont l'équation est $\mathrm{F}(u, v) = \mathrm{P}(uv, u, v, 1) = 0$ où u, v parcourent $\hat{\mathrm{K}}$ (cf. th. A).

Plus généralement, *toute courbe* (ou cycle de dimension 1) C *tracée sur* S *est une correspondance* (p, q), *définie par une seule équation* $\mathrm{G}(u, v) = 0$.

En effet, on peut supposer C irréductible. On prend un point a de C et on considère le *cône* T de sommet a qui est la réunion des droites joignant a à un point variable m de C (pour $m = a$ on prend la tangente à C en a). Comme une génératrice de ce cône, ou bien coupe S en 2 points, a et m, qui sont sur C, ou bien est contenue dans S et est donc l'une des génératrices rectilignes G, G′ de S passant par a, l'intersection T.S est de la forme $C + jG + j'G'$. Celle-ci a une équation de la forme $H(u, v) = 0$, où H a même degré en u et en v. En supposant, ce qui est loisible, que a est le point $u = 0, v = 0$, le polynôme $H(u, v)$ a $u^j v^{j'}$ en facteurs à cause de $jG + j'G'$ (si $j \neq 0$, $H(0, v)$ est nul pour tout v, d'où le facteur u, et on continue). Le quotient $G(u, v)$ donne l'équation de C.

Une correspondance (p, q) est une courbe (ou un cycle) *de degré* $p+q$.

En effet, un plan tangent à S la coupe en $p + q$ points, p sur une génératrice, q sur l'autre.

Enfin deux correspondances (p, q) et (p', q') *se coupent en* $qp'+pq'$ *points.*

En effet, soient C et C′ ces correspondances, supposées sans composante commune. Quitte à intervenir les facteurs de S, on peut supposer qu'on a $q \geqslant p$. Alors, si G est une génératrice convenable de S, $u = 0$, $C + (q - p)G$ est une correspondance (q, q), donc une intersection complète S.T avec $d^0(T) = q$ (th. A). Les points communs à $C + (q - p)G$ et à C′ sont les points communs à T et C′, et il y en a $q(p'+q')$. On en enlève les points communs à C′ et à $(q-p)G$, qui forment un cycle de degré $(q-p)q'$. Il reste $q(p'+q')-(q-p)q' = qp'+pq'$ points.

Les courbes de degré 3 tracées sur S sont (à part les correspondances dégénérées (0, 3) et (3, 0)) les correspondances (2, 1) et (1, 2) déjà rencontrées ; si elles sont irréductibles, ces « cubiques gauches » sont, on l'a vu, unicursales. Il y a d'autres courbes irréductibles *de degré* 4 sur S que les biquadratiques : les correspondances (1, 3) et (3, 1) ; ce sont des courbes *unicursales* car l'équation d'une (1, 3) (resp. (3, 1)) donne u (resp. v) comme quotient de deux polynômes de degré 3 en v (resp. u) ; on les appelle des *monoquadratiques* car elles sont contenues dans une seule quadrique, S (sinon ce seraient des intersections complètes S.T, donc des correspondances (2, 2)).

On notera que *toute courbe* C *de degré 4 est contenue dans une quadrique.* En effet, l'équation d'une quadrique a 10 coefficients. Le passage de cette quadrique par 9 points de C s'exprime par un système de 9 équations homogènes en ces 10 coefficients, qui a donc une solution non triviale. La quadrique correspondante a au moins $9 > 2 \times 4$ points communs avec C, et contient donc C si C est irréductible. Si C est plane, la quadrique contiendra son plan.

Le même résultat est évidemment valable pour les courbes (irréductibles) de degré 3.

Enfin *une biquadratique* (irréductible) B *est unicursale ssi elle admet un point double.*

En effet, prenons un point simple a de B et projetons B sur un plan P à partir de a. Comme un plan passant par a a 3 autres points communs avec B, toute droite de P coupe la projection B′ de B en 3 points ; donc B′ est une *cubique plane.* Ses points multiples sont :

— soit les projections des points multiples de B ;
— soit les points b de B′ qui sont projections de plusieurs points (distincts ou confondus) de B ; mézalor D_{ab} aurait en commun avec B, donc avec S, ces points et a ; cette droite serait donc une génératrice G de S, mais celle-ci ne rencontre B qu'en 2 points.

Le second cas étant donc impossible, on voit que B′ est unicursale ssi B admet un point double (chap. II, § F, th. 39). Comme les coordonnées d'un point m de B sont fonctions rationnelles de celles de sa projection m' sur B′ (m est le point où la droite $D_{am'}$ recoupe la quadrique S), et inversement, B est unicursale en même temps que B′.

Notions sur la composition des correspondances

Soient C une correspondance entre deux ensembles D et D′, et C′ une correspondance entre D′ et D″. L'ensemble des couples $(m, m'') \in D \times D''$ tels qu'il existe un point m' de D′ pour lequel $(m, m') \in C$ et $(m', m'') \in C'$, est une correspondance entre D et D″, qu'on note $C' \circ C$ et qu'on appelle la composée de C et C′. Cela se traduit, dans le produit triple $D \times D' \times D''$, par l'égalité d'ensembles

$$C' \circ C = \mathrm{pr}_{D \times D''}((C \times D'') \cap (D \times C')).$$

En géométrie algébrique, on remplace l'intersection « ensembliste » par le produit d'intersection $(C \times D'').(D \times C')$ et on affecte les projections de coefficients, appelés indices de projection, convenables.

Par exemple, si E est une correspondance (p, q) entre D et D′, son indice de projection sur D est q et l'on écrit $\mathrm{pr}_D(E) = qD$; cela tient à ce que q points de E se projettent au même point de D.

Si C est une correspondance (p, q) et C′ une correspondance (p', q'), C fait en général correspondre, à un point m de D, q points m'_i de D′, et C′ fait correspondre à chacun de ceux-ci q' points m''_{ij} de D″ ; il y en a qq'. De même $C' \circ C$ fait correspondre pp' points de D à chaque point de D″. Ainsi *la composée* $C' \circ C$ *est une correspondance* (pp', qq'). En particulier la composée de deux correspondances (2, 2) est une correspondance (4, 4).

Lorsque $D = D' = D''$ et qu'on a une correspondance (n, n) *symétrique* B, sa composée avec elle-même, $B \circ B$, est décomposée. En effet, pour chacun des n points m_i' correspondant à un point m de D, m figure parmi les n points m_{ij}'' qui lui correspondent. Au total, on retrouve m au moins n fois parmi les m_{ij}''. Donc, en notant I l'identité, $B \circ B$ est de la forme $nI + B'$ où B' est une correspondance $(n^2 - n, n^2 - n)$. Pour $n = 2$, on a $B \circ B = 2I + B'$ où B' est une correspondance (2, 2) symétrique. Cela explique pourquoi, dans la construction des « lignes polygonales de Poncelet » qui précède le théorème H, on n'a rencontré que des correspondances (2, 2) symétriques.

Si D est une variété définie sur un *corps fini* $\mathbf{F}_q$, une importante correspondance est celle qui, à un point de coordonnées (x_i) de D, fait correspondre le point de coordonnées (x_i^q) (qui est sur D car l'élévation à la puissance q-ème est un automorphisme de tout corps algébriquement clos contenant $\mathbf{F}_q$). On l'appelle la *correspondance de Frobenius* et on la note F. Les points fixes de son itérée F^n sont les points de D qui sont rationnels sur $\mathbf{P}_{q^n}$ car ce corps est l'ensemble des racines de $x^{q^n} = x$. L'estimation de ce nombre de points fixes est un problème arithmétique important ; il a été résolu par A. Weil, puis par P. Deligne, dans leurs travaux sur l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques. La correspondance de Frobenius F est une correspondance $(q, 1)$ et F^n est une correspondance $(q^n, 1)$. Comme une correspondance (i, j) sur une droite projective D a $i + j$ points fixes (ses intersections avec le plan de la conique I qui est le graphe de l'identité sur la quadrique de Segre S), F^n a $1 + q^n$ points fixes dans ce cas, ce qui n'apporte rien de nouveau car c'est le nombre de points (rationnels) de la droite projective sur $\mathbf{F}_{q^n}$.

BIBLIOGRAPHIE SUCCINCTE

Géométrie projective proprement dite

Reinhold Baer, *Linear algebra and projective geometry*, New York, Academic Press, 1952. Exposé élémentaire du point de vue algébrique.

Abraham Seidenberg, *Lectures in projective geometry*, Princeton, Van Nostrand, 1962. Part de la géométrie des lycées, en extrait une axiomatique du plan projectif, puis introduit les coordonnées.

Beniamino Segre, *Lectures on modern geometry*, Roma, Cremonese, 1961. Après des préliminaires sur les anneaux et corps, donne un exposé très complet, à la fois algébrique et axiomatique. Présentation axiomatique des coniques et quadriques (sur un corps non nécessairement commutatif). Appendice de L. Lombardo-Radice sur les plans non arguésiens.

Robin Hartshorne, *Foundations of projective geometry*, New York, W. A. Benjamin, 1967. Exposé bref et élégant des fondements, à la fois algébriques et axiomatiques.

Gunter Pickert, *Projektive Ebene*, Berlin, Springer, 1975. Une « somme » sur les plans projectifs axiomatiques, arguésiens ou non.

Deux beaux livres assez anciens

Elie Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Paris, Gauthier-Villars, 1931. Géométrie riemannienne de nombreux espaces déduits de la géométrie projective complexe, de dimension 1 ou supérieure, en particulier les espaces d'involutions et d'anti-involutions.

Ernest Duporcq, *Premiers principes de géométrie moderne*, 3e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1949. Ecrit au début du siècle, ce livre démarre avec une brusquerie qui ferait frémir certains algébristes pointilleux d'aujourd'hui. Une fois cet obstacle surmonté, on y trouve une mine de beaux résultats sur les coniques, les quadriques, les cubiques gauches, les biquadratiques, les transformations quadratiques, les correspondances, etc.

Pour aller plus loin en géométrie algébrique

Jean Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique*, coll. « Sup », PUF, 1974, 2 vol. Aperçu historique de son développement. Puis exposé, avec démonstrations, d'une des présentations de la géométrie algébrique moderne.

Abraham Seidenberg, *Elements of the theory of algebraic curves*, Reading, Addison-Wesley, 1968. Le prérequis d'algèbre est assez modeste. Point de vue plutôt concret, donnant une large place aux courbes planes.

William Fulton, *Algebraic curves*, New York, W. Benjamin, 1969. Prérequis algébrique exposé avec efficacité. Plus abstrait que le précédent. Culmine avec les théorèmes de Bezout et de Riemann-Roch, ainsi que par la résolution des singularités des courbes.

Alain Chenciner, *Courbes algébriques planes*, Publ. Math. Univ. Paris VII, 1979. Insiste sur l'étude locale des courbes, les développements en série et la topologie des courbes sur le corps des nombres complexes et de leurs singularités.

Igor R. Shafarevic, *Basic algebraic geometry*, Springer, 1974. Exposé relativement concret de la géométrie algébrique contemporaine (faisceaux, schémas, cohomologie, etc.).

Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977. Même but que le précédent. Plus abstrait.

INDEX

Imprimé en France
Imprimerie des Presses Universitaires de France
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme
Mai 1986 — N° 31 668

Issue des réflexions des peintres de la Renaissance sur la perspective, la géométrie projective s'est avérée, au début du XIXᵉ siècle, être un outil unificateur de résultats géométriques disparates et un puissant moyen pour aller plus loin. A partir du milieu du XIXᵉ siècle, la géométrie projective a été le fondement sur lequel s'est développée la géométrie algébrique. Dans le grand développement de celle-ci, jusqu'à l'époque contemporaine, les notions projectives y ont gardé une place de choix, notamment par le biais des systèmes linéaires.

Partant d'un prérequis assez élémentaire d'algèbre, ce livre expose les fondements — tant algébriques qu'axiomatiques — de la géométrie algébrique et donne une grande place à leurs applications aux cercles, coniques et quadriques.

A la portée des étudiants du premier cycle et des élèves des classes préparatoires, il est destiné à tous les amateurs de géométrie.

Pierre Samuel, spécialiste d'algèbre et de géométrie algébrique, est professeur à l'Université de Paris-Sud (Orsay).

22405348 / 5 / 86

150 FF