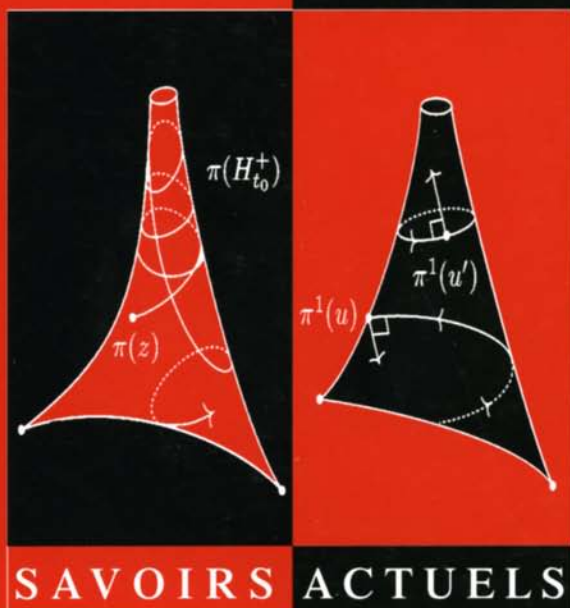


MATHÉMATIQUES

Françoise DAL'BO

# Trajectoires géodésiques • et horocycliques •



CNRS ÉDITIONS

EDP  
SCIENCES

Françoise Dal'Bo

# Trajectoires géodésiques et horocycliques

S A V O I R S    A C T U E L S

---

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Françoise Dal'Bo  
IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France  
dalbo@univ-rennes1.fr

Imprimé en France

© 2007, **EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf,  
91944 Les Ulis Cedex A  
et

**CNRS ÉDITIONS**, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

**ISBN** EDP Sciences 978-2-86883-997-8

**ISBN** CNRS ÉDITIONS 978-2-271-06582-7

*À Dominique,  
à Alma et Romance*



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-propos.....</b>	<b>vii</b>
<b>I. Géométrie des groupes fuchsien.....</b>	<b>1</b>
1. Préliminaires.....	1
2. Isométries positives et groupes fuchsien.....	10
3. Points limites des groupes fuchsien.....	19
4. Finitude géométrique.....	27
5. Commentaire.....	36
<b>II. Exemples de groupes fuchsien.....</b>	<b>39</b>
1. Groupes de Schottky.....	39
2. Codage de l'ensemble limite d'un groupe de Schottky.....	49
3. Le groupe modulaire et deux sous-groupes.....	53
4. Développements en fractions continues.....	62
5. Commentaire.....	73
<b>III. Dynamique topologique du flot géodésique.....</b>	<b>75</b>
1. Préliminaires.....	76
2. Lecture à l'infini de propriétés topologiques des trajectoires de $g_{\mathbb{R}}$ .....	80
3. Trajectoires périodiques et périodes.....	86
4. Trajectoires denses.....	90
5. Commentaire.....	92
<b>IV. Groupes de Schottky et dynamique symbolique.....</b>	<b>93</b>
1. Codage.....	94
2. Densité des trajectoires périodiques et trajectoires denses.....	97
3. Applications au cas général.....	99
4. Commentaire.....	102

<b>V. Dynamique topologique du flot horocyclique.....</b>	<b>105</b>
1. Préliminaires.....	105
2. Le flot horocyclique sur un quotient.....	109
3. Lecture à l'infini des trajectoires denses et périodiques.....	114
4. Caractérisations des groupes fuchsien géométriquement finis... ..	118
5. Commentaire.....	120
<b>VI. Point de vue lorentzien.....</b>	<b>123</b>
1. Le modèle de l'hyperboloïde.....	124
2. Interprétation lorentzienne de la dynamique du flot géodésique	130
3. Interprétation lorentzienne de la dynamique du flot horocyclique	135
4. Commentaire.....	137
<b>VII. Des trajectoires pour approcher les nombres.....</b>	<b>139</b>
1. Excursion d'un rayon géodésique dans une cuspide.....	140
2. Points géométriquement mal approchés.....	144
3. Applications à la théorie des approximations diophantiennes... ..	148
4. Commentaire.....	157
<b>Bibliographie.....</b>	<b>159</b>
<b>Index.....</b>	<b>165</b>

## AVANT-PROPOS

Dans cet ouvrage, nous proposons une introduction à la dynamique topologique de deux flots classiques associés aux surfaces de courbure  $-1$  à savoir, les flots géodésique et horocyclique. Depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, de nombreux textes ont été écrits sur ce sujet.

*Pourquoi avons-nous entrepris une telle rédaction ?*

Au cours des différents exposés que nous avons donnés sur ce thème, notamment lors d'écoles d'été organisées par l'université de Savoie, nous avons souvent regretté de ne pas pouvoir conseiller un livre à ceux qui souhaitent découvrir par eux-mêmes ce domaine. Devant l'insistance de ces derniers et leur enthousiasme pour ce sujet porteur, nous avons décidé de dépasser le stade du regret et de rédiger nos notes.

Depuis une trentaine d'années, des liens très forts se sont tissés entre les systèmes dynamiques et la théorie des nombres. La rencontre entre ces deux domaines repose sur un changement de point de vue qui, en dimension 2, consiste essentiellement à considérer qu'un réel est un point du *bord à l'infini* du demi-plan de Poincaré, et à lui associer une géodésique de la surface modulaire pointée dans sa direction (paragraphe VII.3). Ce cas d'école est encore source d'inspiration pour un grand nombre de spécialistes. Il est parfois tellement présent dans les esprits qu'il devient absent des textes. Une de nos motivations a été de le remettre en lumière.

*À qui s'adresse cet ouvrage ?*

Le lecteur est supposé avoir quelques connaissances en géométrie différentielle. Notre ambition a été de rendre ce texte lisible par un étudiant motivé de master. Nous avons également pensé aux spécialistes d'autres domaines, intéressés par ce sujet.



En ponctuant notre texte d'exercices, nous avons essayé de ne pas inhiber la pensée du lecteur par des démonstrations trop détaillées ou trop succinctes.

*Quel en est l'esprit ?*

Ce texte a été écrit avant tout dans l'idée de mettre en évidence, dans un cadre relativement élémentaire, l'existence de passerelles entre des domaines mathématiques, et l'intérêt qu'il peut y avoir à les emprunter.

Nous avons choisi de ne pas aborder l'aspect historique et de repousser la plupart des références à la fin de chaque chapitre, dans la partie commentaire. Certaines de nos démonstrations sont empruntées à la littérature, notre travail ayant consisté, parfois, à les simplifier.

Le degré de difficultés (ou de facilités) de chaque chapitre étant relativement le même, le déroulement de ce texte ne s'apparente pas à l'ascension d'un sommet. Sa progression va plutôt dans le sens des applications.

*Quel en est le contenu ?*

Nous commençons par un chapitre d'introduction à la géométrie hyperbolique plane et aux *groupes fuchsien*s, inspiré du livre de S. Katok « Fuchsian Groups » [36]. Un groupe fuchsien agit proprement discontinûment sur le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$ . S'il n'est pas fini, ses orbites s'accumulent donc sur le bord à l'infini  $\mathbb{H}(\infty)$  de  $\mathbb{H}$  en une constellation de points appelée *ensemble limite* du groupe. Nous nous intéressons aux différentes façons dont ces points sont approchés, ce qui nous amène à définir les points *coniques* et *paraboliques*, et à introduire la notion de groupes *géométriquement finis* (paragraphe I.4).

Dans le chapitre II, nous étudions des exemples de tels groupes en privilégiant les *groupes de Schottky* et le *groupe modulaire*. Dans chacun des cas, nous construisons un codage de leur ensemble limite par des suites, et établissons un dictionnaire entre certaines propriétés géométriques des points limites et d'autres, combinatoires, des suites. Le codage mis en jeu pour le groupe modulaire permet par exemple d'interpréter en termes de géométrie hyperbolique, le développement en fractions continues des réels et de relier le *nombre d'or* à la longueur de la plus petite géodésique compacte sur la *surface modulaire* (paragraphe II.4).

Dans le chapitre III, nous étudions la dynamique topologique du flot géodésique  $g_{\mathbb{R}}$  sur le quotient  $T^1S$  du fibré unitaire tangent de  $\mathbb{H}$  par un groupe fuchsien  $\Gamma$ . L'idée directrice consiste à relier la dynamique de ce flot à celle de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}(\infty)$ . Nous montrons que si  $\Gamma$  n'est pas élémentaire, l'ensemble des éléments périodiques pour  $g_{\mathbb{R}}$  est dense dans l'ensemble non errant  $\Omega_g(T^1S)$  de ce flot, et qu'il existe des trajectoires

denses dans  $\Omega_g(T^1S)$  (paragraphes III.3 et III.4). Par ailleurs, lorsque  $\Gamma$  est géométriquement fini, nous construisons un compact rencontré par toutes les trajectoires incluses dans  $\Omega_g(T^1S)$  (paragraphe III.2).

Dans le chapitre IV, nous nous restreignons au cas où le groupe fuchsien est un groupe de Schottky. En utilisant le codage de son ensemble limite, construit dans le chapitre II, nous développons une approche symbolique permettant d'étudier la topologie des trajectoires du flot géodésique sur  $\Omega_g(T^1S)$  et d'en apprécier la complexité. Nous construisons par exemple des trajectoires incluses dans  $\Omega_g(T^1S)$  qui ne sont ni compactes, ni denses, et obtenons, dans le cas général d'un groupe fuchsien non élémentaire, l'existence de compacts invariants par le flot géodésique, non périodiques et minimaux (paragraphe IV.3).

Le chapitre V est consacré à l'étude du flot horocyclique  $h_{\mathbb{R}}$  sur  $T^1S$ . La méthode que nous utilisons repose sur une correspondance entre les horocycles de  $\mathbb{H}$  et les vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^2$ , modulo  $\pm \text{Id}$ . Ce point de vue vectoriel permet de relier l'action de  $h_{\mathbb{R}}$  sur  $T^1S$  à celle d'un groupe linéaire sur un plan vectoriel, et d'obtenir par exemple l'existence de trajectoires denses dans l'ensemble non errant  $\Omega_h(T^1S)$  de ce flot (paragraphes V.2 et V.3). Lorsque le groupe  $\Gamma$  est géométriquement fini, la dynamique du flot horocyclique, contrairement à celle du flot géodésique, est simple puisqu'une trajectoire incluse dans  $\Omega_h(T^1S)$  est dense ou périodique (paragraphe V.4). Sous des comportements très différents, ces deux flots sont en fait intimement liés dans le sens où le flot  $h_{\mathbb{R}}$  reflète le comportement collectif des trajectoires asymptotes du flot  $g_{\mathbb{R}}$ .

Les deux derniers chapitres sont dédiés à des applications de l'étude de ces flots, l'une dans le domaine des actions linéaires, l'autre dans celui des approximations diophantiennes.

Dans le chapitre VI, nous nous intéressons à l'espace de *Lorentz*  $\mathbb{R}^3$  muni d'une forme bilinéaire de signature  $(2, 1)$  et relient la topologie des orbites d'un groupe discret  $G$  de transformations orthogonales pour cette forme, à celle des trajectoires des flots géodésique et horocyclique sur le quotient du fibré unitaire tangent de  $\mathbb{H}$  par un groupe fuchsien. En traduisant dans ce contexte vectoriel, les résultats démontrés sur le flot horocyclique, on obtient par exemple une description complète des orbites de  $G$  situées dans le *cône de lumière*, lorsque ce groupe est de type fini (paragraphe VI.3).

Dans le chapitre VII, nous donnons une traduction en géométrie hyperbolique de l'approximation diophantienne d'un réel par des rationnels. En nous appuyant sur la dynamique du flot géodésique sur la surface modulaire, nous retrouvons entre autre qu'un réel est *mal approché* si et seulement si

les coefficients intervenant dans son développement en fractions continues sont bornés (paragraphe VII.3).

En privilégiant un cadre géométrique simple et en choisissant de ne pas aborder l'aspect métrique de ces flots, nous limitons la portée des énoncés et masquons quelquefois les idées importantes présentes dans les raisonnements. Pour que le lecteur n'ait pas l'illusion d'avoir fait le tour du sujet, à la fin de chaque chapitre, sous forme de commentaires, nous replaçons notre étude dans un contexte riemannien général et l'introduisons dans le vaste domaine de la géométrie ergodique. Enfin, nous proposons des problèmes ouverts redonnant à ce thème bien vivant sa part d'inconnu, et donc sa place dans la recherche actuelle.

Nous remercions Claude Sabbah pour l'attention qu'il a portée à ce texte et pour ses précieuses relectures. Nous remercions également Raymond Séroul pour la réalisation des figures.

Françoise Dal'Bo

# CHAPITRE I

## GÉOMÉTRIE DES GROUPES FUCHSIENS

Nous proposons ici une introduction à la géométrie hyperbolique plane (paragraphe 1 et 2) et aux groupes fuchsien (paragraphe 3 et 4) inspirée des livres de A. Beardon « The geometry of discrete groups » [6] et de S. Katok « Fuchsian groups » [36].

Nous supposons que le lecteur a un bagage minimal en géométrie différentielle.

Nous privilégions les méthodes reposant sur l'action des isométries à celles purement géométriques.

Les paragraphes 3 et 4 contiennent peu d'exemples et le lecteur souhaitant rencontrer des groupes fuchsien avant d'en étudier les propriétés est invité à parcourir le chapitre II.

### 1. Préliminaires

Le contexte dans lequel nous nous plaçons est celui du *demi-plan de Poincaré*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\},$$

muni de la métrique riemannienne, dite *hyperbolique*,  $g$  qui, à un point  $z$  de  $\mathbb{H}$  et à deux vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  du plan tangent  $T_z\mathbb{H}$  de  $z$ , associe le réel

$$g_z(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle,$$

où  $\langle , \rangle$  est le produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^2$ .

Cette surface riemannienne est homogène au sens où deux points quelconques sont reliés par une isométrie. Pour le montrer, introduisons le groupe  $G$  des homographies réelles  $h$  définies par

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

où  $a, b, c, d$ , sont des réels vérifiant  $ad - bc = 1$ . Pour tout point  $z$  de  $\mathbb{H}$ , on a

$$\operatorname{Im} h(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2},$$

donc  $G$  agit sur  $\mathbb{H}$ .

Cette action est transitive car  $G$  contient toutes les transformations de la forme  $az + b$ , avec  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Elle se prolonge naturellement au fibré tangent  $T\mathbb{H}$  de  $\mathbb{H}$  de la façon suivante :

$$h(z, \vec{u}) = (h(z), T_z h(\vec{u})).$$

Si l'on explicite cette expression on obtient

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{et} \quad T_z h(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{(cz + d)^2},$$

où la multiplication de  $\vec{u}$  par un nombre complexe représente l'image de ce vecteur par la similitude vectorielle associée à ce nombre (figure 1).

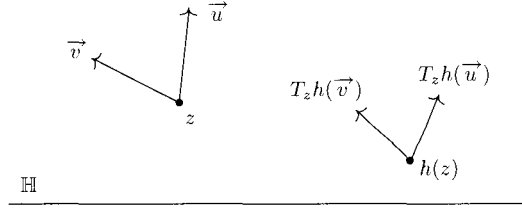


FIGURE 1

On déduit de cette expression que  $G$  préserve l'orientation des plans tangents induite par celle de  $\mathbb{R}^2$ , et que l'on a l'égalité

$$g_{h(z)}(T_z h(\vec{u}), T_z h(\vec{v})) = g_z(\vec{u}, \vec{v}).$$

Le groupe  $G$  est donc inclus dans le groupe des isométries de  $\mathbb{H}$  préservant l'orientation, que nous appelons plus simplement groupe des isométries *positives*. Nous verrons dans le prochain paragraphe que ces deux groupes sont égaux.

La métrique  $g$  et la métrique euclidienne sur  $\mathbb{H}$  sont *conformes*, puisque pour tout  $z$  le produit scalaire  $g_z$  sur  $T_z \mathbb{H}$  est un multiple du produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^2$ . Les isométries positives de  $(\mathbb{H}, g)$  conservent donc les angles orientés au sens euclidien.

À partir de la métrique  $g$ , on définit la *longueur hyperbolique* d'une courbe paramétrée et différentiable par morceaux  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  en posant

$$\operatorname{long}(c) = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}\left(\frac{dc}{ds}(t), \frac{dc}{ds}(t)\right)} dt,$$

et l'aire hyperbolique d'un sous-ensemble  $B \subset \mathbb{H}$  en posant

$$\mathcal{A}(B) = \iint_B \frac{dx dy}{y^2},$$

lorsque cette intégrale existe.

Deux paramétrages d'une même courbe géométrique différentiable  $C$  ayant même longueur, on peut parler de la *longueur hyperbolique* de  $C$ .

Remarquons que la longueur hyperbolique du segment  $[ib, a + ib]$  avec  $b > 0$  est égale à  $|a|/b$ , et que celle du segment  $[i, ib]$  avec  $b > 0$  est  $|\ln b|$ .

Nous allons maintenant définir une distance sur  $\mathbb{H}$  et nous intéresser aux géodésiques.

**1.1. Distance et géodésiques.** Soient  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{H}$ . Posons

$$d(z, z') = \inf_S \text{long}(c),$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble  $S$  des courbes paramétrées différentiables par morceaux de  $\mathbb{H}$ , dont les extrémités sont  $z$  et  $z'$ .

**Proposition 1.1.** *Il existe une unique courbe géométrique  $C$  différentiable par morceaux d'extrémités  $z$  et  $z'$  vérifiant  $\text{long}(C) = d(z, z')$ .*

– Si  $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ , cette courbe est le segment de droite d'extrémités  $z$  et  $z'$ .

– Sinon,  $C$  est l'arc de cercle entre  $z$  et  $z'$  porté par le demi-cercle passant par ces deux points et centré en un réel.

*Démonstration.* Commençons par le cas où  $z = is$  et  $z' = is'$  avec  $s > 0$  et  $s' > 0$ . Soit  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  une courbe différentiable par morceaux d'extrémités  $z$  et  $z'$ . Posons  $c(t) = x(t) + iy(t)$ .

Par définition de la longueur hyperbolique, on a

$$\text{long}(c) \geq \left| \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right|$$

avec l'égalité si et seulement si  $x(t) = 0$ , pour tout  $t$  dans  $[a, b]$ , et  $y'$  est de signe constant. Donc  $\text{long}(c) \geq |\ln(s/s')|$ , avec égalité si et seulement si  $c([a, b])$  est le segment  $[is, is']$ .

Si maintenant  $z$  et  $z'$  sont deux points quelconques, on se ramène au cas précédent en utilisant le fait que  $G$  agit par isométries sur  $\mathbb{H}$  en préservant la famille des demi-droites verticales et des demi-cercles centrés en des réels, et que l'action sur cette famille est transitive.  $\square$

**Définition 1.2.** On appelle géodésique une demi-droite verticale de  $\mathbb{H}$  ou un demi-cercle euclidien de  $\mathbb{H}$  centré en un réel (figure 2).

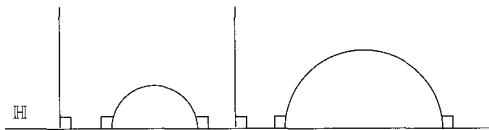


FIGURE 2

Étant donnés deux points  $z$  et  $z'$  de  $\mathbb{H}$ , l'arc de cercle ou le segment d'extrémités  $z$  et  $z'$  porté par la géodésique passant par ces deux points est appelé *segment hyperbolique* et est noté  $[z, z']_h$  (figure 3). Ce segment est donc la plus courte (au sens de la métrique hyperbolique) courbe géométrique différentiable par morceaux d'extrémités  $z$  et  $z'$ .

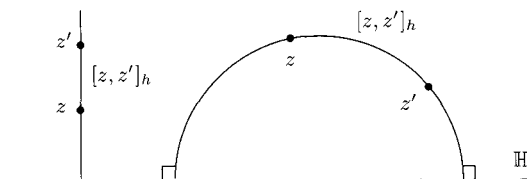


FIGURE 3

**Proposition 1.3.** L'application  $d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$d(z, z') = \inf_S \text{long}(c)$$

est une distance. Pour tout  $h$  dans  $G$  on a

$$d(h(z), h(z')) = d(z, z').$$

**Exercice 1.4.** Démontrer la proposition 1.3.

Remarquons que pour tous  $t, t' > 0$ , on a  $d(it, it') = |\ln(t/t')|$ . Lorsque  $t$  tend vers 0 ou vers  $+\infty$ , les points  $i$  et  $it$  s'éloignent donc l'un de l'autre. En revanche,  $d(it, it + 1)$  est inférieur à  $1/t$  donc les points  $it$  et  $it + 1$  se rapprochent lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

L'exercice suivant propose une formule reliant la distance hyperbolique à la distance euclidienne. On note  $\text{sh}$  la fonction sinus hyperbolique définie pour tout réel  $x$  par

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

**Exercice 1.5.** Soient  $z$  et  $z'$  deux points différents de  $\mathbb{H}$ . Démontrer la formule suivante :

$$\text{sh}\left(\frac{1}{2}d(z, z')\right) = \frac{|z - z'|}{2(\text{Im } z \text{ Im } z')^{1/2}}.$$

(Indication : se ramener au cas où  $z$  et  $z'$  sont imaginaires purs, [36, Theorem 1.2.6].)

On appelle *cercle hyperbolique* de centre  $z \in \mathbb{H}$  et de rayon  $r > 0$ , l'ensemble des  $z'$  de  $\mathbb{H}$  tels que  $d(z, z') = r$ .

**Exercice 1.6.** Démontrer que le cercle hyperbolique de centre  $z = a + ib$  et de rayon  $r > 0$  est le cercle euclidien de diamètre  $[a + ibe^r, a + ibe^{-r}]$  et que sa circonférence hyperbolique est  $2\pi \operatorname{sh} r$ .

Notons  $K(z)$  la *courbure de Gauss* en un point  $z$  de  $\mathbb{H}$ . Par définition,  $K(z)$  mesure la différence entre la circonférence,  $c(r)$ , du cercle hyperbolique centré en  $z$  et de rayon  $r$  petit, et celle du cercle euclidien centré en  $z$  de même rayon. Plus précisément, on a [8, 10.5.1.3]

$$K(z) = -\frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} (c(r) - 2\pi r),$$

donc  $K(z) = -1$ .

**Exercice 1.7.** Soient  $z$  et  $z'$  deux points différents de  $\mathbb{H}$ . Démontrer que l'ensemble des  $z''$  de  $\mathbb{H}$  vérifiant  $d(z'', z) = d(z'', z')$  est la géodésique passant par le milieu hyperbolique de  $[z, z']_h$ , orthogonale à ce segment hyperbolique.

À partir de  $d$ , on construit une distance sur le fibré unitaire tangent  $T^1\mathbb{H}$  de  $\mathbb{H}$ . Avant de la définir, introduisons des notations.

Soit  $v = (z, \vec{v})$  un élément de  $T^1\mathbb{H}$ . On note  $(v(t))_{t \in \mathbb{R}}$  le paramétrage par longueur (hyperbolique) d'arcs (i.e.  $d(v(t), v(t')) = |t - t'|$ ) de l'unique géodésique passant par  $z$  vérifiant  $v(0) = z$  et  $dv/dt(0) = \vec{v}$  (figure 4).

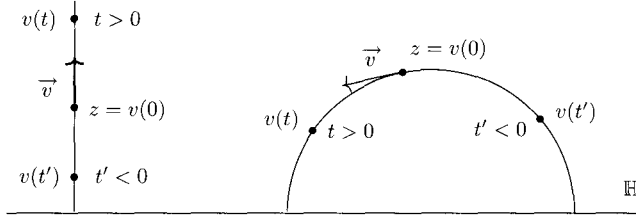


FIGURE 4

À deux éléments  $v$  et  $v'$  de  $T^1\mathbb{H}$ , on associe la fonction  $f_{v,v'}(t)$  définie par

$$f_{v,v'}(t) = d(v(t), v'(t))e^{-|t|}.$$

On a l'inégalité

$$f_{v,v'}(t) \leq (2|t| + d(v(0), v'(0)))e^{-|t|}$$

donc cette fonction est intégrable.



**Exercice 1.8.** Démontrer que l'application  $D : T^1\mathbb{H} \times T^1\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$D(v, v') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} d(v(t), v'(t)) dt,$$

est une distance invariante par  $G$ .

**1.2. Compactification de  $\mathbb{H}$ .** La topologie induite par  $d$  sur  $\mathbb{H}$  est la même que celle induite par la distance euclidienne. Pour cette topologie,  $\mathbb{H}$  n'est pas compact. Nous allons le compactifier en lui ajoutant un *bord à l'infini*  $\mathbb{H}(\infty) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , et en munissant  $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$  d'une topologie qui, en restriction à  $\mathbb{H}$ , sera celle induite par  $d$ . Pour cela, on définit un ouvert de  $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$  comme étant ou bien un ouvert de  $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$  (relativement à la topologie induite par la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ ) ou bien la réunion du point  $\infty$  et du complémentaire d'un compact de  $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ .

**Exercice 1.9.** Démontrer que  $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$  muni de cette topologie est compact.

Soit  $A$  un ensemble inclus dans  $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$ . On note  $\overset{\circ}{A}$  son intérieur et  $\overline{A}$  son adhérence.

**Définition 1.10.** On appelle *bord à l'infini* de  $A$ , l'ensemble, noté  $A(\infty)$ , défini par

$$A(\infty) = \overline{A} \cap \mathbb{H}(\infty).$$

Le bord à l'infini d'une géodésique est un ensemble à deux éléments que l'on appelle *extrémités de la géodésique*. Remarquons qu'une géodésique est déterminée par ses extrémités et qu'une géodésique est une demi-droite verticale si et seulement si l'une de ses extrémités est le point  $\infty$ .

Soient  $x^-$  et  $x^+$  deux points différents de  $\mathbb{H}(\infty)$ . On note  $(x^- x^+)$  la géodésique d'extrémités  $x^-$ ,  $x^+$ , orientée de  $x^-$  vers  $x^+$ . Si  $z$  appartient à  $\mathbb{H}$ , le rayon géodésique d'origine  $z$  et d'extrémité  $x^+$  est noté  $[z, x^+)$  (figure 5).

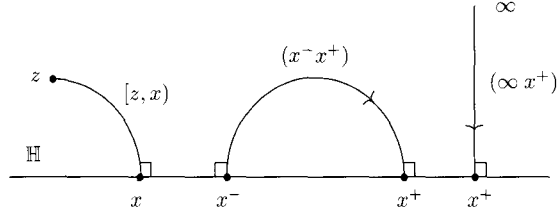


FIGURE 5

Une géodésique sépare  $\mathbb{H}$  en deux composantes connexes. Chacune de ces composantes est appelée *demi-plan*.

Par définition, un *triangle hyperbolique*  $T$  est l'intersection de trois demi-plans fermés, dont l'aire hyperbolique est finie et non nulle.

**Exercice 1.11.** Soient  $T$  un triangle hyperbolique et  $F$  l'intersection de la frontière de  $T$  avec  $\mathbb{H}$  (figure 6). Démontrer que  $T(\infty)$  contient au plus trois points. Démontrer que

- si  $T(\infty) = \{x_1, x_2, x_3\}$  alors  $F = (x_1x_2) \cup (x_2x_3) \cup (x_3x_1)$  et  $\mathcal{A}(T) = \pi$ ,
- si  $T(\infty) = \{x_1, x_2\}$  alors  $F = (x_1, z] \cup [z, x_2) \cup (x_2, x_1)$ , avec  $z \in \mathbb{H}$ , et  $\mathcal{A}(T) = \pi - \alpha$ , où  $\alpha$  est la mesure de l'angle géométrique en  $z$ ,
- si  $T(\infty) = \{x\}$  alors  $F = (x, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, x)$  et  $\mathcal{A}(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2)$ ,
- si  $T(\infty) = \emptyset$  alors

$$F = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1] \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

(Indication : [36, Theorem 1.4.2].)

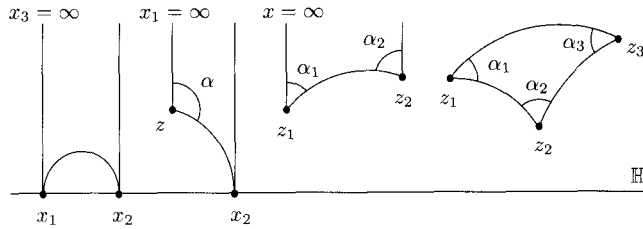


FIGURE 6

L'action du groupe  $G$  sur  $\mathbb{H}$  se prolonge en une action par homéomorphismes sur  $\mathbb{H}(\infty)$  définie, pour  $g(z) = (az + b)/(cz + d)$  et  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , par

- si  $c = 0$ , alors  $g(\infty) = \infty$  et  $g(x) = (ax + b)/d$ ,
- si  $c \neq 0$ , alors  $g(\infty) = a/c$ ,  $g(-d/c) = \infty$  et, si  $x \neq -d/c$ , alors  $g(x) = (ax + b)/(cx + d)$ .

**Exercice 1.12.** Démontrer que l'action ci-dessus est conjuguée à l'action projective de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  sur la droite projective  $\mathbb{RP}^1$  par l'homéomorphisme de  $\mathbb{H}(\infty)$  sur  $\mathbb{RP}^1$  qui à un réel  $x$  associe  $\mathbb{R}^*\left(\frac{x}{1}\right)$ , et au point  $\infty$  associe  $\mathbb{R}^*\left(\frac{1}{0}\right)$ .

**1.3. Cocycles de Busemann et horocycles.** L'idée est maintenant de se placer en un point  $x$  de  $\mathbb{H}(\infty)$  et d'observer les points de  $\mathbb{H}$  à partir de  $x$ . Pour cela, nous allons associer à deux points  $z$  et  $z'$  de  $\mathbb{H}$ , une quantité algébrique reflétant la position relative de ces deux points, vus de  $x$ .

Notons  $(r(t))_{t \geq 0}$  le paramétrage par longueur d'arcs du rayon géodésique  $[z, x)$  et posons  $f(t) = d(z, r(t)) - d(z', r(t))$ .

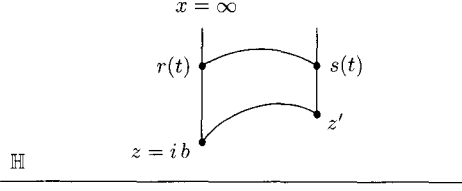


FIGURE 7

Montrons que  $f$  admet une limite en  $+\infty$ . Commençons par le cas où  $x = \infty$  et  $z = ib$ . Posons  $z' = a' + ib'$  et  $s(t) = a' + ibe^t$  (figure 7). Pour  $t$  grand, on a

$$d(s(t), z') = \ln(b/b') + t,$$

donc

$$f(t) = d(s(t), z') - d(z', r(t)) + \ln(b'/b).$$

Par ailleurs  $d(s(t), r(t)) \leq |a'|/be^t$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ln(b'/b)$ .

Remarquons que cette limite ne dépend pas de  $a'$ , et que si  $a' = 0$  alors elle est égale à  $d(z, z')$ , si  $b' \geq b$  et à  $-d(z, z')$  sinon. Si  $x = \infty$  et  $z$  est quelconque, on se ramène au cas précédent par une translation. Si  $x$  est différent du point  $\infty$ , on se ramène également à ce cas, en utilisant l'homographie

$$h(z) = \frac{xz - x^2 - 1}{z - x}.$$

En conclusion, la fonction  $f$  admet une limite en  $+\infty$ . Cette limite est appelée *cocycle de Busemann* centré en  $x$ , calculé en  $z, z'$ , et est notée  $B_x(z, z')$  (figure 8).

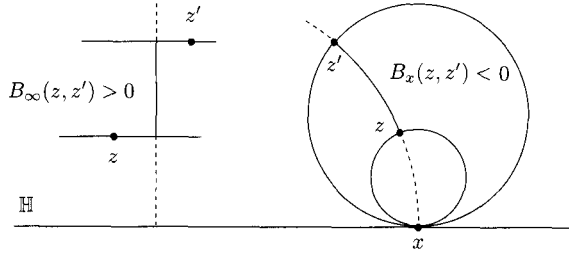


FIGURE 8

**Propriété 1.13.** Soient  $g$  dans  $G$ ,  $x$  dans  $\mathbb{H}$ , et  $z, z', z''$  dans  $\mathbb{H}$ . On a :

- (i)  $B_{g(x)}(g(z), g(z')) = B_x(z, z')$  ;
- (ii)  $B_x(z, z') = B_x(z, z'') + B_x(z'', z')$  ;
- (iii)  $-d(z, z') \leq B_x(z, z') \leq d(z, z')$  ;
- (iv)  $B_x(z, z') = d(z, z')$  (resp.  $-d(z, z')$ ) si et seulement si  $z'$  appartient au rayon  $[z, x)$  (resp.  $z \in [z', x)$ ).

**Exercice 1.14.** Démontrer les propriétés 1.13.

(Indication : pour (ii), (iii), (iv) se ramener au cas où  $x = \infty$ .)

Pour tout  $t > 0$ , posons

$$H_t(x) = \{z \in \mathbb{H} \mid B_x(i, z) = \ln t\} \quad \text{et} \quad H_t^+(x) = \{z \in \mathbb{H} \mid B_x(i, z) \geq \ln t\}.$$

Si  $x = \infty$ , alors l'ensemble  $H_t(\infty)$  est la droite horizontale définie par  $\text{Im } z = t$ , et  $H_t^+(\infty)$  est le demi-plan supérieur fermé dans  $\mathbb{H}$ , bordé par cette droite.

Sinon, considérons  $g$  dans  $G$  vérifiant  $g(\infty) = x$ , d'après les propriétés 1.13(i) et (ii), on a

$$H_t(x) = g(H_{t'}(\infty)) \quad \text{avec} \quad t' = te^{-B_x(i, g(i))}.$$

Par conséquent,  $H_t(x)$  est un cercle tangent à l'axe réel en  $x$ , et  $H_t^+(x)$  est le disque fermé dans  $\mathbb{H}$  délimité par ce cercle (figure 9).

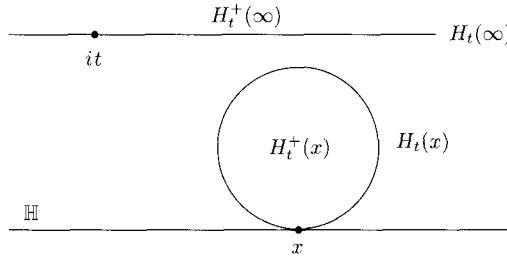


FIGURE 9

Les ensembles  $H_t(x)$  (resp.  $H_t^+(x)$ ) sont appelés *horocycles* (resp. *horodisques*). Historiquement c'est le mot *horicycle* qui était employé.

**1.4. Disque de Poincaré.** Pour terminer ce paragraphe, introduisons une surface riemannienne isométrique à  $(\mathbb{H}, g)$ . Dans la suite du texte, nous privilégierons un modèle sur l'autre en fonction de la situation rencontrée.

Considérons le disque ouvert unité  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  et l'application  $\psi$  de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{D}$  définie par

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto i \frac{z - i}{z + i}. \end{aligned}$$

Cette application est un difféomorphisme, notons encore  $g$  la métrique riemannienne sur  $\mathbb{D}$  obtenue par transport par  $\psi$  de la métrique hyperbolique sur  $\mathbb{H}$ .

Soient  $z$  dans  $\mathbb{D}$  et  $\vec{u}, \vec{v}$  appartenant au plan tangent,  $T_z\mathbb{D}$ , en  $z$ . La métrique  $g$  est donnée par

$$g_z(\vec{u}, \vec{v}) = \left( \frac{2}{1 - |z|^2} \right)^2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

Nous conservons les mêmes notations que celles introduites pour  $\mathbb{H}$ . Ainsi,  $d$  représente la distance induite par  $g$  sur  $\mathbb{D}$ , et  $G$  représente le conjugué par  $\psi$  du groupe des homographies réelles de déterminant 1. Ce groupe est composé des homographies complexes de la forme  $(az + b)/(\bar{b}z + \bar{a})$  avec  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ .

Dans ce modèle du disque de Poincaré, la compactification de  $\mathbb{D}$  correspond à l'adjonction du cercle unité  $\mathbb{D}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ , et la topologie sur la réunion de ces deux ensembles est celle induite par la distance euclidienne sur le plan. Les géodésiques sont les demi-cercles orthogonaux à  $\mathbb{D}(\infty)$  et les diamètres euclidiens de  $\mathbb{D}$ , et les horocycles sont les cercles de  $\mathbb{D}$  tangents à  $\mathbb{D}(\infty)$  (figure 10).

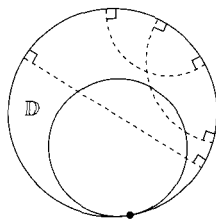


FIGURE 10

## 2. Isométries positives et groupes fuchsiens

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au groupe  $G$ , à ses éléments et à l'action de certains de ses sous-groupes sur  $\mathbb{H}$  et  $T^1\mathbb{H}$ .

**2.1. Le groupe  $G$  et ses décompositions.** Introduisons les trois sous-groupes suivants :

$$K = \left\{ r(z) = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

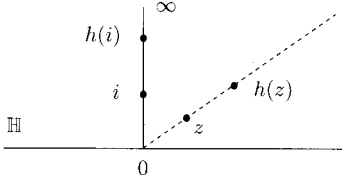
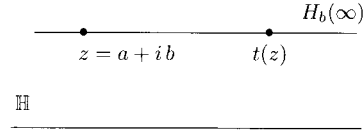
$$A = \{h(z) = az \mid a > 0\},$$

$$N = \{t(z) = z + b \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Ces trois groupes sont caractérisés par leurs points fixes sur  $\overline{\mathbb{H}}$ .

**Exercice 2.1.** Démontrer que  $K$  est le stabilisateur de  $i$  dans  $G$ , qu'un élément de  $G$  appartient à  $A$  si et seulement s'il fixe  $0$  et  $\infty$ , et qu'un élément de  $G$ , différent de l'identité, appartient à  $N$  si et seulement si le point  $\infty$  est son unique point fixe dans  $\overline{\mathbb{H}}$ .

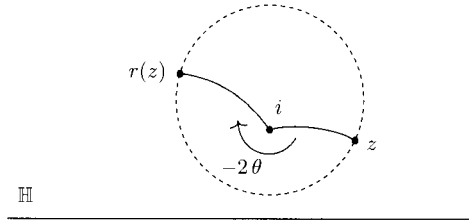
Remarquons qu'un élément du groupe  $A$  laisse invariante la géodésique  $(0\infty)$  (figure 11) et qu'un élément du groupe  $N$  préserve chaque horocycle centré au point  $\infty$  (figure 12).

FIGURE 11.  $h \in A$ FIGURE 12.  $t \in N$ 

**Proposition 2.2.** Le groupe  $G$  est le groupe des isométries positives de  $\mathbb{H}$ .

*Démonstration.* Soit  $f$  une isométrie positive de  $\mathbb{H}$ . L'action de  $G$  sur  $\mathbb{H}$  étant transitive et par isométrie, quitte à composer  $f$  par un élément de  $G$ , on peut supposer que  $f$  fixe  $i$ . Le groupe  $K$  agit sur  $T_i\mathbb{H}$  par rotation et  $f$  préserve l'orientation, donc il existe  $r$  dans  $K$  tel que  $T_i(r \circ f) = \text{Id}$ . Soient  $z$  un point de  $\mathbb{H}$  différent de  $i$  et  $\vec{v}$  le vecteur unitaire tangent en  $i$  à la géodésique orientée allant de  $i$  vers  $z$ . L'image par  $r \circ f$  de cette géodésique est la géodésique orientée allant de  $i$  vers  $r \circ f(z)$ . Son vecteur unitaire tangent en  $i$  est  $T_i(r \circ f)(\vec{v}) = \vec{v}$ , donc  $r \circ f(z) = z$ . Par ailleurs l'homographie  $r \circ f$  fixe  $i$ , donc  $f = r^{-1}$ .  $\square$

L'action de  $G$  sur  $T^1\mathbb{H}$  est simplement transitive. En effet, soient  $(i, \vec{u})$  et  $(x + iy, \vec{v})$  dans  $T^1\mathbb{H}$ , introduisons les homographies suivantes :  $h(z) = yz + x$  et  $r(z) = (z \cos \theta - \sin \theta) / (z \sin \theta + \cos \theta)$  (figure 13), où  $-2\theta$  est la

FIGURE 13.  $r \in K$

mesure de l'angle orienté  $(T_i h(\vec{u}), \vec{v})$ . On a

$$(1) \quad h \circ r(i) = z \quad \text{et} \quad T_i(h \circ r)(\vec{u}) = \vec{v}.$$

Par ailleurs, si  $g$  dans  $G$  fixe  $(i, \vec{u})$  alors  $g = \text{Id}$  d'après l'argument développé dans la démonstration de la proposition 2.2, donc  $h \circ r$  est l'unique élément de  $G$  vérifiant les égalités (1).

On déduit également du raisonnement précédent qu'un élément  $g$  de  $G$  se décompose sous la forme

$$g = nak,$$

avec  $a \in A$ ,  $n \in N$  et  $k \in K$ . De plus cette décomposition, dite *d'Iwasawa*, est unique.

Dans le chapitre VI (exercice VI.1.5) nous utiliserons une autre écriture de  $g$  sous la forme

$$g = kak',$$

avec  $k, k' \in K$ , et  $a \in A$ .

Pour obtenir une telle décomposition, dite de *Cartan*, posons  $g(i) = z'$  et considérons l'homothétie de  $G$  définie par

$$h(z) = ze^{d(i, z')}.$$

L'image de  $i$  par  $h$  appartient au cercle hyperbolique centré en  $i$  passant par  $z'$ . L'action du groupe  $K$  sur ce cercle étant transitive, il existe  $k$  dans  $K$  tel que  $k \circ h(i) = z'$ . L'isométrie  $g^{-1} \circ k \circ h$  fixe  $i$  et préserve l'orientation donc il existe  $k'$  dans  $K$  tel que  $g = k \circ h \circ k'$ .

En résumé, nous venons de démontrer les propriétés suivantes :

**Propriété 2.3.**

- (i) Le groupe  $G$  agit simplement transitivement sur  $T^1\mathbb{H}$ .
- (ii)  $G = NAK$ .
- (iii)  $G = KAK$ .

**2.2. Dynamique des isométries positives.** On associe à un élément  $g$  de  $G$  s'écrivant  $g(z) = (az + b)/(cz + d)$ , avec  $ad - bc = 1$ , la valeur absolue de sa *trace* définie par

$$|\text{tr}(g)| = |a + d|.$$

Si  $g$  n'est pas trivial, le nombre de ses points fixes dans  $\overline{\mathbb{H}}$  se lit sur le signe de la quantité  $|\text{tr}(g)| - 2$ .

**Propriété 2.4.** Soit  $g$  dans  $G - \{\text{Id}\}$ .

- (i) Si  $|\text{tr}(g)| > 2$  alors  $g$  fixe exactement deux points de  $\overline{\mathbb{H}}$ , ces points appartiennent à  $\mathbb{H}(\infty)$ , et  $g$  est conjugué dans  $G$  à un élément de  $A$ .

(ii) Si  $|\operatorname{tr}(g)| < 2$  alors  $g$  fixe exactement un point de  $\overline{\mathbb{H}}$ , ce point appartient à  $\mathbb{H}$ , et  $g$  est conjugué dans  $G$  à un élément de  $K$ .

(iii) Si  $|\operatorname{tr}(g)| = 2$  alors  $g$  fixe exactement un point de  $\overline{\mathbb{H}}$ , ce point appartient à  $\mathbb{H}(\infty)$ , et  $g$  est conjugué dans  $G$  à un élément de  $N$ .

**Exercice 2.5.** Démontrer les propriétés 2.4.

– Dans le cas (i), on dit que  $g$  est *hyperbolique*. Une telle isométrie préserve la géodésique dont les extrémités sont ses points fixes. Cette géodésique est appelée l'*axe de translation* de  $g$ , ou plus simplement l'*axe* de  $g$ . L'action de  $g$  sur son axe est par translation. Soit  $z$  appartenant à cet axe. Les suites  $(g^n(z))_{n \geq 1}$  et  $(g^{-n}(z))_{n \geq 1}$  convergent chacune vers les extrémités de l'axe de  $g$ . On appelle point fixe *attractif* de  $g$  (resp. *répulsif*) la limite de  $(g^n(z))_{n \geq 1}$  (resp.  $(g^{-n}(z))_{n \geq 1}$ ). On note  $g^+$  (resp.  $g^-$ ) ce point (figure 14).

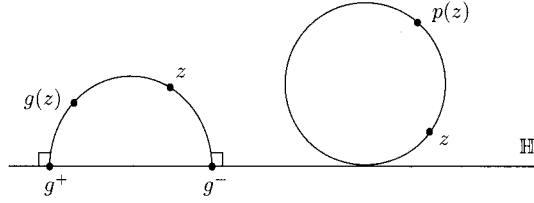


FIGURE 14

– Dans le cas (ii),  $g$  est dit *elliptique*.

– Enfin dans le cas (iii),  $g$  est dit *parabolique*. Il est conjugué à une translation  $t(z) = z + b$ , donc  $g$  préserve les horocycles centrés en son point fixe, sur lesquels il agit par translation (figure 14,  $g = p$ ).

Soient  $z$  un point de  $\mathbb{H}$  et  $g$  une isométrie de  $G$  ne fixant pas  $z$ . Notons  $M_g$  la médiatrice du segment hyperbolique  $[z, g(z)]_h$  et  $D(g)$  le demi-plan fermé dans  $\mathbb{H}$  bordé par  $M_g$  contenant  $g(z)$  (figure 15).

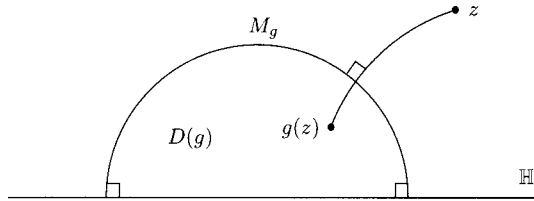


FIGURE 15

La nature de  $g$  peut être aussi caractérisée par la position relative de  $M_g$  et  $M_{g^{-1}}$ .



On a  $g(M_{g^{-1}}) = M_g$  donc

$$g(\overset{\circ}{D}(g^{-1})) = \mathbb{H} - D(g).$$

**Exercice 2.6.** Démontrer les équivalences suivantes :

– Les géodésiques  $M_g$  et  $M_{g^{-1}}$  sont sécantes si et seulement si  $g$  est elliptique (figure 16).

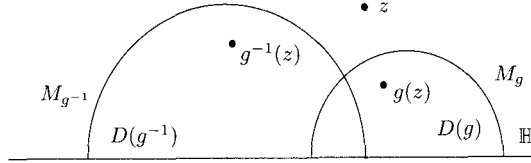


FIGURE 16.  $g$  elliptique

– Les adhérences des géodésiques  $M_g$  et  $M_{g^{-1}}$  sont disjointes dans  $\overline{\mathbb{H}}$  si et seulement si  $g$  est hyperbolique (figure 17).

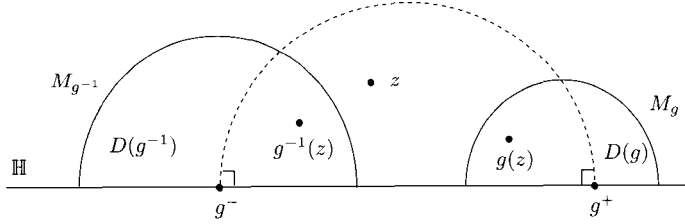


FIGURE 17.  $g$  hyperbolique

– Les géodésiques  $M_g$  et  $M_{g^{-1}}$  ont exactement une extrémité en commun si et seulement si  $g$  est parabolique. De plus, l'extrémité commune est le point fixe de  $g$  (figure 18).

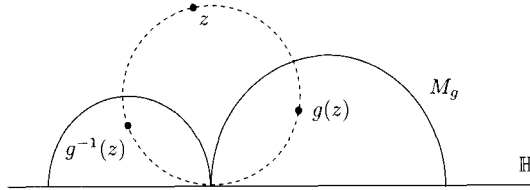


FIGURE 18.  $g$  parabolique

(Indication : se ramener au cas où  $g$  appartient au groupe  $K$ ,  $A$  ou  $N$ .)

La nature d'une isométrie  $g$  de  $G$  se lit aussi sur son *déplacement*  $\ell(g)$  défini par

$$\ell(g) = \inf_{z \in \mathbb{H}} d(z, g(z)).$$

En effet, si  $g$  est elliptique, alors il fixe un point donc  $\ell(g) = 0$ . Si  $g$  est parabolique, alors il est conjugué à une translation  $t(z) = z + b$  donc  $\ell(g) = \ell(t)$ . Par ailleurs,  $\ell(t) = 0$  car  $d(z, t(z)) \leq |b|/\text{Im } z$  pour tout  $z$  dans  $\mathbb{H}$ , et cette borne inférieure n'est pas atteinte. Enfin, si  $g$  est hyperbolique, alors il est conjugué à une homothétie  $h(z) = \lambda z$ , avec  $\lambda > 1$ , donc  $\ell(g) = \ell(h)$ . Les homothéties positives et les translations étant des isométries, on a

$$\ell(h) = \inf_{x \in \mathbb{R}} d(i, x + i\lambda).$$

Considérons le cercle hyperbolique de centre  $i$  passant par  $x + i\lambda$  (figure 19). Ce cercle rencontre la droite horizontale d'équation  $\text{Im } z = \lambda$

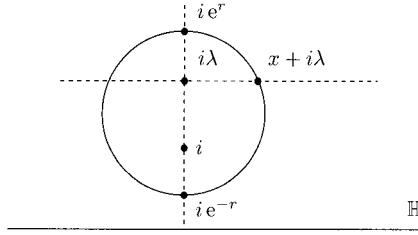


FIGURE 19

et est le cercle euclidien de diamètre  $[ie^r, ie^{-r}]$ , avec  $r = d(i, x + i\lambda)$ , donc  $\lambda \leq e^r$  avec égalité si et seulement si  $x = 0$ . Par conséquent, on a  $d(i, x + i\lambda) \geq \ln \lambda$ , avec égalité si et seulement si  $x = 0$ . En revenant à  $g$ , on obtient  $\ell(g) > 0$  et  $d(z, g(z)) = \ell(g)$  si et seulement si  $z$  appartient à l'axe de  $g$ .

En résumé nous avons la caractérisation suivante :

**Propriété 2.7.** Soit  $g$  dans  $G - \{\text{Id}\}$ .

- (i)  $g$  est hyperbolique si et seulement si  $\ell(g) > 0$ , et  $d(z, g(z)) = \ell(g)$  si et seulement si  $z$  appartient à l'axe de  $g$ .
- (ii)  $g$  est elliptique si et seulement si  $\ell(g) = 0$  et cette borne inférieure est atteinte.
- (iii)  $g$  est parabolique si et seulement si  $\ell(g) = 0$  et cette borne inférieure n'est pas atteinte.

Après avoir étudié individuellement les isométries positives de  $\mathbb{H}$ , nous allons nous intéresser aux sous-groupes  $\Gamma$  de  $G$ .

Notre motivation étant d'obtenir des surfaces topologiquement régulières en quotientant  $\mathbb{H}$  par  $\Gamma$ , nous nous restreignons aux *groupes fuchsien*s, c'est-à-dire aux sous-groupes de  $G$  discrets pour la topologie sur  $G$  induite par la distance euclidienne sur les quadruplets de réels.

**2.3. Groupes fuchsien**s. On dit qu'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $G$  opère *proprement discontinûment* sur  $\mathbb{H}$  si pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{H}$ , seul un nombre fini d'éléments  $\gamma$  de  $\Gamma$  vérifient  $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ .

**Propriété 2.8.** *Un groupe fuchsien opère proprement discontinûment sur  $\mathbb{H}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\Gamma$  un tel groupe et  $K$  un compact de  $\mathbb{H}$ . Notons  $K^1$  le compact de  $T^1\mathbb{H}$  composé des éléments de la forme  $(z, \vec{u})$  avec  $z \in K$ , et fixons un élément  $v$  dans  $T^1\mathbb{H}$ . L'action de  $G$  sur  $T^1\mathbb{H}$  étant continue et simplement transitive, il existe un compact  $C$  inclus dans  $G$  vérifiant  $C(v) = K^1$ . Considérons un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$ . Si  $\gamma K \cap K \neq \emptyset$  alors  $\gamma K^1 \cap K^1 \neq \emptyset$  donc  $\gamma$  appartient à  $CC^{-1}$  qui est compact. Le groupe  $\Gamma$  étant discret,  $\gamma$  appartient à un ensemble fini.  $\square$

**Exercice 2.9.** Démontrer que si  $\Gamma$  est un groupe fuchsien, les orbites de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$  sont fermées et discrètes, et que l'espace topologique quotient  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  est séparé.

(Indication : [30, théorème I.6.7].)

Un groupe fuchsien *pave*  $\mathbb{H}$ , au sens où il existe un sous-ensemble  $F$  de  $\mathbb{H}$  vérifiant :

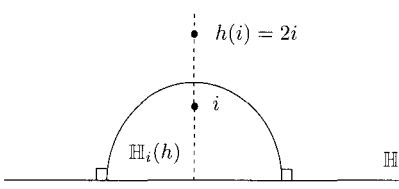
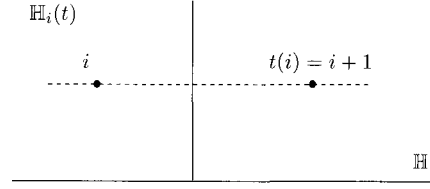
- (i)  $F$  est un fermé connexe d'intérieur non vide de  $\mathbb{H}$  ;
- (ii)  $\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F = \mathbb{H}$  ;
- (iii)  $\overset{\circ}{F} \cap \gamma \overset{\circ}{F} = \emptyset$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma - \{\text{Id}\}$ .

Un tel ensemble est appelé un *domaine fondamental*. Une méthode classique pour obtenir de tels domaines est d'associer à un point  $z_0$  de  $\mathbb{H}$  qui n'est fixé par aucun élément de  $\Gamma - \{\text{Id}\}$ , l'intersection des demi-plans

$$\mathbb{H}_{z_0}(\gamma) = \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, z_0) \leq d(z, \gamma(z_0))\}.$$

Remarquons que si l'on revient aux notations introduites juste avant l'exercice 2.6, on a pour  $z = z_0$  (figures 20 et 21)

$$\mathbb{H}_{z_0}(\gamma) = \mathbb{H} - \overset{\circ}{D}(\gamma).$$

FIGURE 20.  $h(z) = 2z$ FIGURE 21.  $t(z) = z + 1$ 

La frontière de  $\mathbb{H}_{z_0}(\gamma)$  est la médiatrice du segment  $[z_0, \gamma(z_0)]_h$ , donc cette intersection est convexe pour la métrique hyperbolique. Posons

$$\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma) = \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq \text{Id}}} \mathbb{H}_{z_0}(\gamma).$$

Cet ensemble est appelé *domaine de Dirichlet* de  $\Gamma$  centré en  $z_0$ .

**Théorème 2.10.** *Un domaine de Dirichlet est un domaine fondamental convexe de  $\Gamma$ .*

**Exercice 2.11.** Démontrer le théorème 2.10.

(Indication : [36, theorem 3.2.2].)

Analysons la frontière d'un domaine de Dirichlet  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  dans  $\mathbb{H}$ . Soit  $z'$  un point de cette frontière. Il existe une suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{H}$  convergeant vers  $z'$  et une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telles que  $d(z_0, z_n) > d(z_0, \gamma_n(z_n))$ . La suite  $(\gamma_n^{-1}(z_0))_{n \geq 1}$  est bornée et  $\Gamma(z_0)$  est fermé et discret, donc, quitte à extraire une sous-suite,  $\gamma_n = \gamma$  et  $d(z_0, z') \geq d(z_0, \gamma(z'))$ . Par ailleurs  $z'$  appartient à  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$ , donc  $z'$  est sur la médiatrice de  $[z_0, \gamma(z_0)]_h$ .

On obtient donc la propriété suivante :

**Propriété 2.12.** *La frontière (dans  $\mathbb{H}$ ) de  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  est incluse dans la réunion des médiatrices des segments  $[z_0, \gamma(z_0)]_h$ , avec  $\gamma$  dans  $\Gamma - \{\text{Id}\}$ .*

On déduit de cette propriété que l'aire hyperbolique de la frontière d'un domaine de Dirichlet est nulle.

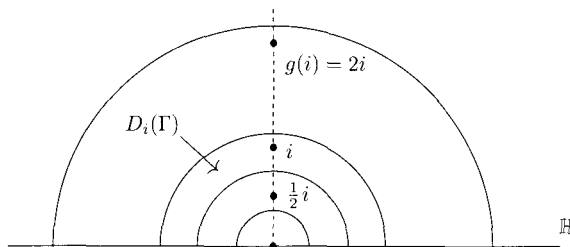
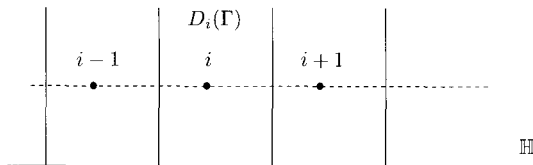
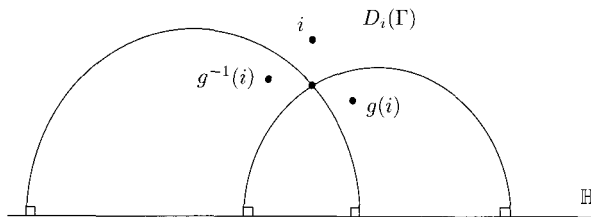
Un domaine fondamental quelconque peut être topologiquement très sauvage (voir [6, exemple 9.2.5]). Ce n'est pas le cas des domaines de Dirichlet.

**Propriété 2.13.** *Un domaine de Dirichlet  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est localement fini (i.e. pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{H}$ , l'ensemble des  $\gamma$  de  $\Gamma$  vérifiant  $\gamma \mathcal{D}_z(\Gamma) \cap K \neq \emptyset$  est fini).*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un compact  $K$  de  $\mathbb{H}$  et un sous-ensemble  $\Gamma'$  infini de  $\Gamma$  tel que pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma'$  on ait  $\gamma \mathcal{D}_z(\Gamma) \cap K \neq \emptyset$ . Présentons  $\Gamma'$  sous la forme d'une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$ . Pour tout  $n \geq 1$ , il

existe  $z_n \in D_z(\Gamma)$  tel que  $\gamma_n(z_n)$  appartienne à  $K$ . Comme  $z_n$  appartient à  $D_z(\Gamma)$  on a  $d(z_n, z) \leq d(\gamma_n(z_n), z)$ . On déduit de cette inégalité que la suite  $(\gamma_n(z))_{n \geq 1}$  est bornée. Le groupe  $\Gamma$  étant fuchsien, l'ensemble  $\{\gamma_n \mid n \geq 1\}$  est nécessairement fini, ce qui contredit l'hypothèse de départ.  $\square$

**Exemples 2.14.** Exemples de domaines de Dirichlet centrés en  $i$ , associés à des groupes fuchsien engendrés par une isométrie positive  $g$  (figures 22, 23 et 24).

FIGURE 22.  $g(z) = 2z$ FIGURE 23.  $g(z) = z + 1$ FIGURE 24.  $g$  elliptique

Les domaines de Dirichlet permettent de visualiser la surface  $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  associée à  $\Gamma$  par le biais de l'application  $\theta$  de l'ensemble  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  des éléments de  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  modulo  $\Gamma$ , dans  $S$  définie par

$$\theta(\Gamma z' \cap \mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)) = \Gamma z'.$$

**Exercice 2.15.** Démontrer que  $\theta$  est un homéomorphisme.

(Indication : [6, Theorem 9.2.4].)

**Exemples 2.16.** La figure 25 représente les surfaces associées aux groupes fuchsien cycliques introduits dans les exemples 2.14. Les deux premières

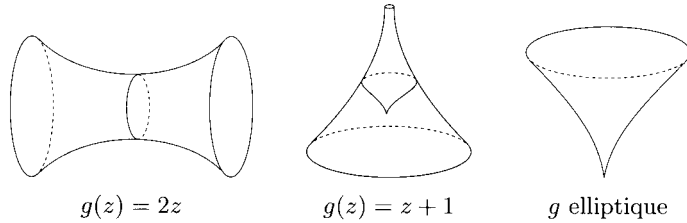


FIGURE 25

surfaces représentées sont topologiquement les mêmes au sens où elles sont homéomorphes à un cylindre. En revanche d'un point de vue métrique, elles sont différentes. En effet, privons le domaine de Dirichlet  $\mathcal{D}_i(\Gamma)$  de la courbe  $c'$ , intersection de ce domaine avec  $c = [g^{-1}(i), i]_h \cup [i, g(i)]_h$ , où  $g$  est un générateur de  $\Gamma$ . Dans le premier cas, la courbe  $c$  est le segment  $[2i, 1/2i]_h$ , donc  $c'$  divise le domaine en deux domaines d'aire infinie.

Dans le second cas, l'isométrie  $g$  est une translation, la courbe  $c'$ , qui n'est pas un segment géodésique, divise le domaine en deux domaines, l'un d'aire finie et l'autre d'aire infinie.

Une conséquence du résultat démontré dans l'exercice 2.15 est que si  $D_{z_0}(\Gamma)$  est compact, tous les domaines de Dirichlet de  $\Gamma$  le sont aussi. Un tel groupe est appelé *réseau uniforme*. Plus généralement on dit qu'un groupe fuchsien est un *réseau* si l'aire de l'un de ses domaines de Dirichlet est finie.

**Exercice 2.17.** Démontrer que si l'aire d'un domaine  $D_{z_0}(\Gamma)$  est finie alors l'aire d'un domaine de Dirichlet quelconque de  $\Gamma$  est finie et est égale à  $\mathcal{A}(D_{z_0}(\Gamma))$ .

(Indication : utiliser le fait que l'aire de la frontière d'un domaine de Dirichlet est nulle.)

### 3. Points limites des groupes fuchsien

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'action d'un groupe fuchsien  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}(\infty)$ .

**3.1. Ensemble limite.** Analysons l'orbite d'un point  $z$  de  $\mathbb{H}$  par  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  est infini, l'action de ce groupe sur  $\mathbb{H}$  étant proprement discontinue,  $\Gamma z$  s'accumule sur  $\mathbb{H}(\infty)$ . En particulier, il existe une suite  $(\gamma_n(z))_{n \geq 1}$  de  $\Gamma z$  convergeant vers un point  $x$  de  $\mathbb{H}(\infty)$ . Cette limite ne dépend pas de  $z$ . En effet, quitte à conjuguer  $\Gamma$ , supposons  $x = 0$ . Posons  $\gamma_n(z) = a_n + ib_n$ . Pour tout  $z'$  dans  $\mathbb{H}$ , le point  $\gamma_n(z')$  appartient au cercle euclidien de diamètre  $[a_n + ib_n e^{d(z, z')}, a_n + ib_n e^{-d(z, z')}]$ . La longueur euclidienne de ce diamètre tend vers 0 donc  $(\gamma_n(z'))_{n \geq 1}$  converge vers  $x$ .

On appelle *ensemble limite* de  $\Gamma$ , le fermé de  $\mathbb{H}(\infty)$ , éventuellement réduit à l'ensemble vide, noté  $L(\Gamma)$  et défini par

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma z} \cap \mathbb{H}(\infty).$$

Cet ensemble ne dépend pas du choix de  $z$  et est invariant par  $\Gamma$ .

**Exercice 3.1.** Démontrer que si  $\gamma$  est une isométrie non elliptique de  $\Gamma$  alors  $L(\Gamma)$  contient les (ou le) points fixes de  $\gamma$ .

La proposition suivante relie la présence dans  $\Gamma$  d'isométries hyperboliques au cardinal de  $L(\Gamma)$ .

**Proposition 3.2.** *Si  $\Gamma$  contient au moins deux isométries hyperboliques n'ayant aucun point fixe en commun, alors  $L(\Gamma)$  contient une infinité d'éléments.*

- *Si toutes les isométries hyperboliques de  $\Gamma$  ont même axe, alors  $L(\Gamma)$  est réduit aux extrémités de cet axe.*
- *Si  $\Gamma$  ne contient aucune isométrie hyperbolique, alors ou bien  $L(\Gamma)$  est l'ensemble vide, ou bien  $L(\Gamma)$  est réduit à un point et  $\Gamma$  est engendré par une isométrie parabolique fixant ce point.*

*Démonstration.* Nous allons utiliser le fait suivant qui se déduit du lemme II.1.2 démontré dans le chapitre II :

*Si  $\Gamma$  contient deux isométries non elliptiques n'ayant aucun point fixe en commun, alors il contient une infinité d'isométries hyperboliques n'ayant aucun point fixe en commun.*

Le premier cas résulte de ce fait et de l'exercice 3.1.

Dans le deuxième cas, notons  $x$  et  $y$  les extrémités de l'axe commun. Ces deux points appartiennent à  $L(\Gamma)$  en tant que points fixes d'une isométrie hyperbolique  $h$  de  $\Gamma$ . Pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , l'isométrie  $\gamma h \gamma^{-1}$  fixe  $x$  et  $y$  donc  $\gamma$  préserve la géodésique  $(xy)$ , ce qui montre que ces deux points sont les seuls éléments de  $L(\Gamma)$ .

Il reste le cas où  $\Gamma$  ne contient pas d'isométrie hyperbolique. S'il contient une isométrie parabolique  $p$ , d'après le fait énoncé au début de la démonstration, pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , les isométries  $p$  et  $\gamma p \gamma^{-1}$  fixent le même point  $x$  de  $\mathbb{H}(\infty)$  donc  $\gamma(x) = x$ . Quitte à conjuguer  $\Gamma$  supposons  $x = \infty$ . Le groupe  $\Gamma$  est alors inclus dans le groupe des transformations de la forme  $az + b$  avec  $a > 0$ . Par ailleurs, il contient une translation et il est discret, donc  $\Gamma$  est engendré par une translation et  $L(\Gamma)$  est réduit au point  $\infty$ .

Il nous reste à analyser le cas où  $\Gamma$  ne contient que des isométries elliptiques. Si toutes sont d'ordre 2, le groupe  $\Gamma$  est abélien et même cyclique d'ordre 2, il fixe donc un unique point de  $\mathbb{H}$ . Sinon, plaçons-nous dans le modèle du disque. Quitte à conjuguer  $\Gamma$ , on peut supposer qu'il contient une isométrie de la forme  $r(z) = e^{i\theta}z$  avec  $\theta \neq k\pi$ . Soit  $g \in \Gamma$ . Posons  $g(z) = (az + b)/(\bar{b}z + \bar{a})$  avec  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ . Calculons la trace de  $rg r^{-1}g^{-1}$ . On a

$$\mathrm{tr}(rg r^{-1}g^{-1}) = 2 + 4|b|^2 \sin^2 \theta.$$

Puisque  $rg r^{-1}g^{-1}$  est elliptique (ou trivial), d'après la propriété 2.4, nécessairement  $b = 0$  et donc  $g(0) = 0$ . Par conséquent  $\Gamma$  est engendré par une isométrie elliptique et donc  $L(\Gamma) = \emptyset$ .  $\square$

**Exercice 3.3.** Démontrer que si  $L(\Gamma)$  est réduit à deux points, alors ou bien  $\Gamma$  est engendré par une isométrie hyperbolique, ou bien  $\Gamma$  contient un sous-groupe d'indice 2 de cette forme.

Dans le chapitre suivant, nous verrons que l'existence dans  $\Gamma$  de deux isométries non elliptiques n'ayant aucun point fixe en commun entraîne l'existence de sous-groupes libres non abéliens (lemme II.1.2). Le caractère infini de  $L(\Gamma)$  reflète donc le caractère non résoluble du groupe.

Un groupe fuchsien est dit *élémentaire* si son ensemble limite est fini.

**Proposition 3.4.** Si  $\Gamma$  n'est pas élémentaire alors  $L(\Gamma)$  est minimal, au sens où  $L(\Gamma)$  est le plus petit (pour l'inclusion) fermé non vide de  $\mathbb{H}(\infty)$  invariant par  $\Gamma$ .

*Démonstration.* Soit  $F$  un fermé non vide invariant par  $\Gamma$  inclus dans  $L(\Gamma)$ . Puisque  $\Gamma$  n'est pas élémentaire, il contient une infinité d'isométries hyperboliques  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  n'ayant aucun point fixe en commun. Le fermé  $F$  étant invariant par chaque  $\gamma_n$ , nécessairement  $\gamma_n^+$  et  $\gamma_n^-$  appartiennent à  $F$ . Fixons deux tels points  $\gamma_N^+, \gamma_N^-$  dans  $F$  et choisissons un point  $z$  sur la géodésique  $(\gamma_N^- \gamma_N^+)$ . Soient  $x$  un point de  $L(\Gamma)$  et  $(g_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $\Gamma$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(z) = x$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les suites  $(g_n(\gamma_N^-))_{n \geq 1}$  et  $(g_n(\gamma_N^+))_{n \geq 1}$  convergent vers des points  $f^-$  et  $f^+$



de  $F$ . Puisque  $g_n(z)$  appartient à la géodésique  $(g_n(\gamma_N^-)g_n(\gamma_N^+))$  nécessairement  $x$  appartient à  $\{f^-, f^+\}$ . Ceci montre que  $L(\Gamma)$  est inclus dans  $F$  et donc  $F = L(\Gamma)$ .  $\square$

**Exercice 3.5.** Démontrer que si  $\Gamma$  n'est pas élémentaire, alors aucun des points de  $L(\Gamma)$  n'est isolé.

Remarquons que si  $\Gamma$  n'est pas élémentaire,  $L(\Gamma)$  n'est pas dénombrable puisque cet ensemble est un fermé non vide ne contenant pas de points isolés.

**Exercice 3.6.** Démontrer que si  $L(\Gamma)$  est différent de  $\mathbb{H}(\infty)$ , il est totalement discontinu.

(Indication : utiliser la densité dans  $L(\Gamma)$  de l'orbite de tout point de  $L(\Gamma)$ .)

**3.2. Points horocycliques, coniques et paraboliques.** On distingue différentes sortes de points dans  $L(\Gamma)$  selon la façon dont ils sont approchés par une suite de  $\Gamma z$ . Commençons par analyser le cas d'un point attractif  $\gamma^+$  d'une isométrie hyperbolique  $\gamma$  de  $\Gamma$ . Quitte à conjuguer  $\Gamma$ , on peut supposer  $\gamma^+ = \infty$  et  $\gamma(z) = \lambda z$  avec  $\lambda > 1$ .

Soit  $H^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq a\}$  avec  $a > 0$ , un horodisque centré en  $\infty$ . On a  $\operatorname{Im}(\gamma^n(z)) = \lambda^n \operatorname{Im} z$  donc pour  $n$  grand,  $\gamma^n(z)$  appartient à  $H^+$  (figure 26).

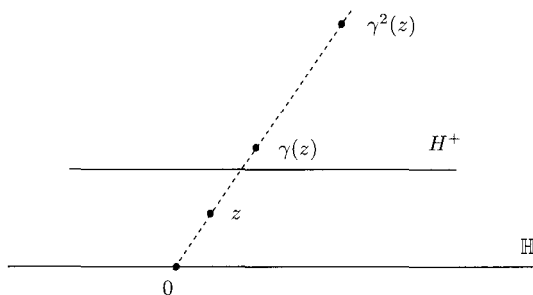


FIGURE 26

Plus généralement, on dit qu'un point  $x$  de  $L(\Gamma)$  est *horocyclique* si  $\Gamma z$  rencontre tous les horodisques centrés en  $x$ . On note  $L_h(\Gamma)$  l'ensemble de ces points. Dans la suite nous verrons que, si  $\Gamma$  n'est pas élémentaire, alors  $L_h(\Gamma)$  n'est pas dénombrable (lemme II.1.2 et corollaire II.1.7). Les points fixes des isométries hyperboliques ne représentent donc qu'une infime partie de cet ensemble.

L'exercice suivant propose une caractérisation des points horocycliques en termes de cocycles de Busemann.

**Exercice 3.7.** Démontrer qu'un point  $x$  de  $L(\Gamma)$  est horocyclique si et seulement si  $\sup_{\gamma \in \Gamma} B_x(z, \gamma(z)) = +\infty$ .

On déduit de cet exercice et des propriétés 1.13 que la définition des points horocycliques ne dépend pas du point  $z$  choisi.

Parmi les points horocycliques  $x$ , on distingue ceux approchés par une suite de  $\Gamma z$  restant à distance bornée du rayon géodésique  $[z, x]$ . Ces points sont appelés points *coniques*, leur ensemble est noté  $L_c(\Gamma)$  (figure 27). Cette terminologie provient de la forme des  $\varepsilon$ -voisinages des géodésiques verticales.

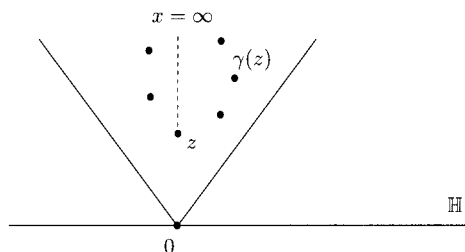


FIGURE 27

**Exercice 3.8.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Démontrer qu'il existe  $\varepsilon' > 0$  tel que  $d(z, (0\infty)) \leq \varepsilon$  si et seulement si  $|\operatorname{Re} z / \operatorname{Im} z| \leq \varepsilon'$  (figure 27).

(Indication : utiliser l'exercice 1.5.)

**Exercice 3.9.** Démontrer que la définition de point conique ne dépend pas de  $z$ .

(Indication : utiliser l'exercice 1.5.)

Les points coniques sont caractérisés par une propriété de leur orbite sous  $\Gamma$ .

**Exercice 3.10.** Démontrer que  $x$  est conique si et seulement s'il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que pour tout  $y$  dans  $\mathbb{H}(\infty)$  différent de  $x$ , la suite  $(\gamma_n(x), \gamma_n(y))_{n \geq 1}$  reste dans un compact de l'ensemble  $\mathbb{H}(\infty) \times \mathbb{H}(\infty)$  privé de la diagonale.

Le point fixe d'une isométrie hyperbolique de  $\Gamma$  est conique puisque, si  $z$  appartient à l'axe de cette isométrie, alors la suite  $(\gamma^n(z))_{n \geq 1}$  appartient aussi à cet axe.

Dans la suite du texte nous ferons une hypothèse de régularité sur le groupe  $\Gamma$  (voir paragraphe 4) qui entraînera l'égalité entre  $L_h(\Gamma)$  et  $L_c(\Gamma)$ . En général, cette égalité n'a pas lieu.

Donnons une caractérisation des points coniques en termes de distance et de cocycles de Busemann.

**Proposition 3.11.** *Soit  $z$  dans  $\mathbb{H}$ . Un point  $x$  de  $L(\Gamma)$  est conique si et seulement s'il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  vérifiant les deux conditions :*

- (i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_x(z, \gamma_n(z)) = +\infty$  ;
- (ii)  $(d(z, \gamma_n(z)) - B_x(z, \gamma_n(z)))_{n \geq 1}$  est une suite bornée.

*Démonstration.* Quitte à conjuguer  $\Gamma$ , on peut se ramener au cas où  $z = i$  et  $x = \infty$ .

Supposons que le point  $\infty$  soit conique. Il existe alors  $\varepsilon > 0$  et des suites  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  et  $(t_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{R}^+$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \quad \text{et} \quad d(it_n, \gamma_n(i)) \leq \varepsilon.$$

Le point  $\gamma_n(i)$  appartient au disque euclidien de diamètre  $[it_n e^\varepsilon, it_n e^{-\varepsilon}]$  donc le point  $z'_n = i \operatorname{Im} \gamma_n(i)$  appartient aussi à ce disque. Pour  $n$  grand,  $B_\infty(i, \gamma_n(i)) = d(i, z'_n)$  donc  $|d(i, \gamma_n(i)) - B_\infty(i, \gamma_n(i))| \leq d(\gamma_n(i), z'_n)$ . On conclut en remarquant que  $d(\gamma_n(i), z'_n)$  est inférieur à  $2\varepsilon$ .

Supposons à présent qu'il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  satisfaisant les conditions de la proposition 3.10. Pour  $n$  grand

$$B_\infty(i, \gamma_n(i)) = d(i, z'_n),$$

avec  $z'_n = i \operatorname{Im} \gamma_n(i)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z'_n = \infty$ .

Par ailleurs il existe  $A > 0$  tel que

$$|d(i, \gamma_n(i)) - \ln(\operatorname{Im} \gamma_n(i))| \leq A.$$

La suite  $(1/\sqrt{\operatorname{Im} \gamma_n(i)} e^{1/2d(i, \gamma_n(i))})_{n \geq 1}$  est donc majorée.

En utilisant l'exercice 1.5, on obtient que la suite  $(|i - \gamma_n(i)|/\operatorname{Im} \gamma_n(i))_{n \geq 1}$  est également majorée et donc qu'il existe  $A' > 0$  tel que

$$\left| \frac{\operatorname{Re} \gamma_n(i)}{\operatorname{Im} \gamma_n(i)} \right| \leq A'.$$

On déduit alors de l'exercice 3.7 que la suite  $(\gamma_n(i))_{n \geq 1}$  appartient à un  $\varepsilon$ -voisinage de  $[i, \infty)$ . □

La dernière catégorie de points que nous introduisons dans ce texte est celle des points *paraboliques*, c'est-à-dire des points fixes des isométries paraboliques de  $\Gamma$ . L'ensemble de ces points est noté  $L_p(\Gamma)$ .

Si  $x$  est fixé par une isométrie parabolique  $\gamma$  de  $\Gamma$ , la suite  $(\gamma^n(z))_{n \geq 1}$  converge vers  $x$  en restant sur l'horocycle centré en  $x$  passant par  $z$ .

Un point parabolique peut-il être horocyclique ? Pour répondre à cette question nous allons démontrer un résultat plus fort, portant sur l'image par  $\Gamma$  d'un horocycle centré en ce point.

**Théorème 3.12.** Soit  $x$  un point de  $L_p(\Gamma)$ . Il existe un horodisque  $H^+(x)$  centré en  $x$  tel que

$$\gamma H^+(x) \cap H^+(x) = \emptyset,$$

pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$  ne fixant pas  $x$  (figure 28).

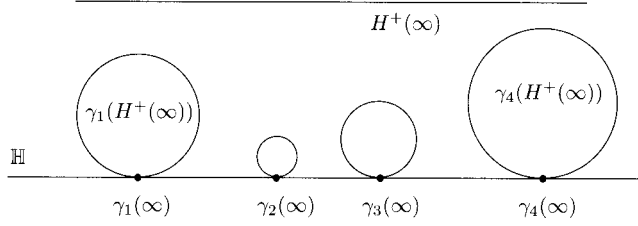


FIGURE 28

Avant de démontrer ce théorème, remarquons qu'il entraîne que les ensembles  $L_h(\Gamma)$  et  $L_p(\Gamma)$  sont disjoints. En effet, si  $x$  est parabolique, choisissons  $z$  sur un horodisque  $H^+(x)$  donné par le théorème 3.12. L'orbite sous  $\Gamma$  de  $z$  ne rencontre aucun horodisque centré en  $x$  strictement inclus dans  $H^+(x)$  donc  $x$  ne peut pas être horocyclique.

Il suffit de démontrer le théorème 3.12 dans le cas particulier où  $x = \infty$ . Pour cela nous allons utiliser deux résultats portant sur le diamètre euclidien de l'image d'un horodisque centré au point  $\infty$  par une isométrie  $g$  ne fixant pas ce point.

Posons  $H_t^+(\infty) = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} z \geq t\}$  et  $g(z) = (az + b)/(cz + d)$ , avec  $ad - bc = 1$ . Remarquons que le coefficient  $c$  n'est pas nul.

**Lemme 3.13.** Le diamètre euclidien de  $g(H_t^+(\infty))$  est égal à  $1/c^2 t$ .

*Démonstration.* L'image par  $g$  de  $H_t^+(\infty)$  est le disque passant par  $g(it)$  tangent à l'axe réel en  $a/c = g(\infty)$  (figure 29). Notons  $\delta$  son diamètre

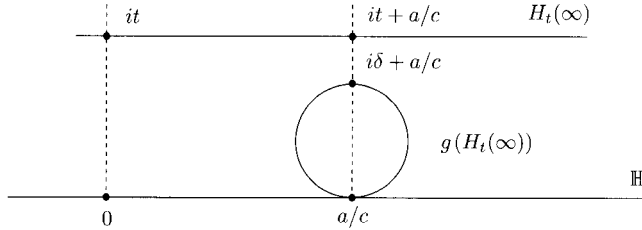


FIGURE 29

euclidien. On a

$$B_{g(\infty)}((it + a/c), a/c + i\delta) = \ln \delta/t$$

donc,  $B_\infty(g^{-1}(it + a/c), g^{-1}(a/c + i\delta)) = \ln \delta/t$ .

Par ailleurs le point  $a/c + i\delta$  appartient à  $g(H_t(\infty))$  et  $a/c + it$  appartient à  $H_t(\infty)$ , donc  $B_\infty(g^{-1}(it + a/c), g^{-1}(a/c + i\delta)) = B_\infty(g^{-1}(it + a/c), a/c + i\delta)$ . Ainsi

$$\ln t/\delta = \ln \frac{t}{\operatorname{Im} g^{-1}(a/c + it)},$$

ce qui entraîne l'égalité  $\delta = 1/c^2(g)t$ .  $\square$

Posons  $c(g) = |c|$ . Remarquons que  $c(g) = 0$  si et seulement si  $g$  fixe le point  $\infty$  et que, si  $t$  est une translation,  $c(t^n g t^m) = c(g)$  pour tout  $n, m$ .

**Proposition 3.14.** *Si  $\Gamma$  contient une translation non triviale, alors il existe  $A > 0$  tel que  $c(\gamma) \geq A$  pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$  ne fixant pas le point  $\infty$ .*

*Démonstration.* Soit  $t(z) = z + \alpha$ , avec  $\alpha > 0$ , une translation de  $\Gamma$ . Supposons qu'il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que  $\gamma_n(\infty) \neq \infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c(\gamma_n) = 0$ . Écrivons  $\gamma_n$  sous la forme  $\gamma_n(z) = (a_n z + b_n)/(c_n z + d_n)$  avec  $a_n d_n - b_n c_n = 1$  et  $c_n > 0$ . Considérons la partie entière,  $e_n$ , de  $a_n/\alpha c_n$  et celle,  $e'_n$ , de  $d_n/\alpha c_n$ . Posons  $g_n = t^{-e'_n} \gamma_n t^{-e_n}$ , on a

$$g_n(z) = \frac{(a_n - c_n e_n \alpha)z + b'_n}{c_n z + (-c_n e'_n \alpha + d_n)}.$$

La suite  $(c_n)_{n \geq 1}$  est bornée et on a les inégalités  $0 < a_n - c_n e_n \alpha < c_n \alpha$ ,  $0 < d_n - c_n e'_n \alpha < c_n \alpha$  donc la suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  est bornée. Le groupe  $\Gamma$  étant discret, l'ensemble  $\{g_n \mid n \geq 1\}$  est fini. Donc à partir d'un certain rang  $c(\gamma_n) = 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.11.* Quitte à conjuguer  $\Gamma$ , on peut supposer que  $x$  est le point  $\infty$  et donc que  $\Gamma$  contient une translation non triviale. D'après la proposition 3.14, il existe  $A > 0$  tel que  $c(\gamma) > A$  pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$  ne fixant pas le point  $\infty$ . Prenons  $t = 2/A$ . D'après le lemme 3.13, l'image par  $\gamma$  de l'horodisque  $H_t(\infty)$  est un cercle de diamètre euclidien  $A/2c^2(\gamma)$  tangent à l'axe réel. Ce diamètre est inférieur à  $1/2A$  donc ce cercle ne rencontre pas  $H_t(\infty)$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Soit  $y$  un point de  $\overline{\mathbb{H}}$ . On note  $\Gamma_y$  le stabilisateur de  $y$  dans  $\Gamma$ .

**Exercice 3.15.** Démontrer que  $\Gamma_y$  est cyclique.

Si  $x$  est un point de  $L_p(\Gamma)$ , le groupe  $\Gamma_x$  étant engendré par une isométrie parabolique, il préserve chaque horodisque centré en  $x$ . Fixons un

horodisque  $H^+(x)$  donné par le théorème 3.12 et introduisons la projection  $q$  de  $\Gamma_x \backslash H^+(x)$  sur la surface  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ . Cette application est injective. En effet si  $q(\Gamma_x(y)) = q(\Gamma_x(y'))$ , il existe  $\gamma$  dans  $\Gamma$  tel que  $y' = \gamma(y)$ , donc  $H^+(x) \cap \gamma H^+(x) \neq \emptyset$ . Par conséquent,  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_x$  et  $\Gamma_x(y) = \Gamma_x(y')$ .

**Définition 3.16.** L'image, notée  $C(H^+(x))$ , de  $\Gamma_x \backslash H^+(x)$  par  $q$  est appelée cuspide associée à  $x$ .

Pour visualiser la forme d'une cuspide, il suffit de se ramener au cas où  $x = \infty$ . Dans ce cas, d'après l'exercice 2.16, une cuspide  $C(H^+(\infty))$  est homéomorphe à une bande verticale  $B = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq a, \operatorname{Im} z \geq t\}$  (figure 30) dont on a identifié les côtés verticaux (figure 31).

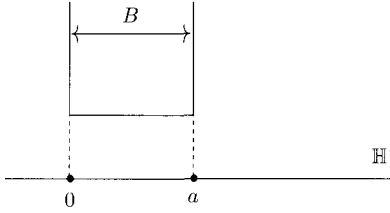


FIGURE 30

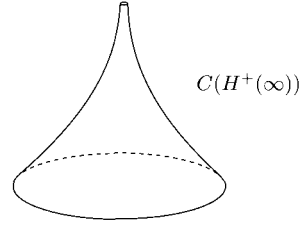


FIGURE 31

#### 4. Finitude géométrique

Le but de ce paragraphe est de généraliser la notion de réseaux en adoptant deux points de vue : l'un reposant sur la géométrie d'un domaine de Dirichlet, l'autre sur la nature des points de l'ensemble limite.

Commençons par étudier l'ensemble limite d'un réseau.

##### 4.1. Ensemble limite d'un réseau.

**Proposition 4.1.** *L'ensemble limite d'un réseau est égal à  $\mathbb{H}(\infty)$ . Si le réseau est uniforme, alors l'ensemble des points paraboliques est vide, sinon cet ensemble contient un nombre fini d'orbites sous l'action du groupe.*

La démonstration de cette proposition repose sur des propriétés du bord à l'infini d'un domaine de Dirichlet  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  associé à un groupe fuchsien quelconque  $\Gamma$ .

**Lemme 4.2.** *Un point  $x$  de  $\mathbb{H}(\infty)$  appartient à  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  si et seulement si*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} B_x(z, \gamma(z)) = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $r : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}$  le paramétrage par longueur d'arc du rayon géodésique  $[z, x)$ .

Supposons  $\sup_{\gamma \in \Gamma} B_x(z, \gamma(z)) = 0$ . À chaque  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , on associe la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{H}$  définie par  $f(t) = t - d(\gamma(z), r(t))$ . Cette fonction est croissante car si  $s > t$ , on a  $d(\gamma(z), r(s)) \leq d(\gamma(z), r(t)) + s - t$ . Par ailleurs  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = B_x(z, \gamma(z))$  et  $B_x(z, \gamma(z))$  est négatif, donc  $f(t) \leq 0$ , pour tout  $t$ . Ceci montre que  $[z, x)$  est inclus dans  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  et donc que  $x$  appartient à  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ .

Réciproquement, supposons que  $x$  soit limite d'une suite de points  $(z_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ . Comme  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est convexe, on peut supposer que la suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  appartient au rayon  $[z, x)$ . Le point  $z_n$  appartient à  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ , donc pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$  on a  $d(z, z_n) - d(\gamma(z), z_n) \leq 0$ . Par passage à la limite on obtient  $B_x(z, \gamma(z)) \leq 0$  pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , et donc  $\sup_{\gamma \in \Gamma} B_x(z, \gamma(z)) = 0$ .  $\square$

Les points de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  sont donc caractérisés géométriquement par le fait que  $\Gamma z$  ne rencontre pas l'intérieur de l'horodisque centré en  $x$  passant par  $z$ .

**Corollaire 4.3.** *Soit  $x$  un point de  $\mathbb{H}(\infty)$ . Si  $x$  n'appartient pas à  $L(\Gamma)$  ou si  $x$  appartient à  $L_p(\Gamma)$ , alors  $\Gamma x$  rencontre  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'il existe  $g$  dans  $\Gamma$  tel que

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} B_{g(x)}(z, \gamma(z)) = 0.$$

Ceci revient à montrer que la quantité  $S = \sup_{\gamma \in \Gamma} B_x(z, \gamma(z))$  est égale à  $B_x(z, g^{-1}(z))$ . Remarquons que  $S$  est nécessairement fini puisque, dans les deux cas, le point  $x$  n'est pas un point horocyclique.

Supposons qu'il existe  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  tel que la suite  $(B_x(z, \gamma_n(z)))_{n \geq 1}$  ne soit pas stationnaire et converge vers  $S$ .

Si  $x$  n'appartient pas à  $L(\Gamma)$ , on obtient une contradiction car pour  $n$  grand,  $\gamma_n(z)$  appartient à l'horodisque  $H_{e_{S-1}}^+(x)$ . L'intersection de cet horodisque avec  $\mathbb{H}(\infty)$  est  $x$ , donc la suite  $(\gamma_n(z))_{n \geq 1}$  converge vers  $x$ .

Si  $x$  est parabolique, quitte à conjuguer  $\Gamma$ , on peut supposer  $x = \infty$ . Par hypothèse, il existe  $A$  et  $B$  strictement positifs tels que

$$A \leq \text{Im } \gamma_n(z) \leq B.$$

Soit  $t$  une translation non triviale de  $\Gamma$ . Pour chaque  $n$ , il existe un entier  $k_n$  pour lequel la suite  $(t^{k_n} \gamma_n(z))_{n \geq 1}$  est bornée.

Le groupe  $\Gamma$  est fuchsien donc l'ensemble  $\{t^{k_n} \gamma_n(z) \mid n \geq 1\}$  est fini, ce qui est impossible car la suite  $(B_\infty(z, t^{k_n} \gamma_n(z)))_{n \geq 1}$  n'est pas stationnaire.  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.1.* Si  $\Gamma$  est un réseau uniforme, la proposition 4.1 est une conséquence immédiate du corollaire 4.3 puisque dans ce cas  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est un compact de  $\mathbb{H}$ .

Si  $\Gamma$  n'est pas uniforme, nous allons démontrer que  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  est un ensemble fini.

Supposons que ce ne soit pas le cas, et considérons une infinité de points  $(x_n)_{n \geq 1}$  appartenant à cet ensemble. Chaque  $x_n$  est limite d'une suite de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ . Or ce domaine est convexe donc le rayon  $[z, x_n)$  est inclus dans  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$ . Soit  $T_n$  le triangle hyperbolique de sommets  $z, x_n, x_{n+1}$ . Quitte à renuméroter les  $(x_n)_{n \geq 1}$  on peut supposer que les triangles  $T_n$  sont adjacents. Notons  $\alpha_n$  la mesure de l'angle de  $T_n$  en  $z$ . L'aire de  $T_n$  est

$$\mathcal{A}(T_n) = \pi - \alpha_n.$$

Par ailleurs les triangles  $T_n$  étant adjacents, on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \leq 2\pi$ . Pour tout  $N \geq 1$ , la réunion  $\bigcup_{n=1}^N T_n$  est incluse dans  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  et  $\mathcal{A}(\bigcup_{n=1}^N T_n) \geq N\pi - 2\pi$ , ce qui est impossible car l'aire de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est finie.

On déduit de la finitude de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  l'égalité entre  $L(\Gamma)$  et  $\mathbb{H}(\infty)$ , car si ces deux ensembles étaient différents, d'après le corollaire 4.3, le bord à l'infini d'un domaine de Dirichlet contiendrait une infinité d'éléments.

On obtient, toujours d'après le même corollaire, que l'ensemble des points paraboliques d'un réseau uniforme est vide, et que celui d'un réseau non uniforme contient un nombre fini d'orbites sous  $\Gamma$ .  $\square$

Le fait que l'ensemble limite d'un réseau  $\Gamma$  soit égal à  $\mathbb{H}(\infty)$  entraîne que  $\mathbb{H}$  est le plus petit fermé convexe non vide de  $\mathbb{H}$  invariant par  $\Gamma$ . En effet, soit  $E$  un tel ensemble, puisque  $E$  est invariant par  $\Gamma$ , son bord à l'infini l'est aussi. Par ailleurs  $L(\Gamma)$  est minimal donc  $E(\infty) = \mathbb{H}(\infty)$ . L'ensemble  $E$  étant convexe, nécessairement  $E = \mathbb{H}$ .

Remarquons que seule l'hypothèse  $L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$  a été utilisée. L'égalité entre  $E$  et  $\mathbb{H}$  est donc valable pour tous les groupes fuchsien vérifiant cette hypothèse.

**4.2. Finitude géométrique et domaines de Dirichlet.** Considérons à présent un groupe fuchsien quelconque  $\Gamma$  de  $\mathbb{H}$  et introduisons l'ensemble  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$  des points de  $\mathbb{H}$  appartenant aux géodésiques dont les extrémités sont dans  $L(\Gamma)$ . Cet ensemble est un fermé invariant par  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  est un réseau, alors  $\tilde{\Omega}(\Gamma) = \mathbb{H}$ . Si  $\Gamma$  est élémentaire, alors, d'après la proposition 3.2, ou bien  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$  est vide, ou bien cet ensemble est une géodésique.

On appelle *région de Nielsen* de  $\Gamma$  l'enveloppe convexe, au sens des segments hyperboliques, de  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$ , on la note  $N(\Gamma)$ .

Si  $L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$  alors  $N(\Gamma) = \mathbb{H}$ .



Ce n'est pas le cas si  $L(\Gamma)$  est différent de  $\mathbb{H}(\infty)$ . En effet, supposons que  $\Gamma$  ne soit pas élémentaire et considérons un intervalle ouvert non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$  ne rencontrant pas  $L(\Gamma)$ , dont les extrémités appartiennent à  $L(\Gamma)$ . Les images de  $I$  par les isométries non triviales de  $\Gamma$  sont deux à deux disjointes. Soit  $P$  le demi-plan fermé de  $\mathbb{H}$  bordé par la géodésique dont les extrémités sont celles de  $I$  et dont le bord à l'infini est  $\mathbb{H}(\infty) - I$ . Ce demi-plan contient  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$ . L'intersection des images de  $P$  par les éléments de  $\Gamma$  est un fermé convexe de  $\mathbb{H}$  invariant par  $\Gamma$ , différent de  $\mathbb{H}$ .

Remarquons que si  $\Gamma$  est élémentaire,  $N(\Gamma)$  est l'ensemble vide ou est réduit à une géodésique, dans tous les autres cas, l'intérieur de cet ensemble n'est pas vide.

**Définition 4.4.** On dit que  $\Gamma$  est géométriquement fini s'il existe un domaine de Dirichlet dont l'intersection avec la région de Nielsen de  $\Gamma$  a une aire finie.

Un groupe élémentaire est géométriquement fini.

Si  $L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$ , le groupe  $\Gamma$  est géométriquement fini si et seulement si  $\Gamma$  est un réseau.

La région de Nielsen d'un groupe fuchsien est pavée par les images de son intersection avec un domaine de Dirichlet. L'action d'un groupe géométriquement fini sur cette région se comporte donc comme celle d'un réseau sur  $\mathbb{H}$ .

Parmi les groupes géométriquement finis, on distingue ceux dont l'action sur  $N(\Gamma)$  est cocompacte.

**Définition 4.5.** Un groupe fuchsien est dit convexe-cocompact s'il existe un domaine de Dirichlet dont l'intersection avec la région de Nielsen du groupe est compacte.

Peut-on lire la finitude géométrique d'un groupe directement sur la forme de l'un de ses domaines de Dirichlet ? Pour répondre à cette question introduisons la notion de côtés d'un domaine de Dirichlet.

Soient  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  un tel domaine et  $\gamma$  un élément non trivial de  $\Gamma$ . L'intersection de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  avec  $\gamma(\mathcal{D}_z(\Gamma))$ , lorsqu'elle n'est pas vide, est incluse dans la médiatrice  $M_\gamma$  de  $[z, \gamma(z)]_h$ . C'est un point, un segment géodésique non trivial, un rayon géodésique ou une géodésique. Dans les trois derniers cas, on dit que cette intersection est un *côté*.

Les *sommets* sont les extrémités des côtés. Un *sommet infini* est un sommet appartenant à  $\mathbb{H}(\infty)$ .

Le groupe  $\Gamma$  étant dénombrable, l'ensemble des côtés, et donc des sommets, de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  l'est aussi.

On note  $(C_i)_{i \in I}$  avec  $I$  inclus dans  $\mathbb{N}$ , la suite (éventuellement finie) des côtés de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  et  $\gamma_i$  l'unique élément de  $\Gamma$  tel que  $C_i$  soit inclus dans  $M_{\gamma_i}$ .

**Exercice 4.6.** Démontrer que  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est égal à l'intersection des demi-plans  $\mathbb{H}_z(\gamma_i)$  avec  $i$  dans  $I$ .

**Exercice 4.7.** On suppose que  $I$  est fini et que  $\Gamma$  n'est pas élémentaire. Démontrer que l'aire de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est infinie si et seulement si  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  contient un intervalle fermé dont les extrémités sont deux sommets infinis différents.

On suppose à présent que  $\Gamma$  n'est pas élémentaire et que  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  a un nombre fini de côtés. Si l'aire de ce domaine est fini, alors  $\Gamma$  est géométriquement fini. Sinon, d'après l'exercice 4.7, il existe un intervalle fermé  $J$  inclus dans  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  dont les extrémités sont deux sommets infinis différents.

Considérons la suite finie  $(J_j)_{1 \leq j \leq k}$  de tous ces intervalles. Les points de  $L(\Gamma)$  n'étant pas isolés, ces intervalles sont deux à deux disjoints. Notons  $L_j$  la géodésique dont les extrémités sont celles de  $J_j$ , et  $\mathbb{H}_j$  le demi-plan fermé (dans  $\mathbb{H}$ ) bordé par  $L_j$  dont le bord à l'infini est  $(\mathbb{H}(\infty) - J_j)$ . Ce demi-plan contient  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$  donc  $N(\Gamma)$  est inclus dans l'intersection des  $\gamma(\mathbb{H}_j)$  avec  $\gamma$  dans  $\Gamma$  et  $1 \leq j \leq k$ . Par conséquent  $N(\Gamma) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma)$  est inclus dans le polygone bordé par les  $(C_i)_{i \in I}$  et les  $(L_j)_{1 \leq j \leq k}$  (figure 32). L'aire de ce polygone est finie donc  $\Gamma$  est géométriquement fini.

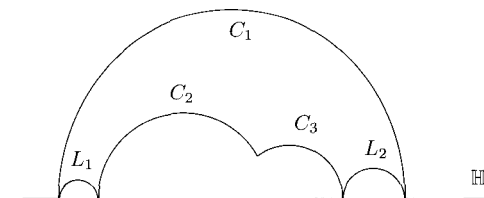


FIGURE 32

En conclusion, nous obtenons que si  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  a un nombre fini de côtés, alors le groupe  $\Gamma$  est géométriquement fini. La réciproque est vraie. Sa démonstration, plus technique, nécessite une étude des sommets d'un domaine de Dirichlet que nous avons décidé de ne pas développer dans ce texte. Nous renvoyons donc le lecteur à la démonstration proposée par A. Beardon.

**Théorème 4.8** ((i)  $\Rightarrow$  (ii) [6, Theorem 10.1.2]). Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien non élémentaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) l'aire de  $\mathcal{D}_z(\Gamma) \cap N(\Gamma)$  est finie ;
- (ii) le domaine de Dirichlet  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  a un nombre fini de côtés.

**4.3. Finitude géométrique et points limites.** La proposition suivante est à mettre en parallèle avec la proposition 4.1.

**Proposition 4.9.** *Soit  $\Gamma$  un groupe géométriquement fini.*

- (i) *L'ensemble  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty) \cap L(\Gamma)$  est fini.*
- (ii) *L'ensemble  $L_p(\Gamma)$  contient un nombre fini d'orbites sous l'action de  $\Gamma$ .*
- (iii) *Pour tout  $x \in L_p(\Gamma)$ , il existe  $\gamma \in \Gamma$ , tel que  $\gamma(x) \in \mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ .*

**Exercice 4.10.** Démontrer la proposition 4.9.

(Indication : reprendre les arguments de la démonstration de la proposition 4.1 et utiliser le corollaire 4.3.)

Notons  $P_z(\Gamma)$  l'intersection de  $L_p(\Gamma)$  avec  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ . Si le groupe est géométriquement fini, cet ensemble est fini d'après la proposition 4.9. Dans tous les cas il est dénombrable car  $\Gamma$  l'est. De plus les points de  $P_z(\Gamma)$  sont isolés dans  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ . En effet supposons que le point  $\infty$  appartienne à  $P_z(\Gamma)$ . Dans ce cas le groupe contient une translation non triviale  $t$ , et  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est inclus dans la bande verticale bordée par les deux médiatrices  $M_t$  et  $M_{t^{-1}}$  des segments  $[z, t(z)]_h$  et  $[z, t^{-1}(z)]_h$ . L'ensemble  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  privé du point  $\infty$  est donc inclus dans un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , ce qui montre que ce point est isolé.

On associe à chaque point  $x$  de  $P_z(\Gamma)$  un horodisque  $H^+(x)$  centré en  $x$  satisfaisant la condition du théorème 3.11

$$H^+(x) \cap \gamma H^+(x) = \emptyset,$$

pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$  ne fixant pas  $x$ .

Les points de  $P_z(\Gamma)$  étant isolés, on peut choisir les horodisques  $H^+(x)$  deux à deux disjoints.

**Proposition 4.11.** *Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien non élémentaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le groupe  $\Gamma$  est géométriquement fini ;*
- (ii) *le domaine  $E_z = \mathcal{D}_z(\Gamma) \cap N(\Gamma) - \bigcup_{x \in P_z(\Gamma)} H^+(x) \cap \mathcal{D}_z(\Gamma) \cap N(\Gamma)$  est relativement compact dans  $\mathbb{H}$ .*

*Démonstration.* Nous allons démontrer cette proposition en remplaçant l'assertion (i) par l'assertion (ibis) suivante :

- (ibis) *le domaine de Dirichlet  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  a un nombre fini de côtés.*

Ces deux assertions sont équivalentes d'après le théorème 4.8.

On rappelle (exercice 2.6) que  $D(\gamma)$  est le demi-plan fermé bordé par la médiatrice  $M_\gamma$  du segment  $[z, \gamma(z)]_h$  contenant  $\gamma(z)$ , et qu'il vérifie

$$\gamma(\overset{\circ}{D}(\gamma^{-1})) = \mathbb{H} - D(\gamma).$$

On note  $C(\gamma)$  l'intersection de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  avec  $\gamma\mathcal{D}_z(\Gamma)$ , si cette intersection est un côté.

(ibis)  $\Rightarrow$  (ii). Si tous les sommets de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  sont dans  $\mathbb{H}$ , ce domaine est un compact de  $\mathbb{H}$  donc  $\overline{E_z}$  l'est aussi.

Supposons à présent qu'il existe un sommet infini  $x$  et montrons que si  $x$  appartient à  $L(\Gamma)$ , alors  $x$  est parabolique.

Les points de  $L(\Gamma)$  n'étant pas isolés, il existe une suite non stationnaire  $(x_n)_{n \geq 1}$  de  $L(\Gamma)$  convergeant vers  $x$ . D'après la proposition 4.9, on peut supposer que cette suite ne rencontre pas  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  et donc qu'il existe  $\gamma_1$  dans  $\Gamma$  tel que  $x$  soit une extrémité de  $C(\gamma_1^{-1})$  et tel que  $D(\gamma_1^{-1})$  contienne une suite extraite, encore notée suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  (figure 33).

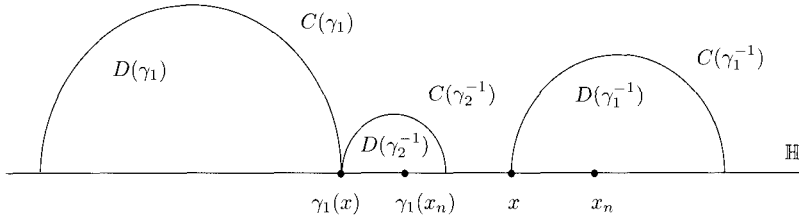


FIGURE 33

L'image par  $\gamma_1$  de  $C(\gamma_1^{-1})$  est le côté  $C(\gamma_1)$  donc  $\gamma_1(x)$  est une extrémité de  $C(\gamma_1)$ . Par ailleurs la suite  $(\gamma_1(x_n))_{n \geq 1}$  converge vers  $\gamma_1(x)$ , appartient à  $L(\Gamma)$ , et ne rencontre pas  $D(\gamma_1)(\infty)$ , donc il existe  $\gamma_2^{-1}$  différent de  $\gamma_1$  tel que  $\gamma_1(x)$  soit une extrémité du côté  $C(\gamma_2^{-1})$ . Supposons que  $x$  ne soit pas parabolique. Dans ce cas, d'après l'exercice 2.6, l'isométrie  $\gamma_2^{-1}$  est différente de  $\gamma_1^{-1}$ .

En remplaçant dans le raisonnement précédent  $x$  par  $\gamma_1(x)$  et  $\gamma_1$  par  $\gamma_2$ , on obtient un élément  $\gamma_3$  dans  $\Gamma - \{\gamma_2^{\pm 1}, \text{Id}\}$  tel que  $\gamma_2\gamma_1(x)$  appartienne au bord à l'infini de  $D(\gamma_2)$ . De proche en proche, on construit une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma - \{\text{Id}\}$  vérifiant

$$\gamma_n \cdots \gamma_1(x) \in D_z(\Gamma)(\infty) \cap L(\Gamma) \quad \text{et} \quad \gamma_{n+1} \neq \gamma_n^{\pm 1}.$$

Puisque  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  a un nombre fini de côtés, l'ensemble des points de cette suite est fini. Il existe donc deux entiers  $m > n$  tels que  $\gamma_m \cdots \gamma_1(x) = \gamma_n \cdots \gamma_1(x)$ . Le point  $x$  n'étant ni parabolique, ni horocyclique, d'après le lemme 4.2, nécessairement  $\gamma_m \cdots \gamma_{n+1} = \text{Id}$ .

Analysons l'image de  $z$  par cet élément. Le point  $\gamma_{n+1}(z)$  appartient au demi-plan ouvert  $\mathring{D}(\gamma_{n+1})$ . Par ailleurs les demi-plans  $\mathring{D}(\gamma_{n+1})$  et  $\mathring{D}(\gamma_{n+2})$  sont disjoints donc  $\gamma_{n+2}\gamma_{n+1}(z)$  appartient à  $D(\gamma_{n+2})$ . En réitérant ce raisonnement, on obtient que le point  $\gamma_m \cdots \gamma_{n+1}(z)$  appartient à  $\mathring{D}(\gamma_m)$ , ce qui contredit l'égalité  $\gamma_m \cdots \gamma_{n+1}(z) = z$ . En conclusion,  $x$  est parabolique.

Supposons à présent que  $\overline{E_z}$  ne soit pas compact et considérons  $y$  dans  $\overline{E_z} \cap \mathbb{D}(\infty)$ . Un tel point n'appartient pas à  $L(\Gamma)$ . En effet, sinon  $y$  est l'extrémité d'un côté de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  donc, d'après le raisonnement précédent,  $y$  est parabolique. Soit  $p$  un générateur de  $\Gamma_y$ . Le domaine  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est inclus dans  $\mathbb{H} - (\mathring{D}(p) \cup \mathring{D}(p^{-1}))$ . L'ensemble  $E_z$  est donc inclus dans l'ensemble  $A = \mathbb{H} - (\mathring{D}(p) \cup \mathring{D}(p^{-1}) \cup H^+(y))$ , ce qui est impossible car  $A(\infty)$  ne contient pas  $y$ .

Puisque  $y$  n'appartient pas à  $L(\Gamma)$ , il est contenu dans un intervalle ouvert  $I$  ne rencontrant pas  $L(\Gamma)$  dont les extrémités appartiennent à  $L(\Gamma)$ . Soit  $P$  le demi-plan fermé bordé par la géodésique dont les extrémités sont celles de  $I$  et dont le bord à l'infini est  $(\mathbb{H}(\infty) - I)$ . Ce demi-plan contient  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$  donc  $N(\Gamma)$  est inclus dans l'intersection des  $\gamma(P)$ , avec  $\gamma$  dans  $\Gamma$ . Ceci est impossible car  $y$  appartient à  $N(\Gamma)(\infty)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (ibis). Plaçons nous dans le modèle du disque de Poincaré.

Supposons que  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  ait une infinité de côtés  $(C(\gamma_n))_{n \geq 1}$ . Cette suite de côtés converge vers un point  $x$  de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ . En effet, le groupe  $\Gamma$  agit proprement discontinûment sur  $\mathbb{H}$  donc la suite des médiatrices  $M_{\gamma_n}$  des segments  $[z, \gamma_n(z)]_h$  converge vers un point. Par ailleurs  $\gamma_n(z)$  appartient à  $D(\gamma_n)$  donc  $x$  appartient à  $L(\Gamma)$ . Un tel point appartient à  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  et est nécessairement parabolique puisque  $\overline{E_z}$  est compact. Soit  $p$  un générateur de  $\Gamma_x$ . Le domaine  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est inclus dans  $\mathbb{H} - (\mathring{D}(p) \cup \mathring{D}(p^{-1}))$  et  $C(\gamma_n)$  en est un côté. La suite  $(M_{\gamma_n})_{n \geq 1}$  converge vers  $x$  donc, pour  $n$  grand, la géodésique  $M_{\gamma_n}$  coupe  $M_p$  et  $M_{p^{-1}}$ , et  $D(\gamma_n)(\infty)$  contient un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{H}(\infty)$ . Ceci contredit le fait que  $x$  appartient à  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$ .  $\square$

Cette proposition va nous permettre de donner une caractérisation de la finitude géométrique d'un groupe, portant sur la nature des points de l'ensemble limite du groupe.

**Théorème 4.12.** *Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le groupe  $\Gamma$  est géométriquement fini ;*
- (ii)  *$L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_h(\Gamma)$  ;*
- (iii)  *$L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_c(\Gamma)$ .*

*Démonstration.* Si  $\Gamma$  est un groupe élémentaire, la démonstration de ces équivalences est évidente. On suppose donc à présent que  $\Gamma$  n'est pas élémentaire.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) est immédiat car  $L_c(\Gamma)$  est inclus dans  $L_h(\Gamma)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). La démonstration de cette implication correspond à la démonstration de la partie (ii)  $\Rightarrow$  (ibis) de la proposition 4.11. En effet, nous avons montré que si  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  admet une infinité de côtés, ce qui revient à supposer, d'après le théorème 4.8, que  $\Gamma$  n'est pas géométriquement fini, alors  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  contient un point non parabolique de  $L(\Gamma)$ . Un tel point ne peut pas être horocyclique d'après le lemme 4.2, donc  $L(\Gamma)$  est différent de  $L_p(\Gamma) \cup L_h(\Gamma)$ .

(i)  $\Rightarrow$  (iii). Plaçons-nous dans le modèle du disque de Poincaré.

D'après la proposition 4.11, il existe un domaine  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  tel que  $\overline{E}_z$  soit compact dans  $\mathbb{D}$ . D'après la proposition 4.9, l'intersection, notée  $P_z(\Gamma)$ , de  $L_p(\Gamma)$  avec  $\mathcal{D}_z(\Gamma)(\infty)$  est finie.

Montrons que l'on peut supposer les horodisques  $(\gamma(H^+(x)))_{\gamma \in \Gamma, x \in P_z(\Gamma)}$  disjoints ou confondus. Soient  $x \in P_z(\Gamma)$  et  $y \in (P_z(\Gamma) - \Gamma(x))$ . Considérons l'ensemble  $A$  des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $\gamma H^+(x) \cap H^+(y) \neq \emptyset$  et l'ensemble  $B$  des doubles classes  $\Gamma_y \backslash A / \Gamma_x$ . Si  $B$  est fini, il suffit de remplacer  $H^+(x)$  par un horodisque de rayon euclidien plus petit que celui de  $H^+(x)$  pour que  $\gamma H^+(x) \cap H^+(y) = \emptyset$  quel que soit  $\gamma \in \Gamma$ . Sinon, considérons une suite  $(b_n = \Gamma_y a_n \Gamma_x)_{n \geq 1}$  avec  $a_n \in A$ , d'éléments tous différents de  $B$ . Fixons un domaine fondamental compact  $K$  pour l'action de  $\Gamma_y$  sur  $H(y)$ . Pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $p_n \in \Gamma_y$  tel que  $p_n a_n H(x) \cap K \neq \emptyset$ . Les horocycles  $(p_n a_n H(x))_{n \geq 1}$  sont deux à deux disjoints et rencontrent  $K$ , ce qui est impossible.

En conclusion,  $B$  est fini et donc les horodisques  $(\gamma(H^+(x)))_{\gamma \in \Gamma, x \in P_z(\Gamma)}$  peuvent être supposés disjoints ou confondus.

Montrons à présent qu'un point  $y$  dans  $(L(\Gamma) - L_p(\Gamma))$  est conique. Soit  $z'$  dans  $\mathbb{D}$  tels que  $[z', y)$  soit inclus dans  $N(\Gamma)$ . Puisque  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  est un domaine fondamental, le rayon  $[z', y)$  est inclus dans la réunion  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{D}_z(\Gamma)) \cap [z', y)$ . Supposons qu'il existe  $z''$  dans  $[z', y)$  tel que  $[z'', y)$  soit inclus dans  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma, x \in P_z(\Gamma)} \gamma(H^+(x))$ . Puisque les horodisques  $(\gamma(H^+(x)))_{\gamma \in \Gamma, x \in P_z(\Gamma)}$  sont confondus ou disjoints, le rayon  $[z'', y)$  est inclus dans un tel horodisque, ce qui est impossible car  $y$  n'est pas parabolique.

On déduit de ce raisonnement qu'il existe une suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  de  $[z', y)$  convergeant vers  $y$ , et  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  tels que  $z_n$  appartienne à  $\gamma_n(\overline{E}_z)$ . L'ensemble  $\overline{E}_z$  étant compact, la suite  $(\gamma_n(z'))_{n \geq 1}$  converge donc vers  $y$  en restant dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $[z', y)$ . Ceci montre que  $y$  est conique.  $\square$

Le corollaire suivant donne une caractérisation en termes de points à l'infini des groupes convexes-cocompacts et des réseaux.

**Corollaire 4.13.** *Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien.*

- *Le groupe  $\Gamma$  est convexe-cocompact si et seulement si  $L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$ .*
- *Le groupe  $\Gamma$  est un réseau si et seulement si  $\mathbb{H}(\infty) = L_p(\Gamma) \cup L_c(\Gamma)$ .*

**Exercice 4.14.** Démontrer le corollaire 4.13.

L'ensemble limite d'un groupe fuchsien, ses points paraboliques et coniques, se détectent à partir de la dynamique de ce groupe sur  $\mathbb{H}(\infty)$  (exercice 3.9). Il résulte donc du théorème 4.12 que la finitude géométrique d'un groupe fuchsien  $\Gamma$ , qui au départ est définie à partir de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$ , se lit entièrement sur la dynamique de ce groupe sur  $\mathbb{H}(\infty)$ .

## 5. Commentaire

Les notions et principaux résultats de ce chapitre se généralisent au cas d'une variété riemannienne orientée  $X$ , dite *variété de Hadamard pincée*, de dimension  $n \geq 2$ , simplement connexe, complète, dont la courbure sectionnelle est bornée par deux constantes strictement négatives ([11], [5], [13], [26]). Nous donnons ici les grandes lignes de cette généralisation.

Dans ce contexte, les *géodésiques* sont bien définies et le *bord à l'infini*  $X(\infty)$  de cette variété est tenu par l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotes. En voyant les points de  $X$  comme des extrémités de segments géodésiques d'origine fixée, on peut munir  $X \cup X(\infty)$  d'une topologie naturelle qui en fait une compactification de  $X$  dans laquelle  $X$  est un ouvert dense. L'ensemble des géodésiques orientées de  $X$  s'identifie alors aux couples de points distincts de  $X(\infty)$ . La notion de *cocycles de Busemann* (paragraphe 1.3) s'étend également à ce cadre général et permet de définir les *horocycles* (si  $n = 2$ ) et les *horosphères* (si  $n \geq 3$ ) de  $X$ .

En revanche, contrairement au groupe  $G$  qui agit transitivement sur  $\mathbb{H}$ , le groupe des isométries positives de  $X$  peut être très pauvre, voire trivial. Les démonstrations données dans ce chapitre qui s'appuient sur cette propriété de transitivité, ne s'adaptent donc pas directement au cas général. Toutefois, la plupart d'entre elles peuvent être traduites en termes riemanniens, c'est le cas par exemple de la démonstration des propriétés 1.13.

Comme sur  $\mathbb{H}$ , si une isométrie positive ne fixe pas de point de  $X$ , elle fixe alors exactement un (isométrie *parabolique*) ou deux (isométrie *hyperbolique*) points de  $X(\infty)$  (propriété 2.5). Nous appelons *groupe kleinien*, un sous-groupe d'isométries positives opérant proprement discontinûment sur  $X$ .

Sans aucune hypothèse supplémentaire sur  $X$ , l'existence de tels groupes n'est pas garantie.

Lorsqu'un tel groupe existe, les définitions d'*ensemble limite*, de points *horocycliques* (*horosphériques*), *coniques* et *paraboliques*, données dans le paragraphe 3 restent inchangées. Dans notre texte, nous nous sommes concentrés sur une catégorie de groupes fuchsien pour lesquels points coniques et horocycliques sont confondus. Dans un article de A. Starkov [54], le lecteur trouvera des exemples de groupes donnant lieu à des points horocycliques non coniques.

La notion de finitude géométrique a vu le jour dans le contexte de l'espace hyperbolique de courbure  $-1$  de dimension 3, la motivation étant d'étudier l'action sur cet espace des groupes discrets de type fini. Sur le demi-plan de Poincaré, les notions de groupes discrets de type fini et de groupes géométriquement finis coïncident [6, Theorem 10.1.2]. Ce n'est pas le cas en dimension plus grande [9].

Lorsque la dimension de  $X$  est  $\geq 3$ , on distingue parmi les points paraboliques associés à un groupe kleinien  $\Gamma$ , les points  $x$  dont le stabilisateur dans  $\Gamma$  agit de façon cocompacte sur  $(L(\Gamma) - \{x\})$ . Ces points, appelés *points paraboliques bornés*, interviennent de façon essentielle pour généraliser la notion de finitude géométrique d'un groupe aux variétés de Hadamard pincée. Dans ce cadre, la définition est délicate et peut s'exprimer de différentes manières [11]. L'une d'elles repose sur la décomposition de  $L(\Gamma)$  en points coniques et paraboliques bornés. Sous cette hypothèse, le nombre d'orbites de points paraboliques sous  $\Gamma$  est fini. À chacun de ces points  $x$  est associé un horodisque (horoboule)  $H^+(x)$  dont les images par le stabilisateur,  $\Gamma_x$ , de  $x$  dans  $\Gamma$ , sont disjointes ou confondues [49, lemme 1.9]. Le quotient  $\Gamma_x \backslash H^+(x)$  s'injecte alors sur la variété  $M = \Gamma \backslash X$  pour donner ce que nous appelons encore une *cuspidé*. Si  $\Gamma$  est un groupe kleinien géométriquement fini, la projection de l'ensemble des points de  $X$  appartenant aux géodésiques dont les extrémités sont dans l'ensemble limite du groupe, est incluse dans la réunion d'un compact de  $M$  et d'un nombre fini de cuspidés. C'est dans ce contexte, relativement simple d'un point de vue géométrique, que la majorité des résultats sur la dynamique topologique du flot géodésique et du feuilletage horosphérique démontrés dans les chapitres suivants pourra être généralisée.

Nous terminons ces commentaires par quelques lignes de présentation des propriétés métriques de l'ensemble limite d'un groupe fuchsien non élémentaire  $\Gamma$  agissant sur le disque de Poincaré  $\mathbb{D}$ .



Une des clefs de ce riche domaine repose sur la *série de Poincaré*  $P_s(\Gamma)$  associée à  $\Gamma$  et définie par

$$P_s(\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(0, \gamma(0))},$$

où 0 est par exemple le centre du disque  $\mathbb{D}$ . Son exposant critique  $\delta(\Gamma)$  peut aussi être défini par [49] :

$$\delta(\Gamma) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} (\ln \text{card}\{\gamma \in \Gamma \mid d(0, \gamma(0)) \leq R\}).$$

Cette série permet d'établir un lien entre le comportement statistique de  $\Gamma(0)$  et les propriétés métriques de  $L(\Gamma)$ . On peut montrer par exemple que si  $\Gamma$  est géométriquement fini, alors  $\delta(\Gamma)$  est égal à la dimension de Hausdorff de  $L(\Gamma)$  ([46], [43, Theorem 9.3.6]).

Cette série permet aussi de construire des mesures  $m$ , appelées *mesures de Patterson*, dont le support est  $L(\Gamma)$  et qui, à défaut d'être invariantes par  $\Gamma$  (de telles mesures n'existent pas si  $\Gamma$  n'est pas élémentaire) sont conformes au sens où elles vérifient la relation

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \frac{d\gamma^{-1}m}{dm}(x) = |\gamma'(x)|^{\delta(\Gamma)},$$

où  $|\gamma'(x)|$  représente le coefficient de conformité au point  $x$  de l'homographie  $\gamma$ , vue comme transformation conforme ([46], [43]) du plan.

La construction de ces mesures est due à S. Patterson ([46], [7, Chapter 9]). Si la série  $P_s(\Gamma)$  diverge en  $\delta(\Gamma)$ , ce qui est le cas lorsque  $\Gamma$  est géométriquement fini [43], une telle mesure est obtenue en prenant la limite faible, lorsque  $s$  tend vers  $\delta(\Gamma)$  par valeurs supérieures, d'une suite extraite de mesures orbitales  $m^s$  définies par

$$m^s = \frac{1}{P_s(\Gamma)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(0, \gamma(0))} D_{\gamma(0)},$$

où  $D_{\gamma(0)}$  représente la masse de Dirac en  $\gamma(0)$ .

Si  $\Gamma$  est un réseau cette mesure est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{D}(\infty)$ . Comme nous le verrons dans les commentaires des chapitres III et V, un des intérêts des mesures de Patterson est de permettre une construction de mesures sur  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$  invariantes par le flot géodésique et le feuilletage horocyclique, portées par leur ensemble non errant.

Ces constructions de mesures de Patterson sur  $L(\Gamma)$  se généralisent aux groupes kleinien agissant sur des variétés de Hadamard pincées ([10], [49]).

## CHAPITRE II

### EXEMPLES DE GROUPES FUCHSIENS

Le but de ce chapitre est d'illustrer par des exemples les résultats du chapitre précédent portant sur les groupes fuchsiens.

La première famille de groupes que nous introduisons est composée de groupes libres géométriquement finis, appelés groupes *de Schottky*. Sa construction repose sur la dynamique des isométries.

La seconde famille est elle plus arithmétique. Elle consiste en trois réseaux non uniformes : le groupe *modulaire*  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , son groupe de congruence modulo 2 et son groupe dérivé.

Nous étudions chacun de ces groupes en suivant le même plan :

- description d'un domaine fondamental ;
- forme de la surface topologique associée ;
- nature des isométries ;
- étude de l'ensemble limite ;
- caractérisation des points paraboliques.

Dans le cas des groupes de Schottky et du groupe modulaire, nous construisons un codage de leur ensemble limite. Le premier codage sera utilisé dans le chapitre IV pour étudier la dynamique du flot géodésique. Le second codage nous permettra, dans le chapitre VII, de traduire en termes d'approximations diophantiennes, le comportement des rayons géodésiques sur la surface modulaire.

#### 1. Groupes de Schottky

Nous exposons ici une méthode reposant sur la dynamique des isométries pour construire des groupes fuchsiens.

Plaçons-nous dans le modèle du disque de Poincaré  $\mathbb{D}$  et fixons un point 0 de cet ensemble.

On rappelle que si  $g$  est une isométrie positive de  $\mathbb{D}$  ne fixant pas 0, l'ensemble  $D(g)$  représente le demi-plan fermé dans  $\mathbb{D}$ , bordé par la médiatrice du segment hyperbolique  $[0, g(0)]_h$  et contenant  $g(0)$ . Les ensembles  $D(g)$  et  $D(g^{-1})$  sont disjoints (respectivement tangents) si et seulement si  $g$  est hyperbolique (respectivement parabolique) (exercice I.2.6).

Posons

$$\text{Ext } D(g) = \mathbb{D} - D^\circ(g^{-1}).$$

On a l'égalité

$$g(D(g^{-1})) = \text{Ext } D(g).$$

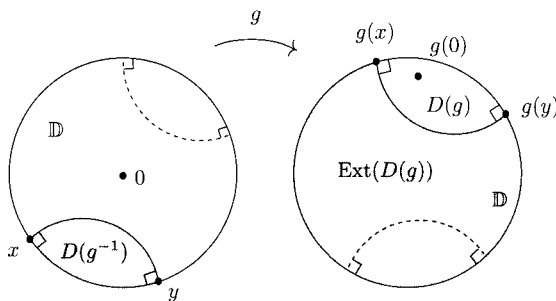


FIGURE 1.  $g$  hyperbolique

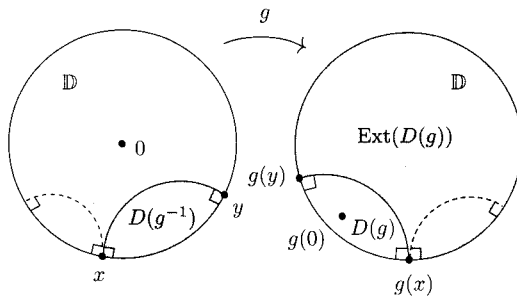


FIGURE 2.  $g$  parabolique

**Définition 1.1.** Soit  $p$  un entier  $\geq 2$ . Un groupe de Schottky de  $G$  de rang  $p$  est un sous-groupe de  $G$  muni d'une partie génératrice  $\{g_1, \dots, g_p\}$  d'isométries non elliptiques, différentes de l'identité, vérifiant l'hypothèse de séparation suivante :

$$(\overline{D(g_i) \cup D(g_i^{-1})}) \cap (\overline{D(g_j) \cup D(g_j^{-1})}) = \emptyset,$$

pour tout  $i \neq j$  dans  $\{1, \dots, p\}$ .

Nous notons  $S(g_1, \dots, g_p)$  un tel groupe équipé de la partie génératrice  $\{g_1, \dots, g_p\}$ .

Dans la suite, afin de ne pas alourdir les notations, nous nous restreignons au cas où  $p = 2$ .

Les figures suivantes représentent les quatre configurations possibles associées aux groupes de Schottky de rang 2.

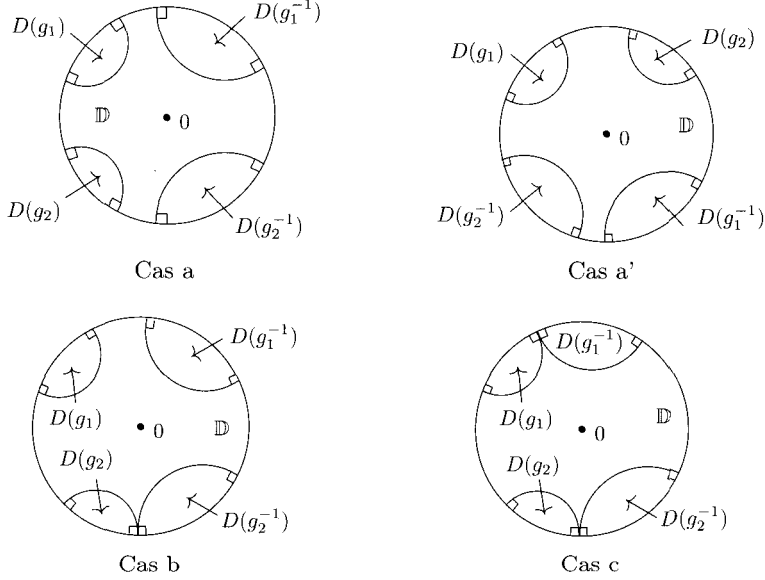


FIGURE 3

Les groupes de Schottky ne sont pas des groupes rares puisque, comme le montre le lemme suivant, la donnée de deux isométries non elliptiques suffit pour en construire.

**Lemme 1.2.** *Soient  $g$  et  $g'$  deux isométries non elliptiques de  $G$  n'ayant aucun point fixe en commun. Il existe  $N > 0$  tel que  $g^N$  et  $g'^N$  engendrent un groupe de Schottky  $S(g^N, g'^N)$ .*

*Démonstration.* La suite  $(g^n(0))_{n \geq 1}$  converge vers un point  $x$  fixé par  $g$ , donc la suite des médiatrices associées aux segments  $[0, g^n(0)]_h$  converge également vers  $x$ . Puisque  $g$  et  $g'$  n'ont aucun point fixe en commun, pour  $n$  grand, les fermés  $\overline{D(g^n) \cup D(g^{-n})}$  et  $\overline{D(g'^n) \cup D(g'^{-n})}$  sont disjoints.  $\square$

On déduit de ce lemme et de la proposition I.3.2 le résultat suivant :

**Corollaire 1.3.** *Un groupe fuchsien non élémentaire contient des groupes de Schottky.*

**1.1. Dynamique des groupes de Schottky.** Fixons un groupe de Schottky  $S(g_1, g_2)$  de rang 2 et posons  $\mathcal{A} = \{g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}\}$ .

On appelle *mot réduit* de  $S(g_1, g_2)$  un produit de  $n$  lettres  $s_1 \cdots s_n$  de  $\mathcal{A}$  vérifiant  $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ .

Pour tout  $a$  dans  $\mathcal{A}$ , analysons l'image du demi-plan  $D(a)$  par un mot réduit  $s_1 \cdots s_n$ . Pour cela, commençons par associer à  $s_1 \cdots s_n$ , avec  $n \geq 2$ , l'ensemble suivant :

$$D(s_1, \dots, s_n) = s_1 \cdots s_{n-1} D(s_n).$$

**Propriété 1.4.** Soit  $s_1 \cdots s_n$  un mot réduit. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i)  $s_1 \cdots s_n (\text{Ext } D(s_n^{-1})) \subset D(s_1)$  ;
- (ii) si  $n \geq 2$ ,  $D(s_1, \dots, s_n) \subset D(s_1, \dots, s_{n-1})$  ;
- (iii) soient  $s_1 \cdots s_n$  et  $s'_1 \cdots s'_n$  deux mots réduits différents, les demi-plans  $D(s_1, \dots, s_n)$  et  $D(s'_1, \dots, s'_n)$  sont tangents ou disjoints.

*Démonstration.*

(i) Raisonnons par récurrence sur  $n \geq 1$ . Si  $n = 1$ , la propriété (i) est une conséquence de la relation suivante :

$$\forall s \in \mathcal{A}, \quad s(\text{Ext } D(s^{-1})) = D(s).$$

Supposons que l'inclusion soit démontrée jusqu'au rang  $N \geq 1$ . Considérons un mot réduit  $s_1 \cdots s_N s_{N+1}$ . On a par hypothèse de récurrence

$$s_2 \cdots s_{N+1} (\text{Ext } D(s_{N+1}^{-1})) \subset D(s_2).$$

Comme  $s_2 \neq s_1^{-1}$ , l'ensemble  $D(s_2)$  est inclus dans  $\text{Ext } D(s_1^{-1})$ . Par ailleurs l'ensemble  $s_1 (\text{Ext } D(s_1^{-1}))$  est égal à  $D(s_1)$  donc  $s_1 \cdots s_{N+1} (\text{Ext } D(s_{N+1}^{-1})) \subset D(s_1)$ .

(ii) Comme  $s_n \neq s_{n-1}^{-1}$ , on a  $D(s_n) \subset \text{Ext } D(s_{n-1}^{-1})$  et donc l'ensemble  $s_{n-1} D(s_n)$  est inclus dans  $D(s_{n-1})$ , ce qui entraîne (ii).

(iii) Soit  $k \geq 1$  le plus petit entier  $\leq n$  tel que  $s'_k \neq s_k$ . Démontrer la propriété (iii) revient à démontrer que  $D(s'_k, \dots, s'_n)$  et  $D(s_k, \dots, s_n)$  sont tangents ou disjoints.

Si  $k = n$ , cette propriété est clairement vérifiée. Sinon, on a

$$D(s'_k, \dots, s'_n) = s'_k \cdots s'_{n-1} D(s'_n).$$

Donc d'après (i), l'ensemble  $D(s'_k, \dots, s'_n)$  est inclus dans  $D(s'_k)$ . De même  $D(s_k, \dots, s_n)$  est inclus dans  $D(s_n)$ . Comme  $s_k \neq s'_k$ , les ensembles  $D(s_k)$  et  $D(s'_k)$  sont tangents ou disjoints donc les demi-plans  $D(s'_k, \dots, s'_n)$  et  $D(s_k, \dots, s_n)$  le sont aussi.  $\square$

Remarquons que pour démontrer ces propriétés, la seule hypothèse qui joue un rôle est la suivante : si  $a$  et  $b$  appartiennent à  $\mathcal{A}$  avec  $a \neq b^{-1}$ , alors  $D(a)$  est inclus dans  $\text{Ext } D(b^{-1})$ . Ces propriétés restent donc encore valables pour des groupes de *Schottky généralisés* de rang  $p$ , c'est-à-dire admettant une partie génératrice  $\{g_1, \dots, g_p\}$  d'isométries non elliptiques de  $G$  satisfaisant l'hypothèse suivante plus faible que l'hypothèse de séparation

$$(D(g_1) \cup D(g_1^{-1})) \cap \dots \cap (D(g_p) \cup D(g_p^{-1})) = \emptyset.$$

Nous rencontrerons de tels groupes dans le paragraphe 3.

**Exercice 1.5.** Démontrer que dans chacun des cas a, a', b, c représentés par la figure 3, la configuration des demi-plans  $D(g_1, g_2)$  est la suivante.

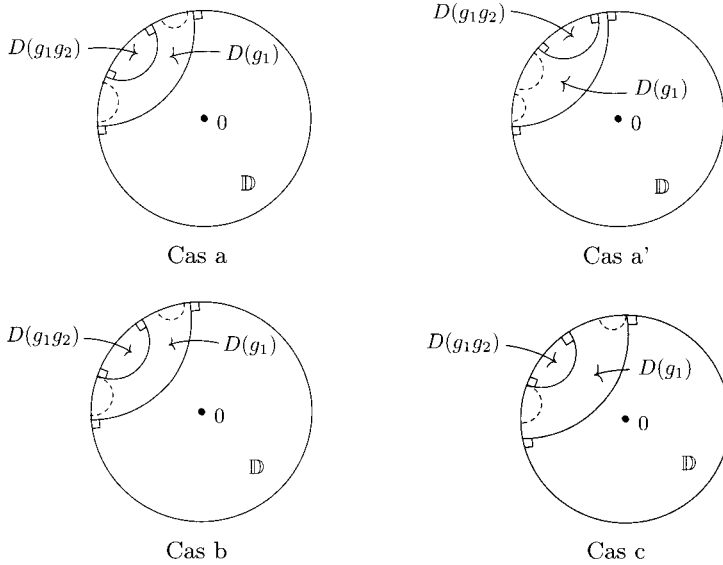


FIGURE 4

Posons

$$\mathcal{D}(S(g_1, g_2)) = \bigcap_{\substack{i=1,2 \\ \varepsilon=\pm 1}} \text{Ext } D(g_i^\varepsilon).$$

L'ouvert  $\mathring{\mathcal{D}}(S(g_1, g_2))$  contient le point 0.

**Proposition 1.6.** Le groupe  $S(g_1, g_2)$  est libre relativement à  $g_1, g_2$  et discret. De plus  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))$  est le domaine de Dirichlet en 0 de ce groupe.

*Démonstration.* Soit  $s_1, \dots, s_n$  un mot réduit. D'après la propriété 1.4(i), le point  $s_1 \cdots s_n(0)$  appartient à  $D(s_1)$ . Les ensembles  $D(s_1)$  et  $\mathring{\mathcal{D}}(S(g_1, g_2))$  sont disjoints donc  $s_1 \cdots s_n(0) \neq 0$ , ce qui montre que  $S(g_1, g_2)$  est libre.

Montrons à présent que  $S(g_1, g_2)$  est discret. Considérons une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $S(g_1, g_2) - \{\text{Id}\}$ . Chaque  $\gamma_n$  est un mot réduit  $s_{n,1} \cdots s_{n,\ell_n}$ . Quitte extraire une sous-suite  $(\gamma_{n_k})_{k \geq 1}$ , on peut supposer  $s_{n_k,1} = s_1$  pour tout  $k \geq 1$ . Le point  $\gamma_{n_k}(0)$  appartient à  $D(s_1)$  donc il existe  $c > 0$  tel que  $d(\gamma_{n_k}(0), 0) > c$  pour tout  $k \geq 1$ . Ceci montre que  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  ne peut pas converger vers l'identité et donc que  $S(g_1, g_2)$  est discret.

Puisque  $S(g_1, g_2)$  est libre et discret, aucun élément n'est elliptique et donc le domaine de Dirichlet  $\mathcal{D}_0(S(g_1, g_2))$  centré en 0 est bien défini.

Montrons que  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))$  et  $\mathcal{D}_0(S(g_1, g_2))$  sont égaux. L'ensemble  $\mathcal{D}_0(S(g_1, g_2))$  est inclus dans  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))$ . Si cette inclusion est stricte, il existe  $z$  dans  $\mathcal{D}_0(S(g_1, g_2))$  et  $\gamma$  dans  $S(g_1, g_2) - \{\text{Id}\}$  tels que  $\gamma(z)$  appartienne à  $\mathring{\mathcal{D}}(S(g_1, g_2))$ . Écrivons  $\gamma$  sous la forme d'un mot réduit  $s_1 \cdots s_n$ . D'après la propriété 1.4(i), le point  $\gamma(z)$  appartient à  $D(s_1)$ , ce qui est impossible car  $\gamma(z)$  appartient à  $\mathring{\mathcal{D}}(S(g_1, g_2))$ .  $\square$

Puisque le groupe  $S(g_1, g_2)$  est discret et admet un domaine de Dirichlet ayant un nombre fini de côtés, on peut énoncer le résultat suivant :

**Corollaire 1.7.** *Le groupe  $S(g_1, g_2)$  est un groupe fuchsien géométriquement fini.*

La démonstration de la proposition 1.6 s'appuie que sur la propriété 1.4 (i). Par conséquent, cette proposition et son corollaire sont encore valables pour les groupes de Schottky généralisés.

Du point de vue de la dynamique, les groupes de Schottky  $S(g_1, g_2)$ , avec  $g_1$  et  $g_2$  hyperboliques, peuvent être considérés comme les plus simples des groupes fuchsien non élémentaires.

La construction de ces groupes de Schottky peut s'étendre à une infinité de générateurs.

**Exercice 1.8.** Soit  $(g_i)_{i \geq 1}$  une suite d'isométries non elliptiques de  $G$  vérifiant pour tout  $i \neq j$  la condition

$$(D(g_i) \cup D(g_i^{-1})) \cap (D(g_j) \cup D(g_j^{-1})) = \emptyset.$$

Démontrer que le groupe engendré par cette suite est un groupe fuchsien libre qui n'est pas géométriquement fini.

Nous nous intéressons à présent à la nature des isométries de  $S(g_1, g_2)$ . Aucune de ces isométries n'est elliptique puisque le groupe est libre. Concernant les isométries paraboliques, leur présence se lit sur le bord à l'infini de  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))$  (corollaire I.4.3).

Soit  $x$  un point de  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))(\infty)$ . Si  $x$  n'est pas à l'extrémité d'un côté de  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))$ , ce point n'appartient pas à l'ensemble limite du groupe, car

dans ce cas il existe un voisinage de  $x$  dans  $\overline{\mathbb{D}}$  ne rencontrant pas l'orbite du point 0.

Sinon,  $x$  est l'extrémité de la médiatrice d'un segment  $[0, a(0)]_h$ , avec  $a$  dans  $\mathcal{A}$ . Supposons que  $x$  appartienne à  $L(S(g_1, g_2))$ , il existe alors une suite de mots réduits  $s_1 \cdots s_{n_p}$  telle que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} n_p = +\infty$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} s_1 \cdots s_{n_p}(0) = x$ . Si  $x$  n'est pas fixé par un générateur parabolique, il est l'extrémité d'un unique côté (voir figure 3) donc  $s_1 = a$ . Le même raisonnement appliqué cette fois au point  $a^{-1}(x)$  entraîne que  $s_2 = a^{-1}$ , ce qui contredit le fait que  $s_1 \cdots s_{n_p}$  soit réduit.

En résumé, seuls les points fixes des générateurs paraboliques appartiennent à l'intersection de  $L(S(g_1, g_2))$  et de  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))(\infty)$ .

Soit  $x$  un tel point. Notons  $a$  un élément de  $\mathcal{A}$  le fixant et  $b$  un générateur du stabilisateur de  $x$  dans  $S(g_1, g_2)$ , on a  $a = b^n$ , donc l'ensemble  $D(a) \cup D(a^{-1})$  est inclus dans  $D(b) \cup D(b^{-1})$ . Ceci n'est possible que si  $n = \pm 1$ .

On déduit de cette étude et du corollaire I.4.3, le résultat suivant :

**Propriété 1.9.** *Soit  $S(g_1, g_2)$  un groupe de Schottky.*

(i) *Si  $g_1$  et  $g_2$  sont hyperboliques, tous les éléments de  $S(g_1, g_2)$  différents de l'identité le sont aussi.*

(ii) *Sinon, les isométries non hyperboliques de  $S(g_1, g_2) - \{\text{Id}\}$  sont conjuguées dans  $S(g_1, g_2)$  aux puissances des générateurs paraboliques.*

Ces propriétés ne s'étendent pas aux groupes de Schottky généralisés. On verra dans le paragraphe suivant que de tels groupes peuvent contenir des isométries paraboliques non conjuguées aux puissances de générateurs.

**Exercice 1.10.** En utilisant l'exercice I.2.15, vérifier que les surfaces  $S(g_1, g_2) \setminus \mathbb{D}$  associées aux différents cas représentés par la figure 3 sont de la forme représentée par la figure 5.

**1.2. Ensemble limite.** Remarquons pour commencer que l'ensemble limite  $L(S(g_1, g_2))$  d'un groupe de Schottky  $S(g_1, g_2)$  ne peut pas être égal à  $\mathbb{D}(\infty)$ . En effet, l'hypothèse de séparation étant vérifiée (voir la définition 1.1), l'ensemble  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))(\infty)$  contient un arc de cercle ouvert non vide. L'orbite de 0 est incluse dans la réunion des  $D(a)$  avec  $a$  dans  $\mathcal{A}$ , donc chaque point de cet arc admet un voisinage dans  $\overline{\mathbb{D}}$  ne rencontrant pas  $L(S(g_1, g_2))$ .

Quelle est la nature topologique de  $L(S(g_1, g_2))$ ? Pour répondre à cette question, commençons par démontrer le lemme suivant :

**Lemme 1.11.** *Pour toute suite  $(s_i)_{i \geq 1}$  de  $\mathcal{A}$  vérifiant  $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$ , la suite des diamètres euclidiens des ensembles  $D(s_1, \dots, s_n)$  converge vers zéro.*



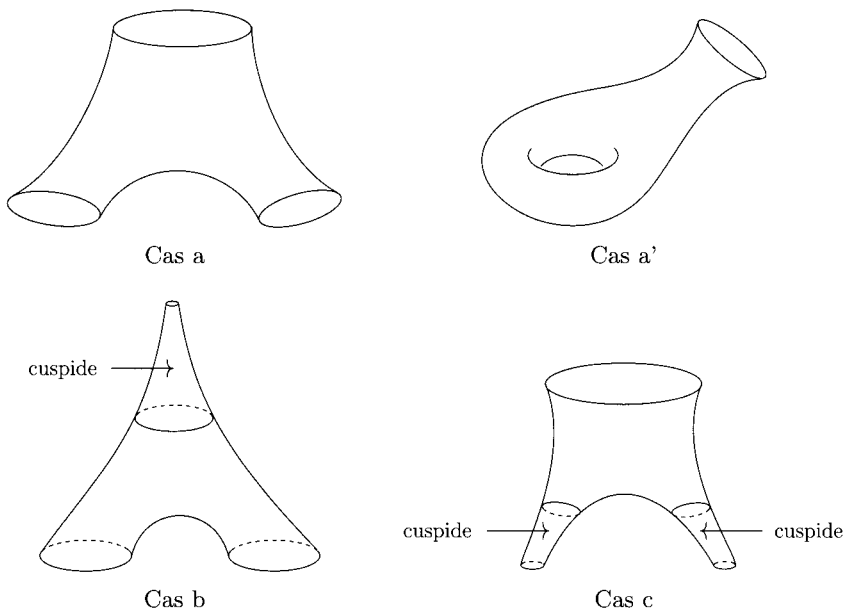


FIGURE 5

*Démonstration.* D'après la propriété 1.4(ii), les demi-plans  $D(s_1, \dots, s_n)$  sont emboîtés. Si la suite des rayons euclidiens ne converge pas vers 0, il existe un compact  $K$  de  $\mathbb{D}$  rencontré par toutes les géodésiques  $s_1 \cdots s_{n-1}(\mathcal{C}_n)$ , où  $\mathcal{C}_n$  est le bord de  $D(s_n)$ . Les géodésiques  $\mathcal{C}_n$  sont des côtés de  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))$  donc les images de ce domaine par  $s_1 \cdots s_{n-1}$  rencontrent  $K$ . Ceci est impossible car, d'après la propriété I.2.13, ce domaine est localement fini.  $\square$

**Corollaire 1.12.** *On a l'égalité*

$$L(S(g_1, g_2)) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{\text{mots réduits} \\ \text{de longueur } n}} \overline{D(s_1, \dots, s_n)}.$$

*Démonstration.* Soient  $y$  dans  $L(S(g_1, g_2))$  et  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $S(g_1, g_2)$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(0) = y$ . Écrivons  $\gamma_n$  sous forme d'un mot réduit  $\gamma_n = s_{n,1} \cdots s_{n,\ell_n}$  avec  $s_{n,i} \in \mathcal{A}$  et  $s_{n,i} \neq s_{n,i+1}^{-1}$ . Puisque  $\mathcal{A}$  est fini, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe  $s = (s_i)_{i \geq 1}$  avec  $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$  et une suite d'entiers positifs  $(\ell_n)_{n \geq 1}$  strictement croissante tels que  $\gamma_n = s_1 \cdots s_{\ell_n}$ .

Le point  $s_{\ell_n}(0)$  appartient à  $D(s_{\ell_n})$  donc  $\gamma_n(0)$  appartient à  $D(s_1, \dots, s_{\ell_n})$ . Ces ensembles sont emboîtés et leur diamètre tend vers 0 donc on a l'égalité

$$\{y\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{D(s_1, \dots, s_{\ell_n})}.$$

Ceci montre que  $L(S(g_1, g_2))$  est inclus dans l'ensemble

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{\text{mots réduits} \\ \text{de longueur } n}} D(s_1, \dots, s_n).$$

L'inclusion dans l'autre sens résulte des propriétés 1.4 et du lemme 1.11.  $\square$

On déduit de ce corollaire une construction de  $L(S(g_1, g_2))$  par un procédé itératif analogue à celui des *ensembles de Cantor*. En effet, considérons le cas où  $g_1$  et  $g_2$  sont hyperboliques et notons  $I_1, I_2, I_3, I_4$  les composantes connexes de l'ensemble suivant :

$$\mathbb{D}(\infty) - \bigcup_{a \in \mathcal{A}} D(a)(\infty).$$

À l'étape 1, retirons ces quatre arcs à l'ensemble  $\mathbb{D}(\infty)$ . On obtient

$$\mathbb{D}(\infty) - \bigcup_{1 \leq i \leq 4} I_i = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} D(a)(\infty).$$

À l'étape 2, retirons à chaque ensemble  $D(a)(\infty)$  les quatre arcs  $a(I_1), a(I_2), a(I_3), a(I_4)$ . On obtient

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{D}(a)(\infty) - \bigcup_{1 \leq i \leq 4} (I_i) = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} \bigcup_{\substack{b \in \mathcal{A} \\ b \neq a^{-1}}} D(a, b)(\infty).$$

Plus généralement, à l'étape  $n \geq 2$ , retirons à chaque ensemble de la forme  $D(s_1, \dots, s_{n-1})(\infty)$ , où  $s_1 \cdots s_{n-1}$  est un mot réduit, les quatre intervalles  $s_1 \cdots s_{n-1}(I_1), s_1 \cdots s_{n-1}(I_2), \dots, s_1 \cdots s_{n-1}(I_4)$ , on obtient

$$D(s_1, \dots, s_{n-1})(\infty) - \bigcup_{1 \leq i \leq 4} s_1 \cdots s_{n-1}(I_i) = \bigcup_{\substack{s \in \mathcal{A}_1 \\ s \neq s_{n-1}^{-1}}} D(s_1, \dots, s_{n-1}, s)(\infty).$$

L'ensemble  $L(S(g_1, g_2))$  est donc l'intersection sur les entiers  $n \geq 1$  des  $4 \times 3^{n-1}$  arcs restant après avoir appliqué le procédé à l'étape  $n$  (figure 6).

Si les générateurs ne sont pas tous les deux hyperboliques, alors le procédé est le même à condition de regrouper les arcs de la forme  $D(s_1, \dots, s_n)(\infty)$  et  $D(s'_1, \dots, s'_n)(\infty)$  ayant une extrémité en commun.

**Exercice 1.13.** Retrouver que  $L(S(g_1, g_2))$  est un ensemble totalement discontinu (*i.e.* les composantes connexes sont les points) et sans point isolé. (Indication : [12].)

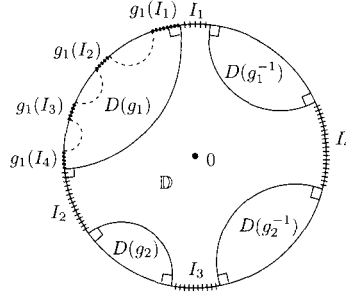


FIGURE 6

On rappelle que la région de Nielsen  $N(S(g_1, g_2))$  de  $S(g_1, g_2)$  est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de  $\mathbb{D}$  appartenant aux géodésiques dont les deux extrémités sont dans  $L(S(g_1, g_2))$  (paragraphe I.4).

Les figures suivantes représentent, dans les cas a, a', b, c associés à la figure 3, l'intersection de cette région avec  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))$ .

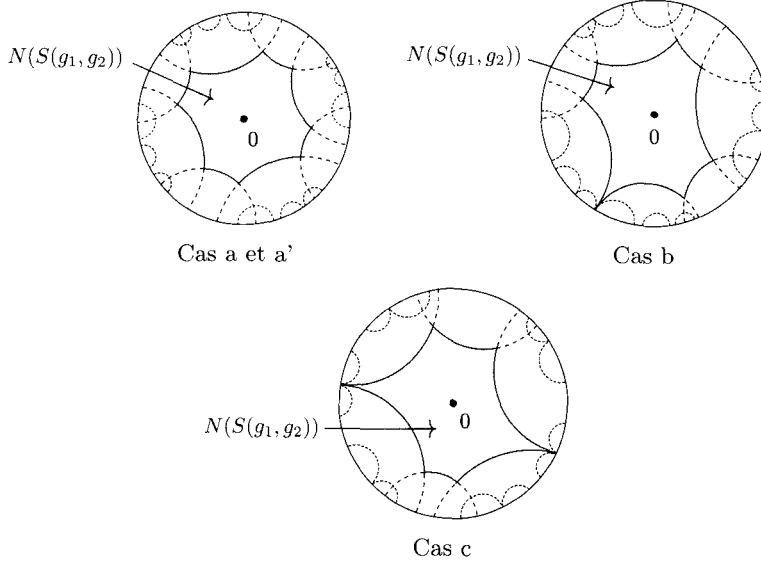


FIGURE 7

Si aucun des générateurs n'est parabolique, le groupe  $S(g_1, g_2)$  est géométriquement fini et ne contient pas d'isométrie parabolique, il est donc convexe-cocompact (corollaire I.4.13). Cette propriété se lit sur la figure 7 (cas a et a') car l'intersection de  $N(S(g_1, g_2))$  avec  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))$  est compacte (définition I.4.5). Ce n'est pas le cas si au moins l'un des générateurs est parabolique.

On peut donc énoncer la propriété suivante.

**Propriété 1.14.** *Le groupe  $S(g_1, g_2)$  est convexe-cocompact si et seulement si  $g_1$  et  $g_2$  sont hyperboliques.*

## 2. Codage de l'ensemble limite d'un groupe de Schottky

Nous entrons ici dans le monde de la dynamique symbolique que nous retrouverons dans le chapitre IV.

Le but de ce paragraphe est simplement d'associer à un point  $x$  de  $L(S(g_1, g_2))$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$  satisfaisant certaines conditions et d'établir un dictionnaire entre des propriétés de cette suite et d'autres, géométriques, de  $x$ .

Le groupe  $S(g_1, g_2)$  étant libre, il y a une bijection entre l'ensemble des suites finies,  $s_1, \dots, s_n$  réduites et le groupe privé de l'identité. Nous allons prolonger cette application à l'ensemble des suites infinies réduites  $\Sigma^+$  défini par

$$\Sigma^+ = \{(s_i)_{i \geq 1} \mid s_i \in \mathcal{A}, s_{i+1} \neq s_i^{-1}\}.$$

Soit  $(s_i)_{i \geq 1}$  une telle suite. Posons

$$\gamma_n = s_1 \cdots s_n.$$

Le point  $\gamma_n(0)$  appartient au demi-plan  $D(s_1, \dots, s_n)$ . D'après la propriété 1.4(ii), les demi-plans  $(D(s_1, \dots, s_n))_{n \geq 1}$  sont emboîtés et, d'après le lemme 1.11, leur diamètre euclidien tend vers 0, donc la suite  $(\gamma_n(0))_{n \geq 1}$  converge vers un point de  $L(S(g_1, g_2))$ .

Notons  $f : \Sigma^+ \rightarrow L(S(g_1, g_2))$  l'application qui à  $s = (s_i)_{i \geq 1}$  associe le point  $x(s)$  défini par

$$x(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(0).$$

**Exercice 2.1.** Démontrer que l'application  $f$  est surjective.

(Indication : utiliser le corollaire 1.12.)

Cette application est-elle injective ? Pour répondre à cette question, deux cas sont à étudier selon que l'un des générateurs est parabolique ou ne l'est pas.

Introduisons le sous-ensemble  $\Sigma_c^+$  de  $\Sigma^+$  formé des suites  $(s_n)_{n \geq 1} \in \Sigma^+$  pour lesquelles, si le terme  $s_n$  est parabolique, alors il existe  $m > n$  tel que  $s_m \neq s_n$ .

On rappelle que  $S(g_1, g_2)$  étant géométriquement fini, son ensemble limite se décompose en la réunion disjointe de l'ensemble de ses points paraboliques  $L_p(S(g_1, g_2))$  et coniques  $L_c(S(g_1, g_2))$  (théorème I.4.12).

**Proposition 2.2.** *Si  $g_1, g_2$  sont hyperboliques, alors l'application  $f : \Sigma^+ \rightarrow L(S(g_1, g_2))$  est une bijection. Sinon, cette application est surjective mais n'est pas injective et sa restriction à  $\Sigma_c^+$  est une bijection sur  $L_c(S(g_1, g_2))$ .*

*Démonstration.*

*Premier cas :  $g_1$  et  $g_2$  sont hyperboliques.* Dans ce cas  $\Sigma_c^+ = \Sigma^+$  et pour tous  $a$  dans  $\mathcal{A}$  et  $b$  dans  $\mathcal{A} - \{a\}$ , l'adhérence des ensembles  $D(a)$  et  $D(b)$  sont disjointes. Soient  $s = (s_i)_{i \geq 1}$  et  $s' = (s'_i)_{i \geq 1}$  appartenant à  $\Sigma^+$ . Supposons qu'il existe  $i \geq 1$  tel que  $s_i \neq s'_i$ , notons  $k$  le plus petit de ces entiers, et posons  $\gamma = s_1 \dots s_{k-1}$  si  $k > 1$  et  $\gamma = \text{Id}$  sinon. Pour tout  $n \geq k$ , les points  $\gamma^{-1}s_1 \dots s_n(0)$  et  $\gamma^{-1}s'_1 \dots s'_n(0)$  appartiennent respectivement à  $D(s_k)$  et  $D(s'_k)$  qui sont disjoints, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_1 \dots s_n(0) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} s'_1 \dots s'_n(0)$ .

Ceci montre que  $f$  est injective.

*Deuxième cas :  $g_1$  ou  $g_2$  est parabolique.* Supposons que  $g_1$  soit parabolique. Dans ce cas, les suites  $(g_1^n(0))_{n \geq 1}$  et  $(g_1^{-n}(0))_{n \geq 1}$  convergent vers le même point, donc  $f$  n'est pas injective.

Montrons l'égalité  $f(\Sigma_c^+) = L_c(S(g_1, g_2))$ . Soit  $s = (s_i)_{i \geq 1}$  dans  $(\Sigma^+ - \Sigma_c^+)$ . Notons  $k$  le rang à partir duquel  $s_k$  est parabolique et  $s_i = s_k$  pour tout  $i \geq k$ . Posons  $\gamma = s_1 \dots s_{k-1}$  si  $k > 1$  et  $\gamma = \text{Id}$  sinon. Le point  $\gamma^{-1}x(s)$  est parabolique car il est fixé par  $s_k$ , donc  $x(s)$  est parabolique. Par conséquent l'ensemble  $f(\Sigma^+ - \Sigma_c^+)$  est inclus dans  $L_p(S(g_1, g_2))$  et donc, puisque  $f$  est surjective,  $L_c(S(g_1, g_2))$  est inclus dans  $f(\Sigma_c^+)$ .

Considérons à présent  $y$  dans  $L_p(S(g_1, g_2))$ . D'après la propriété 1.9(ii), il existe  $\gamma$  dans  $S(g_1, g_2)$  tel que  $\gamma(y)$  soit fixé par un générateur parabolique  $g$ . Soit  $s = (s_i)_{i \geq 1}$  une suite de  $\Sigma^+$  telle que  $x(s) = y$ . Puisque  $\gamma$  s'écrit sous la forme d'un mot réduit fini, il existe  $s' = (s'_i)_{i \geq 1}$  dans  $\Sigma^+$ ,  $k \geq 0$  et  $k' \geq 0$  tels que  $\gamma(y) = x(s')$  et pour tout  $i \geq 1$ ,  $s'_{k'+i} = s_{k+i}$ . Le point  $\gamma(y)$  appartient à  $D(s'_1)(\infty)$ , or  $\gamma(y)$  est le point de tangence à l'infini de  $D(g)$  et  $D(g^{-1})$  donc  $s'_1 \in \{g, g^{-1}\}$ . En remplaçant dans ce raisonnement  $\gamma(y)$  par  $s_1^{-1}(y)$ , on obtient  $s'_1 = s'_2$ . De proche en proche, on montre que la suite  $s'$  est constante, de terme général  $g$  ou  $g^{-1}$ , et donc que  $s$  est constante à partir d'un certain rang. Ceci entraîne que  $s$  n'appartient pas à  $\Sigma_c^+$ . En conclusion,  $f^{-1}(L_p(S(g_1, g_2))) = (\Sigma - \Sigma_c^+)$  et donc  $f(\Sigma_c^+) = L_c(S(g_1, g_2))$ .

Montrons à présent que l'application  $f$  en restriction à  $\Sigma_c^+$  est injective. Soient  $s = (s_i)_{i \geq 1}$  et  $s' = (s'_i)_{i \geq 1}$  appartenant à  $\Sigma_c^+$ . Supposons que  $s$  et  $s'$  soient différents et notons  $k$  le plus petit des  $i \geq 1$  tel que  $s_i \neq s'_i$ . Posons  $\gamma = s_1 \dots s_{k-1}$  si  $k \neq 1$  et  $\gamma = \text{Id}$  sinon.

Si  $s_k^{-1} \neq s'_k$  ou si l'une de ces deux lettres est hyperbolique, alors l'ensemble  $D(s_k)(\infty) \cap D(s'_k)(\infty)$  est vide, donc  $\gamma^{-1}x(s) \neq \gamma^{-1}x(s')$ .

Si  $s_k^{-1} = s'_k$  et  $s_k$  est parabolique, considérons le plus petit des  $i > k$  tel que  $s_i \neq s_k$  et posons  $g = \gamma s_k \cdots s_{i-1}$ . On a

$$\begin{aligned} g^{-1}(x(s)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} s_i \cdots s_{i+n}(0), \\ g^{-1}(x(s')) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{i-1}^{-1} \cdots s_k^{-1} s_k^{-1} s'_{k+1} \cdots s'_{k+n}(0). \end{aligned}$$

Comme  $s'_{k+1} \neq s_k$ , le point  $g^{-1}(x(s'))$  appartient à  $D(s_{i-1}^{-1})(\infty)$ . Par ailleurs  $g^{-1}(x(s))$  appartient à  $D(s_i)(\infty)$  et  $D(s_i)(\infty) \cap D(s_{i-1}^{-1})(\infty) = \emptyset$  car  $s_i$  n'appartient pas à  $\{s_{i-1}, s_{i-1}^{-1}\}$ . Donc  $g^{-1}(x(s')) \neq g^{-1}(x(s))$ .  $\square$

Comme conséquence de cette proposition, nous obtenons que les points fixes des isométries paraboliques de  $L(S(g_1, g_2))$  sont codés (de façon non unique) par les suites  $(s_i)_{i \geq 1}$  de  $\Sigma^+$ , constantes à partir d'un certain rang, et dont le terme constant est un générateur parabolique.

Intéressons-nous plus généralement au codage des points fixes des isométries de  $S(g_1, g_2)$ . Introduisons l'application de *décalage*  $T : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$  définie par

$$T((s_i)_{i \geq 1}) = (s_{i+1})_{i \geq 1}.$$

Une suite  $s$  est *périodique* s'il existe  $k \geq 1$  tel que  $T^k s = s$ . Dans ce cas, on pose

$$s = (\overline{s_1, \dots, s_k}).$$

Plus généralement, s'il existe  $n \geq 1$  tel que  $T^n s$  soit périodique, alors la suite  $s$  est dite *presque périodique*.

Remarquons que si  $s$  est une suite de  $(\Sigma^+ - \Sigma_c^+)$ , il existe  $k \geq 0$  tel que  $T^k(s) = (\overline{s_{k+1}})$  avec  $s_{k+1}$  parabolique. Une telle suite est donc presque périodique et  $x(s)$  est le point fixe du conjugué de  $s_{k+1}$  par  $s_1 \cdots s_k$ . La propriété suivante généralise ce lien entre suites presque périodiques et points fixes des isométries de  $S(g_1, g_2)$ .

**Propriété 2.3.** *Un point  $y$  de  $L(S(g_1, g_2))$  est fixé par une isométrie non triviale de  $S(g_1, g_2)$  si et seulement s'il existe une suite  $s$  dans  $\Sigma^+$  presque périodique, telle que  $x(s) = y$ .*

*Démonstration.* Soit  $y$  dans  $L(S(g_1, g_2))$ . Supposons qu'il existe  $\gamma$  non trivial dans  $S(g_1, g_2)$  tel que  $y = \gamma^+$ . Écrivons  $\gamma$  sous forme d'un mot réduit  $\gamma = s_1 \cdots s_n$  et supposons d'abord  $s_1 \neq s_n^{-1}$ . Dans ce cas la suite périodique  $s = (\overline{s_1, \dots, s_n})$  appartient à  $\Sigma^+$  et  $y = x(s)$ .

Si  $s_1 = s_n^{-1}$ , considérons le plus grand  $1 \leq k < n$  tel que  $s_k = s_{n-k+1}^{-1}$ , posons  $g = s_1 \cdots s_k$ . Le point  $g^{-1}(y)$  est fixé par le mot réduit  $s_{k+1} \cdots s_{n-k}$ . Puisque  $s_{k+1} \neq s_{n-k}^{-1}$ , on a  $g^{-1}(y) = x(\overline{s_{k+1}, \dots, s_{n-k}})$ . Considérons la suite presque périodique  $s'$  définie par  $s'_i = s_i$  pour  $1 \leq i \leq k$  et

$T^k(s') = (\overline{s_{k+1} \dots s_{n-k}})$ . Puisque  $s_{n-k} \neq s_{k+1}^{-1}$ , cette suite appartient à  $\Sigma^+$  et  $g^{-1}(y) = x(s)$ .

Réciproquement, considérons une suite presque périodique  $s$  de  $\Sigma^+$ . Soit  $k \geq 0$  tel que  $T^k(s)$  soit une suite périodique  $s' = (\overline{s_{k+1} \dots s_n})$ . On a

$$x(s') = \lim_{p \rightarrow +\infty} (s_{k+1} \dots s_n)^p(0),$$

donc  $x(s')$  est fixé par  $\gamma = s_{k+1} \dots s_n$ . Si  $k = 0$ , alors  $x(s') = x(s)$ , sinon,  $x(s) = g(x(s'))$  avec  $g = s_1 \dots s_k$  donc  $x(s)$  est fixé par  $g\gamma g^{-1}$ .  $\square$

Considérons un point  $x$  de  $L(S(g_1, g_2))$  non parabolique. Le groupe étant géométriquement fini, ce point est nécessairement conique. Autrement dit, il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $S(g_1, g_2)$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $(\gamma_n(0))_{n \geq 1}$  converge vers  $x$  en restant à une distance inférieure ou égale à  $\varepsilon$  du rayon  $[0, x)$ .

Comment construire une telle suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ ? La réponse se trouve dans le codage.

Puisque  $x$  n'est pas parabolique, il existe une unique suite  $s$  dans  $\Sigma_c^+$  vérifiant  $x(s) = x$ . Construisons à partir de cette suite une suite  $s' = (s'_i)_{i \geq 1}$  en regroupant les termes consécutifs correspondant à un même générateur parabolique. Plus précisément, posons

- $s'_1 = s_1$  si  $s_1$  est hyperbolique, et  $n = 1$ ,
- $s'_1 = s_1^n$  si  $s_1$  est parabolique, avec  $n \geq 1$  vérifiant  $s_1 = s_2 = \dots = s_n$  et  $s_{n+1} \neq s_1$ . Un tel  $n$  existe par définition des suites de  $\Sigma_c^+$ .

Puis recommençons ce procédé en l'appliquant à la suite  $(s_{n+i})_{i \geq 1}$  : on trouve  $s'_2$ . De proche en proche on obtient une suite  $(s'_i)_{i \geq 1}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $s'_i = a_i^{n_i}$  avec  $a_i \in \mathcal{A}$ . Si  $a_i$  est hyperbolique, alors  $n_i = \pm 1$  et  $a_{i+1}^{n_{i+1}} \neq a_i^{-n_i}$  ; sinon,  $n_i \in \mathbb{N}^*$  et  $a_{i+1} \neq a_i^{\pm 1}$  ;
- (ii) pour tout  $i \geq 1$ , les arcs  $D(a_i)(\infty)$  et  $D(a_{i+1})(\infty)$  sont disjoints ;
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_1 \dots s'_n(0) = x$ .

Remarquons que si  $g_1$  et  $g_2$  sont hyperboliques, alors  $s = s'$ . Posons  $\gamma_n = s'_1 \dots s'_n$ .

**Propriété 2.4.** *Il existe  $\varepsilon$  tel que la suite  $(\gamma_n(0))_{n \geq 1}$  soit dans le  $\varepsilon$ -voisinage du rayon  $[0, x)$ .*

*Démonstration.* Soit  $y$  un point de  $\mathcal{D}(S(g_1, g_2))(\infty)$ . Ce point est différent de  $x$  car  $x$  n'est pas parabolique.

Le point  $\gamma_n^{-1}(x)$  appartient à  $D(s'_{n+1})(\infty)$  et, puisque  $y$  ne rencontre pas l'intérieur des arcs  $D(a)(\infty)$  avec  $a$  dans  $\mathcal{A}$ , d'après la propriété 1.4(i) le point  $\gamma_n^{-1}(y)$  appartient à  $D(s'_n)(\infty)$ . Par construction de la suite  $(s'_i)_{i \geq 1}$ , les arcs  $D(a_i)(\infty)$  et  $D(a_{i+1})(\infty)$  sont disjoints, donc la distance euclidienne

entre  $\gamma_n^{-1}(x)$  et  $\gamma_n^{-1}(y)$  est uniformément minorée par une constante  $> 0$ . On déduit de cette propriété l'existence d'un compact de  $\mathbb{D}$  dont les images par  $\gamma_n$  rencontrent la géodésique  $(yx)$ . Ceci implique, puisque  $(\gamma_n(0))_{n \geq 1}$  converge vers  $x$ , que si  $z$  appartient à la géodésique  $(yx)$ , la suite  $(\gamma_n(z))_{n \geq 1}$  reste à une distance uniforme du rayon  $[z, x)$ . Par conséquent, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que la suite  $(\gamma_n(0))_{n \geq 1}$  soit incluse dans le  $\varepsilon$ -voisinage du rayon  $[0, x)$ .  $\square$

### 3. Le groupe modulaire et deux sous-groupes

Nous revenons au demi-plan de Poincaré. Ce paragraphe porte sur l'étude du *groupe modulaire*  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  composé des homographies  $h$  de la forme

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ et } ad - bc = 1,$$

et de deux de ses sous-groupes.

Les méthodes que nous employons sont de nature arithmétique et dynamique.

**3.1. Le groupe modulaire.** De par sa définition, ce groupe est fuchsien. Nous allons décrire l'un de ses domaines de Dirichlet.

**Exercice 3.1.** Démontrer qu'aucune isométrie non triviale de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  ne fixe le point  $2i$ .

Introduisons deux isométries  $T_1(z) = z + 1$  et  $s(z) = -1/z$ , qui vont permettre de construire un domaine de Dirichlet du groupe modulaire.

**Propriété 3.2.** Le domaine de Dirichlet  $\mathcal{D}_{2i}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}))$  est égal à l'ensemble  $E$  défini par

$$E = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \text{ et } -1/2 \leq \operatorname{Re} z \leq 1/2\}.$$

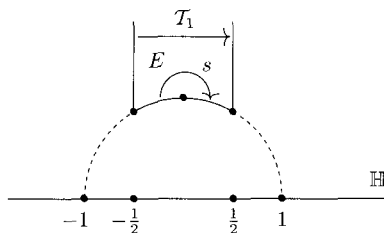


FIGURE 8



*Démonstration.* Par définition du domaine de Dirichlet (voir le paragraphe I.2.3),  $\mathcal{D}_{2i}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}))$  est inclus dans l'ensemble  $\mathbb{H}_{2i}(\mathcal{T}_1) \cap \mathbb{H}_{2i}(\mathcal{T}_1^{-1}) \cap \mathbb{H}_{2i}(s)$ . Par ailleurs

$$\mathbb{H}_{2i}(\mathcal{T}_1) = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \leq 1/2\},$$

$$\mathbb{H}_{2i}(\mathcal{T}_1^{-1}) = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq -1/2\}$$

et

$$\mathbb{H}_{2i}(s) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1\},$$

donc  $\mathcal{D}_{2i}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}))$  est inclus dans  $E$ .

Soit  $z$  dans  $\mathring{E}$ . Supposons qu'il existe  $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) - \{\mathrm{Id}\}$  tel que  $\gamma(z)$  appartienne à  $E$ . Nécessairement  $c \neq 0$  car  $|\operatorname{Re}(z + b)| > 1/2$  pour tout  $b \in \mathbb{Z}^*$ . On a  $\operatorname{Im}(\gamma z) = \operatorname{Im} z / |cz + d|^2$ . De plus, comme  $z$  appartient à  $\mathring{E}$ , on a

$$|cz + d|^2 > (|c| - |d|)^2 + |c||d|.$$

Donc, puisque  $c \neq 0$ ,  $\operatorname{Im}(\gamma z) > \operatorname{Im} z$ .

Si  $\gamma(z)$  appartient à  $\mathring{E}$ , le même raisonnement conduit à  $\operatorname{Im} z > \operatorname{Im} \gamma(z)$ , ce qui est contradictoire.

En conclusion, pour tout  $\gamma$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) - \{\mathrm{Id}\}$ , on a  $\gamma \mathring{E} \cap \mathring{E} = \emptyset$ . Ceci entraîne que  $\mathring{E}$  est inclus dans  $\mathcal{D}_{2i}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ . Donc  $\mathcal{D}_{2i}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})) = E$ .  $\square$

On déduit directement de cette proposition le résultat suivant.

**Corollaire 3.3.** *Le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  est un réseau non uniforme.*

**Exercice 3.4.** Vérifier que la *surface modulaire*,  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ , est de la forme suivante (figure 9).

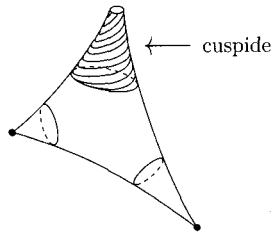


FIGURE 9

(Indication : utiliser l'exercice I.2.15.)

Dans le paragraphe 4, nous utiliserons un autre domaine fondamental construit à partir de  $E$ .

**Exercice 3.5.** Démontrer que l'ensemble  $\Delta$  défini par

$$\Delta = E \cap \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\} \cap T_1(E \cap \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}),$$

est un domaine fondamental du groupe modulaire (figure 10).

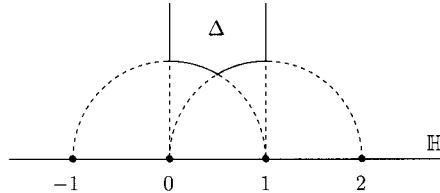


FIGURE 10

Remarquons que, contrairement aux groupes de Schottky, le groupe  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$  contient des éléments elliptiques. Citons par exemple  $s(z) = -1/z$  et  $r(z) = (z - 1)/z$ .

**Exercice 3.6.** Démontrer qu'un élément elliptique de  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$  est conjugué dans  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$  à une puissance de  $s$  ou de  $r$ .

Quelles sont les isométries paraboliques du groupe modulaire ? D'après le corollaire I.4.3, si  $p$  est une telle isométrie, l'orbite de son point fixe rencontre  $\mathcal{D}_{2i}(\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z}))(\infty)$ . Or cet ensemble est réduit au point  $\infty$ , qui par ailleurs est parabolique puisqu'il est fixé par  $T_1$ . Le stabilisateur de ce point dans  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$  est engendré par  $T_1$  donc  $p$  est conjugué dans  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$  à une puissance de  $T_1$ .

Analysons les points paraboliques. D'après ce qui précède, ils sont tous de la forme  $\gamma(\infty)$  avec  $\gamma$  dans  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Si  $\gamma$  ne fixe pas le point  $\infty$ , la transformation  $\gamma$  s'écrit  $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$  avec  $c \neq 0$ , donc  $\gamma(\infty)$  est le rationnel  $a/c$ .

Réciproquement, soit  $p/q$  dans  $\mathbb{Q}$ , avec  $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$ . Considérons  $p', q'$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $pq' - qp' = 1$  et posons  $g(z) = (pz + p')/(qz + q')$ . Cette isométrie appartient à  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et  $g(\infty) = p/q$  donc  $p/q$  est fixé par  $gT_1g^{-1}$ .

En résumé, nous venons de démontrer les propriétés suivantes :

**Propriété 3.7.**

(i) Les isométries paraboliques du groupe modulaire sont les conjugués dans  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$  des puissances de  $T_1$ .

(ii)  $L_p(\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .

Les rationnels correspondent donc aux points paraboliques de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et les irrationnels, puisque ce groupe est de covolume fini, aux points coniques. Cette caractérisation géométrique d'un rationnel est la clef du dernier paragraphe du chapitre VII. Elle nous permettra de relier la théorie des approximations diophantiennes au comportement des géodésiques sur la surface modulaire.

**3.2. Groupe de congruence modulo 2 et groupe dérivé.** Un des intérêts de ces deux groupes est de montrer que deux groupes fuchsien différents peuvent avoir le même domaine fondamental.

Dans le premier exemple, ce domaine sera un domaine de Dirichlet. Ce ne sera pas le cas dans le second. Nous serons donc amenés à utiliser d'autres méthodes que celles reposant sur les domaines de Dirichlet pour étudier la finitude géométrique d'un groupe fuchsien et décrire les isométries paraboliques.

*Le groupe de congruence modulo 2.* Soit  $P$  l'homomorphisme de groupes de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  qui à une homographie  $h$  définie par  $h(z) = (az + b)/(cz + d)$  associe la matrice

$$P(h) = \begin{pmatrix} a^\bullet & b^\bullet \\ c^\bullet & d^\bullet \end{pmatrix},$$

où  $n^\bullet$  correspond à la projection de  $n$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Posons  $\Gamma(2) = P^{-1}\begin{pmatrix} 1^\bullet & 0^\bullet \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Ce groupe est appelé sous-groupe de congruence modulo 2 [36, Chapter V.5]. C'est un sous-groupe distingué de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , d'indice 6.

Soit  $r$  l'homographie qui à  $z$  associe  $r(z) = (z - 1)/z$ . On a

$$(*) \quad \Gamma(2) \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \{\overline{\mathrm{Id}}, \overline{r}, \overline{r^2}, \overline{T_1^{-1}}, \overline{T_1^{-1}r}, \overline{T_1^{-1}r^2}\}.$$

Considérons l'ensemble  $\Delta'$  (figure 11) défini par

$$\Delta' = \Delta \cup r\Delta \cup r^2\Delta \cup T_1^{-1}(\Delta) \cup T_1^{-1}r(\Delta) \cup T_1^{-1}r^2(\Delta).$$

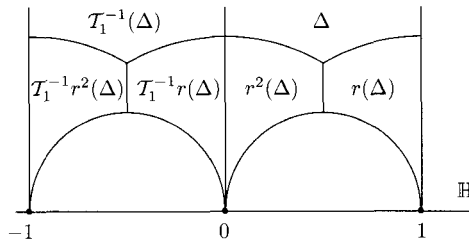


FIGURE 11

**Exercice 3.8.** Démontrer que  $\Delta'$  est un domaine fondamental de  $\Gamma(2)$ .  
(Indication : utiliser l'exercice 3.5 et l'égalité (\*).)

Introduisons l'isométrie  $T_{-1}(z) = z/(z + 1)$ .

**Propriété 3.9.** Le domaine  $\Delta'$  est le domaine de Dirichlet de  $\Gamma(2)$  au point  $i$ .

*Démonstration.* Aucun élément de  $\Gamma(2) - \{\text{Id}\}$  ne fixe  $i$ . Les isométries  $T_1^{\pm 2}, T_{-1}^{\pm 2}$  appartiennent à  $\Gamma(2)$  et on a

$$\mathbb{H}_i(T_1^2) = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re } z \leq 1\},$$

$$\mathbb{H}_i(T_1^{-2}) = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re } z \geq -1\},$$

$$\mathbb{H}_i(T_{-1}^2) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z + 1/2| \geq 1/2\},$$

et

$$\mathbb{H}_i(T_{-1}^{-2}) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - 1/2| \geq 1/2\}.$$

Donc  $\Delta' = \mathbb{H}_i(T_1^2) \cap \mathbb{H}_i(T_1^{-2}) \cap \mathbb{H}_i(T_{-1}^2) \cap \mathbb{H}_i(T_{-1}^{-2})$ . Par conséquent,  $\mathcal{D}_i(\Gamma(2))$  est inclus dans  $\Delta'$ .

Par ailleurs  $\mathcal{D}_i(\Gamma(2))$  et  $\Delta'$  sont deux domaines fondamentaux de  $\Gamma(2)$  donc  $\Delta' = \mathcal{D}_i(\Gamma(2))$ .  $\square$

**Corollaire 3.10.** Le groupe  $\Gamma(2)$  est un réseau non uniforme.

**Exercice 3.11.** Vérifier que la surface  $\Gamma(2) \backslash \mathbb{H}$  est de la forme suivante :

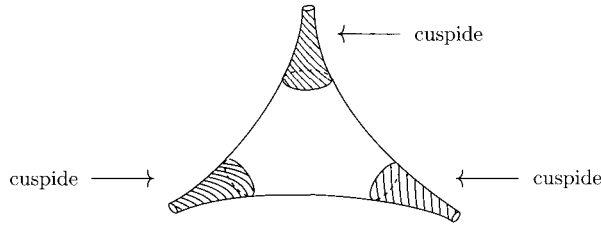


FIGURE 12

(Indication : utiliser l'exercice I.2.15.)

Le groupe  $\Gamma(2)$  est un groupe de Schottky généralisé (voir le paragraphe 1.1 pour la définition).

En effet, plaçons-nous dans le disque de Poincaré et posons

$$A = \{\psi T_1^2 \psi^{-1}, \psi T_1^{-2} \psi^{-1}, \psi T_{-1}^2 \psi^{-1}, \psi T_{-1}^{-2} \psi^{-1}\} \quad \text{et} \quad 0 = \psi(i).$$

Pour tout  $a$  dans  $A$ , les demi-plans  $D(a)$  bordés par les médiatrices des segments hyperboliques  $[0, a(0)]_h$  sont tangents ou disjoints. D'après la proposition 1.6, le groupe engendré par  $T_1^2$  et  $T_{-1}^2$  est donc libre (et discret) et a pour domaine fondamental  $\Delta'$ . Ce groupe est inclus dans  $\Gamma(2)$  et a même domaine fondamental, il est donc égal à  $\Gamma(2)$ .

On peut donc énoncer la propriété suivante.

**Propriété 3.12.** *Le groupe  $\Gamma(2)$  est engendré par  $\mathcal{T}_1^2$  et  $\mathcal{T}_{-1}^2$  et est libre relativement à ces générateurs.*

Intéressons-nous aux isométries paraboliques de  $\Gamma(2)$ .

**Propriété 3.13.** *Les isométries paraboliques de  $\Gamma(2)$  sont conjuguées dans  $\Gamma(2)$  aux puissances de  $\mathcal{T}_1^2$ ,  $\mathcal{T}_{-1}^2$  ou  $\mathcal{T}_{-1}^{-2}\mathcal{T}_1^2$ .*

*Démonstration.* Remarquons pour commencer que le point  $\infty$  est fixé par  $\mathcal{T}_1^2$ , le point 0 est fixé par  $\mathcal{T}_{-1}^2$ , le point  $-1$  est fixé par  $\mathcal{T}_{-1}^{-2}\mathcal{T}_1^2$ , et le point 1 est fixé par  $\mathcal{T}_{-1}^2\mathcal{T}_1^{-2}$ . Ces quatre points sont paraboliques. Par ailleurs,  $-1$  et 1 sont dans la même orbite car  $\mathcal{T}_1^2(-1) = 1$ , et les ensembles  $\Gamma(2)(0), \Gamma(2)(\infty), \Gamma(2)(1)$  sont trois orbites disjointes.

Soit  $\gamma$  une isométrie parabolique de  $\Gamma(2)$ . D'après le corollaire I.4.3, son point fixe appartient à l'une des trois orbites précédentes et, puisque  $\mathcal{T}_1^2, \mathcal{T}_{-1}^{-2}\mathcal{T}_1^2, \mathcal{T}_{-1}^2$  engendrent le stabilisateur dans  $\Gamma(2)$  de leur point fixe,  $\gamma$  est conjugué à une puissance de l'une de ces trois isométries.  $\square$

Contrairement aux groupes de Schottky, les isométries paraboliques d'un groupe de Schottky généralisé ne sont donc pas toujours conjuguées aux puissances des générateurs paraboliques.

**Exercice 3.14.** Démontrer que l'ensemble  $L_p(\Gamma(2))$  est égal à  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .

(Indication : utiliser la propriété 3.7 et le fait que  $\Gamma(2)$  est distingué, (voir aussi [36, Chapter V, Example F]).)

*Le groupe dérivé.* Introduisons à présent un autre sous-groupe défini cette fois par la donnée d'une partie génératrice. Notons  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les deux homographies définies respectivement par

$$\alpha_1(z) = \frac{z+1}{z+2}, \quad \alpha_2(z) = \frac{z-1}{-z+2},$$

et considérons les demi-plans

$$B(\alpha_1) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - 1/2| \leq 1/2\}, \quad B(\alpha_1^{-1}) = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \leq -1\},$$

$$B(\alpha_2) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z + 1/2| \leq 1/2\}, \quad B(\alpha_2^{-1}) = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 1\}.$$

Pour tout  $i = 1, 2$  et  $\varepsilon = \pm 1$ , on a

$$\alpha_i^\varepsilon(\mathbb{H} - \mathring{B}(\alpha_i^{-\varepsilon})) = B(\alpha_i^\varepsilon).$$

Remarquons que l'on a l'égalité (figure 13)

$$\Delta' = \bigcap_{\substack{\varepsilon=\pm 1 \\ i=1,2}} \mathbb{H} - \mathring{B}(\alpha_i^{-\varepsilon}).$$

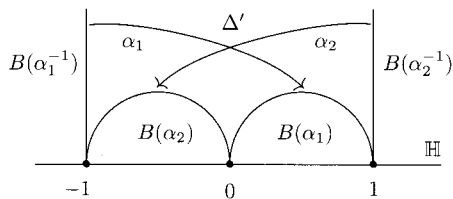


FIGURE 13

**Exercice 3.15.**

(i) Démontrer que si la médiatrice d'un segment hyperbolique  $[z_1, z_2]_h$  est une demi-droite verticale alors  $\text{Im } z_1 = \text{Im } z_2$ .

(Indication : utiliser l'exercice I.1.5.)

(ii) En déduire qu'il n'existe pas de point  $z$  de  $\mathbb{H}$  tel que les demi-plans  $B(\alpha_1^{-1})$  et  $B(\alpha_2^{-1})$  soient bordés respectivement par la médiatrice du segment  $[z, \alpha_1^{-1}(z)]_h$  et  $[z, \alpha_2^{-1}(z)]_h$ .

Le groupe  $\Gamma$  engendré par  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  n'est donc pas un groupe de Schottky généralisé bien que les quatre demi-plans  $B(\alpha_i^{\pm 1})$ , avec  $i = 1, 2$ , soient tangents ou disjoints. Toutefois, les arguments donnés pour démontrer la première partie de la proposition 1.6 étant d'ordre purement dynamique, ils s'appliquent encore dans ce cas là, ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante.

**Propriété 3.16.** *Le groupe  $\Gamma$  engendré par  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  est libre relativement à ces générateurs.*

**Exercice 3.17.**

(i) Démontrer que  $\Gamma$  est le sous-groupe de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  engendré par les commutateurs du groupe modulaire, c'est-à-dire par les  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ , avec  $g$  et  $h$  dans le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  (i.e.  $\Gamma$  est le groupe dérivé de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ ).

(Indications : utiliser les égalités  $[s, T_1^{-1}] = \alpha_1$ ,  $[s, T_1] = \alpha_2$ .)

(ii) Démontrer que  $\Gamma$  est distingué et d'indice 6 dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

(iii) Donner la structure des deux groupes finis  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})/\Gamma(2)$  et  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})/\Gamma$ .

Le groupe  $\Gamma$  étant un sous-groupe de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , il est fuchsien. Nous allons démontrer que l'ensemble  $\Delta'$  est un domaine fondamental, puisque dans ce cas, la démonstration de la deuxième partie de la proposition 1.6 ne s'applique pas directement.

**Propriété 3.18.** *L'ensemble  $\Delta'$  est un domaine fondamental de  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Posons  $\mathcal{A} = \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}$ . Pour tout  $z$  dans  $\mathbb{H}$ , montrons qu'il existe  $\gamma$  dans  $\Gamma$  tel que  $\gamma(z)$  appartienne à  $\Delta'$ .

Si  $z$  n'appartient pas à  $\Delta'$ , il existe  $a_1$  dans  $\mathcal{A}$  tel que  $z$  appartienne à  $B(a_1)$ . Posons  $z_1 = a_1^{-1}(z)$ . Si  $z_1$  appartient à  $\Delta'$ , on pose  $z_n = z_1$  pour tout  $n \geq 1$ . Sinon il existe  $a_2$  dans  $\mathcal{A} - \{a_1^{-1}\}$  tel que  $z_1$  appartienne à  $B(a_2)$  et on pose  $z_2 = a_2^{-1}(z_1)$ . De proche en proche, on construit une suite  $(z_n)_{n \geq 1}$ .

Si  $(z_n)_{n \geq 1}$  est stationnaire à partir du rang  $N$ , alors  $a_N^{-1} \cdots a_1^{-1}(z)$  appartient à  $\Delta'$ . Sinon, posons  $\gamma_n = a_1 \cdots a_n$ . Par construction,  $\gamma_n^{-1}(z)$  appartient à  $B(a_{n+1})$ . Considérons une suite extraite  $(\gamma_{n_p})_{p \geq 1}$  telle que  $a_{n_p+1} = a$ . Pour tout  $p$ , le point  $z$  appartient à  $\gamma_{n_p}(B(a))$ . Notons  $S$  la géodésique bordant  $B(a)$ . Pour tout  $p \geq 2$ , le demi-plan  $\gamma_{n_p}(B(a))$  est inclus dans  $\gamma_{n_{p-1}}(B(a))$  (voir l'argument de la propriété 1.4 (ii)). Le point  $z$  appartient à chacun de ces demi-plans donc il existe un compact  $K$  dans  $\mathbb{H}$  tel que  $a_1 \cdots a_{n_p}(S) \cap K \neq \emptyset$  pour tout  $p \geq 1$ . Or  $S$  est inclus dans  $\Delta'$  et  $\Delta' = \Delta \cup r\Delta \cup r^2\Delta \cup T_1\Delta \cup T_1r\Delta \cup T_1r^2\Delta$ , par conséquent il existe une infinité d'éléments  $\gamma$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tels que  $\gamma\Delta$  rencontre  $K$ . Ceci contredit le fait que  $\Delta$  est un domaine fondamental localement fini de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . On en déduit que la suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  est nécessairement stationnaire et donc qu'il existe  $\gamma$  dans  $\Gamma$  tel que  $\gamma(z) \in \Delta'$ .

De plus, pour tout  $\gamma$  non trivial dans  $\Gamma$ , l'ouvert  $\gamma(\mathring{\Delta}')$  est inclus dans un demi-plan ouvert  $\mathring{B}(a)$  avec  $a \in \mathcal{A}$  (voir argument de la propriété 1.4 (i)), donc son intersection avec  $\mathring{\Delta}'$  est vide.  $\square$

**Exercice 3.19.** Vérifier que la surface  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  est de la forme suivante.

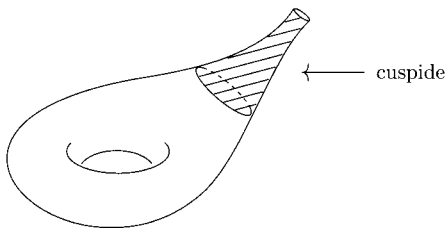


FIGURE 14

(Indication : utiliser le fait que  $\Delta'$  étant localement fini, l'application de l'ensemble des points de  $\Delta'$  modulo  $\Gamma$ , sur  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  qui à  $\Gamma z \cap \Delta'$  associe  $\Gamma z$  est un homéomorphisme (voir exercice I.2.15).)

Le domaine  $\Delta'$  n'étant pas un domaine de Dirichlet nous ne pouvons pas, si nous nous en tenons au chapitre I, en déduire que  $\Gamma$  est un réseau non

uniforme. Cette propriété est cependant vraie mais nécessite une démonstration. Celle que nous proposons n'est pas la plus directe, elle a cependant l'avantage de mettre en jeu des propriétés intéressantes du groupe.

Commençons par étudier la nature des éléments de  $\Gamma$ . Pour cela introduisons la translation non triviale définie par

$$[\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}] = \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_2 \alpha_1.$$

**Exercice 3.20.** Démontrer que  $[\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}]$  engendre le stabilisateur du point  $\infty$  dans  $\Gamma$ .

**Propriété 3.21.** Les isométries paraboliques de  $\Gamma$  sont conjuguées dans  $\Gamma$  aux puissances de  $[\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}]$ .

*Démonstration.* Fixons  $z$  dans  $\mathring{\Delta}'$ . Considérons une isométrie parabolique  $\gamma$  de  $\Gamma$  et écrivons la sous forme d'un mot réduit  $s_1 \cdots s_n$  avec  $\mathcal{A} = \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}$ . On peut supposer  $s_1 \neq s_n^{-1}$ . Dans ce cas,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma^k(i)$  appartient à  $B(s_1)$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma^{-k}(i)$  appartient à  $B(s_n^{-1})$ . Ces deux limites sont égales à l'unique point fixe  $x$  de  $\gamma$ , donc  $x$  appartient à  $\{-1, 0, 1, \infty\}$ . Si  $x = \infty$  alors  $\gamma$  appartient au groupe engendré par  $[\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}]$ . Par ailleurs,  $1 = \alpha_1(\infty)$ ,  $-1 = \alpha_2(\infty)$ , et  $0 = \alpha_2^{-1} \alpha_1(\infty)$ , donc dans tous les cas,  $\gamma$  est conjugué à une puissance de  $[\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}]$ .  $\square$

Nous allons à présent démontrer que  $\Gamma$  est un réseau non uniforme en utilisant le critère suivant (I.4.12 et I.4.13) :

$$L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty) \quad \text{et} \quad L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_h(\Gamma), \quad \text{avec} \quad L_p(\Gamma) \neq \emptyset.$$

**Exercice 3.22.** Soient  $H$  un groupe fuchsien non élémentaire et  $N$  un sous-groupe distingué. Démontrer que  $L(H) = L(N)$ .

(Indication : utiliser la minimalité de l'ensemble limite.)

**Propriété 3.23.** Le groupe  $\Gamma$  est un réseau non uniforme et  $L_p(\Gamma) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .

*Démonstration.* Le groupe  $\Gamma$  est distingué dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , donc on a  $L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$ . Analysons  $L_p(\Gamma)$ .

On sait que le point  $\infty$  appartient à cet ensemble, par ailleurs pour tout  $\gamma$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , l'homographie  $\gamma[\alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}]\gamma^{-1}$  est une isométrie parabolique de  $\Gamma$  fixant  $\gamma(\infty)$ , donc  $L_p(\Gamma) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  (propriété 3.7).

Considérons à présent un irrationnel  $x$ . Il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  du groupe modulaire vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_x(z, \gamma_n(z)) = +\infty.$$



Le groupe  $\Gamma$  étant d'indice fini dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , quitte à extraire une sous-suite, on a  $\gamma_n = g_n \gamma$ , avec  $g_n$  dans  $\Gamma$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_x(z, g_n(x)) = +\infty$ , donc  $x$  est un point horocyclique relativement à  $\Gamma$ .  $\square$

#### 4. Développements en fractions continues

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  est l'ensemble des points paraboliques associés au groupe modulaire. Dans ce paragraphe, nous continuons à tisser des liens entre l'arithmétique et la géométrie hyperbolique par le biais de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , en retrouvant de façon géométrique le développement en fractions continues des nombres irrationnels positifs  $x$ .

Rappelons la définition algorithmique de ce développement. Pour cela, posons  $x_0 = x$  et  $n_0 = E(x_0)$ , où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . Pour tout  $i \geq 1$ , on définit  $x_i$  et  $n_i$  par récurrence de la façon suivante :

$$x_i = 1/(x_{i-1} - n_{i-1}) \quad \text{et} \quad n_i = E(x_i).$$

Notons  $[n_0; n_1, \dots, n_k]$  le rationnel défini par

$$[n_0; n_1, \dots, n_k] = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}}}$$

La suite de rationnels  $([n_0; n_1, \dots, n_k])_{k \geq 1}$  converge vers  $x$  (voir [37]). On appelle *développement en fractions continues* de  $x$  l'écriture de  $x$  sous la forme  $[n_0; n_1, \dots]$ .

**4.1. Interprétation géométrique du développement en fractions continues.** Introduisons le triangle hyperbolique  $T$  de sommets infinis les points  $\infty, 1, 0$ . Ce triangle est relié au domaine fondamental  $\Delta$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  introduit dans l'exercice 3.5 et défini par

$$\Delta = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |z| \geq 1 \quad \text{et} \quad |z - 1| \geq 1\}.$$

Plus précisément, notons  $r$  l'homographie définie par  $r(z) = (z - 1)/z$ . On a l'égalité (figure 15)

$$T = \Delta \cup r\Delta \cup r^2\Delta.$$

On déduit de cette égalité les propriétés suivantes :

$$\bigcup_{\gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})} \gamma T = \mathbb{H} \quad \text{et si} \quad \gamma \mathring{T} \cap \mathring{T} \neq \emptyset, \text{ alors } \gamma \in \{\mathrm{Id}, r, r^2\}.$$

Ce pavage de  $\mathbb{H}$  par les images de  $T$  est appelé *pavage de Farey*.

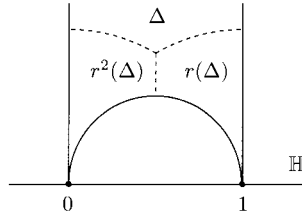


FIGURE 15

Notons  $L$  la géodésique non orientée d'extrémités 0 et  $\infty$  et  $L^+$  la géodésique  $L$  orientée de 0 vers  $\infty$ .

On appelle *lignes de Farey* les images de  $L$  par  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Les extrémités de  $\mathcal{T}_1(L)$  sont les points 1,  $\infty$ , celles de  $\mathcal{T}_{-1}(L)$  sont 0, 1, donc les côtés de  $T$  et, par conséquent les côtés des triangles  $\gamma T$ , avec  $\gamma$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , sont les lignes de Farey (figure 16).

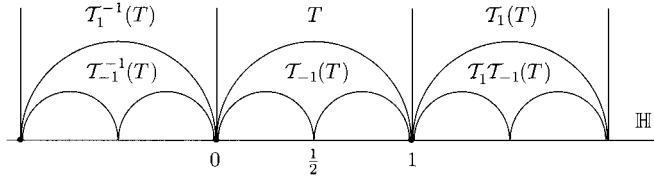


FIGURE 16

Pour toute ligne de Farey orientée  $(xy)$ , il existe par définition  $\gamma$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tel que  $\gamma(L)$  soit la ligne de Farey non orientée d'extrémités  $x$  et  $y$ . Si  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(\infty) = y$  on a  $\gamma(L^+) = (xy)$ . Sinon,  $\gamma s(L^+) = (xy)$  avec  $s(z) = -1/z$ .

Il existe donc  $g$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  vérifiant  $g(L^+) = (xy)$ . Cet élément est unique car  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  ne contient pas d'homothétie non triviale.

On rappelle que  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_{-1}$  désignent les isométries définies par  $\mathcal{T}_1(z) = z + 1$ ,  $\mathcal{T}_{-1}(z) = z/(z + 1)$ .

**Définition 4.1.** Soit  $n > 1$ . On dit que  $n$  lignes de Farey orientées  $L_1^+, \dots, L_n^+$  sont consécutives s'il existe  $\gamma$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et  $\varepsilon$  dans  $\{\pm 1\}$  tels que pour tout  $1 \leq i \leq n$

$$L_i^+ = \gamma \mathcal{T}_\varepsilon^i L^+.$$

Posons  $L_i^+ = (x_i y_i)$ . Remarquons que si  $L_1^+, \dots, L_n^+$  sont consécutives alors, si  $\varepsilon = 1$ , on a  $y_i = \gamma(\infty)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et, si  $\varepsilon = -1$ , on a  $x_i = \gamma(0)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Les figures 17, 18, 19 représentent différents cas de trois lignes de Farey orientées consécutives.

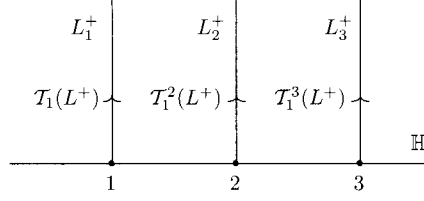


FIGURE 17

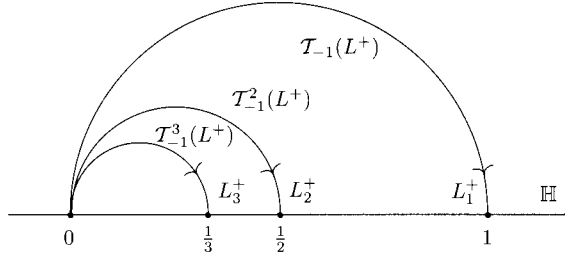


FIGURE 18

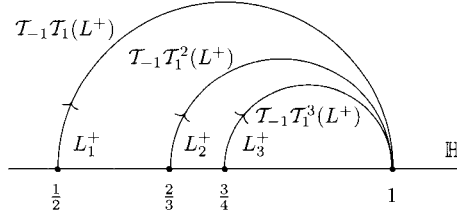


FIGURE 19

Si  $x$  est un élément de  $\mathbb{H}(\infty)$ , le caractère irrationnel de  $x$  se lit sur le nombre de lignes de Farey rencontrées par le rayon géodésique  $[i, x)$ .

**Lemme 4.2.** *Soit  $x$  dans  $\mathbb{H}(\infty)$ . Le rayon  $[i, x)$  rencontre un nombre fini de lignes de Farey si et seulement si  $x$  appartient à  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $x$  appartienne à  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Dans ce cas, d'après la propriété 3.7(ii), il existe  $\gamma$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tel que  $\gamma(x) = \infty$ . Puisque le rayon  $\gamma^{-1}([i, x))$  est une demi-droite verticale passant par  $\gamma^{-1}(i)$ , il existe  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  et  $z$  dans  $[i, x)$  tels que le rayon  $T_1^n \gamma^{-1}([z, x))$  soit inclus dans  $T$ . Le domaine  $\Delta$  est localement fini (car  $E$  est localement fini (propriété 3.2)), donc  $T_1^n \gamma^{-1}([i, z]_h)$  ne rencontre qu'un nombre fini d'images de  $T$  par  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

En conclusion,  $T_1^n \gamma^{-1}([i, x))$ , et donc  $[i, x)$ , ne rencontre qu'un nombre fini de lignes de Farey.

Supposons que  $[i, x)$  ne rencontre qu'un nombre fini de lignes de Farey. Il existe alors  $z$  dans  $[i, x)$  et  $\gamma$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tels que  $[z, x)$  soit inclus dans  $\gamma(T)$ . Autrement dit  $[\gamma^{-1}(z), \gamma^{-1}(x))$  est un rayon géodésique inclus dans  $T$ . Par conséquent,  $\gamma^{-1}(x)$  appartient à  $\{0, 1, \infty\}$  et donc  $x$  appartient à  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .  $\square$

Nous nous intéressons à présent uniquement aux irrationnels positifs. Soient  $x$  un irrationnel *positif* et  $r : [0, +\infty) \rightarrow [i, x)$  le paramétrage par longueur d'arcs de  $[i, x)$  tel que  $r(0) = i$ . D'après le lemme précédent,  $[i, x)$  rencontre une infinité de lignes de Farey. Notons  $(L_n)_{n \geq 1}$  la suite de ces lignes rencontrées successivement par  $(r(t))_{t > 0}$ , ordonnées dans le sens des  $t$  croissants. Pour chaque  $n$ , on oriente  $L_n$  de sorte que l'angle orienté au point d'intersection  $r(t_n)$ , entre  $[i, x)$  et  $L_n$ , appartienne à  $]0, \pi[$ . On note  $L_n^+$  la géodésique  $L_n$  ainsi orientée. Si  $L_n$  n'est pas une demi-droite verticale,  $L_n^+$  est orientée de la gauche vers la droite.

Posons  $L_n^+ = (x_n y_n)$  (figure 20) et notons  $\gamma_n$  l'unique élément de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tel que

$$\gamma_n(L^+) = L_n^+.$$

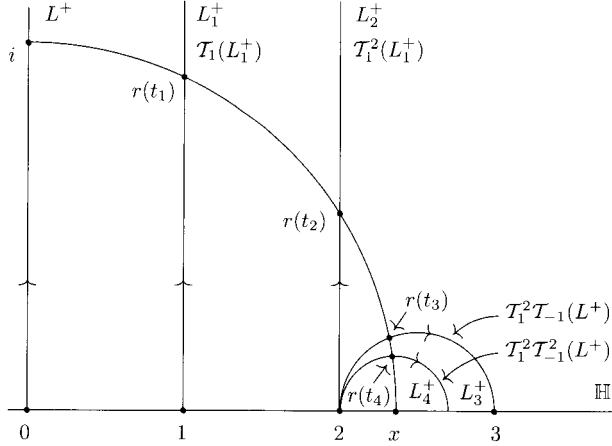


FIGURE 20

Considérons le rayon géodésique  $\gamma_n^{-1}([i, x))$ . Puisque  $L_n^+ = \gamma_n(L^+)$ , ce rayon coupe  $L^+$  et l'angle au point d'intersection  $\gamma_n^{-1}(r(t_n))$  entre  $\gamma_n^{-1}([i, x))$  et  $L^+$  appartient à  $]0, \pi[$ . Donc,  $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}^+)$  est égal à  $T_{-1}(L^+)$  ou  $T_1(L^+)$ . Par conséquent  $\gamma_{n+1} = \gamma_n T_{\varepsilon_n}$ , avec  $\varepsilon_n = \pm 1$ .

Si  $\varepsilon_1 = 1$ , posons  $n_0 = \max\{n \geq 1 \text{ tel que } \varepsilon_k = 1 \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n\}$  et si  $\varepsilon_1 = -1$ , posons  $n_0 = 0$ .

Dans les deux cas, pour tout  $p \geq 1$ , posons

$$n_p = \max\{n > n_{p-1} \mid \forall n_{p-1} < k \leq n, \varepsilon_k = (-1)^p\}.$$

Remarquons que  $n_k$  appartient à  $\mathbb{N}^*$  pour tout  $k \geq 1$ .

**Exercice 4.3.** Démontrer que, pour tout  $k \geq 1$ ,  $n_k$  représente le plus grand entier  $p \geq 1$  tel que  $L_{n_{p-1}+1}^+, \dots, L_{n_{p-1}+p}^+$  soient des lignes de Farey orientées consécutives.

Pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$\gamma_{n_k} = T_1^{n_0} \dots T_{(-1)^k}^{n_k}.$$

Posons  $g_k = \gamma_{n_k}$ . L'exercice suivant relie le rationnel  $[n_0; n_1, \dots, n_k]$ , défini au début de ce paragraphe, au point  $g_k(0)$ .

**Exercice 4.4.** Soit  $k \geq 2$ . Démontrer que si  $k$  est pair, alors  $g_k(0) = [n_0; n_1, \dots, n_k]$  et  $g_k(\infty) = [n_0; \dots, n_{k-1}]$ , et si  $k$  est impair, alors  $g_k(0) = [n_0; n_1, \dots, n_{k-1}]$  et  $g_k(\infty) = [n_0; n_1 \dots n_k]$ .  
(Indication : utiliser les relations  $T_1^n(z) = z + n$  et  $T_{-1}^n(z) = 1/(n + 1/z)$ .)

La proposition suivante montre que  $[n_0; n_1, \dots]$  est le développement en fractions continues de  $x$ .

**Proposition 4.5.** La suite de rationnels  $([n_0; n_1, \dots, n_k])_{k \geq 1}$  converge vers  $x$ . De plus, s'il existe une suite  $(n'_k)_{k \geq 1}$  vérifiant  $n'_0 \in \mathbb{N}, n'_k \in \mathbb{N}^*$  pour tout  $k \geq 1$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} [n'_0; n'_1, \dots, n'_k] = x$ , alors  $n_k = n'_k$  pour tout  $k \geq 0$ .

*Démonstration.* La géodésique  $g_k(L)$  rencontre le rayon géodésique  $[i, x)$ . Le point  $x$  appartient à l'intervalle de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $g_k(0), g_k(\infty)$ . Pour tout  $k \geq 1$ , les rationnels  $g_k(0)$  et  $g_k(\infty)$  appartiennent à l'intervalle  $[n_0, n_0 + 1]$  donc  $0 < |g_k(0) - g_k(\infty)| \leq 1$ . Montrons que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |g_k(0) - g_k(\infty)| = 0$ . Supposons qu'il existe  $d > 0$  et une sous-suite  $(g_{k_p})_{p \geq 1}$  tels que  $|g_{k_p}(0) - g_{k_p}(\infty)| > d$ . Dans ce cas, la géodésique  $g_{k_p}(L)$  rencontre le segment euclidien  $I$  de  $\mathbb{H}$  d'extrémités  $n_0 + id/2$  et  $n_0 + 1 + id/2$ . Puisque  $L$  est un côté de  $T$ , et puisque  $T$  est une réunion finie d'images de  $\Delta$ , on obtient qu'il existe une infinité d'isométries  $\gamma$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  telles que  $\gamma\Delta$  rencontre le compact  $I$ . Ceci contredit le fait que  $\Delta$  soit localement fini. On déduit de cette propriété et de l'exercice 4.3 que la suite  $([n_0; n_1, \dots, n_k])_{k \geq 1}$  converge vers  $x$ .

Montrons l'unicité. Supposons que  $([n'_0; n'_1, \dots, n'_k])_{k \geq 1}$  converge vers  $x$ . On a alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} T_1^{n'_0} \dots T_1^{n'_{2p}}(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} T_1^{n_0} \dots T_1^{n_{2p}}(0).$$

Le rationnel  $\mathcal{T}_1^{n'_0} \cdots \mathcal{T}_1^{n'_{2p}}(0)$  appartient à  $]n'_0, n'_0 + 1]$  et  $\mathcal{T}_1^{n_0} \cdots \mathcal{T}_1^{n_{2p}}(0)$  appartient à  $]n_0, n_0 + 1]$  donc  $n'_0 = n_0$ . Par conséquent,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathcal{T}_1^{n'_1} \cdots \mathcal{T}_1^{n'_{2p}}(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathcal{T}_1^{n_1} \cdots \mathcal{T}_1^{n_{2p}}(0).$$

En appliquant le même raisonnement aux suites

$$\left( \frac{1}{[0; n'_1, \dots, n'_{2p}]} \right)_{p \geq 1} = ([n'_1; n'_2, \dots, n'_{2p}])_{p \geq 1}$$

et 
$$\left( \frac{1}{[0; n_1, \dots, n_{2p}]} \right)_{p \geq 1} = ([n_1; n_2, \dots, n_{2p}])_{p \geq 1},$$

on obtient  $n_1 = n'_1$ . De proche en proche, on a  $n_k = n'_k$  pour tout  $k \geq 0$ .  $\square$

En résumé, pour trouver le développement en fractions continues de  $x$  en termes de géométrie hyperbolique, il suffit d'identifier  $x$  à un point de  $\mathbb{H}(\infty)$ , d'associer au rayon  $[i, x)$ , selon la procédure décrite précédemment, une suite infinie de lignes de Farey orientées  $(L_i^+ = (x_i, y_i))_{i \geq 1}$  rencontrées par ce rayon, et de compter successivement, à partir de  $L_1^+$ , le nombre maximal de lignes de Farey orientées consécutives. On a alors :

- $n_0 = [x], x_{n_0+1} = \cdots = x_{n_1} = n_0, x_{n_1+1} \neq n_0$  ;
- pour tout  $k \geq 1$  :
  - si  $k$  est pair, alors  $y_{n_{k-1}} = y_{n_{k-1}+1} = \cdots = y_{n_k}$  et  $y_{n_k+1} \neq y_{n_k}$ ,
  - si  $k$  est impair, alors  $x_{n_{k-1}} = x_{n_{k-1}+1} = \cdots = x_{n_k}$  et  $x_{n_k+1} \neq x_{n_k}$ .

**Exemples 4.6.** Vérifier que dans la situation représentée par la figure ci-dessous on a  $n_0 = 2, n_1 = 2$ , et  $n_2 \geq 2$ .

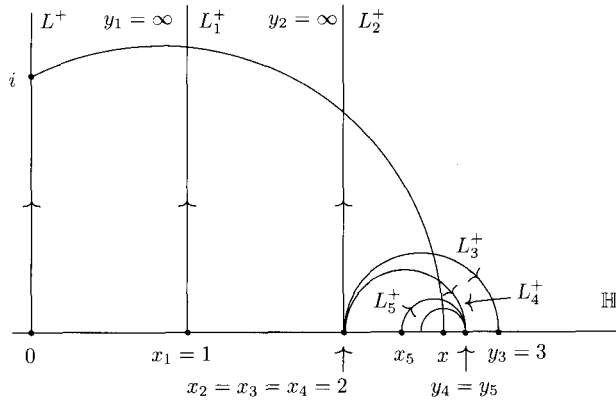


FIGURE 21

Notons  $S^+$  l'ensemble des suites d'entiers naturels défini par

$$S^+ = \{(n_i)_{i \geq 0} \mid n_0 \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}^* \text{ pour } i \geq 1\}.$$

Introduisons l'application  $F$  de  $\mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$  dans  $S^+$  qui à  $x$  associe la suite  $(n_i)_{i \geq 0}$  intervenant dans son développement en fractions continues.

**Propriété 4.7.** *L'application  $F : \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+ \rightarrow S^+$  est bijective.*

*Démonstration.* D'après la proposition 4.5, il suffit de montrer que  $F$  est surjective. Pour toute suite  $(n_k)_{k \geq 0}$  dans  $S^+$ , posons  $g_k = T_1^{n_0} \circ \dots \circ T_{(-1)^k}^{n_k}$ . En reprenant l'argument utilisé dans la démonstration de la proposition 4.5, on obtient  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |g_k(0) - g_k(\infty)| = 0$ .

Si  $k$  est impair, alors  $g_{k+1}(\infty) = g_k(\infty)$ , et  $g_{k+1}(0)$  appartient au segment d'extrémités  $g_k(\infty), g_k(0)$ .

Si  $k$  est pair, alors  $g_{k+1}(0) = g_k(0)$  et  $g_{k+1}(\infty)$  appartient au segment d'extrémités  $g_k(\infty), g_k(0)$ .

Dans tous les cas, on obtient que la suite des segments euclidiens  $(I_k)_{k \geq 1}$  d'extrémités  $g_k(0), g_k(\infty)$  est emboîtée et donc que les suites  $(g_k(0))_{k \geq 1}$  et  $(g_k(\infty))_{k \geq 1}$  convergent vers le même réel positif  $x$ . D'après l'exercice 4.4, on a  $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} [n_0; n_1, n_2, \dots, n_k]$ . Ce point appartient aux segments  $I_k$  donc  $[i, x)$  rencontre  $g_k(L)$ . D'après le lemme 4.2, le point  $x$  est irrationnel.  $\square$

Pour des raisons de commodité nous nous sommes restreints aux irrationnels positifs. Toutefois, si  $y$  est un irrationnel négatif, on peut lui associer une suite d'entiers négatifs  $(m_i)_{i \geq 0}$  tous non nuls sauf éventuellement le premier, construite à partir de la suite  $F(-1/y) = (n_i)_{i \geq 0}$ , et définie par  $m_i = -n_i$ . Cette suite est caractérisée par la propriété suivante :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T_{-1}^{m_0} T_1^{m_1} \dots T_{\varepsilon_k}^{m_k}(0) = y,$$

avec  $\varepsilon_k = -1$  si  $k$  est pair et  $\varepsilon_k = 1$  sinon.

On obtient ainsi une bijection des irrationnels vers l'ensemble des suites d'entiers relatifs dont les termes sont tous non nuls sauf éventuellement le premier et ont tous le même signe.

Géométriquement, cette bijection correspond à un codage des points coniques du groupe modulaire. Comme dans le cas des groupes de Schottky (propriété 2.4), ce codage d'un point conique  $x$  permet de construire une suite contenue dans l'orbite du point  $i$  sous  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  restant à distance bornée du rayon géodésique  $[i, x)$ .

Il suffit de le démontrer pour les  $x$  positifs. Posons  $F(x) = (n_i)_{i \geq 0}$  et  $\gamma_k = T_1^{n_0} \dots T_{-1}^{n_{2k+1}}$  pour tout  $k \geq 0$ .

**Propriété 4.8.** *La suite  $(\gamma_k(i))_{k \geq 0}$  reste à distance uniformément bornée du rayon géodésique  $[i, x)$ .*

*Démonstration.* Posons  $s(z) = -1/z$ . On a la relation  $s\mathcal{T}_1^{-1}s = \mathcal{T}_{-1}$ , donc  $s\mathcal{T}_{-1}^{-1}s = \mathcal{T}_1$ . Le point  $i$  appartient à la géodésique  $(s(x) x)$ . Démontrer la propriété 4.8 revient à démontrer que la suite  $((\gamma_k^{-1}(s(x)), \gamma_k^{-1}(x)))_{k \geq 0}$  est incluse dans un compact de  $\mathbb{H}(\infty) \times \mathbb{H}(\infty)$  privé de la diagonale (exercice I.3.10).

L'image par  $F$  de  $\gamma_k^{-1}(x)$  est la suite  $(n_{2k+2+i})_{i \geq 0}$ . Comme  $n_{2k+2}$  n'est pas nul,  $\gamma_k^{-1}(x)$  est supérieur à 1. Par ailleurs on a

$$s\gamma_k^{-1}(s(x)) = \mathcal{T}_1^{n_{2k+1}} \mathcal{T}_{-1}^{n_{2k}} \dots \mathcal{T}_{-1}^{n_0}(x).$$

Donc

$$F(s\gamma_k^{-1}s(x)) = \begin{cases} (n_{2k+1}, n_{2k}, \dots, n_0, n_0, n_1, n_2, \dots) & \text{si } n_0 \neq 0, \\ (n_{2k+1}, n_{2k}, \dots, n_1, n_1, n_2, \dots) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans les deux cas, le premier terme n'est pas nul donc  $\gamma_k^{-1}(s(x))$  appartient à  $] -1, 0[$ . Par conséquent, pour tout  $k \geq 0$ , la distance euclidienne entre  $\gamma_k^{-1}(x)$  et  $\gamma_k^{-1}(s(x))$  est supérieure à 1.  $\square$

**4.2. Applications aux isométries hyperboliques du groupe modulaire.** Intéressons-nous aux irrationnels positifs dont l'image par  $F$  est une suite presque périodique. Comme pour le codage des points coniques associé à un groupe de Schottky, nous allons montrer que les suites presque périodiques codent les points fixes des isométries hyperboliques du groupe modulaire.

**Propriété 4.9.**

(i) *Un irrationnel positif  $x$  est fixé par une isométrie hyperbolique de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  si et seulement si  $F(x)$  est presque périodique.*

(ii) *Une isométrie de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  est hyperbolique si et seulement si elle est conjuguée dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  à une isométrie de la forme  $\mathcal{T}_1^{m_1} \mathcal{T}_{-1}^{m_2} \dots \mathcal{T}_{-1}^{m_k}$  avec  $m_i > 0$  et  $k$  pair.*

*Démonstration.*

(i) Soit  $x$  un irrationnel positif. Supposons que la suite  $F(x) = (n_i)_{i \geq 0}$  soit périodique, dans ce cas  $n_0$  n'est pas nul. Notons  $T$  la période de cette suite, et posons  $k = T - 1$ , si  $T$  est pair, et  $k = 2T - 1$  sinon. On a  $x = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\mathcal{T}_1^{n_0} \dots \mathcal{T}_{-1}^{n_k})^p(0)$ . Ceci montre que  $x$  est fixé par  $\mathcal{T}_1^{n_0} \dots \mathcal{T}_{-1}^{n_k}$ , qui est hyperbolique car  $x$  est irrationnel.



Si  $F(x)$  est périodique à partir d'un rang  $q \geq 1$ , il suffit d'appliquer le raisonnement précédent au point  $(T_1^{n_0} \dots T_{-1}^{n_q})^{-1}(x)$  si  $q$  est impair, et  $(T_1^{n_0} \dots T_{-1}^{n_{q-1}})^{-1}(x)$  si  $q$  est pair.

Considérons à présent une isométrie hyperbolique  $\gamma$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Posons  $F(\gamma^+) = (n_i)_{i \geq 0}$ . D'après l'exercice 4.5, les suites  $(g_k(0))_{k \geq 0}$  et  $(g_k(\infty))_{k \geq 0}$  convergent vers  $\gamma^+$ . À partir d'un rang impair  $k$ , le segment euclidien d'extrémités  $g_k(0), g_k(\infty)$  ne contient donc pas  $\gamma^-$ . Par conséquent, il existe  $k' > k$  tel que  $\gamma L_k^+ = L_{k'}^+$ . Ceci entraîne  $\gamma g_k = g_{k'}$  et donc  $\gamma = g_k T_1^{n_{k+1}} \dots T_{(-1)^{k'}}^{n'_k} g_k^{-1}$ . Si  $k'$  est impair,  $F(g_k^{-1}(\gamma^+))$  est périodique. Sinon,  $F(g_k^{-1}(\gamma^+))$  est périodique à partir d'un certain rang. Dans les deux cas,  $F(\gamma^+)$  est presque périodique.

(ii) Soit  $\gamma$  une isométrie hyperbolique de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Quitte à conjuguer  $\gamma$  par une translation, on peut supposer  $\gamma^+ > 0$ . D'après la fin de la démonstration précédente,  $\gamma$  est conjugué à  $T_1^{n_{k+1}} \dots T_{(-1)^{k'}}^{n'_k}$  donc à une isométrie de la forme  $T_1^{m_1} \dots T_{-1}^{m_p}$  avec  $m_i > 0$  et  $p$  pair.

Réciproquement, une isométrie de la forme  $T_1^{m_1} T_{-1}^{m_2} \dots T_{-1}^{m_k}$  avec  $m_i > 0$  et  $k$  pair, est hyperbolique car elle fixe les réels  $\lim_{p \rightarrow +\infty} (T_1^{m_1} \dots T_{-1}^{m_k})^p(0)$  et  $\lim_{p \rightarrow -\infty} (T_1^{m_1} \dots T_{-1}^{m_k})^p(0)$ , qui sont différents.  $\square$

Ces propriétés vont nous permettre d'établir un lien entre les points fixes des isométries hyperboliques du groupe modulaire et les réels *quadratiques*, c'est-à-dire solutions d'une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{N}^*, \quad b, c \in \mathbb{Z}.$$

**Proposition 4.10.** *Soit  $x$  un irrationnel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $x$  est fixé par une isométrie hyperbolique de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  ;
- (ii)  $x$  est quadratique.

Nous allons donner une démonstration de ce résultat bien connu (voir par exemple [37]) reposant sur les transformations  $T_1$  et  $T_{-1}$ .

*Démonstration.* L'implication de (i) vers (ii) repose uniquement sur le fait qu'un point fixe  $x$  d'une homographie  $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$  satisfait l'équation diophantienne

$$Ax^2 + Bx - C = 0,$$

avec  $A = c, B = d - a$  et  $C = -b$ , et que l'entier  $c$  n'est pas nul car  $\gamma$  est hyperbolique.

Démontrons que (ii) entraîne (i). Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux racines irrationnelles différentes d'une équation de la forme

$$Ax^2 + Bx - C = 0$$

avec  $A, B, C$  dans  $\mathbb{Z}$ .

Montrons que ces deux réels sont fixés par des isométries hyperboliques du groupe modulaire. Quitte à les remplacer par  $g(\alpha)$  et  $g(\beta)$ , avec  $g$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , on peut supposer  $\alpha > 0$  et  $\beta < 0$ , et donc  $A > 0$  et  $C > 0$ . Posons  $F(\alpha) = (n_i)_{i \geq 0}$ . Pour tout  $k > 0$ , introduisons les réels

$$x_k = (T_1^{n_0} \cdots T_{-1}^{n_{k-1}})^{-1}(\alpha) \quad \text{et} \quad y_k = (T_1^{n_0} \cdots T_{-1}^{n_{k-1}})^{-1}(\beta),$$

et posons  $x_0 = \alpha$ ,  $y_0 = \beta$ .

Puisque  $x_k = \lim_{p \rightarrow +\infty} [n_k; n_{k+1}, \dots, n_{k+p}]$ , le réel  $x_k$  est positif. Par ailleurs, en raisonnant par récurrence, on montre que  $y_k$  est négatif et que les deux réels  $x_k$  et  $y_k$  sont solutions d'une équation de la forme

$$A_k x^2 + B_k x - C_k = 0$$

avec  $A_k, B_k, C_k \in \mathbb{Z}$ ,  $A_k > 0$ ,  $C_k > 0$  et  $B_k^2 + 4A_k C_k = B^2 + 4AC$ . Les coefficients  $A_k, B_k, C_k$  appartiennent donc à un ensemble fini. Par conséquent, il existe  $k_2 > k_1 \geq 0$  tels que  $A_{k_1} = A_{k_2}$ ,  $B_{k_1} = B_{k_2}$ ,  $C_{k_1} = C_{k_2}$ . Ceci entraîne  $x_{k_1} = x_{k_2}$  et donc

$$(T_1^{n_{k_1}} \cdots T_{-1}^{n_{k_2-1}})(x_{k_2}) = x_{k_2}.$$

On obtient que  $x_{k_2}$  est le point fixe d'une isométrie hyperbolique  $g'$  du groupe modulaire et donc que  $\alpha$  est fixé par un conjugué de  $g'$ . Le même raisonnement appliqué à  $y_{k_2}$  permet de montrer que  $\beta$  est également fixé par  $g'$ .  $\square$

Pour terminer ce paragraphe nous nous intéressons aux déplacements des isométries de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Rappelons que le déplacement  $\ell(\gamma)$  d'une isométrie  $\gamma$  est défini par (voir I.2.2)

$$\ell(\gamma) = \inf_{z \in \mathbb{H}} d(z, \gamma(z)).$$

**Exercice 4.11.** Soit  $\gamma(z) = (az+b)/(cz+d)$  une isométrie hyperbolique de  $G$ . Notons  $\lambda$  la valeur propre de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dont la valeur absolue est  $> 1$ . Démontrer l'égalité

$$\ell(\gamma) = 2 \ln |\lambda|.$$

La propriété suivante relie le point fixe d'une isométrie hyperbolique de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  à son déplacement. Notons  $\sigma$  l'application de l'ensemble des irrationnels  $> 1$  sur lui-même défini par

$$\sigma(x) = \frac{1}{x - n_0},$$

où  $n_0$  est le premier terme de  $F(x)$ . Remarquons que  $F(\sigma(x))$  est la suite décalée  $(n_{i+1})_{i \geq 0}$ .

**Propriété 4.12.** Soit  $\gamma$  une isométrie de la forme  $\gamma = T_1^{m_1} T_{-1}^{m_2} \dots T_{-1}^{m_k}$  avec  $m_i$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $k$  pair. On a

$$\ell(\gamma) = 2 \ln(\gamma^+ \times \sigma(\gamma^+) \times \dots \times \sigma^{k-1}(\gamma^+)).$$

*Démonstration.* Posons  $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$ ,  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $\lambda = e^{\ell(\gamma)/2}$ . On a

$$M \begin{pmatrix} \gamma^+ \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma^+ \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Introduisons les matrices  $D_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$  et  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ces matrices vérifient les relations suivantes :

$$R^2 = \text{Id}, D_n R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R D_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant ces relations, on obtient

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix} = D_{m_1} \dots D_{m_k} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix}.$$

Soit  $x \neq 0$ , on a  $D_m \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ m+1/x \end{pmatrix}$ . Donc  $D_{m_k} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix} = \gamma^+ \begin{pmatrix} 1 \\ m_k+1/\gamma^+ \end{pmatrix}$ . Or  $m_k + 1/\gamma^+ = \sigma^{k-1}(\gamma^+)$ , donc

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix} = \gamma^+ D_{m_1} \dots D_{m_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^{k-1}(\gamma^+) \end{pmatrix}.$$

De proche en proche, on obtient

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix} = \gamma^+ \sigma^{k-1}(\gamma^+) \dots \sigma^2(\gamma^+) D_{m_1} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\gamma^+) \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs,  $D_{m_1} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\gamma^+) \end{pmatrix} = \sigma(\gamma^+) \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix}$  donc  $\lambda = (\gamma^+ \prod_{i=1}^{k-1} \sigma^i(\gamma^+))$ .  $\square$

Cette propriété permet de donner une interprétation en terme de géométrie hyperbolique du *nombre d'or*  $\mathcal{N}$  défini par

$$\mathcal{N} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**Corollaire 4.13.** Pour toute isométrie hyperbolique  $\gamma$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , on a

$$\ell(\gamma) \geq 2 \ln((T_1 T_{-1})^+) = 4 \ln \mathcal{N}.$$

*Démonstration.* Soit  $\gamma$  une isométrie hyperbolique de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Notons  $x$  le point fixe de cette dernière isométrie. D'après la propriété 4.9(ii), cette isométrie est conjuguée à une isométrie de la forme  $T_1^{m_1} \dots T_{-1}^{m_k}$ . Pour  $1 \leq i \leq k$ , remarquons que  $\sigma^i(x)$  est de la forme  $m_{i+1} + 1/(m_{i+2} + x_i)$ , avec  $0 < x_i < 1$ . Ainsi, si l'un des  $m_i$  est égal à 2, alors il existe  $0 \leq i, j \leq k-1$

et  $i \neq j$  tels que  $\sigma^i(x) = 2 + 1/y$  avec  $y > 1$ , et  $\sigma^j(x) = m_{j+1} + 1/(2 + x_j)$  avec  $0 < x_j < 1$ .

On déduit de ces remarques et de la propriété 4.12, l'inégalité suivante :

$$\ell(\gamma) > 2 \ln(2 \times (1 + 1/3)) = 2 \ln 8/3.$$

Si l'un des  $m_i$  est  $\geq 3$ , on a  $\ell(\gamma) \geq 2 \ln 3$ . Si tous les  $m_i$  sont égaux à 1, alors  $\gamma$  est une puissance de  $\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}$ . Le point fixe attractif  $x$  de  $\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}$  vérifie  $x = 1 + 1/x$  donc  $x$  est égal à  $\mathcal{N}$  et, d'après la propriété 4.12, on a  $\ell(\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}) = 2 \ln \mathcal{N}^2$   $\square$

Sur la surface modulaire  $S = \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ , le nombre d'or correspond donc à la racine quatrième de l'exponentielle de la longueur de la plus courte géodésique compacte de cette surface (voir le paragraphe III.3 pour la notion de géodésiques sur  $S$ ).

## 5. Commentaire

La construction des groupes de Schottky et le codage de leur ensemble limite que nous avons exposés dans ce chapitre se généralisent aux variétés de Hadamard pincées  $X$  (voir le commentaire du chapitre I) dont le groupe des isométries positives contient au moins deux éléments  $g_1, g_2$  non elliptiques n'ayant aucun point fixe en commun. Sous cette condition, pour  $n_0$  suffisamment grand, il existe deux compacts disjoints  $K_1$  et  $K_2$  de  $X(\infty)$  vérifiant pour tous  $i = 1, 2$  et  $|n| \geq n_0$  [29]

$$g_i^n(X(\infty) - K_i) \subset K_i.$$

Une application du *lemme du ping-pong* [33] montre que le groupe engendré par  $g_1, g_2$  est un groupe kleinien, libre. Un tel groupe est géométriquement fini [20]. Sans aucune autre hypothèse sur  $X$ , ces groupes, que l'on appelle encore *groupes de Schottky*, et leurs variantes, sont les seuls groupes keniens non élémentaires, accessibles.

En revanche, si on se restreint au cas où  $X$  est un espace symétrique de rang 1, on peut construire des groupes keniens (en général des réseaux) par des méthodes arithmétiques.

Dans le cas particulier du demi-plan de Poincaré, les groupes arithmétiques sont connus [36, Chapter 5], le groupe modulaire et  $\Gamma(2)$  appartiennent à cette riche famille. Signalons la construction d'un exemple assez inattendu de réseau inclus dans le groupe des homographies à coefficients rationnels, non commensurable au groupe modulaire, et dont l'ensemble des points paraboliques est cependant  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  [40].

La construction géométrique du développement en fractions continues que nous avons exposée dans ce chapitre s'appuie essentiellement sur deux

articles ([52], [19]). À ces références s'ajoute le texte de C. Series dans [7] qui, lui aussi, étudie l'ensemble limite des groupes de Schottky et du groupe modulaire, mais qui va plus loin en construisant un codage de l'ensemble limite d'un groupe fuchsien géométriquement fini quelconque.

## CHAPITRE III

### DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE DU FLOT GÉODÉSIQUE

Commençons par des considérations générales sur la dynamique d'un flot  $\phi$  sur un espace métrique  $Y$ .

Par définition,  $\phi$  est une application de  $\mathbb{R} \times Y$  dans  $Y$  vérifiant les conditions suivantes :

- (i)  $\phi(0, y) = y$ , pour tout  $y$  dans  $Y$  ;
- (ii)  $\phi(s, \phi(t, y)) = \phi(s + t, y)$ , pour tout  $y$  dans  $Y$  et tous réels  $s, t$  ;
- (iii)  $\phi$  est une application continue.

Pour chaque réel  $t$  l'application  $\phi$  induit une application continue  $\phi_t$  de  $Y$  définie par  $\phi_t(y) = \phi(t, y)$ .

**Exercice 0.1.** Soit  $t$  un réel. Démontrer que  $\phi_t$  est un homéomorphisme de  $Y$  dans lui-même et que l'ensemble des  $\phi_t$ , pour  $t$  décrivant  $\mathbb{R}$ , est un groupe.

La restriction de  $\phi$  à  $\mathbb{R}^+ \times Y$  (respectivement  $\mathbb{R}^- \times Y$ ) est appelée *semi-flot positif* (respectivement *négatif*). Par définition, la *trajectoire* (respectivement *semi-trajectoire positive ou négative*) d'un point  $y$  de  $Y$  est l'ensemble des points  $\phi(t, y)$  où  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$  (respectivement  $\mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}^-$ ).

Dans la suite de ce texte nous nous intéressons à la topologie des trajectoires et des semi-trajectoires de deux flots particuliers.

Un point  $y$  de  $Y$  est dit *errant* s'il existe un voisinage  $V$  de  $y$  et un réel  $T$  tels que

$$\phi_t V \cap V = \emptyset$$

pour tout  $|t| \geq T$  ou, ce qui revient au même, pour tout  $t \geq T$ . L'ensemble de ces points est un ouvert invariant par le flot. Nous notons  $\Omega_\phi(Y)$  son complémentaire. Cet ensemble contient les points *périodiques* satisfaisant  $\phi_T(y) = y$  pour un réel  $T \neq 0$ . La trajectoire d'un tel point est compacte.

À l'opposé, on dira qu'un point  $y$  de  $Y$  est *divergent* (respectivement *positivement* ou *négativement divergent*) si pour toute suite non bornée  $(t_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{R}$  (respectivement  $\mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}^-$ ), la suite  $(\phi_{t_n}(y))_{n \geq 1}$  diverge.

**Exercice 0.2.** Démontrer qu'un point  $y$  est divergent (respectivement positivement ou négativement divergent) si et seulement si l'application de  $\mathbb{R}$  (respectivement  $\mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}^-$ ) dans  $Y$ , qui à  $t$  associe  $\phi_t(y)$  est un homéomorphisme sur son image (plongement topologique).

Dans ce chapitre et les deux suivants nous nous restreignons aux flots géodésique (chapitres III et IV) et horocyclique (chapitre V) sur le quotient de  $T^1\mathbb{H}$  par un groupe fuchsien. À la trajectoire d'un tel flot nous associons un (ou deux) points de  $\mathbb{H}(\infty)$  et nous relierons des propriétés topologiques de cette trajectoire à la nature de ce (ces) point(s).

## 1. Préliminaires

**1.1. Le flot géodésique sur  $T^1\mathbb{H}$ .** On rappelle (voir exercice I.1.8) que  $T^1\mathbb{H}$  est muni de la distance  $D$  invariante par  $G$ , définie par

$$D(v, v') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} d(v(t), v'(t)) dt$$

où  $v = (z, \vec{v})$  et  $(v(t))_{t \in \mathbb{R}}$  représente le paramétrage par longueur d'arcs de l'unique géodésique orientée passant par  $z$  dont la tangente en  $z$  est dirigée par  $\vec{v}$ , et qui vérifie

$$v(0) = z \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt}(0) = \vec{v}.$$

On note  $v(-\infty)$ ,  $v(+\infty)$  les extrémités respectivement négative et positive de cette géodésique (figure 1).

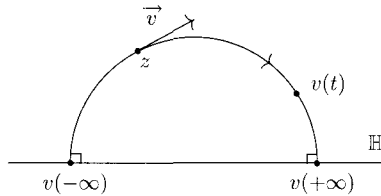


FIGURE 1

**Exercice 1.1.** Soit  $(v_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $T^1\mathbb{H}$ . Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(v_n, v) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(+\infty) = v(+\infty) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(0) = v(0).$$

Soit  $\tilde{g}$  l'application de  $\mathbb{R} \times T^1\mathbb{H}$  dans  $T^1\mathbb{H}$  définie par

$$\tilde{g}(t', v) = \left( v(t'), \frac{d}{dt} v(t') \right).$$

**Exercice 1.2.** Démontrer que pour tout réel  $t$  l'application  $\tilde{g}_t$  est un homéomorphisme de  $T^1\mathbb{H}$  dans lui-même.

Remarquons que pour tous  $t, t'$  dans  $\mathbb{R}$  on a

$$D(\tilde{g}_t(v), \tilde{g}_{t'}(v)) = 2|t - t'|.$$

On déduit de cette remarque et de l'exercice 1.2 que l'application  $\tilde{g}$  est continue.

**Exercice 1.3.** Démontrer que  $\tilde{g}_0(v) = v$  pour tout  $v$  dans  $T^1\mathbb{H}$  et que  $\tilde{g}_{t+t'} = \tilde{g}_t \circ \tilde{g}_{t'}$ , pour tous  $t, t'$  dans  $\mathbb{R}$ .

L'application  $\tilde{g}$  définit donc bien un flot sur  $T^1\mathbb{H}$ . Ce flot est appelé *flot géodésique*. Sa dynamique est simple comme le montre l'exercice suivant :

**Exercice 1.4.** Démontrer les propriétés :

- (i) l'ensemble  $\Omega_{\tilde{g}}(T^1\mathbb{H})$  est vide ;
- (ii) pour tout  $v$  dans  $T^1\mathbb{H}$ , l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $T^1\mathbb{H}$  qui à  $t$  associe  $\tilde{g}_t(v)$  est un plongement.

**1.2. Le flot géodésique sur un quotient.** Considérons à présent un groupe fuchsien  $\Gamma$ . Notons  $\pi$  (respectivement  $\pi^1$ ) la projection de  $\mathbb{H}$  (respectivement  $T^1\mathbb{H}$ ) sur le quotient  $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  (respectivement  $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ ) (figures 2 et 3). Chacun de ces quotients est muni d'une distance définie respectivement par

$$d_\Gamma(\pi(x), \pi(y)) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma(y)),$$

$$D_\Gamma(\pi^1(u), \pi^1(v)) = \inf_{\gamma \in \Gamma} D(u, \gamma(v)).$$

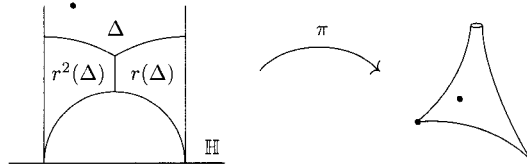
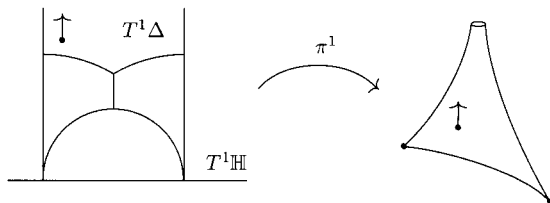


FIGURE 2.  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$



FIGURE 3.  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 

**Exercice 1.5.** Démontrer que  $d_\Gamma$  et  $D_\Gamma$  sont des distances et que la topologie induite par ces distances sur  $S$  et  $T^1S$  est la même que celle induite par  $\pi$  et  $\pi^1$ .

La convergence d'une suite de  $S$  ou de  $T^1S$  se traduit donc de la façon suivante :

- (i) Une suite  $(\pi(z_n))_{n \geq 1}$  de  $S$  converge vers  $\pi(z)$  si et seulement s'il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que  $(\gamma_n(z_n))_{n \geq 1}$  converge vers  $z$ .
- (ii) Une suite  $(\pi^1(u_n))_{n \geq 1}$  de  $T^1S$  converge vers  $\pi^1(u)$  si et seulement s'il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que  $(\gamma_n(u_n))_{n \geq 1}$  converge vers  $u$ .

Si  $\Gamma$  ne contient pas d'élément elliptique, la surface  $S$  est une variété différentielle munie de la structure riemannienne induite par celle de  $\mathbb{H}$ , et  $T^1S$  en est son fibré unitaire tangent. Ce n'est pas le cas si  $\Gamma$  contient des éléments elliptiques. Prenons l'exemple du groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  étudié dans le paragraphe II.3. L'image par  $\pi$  d'un disque hyperbolique de centre  $j = 1/2 + i\sqrt{3}/2$  et de rayon petit est homéomorphe au cône obtenu en quotientant ce disque par le groupe cyclique d'ordre 3 engendré par  $r(z) = (z - 1)/z$ . Au voisinage de  $\pi(j)$  la surface modulaire n'hérite donc pas de la structure de variété différentielle de  $\mathbb{H}$ . Il en est de même au voisinage de  $\pi(i)$ . Dans ce contexte on ne peut pas parler de structure riemannienne au sens classique. Malgré une notation trompeuse,  $T^1S$  n'est donc pas toujours le fibré unitaire de  $S$ . Nous allons montrer que, dans tous les cas, le flot  $\tilde{g}$  induit un flot sur  $T^1S$ .

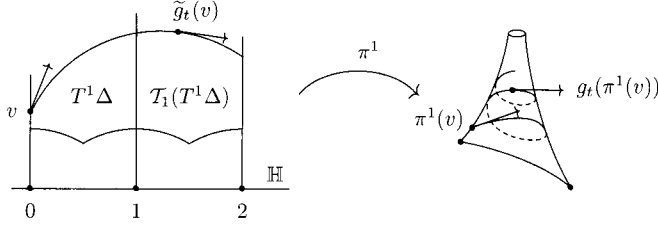
Soient  $\gamma$  dans  $\Gamma$  et  $v = (z, \vec{v})$  dans  $T^1\mathbb{H}$ . Puisque  $\gamma$  est une isométrie positive, l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{H}$  qui à  $t$  associe  $\gamma(v(t))$  est le paramétrage par longueur d'arcs de la géodésique orientée  $(\gamma(v(-\infty))\gamma(v(+\infty)))$  vérifiant

$$\gamma(v(0)) = \gamma(z) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \gamma \circ v(0) = T_z \gamma(\vec{v}).$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a donc  $\gamma(v)(t) = \gamma(v(t))$ . Par conséquent  $\tilde{g}_t(\gamma(v)) = \gamma(\tilde{g}_t(v))$ . Cette dernière relation permet de définir le *flot géodésique*  $g$  sur  $T^1S$  en posant (figure 4)

$$g(t, \pi^1(v)) = \pi^1(\tilde{g}(t, v)).$$

La suite de ce chapitre est consacrée à la dynamique topologique de ce flot. Nous utiliserons, particulièrement dans les paragraphes 3 et 4, le critère de convergence suivant qui relie l'action de  $g_{\mathbb{R}}$  sur  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$  à celle, duale, de  $\Gamma$  sur l'ensemble des géodésiques orientées  $\tilde{g}_{\mathbb{R}} \backslash T^1\mathbb{H}$ .

FIGURE 4.  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 

**Lemme 1.6.** Soient  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $T^1\mathbb{H}$  et  $u$  un élément de  $T^1\mathbb{H}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une suite de réels  $(s_n)_{n \geq 1}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{s_n}(\pi^1(u_n)) = \pi^1(u);$$

(ii) il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_n(u_n(-\infty)), \gamma_n(u_n(+\infty))) = (u(-\infty), u(+\infty)).$$

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Par définition de la topologie sur  $T^1S$ , il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\gamma_n \tilde{g}_{s_n}(u_n), u) = 0.$$

D'après l'exercice 1.1, cette convergence entraîne celle du couple

$$(\gamma_n(u_n(-\infty)), \gamma_n(u_n(+\infty)))$$

vers  $(u(-\infty), u(+\infty))$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Considérons la suite de géodésiques orientées

$$L_n = (\gamma_n(u_n(-\infty)), \gamma_n(u_n(+\infty))).$$

Cette suite converge vers la géodésique  $L = (u(-\infty), u(+\infty))$ , donc il existe une suite de points  $z_n$  appartenant à  $L_n$  convergeant vers  $u(0)$ . Soit  $v_n$  l'élément de  $T^1\mathbb{H}$  correspondant au couple formé du point  $z_n$  et du vecteur unitaire tangent en ce point au rayon  $[z_n, \gamma_n(u_n(+\infty))]$ . Cet élément est de la forme

$$v_n = \tilde{g}_{s_n}(\gamma_n(u_n)).$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(0) = u(0)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(+\infty) = u(+\infty)$ , donc, toujours d'après l'exercice 1.1,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{s_n}(\pi^1(u_n)) = \pi^1(u)$ .  $\square$

Dans la suite de ce texte, nous supposons que  $\Gamma$  n'est pas élémentaire.

## 2. Lecture à l'infini de propriétés topologiques des trajectoires de $g_{\mathbb{R}}$

Le groupe  $\Gamma$  n'étant pas élémentaire, son ensemble limite est le plus petit fermé non vide de  $\mathbb{H}(\infty)$  invariant par  $\Gamma$  (proposition I.3.4).

**2.1. Caractérisation des points errants et divergents.** On rappelle que  $\Omega_g(T^1S)$  représente l'ensemble non errant du flot géodésique sur  $T^1S$  (voir l'introduction de ce chapitre).

**Théorème 2.1.** *Soit  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\pi^1(u)$  appartient à  $\Omega_g(T^1S)$  ;
- (ii)  $u(-\infty)$  et  $u(+\infty)$  appartiennent à  $L(\Gamma)$ .

Avant de démontrer ce théorème, démontrons le lemme suivant.

**Lemme 2.2.** *Soient  $x, y$  des points de  $L(\Gamma)$ . Il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(i) = x$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(i) = y$ .*

*Démonstration.* Fixons  $x$  dans  $L(\Gamma)$  et notons  $A$  l'ensemble des  $x'$  dans  $L(\Gamma)$  pour lesquels il existe une suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(i) = x$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n^{-1}(i) = x'$ . Cet ensemble n'est pas vide et est invariant par  $\Gamma$ , montrons qu'il est fermé. Soit  $(x'_p)_{p \geq 1}$  une suite de  $A$  convergeant vers un point  $x'$  de  $\mathbb{H}(\infty)$ . Pour tout  $p$ , il existe une suite  $(h_{p,k})_{k \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_{p,k}(i) = x$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_{p,k}^{-1}(i) = x'_p$ . Par conséquent, il existe une suite  $(h_{p,k_p})_{p \geq 1}$  telle que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} h_{p,k_p}(i) = x$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} h_{p,k_p}^{-1}(i) = x'$ . Ceci entraîne que le point  $x'$  appartient à  $A$  et donc que  $A$  est fermé. Par ailleurs  $A$  est inclus dans  $L(\Gamma)$  donc  $A = L(\Gamma)$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 2.1.*

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $\Gamma$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(i) = u(+\infty)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(i) = u(-\infty)$ . Posons  $t_n = d(u(0), \gamma_n^{-1}(u(0)))$ . Cette suite converge vers  $+\infty$ . Considérons l'élément  $v_n$  de  $T^1\mathbb{H}$  correspondant au couple formé du point  $\gamma_n^{-1}(u(0))$  et du vecteur unitaire tangent en ce point au segment  $[\gamma_n^{-1}(u(0)), u(0)]_h$  (figure 5).

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(-\infty) = u(-\infty)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(+\infty) = u(+\infty)$ . Par ailleurs  $v_n(t_n) = u(0)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{g}_{t_n}(v_n) = u$ .

Considérons maintenant  $\gamma_n(v_n)$ . Cet élément correspond au couple formé du point  $u(0)$  et du vecteur unitaire tangent en ce point au segment géodésique  $[u(0), \gamma_n(u(0))]_h$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(v_n) = u$ . Soit  $V$  un voisinage

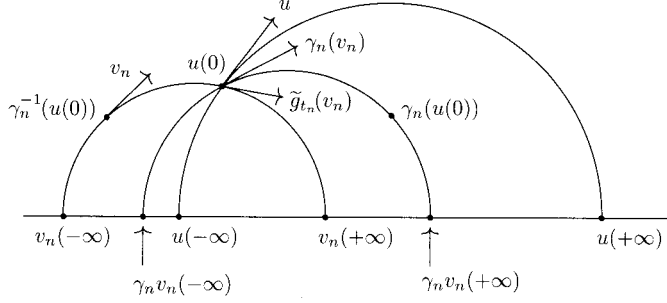


FIGURE 5

de  $\pi^1(u)$ . Pour  $n$  grand,  $\pi^1(v_n)$  et  $g_{t_n}(\pi^1(v_n))$  appartiennent à  $V$  donc  $g_{t_n}V \cap V \neq \emptyset$ . Ceci montre que  $\pi^1(u)$  n'est pas errant.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Soit  $(V_n)_{n \geq 1}$  une suite de voisinages de  $\pi^1(u)$  telle que  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n = \{\pi^1(u)\}$ . Comme  $\pi^1(u)$  n'est pas errant, il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  telle que  $g_{t_n}V_n \cap V_n \neq \emptyset$ . On déduit de cette remarque l'existence d'une suite  $(\pi^1(u_n))_{n \geq 1}$  de  $T^1S$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^1(u_n) = \pi^1(u) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_{t_n} \pi^1(u_n) = \pi^1(u).$$

Quitte à remplacer  $u_n$  par un élément de  $\Gamma(u_n)$ , il existe donc une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{g}_{t_n}(v_n) = u.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t_n) = u(+\infty)$ . Par ailleurs  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n(t_n), \gamma_n^{-1}u(0)) = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(i) = u(+\infty)$ . Ceci montre que  $u(+\infty)$  appartient à  $L(\Gamma)$ .

En remplaçant dans le raisonnement précédent  $(t_n)_{n \geq 1}$  par  $(-t_n)_{n \geq 1}$ , on obtient que  $u(-\infty)$  appartient à  $L(\Gamma)$ .  $\square$

On déduit du théorème précédent que l'ensemble  $\Omega_g(T^1S)$  est égal à  $T^1S$  si et seulement si  $L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$ . Si  $L(\Gamma)$  est différent de  $\mathbb{H}(\infty)$ , la nature topologique de  $\Omega_g(T^1S)$  est relativement complexe.

**Exercice 2.3.** Démontrer que si  $\Omega_g(T^1S)$  est différent de  $T^1S$  alors cet ensemble est un fermé d'intérieur vide.

Introduisons l'ensemble  $\tilde{\Omega}_g(T^1S)$ , relevé de  $\Omega_g(T^1S)$ , défini par

$$\tilde{\Omega}_g(T^1S) = \{u \in T^1\mathbb{H} \mid u(-\infty) \in L(\Gamma), u(+\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

**Proposition 2.4.** L'ensemble  $\Omega_g(T^1S)$  est compact si et seulement si tous les points  $L(\Gamma)$  sont coniques.

*Démonstration.* Par le théorème 2.1, la projection sur  $\mathbb{H}$  de l'ensemble  $\tilde{\Omega}_g(T^1S)$  est l'ensemble  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$  défini en I.4.2. Remarquons que  $\Omega_g(T^1S)$  est compact si et seulement s'il existe un compact  $K \subset \mathbb{H}$  tel que  $\tilde{\Omega}(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ .

Si tous les points de  $L(\Gamma)$  sont coniques, d'après le corollaire I.4.13, le groupe  $\Gamma$  est convexe-cocompact, ce qui signifie que le quotient  $\Gamma \backslash N(\Gamma)$ , où  $N(\Gamma)$  est l'enveloppe convexe de  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$ , est compact. Donc  $\Omega_g(T^1S)$  est compact.

Réciproquement, supposons qu'il existe un compact  $K \subset \mathbb{H}$  tel que  $\tilde{\Omega}(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ . Pour toute géodésique  $(xy)$  de  $\tilde{\Omega}(\Gamma)$ , il existe une suite de points sur cette géodésique de la forme  $(\gamma_n(k_n))_{n \geq 1}$ , avec  $\gamma_n \in \Gamma$  et  $k_n \in K$ , convergeant vers  $x$ . Fixons  $z$  sur  $(xy)$ . La suite  $(\gamma_n(z))_{n \geq 1}$  reste à une distance bornée du rayon  $[z, x)$  donc  $x$  est conique.  $\square$

Une conséquence de cette proposition est que si  $\Gamma = S(g_1, g_2)$  est un groupe de Schottky (voir chapitre II), alors l'ensemble  $\Omega_g(T^1S)$  est compact si et seulement si  $g_1$  et  $g_2$  sont hyperboliques (figures 6 et 7).

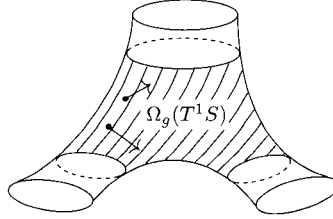


FIGURE 6.  $\Gamma = S(g_1, g_2)$ ,  $g_1$  et  $g_2$  hyperboliques

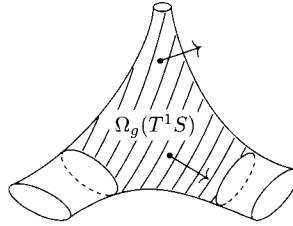


FIGURE 7.  $\Gamma = S(g_1, g_2)$ ,  $g_1$  hyperbolique et  $g_2$  parabolique

Si l'ensemble  $\Omega_g(T^1S)$  est compact, aucun élément de cet ensemble n'est divergent pour le flot géodésique. Dans le cas général, nous allons caractériser les éléments non divergents de  $\Omega_g(T^1S)$ .

Soit  $u = (z, \vec{u})$  dans  $T^1\mathbb{H}$ . Notons  $-u$  l'élément de  $T^1\mathbb{H}$  défini par

$$-u = (z, -\vec{u}).$$

**Exercice 2.5.** Démontrer que l'application qui à  $u$  associe  $-u$  est continue, et que pour tous  $t \in \mathbb{R}$  et  $\gamma \in G$ , on a

$$-\tilde{g}_t(-u) = \tilde{g}_{-t}(u) \quad \text{et} \quad \gamma(-u) = -\gamma(u).$$

Il découle de cet exercice que  $\pi^1(u)$  est positivement divergent si et seulement si  $\pi^1(-u)$  est négativement divergent.

**Proposition 2.6.** Soit  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\pi^1(u)$  n'est pas positivement (resp. négativement) divergent ;
- (ii)  $u(+\infty)$  (resp.  $u(-\infty)$ ) est un point conique de  $L(\Gamma)$ .

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $(t_n)_{n \geq 1}$  une suite non bornée de  $\mathbb{R}^+$  telle que  $(g_{t_n}(\pi^1(u)))_{n \geq 1}$  converge. Sur  $T^1\mathbb{H}$  cette convergence se traduit par l'existence d'une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que  $(\gamma_n \tilde{g}_{t_n}(u))_{n \geq 1}$  converge vers un élément  $u'$  de  $T^1\mathbb{H}$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(t_n) = u(+\infty) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(u(t_n), \gamma_n^{-1}(u'(0))) = 0.$$

Les points  $u(t_n)$  appartiennent au rayon  $[u(0), u(+\infty))$ , de plus

$$d(\gamma_n^{-1}(u(0)), \gamma_n^{-1}(u'(0))) = d(u(0), u'(0)),$$

donc il existe  $\varepsilon > 0$  et  $N > 0$  tels que

$$d(\gamma_n^{-1}(u(0)), [u(0), u(+\infty))) < \varepsilon$$

quel que soit  $n \geq N$ . Ceci montre que  $u(+\infty)$  est conique.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Soit une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que

$$d(\gamma_n(u(0)), [u(0), u(+\infty))) < \varepsilon.$$

Il existe donc  $s_n > 0$  vérifiant  $d(\gamma_n(u(0)), u(s_n)) < \varepsilon$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $(\gamma_n^{-1} \tilde{g}_{s_n}(u))_{n \geq 1}$  converge, ce qui entraîne la convergence de la suite  $(g_{s_n}(\pi^1(u)))_{n \geq 1}$ .  $\square$

**Exercice 2.7.** Soit  $u$  un élément de  $T^1\mathbb{H}$ . Démontrer que s'il existe une suite non bornée  $(t_n)_{n \geq 1}$  telle que  $(g_{t_n}(\pi^1(u)))_{n \geq 1}$  converge vers  $\pi^1(v)$  alors  $\pi^1(v)$  appartient à  $\Omega_g(T^1S)$ .

Les propriétés suivantes sont des conséquences des considérations précédentes.

**Propriété 2.8.** Soit  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$ .

(i) Si  $\pi^1(u)$  est errant alors sa semi-trajectoire positive ou négative est un plongement de  $\mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}^-$  dans  $T^1S$ .

(ii) Si la trajectoire positive (respectivement négative) de  $\pi^1(u)$  est bornée alors  $u(+\infty)$  (respectivement  $u(-\infty)$ ) est conique.

(iii) Si  $\Omega_g(T^1S)$  n'est pas compact alors cet ensemble contient des éléments divergents.

**2.2. Applications aux groupes géométriquement finis.** Nous supposons à présent que  $\Gamma$  est un groupe fuchsien non élémentaire, géométriquement fini (voir paragraphe I.4). Son ensemble limite se décompose donc en la réunion disjointe de l'ensemble des points coniques et de celui des points paraboliques (théorème I.4.12).

Si  $L_p(\Gamma)$  est vide alors l'ensemble  $\Omega_g(T^1S)$  est compact d'après la proposition 2.4. Considérons l'adhérence d'un  $\varepsilon$ -voisinage (pour la distance  $D_\Gamma$ ) de cet ensemble et notons le  $K$ . C'est un compact. Soit  $u \in T^1\mathbb{H}$ . Si  $u(+\infty)$  (respectivement  $u(-\infty)$ ) est conique alors, d'après la proposition 2.6 et l'exercice 2.7, l'adhérence de la semi-trajectoire positive (respectivement négative) de  $\pi^1(u)$  rencontre  $\Omega_g(T^1S)$  et cette semi-trajectoire rencontre  $K$  pour une suite de temps  $(t_n)_{n \geq 1}$  non bornée de  $\mathbb{R}$ .

Lorsque  $L_p(\Gamma)$  n'est pas vide, l'ensemble  $\Omega_g(T^1S)$  n'est plus compact mais cette propriété de récurrence dans un compact uniforme est encore valable, comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 2.9.** *Soit  $\Gamma$  un groupe géométriquement fini et non élémentaire. Il existe un compact  $K$  inclus dans  $T^1S$  tel que :*

(i) *si  $u$  appartient à  $T^1\mathbb{H}$  et si  $u(+\infty)$  est conique (resp.  $u(-\infty)$ ) alors l'ensemble des réels  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ) tels que  $g_t(\pi^1(u))$  appartienne à  $K$  n'est pas borné ;*

(ii) *si  $u$  appartient à  $T^1\mathbb{H}$  et si  $u(+\infty)$  (resp.  $u(-\infty)$ ) est parabolique alors il existe  $T > 0$  tel que  $g_t(\pi^1(u))$  soit inclus dans le relevé à  $T^1S$  d'une cuspide de  $S$  pour tout  $t \geq T$  (resp.  $t \leq -T$ ). De plus la restriction à  $\tilde{g}_{[T, +\infty)}(u)$  (resp.  $\tilde{g}_{(-\infty, -T]}(u)$ ) de la projection de  $T^1\mathbb{H}$  sur  $T^1S$  est un homéomorphisme sur son image  $g_{[T, +\infty)}(\pi^1(u))$  (resp.  $g_{(-\infty, -T]}(\pi^1(u))$ ).*

*Démonstration.* Fixons un domaine de Dirichlet  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  et notons  $\tilde{\mathcal{D}}$  l'intersection de  $\mathcal{D}_z(\Gamma)$  avec la région de Nielsen de  $\Gamma$  (voir le paragraphe I.4). Si l'intersection de l'adhérence de  $\tilde{\mathcal{D}}$  avec  $\mathbb{H}(\infty)$  n'est pas vide, elle est constituée d'un nombre fini de points  $x_1, \dots, x_n$  qui sont tous paraboliques (proposition I.4.11). Fixons des horodisques  $(H^+(x_i))_{1 \leq i \leq n}$  basés en  $x_i$ , deux à deux disjoints tels que  $\gamma H^+(x_i) \cap H^+(x_i) = \emptyset$  pour tout  $\gamma \in \Gamma - \Gamma_{x_i}$ . D'après la proposition I.4.11, l'ensemble  $\tilde{\mathcal{D}} - \bigcup_{i=1}^n \tilde{\mathcal{D}} \cap H^+(x_i)$  est borné, notons  $\tilde{K}$  son adhérence.

(i) Supposons pour commencer que  $u$  appartienne à  $\tilde{\Omega}_g(T^1S)$  et que  $u(+\infty)$  soit conique. Montrons qu'il existe une suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  non bornée de  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\pi(u(t_n))$  appartienne à  $\pi(\tilde{K})$ . Si ce n'est pas le cas, il existe

$T > 0$  tel que pour tout  $t \geq T$ , le point  $\pi(u(t))$  appartienne à la réunion des cuspidales  $C(x_i)$  associées aux  $H^+(x_i)$ . Les cuspidales  $C(x_i)$  étant disjointes ou confondues,  $\pi([u(T), u(+\infty)))$  est inclus dans une seule cuspidale  $C(x_i)$ . Le rayon  $[u(T), u(+\infty))$  est donc inclus dans un horodisque  $\gamma(H^+(x_i))$  et  $u(+\infty) = \gamma(x_i)$ , ce qui contredit le fait que  $u(+\infty)$  soit conique.

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Considérons maintenant un élément  $v$  de  $T^1\mathbb{H}$  tel que  $v(+\infty)$  soit conique. Soit  $u$  dans  $\tilde{\Omega}_g(T^1S)$  tel que  $u(+\infty) = v(+\infty)$ . Les rayons géodésiques  $[v(0), v(+\infty))$  et  $[u(0), u(+\infty))$  sont asymptotes, donc il existe  $T > 0$  tel que  $[v(T), v(+\infty))$  soit inclus dans le  $\varepsilon$ -voisinage de  $[u(0), u(+\infty))$ . Par ailleurs, d'après le raisonnement précédent, il existe une suite non bornée  $(t_n)_{n \geq 1}$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que la suite  $(g_{t_n}(\pi^1(u)))_{n \geq 1}$  soit incluse dans  $\pi(\tilde{K})$ . On déduit de ces deux propriétés l'existence d'une suite  $(t'_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^+$  non bornée telle que la suite  $(\pi(v(t'_n)))_{n \geq 1}$  soit incluse dans l'adhérence du  $\varepsilon$ -voisinage de  $\pi(\tilde{K})$ . Un tel voisinage est compact.

(ii) Pour ne pas alourdir les notations nous raisonnons sur  $S$  et non sur  $T^1S$ . On rappelle que la projection  $q$  du quotient  $\Gamma_{u(+\infty)} \backslash H^+(u(+\infty))$  sur la cuspidale  $C(u(+\infty))$  est un homéomorphisme (voir le paragraphe I.3). Pour  $T$  grand, le rayon  $[u(T), u(+\infty))$  est inclus dans  $H^+(u(+\infty))$ . Par ailleurs, la restriction  $p$  à ce rayon, de la projection de  $H^+(u(+\infty))$  sur  $\Gamma_{u(+\infty)} \backslash H^+(u(+\infty))$  est un homéomorphisme. Donc  $q \circ p$  est un homéomorphisme de  $[u(T), u(+\infty))$  sur  $\pi([u(T), u(+\infty)))$ .  $\square$

Notons  $E_i$  l'ensemble des  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$  tels que  $u(0)$  appartienne à l'horocycle  $H(x_i)$ . Soit  $v$  un élément de  $T^1\mathbb{H}$  dont l'extrémité positive,  $v(+\infty)$ , est parabolique; il existe  $1 \leq i \leq n$  et  $\gamma$  dans  $\Gamma$  tels que  $\gamma(v(+\infty)) = x_i$  (corollaire I.4.3). Une géodésique d'extrémité  $x_i$  rencontre  $H(x_i)$  donc  $\gamma\tilde{g}_{\mathbb{R}}(v) \cap E_i \neq \emptyset$ . Par conséquent la réunion du compact  $K$  donné par la propriété (i) précédente et de la projection sur  $T^1S$  des  $E_i$  est un compact rencontré par toutes les semi-trajectoires  $g_{\mathbb{R}+}(\pi^1(u))$  avec  $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ .

**Corollaire 2.10.** *Soit  $\Gamma$  un groupe géométriquement fini et non élémentaire. Il existe un compact inclus dans  $T^1S$  rencontré par toutes les semi-trajectoires  $g_{\mathbb{R}+}(\pi^1(u))$  avec  $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ .*

Parmi les trajectoires de  $g_{\mathbb{R}}$  sur  $\Omega_g(T^1S)$  certaines sont fermées, c'est le cas par exemple si  $u(-\infty)$  et  $u(+\infty)$  sont paraboliques (proposition 2.9). Certaines sont compactes, on verra dans le paragraphe suivant que cette situation correspond au cas où les points  $u(+\infty)$  et  $u(-\infty)$  sont fixés par une isométrie hyperbolique. Certaines sont denses (voir le paragraphe 4). D'autres sont plus « chaotiques ». La seule information sur la nature conique ou parabolique de  $u(-\infty)$  et  $u(+\infty)$  ne suffit pas en général pour décrire la topologie de  $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ . Dans le chapitre IV nous étudierons le



cas où  $\Gamma$  est un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques. En utilisant un codage de  $\tilde{\Omega}_g(T^1S)$  par des suites bilatères nous établirons une correspondance entre la dynamique topologique de  $g_{\mathbb{R}}$  sur  $\Omega_g(T^1S)$  et celle du décalage sur l'espace de ces suites bilatères. Nous verrons alors apparaître une grande diversité dans la nature topologique des trajectoires de  $g_{\mathbb{R}}$ . Nous mettrons notamment en évidence l'existence d'ensembles minimaux compacts invariants par  $g_{\mathbb{R}}$ , différents d'une trajectoire périodique.

Lorsque  $\Omega_g(T^1S)$  n'est pas compact, cet ensemble contient des trajectoires non bornées, c'est le cas si  $u(+\infty)$  ou  $u(-\infty)$  sont paraboliques. Cette condition sur  $u(+\infty)$  et  $u(-\infty)$  est suffisante mais n'est pas nécessaire. Dans le chapitre VII, nous relierons, dans le contexte de la surface modulaire, le caractère borné de  $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$  à une propriété du développement en fractions continues de  $u(-\infty)$  et  $u(+\infty)$  (théorème VII.3.4).

### 3. Trajectoires périodiques et périodes

Revenons au cas général d'un groupe fuchsien non élémentaire  $\Gamma$  et intéressons-nous à la présence d'éléments périodiques pour le flot géodésique sur  $T^1S$ .

**3.1. Densité des trajectoires périodiques.** Un élément périodique  $\pi^1(u)$  appartient nécessairement à l'ensemble  $\Omega_g(T^1S)$ . Sa période  $T_u$  est par définition le plus petit réel  $t > 0$  vérifiant

$$g_t(\pi^1(u)) = \pi^1(u).$$

**Exercice 3.1.** Soit  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$ . Démontrer que la trajectoire de  $\pi^1(u)$  est compacte si et seulement si elle est périodique.

La proposition suivante est une caractérisation à l'infini des éléments périodiques.

**Proposition 3.2.** Soit  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) l'élément  $\pi^1(u)$  est périodique ;
- (ii) il existe une isométrie hyperbolique  $\gamma$  de  $\Gamma$  telle que  $u(+\infty) = \gamma^+$  et  $u(-\infty) = \gamma^-$ .

*Démonstration.*

(ii)  $\Rightarrow$  (i). L'isométrie  $\gamma$  laisse invariante la géodésique orientée  $(\gamma^-\gamma^+)$ . D'après la proposition I.2.7, pour tout point  $z$  sur cette géodésique,  $d(z, \gamma(z)) = \ell(\gamma)$  donc  $\gamma(u) = \tilde{g}_{\ell(\gamma)}(u)$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Il existe  $T > 0$  et  $\gamma$  dans  $\Gamma$  tels que  $\tilde{g}_T(u) = \gamma(u)$ . On a  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \tilde{g}_{nT}(u)(0) = u(\pm\infty)$ , or  $\tilde{g}_{nT}(u) = \gamma^n(u)$  donc  $\gamma$  fixe  $u(+\infty)$  et  $u(-\infty)$ . Ces deux points sont différents et  $\gamma$  est différent de l'identité donc cette isométrie est hyperbolique.  $\square$

Une isométrie  $\gamma$  de  $\Gamma$  est dite *primitive* s'il n'existe pas d'isométrie  $h$  dans  $\Gamma$  telle que  $h^n = \gamma$  avec  $n > 1$ . Notons  $\text{Hyp}(\Gamma)$  l'ensemble des classes de conjugaison dans  $\Gamma$  des isométries hyperboliques primitives de  $\Gamma$ . D'après la proposition précédente, l'application de  $\text{Hyp}(\Gamma)$  sur l'ensemble des trajectoires périodiques de  $g_{\mathbb{R}}$ , qui à une classe  $[\gamma]$  associe la trajectoire  $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ , où  $u$  est un élément de  $T^1\mathbb{H}$  vérifiant  $u(+\infty) = \gamma^+$  et  $u(-\infty) = \gamma^-$ , est une bijection. Le groupe  $\Gamma$  n'étant pas élémentaire, d'après le corollaire II.1.3, l'ensemble  $\text{Hyp}(\Gamma)$  est infini, ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante.

**Propriété 3.3.** *L'ensemble  $\Omega_g(T^1S)$  contient une infinité de trajectoires périodiques.*

Dans le chapitre IV nous donnerons une autre démonstration de la propriété suivante reposant sur la dynamique symbolique dans le cas particulier des groupes de Schottky convexes-cocompacts (voir le paragraphe IV.2.1).

**Théorème 3.4.** *L'ensemble des éléments périodiques est dense dans  $\Omega_g(T^1S)$ .*

*Démonstration.* Fixons  $u$  dans  $\tilde{\Omega}_g(T^1S)$ . Démontrer le théorème revient, d'après le lemme 1.6, à démontrer qu'il existe une suite d'isométries hyperboliques  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^+ = u(+\infty)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^- = u(-\infty)$ . D'après le lemme 2.2, il existe  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(i) = u(+\infty)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(i) = u(-\infty)$ .

Montrons que pour  $n$  grand,  $\gamma_n$  est hyperbolique. Pour cela plaçons-nous dans le disque de Poincaré et fixons un point 0. Soit  $D(\gamma_n)$  le demi-plan fermé bordé par la médiatrice du segment  $[0, \gamma_n(0)]_h$ , contenant  $\gamma_n(0)$ . La suite des diamètres euclidiens des  $D(\gamma_n^{\pm 1})$  converge vers zéro car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{\pm 1}(0) = u(\pm\infty)$ . Les points  $u(-\infty)$  et  $u(+\infty)$  sont différents donc pour  $n$  grand,  $D(\gamma_n)$  et  $D(\gamma_n^{-1})$  sont disjoints ce qui entraîne, d'après l'exercice I.2.6, que  $\gamma_n$  est hyperbolique.  $\square$

### 3.2. Spectre des longueurs.

**Exercice 3.5.** Soient  $\gamma$  une isométrie hyperbolique de  $\Gamma$  et  $u \in T^1\mathbb{H}$  vérifiant  $u(-\infty) = \gamma^-$ ,  $u(+\infty) = \gamma^+$ . Démontrer que la période  $T_u$  de  $\pi^1(u)$  divise  $\ell(\gamma)$  et que  $T_u = \ell(\gamma)$  si et seulement si  $\gamma$  est primitif.

On appelle *géodésique* (respectivement *segment géodésique*) de la surface  $S$  l'image par la projection canonique  $\pi$  d'une géodésique (respectivement d'un segment géodésique) de  $\mathbb{H}$  (figure 8).

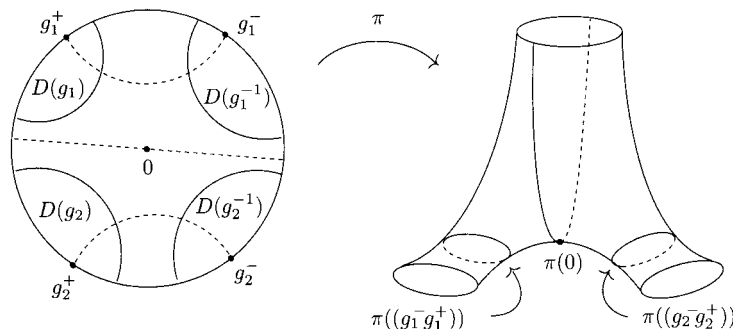


FIGURE 8.  $\Gamma = S(g_1, g_2)$ ,  $g_1$  et  $g_2$  hyperboliques

Si le groupe  $\Gamma$  ne contient pas d'élément elliptique,  $S$  hérite de la structure riemannienne de  $\mathbb{H}$  et les géodésiques telles que nous venons de les définir correspondent à celles définies à partir de cette structure.

**Exercice 3.6.** Démontrer qu'une géodésique de  $S$  est compacte si et seulement si elle est la projection sur  $S$  d'une trajectoire périodique de  $g_{\mathbb{R}}$ .

Soit  $\gamma$  un élément hyperbolique de  $\Gamma$ . Considérons un élément  $h$  primitif de  $\Gamma$  ayant même axe que  $\gamma$ . Si le groupe  $\Gamma$  ne contient pas d'élément elliptique, le réel  $\ell(h)$  est la *longueur*, au sens riemannien, de la géodésique  $\pi(\gamma^- \gamma^+)$ . Plus généralement on définit la *longueur* de  $\pi(\gamma^- \gamma^+)$ , notée  $\text{long}_S(\pi(\gamma^- \gamma^+))$ , en posant :  $\text{long}_S(\pi(\gamma^- \gamma^+)) = \ell(h)$ .

D'après l'exercice 3.5, l'ensemble des longueurs des géodésiques compactes de  $S$  est en bijection avec l'ensemble  $SP(g_{\mathbb{R}})$  des périodes associées aux trajectoires périodiques de  $g_{\mathbb{R}}$ .

Intéressons-nous à l'ensemble des  $nT$  avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $T \in SP(g_{\mathbb{R}})$ . Il est en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{L}(\Gamma) = \{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ , appelé *spectre des longueurs* de  $\Gamma$ .

**Propriété 3.7.** Soient  $\Gamma$  un groupe géométriquement fini et  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  une suite d'isométries hyperboliques de  $\Gamma$ . Si  $(\ell(\gamma_n))_{n \geq 1}$  est une suite bornée alors il existe  $k$  isométries  $g_1, \dots, g_k$  de  $\Gamma$  telles que pour tout  $n \geq 1$  l'isométrie  $\gamma_n$  soit conjuguée dans  $\Gamma$  à l'un des  $g_i$ .

*Démonstration.* Soit  $u_n$  dans  $T^1\mathbb{H}$  tel que  $u_n(+\infty) = \gamma_n^+$  et  $u_n(-\infty) = \gamma_n^-$ . Le groupe  $\Gamma$  étant géométriquement fini, d'après le corollaire 2.9, il existe un

compact de  $T^1S$  rencontré par toutes les trajectoires  $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u_n))$ . Par conséquent, quitte à remplacer  $\gamma_n$  par l'un de ses conjugués par  $\Gamma$ , à remplacer  $u_n$  par un élément de  $\tilde{g}_{\mathbb{R}}(u_n)$ , et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $v$ . On a  $d(\gamma_n(u_n(0)), u_n(0)) = \ell(\gamma_n)$ . Par ailleurs, toujours quitte à extraire une sous-suite,  $(\ell(\gamma_n))_{n \geq 1}$  converge et  $(u_n(0))_{n \geq 1}$  converge vers  $u(0)$  donc il existe  $\varepsilon > 0$  et  $M > 0$  tels que  $d(\gamma_n(u(0)), u(0)) \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq M$ . Le groupe  $\Gamma$  étant discret, l'ensemble  $\{\gamma_n \mid n \geq 1\}$  est fini.  $\square$

En termes de périodes du flot géodésique, la propriété précédente entraîne que si une suite  $(T_{u_n})_{n \geq 1}$  de  $SP(g_{\mathbb{R}})$  est bornée alors les éléments  $\pi^1(u_n)$  appartiennent à un nombre fini de trajectoires périodiques.

Une autre conséquence est que pour tout  $t > 0$ , le sous-ensemble de  $\text{Hyp}(\Gamma)$  composé des classes  $[\gamma]$  satisfaisant  $\ell(\gamma) \leq t$ , est fini.

En particulier, il existe sur  $S$  des géodésiques compactes dont la longueur est inférieure à celle de toutes les autres géodésiques. Sur la surface modulaire, cette géodésique est unique et sa longueur est égale à  $4 \ln \mathcal{N}$  (corollaire II.4.13).

L'hypothèse de finitude géométrique joue un rôle essentiel dans la propriété 3.7. En effet, fixons un point dans  $\mathbb{H}$  et considérons une isométrie hyperbolique  $h$  de  $G$  dont les ensembles  $D(h), D(h^{-1})$  définis à partir d'un point  $z_0$  (voir le paragraphe I.2.2) sont deux demi-disques. Soit  $(n_k)_{k \geq 1}$  une suite de  $\mathbb{N}$  telle que, pour tous  $k \geq 1$  et  $\varepsilon = \pm 1$ , les demi-disques  $t^{n_k}(D(h^\varepsilon))$ , avec  $t(z) = z + 1$ , soient deux à deux disjoints. D'après l'exercice II.1.8, le groupe engendré par les  $\gamma_k = t^{n_k} h t^{-n_k}$  est libre et discret, et pourtant,  $\ell(\gamma_k) = \ell(h)$  pour tout  $k \geq 1$ .

Analysons la nature topologique du spectre des longueurs.

**Propriété 3.8.** *Le groupe additif engendré par  $\mathcal{L}(\Gamma)$  (et donc par  $SP(g_{\mathbb{R}})$ ) est dense dans  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Le groupe  $\Gamma$  n'étant pas élémentaire, d'après le corollaire II.1.3, il contient un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques  $h$  et  $g$ . Plaçons-nous dans le modèle du disque et fixons un point 0. On peut toujours supposer que les demi-plans  $D(h), D(h^{-1}), D(g), D(g^{-1})$  associés à ce point et définis dans le paragraphe I.2.2 soient placés comme sur la figure 9.

Pour tout  $n > 0$ , d'après la proposition II.1.4, les géodésiques  $(h^{-1}h^+)$  et  $((gh^n)^-(gh^n)^+)$  se coupent en un point  $z_n$  de  $\mathbb{D}$ . La suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $h^-$ . On peut donc supposer que les points  $z_n$  sont tous différents. On a

$$\ell(gh^n) = d(z_n, gh^n(z_n)) \quad \text{et} \quad \ell(h) = d(z_n, h(z_n)).$$

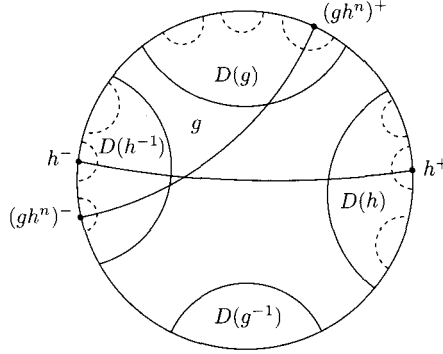


FIGURE 9

Par ailleurs  $z_n$  n'appartient pas à l'axe de  $gh^{n+1}$  donc, d'après la propriété I.2.8(i), on a  $\ell(gh^{n+1}) < d(z_n, gh^{n+1}(z_n))$ . Par conséquent, pour tout  $n \geq 1$

$$\ell(gh^{n+1}) < d(h^{-n}g^{-1}(z_n), h(z_n)),$$

donc

$$(*) \quad \ell(gh^{n+1}) < \ell(gh^n) + \ell(h).$$

Revenons à présent au demi-plan de Poincaré. Soit  $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$  une isométrie de  $\mathbb{H}$ . On a  $\text{ch}(\ell(\gamma)/2) = |a + d|/2$ . En utilisant cette relation et en supposant, quitte à conjuguer  $\Gamma$ , que  $h(z) = \lambda z$  avec  $\lambda > 1$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(gh^{n+1}) - \ell(gh^n) = \ell(h).$$

Si  $\mathcal{L}(\Gamma)$  engendre un groupe discret, alors  $\ell(gh^{n+1}) - \ell(gh^n) = \ell(h)$  à partir d'un certain rang, ce qui contredit l'égalité (\*).  $\square$

Remarquons que l'hypothèse de non élémentarité est essentielle puisque si  $\Gamma$  est un groupe cyclique engendré par une isométrie hyperbolique  $h$  alors  $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathbb{Z}\ell(h)$ .

#### 4. Trajectoires denses

Dans ce paragraphe, nous démontrons l'existence de trajectoires denses pour le flot géodésique en restriction à son ensemble non errant.

Nous allons raisonner sur l'ensemble  $L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$  égal au produit  $L(\Gamma) \times L(\Gamma)$  privé de sa diagonale, et utiliser le lemme 1.6.

Commençons par démontrer le lemme suivant.

**Lemme 4.1.** *Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien non élémentaire. Quels que soient les ouverts  $O$  et  $V$  non vides de  $L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$ , il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma(O) \cap V \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* On peut supposer que  $O$  et  $V$  sont des produits d'ouverts non vides  $O = O_1 \times O_2$ ,  $V = V_1 \times V_2$ . L'ensemble  $L(\Gamma)$  étant minimal,  $V_1$  contient le point fixe attractif  $\gamma^+$  d'une isométrie hyperbolique  $\gamma$  de  $\Gamma$ . Pour  $n$  assez grand,  $\gamma^n O_1 \cap V_1 \neq \emptyset$ . Par ailleurs d'après le théorème 3.5, il existe une isométrie hyperbolique  $h$  de  $\Gamma$  telle que  $h^-$  appartienne à  $\gamma^n O_1 \cap V_1$  et  $h^+$  à  $V_2$ . Ainsi pour  $k$  grand, on a  $h^k \gamma^n O_2 \cap V_2 \neq \emptyset$ . Le point  $h^-$  appartient à  $\gamma^n O_1 \cap V_1$  donc  $h^k \gamma^n O_1 \cap V_1 \neq \emptyset$ .

En conclusion  $h^k \gamma^n O \cap V \neq \emptyset$ . □

**Théorème 4.2.** *Il existe  $u$  dans  $\tilde{\Omega}_g(T^1 S)$  tel que  $\overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))} = \Omega_g(T^1 S)$ .*

*Démonstration.* Considérons une famille dénombrable d'ouverts non vides  $(O_n)_{n \geq 1}$  de  $L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$  telle que tout ouvert de  $L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$  contienne l'un des  $O_n$ . Fixons un ouvert non vide  $O$  de  $L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$ . D'après le lemme 4.1, il existe  $\gamma_1$  dans  $\Gamma$  tel que  $\gamma_1 O \cap O_1 \neq \emptyset$ . Soit  $K_1$  un ouvert relativement compact de  $O$  tel que  $\gamma_1 \overline{K_1}$  soit inclus dans  $O_1$ . Répétons le raisonnement précédent en remplaçant  $O$  par  $K_1$  et  $O_1$  par  $O_2$ , on obtient alors  $\gamma_2$  dans  $\Gamma$  et un ouvert relativement compact  $K_2$  tels que  $\overline{K_2} \subset K_1$  et  $\gamma_2 \overline{K_2} \subset O_2$ . De proche en proche, on obtient une suite  $(K_n)_{n \geq 1}$  d'ouverts relativement compacts emboîtés. Soit  $x$  dans  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{K_n}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , le point  $\gamma_n(x)$  appartient à  $O_n$ . Considérons un point  $x'$  de  $L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$  et un voisinage  $V'$  de  $x'$ . Ce voisinage contient un ouvert  $O_n$ , donc  $\gamma_n(x)$  appartient à  $V'$ . L'orbite  $\Gamma x$  rencontre donc tous les voisinages de  $x'$ , ce qui montre que  $x'$  appartient à  $\overline{\Gamma x}$ . En conclusion  $\overline{\Gamma x} = L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$ . Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.6 pour obtenir le théorème. □

Ce théorème sera redémontré dans le chapitre suivant dans le cas particulier d'un groupe de Schottky convexe-cocompact. On obtiendra, dans ce cadre, une caractérisation des  $u \in T^1 \mathbb{H}$  pour lesquels  $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$  est dense en termes de codage de  $u(-\infty)$  et  $u(+\infty)$  (voir le paragraphe IV.2.2).

Le théorème suivant entraîne le lemme 4.1, il sera démontré ultérieurement en utilisant le flot horocyclique (voir le paragraphe V.3).

**Théorème 4.3 (mélange topologique).** *Soient  $O$  et  $V$  deux ouverts non vides de  $\Omega_g(T^1 S)$ . Il existe  $T > 0$  tel que pour tout  $t \geq T$ ,  $g_t O \cap V \neq \emptyset$ .*

## 5. Commentaire

Le flot géodésique est également bien défini sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne complète et donc en particulier d'une variété de Hadamard pincée  $T^1X$  et sur son quotient par un groupe kleinien sans torsion  $\Gamma$  ([13], [44]).

Les résultats démontrés dans ce chapitre, à l'exception de la propriété 3.8 et du théorème 4.3, et leurs démonstrations, en grande partie inspirées des deux articles [24] et [26] de P. Eberlein, s'étendent au flot géodésique sur  $\Gamma \backslash T^1X$ .

La propriété 3.8 porte sur le spectre des longueurs de  $\Gamma$ . Cet ensemble très convoité par les géomètres, est source de nombreux problèmes ouverts. L'un de ces problèmes consiste à savoir si cette propriété se généralise au cas d'un groupe de Schottky agissant sur une variété de Hadamard de courbure sectionnelle strictement négative. Il est ouvert si  $X$  n'est pas un espace symétrique et si  $\dim(X) \geq 3$  ([10], [16], [27]). La propriété de densité du spectre des longueurs est d'autant plus importante qu'elle est équivalente à celle de mélange topologique du flot géodésique [16].

Nous n'avons pas abordé l'aspect métrique de ce flot ; donnons en ici quelques idées directrices. Plaçons-nous pour cela dans le disque de Poincaré, et considérons un groupe fuchsien non élémentaire  $\Gamma$  agissant sur  $\mathbb{D}$ . Une construction due à D. Sullivan ([56], [57]) permet d'obtenir à partir d'une mesure de Patterson  $m$  sur  $L(\Gamma)$  (introduite dans le commentaire du chapitre I) une mesure  $M$  sur  $L(\Gamma) \times L(\Gamma) \times \mathbb{R}$  en posant

$$M(dx dy ds) = \frac{m(dx)m(dy)ds}{|x - y|^{2\delta(\Gamma)}}$$

où  $\delta(\Gamma)$  est l'exposant critique de la série de Poincaré associée à  $\Gamma$ .

En identifiant  $T^1\mathbb{D}$  aux triplets de points  $(x, y, s)$  avec  $x \neq y$  et  $s \in \mathbb{R}$ , la mesure  $M$  devient une mesure sur  $T^1\mathbb{D}$  invariante par  $\Gamma$  et par le flot  $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ . Elle induit donc une mesure  $\overline{M}$  sur  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{D}$  invariante par  $g_{\mathbb{R}}$  et portée par l'ensemble non errant de ce flot [43]. Si  $\Gamma$  est un réseau,  $\overline{M}$  est proportionnelle à la mesure de Liouville. Plus généralement, si  $\Gamma$  est géométriquement fini,  $\overline{M}$  est finie et le flot géodésique est ergodique et mélangeant par rapport à cette mesure ([4], [49]).

Cette construction se généralise au cas des variétés de Hadamard pincées [10] mais la finitude géométrique de  $\Gamma$  n'entraîne pas nécessairement la finitude de  $\overline{M}$  ([18], [49]).

Dans les textes de M. Babillot [4] et de T. Roblin [49], on trouvera une riche exposition du rôle joué par  $\overline{M}$  dans les problèmes de comptage de points d'une orbite de  $\Gamma$  dans une boule de rayon  $R$ , et de dénombrement des géodésiques fermées.

# CHAPITRE IV

## GROUPES DE SCHOTTKY ET DYNAMIQUE SYMBOLIQUE

Dans ce chapitre,  $\Gamma$  désigne un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques  $g_1, g_2$ . Par définition, ce groupe admet un domaine de Dirichlet, centré en un point  $0$  du disque de Poincaré, représenté par l'une des figures ci-dessous (voir paragraphe II.1)

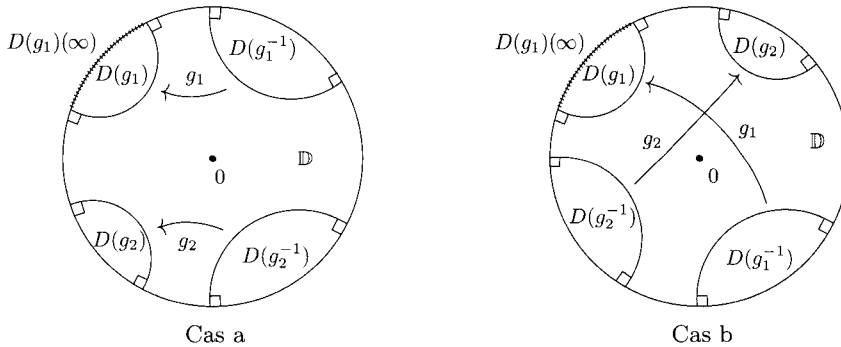


FIGURE 1

On rappelle que si  $g$  est une isométrie ne fixant pas  $0$ , l'ensemble  $D(g)$  représente le demi-plan contenant le point  $g(0)$ , fermé dans le disque  $\mathbb{D}$  et bordé par la médiatrice du segment  $[0, g(0)]_h$ .

La surface  $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$  est donc homéomorphe à une sphère privée de trois points ou à un tore privé d'un point. Dans les deux cas, l'ensemble limite de  $\Gamma$  est uniquement composé de points coniques (propriété II.1.14) donc l'ensemble  $\Omega_g(T^1 S)$  est compact (proposition III.2.4). L'esprit de ce chapitre est de coder les trajectoires du flot géodésique en restriction à  $\Omega_g(T^1 S)$  par des suites bilatères, et de développer ce point de vue pour étudier la dynamique de ce flot. Cette approche symbolique nous permettra de retrouver



les théorèmes III.3.4 et III.4.2, de compléter ce dernier théorème en caractérisant les trajectoires denses dans  $\Omega_g(T^1S)$  en termes de suites, et de construire, dans le cas général d'un groupe fuchsien non élémentaire  $\Gamma'$ , des trajectoires du flot géodésique sur  $\Omega_g(\Gamma' \backslash T^1\mathbb{D})$  ni périodiques, ni denses.

## 1. Codage

On rappelle que  $\Sigma^+$  désigne l'ensemble des suites  $s = (s_i)_{i \geq 1}$  vérifiant

$$s_i \in \mathcal{A} = \{g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}\} \quad \text{et} \quad s_{i+1} \neq s_i^{-1},$$

et que l'application  $f : \Sigma^+ \rightarrow L(\Gamma)$  associe à une suite  $s = (s_i)_{i \geq 1}$  le point  $x(s)$  défini par

$$x(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_1 \cdots s_n(0) \quad (\text{voir les paragraphes II.1 et II.2}).$$

Puisque  $g_1$  et  $g_2$  sont hyperboliques, cette application est bijective (proposition II.2.2). Munissons  $\Sigma^+$  de la distance  $\delta$  définie par

$$\delta(s, s') = \begin{cases} 0, & \text{si } s = s', \\ \frac{1}{\min\{i \geq 1 \mid s_i \neq s'_i\}}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 1.1.** Démontrer que  $\delta$  est une distance et que  $(\Sigma^+, \delta)$  est compact.

**Lemme 1.2.** L'application  $f$  de  $(\Sigma^+, \delta)$  dans  $L(\Gamma)$  est un homéomorphisme.

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que cette application est continue. Considérons une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de  $\Sigma^+$  convergeant vers un élément  $s$  de  $\Sigma^+$ . Posons

$$u_n = (u_{n,i})_{i \geq 1} \quad \text{et} \quad s = (s_i)_{i \geq 1}.$$

Pour tout  $k \geq 2$ , il existe  $N > 1$  tel que, quel que soit  $1 \leq i \leq k$  et  $n \geq N$ , on ait  $u_{n,i} = s_i$ . Pour tout  $n \geq N$ , l'image par  $f$  de  $u_n$  s'écrit

$$f(u_n) = s_1 \cdots s_{k-1}(f(T^{k-1}(u_n))),$$

où  $T$  est le décalage sur  $\Sigma^+$ .

Le point  $f(T^{k-1}(u_n))$  appartient à l'ensemble  $D(s_k)(\infty)$  donc  $f(u_n)$  appartient à l'ensemble  $D(s_1, \dots, s_k)(\infty) = s_1 \cdots s_{k-1}D(s_k)(\infty)$ . Cet ensemble contient également le point  $x(s)$  car

$$x(s) = s_1 \cdots s_k \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{k+1} \cdots s_n(0).$$

D'après le lemme II.1.11, la suite des diamètres euclidiens des ensembles  $D(s_1, \dots, s_k)$ , qui sont emboîtés, converge vers 0 quand  $k$  tend vers plus l'infini donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(u_n) - f(s)| = 0$ .  $\square$

Introduisons l'ensemble  $\Sigma$  des suites bilatères admissibles  $S = (S_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifiant

$$(S_i)_{i \geq 1} \in \Sigma^+, \quad (S_{-i+1}^{-1})_{i \geq 1} \in \Sigma^+ \quad \text{et} \quad S_1 \neq S_0^{-1}.$$

Soit  $S$  dans  $\Sigma$ . On pose

$$S^+ = (S_i)_{i \geq 1} \quad \text{et} \quad S^- = (S_{-i+1}^{-1})_{i \geq 1}.$$

La condition  $S_1 \neq S_0^{-1}$  implique, d'après la propriété II.1.4(i), que les points  $f(S^+)$  et  $f(S^-)$  sont différents.

La distance  $\delta$  sur  $\Sigma^+$  induit sur  $\Sigma$  une distance  $\Delta$  définie par

$$\Delta(S, S') = \sqrt{\delta^2(S^+, S'^+) + \delta^2(S^-, S'^-)}.$$

Nous notons encore  $T$  le décalage sur  $\Sigma$  défini par  $T(S) = (S_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ . Cette application est une bijection de  $\Sigma$ .

**Exercice 1.3.** Démontrer que le décalage  $T$  sur  $(\Sigma, \Delta)$  est continu.

**Exercice 1.4.** Démontrer que l'espace métrique  $(\Sigma, \Delta)$  est compact.

Nous allons à présent établir une correspondance entre la topologie des orbites de  $T$  sur  $(\Sigma, \Delta)$  et celle des trajectoires du flot géodésique sur  $\Omega_g(T^1 S)$ . Pour cela introduisons l'application  $F$  de  $\Sigma$  dans  $L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$ , produit de  $L(\Gamma)$  par lui-même privé de sa diagonale, définie par

$$F(S) = (x(S^-), x(S^+)).$$

Cette application est continue et injective car l'application  $f$  l'est. En revanche elle n'est pas surjective puisque  $x(S^-)$  et  $x(S^+)$  appartiennent respectivement aux deux arcs différents  $D(S_0^{-1})(\infty)$  et  $D(S_1)(\infty)$ .

**Lemme 1.5.** *Quel que soit  $(x_-, x_+)$  dans  $L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$ , il existe  $\gamma$  dans  $\Gamma$  et  $S$  dans  $\Sigma$  tels que  $\gamma(x_-, x_+) = F(S)$ .*

*Démonstration.* Soient  $a = (a_i)_{i \geq 1}$  et  $b = (b_i)_{i \geq 1}$  deux éléments de  $\Sigma^+$  tels que  $x_- = x(a)$  et  $x_+ = x(b)$ . Par hypothèse  $x_- \neq x_+$ . Considérons le plus petit  $N \geq 1$  tel que  $a_N \neq b_N$ , notons  $S$  la suite bilatère définie par

$$S_i = \begin{cases} a_{N+i-1} & \text{si } i \geq 1, \\ b_{N-i}^{-1} & \text{si } i \leq 0. \end{cases}$$

Cette suite appartient à  $\Sigma$ . Si  $N = 1$ , on a  $F(S) = (x_-, x_+)$ , sinon  $F(S) = (a_1^{-1} \cdots a_{N-1}^{-1}(x_-), a_1^{-1} \cdots a_{N-1}^{-1}(x_+))$ .  $\square$

L'application  $F$  est donc surjective sur un ensemble de représentants associés aux orbites de  $\Gamma$  sur  $L(\Gamma) \times^\Delta L(\Gamma)$ .

On rappelle que  $\pi^1$  représente la projection de  $T^1 \mathbb{H}$  sur  $T^1 S$ .

**Proposition 1.6.** Soient  $S, S'$  dans  $\Sigma$  et  $u, u'$  dans  $T^1\mathbb{H}$  tels que

$$(u(-\infty), u(+\infty)) = F(S), \quad (u'(-\infty), u'(+\infty)) = F(S').$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $S' \in \overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$  ;
- (ii)  $\pi^1(u') \in \overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))}$ .

*Démonstration.* La propriété (ii) est équivalente à l'existence de suites  $(s_n)_{n \geq 1}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(\tilde{g}_{s_n}(u)) = u'$ , ce qui, d'après le lemme III.1.6, est équivalent à l'existence d'une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_n(u(-\infty)), \gamma_n(u(+\infty))) = (u'(-\infty), u'(+\infty)).$$

Notons (iii) cette dernière propriété.

L'implication (i)  $\Rightarrow$  (iii) provient directement de l'égalité

$$F(T^n(S)) = (\gamma_n(u(-\infty)), \gamma_n(u(+\infty))),$$

avec  $\gamma_n = S_n^{-1} \cdots S_1^{-1}$  si  $n > 0$  et  $\gamma_n = S_{n+1} \cdots S_0$  sinon.

Montrons (iii)  $\Rightarrow$  (i). Considérons une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_n(u(-\infty)), \gamma_n(u(+\infty))) = (u'(-\infty), u'(+\infty)).$$

Écrivons  $\gamma_n$  sous forme d'un mot réduit  $\gamma_n = a_{n,1} \cdots a_{n,\ell_n}$ . S'il existe une suite extraite  $(\gamma_{n_k})_{k \geq 1}$  vérifiant

$$\gamma_{n_k} = S_{\ell_{n_k}}^{-1} \cdots S_1^{-1} \quad \text{ou} \quad \gamma_{n_k} = S_{-\ell_{n_k}+1} \cdots S_0,$$

alors  $(\gamma_{n_k}(u(-\infty)), \gamma_{n_k}(u(+\infty))) = F(T^{\ell_{n_k}}(S))$  et, comme  $F$  est un homéomorphisme sur son image,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^{\ell_{n_k}}(S) = S'$ .

Sinon, à partir d'un certain rang,  $\gamma_n$  est différent de  $S_{\ell_n}^{-1} \cdots S_1^{-1}$  et de  $S_{-\ell_n+1} \cdots S_0$ , donc d'après la propriété II.1.4, les points  $\gamma_n(u(-\infty))$  et  $\gamma_n(u(+\infty))$  appartiennent au même arc de cercle  $D(a_{n,1})(\infty)$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer  $a_{n,1} = a_1$ . Les points  $u'(-\infty)$  et  $u'(+\infty)$  appartiennent donc à  $D(a_1)(\infty)$ . Ceci est impossible car  $u'(-\infty) \in D(S_0^{-1})(\infty)$ ,  $u'(+\infty) \in D(S'_1)(\infty)$  et  $S_0^{-1} \neq S'_1$ .  $\square$

Dans les paragraphes suivants nous allons utiliser cette proposition pour démontrer des propriétés sur la topologie des trajectoires du flot géodésique sur  $\Omega_g(T^1S)$ .

## 2. Densité des trajectoires périodiques et trajectoires denses

**2.1. Autre démonstration du théorème III.3.4.** Commençons par établir un lien entre les éléments de  $\Sigma$  périodiques pour  $T$  et les éléments de  $\Omega_g(T^1S)$  périodiques pour le flot géodésique.

Soit  $S = (S_i)_{i \geq 1}$  un élément de  $\Sigma$  périodique de période  $n$ . Posons  $\gamma = S_1 \cdots S_n$ . On a  $x(S^+) = \gamma^+$  et  $x(S^-) = \gamma^-$ . Donc si  $u$  vérifie  $(u(-\infty), u(+\infty)) = F(S)$ , d'après la proposition III.3.2, l'élément  $\pi^1(u)$  est périodique.

Réciproquement, soit  $\pi^1(u)$  un élément périodique pour  $g_{\mathbb{R}}$ . Quitte à remplacer  $u$  par un élément de  $\Gamma u$ , on peut supposer qu'il existe une isométrie hyperbolique  $\gamma = a_1 a_2 \cdots a_n$  avec  $a_i \in \mathcal{A}$ ,  $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$  et  $a_1 \neq a_n^{-1}$  telle que  $u(-\infty) = \gamma^-$  et  $u(+\infty) = \gamma^+$ . Comme  $a_1 \neq a_n^{-1}$ , les suites  $f^{-1}(\gamma^+)$  et  $f^{-1}(\gamma^-)$  sont périodiques de période  $n$ . Considérons la suite bilatère périodique  $(S_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de période  $n$  définie par  $S_1 = a_1, \dots, S_n = a_n$ . Cette suite appartient à  $\Sigma$  et vérifie  $F(S) = (\gamma^-, \gamma^+)$ .

Nous venons de démontrer la propriété :

**Propriété 2.1.** *Soit  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$ . L'élément  $\pi^1(u)$  est périodique si et seulement s'il existe un élément périodique  $S$  de  $\Sigma$  et une isométrie  $\gamma$  de  $\Gamma$  tels que*

$$\gamma(u(-\infty), u(+\infty)) = F(S).$$

Donnons une autre démonstration de la densité de l'ensemble des éléments périodiques pour le flot géodésique sur de  $\Omega_g(\Gamma \backslash T^1\mathbb{D})$  (théorème III.3.4) dans le cas particulier où  $\Gamma$  est un groupe de Schottky.

*Démonstration.* Soit  $\pi^1(u)$  dans  $\Omega_g(\Gamma \backslash T^1\mathbb{H})$ . D'après le lemme 1.5, il existe  $\gamma$  dans  $\Gamma$  et  $S$  dans  $\Sigma$  tels que  $\gamma(u(-\infty), u(+\infty)) = F(S)$ . Pour chaque  $n \geq 1$ , choisissons  $a_{n+1}$  dans  $\mathcal{A} - \{S_n^{-1}, S_{-n}^{-1}\}$ . Considérons la suite  $(U_k)_{k \geq 1}$  d'éléments de  $\Sigma$  dont chaque terme  $U_k = (U_{k,i})_{i \geq 1}$  est une suite périodique de période  $2k+2$  telle que

$$\begin{aligned} U_{k,1} &= S_1, & U_{k,2} &= S_2, \dots, U_{k,k} = S_k, \\ U_{k,k+1} &= a_{k+1}, \\ U_{k,k+2} &= S_{-k}, & U_{k,k+3} &= S_{-k+1}, \dots, U_{k,2k+2} = S_0. \end{aligned}$$

On a  $\Delta(U_k, S) \leq \sqrt{2}/k$  donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_k = S$ . Pour chaque  $k \geq 1$ , choisissons  $u_k$  dans  $T^1\mathbb{H}$  tel que  $(u_k(-\infty), u_k(+\infty)) = F(U_k)$ . D'après la propriété 2.1, l'élément  $\pi^1(u_k)$  est périodique. Par ailleurs

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k(-\infty), u_k(+\infty)) = (u(-\infty), u(+\infty))$$

car  $F$  est continue, donc il existe une suite  $(s_k)_{k \geq 1}$  de  $\mathbb{R}$  telle que  $(g_{s_k}(\pi^1(u_k)))_{k \geq 1}$  converge vers  $\pi^1(u)$ .  $\square$

**2.2. Autre démonstration du théorème III.4.2.** D'après la proposition 1.6, démontrer l'existence de trajectoires géodésiques denses dans  $\Omega_g(T^1 S)$  revient à démontrer l'existence d'orbites denses pour  $T$  sur  $\Sigma$ . Construisons de telles orbites sur  $\Sigma$ .

Soit  $V = (V_i)_{i \in I}$  avec  $I \subset \mathbb{Z}$ , une suite finie ou infinie de  $\mathcal{A}$ . On appelle *bloc* de  $V$  une suite finie  $B$  constituée de termes consécutifs de  $V$  de la forme  $B = (V_{n+i})_{1 \leq i \leq k}$ .

**Propriété 2.2.** Soit  $S \in \Sigma$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) tout mot réduit  $a_1 \cdots a_n$  avec  $a_i \in \mathcal{A}$  et  $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$  est un bloc de  $S$  ;
- (ii)  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)} = \Sigma$ .

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $S' = (S'_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$ . Considérons le mot réduit

$$S'_{-n} S'_{-n+1} \cdots S'_0 S'_1 \cdots S'_n.$$

Par hypothèse, pour chaque  $n$ , il existe  $k_n \in \mathbb{Z}$  tel que  $T^{k_n}(S)$  soit une suite  $U_n$  vérifiant  $U_{n,i} = S'_i$  pour tout  $-n \leq i \leq n$ . On a  $\Delta(S', U_n) \leq \sqrt{2}/n$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^{k_n}(S) = S'$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Soient  $m = a_1 \cdots a_n$  un mot réduit et  $c$  dans  $\mathcal{A} - \{a_n^{-1}, a_1^{-1}\}$ . Considérons la suite bilatère périodique de période  $n+1$ , notée  $S'$ , définie par

$$S'_1 = a_1, \quad S'_2 = a_2, \quad S'_n = a_n, \quad S'_{n+1} = c.$$

Cette suite appartient à  $\Sigma$ . Comme  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)} = \Sigma$ , il existe  $(k_p)_{p \geq 1}$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} T^{k_p}(S) = S'$ . Posons  $T^{k_p}(S) = U_p$ . Pour  $p$  grand,  $\Delta(S', U_p) \leq 1/(n+1)$  donc  $U_{p,i} = S'_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n+1$ . Ceci montre que la suite finie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  est un bloc de  $S$ .  $\square$

Il nous reste à construire des suites satisfaisant la propriété (ii). Pour chaque  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , notons  $E_n$  l'ensemble des mots réduits  $m_n = a_1 \cdots a_n$  de longueur  $n$ , avec  $a_i \in \mathcal{A}$  et  $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ . Soit  $\ell_n$  le cardinal de cet ensemble. Fixons une numérotation,  $(m_{n,i})_{1 \leq i \leq \ell_n}$  des éléments de  $E_n$ . Pour  $1 \leq i < \ell_n$ , choisissons une lettre  $a_i$  de  $\mathcal{A}$  différente de l'inverse de la dernière lettre du mot  $m_{n,i}$  et de la première du mot  $m_{n,i+1}$ . Le mot  $m_{n,1} a_1 m_{n,2} a_2 \cdots a_{\ell_n-1} m_{n,\ell_n}$  est réduit. Notons  $B_n = (B_{n,i})_{1 \leq i \leq p_n}$  la suite finie des lettres le formant. Choisissons  $d_0$  dans  $\mathcal{A}$  différent de  $B_{1,1}^{-1}$  et pour  $n \geq 1$ , choisissons  $d_n$  dans  $\mathcal{A} - \{B_{n,p_n}^{-1}, B_{n+1,1}^{-1}\}$ . Enfin, introduisons la suite bilatère  $S$  définie par  $S_i = d_0$  pour tout  $i \leq 0$  et dont la suite  $S^+$  est

construite à partir des blocs  $(B_n)_{n \geq 1}$  et de la suite  $(d_n)_{n \geq 1}$  de la façon suivante :

$$S^+ = \underbrace{B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{1,p_1}}_{B_1}, \underbrace{B_{2,1}, \dots, B_{2,p_2}}_{B_2}, d_2, \dots, \underbrace{B_{n,1}, \dots, B_{n,p_n}}_{B_n}, d_n, \underbrace{B_{n+1,1}, \dots, \dots}_{B_{n+1}}, \dots$$

La suite  $S$  appartient à  $\Sigma$ . Par construction, la suite  $S^+$  contient tous les mots réduits finis donc, d'après la propriété 2.2, on a  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)} = \Sigma$ .

### 3. Applications au cas général

Dans le chapitre III, nous avons surtout mis en évidence l'existence de trajectoires géodésiques périodiques ou denses dans l'ensemble non errant associé au quotient de  $T^1\mathbb{D}$  par un groupe fuchsien non élémentaire  $\Gamma'$  quelconque.

Existe-t-il des trajectoires incluses dans cet ensemble ne satisfaisant aucune de ces deux propriétés ? Pour répondre à cette question nous allons utiliser la présence dans  $\Gamma'$  de groupes de Schottky  $\Gamma = S(g_1, g_2)$  engendré par deux isométries hyperboliques (corollaire II.1.3).

**Exercice 3.1.** Démontrer que  $\Omega_g(\Gamma \backslash T^1\mathbb{D})$  contient des trajectoires géodésiques ni périodiques, ni denses.

(Indication : construire par exemple une suite bilatère non périodique appartenant à  $\Sigma$  ne faisant pas intervenir toutes les lettres de l'alphabet  $\mathcal{A}$ , et utiliser la proposition 1.6.)

Notons  $P$  la projection de  $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{D}$  sur  $T^1S' = \Gamma' \backslash T^1\mathbb{D}$ .

**Exercice 3.2.** Démontrer les assertions suivantes :

- (i) pour tous  $t \in \mathbb{R}$  et  $v \in T^1S$ , on a  $P(g_t(v)) = g_t(P(v))$  ;
- (ii)  $P(\Omega_g(T^1S)) = \Omega_g(T^1S') \Rightarrow L(\Gamma) = L(\Gamma')$ .

L'ensemble  $P(\Omega_g(T^1S))$  est un compact inclus dans  $\Omega_g(T^1S')$  et invariant par le flot géodésique. Si l'on a pris soin de choisir  $\Gamma$  suffisamment petit pour que son ensemble limite soit différent de celui de  $\Gamma'$ , ce qui est toujours possible, on obtient d'après les exercices 3.1 et 3.2, l'existence de trajectoires géodésiques dans  $\Omega_g(T^1S')$  ni périodiques, ni denses.

Intéressons-nous à présent à l'existence d'ensembles compacts minimaux invariants par le flot géodésique sur  $\Omega_g(T^1S')$ .

On rappelle qu'un sous-ensemble  $F$  d'un espace topologique est *minimal* relativement à un groupe  $H$  d'homéomorphismes s'il est non vide, fermé,

invariant par  $H$  et minimal au sens de l'inclusion pour ces propriétés. Un tel ensemble est nécessairement l'adhérence d'une orbite de  $H$ .

Une trajectoire périodique pour le flot géodésique sur  $\Omega_g(T^1S)$  est un exemple d'ensemble minimal relativement à  $g_{\mathbb{R}}$ . Une suite décroissante de compacts invariants par  $g_{\mathbb{R}}$  contient un plus petit élément, donc tout compact de  $\Omega_g(T^1S)$  invariant par le flot géodésique contient un minimal, c'est le cas entre autre de  $P(\Omega_g(T^1S))$ .

Ces arguments ne garantissent pas l'existence d'ensembles minimaux non périodiques. Nous allons démontrer que de tels ensembles existent sur  $\Omega_g(T^1S)$  en utilisant les suites bilatères.

**Propriété 3.3.** *Soit  $S = (S_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  un élément de  $\Sigma$ . Si quel que soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , il existe  $N(n) > 0$  tel que pour tout  $j$  dans  $\mathbb{Z}$ , la suite  $S_{-n}, S_{-n+1}, \dots, S_0, S_1, \dots, S_n$  soit un bloc de la suite  $S_{j+1}, \dots, S_{j+N(n)}$ , alors  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$  est un ensemble minimal pour  $T$ .*

*Démonstration.* Nous allons montrer que si  $S'$  appartient à  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$ , alors  $S$  appartient à  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S')}$ . Ceci montrera que  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$  est minimal.

Soit  $(p_k)_{k \geq 1}$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^{p_k}(S) = S'$ . On a  $T^{p_k}(S) = (S_{p_k+i})_{i \in \mathbb{Z}}$ . Fixons  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Soit  $N(n)$  l'entier associé à  $n$ . Comme  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^{p_k}(S) = S'$ , il existe  $k_n > 0$  tel que  $S_{p_{k_n}+i} = S'_i$  pour tout  $1 \leq i \leq N(n)$ . Par conséquent, il existe  $0 \leq j_n \leq N(n) - 2n - 1$  tel que  $S'_{j_n+i} = S_{-n+i-1}$  pour tout  $1 \leq i \leq 2n+1$ . On a donc  $\Delta(T^{j_n+n+1}(S'), S) \leq \sqrt{2}/n$ . Ceci montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^{j_n+n+1}(S') = S$ .  $\square$

Il nous reste à construire une suite de  $\Sigma$  satisfaisant cette propriété. Pour cela, considérons la suite de mots  $(m_n)_{n \geq 1}$  définie par récurrence par

$$m_1 = g_1 \quad \text{et} \quad m_{n+1} = m_n g_2 m_n m_n g_2 m_n,$$

où  $g_1, g_2$  représentent les générateurs de  $\Gamma$ . Remarquons par récurrence que chaque mot  $m_n$  commence et finit par la lettre  $g_1$ , et donc qu'il est réduit. Notons  $\ell_n$  la longueur du mot  $m_n$ . Les  $\ell_n$  premières lettres de  $m_{n+1}$  coïncident avec celles de  $m_n$  et la première lettre de  $m_n$  est différente de l'inverse de sa dernière lettre. Il existe donc une (unique) suite bilatère  $S = (S_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , avec  $S_i \in \mathcal{A}$  vérifiant les conditions

$$S_{-\ell_n+1} S_{-\ell_n+2} \cdots S_0 S_1 \cdots S_{\ell_n} = m_n m_n.$$

**Exercice 3.4.** Démontrer que  $S$  appartient à  $\Sigma$  et n'est pas périodique.

**Lemme 3.5.** *Soit  $n \geq 1$ . Quel que soit  $p \geq n+1$ , tout bloc de longueur  $6\ell_n + 3$  de la suite  $S_{-\ell_p+1}, \dots, S_0, S_1, \dots, S_{\ell_p}$  contient le bloc  $S_{-\ell_n}, S_{-\ell_n+1}, \dots, S_0, S_1, \dots, S_{\ell_n}$ .*

*Démonstration.* Fixons  $n \geq 1$ . Posons  $A_p = m_p m_p$  et procédons par récurrence sur  $k \geq n + 1$ .

On a  $A_{n+1} = m_n g_2 A_n g_2 A_n g_2 A_n g_2 m_n$ . La longueur des suites associées à  $m_n$  et  $A_n$  étant respectivement  $\ell_n$  et  $2\ell_n$ , tout bloc de longueur  $6\ell_n + 3$  de la suite associée à  $A_{n+1}$  contient la suite associée à  $A_n$ , ce qui démontre la propriété pour  $p = n + 1$ .

Supposons à présent que la propriété soit vraie jusqu'au rang  $p > n + 1$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $p + 1$ .

On a  $A_{p+1} = m_p g_2 A_p g_2 A_p g_2 A_p g_2 m_p$ . Considérons un bloc  $B$  de longueur  $6\ell_n + 3$  de la suite associée à  $A_{p+1}$ . Si  $B$  est un bloc de  $A_p$  ou de  $m_p$ , l'hypothèse de récurrence s'applique. Sinon  $B$  est un bloc de la suite associée à l'un des mots suivants :

$$w_1 = m_p g_2 A_p, w_2 = A_p g_2 A_p, w_3 = A_p g_2 m_p,$$

contenant la lettre  $g_2$  apparaissant dans cette écriture. Notons cette lettre  $\bar{g}_2$ . Posons

$$M_n = A_n g_2 m_n \bar{g}_2 m_n g_2 A_n.$$

Comme  $m_p = m_{p-1} g_2 A_{p-1} g_2 m_{p-1}$  et  $A_p = m_p m_p$ , la suite associée au mot  $M_n$  est un bloc de longueur  $6\ell_n + 3$  de la suite associée aux mots  $w_1, w_2, w_3$ , et le deuxième  $g_2$  apparaissant dans l'écriture de  $M_n$  coïncide avec  $\bar{g}_2$ . La longueur du bloc  $B$  est  $6\ell_n + 3$  et  $B$  contient  $\bar{g}_2$ , donc  $B$  contient la suite associée à  $A_n$ .  $\square$

**Corollaire 3.6.** *Le fermé  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$  est minimal et non périodique.*

*Démonstration.* Montrons que la propriété 3.3(i) est satisfaite. Fixons  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , il existe  $k \geq n + 1$  tel que la suite finie  $B = S_{j+1}, \dots, S_{j+6\ell_n+3}$  soit un bloc de  $S_{-\ell_k+1}, \dots, S_0, S_1, \dots, S_{\ell_k}$ . D'après le lemme 3.5, le bloc  $B$  contient  $S_{-\ell_n}, \dots, S_0, \dots, S_{\ell_n}$ , donc en particulier  $S_{-n}, \dots, S_0, \dots, S_n$ . Par ailleurs  $S$  n'est pas périodique par l'exercice 3.4.  $\square$

Revenons au flot géodésique sur  $\Omega_g(\Gamma \backslash T^1 \mathbb{D})$ . Soit  $u \in T^1 \mathbb{H}$  tel que  $(u(-\infty), u(+\infty)) = F(S)$ . Puisque  $S$  n'est pas périodique,  $\pi^1(u)$  ne l'est pas non plus et donc, comme  $\Omega_g(\Gamma \backslash T^1 \mathbb{D})$  est compact,  $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$  n'est pas fermé.

Montrons que  $\overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))}$  est minimal relativement à  $g_{\mathbb{R}}$ . Soit  $\pi^1(u') \in \overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))}$ . D'après le lemme 1.5, quitte à remplacer  $u'$  par un élément de  $\Gamma u'$ , on peut supposer qu'il existe  $S'$  dans  $\Sigma$  tel que  $(u'(-\infty), u'(+\infty)) = F(S')$ . D'après la proposition 1.6, on a  $S' \in \overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$ . L'ensemble  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$  est minimal,  $S$  appartient à  $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S')}$ , donc  $\pi^1(u)$  appartient à  $\overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u'))}$ . Ceci montre que  $\overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))}$  est minimal.



Considérons à présent un groupe fuchsien non élémentaire  $\Gamma'$ .

**Corollaire 3.7.** *L'ensemble  $\Omega_g(\Gamma' \backslash T^1\mathbb{D})$  contient des ensembles minimaux non périodiques pour le flot géodésique.*

*Démonstration.* Fixons un sous-groupe de Schottky  $\Gamma$  de  $\Gamma'$ . On sait que  $\Omega_g(\Gamma \backslash T^1\mathbb{D})$  contient un ensemble minimal non périodique  $K$ . L'image de  $K$  par la projection  $P$  sur  $\Omega_g(\Gamma' \backslash T^1\mathbb{D})$  est un compact invariant par le flot géodésique. Notons le  $K'$ . Cet ensemble est minimal. En effet, supposons que  $K'$  contienne un compact non vide  $K_0$  invariant par  $g_{\mathbb{R}}$ , différent de  $K'$ . L'ensemble  $P^{-1}(K_0) \cap K$  est alors un compact non vide invariant par  $g_{\mathbb{R}}$  différent de  $K$ , ce qui est impossible car  $K$  est minimal.

Il nous reste à montrer que  $K'$  n'est pas périodique. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une isométrie hyperbolique  $\gamma'$  dans  $\Gamma'$ , un réel non nul  $T$  et  $u$  dans  $T^1\mathbb{D}$  tels que  $\gamma'(u) = \tilde{g}_T(u)$ , et tels que la trajectoire  $\tilde{g}_{\mathbb{R}}(u)$  se projette sur  $K'$ . Puisque  $K$  est compact et non périodique, il existe une suite non bornée  $(t_n)_{n \geq 1}$  et une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telles que  $\gamma_n \tilde{g}_{t_n}(u)$  converge vers un élément n'appartenant pas à l'ensemble  $\Gamma \tilde{g}_{\mathbb{R}}(u)$ . En utilisant l'élément  $\gamma'$ , on obtient alors une suite  $(\gamma'_n)_{n \geq 1}$  d'isométries toutes différentes dans  $\Gamma'$  et une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  bornée telles que  $\gamma'_n \tilde{g}_{s_n}(u)$  converge. Ceci contredit le fait que  $\Gamma$  est un groupe discret.  $\square$

#### 4. Commentaire

Cette approche du flot géodésique par la dynamique symbolique a été développée à l'origine pour la surface modulaire ([1], [2], [19], [52]). Elle s'étend aux quotients du demi-plan de Poincaré par des groupes fuchsien géométriquement finis [50].

Un tel point de vue se généralise également aux quotients d'une variété de Hadamard pincée par des groupes kleinien cocompacts (méthode des partitions de Markov [53]) et par des groupes de Schottky ([20], [39]).

Ce codage relie la théorie ergodique du flot géodésique à celle des sous-décalages de type fini et des opérateurs de Ruelle-Perron-Frobenius. Il permet par exemple de retrouver la mesure de Gauss  $dx/(1+x)$  sur  $[0, 1]$ , invariante par l'application de Gauss  $t(x) = 1/x - [1/x]$ , à partir de la mesure de Liouville sur  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash T^1\mathbb{H}$ , invariante, elle, par le flot géodésique ([19], [52]).

Cette méthode symbolique se révèle être souvent très efficace pour calculer l'entropie du flot géodésique ou dénombrer les géodésiques fermées d'une variété ([39], [20]). Le livre de T. Bedford, M. Keane & C. Series [7] est une bonne référence sur cette approche et ses applications. Comme nous l'avons

vu dans le paragraphe 3, ce codage permet aussi de construire des ensembles minimaux pour le flot géodésique. Cette construction est due à Morse et est exposée dans le livre de W. Gottschalk et G. Hedlund [31].

Les ensembles que nous avons construits sont compacts. Dans [21] nous proposons une construction de minimaux non compacts, en présence de cuspidés sur la surface.



## CHAPITRE V

### DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE DU FLOT HOROCYCLIQUE

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la topologie des trajectoires d'un autre exemple classique de flot sur le quotient de  $T^1\mathbb{H}$  par un groupe fuchsien : le *flot horocyclique*. La méthode que nous utilisons repose sur une correspondance entre l'ensemble des horocycles de  $\mathbb{H}$  et l'espace des vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^2$  modulo  $\{\pm \text{Id}\}$ . Ce point de vue vectoriel permet de relier la dynamique topologique de l'action linéaire d'un groupe discret  $G$  de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^2$  à celle du flot horocyclique sur le quotient de  $T^1\mathbb{H}$  par le groupe fuchsien associé à  $G$ . Dans le cas géométriquement fini, nous verrons que le flot horocyclique, d'un point de vue topologique, est moins tourmenté que le flot géodésique (paragraphe 4).

Tout au long de ce chapitre, nous conservons les définitions et notations associées à la dynamique d'un flot introduites au début du chapitre III.

#### 1. Préliminaires

**1.1. Le flot horocyclique sur  $T^1\mathbb{H}$ .** Soient  $u$  un élément  $T^1\mathbb{H}$  et  $H$  l'horocycle passant par  $u(0)$  centré en  $u(+\infty)$ . On note  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow H$  le paramétrage par longueur d'arcs de  $H$  d'origine  $u(0)$ , pour lequel le couple de vecteurs  $(d\beta/ds(0), \vec{u})$  forme une base directe de  $T_{u(0)}\mathbb{H}$  (figure 1). L'image de  $\mathbb{R}$  par  $\beta$  est l'*horocycle orienté* associé à  $u$ .

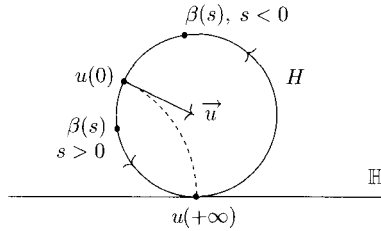


FIGURE 1

**Exercice 1.1.** Démontrer que si  $u(0) = a + ib$  et  $u(+\infty) = \infty$ , alors  $\beta(s) = a + sb + ib$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$  (figure 2).

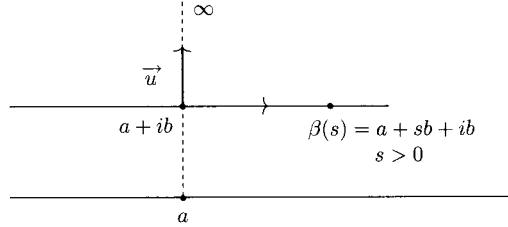


FIGURE 2

Pour  $t$  fixé, considérons l'application  $\tilde{h}_t : T^1\mathbb{H} \rightarrow T^1\mathbb{H}$  définie par

$$\tilde{h}_t(u) = (\beta(t), \vec{v}(t)),$$

où  $\vec{v}(t)$  est le vecteur unitaire de  $T^1_{\beta(t)}\mathbb{H}$  pour lequel le couple  $(d\beta/ds(t), \vec{v}(t))$  est une base orthonormée directe (figure 3).

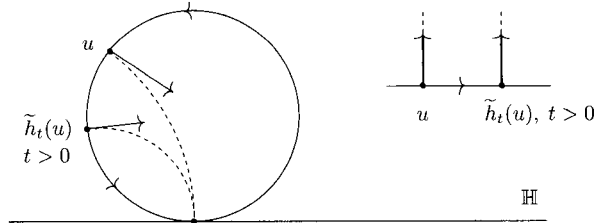


FIGURE 3

**Exercice 1.2.** Démontrer que pour toute isométrie positive  $g$  et pour tout réel  $t$ , la relation suivante est satisfaite

$$g \circ \tilde{h}_t = \tilde{h}_t \circ g.$$

**Exercice 1.3.** Démontrer que  $\tilde{h}_t$  est un homéomorphisme de  $T^1\mathbb{H}$  muni de la distance  $D$ .

(Indication : en utilisant la propriété I.2.3(i), l'exercice III.1.2 et l'exercice 1.2, démontrer que si une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de  $T^1\mathbb{H}$  converge vers  $u$ , alors  $(\tilde{h}_t(u_n))_{n \geq 1}$  converge vers  $\tilde{h}_t(u)$ .)

Pour tous  $t$  et  $t'$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$\tilde{h}_{t+t'} = \tilde{h}_t \circ \tilde{h}_{t'}.$$

En effet, fixons  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$  tel que  $u(0) = i$  et  $u(+\infty) = \infty$ . D'après les exercices 1.1 et 1.2, pour toute isométrie positive  $g$ , on a

$$\tilde{h}_{t+t'}(g(u)) = g(v) \quad \text{avec } v(0) = i + t + t' \text{ et } v(+\infty) = \infty.$$

Or  $v = \tilde{h}_t(\tilde{h}_{t'}(u))$ , donc

$$\tilde{h}_{t+t'}(g(u)) = \tilde{h}_t(\tilde{h}_{t'}(g(u))).$$

Le groupe des isométries positives de  $\mathbb{H}$  agit transitivement sur  $T^1\mathbb{H}$ , par conséquent cette dernière relation est satisfaite par tous les éléments de  $T^1\mathbb{H}$ .

On en conclut que l'application de  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe des homéomorphismes de  $T^1\mathbb{H}$  qui à  $t$  associe  $\tilde{h}_t$  est un morphisme de groupes.

**Exercice 1.4.** Démontrer que pour tous  $t, t' \in \mathbb{R}$  et  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$ , on a

$$D(\tilde{h}_t(u), \tilde{h}_{t'}(u)) = 4 \ln \left( \frac{1}{2} (|t' - t| + \sqrt{|t' - t|^2 + 4}) \right).$$

On déduit des exercices 1.3 et 1.4 que l'application  $\tilde{h}$  de  $\mathbb{R} \times T^1\mathbb{H}$  dans  $T^1\mathbb{H}$  définie par

$$\tilde{h}(t, u) = \tilde{h}_t(u)$$

est continue. Cette application définit donc bien un flot sur  $T^1\mathbb{H}$  que nous appelons *flot horocyclique*.

Comme dans le cas du flot géodésique (voir exercice III.1.4), la dynamique de ce flot sur  $T^1\mathbb{H}$  est simple.

**Exercice 1.5.** Démontrer les propriétés suivantes :

- (i) l'ensemble  $\Omega_{\tilde{h}}(T^1\mathbb{H})$  est vide ;
- (ii) pour tout  $v$  dans  $T^1\mathbb{H}$ , l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $T^1\mathbb{H}$  qui à  $t$  associe  $\tilde{h}_t(v)$  est un plongement.

### 1.2. Point de vue vectoriel sur l'espace des trajectoires de $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ .

Notons  $E$  le quotient de  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  par  $\{\pm \text{Id}\}$  et considérons l'application  $v : T^1\mathbb{H} \rightarrow E$  définie par (figure 4)

$$u \mapsto v(u) = \begin{cases} \pm e^{B_{u(+\infty)}(i, u(0))/2} / \sqrt{1 + u^2(+\infty)} \begin{pmatrix} u(+\infty) \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } u(+\infty) \neq \infty, \\ \pm e^{B_{u(+\infty)}(i, u(0))/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } u(+\infty) = \infty. \end{cases}$$

Remarquons que si  $u(+\infty) = \infty$  et  $u(0) = i$ , alors  $v(u) = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1.6.** Démontrer que l'application  $v$  est surjective, constante sur les trajectoires de  $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$  et qu'elle induit une bijection de l'ensemble de ces trajectoires sur  $E$ .

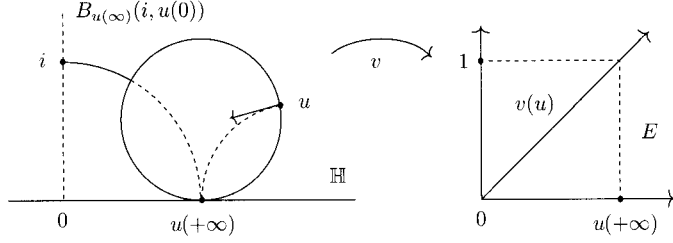


FIGURE 4

L'application  $v$  induit une action du groupe  $G$  des isométries positives de  $\mathbb{H}$  sur  $E$ .

Quelle est cette action ? La proposition suivante répond à cette question. Pour tout  $g \in G$ , posons  $g(z) = (az + b)/(cz + d)$ , avec  $ad - bc = 1$ , et notons  $M_g$  l'application linéaire sur  $E$  définie par

$$\forall \pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \{\pm \text{Id}\} \setminus \mathbb{R}_*^2, \quad M_g \left( \pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Proposition 1.7.** *Pour tous  $g$  dans  $G$  et  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$ , on a*

$$v(g(u)) = M_g(v(u)).$$

*Démonstration.* Considérons  $u_1$  dans  $T^1\mathbb{H}$  défini par

$$u_1(+\infty) = \infty \quad \text{et} \quad u_1(0) = i.$$

On rappelle que  $v(u_1) = \pm e_1$  avec  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Montrons que  $v(g(u_1)) = M_g(\pm e_1)$  pour tout  $g$  dans  $G$ . Décomposons  $M_g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sous la forme  $M_g = \pm KAN$  avec

$$K = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(propriété I.2.3(ii)). Notons respectivement  $k$ ,  $a$  les homographies associées à  $K$ ,  $A$ . On a

$$B_\infty(i, g^{-1}(i)) = B_\infty(i, a^{-1}(i)) \quad \text{et} \quad B_\infty(i, a^{-1}(i)) = B_\infty(i, \lambda^{-2}i)$$

donc  $B_\infty(i, g^{-1}(i)) = \ln \lambda^{-2}$ . Par ailleurs  $\|M(e_1)\| = \lambda$  donc  $\|v(g(u_1))\| = \|M_g(\pm e_1)\|$ . De plus  $g(u_1)(+\infty) = k(\infty)$  et  $M(e_1)$  est colinéaire à  $K(e_1)$ . On déduit de ces deux propriétés l'égalité cherchée.

Montrons à présent que pour tout  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$

$$v(g(u)) = M_g v(u).$$

L'action de  $G$  sur  $T^1\mathbb{H}$  étant simplement transitive (propriété I.2.3(i)), il existe  $g'$  dans  $G$  tel que  $g'(u_1) = u$ . Ainsi  $v(g(u)) = v(gg'(u_1))$ ,

donc  $v(g(u)) = M_{gg'}(v(u_1))$ . Pour conclure il suffit de remarquer que  $M_{gg'}(v(u_1)) = M_g(M_{g'}(v(u_1)))$  et que  $M_{g'}(v(u_1)) = v(g'(u_1))$ .  $\square$

**Exercice 1.8.** Démontrer que l'application  $v$  est continue.

(Indication : utiliser la propriété I.2.3(i) et la proposition 1.7.)

Les propriétés suivantes fourniront par la suite une caractérisation des points horocycliques et paraboliques de l'ensemble limite d'un groupe fuchsien.

**Propriété 1.9.** Soient  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$  et  $(g_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $G$ .

(i) La suite  $(B_{u(+\infty)}(i, g_n^{-1}(i)))_{n \geq 1}$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si  $(\|M_{g_n}(v(u))\|)_{n \geq 1}$  converge vers 0.

(ii) Pour tout  $g$  dans  $G - \{\text{Id}\}$ , le point  $u(+\infty)$  est fixé par  $g$  et l'isométrie  $g$  est parabolique si et seulement si  $M_g(v(u)) = v(u)$ .

**Exercice 1.10.** Démontrer les propriétés 1.9.

## 2. Le flot horocyclique sur un quotient

Nous considérons à présent un groupe fuchsien  $\Gamma$  et nous reprenons les notations introduites dans le paragraphe III.1.2. La propriété de commutation entre  $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$  et  $G$  démontrée dans l'exercice 1.2, permet de définir le *flot horocyclique*  $h_{\mathbb{R}}$  sur le quotient  $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$  en posant pour tout  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$  (figure 5)

$$h_t(\pi^1(u)) = \pi^1(\tilde{h}_t(u)).$$

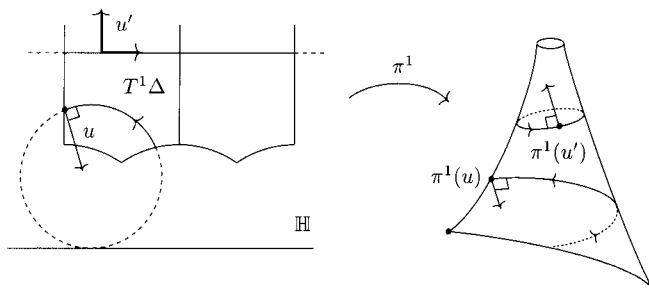


FIGURE 5.  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$

Par définition de la topologie sur  $T^1S$ , une suite  $(\pi^1(u_n))_{n \geq 1}$  converge vers  $\pi^1(u)$  si et seulement s'il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u_n(0)) = u(0)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u_n(+\infty)) = u(+\infty)$ . Donc



$(h_{t_n}(\pi^1(u)))_{n \geq 1}$  converge vers  $\pi^1(u')$  si et seulement s'il existe  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{h}_{t_n}(u)(0) = u'(0) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u(+\infty)) = u'(+\infty).$$

### 2.1. Point de vue vectoriel sur la topologie des trajectoires de $h_{\mathbb{R}}$ .

Notons  $M_{\Gamma}$  le sous-groupe de  $\{\pm \text{Id}\} \backslash \text{SL}(2, \mathbb{R})$  composé des  $M_{\gamma}$  avec  $\gamma$  dans  $\Gamma$ . Ce groupe d'applications linéaires est isomorphe à  $\Gamma$ , la proposition suivante relie sa dynamique sur  $E$  à celle de  $h_{\mathbb{R}}$  sur  $T^1S$ .

**Proposition 2.1.** *Soient  $u$  et  $u'$  dans  $T^1\mathbb{H}$ .*

(i) *La trajectoire de  $\pi^1(u)$  est fermée si et seulement si l'orbite de  $v(u)$  sous  $M_{\Gamma}$  est fermée dans  $E$ .*

(ii) *Il existe une suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{R}$  telle que  $(h_{t_n}(\pi^1(u)))_{n \geq 1}$  converge vers  $\pi^1(u')$  si et seulement s'il existe une suite  $(M_{\gamma_n})_{n \geq 1}$  de  $M_{\Gamma}$  telle que  $(M_{\gamma_n}(v(u)))_{n \geq 1}$  converge vers  $v(u')$ .*

*Démonstration.*

(i) Supposons que  $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$  soit fermé. Soit  $(M_{\gamma_n}v(u))_{n \geq 1}$  une suite convergente dans  $E$ . Par construction de l'application  $v$ , les suites  $(\gamma_n u(+\infty))_{n \geq 1}$  et  $(B_{\gamma_n(u(+\infty))}(i, \gamma_n(u(0))))_{n \geq 1}$  convergent respectivement vers  $x$  et  $t$ . Considérons le réel  $t_n$  tel que  $\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n(u))(0)$  appartienne à la géodésique passant par  $i$  d'extrémité  $\gamma_n(u(+\infty))$ . Soient  $z$  le point de  $\mathbb{H}$  vérifiant  $B_x(i, z) = t$ , appartenant à la géodésique passant par  $i$  d'extrémité  $x$ , et  $u'$  dans  $T^1\mathbb{H}$  tel que  $u'(+\infty) = x$  et  $u'(0) = z$ . La suite  $(\tilde{h}_{t_n} \gamma_n(u))_{n \geq 1}$  converge vers  $u'$ . Comme  $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$  est fermé, il existe  $\gamma \in \Gamma$  et  $s \in \mathbb{R}$  tels que  $u' = \gamma \tilde{h}_s(u)$ . L'application  $v$  étant continue, la suite  $(v(\tilde{h}_{t_n} \gamma_n(u)))_{n \geq 1} = (M_{\gamma_n}v(u))_{n \geq 1}$  converge vers  $M_{\gamma}(v(u))$  ce qui montre que  $M_{\Gamma}(v(u))$  est fermé.

Supposons à présent que  $M_{\Gamma}v(u)$  soit fermé. Puisque  $v$  est continue,  $v^{-1}(M_{\Gamma}(v(u))) = \tilde{h}_{\mathbb{R}}\Gamma(u)$  est fermé et donc  $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$  l'est aussi.

(ii) Supposons qu'il existe  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  tel que  $(\gamma_n \tilde{h}_{t_n}(u))_{n \geq 1}$  converge vers  $u'$ . Comme l'application  $v$  est continue, l'image de cette suite par  $v$  converge vers  $v(u')$ . Or

$$v(\gamma_n \tilde{h}_{t_n}(u)) = M_{\gamma_n}(v(u)),$$

donc  $(M_{\gamma_n}(v(u)))_{n \geq 1}$  converge vers  $v(u')$ .

Réciproquement, supposons que  $(M_{\gamma_n}(v(u)))_{n \geq 1}$  converge vers  $v(u')$ . Les suites  $(\gamma_n(u(+\infty)))_{n \geq 1}$  et  $(B_{\gamma_n(u(+\infty))}(i, \gamma_n(u(0))))_{n \geq 1}$  convergent respectivement vers  $u'(+\infty)$  et  $B_{u'(+\infty)}(i, u'(0))$ . Considérons le réel  $t_n$  tel que  $\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n(u))(0)$  appartienne à la géodésique passant par  $i$  d'extrémité  $\gamma_n(u(+\infty))$ . La suite  $((\tilde{h}_{t_n} \gamma_n(u))(+\infty))_{n \geq 1}$  converge vers  $u'(+\infty)$  et

$((\tilde{h}_{t_n} \gamma_n(u))(0))_{n \geq 1}$  converge vers  $u'(0)$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n}(\pi^1(u)) = \pi^1(u'). \quad \square$$

**2.2. Caractérisation de l'ensemble non errant.** Introduisons l'ensemble  $E(\Gamma)$  défini par

$$E(\Gamma) = \{v(u) \mid u \in T^1\mathbb{H}, u(+\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

**Exercice 2.2.** Démontrer que  $E(\Gamma)$  est un fermé de  $E$  invariant par le groupe  $M_\Gamma$ .

Si  $L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$ , ce qui est le cas en particulier si  $\Gamma$  est le groupe modulaire, alors  $E(\Gamma) = E$ . Sinon,  $E(\Gamma)$  est différent de  $E$ . Par exemple si  $\Gamma$  est un groupe de Schottky, alors  $E(\Gamma)$  est homéomorphe au produit de  $\mathbb{R}_*^+$  par un ensemble de Cantor.

Considérons la projection de  $E$  sur la droite projective et notons  $PE(\Gamma)$  l'image de  $E(\Gamma)$ . Cet ensemble est un fermé invariant par l'action projective de  $M_\Gamma$ . D'après l'exercice I.1.12, cette action est conjuguée par un homéomorphisme à celle de  $\Gamma$  sur  $L(\Gamma)$ . Donc si  $\Gamma$  n'est pas élémentaire, toutes les orbites projectives de  $M_\Gamma$  sur  $PE(\Gamma)$  sont denses, autrement dit,  $PE(\Gamma)$  est un ensemble minimal pour cette action.

Cette propriété est-elle encore satisfaite par l'action linéaire de  $M_\Gamma$  sur  $E(\Gamma)$  ?

Dans le cas du groupe modulaire la réponse est négative puisque le quotient de  $\mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$  par  $\{\pm \text{Id}\}$  est un fermé invariant par  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

Dans le paragraphe suivant, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante sur  $\Gamma$  pour que la réponse soit positive (proposition 4.3(ii)). En toute généralité, seule l'existence d'orbites denses est garantie.

**Proposition 2.3.** *Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien non élémentaire. Il existe  $\pm w \in E(\Gamma)$  tel que  $\overline{M_\Gamma(w)} = E(\Gamma)$ .*

Pour démontrer cette proposition, nous allons nous placer sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  et considérer le sous-groupe  $\widehat{M}_\Gamma$  de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ , image réciproque de  $M_\Gamma$  par la projection de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  sur  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Ce groupe agit sur l'ensemble  $\widehat{E}(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , image réciproque de  $E(\Gamma)$  par la projection de  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  sur  $E$ .

Commençons par démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2.4.** *Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux disques ouverts de  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  rencontrant  $\widehat{E}(\Gamma)$ . Il existe  $M$  dans  $\widehat{M}_\Gamma$  tel que  $MB_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Pour  $i = 1, 2$  notons  $C_i$  le cône positif ouvert engendré par  $B_i$ . Le disque  $B_1$  rencontre  $\widehat{E}(\Gamma)$  et l'action projective de  $\widehat{M}_\Gamma$  sur  $PE(\Gamma)$  est minimale donc il existe un vecteur propre  $u_1^+$  dans  $B_1$  associé au relevé  $M_1 \in \widehat{M}_\Gamma$  d'une isométrie hyperbolique  $\gamma_1$  de  $\Gamma$ . On peut supposer  $M_1(u_1^+) = \lambda_1 u_1^+$ , avec  $\lambda_1 > 1$ . Soit  $\gamma$  une isométrie hyperbolique de  $\Gamma$  n'ayant aucun point fixe en commun avec ceux de  $\gamma_1$ . Choisissons un relevé  $M \in \widehat{M}_\Gamma$  de  $\gamma$  et deux vecteurs propres  $u^+, u^-$  de  $M$  tels que  $M(u^+) = \lambda u^+$ ,  $M(u^-) = \lambda^{-1} u^-$  avec  $|\lambda| > 1$ . Quitte à remplacer  $M_1$  par  $M_1^n$  et  $u^+, u^-$  par des vecteurs de  $\mathbb{R}^* u^+, \mathbb{R}^* u^-$ , on peut supposer que  $M_1(u^+)$  et  $M_1(u^-)$  appartiennent à  $B_1$ . Soit  $M_2$  dans  $\widehat{M}_\Gamma$  le relevé d'une isométrie hyperbolique de  $\Gamma$  dont les droites propres sont différentes de celles de  $M_1$  et dont un vecteur propre attractif appartient à  $C_2$ . Quitte à remplacer  $M_2$  par  $\pm M_2^n$ , on peut supposer que  $M_2(u^+)$  appartient à  $C_2$ . Le segment  $[M_2 M^n(u^-), M_2 M^n(u^+)]$  converge, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , vers la demi-droite  $\Delta$  ouverte d'origine 0 dirigée par  $M_2(u^+)$ . On peut aussi voir cette droite comme la limite de l'image par  $M_2 M^n M_1^{-1}$  du segment  $[M_1(u^-), M_1(u^+)]$  qui est inclus dans  $B_1$ . Comme  $M_2(u^+)$  appartient à  $C_2$ , la demi-droite  $\Delta$  rencontre l'ouvert  $B_2$  en un segment non réduit à un point. Il existe donc  $w$  dans  $B_1$  et  $n$  tels que  $M_2 M^n M_1^{-1}(w)$  appartienne à  $B_2$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 2.3.* Nous allons démontrer qu'il existe  $x$  dans  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  tel que  $\widehat{M}_\Gamma(x) = \widehat{E}(\Gamma)$ .

L'idée est la même que celle utilisée pour démontrer le théorème III.4.2. Soit  $(B_n)_{n \geq 1}$  une suite de disques ouverts de  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  ayant chacun une intersection non vide avec  $\widehat{E}(\Gamma)$  et telle que tout ouvert de  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  rencontrant  $\widehat{E}(\Gamma)$  contienne un disque de cette suite. Fixons un tel ouvert  $O$ , d'après le lemme 2.4, il existe  $M_1$  dans  $\widehat{M}_\Gamma$  tel que  $M_1(O) \cap B_1 \neq \emptyset$ . Soit  $K_1$  un ouvert relativement compact rencontrant  $\widehat{E}(\Gamma)$ , inclus dans  $O$ , tel que  $M_1(K_1)$  soit inclus dans  $B_1$ . Remplaçons, dans le raisonnement précédent,  $O$  par  $K_1$  et  $B_1$  par  $B_2$ , on obtient  $M_2 \in \widehat{M}_\Gamma$  et un ouvert relativement compact  $K_2 \subset K_1$  rencontrant  $\widehat{E}(\Gamma)$  tel que  $M_2 K_2 \subset B_2$ . On construit ainsi une suite  $(M_n)_{n \geq 1}$  dans  $\widehat{M}_\Gamma$  et une suite  $(K_n)_{n \geq 1}$  d'ouverts rencontrant  $\widehat{E}(\Gamma)$ , relativement compacts, emboîtés telles que  $M_n(K_n) \subset B_n$ . Soit  $x$  dans  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \cap \widehat{E}(\Gamma)$ . Pour tout  $n \geq 1$ , le point  $M_n(x)$  appartient à  $B_n$ . Considérons un élément quelconque  $x'$  de  $\widehat{E}(\Gamma)$  et une suite  $(D_n)_{n \geq 1}$  de disques centrés en  $x'$  dont le rayon converge vers 0. Chaque  $D_n$  contient un disque  $B_{i_n}$  donc  $M_n(x)$  appartient à  $D_n$ . Ceci montre que  $x'$  appartient à  $\widehat{M}_\Gamma(x)$  et donc que  $\widehat{M}_\Gamma(x)$  est dense dans  $\widehat{E}(\Gamma)$ .  $\square$

Revenons à présent au flot horocyclique et introduisons le sous-ensemble  $\tilde{F}(\Gamma)$  de  $T^1\mathbb{H}$ , défini par

$$\tilde{F}(\Gamma) = v^{-1}(E(\Gamma)).$$

Cet ensemble est composé des  $u \in T^1\mathbb{H}$  tels que  $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ .

**Exercice 2.5.** Démontrer que  $\tilde{F}(\Gamma)$  est un fermé invariant par  $\Gamma$  et par  $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ .

La projection de  $\tilde{F}(\Gamma)$  sur  $T^1S$  par  $\pi^1$  est un fermé invariant par le flot  $h_{\mathbb{R}}$ . Notons le  $F(\Gamma)$ . Ce fermé est différent de  $T^1S$  si et seulement si  $L(\Gamma)$  est différent de  $\mathbb{H}(\infty)$ .

**Exercice 2.6.** Démontrer que  $F(\Gamma)$  est compact si et seulement si  $S$  est compact.

L'ensemble  $F(\Gamma)$  peut-il être caractérisé par une propriété du flot horocyclique? La réponse à cette question est contenue dans la proposition suivante :

**Proposition 2.7.** *L'ensemble  $F(\Gamma)$  est égal à l'ensemble non errant du flot horocyclique sur  $T^1S$ .*

Avant de démontrer ce résultat, commençons par remarquer que les propositions 2.1 et 2.3 entraînent le corollaire suivant :

**Corollaire 2.8.** *Il existe  $\pi^1(u) \in F(\Gamma)$  tel que  $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))} = F(\Gamma)$ .*

*Démonstration de la proposition 2.7.* Supposons que  $\pi^1(u)$  ne soit pas errant. Il existe une suite de voisinages emboîtés,  $(V_n)_{n \geq 1}$ , de  $\pi^1(u)$  et une suite  $(t_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^+$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$  et  $h_{t_n}(V_n) \cap V_n \neq \emptyset$ . Considérons une suite  $(\pi^1(u_n))_{n \geq 1}$  telle que

$$\begin{aligned} \pi^1(u_n) \in V_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^1(u_n) = \pi^1(u), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u \\ \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n}(\pi^1(u_n)) = \pi^1(u). \end{aligned}$$

Cette dernière limite se traduit sur  $T^1\mathbb{H}$  par l'existence d'une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}_{t_n} \gamma_n(u_n) = u$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}_{t_n} u_n(0) = u(+\infty) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{h}_{t_n} u_n(0), \gamma_n^{-1}(u(0))) = 0$$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(u(0)) = u(+\infty)$ . Ceci montre que  $u(+\infty)$  appartient à  $L(\Gamma)$ .

Considérons  $\pi^1(u_0)$  dans  $F(\Gamma)$  dont la trajectoire horocyclique est dense dans  $F(\Gamma)$ . Un tel point existe d'après le corollaire 2.8, et appartient à l'ensemble non errant du flot horocyclique. Ce dernier ensemble est fermé et invariant par ce flot. Il contient donc  $F(\Gamma)$ .  $\square$

Nous rappelons que l'ensemble non errant du flot horocyclique sur  $T^1S$  est noté  $\Omega_h(T^1S)$ , on a donc  $F(\Gamma) = \Omega_h(T^1S)$ .

### 3. Lecture à l'infini des trajectoires denses et périodiques

Nous supposons que  $\Gamma$  est un groupe fuchsien non élémentaire. Nous nous intéressons ici à la dynamique du flot horocyclique sur  $\Omega_h(T^1S)$  et à une caractérisation de la topologie de  $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$  en fonction de la nature du point  $u(+\infty)$ .

**3.1. Trajectoires horocycliques denses.** D'après la proposition 2.7 et le corollaire 2.8, si  $\Gamma$  n'est pas élémentaire,  $\Omega_h(T^1S)$  contient des trajectoires horocycliques denses.

**Théorème 3.1.** *Soit  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le point  $u(+\infty)$  est un point horocyclique de  $L(\Gamma)$  ;*
- (ii) *l'orbite  $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$  est dense dans  $\Omega_h(T^1S)$ .*

Pour démontrer ce théorème nous allons utiliser le point de vue vectoriel et le lemme suivant qui résulte directement de la définition des points horocycliques et de la propriété 1.9(i).

**Lemme 3.2.** *Soit  $u \in T^1\mathbb{H}$ . Le point  $u(+\infty)$  est horocyclique si et seulement s'il existe une suite  $(M_n)_{n \geq 1}$  dans  $M_{\Gamma}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_n(v(u))\| = 0$ .*

*Démonstration du théorème 3.1.* D'après la proposition 2.1 et le lemme 3.2, démontrer le théorème 3.1 revient à démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i') *il existe une suite  $(M_n)_{n \geq 1}$  de  $M_{\Gamma}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_n(v(u))\| = 0$  ;*
- (ii')  *$\overline{M_{\Gamma}v(u)} = E(\Gamma)$ .*

L'implication (ii')  $\Rightarrow$  (i') est claire.

Démontrons (i')  $\Rightarrow$  (ii'). Pour commencer plaçons nous dans le cas où  $u(+\infty)$  est fixé par une isométrie hyperbolique  $\gamma \in \Gamma$ . Notons  $M$  l'élément de  $M_{\Gamma}$  associé à  $\gamma$ . On peut supposer que  $M(v(u)) = \pm \lambda v(u)$  avec  $0 < \lambda < 1$ . D'après la proposition 2.3, il existe  $u'$  dans  $T^1\mathbb{H}$  tel que  $\overline{M_{\Gamma}v(u')} = E(\Gamma)$ . Nous allons montrer que  $\overline{M_{\Gamma}v(u)}$  contient un élément de  $\pm \mathbb{R}_* v(u')$ , ce qui entraînera l'égalité  $\overline{M_{\Gamma}v(u)} = E(\Gamma)$ .

Le point  $u'(+\infty)$  appartient à  $L(\Gamma)$  qui est minimal, donc il existe  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u(+\infty)) = u'(+\infty)$ . Soit  $(p_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $\mathbb{Z}$  telle que la suite  $(\lambda^{p_n} \|\gamma_n(v(u))\|)_{n \geq 1}$  converge vers

un réel  $\alpha \neq 0$ . Notons  $M_n$  l'élément de  $M_\Gamma$  associé à  $\gamma_n$ . Comme  $M_n M^{p_n}(v(u)) = \pm \lambda^{p_n} M_n(v(u))$  et  $\gamma_n \gamma^{p_n} u(+\infty) = \gamma_n u(+\infty)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n M^{p_n} v(u) = \pm \alpha \frac{v(u')}{\|v(u')\|}.$$

Supposons à présent que  $u(+\infty)$  ne soit fixé par aucune isométrie hyperbolique de  $\Gamma$ , et soit horocyclique. Montrons que  $\overline{M_\Gamma v(u)}$  contient un vecteur propre, modulo  $\pm 1$ , d'un élément de  $M_\Gamma$  associé à une isométrie hyperbolique de  $\Gamma$ . Ceci montrera que  $M_\Gamma v(u)$  est dense. Soit  $\gamma$  une isométrie hyperbolique de  $\Gamma$ . La suite  $(\gamma^{-n} u(+\infty))_{n \geq 1}$  converge vers  $\gamma^-$ . Considérons une suite  $(M_n)_{n \geq 1}$  de  $M_\Gamma$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_n(v(u))\| = 0$ . Fixons un relevé  $w$  de  $v(u)$  sur  $\mathbb{R}_*^2$  et des relevés  $\widehat{M}, \widehat{M}_n$  de  $M$  et  $M_n$  sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . Soient  $w^+, w^-$  deux vecteurs propres de  $\widehat{M}$  tels que

$$\widehat{M} w^+ = \lambda w^+ \quad \text{et} \quad \widehat{M} w^- = \frac{1}{\lambda} w^-,$$

avec  $|\lambda| > 1$ . Posons  $\widehat{M}_n(w) = a_n w^+ + b_n w^-$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0.$$

Par ailleurs

$$\widehat{M}^{-n} \widehat{M}_n(w) = (a_n / \lambda^n) w^+ + b_n \lambda^n w^-$$

donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $(\widehat{M}^{-n} \widehat{M}_n(w))_{n \geq 1}$  converge vers  $\beta w^-$  avec  $\beta \neq 0$ . Par conséquent,  $(M^{-n} M_n(v(u)))_{n \geq 1}$  converge un vecteur propre, modulo  $\pm 1$ , d'une matrice associée à une isométrie hyperbolique.  $\square$

Comme application de ce théorème, nous allons démontrer le théorème III.4.3 portant sur la propriété de mélange topologique du flot géodésique sur  $\Omega_g(T^1 S)$ .

**3.2. Démonstration du théorème III.4.3.** Commençons par établir une relation entre les flots  $\widetilde{h}_\mathbb{R}$  et  $\widetilde{g}_\mathbb{R}$ .

**Propriété 3.3.** Soient  $u$  dans  $T^1 \mathbb{H}$  et  $s, t$  dans  $\mathbb{R}$ . On a

$$\widetilde{g}_t \circ \widetilde{h}_s \circ \widetilde{g}_{-t}(u) = \widetilde{h}_{se^{-t}}(u).$$

*Démonstration.* Puisque l'action du groupe des isométries positives de  $\mathbb{H}$  commute à celle de  $\widetilde{g}_\mathbb{R}$  et de  $\widetilde{h}_\mathbb{R}$ , et puisque ce groupe agit transitivement sur  $T^1 \mathbb{H}$ , il suffit de démontrer la relation pour  $u(+\infty) = \infty$  et  $u(0) = i$ .

On a  $\widetilde{g}_{-t} u(+\infty) = \infty$  et  $\widetilde{g}_{-t} u(0) = e^{-t} i$ , donc  $\widetilde{h}_s(\widetilde{g}_{-t} u)(+\infty) = \infty$  et  $\widetilde{h}_s(\widetilde{g}_{-t} u)(0) = e^{-t} i + s e^{-t}$  (figure 6). Par conséquent

$$\widetilde{g}_t(\widetilde{h}_s(\widetilde{g}_{-t} u))(+\infty) = \infty \quad \text{et} \quad \widetilde{g}_t(\widetilde{h}_s(\widetilde{g}_{-t} u))(0) = i + e^{-t} s. \quad \square$$

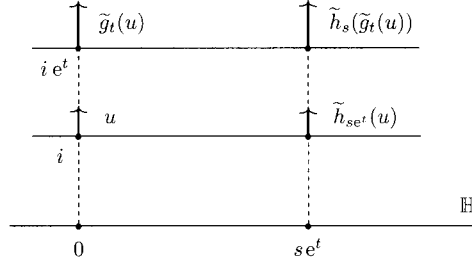


FIGURE 6

Rappelons l'énoncé du théorème III.4.3 :

Soient  $O$  et  $V$  deux ouverts non vides de  $\Omega_g(T^1S)$ . Il existe  $T > 0$  tel que pour tout  $t \geq T$ ,  $g_t(O) \cap V \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux ouverts non vides  $O$  et  $V$  inclus dans  $\Omega_g(T^1S)$  et une suite non bornée  $(t_n)_{n \geq 1}$  telle que  $O \cap g_{t_n}(V) = \emptyset$ . On peut supposer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$ . D'après le théorème III.3.4, il existe  $\pi^1(u)$  périodique relativement à  $g_{\mathbb{R}}$  appartenant à  $V$ . Notons  $T$  sa période et posons  $t_n = r_n T + s_n$  avec  $-r_n \in \mathbb{N}$  et  $-T < s_n \leq 0$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $(s_n)_{n \geq 1}$  converge vers un réel  $s$ . Le point  $u(+\infty)$  est horocyclique donc d'après le théorème 3.1 on a  $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))} = \Omega_h(T^1S)$ . D'après la proposition 2.7 et le théorème III.2.1, l'ensemble  $\Omega_g(T^1S)$  est inclus dans  $\Omega_h(T^1S)$ , donc il existe  $t$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $h_t(\pi^1(u))$  appartienne à  $g_{-s}(O)$ . Considérons l'isométrie hyperbolique  $\gamma$  de  $\Gamma$  telle que  $u(+\infty) = \gamma^+$  et  $\ell(\gamma) = T$ . On a  $\gamma^n(u) = \tilde{g}_{nT}(u)$ . En utilisant cette relation et la propriété 3.3 on obtient l'égalité  $\gamma^{-r_n} \tilde{g}_{-r_n T}(\tilde{h}_t(u)) = \tilde{h}_{te^{r_n T}} \circ \tilde{g}_{-2r_n T}(u)$ . Cette égalité entraîne que  $(g_{-r_n T}(h_t(\pi^1(u))))_{n \geq 1}$  converge vers  $\pi^1(u)$  et donc que pour  $n$  grand  $g_{-r_n T-s}(O) \cap V \neq \emptyset$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s) = 0$ , on obtient pour  $n$  grand,  $g_{t_n} V \cap O \neq \emptyset$ , ce qui contredit l'hypothèse de départ.  $\square$

**3.3. Trajectoires horocycliques périodiques et périodes.** Nous nous intéressons ici à l'existence d'éléments périodiques pour le flot  $h_{\mathbb{R}}$ . De tels éléments appartiennent à  $\Omega_h(T^1S)$ .

Par définition, si  $\pi^1(u)$  est périodique, il existe  $T > 0$  et  $\gamma \in \Gamma$  tels que

$$\tilde{h}_T(u) = \gamma(u).$$

**Proposition 3.4.** Soient  $u$  dans  $T^1\mathbb{H}$  et  $\gamma$  une isométrie positive de  $\mathbb{H}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe  $T > 0$  tel que  $\tilde{h}_T(u) = \gamma(u)$  ;
- (ii) l'isométrie  $\gamma$  est parabolique et fixe  $u(+\infty)$ .

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Supposons qu'il existe  $T > 0$  et  $\gamma$  tels que  $\tilde{h}_T(u) = \gamma(u)$ . Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}^*$ , on a  $\tilde{h}_{nT}(u) = \gamma^n(u)$ . Ceci montre que  $\gamma$  fixe  $u(+\infty)$ . Par ailleurs  $\gamma \neq \text{Id}$  et  $\gamma$  n'est pas hyperbolique car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^{-n}(u(0)) = u(+\infty)$ , donc  $\gamma$  est parabolique.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Soient  $\gamma$  une isométrie parabolique et  $u$  un élément de  $T^1\mathbb{H}$  tels que  $\gamma(u(+\infty)) = u(+\infty)$ . Cette isométrie préserve l'horocycle orienté associé à  $u$  donc il existe  $T > 0$  tel que  $\gamma(u) = \tilde{h}_T(u)$  (figure 7).  $\square$

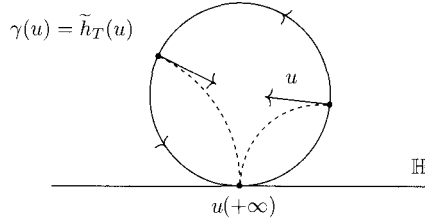


FIGURE 7

On déduit directement de ce résultat le corollaire

**Corollaire 3.5.**

(i) L'élément  $\pi^1(u)$  est périodique pour le flot horocyclique  $\Omega_h(T^1S)$  si et seulement si  $u(+\infty)$  est fixé par une isométrie parabolique de  $\Gamma$ .

(ii) L'ensemble  $\Omega_h(T^1S)$  contient des trajectoires périodiques si et seulement si le groupe  $\Gamma$  contient des isométries paraboliques.

Par exemple, si  $\Gamma$  est un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques, alors  $\Omega_h(T^1S)$  ne contient pas de trajectoires périodiques. En revanche, de telles trajectoires existent si  $\Gamma$  est le groupe modulaire.

Remarquons que si  $\pi^1(u)$  est périodique pour  $h_{\mathbb{R}}$ , alors  $\pi^1(\tilde{g}_t(u))$  est également périodique pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, s'il n'est pas vide, l'ensemble des trajectoires périodiques de  $h_{\mathbb{R}}$  contient un sous-ensemble en bijection avec  $\mathbb{R}$ . Comme dans le cas du flot géodésique, si  $\pi^1(u)$  est un élément périodique pour le flot  $h_{\mathbb{R}}$ , nous notons  $T_u$  sa période.

Soit  $\gamma$  l'isométrie parabolique de  $\Gamma$  vérifiant

$$\tilde{h}_{T_u}(u) = \gamma(u).$$

L'isométrie  $\gamma$  détermine-t-elle  $T_u$  ?

Contrairement au cas du flot géodésique (voir exercice III.3.5), la réponse ici est négative. En effet, supposons que  $u(+\infty) = \infty$ . Sous cette hypothèse,



$\gamma$  est nécessairement une translation  $t(z) = z + a$  et on a

$$T_u = \frac{|a|}{\operatorname{Im} u(0)}.$$

Cette égalité montre d'une part que  $T_u$  ne dépend pas que de  $t$  et d'autre part, que l'ensemble de toutes les périodes des éléments périodiques de  $\Omega_h(T^1S)$  est égal à  $\mathbb{R}_*^+$ .

**Proposition 3.6.** *Si l'ensemble des éléments périodiques pour le flot horocyclique n'est pas vide, il est dense dans  $\Omega_h(T^1S)$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un élément périodique  $\pi^1(u_0)$  dans  $T^1S$ . Soit  $\pi^1(u)$  dans  $\Omega_h(T^1S)$ . Puisque  $L(\Gamma)$  est un ensemble minimal pour l'action de  $\Gamma$ , il existe  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u_0(+\infty)) = u(+\infty)$ . Considérons la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de  $T^1\mathbb{H}$  définie par  $u_n(0) = u(0)$  et  $u_n(+\infty) = \gamma_n(u_0(+\infty))$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^1(u_n) = \pi^1(u)$ . Par ailleurs, le point  $\gamma_n(u_0(+\infty))$  est parabolique donc  $\pi^1(u_n)$  est périodique.  $\square$

#### 4. Caractérisations des groupes fuchsien géométriquement finis

Nous rappelons qu'un groupe fuchsien est géométriquement fini si et seulement si les points de son ensemble limite sont horocycliques ou paraboliques (voir le théorème I.4.12).

Peut-on lire la finitude géométrique d'un groupe sur la topologie des trajectoires du flot horocyclique en restriction à  $\Omega_h(T^1S)$  ?

La réponse est positive et découle directement du théorème 3.1 et de la proposition 3.5.

**Proposition 4.1.** *Un groupe fuchsien non élémentaire est géométriquement fini si et seulement si les trajectoires de la restriction de  $h_{\mathbb{R}}$  à  $\Omega_h(T^1S)$  sont denses dans  $\Omega_h(T^1S)$  ou périodiques.*

Par exemple, si  $\Gamma$  est un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques, toutes les trajectoires de  $h_{\mathbb{R}}$  sont denses dans  $\Omega_h(T^1S)$ . Si  $\Gamma$  est le groupe modulaire, les trajectoires horocycliques sont denses dans  $T^1S$  ou sont périodiques.

Parmi les groupes fuchsien géométriquement finis, on rappelle que les groupes convexes-cocompacts sont ceux dont l'ensemble limite est entièrement composé de points horocycliques (corollaire I.4.13). Si  $\Gamma$  est un tel groupe, toutes les trajectoires de  $h_{\mathbb{R}}$  sont denses dans  $\Omega_h(T^1S)$ , autrement dit  $\Omega_h(T^1S)$  est un ensemble minimal pour le flot  $h_{\mathbb{R}}$ .

Réciproquement, si toutes les trajectoires de  $h_{\mathbb{R}}$  sont denses dans  $\Omega_h(T^1S)$ , alors tous les points de  $L(\Gamma)$  sont horocycliques et donc  $\Gamma$  est convexe-cocompact.

On peut énoncer les caractérisations suivantes :

**Proposition 4.2.** *Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien non élémentaire.*

(i) *Le groupe  $\Gamma$  est convexe-cocompact si et seulement si  $\Omega_h(T^1S)$  est un ensemble minimal pour le flot  $h_{\mathbb{R}}$ .*

(ii) *Le groupe  $\Gamma$  est un réseau uniforme si et seulement si  $T^1S$  est un ensemble minimal pour le flot  $h_{\mathbb{R}}$  sur  $T^1S$ .*

Les propositions 4.1 et 4.2 se traduisent, grâce à la proposition 2.1 en termes vectoriels, pour donner une caractérisation de la finitude géométrique et de la convexe-cocompacité portant sur la topologie des orbites de  $M_{\Gamma}$  sur  $E(\Gamma)$ .

**Proposition 4.3.** *Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien non élémentaire.*

(i) *Le groupe  $\Gamma$  est géométriquement fini si et seulement si pour tout  $v \in E(\Gamma)$ , ou bien  $\overline{M_{\Gamma}(v)} = E(\Gamma)$  ou bien il existe  $M \in M_{\Gamma} - \{\text{Id}\}$  tel que  $Mv = v$ .*

(ii) *Le groupe  $\Gamma$  est convexe-cocompact si et seulement si pour tout  $v \in E(\Gamma)$ , on a  $\overline{M_{\Gamma}(v)} = E(\Gamma)$ .*

(iii) *Le groupe  $\Gamma$  est un réseau uniforme si et seulement si  $\overline{M_{\Gamma}(v)} = E$  pour tout  $v \in E$ .*

Dans le cas d'un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques, toutes les orbites de  $M_{\Gamma}$ , en restriction à  $E(\Gamma)$ , sont denses. Si  $\Gamma$  est le groupe modulaire, on déduit de la proposition 4.3 le résultat (connu) suivant :

**Propriété 4.4.** *Soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Si  $y \neq 0$  et si  $x/y \notin \mathbb{Q}$  alors  $\overline{\text{SL}(2, \mathbb{Z})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \mathbb{R}^2$ .*

**Exercice 4.5.** Démontrer la propriété 4.4.

Dans le cas du groupe modulaire, si un vecteur  $w$  de  $E$  est fixé par un élément non trivial de  $M_{\Gamma}$  alors  $w = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  avec  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  et donc  $M_{\Gamma}(v)$  est un ensemble discret de  $E$ . Ce phénomène est général.

**Exercice 4.6.** Soient  $\Gamma$  un groupe fuchsien non élémentaire et  $w$  un vecteur de  $E(\Gamma)$  fixé par un élément non trivial de  $M_{\Gamma}$ . Démontrer que  $M_{\Gamma}(v)$  est un ensemble discret de  $E$ .

## 5. Commentaire

Le flot horocyclique est très lié au flot géodésique. Il reflète le comportement collectif des trajectoires géodésiques au sens où, comme le montre la propriété 3.3, deux éléments  $\pi^1(u)$  et  $\pi^1(v)$  du quotient  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$  appartiennent à une même trajectoire horocyclique si et seulement si la distance entre  $g_t(\pi^1(u))$  et  $g_t(\pi^1(v))$  converge vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Si individuellement le flot géodésique est très irrégulier, comme le montrent les chapitres III et IV, collectivement, lorsque  $\Gamma$  est géométriquement fini, il est régulier (proposition 4.2). Ce n'est pas toujours le cas si l'hypothèse de finitude géométrique n'est pas satisfaite, comme l'illustrent les exemples construits par M. Kulikov [38] de groupes  $\Gamma$  pour lesquels  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$  ne contient pas d'ensembles minimaux invariants par  $h_{\mathbb{R}}$ .

Ce lien entre ces deux flots permet par exemple de démontrer le mélange topologique de  $g_{\mathbb{R}}$  (théorème III.4.3) en utilisant des propriétés de  $h_{\mathbb{R}}$ . Il est surtout utilisé lorsque l'on aborde les questions métriques, l'exemple historique étant la démonstration due à G. Hedlund [28] dans le cadre des réseaux, de l'ergodicité de  $h_{\mathbb{R}}$  relativement à la mesure de Liouville.

Dans le cas général où  $X$  est une variété de Hadamard pincée et où  $\Gamma$  est un groupe kleinien non élémentaire agissant sur  $X$ , la notion de flot horocyclique sur  $T^1X$  n'a de sens que si la dimension de  $X$  est égale à 2. Si  $X$  n'est pas une surface, cette notion est remplacée par celle de *feuilletage fortement stable* sur  $T^1X$  et généralise le feuilletage de  $T^1\mathbb{H}$  par les trajectoires de  $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$  ([4], [25], [49]). La projection sur  $X$  des feuilles de ce feuilletage sont les horosphères de  $X$ . L'ensemble non errant du flot horocyclique sur  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$  est alors joué par l'ensemble, encore noté  $\Omega_h(\Gamma \backslash T^1X)$ , obtenu par projection sur  $\Gamma \backslash T^1X$  des feuilles de  $T^1X$  correspondant aux horosphères centrées en des points de  $L(\Gamma)$ . Dans ce cadre général, l'existence d'une feuille dense dans  $\Omega_h(\Gamma \backslash T^1X)$  est une question ouverte équivalente à celle du mélange topologique du flot géodésique sur  $\Omega_g(\Gamma \backslash T^1X)$  ou encore à celle de la densité du spectre des longueurs [17]. Dans le contexte du demi-plan de Poincaré, nous avons démontré cette existence (corollaire 2.8) en utilisant un point de vue vectoriel. Cette approche se trouve dans [15]. Sous l'hypothèse d'existence d'une feuille dense dans  $\Omega_h(\Gamma \backslash T^1X)$ , la plupart des résultats de ce chapitre se généralisent ([4], [17], [25], [49]).

Comme pour le flot géodésique, l'aspect métrique du feuilletage horosphérique n'a pas été abordé. Les textes de É. Ghys [28] et S. Starkov [54] en sont une bonne introduction. Donnons quelques pistes.

Plaçons-nous dans le disque de Poincaré et considérons le *feuilletage horocyclique* sur  $T^1\mathbb{D}$  formé des trajectoires de  $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ . Soit 0 le centre de ce disque.

Chaque trajectoire s'identifie à un couple  $(x, s)$  avec  $x \in \mathbb{D}(\infty)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  et  $s = B_x(0, z)$ , où  $z$  est un point de l'horocycle associé à cette trajectoire.

Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien non élémentaire. Cette identification permet de construire une mesure  $N$  sur  $T^1\mathbb{H}$  invariante par le feuilletage et par  $\Gamma$ , définie par

$$N(dxds) = e^{s\delta(\Gamma)}m(dx)ds,$$

où  $m$  est une mesure de Patterson sur  $L(\Gamma)$  et  $\delta(\Gamma)$  est l'exposant critique de la série de Poincaré associée à  $\Gamma$  (voir les commentaires du chapitre I).

La mesure  $N$  en induit une  $\overline{N}$  sur  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$  invariante par le flot horocyclique, dont le support est  $\Omega_h(\Gamma \backslash T^1\mathbb{H})$  ([4], [49]). Si  $\Gamma$  est un réseau, cette mesure est finie, sinon elle est infinie. Sous l'hypothèse de finitude géométrique de  $\Gamma$ , le feuilletage est ergodique relativement à cette mesure ([28], [48], [49]).

Dans le cas général d'une variété de Hadamard pincée la construction de la mesure  $\overline{N}$  et le résultat sur l'ergodicité se généralisent, à condition toutefois de supposer l'existence d'une feuille dense dans  $\Omega_h(\Gamma \backslash T^1X)$  [49]. Si de plus on fait l'hypothèse de finitude des mesures de Patterson-Sullivan sur  $\Gamma \backslash T^1X$  (voir le commentaire du chapitre III), on obtient une classification des mesures ergodiques invariantes par le feuilletage fortement stable ([42], [48], [49, théorème 6.5]).



## CHAPITRE VI

### POINT DE VUE LORENTZIEN

Dans le chapitre précédent (paragraphe V.2), nous avons établi une correspondance entre la topologie des trajectoires du flot horocyclique sur  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$  et celle des orbites de l'action linéaire associée à  $\Gamma$  sur  $\{\pm \text{Id}\} \backslash \mathbb{R}^2 - \{0\}$ .

Le but de ce chapitre est de construire une représentation linéaire de  $\Gamma$  prenant en compte simultanément la dynamique des flots horocyclique et géodésique.

Pour cela, nous nous plaçons dans le contexte de l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de la forme bilinéaire de *Lorentz*

$$b(x, x') = x_1x'_1 + x_2x'_2 - x_3x'_3.$$

À chaque réel  $t$ , nous associons la surface

$$\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid b(x, x) = t\}.$$

Si  $t$  est strictement négatif,  $\mathcal{H}_t$  est un *hyperboloïde* à deux nappes (figure 1), on pose dans ce cas

$$\mathcal{H}_t^+ = \mathcal{H}_t \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_t^- = \mathcal{H}_t \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-).$$

Si  $t$  est strictement positif,  $\mathcal{H}_t$  est connexe et est un *hyperboloïde* à une nappe (figure 1).

Enfin,  $\mathcal{H}_0$  est le *cône de lumière* (figure 1). Ce cône privé de  $(0, 0, 0)$  a deux composantes connexes

$$\mathcal{H}_0^{+*} = \mathcal{H}_0 \cap \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+ \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_0^{-*} = \mathcal{H}_0 \cap \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^-.$$

Le groupe  $O(2, 1)$  des transformations orthogonales de  $b$  agit sur chaque surface  $\mathcal{H}_t$ . Ce groupe n'est pas connexe, on note  $O^0(2, 1)$  la composante connexe de l'identité.

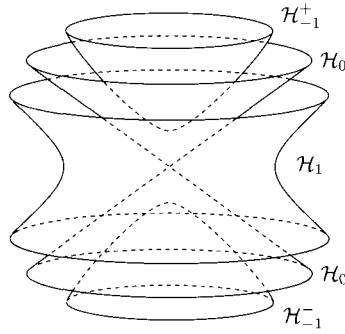


FIGURE 1

Tout au long de ce chapitre,  $\|x\|$  désigne la norme euclidienne d'un élément  $x$  de  $\mathbb{R}^3$ .

## 1. Le modèle de l'hyperboloïde

Le disque de Poincaré est considéré ici comme le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} \mid \|x\| < 1\},$$

muni de la métrique  $g$  définie à la fin du chapitre I.

Le but de ce paragraphe est de construire une structure riemannienne sur la nappe  $\mathcal{H}_{-1}^+$ , isométrique à  $(\mathbb{D}, g)$ , et d'en comprendre la géométrie d'un point de vue lorentzien.

**1.1. Construction de la métrique et compactification.** Introduisons la projection stéréographique  $P$  de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  sur  $\mathbb{D}$  qui à  $x$  associe le point d'intersection avec  $\mathbb{D}$  de la droite passant par  $x$  et par le point  $(0, 0, -1)$  (figure 2). Cette application est un difféomorphisme dont l'expression analytique est

$$P(x_1, x_2, t) = \left( \frac{x_1}{1+t}, \frac{x_2}{1+t}, 0 \right).$$

Notons  $g^L$  la métrique sur  $\mathcal{H}_{-1}^+$  obtenue par transport par  $P^{-1}$  de la métrique hyperbolique  $g$  sur  $\mathbb{D}$ .

Soient  $x \in \mathcal{H}_{-1}^+$  et  $v, v' \in T_x^1 \mathcal{H}_{-1}^+$ . On a

$$g_x^L(v, v') = \frac{4}{(1 - \|P(x)\|^2)^2} \langle T_x P(v), T_x P(v') \rangle.$$

**Exercice 1.1.** Démontrer l'égalité

$$g_x^L(v, v') = b(v, v').$$

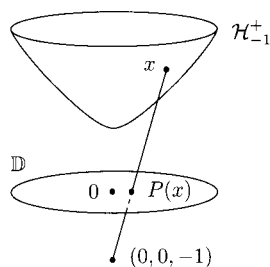


FIGURE 2

La métrique  $g^L$  sur chaque plan tangent de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  correspond donc à la restriction de  $b$ . Muni de cette métrique,  $\mathcal{H}_{-1}^+$  est isométrique au disque de Poincaré et par conséquent, au demi-plan de Poincaré.

**Exercice 1.2.** On rappelle que  $G$  représente le groupe des isométries positives de  $(\mathbb{D}, g)$ .

- (i) Démontrer que le groupe  $O^0(2, 1)$  laisse invariant  $\mathcal{H}_{-1}^+$ .
- (ii) Démontrer l'égalité

$$P O^0(2, 1) P^{-1} = G.$$

On déduit de l'exercice 1.2 que le groupe des isométries de  $(\mathcal{H}_{-1}^+, g^L)$  préservant l'orientation sur chaque plan tangent induite par  $P$  est égal au groupe  $O^0(2, 1)$ . Ce groupe agit transitivement sur  $\mathcal{H}_{-1}^+$ , et simplement transitivement sur le fibré unitaire  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  (propriété I.2.3).

**Exercice 1.3.** Démontrer que les géodésiques de  $(\mathcal{H}_{-1}^+, g^L)$  sont les intersections de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  avec les plans passant par le point  $(0, 0, 0)$  et par un point de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  (figure 3).

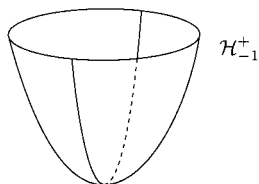


FIGURE 3

Nous allons à présent compactifier  $(\mathcal{H}_{-1}^+, g^L)$  par transport par  $P^{-1}$  de la compactification de  $(\mathbb{D}, g)$ . Introduisons pour cela l'espace  $\mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$  des droites du cône de lumière  $\mathcal{H}_0$ . La bijection  $P^{-1}$  se prolonge en une bijection, encore notée  $P^{-1}$ , de  $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}(\infty)$  sur  $\mathcal{H}_{-1}^+ \cup \mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$  définie sur  $\mathbb{D}(\infty)$  par

$$P^{-1}((\cos \sigma, \sin \sigma, 0)) = \{(t \cos \sigma, t \sin \sigma, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$



Autrement dit, si  $x \in \mathbb{D}(\infty)$ , la droite  $P^{-1}(x)$  contient le point  $(0, 0, 0)$  et est parallèle à la droite passant par  $x$  et  $(0, 0, -1)$  (figure 4).

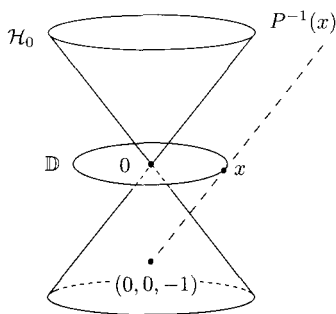


FIGURE 4

Munissons  $\mathcal{H}_{-1}^+ \cup \mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$  de la topologie pour laquelle un voisinage d'un point  $y$  de cet ensemble est l'image par  $P^{-1}$  d'un voisinage de  $P(y)$ . Pour cette topologie,  $\mathcal{H}_{-1}^+ \cup \mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$  est compact et  $P$  est un homéomorphisme. De façon explicite, la convergence d'une suite non bornée  $(y_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  vers une droite  $D$  de  $\mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$  revient à la convergence euclidienne vers  $D$  de la suite des droites passant par l'origine et  $y_n$ .

Les extrémités d'une géodésique de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  correspondent aux deux droites du cône de lumière contenues dans le plan passant par cette géodésique et le point  $(0, 0, 0)$  (figure 5).

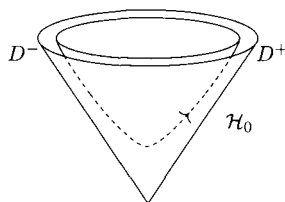


FIGURE 5

L'action de  $G$  sur  $\mathbb{D}$  se prolonge à  $\mathbb{D}(\infty)$  en une action par homéomorphismes. Il en est donc de même pour l'action de  $O^0(2, 1)$  sur  $\mathcal{H}_{-1}^+ \cup \mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$ .

**Exercice 1.4.** Démontrer que l'action de  $O^0(2, 1)$  sur  $\mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$ , conjuguée par  $P$  à celle de  $G$  sur  $\mathbb{D}(\infty)$ , correspond à l'action projective de  $O^0(2, 1)$  sur l'espace des droites de  $\mathcal{H}_0$ .

**1.2. Classification des isométries et fonction de Busemann.** Soit  $f$  une transformation non triviale de  $O^0(2, 1)$ . On dit que  $f$  est respectivement *elliptique*, *parabolique* ou *hyperbolique* si  $PfP^{-1}$  l'est (voir paragraphe I.2).

Traduite en termes de vecteurs propres isotropes (*i.e.*  $b(v, v) = 0$  et  $v \neq 0$ ), cette classification revient à la propriété suivante :

- ou bien  $f$  n'admet pas de vecteur propre isotrope ( $f$  est elliptique) ;
- ou bien  $f$  admet une unique droite propre isotrope ( $f$  est parabolique) ;
- ou bien  $f$  admet deux droites propres différentes isotropes ( $f$  est hyperbolique).

Nous notons  $A$  le sous-groupe des éléments de  $O^0(2, 1)$  fixant globalement les droites  $D_0 = \mathbb{R}(1, 0, 1)$  et  $D_1 = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$ ,  $N$  le sous-groupe des éléments de  $O^0(2, 1)$  fixant globalement  $D_0$ , et  $K$  celui des éléments fixant le point  $x_0 = (0, 0, 1)$ .

**Exercice 1.5.** Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , posons

$$a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad n_t = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 & t & t^2/2 \\ -t & 1 & t \\ -t^2/2 & t & t^2/2 + 1 \end{pmatrix},$$

$$k_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Démontrer les égalités

$$A = \{a_t \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad N = \{n_t \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad K = \{k_t \mid t \in [0, 2\pi[ \}.$$

(ii) Démontrer que pour tout  $f$  dans  $O^0(2, 1)$ , il existe  $t, t', t''$  et  $s, s', s''$  tels que

$$f = k_t a_{t'} n_{t''} \quad (\text{voir propriété I.2.3(ii)}).$$

$$f = k_s a_{s'} k_{s''} \quad (\text{voir propriété I.2.3(iii)}).$$

La notion de cocycle de Busemann a un sens sur  $\mathcal{H}_{-1}^+$ . En effet, soient  $D$  un élément de  $\mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$  et  $x, y$  deux points de  $\mathcal{H}_{-1}^+$ , considérons le paramétrage par longueur d'arcs  $(R(t))_{t \geq 0}$  du rayon géodésique d'origine  $x$ , d'extrémité  $D$  et posons

$$F(t) = d^L(x, R(t)) - d^L(y, R(t)),$$

où  $d^L$  est la distance induite par  $g^L$  sur  $\mathcal{H}_{-1}^+$  (voir paragraphe I.1).

Par construction de la métrique  $g^L$ , on a

$$F(t) = d(P(x), r(t)) - d(P(y), r(t)),$$

où  $(r(t))_{t \geq 0}$  est le paramétrage par longueur d'arcs du rayon géodésique  $[P(x), P(D))$ . Par conséquent, la limite de  $F$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  existe et on a (voir paragraphe I.1)

$$B_{P(D)}(P(x), P(y)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t).$$

On définit alors le *cocycle de Busemann* centré en  $D$ , calculé en  $x$  et  $y$ , en posant

$$B_D(x, y) = B_{P(D)}(P(x), P(y)).$$

Un horocycle centré en  $D$  sur  $\mathcal{H}_{-1}^+$  est par définition une ligne de niveau de la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{-1}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto B_D((0, 0, 1), x). \end{aligned}$$

Un tel horocycle est l'image par  $P^{-1}$  d'un horocycle de  $\mathbb{D}$  et est laissé invariant par le groupe des isométries paraboliques de  $O^0(2, 1)$  fixant  $D$ .

**Exercice 1.6.** Démontrer qu'un horocycle de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  centré en  $D$  passant par  $x$  est l'intersection avec  $\mathcal{H}_{-1}^+$  du plan passant par  $x$ , dirigé par le plan tangent au cône de lumière en  $D$  (figure 6).

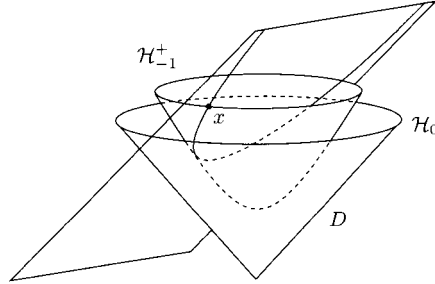


FIGURE 6

**1.3. Groupes lorentziens et ensembles limites.** Par définition un *groupe lorentzien* est un sous-groupe de  $O^0(2, 1)$  conjugué par  $P$  à un groupe fuchsien, ou, ce qui revient au même, est un sous-groupe discret de  $O^0(2, 1)$ .

Nous notons  $\Gamma_L$  un tel groupe et  $\Gamma_F$  son groupe fuchsien associé. On a

$$\Gamma_F = P\Gamma_L P^{-1}.$$

Un groupe lorentzien opère proprement discontinûment sur  $\mathcal{H}_{-1}^+$  (propriété I.2.9).

L'ensemble limite  $L(\Gamma_F)$  de  $\Gamma_F$  est par définition l'intersection avec  $\mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$  de l'adhérence d'une orbite de  $\Gamma_F$ , agissant sur  $\mathcal{H}_{-1}^+$ , et on a

$$L(\Gamma_F) = P(L(\Gamma_L)).$$

On dit que  $\Gamma_L$  est *élémentaire* si  $\Gamma_F$  l'est.

Comme pour  $L(\Gamma_F)$ , on définit sur  $L(\Gamma_L)$  la notion de points *horocycliques*, *coniques* et *paraboliques* (voir paragraphe I.3). La proposition suivante donne une caractérisation de ces points en termes d'action linéaire. Pour  $f \in O^0(2, 1)$ , posons  $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \|f(x)\|/\|x\|$ .

**Proposition 1.7.** Soient  $\Gamma_L$  un groupe lorentzien,  $D$  un élément de  $\mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$  et  $y$  un vecteur directeur de  $D$ .

(i) La droite  $D$  est horocyclique relativement à  $\Gamma_L$  si et seulement s'il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma_L$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n y\| = 0$ .

(ii) La droite  $D$  est conique relativement à  $\Gamma_L$  si et seulement s'il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma_L$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n^{-1}\| = +\infty$  et telle que la suite  $(\|\gamma_n^{-1}\| \|\gamma_n y\|)_{n \geq 1}$  soit bornée.

*Démonstration.* Posons  $D_0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(i) Commençons par le cas où  $y = y_0$ . Soit  $f$  dans  $O^0(2, 1)$ . D'après l'exercice 1.5(ii) cette transformation se décompose en  $k_t a_{t'} n_{t''}$  avec  $k_t \in K$ ,  $a_{t'} \in A$  et  $n_{t''} \in N$ . On a  $B_{D_0}(x_0, f^{-1}(x_0)) = B_{D_0}(x_0, a_{t'}^{-1}(x_0))$  donc  $B_{D_0}(x_0, f^{-1}(x_0)) = -t'$ . Par ailleurs  $\|f(y_0)\| = \sqrt{2}e^{t'}$  donc  $\|f(y_0)\| = \|y_0\| e^{-B_{D_0}(x_0, f^{-1}(x_0))}$ .

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n(y_0)\| = 0$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{D_0}(x_0, \gamma_n^{-1}(x_0)) = +\infty.$$

Ceci démontre l'équivalence (i) dans le cas où  $y = y_0$ .

Considérons le cas où  $y$  est quelconque. Remarquons que le groupe  $O^0(2, 1)$  agit transitivement sur  $\mathcal{H}_0^{+*}$ . Soit  $f$  dans  $O^0(2, 1)$  tel que  $y = f(y_0)$ . On a  $\|\gamma_n(y)\| = \|\gamma_n f(y_0)\|$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n(y)\| = 0$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{D_0}(x_0, f^{-1}\gamma_n^{-1}(x_0)) = +\infty$ . L'équivalence (i) se déduit alors de la relation

$$(*) \quad B_{D_0}(x_0, f^{-1}\gamma_n^{-1}(x_0)) = B_{\mathbb{R}y}(f(x_0), x_0) + B_{\mathbb{R}y}(x_0, \gamma_n^{-1}(x_0)).$$

(ii) Commençons par le cas où  $y = y_0$ . Soit  $f$  dans  $O^0(2, 1)$ . D'après l'exercice 1.5(iii), cette transformation se décompose en  $k_t a_{t'} k_{t''}$  avec  $k_t, k_{t''} \in K$  et  $a_{t'} \in A$ . On a  $d_L(x_0, f(x_0)) = d_L(x_0, a_{t'}(x_0))$  et  $d_L(x_0, a_{t'}(x_0)) = |t'|$ . Par ailleurs  $\|f^{-1}\| = e^{|t'|}$  donc  $\|f^{-1}\| = e^{d_L(x_0, f(x_0))}$ . On déduit de cette remarque et de la démonstration de (i) que

$$\|\gamma_n y_0\| \|\gamma_n^{-1}\| = \|y_0\| e^{-B_{D_0}(x_0, \gamma_n^{-1}(x_0)) + d_L(x_0, \gamma_n^{-1}(x_0))}.$$

Par conséquent, les conditions

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n^{-1}\| = +\infty \quad \text{et} \quad (\|\gamma_n y_0\| \|\gamma_n^{-1}\|)_{n \geq 1} \text{ est borné}$$

sont équivalentes aux conditions

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_L(x_0, \gamma_n^{-1}(x_0)) = +\infty$$

et  $(-B_{D_0}(x_0, \gamma_n^{-1}(x_0)) + d_L(x_0, \gamma_n^{-1}(x_0)))_{n \geq 1}$  est borné.

Ces deux dernières conditions caractérisent le fait que le point  $D$  est conique (proposition I.3.11).

Le cas où  $y$  est quelconque se traite comme dans la démonstration de (i), en remplaçant  $y$  par  $f(y_0)$  et en utilisant la relation (\*).  $\square$

## 2. Interprétation lorentzienne de la dynamique du flot géodésique

Comme sur  $T^1\mathbb{D}$ , nous notons  $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$  le flot géodésique sur  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$ . Par définition, soient  $v = (x, \vec{v}) \in T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  et  $(v(t))_{t \in \mathbb{R}}$  le paramétrage par longueur d'arcs de la géodésique orientée associée à  $v$  (voir le paragraphe III.1), on a (figure 7)

$$\tilde{g}_t(v) = (v(t'), \frac{dv}{dt}(t')).$$

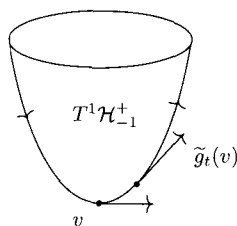


FIGURE 7

### 2.1. Point de vue lorentzien sur l'ensemble des trajectoires de $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ .

Notons respectivement  $D^-(v)$  et  $D^+(v)$  les extrémités négative et positive de la géodésique orientée associée à  $v$ .

**Exercice 2.1.** Démontrer que si  $v(0) = (0, 0, 1)$  et  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ , alors  $D^-(v) = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$  et  $D^+(v) = \mathbb{R}(1, 0, 1)$ .

Soient  $u^-(v), u^+(v)$  les vecteurs directeurs de  $D^-(v)$  et  $D^+(v)$  vérifiant (figure 8)

$$\|u^-(v)\| = \|u^+(v)\| = 1 \quad \text{et} \quad u^-(v) \in \mathcal{H}_0^+, u^+(v) \in \mathcal{H}_0^+.$$

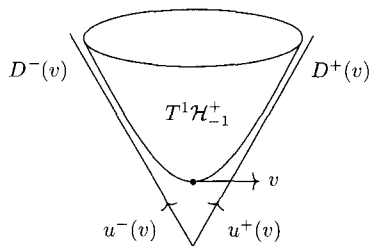


FIGURE 8

On associe à  $v$  le vecteur  $w(v) \in \mathcal{H}_1$  défini par

$$b(w(v), w(v)) = 1, \quad b(w(v), u^-(v)) = 0, \quad b(w(v), u^+(v)) = 0$$

et  $(w(v), u^-(v), u^+(v))$  base directe.

Par exemple si  $v(0) = (0, 0, 1)$  et  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ , on a

$$w(v) = (0, 1, 0).$$

**Exercice 2.2.** Démontrer que pour tout  $f \in O^0(2, 1)$  on a

$$w(f(v)) = f(w(v)),$$

où  $f(w(v))$  représente l'image de  $w(v)$  par l'application linéaire  $f$ .

Notons  $W$  l'application de  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  sur  $\mathcal{H}_1$  qui à  $v$  associe  $W(v) = w(v)$  (figure 9).

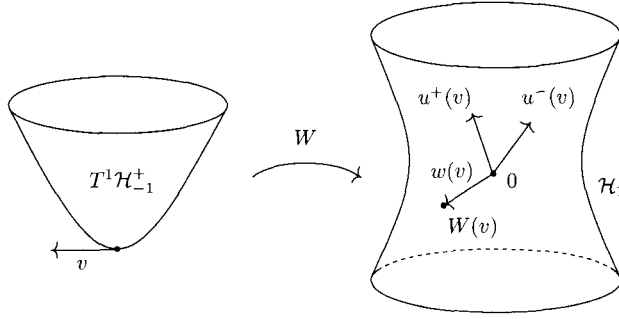


FIGURE 9

**Exercice 2.3.**

(i) Démontrer que l'application  $W$  est continue pour la métrique  $D^L$  sur  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  (voir exercice I.1.8).

(Indication : utiliser le fait que  $O^0(2, 1)$  agit simplement transitivement sur  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$ .)

(ii) Démontrer que  $W$  est surjective et que

$$W^{-1}(W(v)) = \tilde{g}_{\mathbb{R}}(v).$$

L'application  $W$  induit donc une bijection entre l'ensemble des trajectoires de  $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$  et l'hyperboloïde à une nappe  $\mathcal{H}_1$ .

Dans ce modèle, l'action de  $O^0(2, 1)$  sur l'ensemble des trajectoires géodésiques correspond à l'action linéaire de ce groupe sur  $\mathcal{H}_1$ .

**2.2. Action linéaire d'un groupe lorentzien sur  $\mathcal{H}_1$  et dynamique du flot géodésique.** Considérons à présent un groupe lorentzien non élémentaire  $\Gamma_L$  et notons  $\Gamma_F$  le groupe fuchsien associé à  $\Gamma_L$ .

Nous reprenons ici les notations introduites dans le chapitre III. Nous notons  $\pi$  la projection de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  sur la surface  $S = \Gamma_L \backslash \mathcal{H}_{-1}^+$  et  $\pi^1$  celle de  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  sur  $T^1S = \Gamma_L \backslash T^1\mathcal{H}_{-1}^+$ .

Pour  $f \in \Gamma_L$ , posons  $PfP^{-1} = \gamma$ . Remarquons que pour tout  $v \in T^1\mathcal{H}_{-1}^+$ , on a

$$f(v) = \gamma(TP(v)),$$

où  $TP$  est l'application tangente associée à la projection stéréographique  $P$  de  $\mathcal{H}_{-1}^+$  sur  $\mathbb{D}$ . Cette application induit donc un homéomorphisme  $\varphi$  de  $T^1S$  sur  $\Gamma_F \backslash T^1\mathbb{D}$  défini par

$$\varphi(\Gamma_L(v)) = \Gamma_F(TP(v)).$$

L'action de  $O^0(2, 1)$  sur  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  commute à celle de  $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ , donc ce flot en induit un sur  $T^1S$ , noté  $g_{\mathbb{R}}$ , appelé *flot géodésique* sur  $T^1S$ . Par construction, pour tout  $\bar{v}$  dans  $T^1S$ , on a

$$\varphi(g_t(\bar{v})) = g_t(\varphi(\bar{v})).$$

Notre but est à présent d'utiliser les résultats démontrés dans le chapitre III sur la dynamique du flot géodésique pour en déduire des propriétés sur la topologie des orbites de  $\Gamma_L$  sur  $\mathcal{H}_1$ .

Le lemme suivant, qui est un analogue du lemme III.1.6, relie ces deux mondes.

**Lemme 2.4.** *Soient  $u_1$  et  $u_2$  dans  $\mathcal{H}_1$ , et  $v_1$  et  $v_2$  des éléments de  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  appartenant respectivement à  $W^{-1}(u_1)$  et  $W^{-1}(u_2)$ . Considérons une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma_L$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la suite  $(\gamma_n(u_1))_{n \geq 1}$  converge vers  $u_2$  ;*
- (ii) *il existe une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que la suite  $(\tilde{g}_{s_n}(\gamma_n(v_1)))_{n \geq 1}$  converge vers  $v_2$ .*

**Exercice 2.5.** Démontrer le lemme 2.4.

(Indication : utiliser les exercices 2.2 et 2.3, et reprendre les arguments de la démonstration du lemme III.1.6.)

Intéressons-nous aux orbites fermées de  $\Gamma_L$  dans  $\mathcal{H}_1$ .

**Exercice 2.6.** Soit  $u \in \mathcal{H}_1$ . Démontrer que  $\Gamma_L(u)$  est fermé si et seulement si toute suite dans  $\Gamma_L(u)$  convergeant dans  $\mathcal{H}_1$  est constante à partir d'un certain rang.

Soient  $u_1 \in \mathcal{H}_1$  et  $v_1 \in W^{-1}(u_1)$ . Dans le chapitre III, nous avons démontré que l'existence d'une suite convergente  $(\tilde{g}_{s_n}(\pi^1(v)))_{n \geq 1}$ , avec  $(s_n)_{n \geq 1}$  non borné, équivaut au fait que  $v(+\infty)$  ou  $v(-\infty)$  est conique (proposition III.2.6). Ce résultat, ajouté au lemme 2.4 et à l'exercice 2.6, entraîne que si  $\Gamma_L(u_1)$  n'est pas fermé alors  $D^-(v_1)$  ou  $D^+(v_1)$  est conique.

La réciproque n'est pas vraie puisque si  $\pi^1(v_1)$  est périodique, autrement dit s'il existe  $\gamma \in \Gamma_L - \{\text{Id}\}$  fixant  $u_1$ , alors la trajectoire de  $\pi^1(v_1)$  est compacte, et donc, d'après le lemme 2.4, l'orbite  $\Gamma_L(u_1)$  est fermée.

Toutefois, si  $\pi^1(v_1)$  n'est pas périodique et si  $D^-(v_1)$  ou  $D^+(v_1)$  est conique, alors  $\Gamma_L(u_1)$  n'est pas fermé. En effet, sous ces hypothèses, il existe une suite non bornée  $(s_n)_{n \geq 1}$  et une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma_L$  telles que  $(\tilde{g}_{s_n}(\gamma_n(v_1)))_{n \geq 1}$  soit une suite convergente et telles que la suite des trajectoires  $(\tilde{g}_{\mathbb{R}}(\gamma_n(v_1)))_{n \geq 1}$  ne soit pas stationnaire. Ceci entraîne, d'après le lemme 2.4 et de l'exercice 2.6, que  $\Gamma_L(u_1)$  n'est pas fermé.

Notons  $u_1^+$  (respectivement  $u_1^-$ ) l'élément de  $\mathcal{H}_0^+$  de norme euclidienne 1 vérifiant (figure 10)

$$D^+(v_1) = \mathbb{R}u_1^+ \quad (\text{respectivement } D^-(v_1) = \mathbb{R}u_1^-).$$

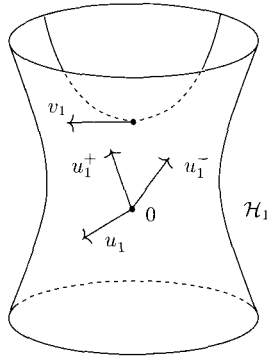


FIGURE 10

Le raisonnement précédent, ajouté à la caractérisation lorentzienne des points coniques (proposition 1.7), entraîne le résultat suivant :

**Proposition 2.7.** *Soit  $u_1 \in \mathcal{H}_1$ . L'orbite  $\Gamma_L(u_1)$  est fermée si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) *il existe un élément  $\gamma$  de  $\Gamma_L - \{\text{Id}\}$ , tel que  $\gamma(u_1) = u_1$  ;*
- (ii) *pour toute suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma_L$  vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\gamma_n^{-1}\| = +\infty$ , les suites  $(\|\gamma_n^{-1}\| \|\gamma_n(u_1^-)\|)_{n \geq 1}$  et  $(\|\gamma_n^{-1}\| \|\gamma_n(u_1^+)\|)_{n \geq 1}$  ne sont pas bornées.*



On déduit de cette proposition et du corollaire I.4.13 la caractérisation suivante des réseaux lorentziens en termes d'action sur  $\mathcal{H}_1$ .

**Corollaire 2.8.** *Un groupe lorentzien  $\Gamma_L$  est un réseau si et seulement si les seules orbites fermées de  $\Gamma_L$  sur  $\mathcal{H}_1$  sont les orbites des vecteurs fixes des isométries hyperboliques de  $\Gamma_L$  ou bien les  $\Gamma_L(u)$ , avec  $\mathbb{R}u^-$  et  $\mathbb{R}u^+$  droites propres d'isométries paraboliques de  $\Gamma_L$ .*

Remarquons que si  $L(\Gamma_L) \neq \mathcal{H}_1^+(\infty)$ , ce qui est le cas par exemple si  $\Gamma_F$  est un groupe de Schottky (voir chapitre II) alors, si  $u \in \mathcal{H}_1$  et si  $\mathbb{R}u^-$  et  $\mathbb{R}u^+$  n'appartiennent pas à  $L(\Gamma_L)$ , d'après les propositions 1.7 et 2.7, l'orbite de  $u$  sous  $\Gamma_L$  est fermée.

Un groupe lorentzien est *géométriquement fini* si  $L(\Gamma_L)$  est composé uniquement de points coniques ou paraboliques (voir le théorème I.4.12). Le corollaire 2.8 se généralise à cette famille de groupes de la façon suivante.

**Corollaire 2.9.** *Un groupe lorentzien  $\Gamma_L$  est géométriquement fini si et seulement si les seules orbites fermées de  $\Gamma_L$  sur  $\mathcal{H}_1$  sont les orbites des vecteurs fixes des isométries hyperboliques de  $\Gamma_L$  ou les  $\Gamma_L(u)$ , avec  $\mathbb{R}u^-$  et  $\mathbb{R}u^+$  appartenant à la réunion de l'ensemble  $L_p(\Gamma_L)$  et de  $\mathcal{H}_1^+(\infty) - L(\Gamma_L)$ .*

Introduisons l'ensemble  $\mathcal{H}_1(\Gamma_L)$  des éléments  $u$  de  $\mathcal{H}_1$  tels que  $\mathbb{R}u^-$  et  $\mathbb{R}u^+$  appartiennent à  $L(\Gamma_L)$ . Cet ensemble est relié à l'ensemble non errant du flot géodésique (théorème III.2.1) de la façon suivante :

$$\pi^1(W^{-1}(\mathcal{H}_1(\Gamma))) = \Omega_g(T^1S).$$

**Exercice 2.10.** Démontrer que  $\mathcal{H}_1(\Gamma)$  est un fermé invariant par  $\Gamma_L$ .

Comme nous l'avons vu dans les chapitres III et IV, la nature topologique d'une trajectoire non fermée du flot géodésique sur  $\Omega_g(T^1S)$  peut être très complexe. Par conséquent, si  $u \in \mathcal{H}_1(\Gamma)$  et si  $\Gamma_L(u)$  n'est pas fermé, sans hypothèse supplémentaire sur  $u$ , aucune information sur l'adhérence de  $\Gamma_L(u)$  n'est accessible.

Toutefois, on peut énoncer les propriétés suivantes qui découlent directement des théorèmes III.3.4, III.4.2 et de la continuité de l'application  $W$  :

**Propriété 2.11.** *Soit  $\Gamma_L$  un groupe lorentzien non élémentaire.*

- (i) *L'ensemble des vecteurs de  $\mathcal{H}_1$  fixés par des isométries hyperboliques de  $\Gamma_L$  est dense dans  $\mathcal{H}_1(\Gamma_L)$ .*
- (ii) *Il existe des orbites de  $\Gamma_L$  denses dans  $\mathcal{H}_1(\Gamma_L)$ .*

### 3. Interprétation lorentzienne de la dynamique du flot horocyclique

Nous reprenons ici les notations introduites dans le paragraphe précédent. Nous avons déjà développé un point de vue vectoriel sur l'ensemble des trajectoires du flot horocyclique sur  $T^1\mathbb{H}$  en établissant une correspondance entre cet ensemble et  $\{\pm \text{Id}\} \setminus \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Le modèle lorentzien que nous proposons ici met en jeu les mêmes méthodes que celles utilisées dans le chapitre V. Pour cette raison, de nombreuses démonstrations sont laissées en exercice.

Nous notons encore  $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$  le flot horocyclique sur  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  défini par

$$\tilde{h}_{t'}(v) = (\beta(t'), \vec{v}'),$$

où  $(\beta(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est le paramétrage par longueur d'arcs de l'horocycle centré en  $D^+(v)$  passant par  $v(0)$  pour lequel on a l'égalité  $\beta(0) = v(0)$  et pour lequel le couple  $(d\beta/dt(t'), \vec{v}')$  est une base orthonormée directe de  $T_{v(0)}\mathcal{H}_{-1}^+$  (figure 11).

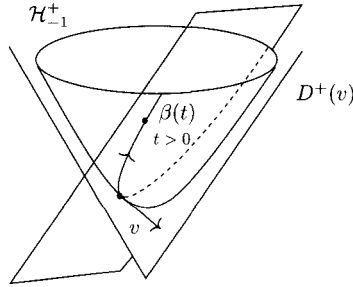


FIGURE 11

#### 3.1. Point de vue lorentzien sur l'ensemble des trajectoires de $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ .

Considérons l'application  $V$  de  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  dans le cône de lumière positif  $\mathcal{H}_0^{+*}$  définie par

$$V(v) = e^{B_{D^+(v)}(x_0, v(0))/2} u^+(v),$$

où  $u^+(v)$  est le vecteur unitaire (au sens euclidien) appartenant à  $\mathcal{H}_0^+$  dirigeant  $D^+(v)$  et où  $x_0 = (0, 0, 1)$ . Par exemple, si  $v(0) = (0, 0, 1)$  et  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ , on a  $V(v) = (1/\sqrt{2})(1, 0, 1)$  (figure 12).

**Exercice 3.1.** Démontrer les propriétés suivantes :

- (i) pour tout  $f \in O^0(2, 1)$ , on a

$$V(f(v)) = f(V(v)),$$

où  $f(V(v))$  représente l'image de  $V(v)$  par l'application linéaire  $f$  ;

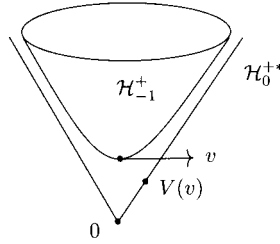


FIGURE 12

- (ii) l'application  $V$  est surjective et  $V^{-1}(V(v)) = \tilde{h}_{\mathbb{R}}(v)$ ;
- (iii) l'application  $V$  est continue.

(Indication : voir les exercices V.1.6, V.1.8 et la proposition V.1.7.)

**3.2. Action linéaire d'un groupe lorentzien sur  $\mathcal{H}_0^{+*}$  et dynamique du flot horocyclique.** Comme dans le paragraphe 2.2 de ce chapitre, nous considérons un groupe lorentzien  $\Gamma_L$  non élémentaire. L'action de  $O^0(2, 1)$  commutant à celle de  $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ , ce flot en induit un, noté  $h_{\mathbb{R}}$ , sur  $T^1S = \Gamma_L \backslash T^1\mathcal{H}_{-1}^{+*}$ . Le lemme suivant permet de faire un lien entre la nature topologique des orbites de  $\Gamma_L$  sur  $\mathcal{H}_0^{+*}$  et celle des trajectoires de  $h_{\mathbb{R}}$ .

**Lemme 3.2.** *Soient  $u_1, u_2 \in \mathcal{H}_0^{+*}$  et  $v_1, v_2 \in T^1\mathcal{H}_{-1}^{+*}$  tels que  $D^+(v) = \mathbb{R}u_i$  pour  $i = 1, 2$ . Considérons une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma_L$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) la suite  $(\gamma_n(u_1))_{n \geq 1}$  converge vers  $u_2$  ;
- (ii) il existe une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{R}$  telle  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}_{s_n}(\gamma_n(v_1)) = v_2$ .

**Exercice 3.3.** Démontrer le lemme 3.2.

(Indication : reprendre la démonstration de la proposition V.2.1.)

Introduisons l'ensemble  $\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$  des  $u \in \mathcal{H}_0^{+*}$  tels que  $\mathbb{R}u \in L(\Gamma_L)$ . Cet ensemble est relié à l'ensemble non errant du flot horocyclique (proposition V.2.7) par la relation

$$\pi^1(V^{-1}(\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L))) = \Omega_h(T^1S).$$

**Exercice 3.4.** Démontrer que  $\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$  est un fermé de  $\mathcal{H}_0^{+*}$  invariant par  $\Gamma_L$ .

L'ensemble  $\mathcal{H}_0(\Gamma_L)$  contient en particulier les vecteurs propres isotropes des isométries paraboliques et hyperboliques de  $\Gamma_L$ .

**Exercice 3.5.** Démontrer que si  $u \in \mathcal{H}_0^{+*}$  est fixé par une isométrie parabolique de  $\Gamma_L$  ou si  $u$  n'appartient pas à  $\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$  alors  $\Gamma_L(u)$  est fermé dans  $\mathcal{H}_0^{+*}$ .

Dans le chapitre V, nous avons démontré que la trajectoire de  $\pi^1(v)$  est dense dans  $\Omega_h(T^1S)$  si et seulement si  $v(+\infty)$  est horocyclique. Ce résultat, ajouté à la proposition 1.7 et au lemme 3.2, permet d'énoncer la proposition

**Proposition 3.6.** *Soit  $u \in \mathcal{H}_0^{+*}$ . L'orbite de  $u$  sous  $\Gamma_L$  est dense dans  $\mathcal{H}_0(\Gamma_L)$  si et seulement s'il existe  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma_L$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(u) = 0$ .*

**Exercice 3.7.** Soit  $u \in \mathcal{H}_0^{+*}$ .

(i) Démontrer que si  $\Gamma_L(u)$  est fermé dans  $\mathcal{H}_0^{+*}$ , alors  $\Gamma_L(u)$  est fermé dans  $\mathcal{H}_0$ .

(ii) Démontrer que  $\Gamma_L(u)$  est fermé dans  $\mathcal{H}_0^{+*}$  si et seulement si toute suite dans  $\Gamma_L(u)$  convergeant dans  $\mathcal{H}_0$  est stationnaire.

Si  $\Gamma_L$  est un réseau, alors  $\mathcal{H}_0(\Gamma_L) = \mathcal{H}_0^{+*}$ . Si de plus  $\Gamma_L$  est uniforme, alors tous les points de  $\mathcal{H}_{-1}^+(\infty)$  sont horocycliques, et la proposition 3.6 entraîne que toutes les orbites de  $\Gamma_L$  sur  $\mathcal{H}_0^+$  sont denses.

Plus généralement, lorsque  $\Gamma_L$  est géométriquement fini, la proposition V.4.3, traduite dans le contexte lorentzien, devient

**Proposition 3.8.**

(i) *Le groupe  $\Gamma_L$  est géométriquement fini et non élémentaire si et seulement si pour tout  $u \in \mathcal{H}_0(\Gamma_L)$  ou bien  $\Gamma_L(u)$  est dense dans  $\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$  ou bien  $u$  est fixé par une isométrie parabolique de  $\Gamma_L$ .*

(ii) *Le groupe  $\Gamma_L$  est un réseau uniforme si et seulement si toutes les orbites de  $\Gamma_L$  sur  $\mathcal{H}_0^+$  sont denses dans  $\mathcal{H}_0^+$ .*

#### 4. Commentaire

Depuis les travaux de G.-A. Hedlund [34] et de L. Greenberg [3], l'étude des orbites de groupes agissant linéairement sur un espace vectoriel a fait l'objet d'investigations directes. Un des premiers résultats dans ce domaine a été l'équivalence, pour un réseau de  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ , entre la présence du vecteur nul dans l'adhérence d'une orbite non triviale et la densité de cette orbite dans l'espace vectoriel [3]. Ce résultat a ensuite été étendu par J.-P. Conze et Y. Guivarc'h à des sous-groupes discrets de  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  [15]. Pour  $n = 2$ , il est démontré également dans notre texte (voir la démonstration de la proposition VI.3.6).

Dans ce chapitre (et le paragraphe V.2), nous avons mis en évidence un lien entre l'action linéaire d'un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\mathrm{SO}^0(2, 1)$  (ou du groupe des isométries positives de  $\mathbb{H}$ ) et la dynamique du flot géodésique ou horocyclique sur  $\Gamma \backslash T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  (ou  $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ ). Ce lien repose sur un changement de point de vue qui consiste à interpréter l'action linéaire de  $\Gamma$  comme une

action sur l'ensemble des trajectoires d'un flot sur  $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$  (ou  $T^1\mathbb{H}$ ). Nous avons ainsi obtenu un dictionnaire entre la topologie des orbites linéaires et celle des trajectoires de ces flots, qui a été utilisé par exemple pour démontrer l'existence de trajectoires denses dans l'ensemble non errant du flot horocyclique (corollaire V.2.8).

Si l'on sort du contexte topologique pour aller vers le contexte métrique, on trouve de nombreuses applications de ce changement de point de vue ([4], [28], [55, Chapter II]). Citons, à titre d'exemple, l'étude du comportement asymptotique du nombre de vecteurs de  $\mathcal{H}_{-1} \cap \mathbb{Z}^3$  de norme euclidienne  $\leq T$ , exposée dans le texte de M. Babillot [4, paragraphe 3.2] et qui se ramène à un comptage de points d'une orbite du groupe  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}) \cap \mathrm{SO}^0(2, 1)$  dans un disque de la surface  $\mathcal{H}_{-1}^+$  équipée de la métrique  $g^L$ .

## CHAPITRE VII

### DES TRAJECTOIRES POUR APPROCHER LES NOMBRES

Nous nous plaçons dans le demi-plan de Poincaré et considérons un groupe fuchsien,  $\Gamma$ , non élémentaire, géométriquement fini (voir le chapitre I pour les définitions), *contenant une translation non triviale*. Sous ces hypothèses, la surface  $S = \Gamma/\mathbb{H}$  admet un nombre fini de cuspidés (voir les paragraphes I.3 et I.4) (figure 1).

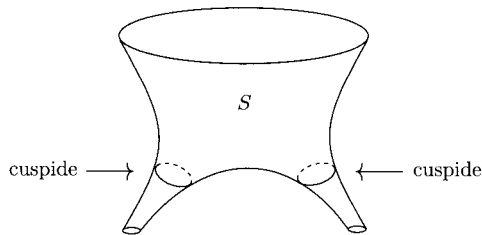


FIGURE 1

Comme dans les chapitres précédents, nous notons  $\pi$  la projection de  $\mathbb{H}$  sur  $S$ . Nous nous intéressons, en un premier temps, aux excursions d'un rayon géodésique  $\pi([z, x))$  dans la cuspidé correspondant à l'image par  $\pi$  d'un horodisque centré au point  $\infty$ . Notre but est de relier la fréquence de ces excursions à la façon dont le réel  $x$  est approché par l'orbite sous  $\Gamma$  du point  $\infty$ .

Dans un deuxième temps, nous privilégions le groupe modulaire et retrouvons, dans le même esprit que celui du chapitre III, des résultats classiques de la théorie des approximations diophantiennes.

### 1. Excursion d'un rayon géodésique dans une cuspide

Commençons par remarquer que le point  $\infty$  est un point parabolique de l'ensemble limite de  $\Gamma$  puisque ce groupe contient une translation.

Pour tout  $t > 0$ , posons

$$H_t = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} z = t\} \quad \text{et} \quad H_t^+ = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} z \geq t\}.$$

Le premier ensemble est l'horocycle centré au point  $\infty$ , ligne de niveau  $\ln t$  de la fonction  $f(z) = B_\infty(i, z)$ , le second est l'horodisque correspondant.

On rappelle qu'il existe  $t_0 > 0$  tel que pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma - \Gamma_\infty$ , on ait

$$\gamma H_{t_0} \cap H_{t_0} = \emptyset \quad (\text{théorème I.3.12}).$$

Sous cette condition, la projection de  $\Gamma_\infty \setminus H_{t_0}^+$  sur la cuspide  $\pi(H_{t_0}^+)$  est injective (voir la fin du paragraphe I.3) (figure 2).

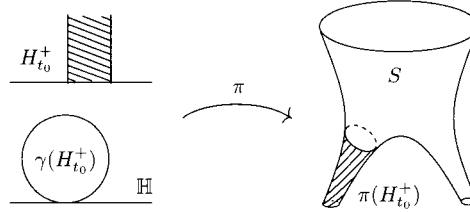


FIGURE 2

Fixons à présent un tel horodisque  $H_{t_0}^+$  et un point  $z \in \mathbb{H}$ . Soient  $x \in \mathbb{H}(\infty)$  et  $(r(s))_{s \geq 0}$  le paramétrage par longueur d'arcs du rayon  $[z, x)$ .

Quelles sont les excursions de  $\pi([z, x))$  dans la cuspide  $\pi(H_{t_0}^+)$ ? Comme nous allons le voir, la réponse dépend de la nature du point  $x$ .

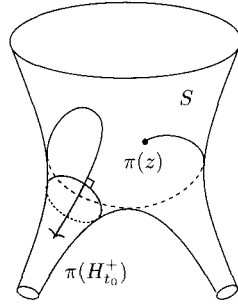
Considérons, pour commencer, le cas où il existe  $T \geq 0$  tel que  $\pi([r(T), x))$  soit inclus dans  $\pi(H_{t_0}^+)$ . Sur  $\mathbb{H}$ , cela entraîne que le rayon  $[r(T), x)$  est recouvert par les  $\gamma(H_{t_0}^+)$  avec  $\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty$ . Ces horodisques étant disjoints, ce rayon est inclus dans un seul de ces horodisques, ce qui implique que  $x$  appartient à l'orbite du point  $\infty$  sous l'action de  $\Gamma$ .

Réciproquement, si  $x$  appartient à cette orbite, d'après la proposition III.2.9, il existe  $T \geq 0$  tel que  $\pi([r(T), x))$  soit inclus dans  $\pi(H_{t_0}^+)$ .

On obtient donc :

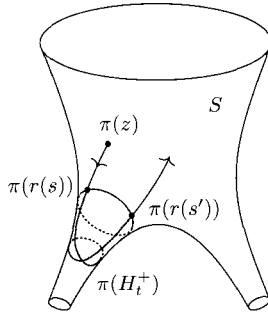
**Proposition 1.1.** *Il existe  $T \geq 0$  tel que  $\pi([r(T), x))$  soit inclus dans  $\pi(H_{t_0}^+)$  si et seulement si  $x$  appartient à l'orbite du point  $\infty$  sous  $\Gamma$ .*

Ajoutons que, d'après la proposition III.2.9, si  $\pi([r(T), x))$  est inclus dans  $\pi(H_{t_0}^+)$ , alors l'application de  $[T, \infty)$  sur  $\pi(H_{t_0}^+)$  qui à un réel  $s$  associe  $\pi(r(s))$  est un plongement (figure 3).

FIGURE 3.  $x \in \Gamma(\infty)$ 

Supposons à présent que  $x$  n'appartient pas à l'orbite du point infini. D'après la proposition 1.1, le rayon  $\pi([z, x))$  n'est pas inclus dans l'horodisque  $\pi(H_{t_0}^+)$ . Cette propriété s'énonce encore de la façon suivante :

**Propriété 1.2.** *On suppose que  $x$  n'appartient pas à  $\Gamma(\infty)$ . Soit  $t > 0$  tel que  $\gamma(H_t) \cap H_t = \emptyset$  pour tout  $\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty$ . S'il existe  $s \geq 0$  tel que  $\pi(r(s))$  appartient à  $\pi(H_t^+)$ , alors il existe  $s' \geq s$  tel que  $\pi(r(s'))$  appartient à l'horocycle  $\pi(H_t)$  (figure 4).*

FIGURE 4.  $x \notin \Gamma(\infty)$  et  $\pi(r(s)) \in \pi(H_t^+)$ 

**Corollaire 1.3.** *Si  $x$  n'appartient pas à  $\Gamma(\infty)$  et n'est pas conique, alors il existe  $T \geq 0$  tel que  $\pi([r(T), x)) \cap \pi(H_{t_0}^+) = \emptyset$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 1.1, deux cas se présentent :

- (i) ou bien il existe une suite non bornée  $(s_n)_{n \geq 1}$  telle que  $\pi(r(s_n)) \in \pi(H_{t_0}^+)$ ;
- (ii) ou bien il existe  $T \geq 0$  tel que  $\pi([r(T), x)) \cap \pi(H_{t_0}^+) = \emptyset$ .



Le premier cas implique que  $x$  est conique. En effet, d'après la propriété 1.2, il existe une suite non bornée  $(s'_n)_{n \geq 1}$  telle que  $\pi(r(s'_n)) \in \pi(H_{t_0})$ . L'ensemble  $\pi(H_{t_0})$  est compact donc d'après la proposition III.2.6 (lue sur  $S$ ),  $x$  est conique.

Le groupe  $\Gamma$  étant géométriquement fini, si  $x$  n'est pas conique alors  $x$  est parabolique ou  $x$  n'appartient pas à  $L(\Gamma)$ . Dans le premier cas, d'après les raisonnements précédents, il existe  $T \geq 0$  tel que l'application de  $[T, \infty)$  dans une cuspidale  $\pi(H_t^+(x))$  associée à  $x$ , qui à un réel  $s$  associe  $\pi(r(s))$  soit un plongement (figure 5).

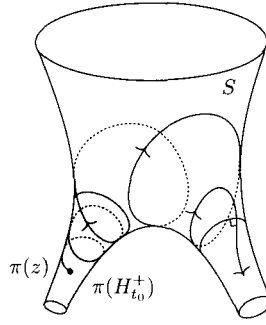


FIGURE 5.  $x \notin \Gamma(\infty)$  et  $x$  est parabolique

L'étude du second cas est l'objet d'un exercice. □

**Exercice 1.4.** Démontrer que si  $x$  n'appartient pas à  $L(\Gamma)$ , alors il existe  $T \geq 0$  tel que l'application de  $[T, +\infty)$  dans  $S$  qui à un réel  $s$  associe  $\pi(r(s))$  soit un plongement (figure 6).

(Indication : voir propriété III.2.8.)

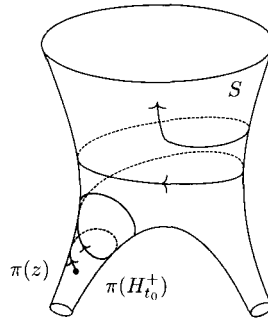


FIGURE 6.  $x \notin L(\Gamma)$

Il reste à présent le cas où  $x$  est conique. Remarquons que si  $x$  est le point fixe d'une isométrie hyperbolique de  $\Gamma$  et si  $z$  est sur son axe, alors  $\pi([z, x))$

est une géodésique compacte de  $S$  et donc, si  $t_0$  est suffisamment grand, ce rayon ne rencontre pas la cuspide  $\pi(H_{t_0}^+)$  (figure 7).

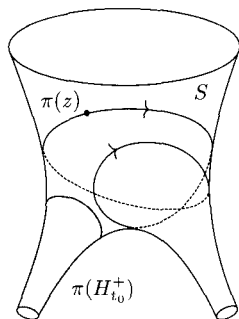


FIGURE 7.  $\pi([z, x])$  géodésique compacte

En revanche, si par exemple  $\Gamma$  est le groupe modulaire et si  $\pi([z, x])$  n'est pas borné, et  $x$  est irrationnel, alors il existe une suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  non bornée pour laquelle  $\pi(r(s_n))$  appartient à  $\pi(H_{t_0}^+)$  (figure 8).

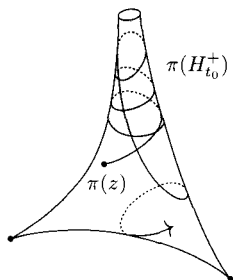


FIGURE 8.  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$

On ne peut donc pas caractériser le fait que  $x$  soit conique en termes d'excursions du rayon  $\pi([z, x])$  dans  $\pi(H_{t_0}^+)$ . Il faut pour cela considérer la famille des horocycles  $\pi(H_t^+)$  avec  $t \in \mathbb{R}_*^+$ .

Introduisons l'ensemble  $E([z, x])$  des  $t > 0$  pour lesquels il existe une suite non bornée  $(s_n)_{n \geq 1}$  vérifiant

$$\pi(r(s_n)) \in \pi(H_t).$$

Si  $x$  n'est pas conique, alors cet ensemble est vide. Ce n'est pas le cas si  $x$  est conique.

**Proposition 1.5.**

(i) Il existe  $t_1 > 0$  tel que pour tout point conique  $x$  de  $L(\Gamma)$  on ait  $t_1 \in E([z, x])$ .

(ii) Si  $x$  un point conique de  $L(\Gamma)$ , la borne supérieure dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  de l'ensemble  $E([z, x])$  est indépendante de  $z$ .

*Démonstration.*

(i) Le groupe  $\Gamma$  est géométriquement fini et non élémentaire donc, d'après la proposition III.2.9, lue sur  $S$  (et non sur  $T^1S$ ), il existe un compact  $K_1 \subset S$  (indépendant de  $x$ ) et une suite non bornée  $(s_n)_{n \geq 1}$  tels que  $\pi(r(s_n))$  appartienne à  $K_1$ . Relevons  $K_1$  en un compact  $\tilde{K}_1$  inclus dans un horodisque  $H_{t_1}^+$ . D'après la propriété 1.2, il existe  $s'_n \geq s_n$  vérifiant  $\pi(r(s'_n)) \in \pi(H_{t_1})$ . Ce qui montre que  $t_1$  appartient à  $E([z, x])$ .

(ii) Soient  $z'$  un point de  $\mathbb{H}$  différent de  $z$  et  $(r'(s))_{s \geq 0}$  le paramétrage par longueur d'arcs du rayon  $[z', x]$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T \geq 0$  tel que  $[r'(T), x]$  soit inclus dans le  $\varepsilon$ -voisinage du rayon  $[z, x]$ .

Fixons un réel  $t$  de  $E([z, x])$ . Il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma$  et une suite non bornée  $(s_n)_{n \geq 1}$  telles que  $\gamma_n(r(s_n))$  appartienne à  $H_t$ , autrement dit

$$B_\infty(i, \gamma_n(r(s_n))) = t.$$

Soient  $\varepsilon > 0$  et une suite  $(s'_n)_{n \geq 1}$  vérifiant  $d(r'(s'_n), r(s_n)) \leq \varepsilon$ . En utilisant les propriétés I.1.13 du cocycle de Busemann, on obtient l'encadrement suivant :

$$t - \varepsilon \leq B_\infty(i, \gamma_n(r'(s'_n))) \leq t + \varepsilon.$$

Par conséquent,  $\pi(r'(s'_n))$  appartient à  $\pi(H_{t-\varepsilon}^+)$ . Il existe donc  $s'_n \geq s_n$  tel que  $\pi(r'(s'_n))$  appartienne à  $\pi(H_{t-\varepsilon})$ , ce qui montre que  $t - \varepsilon$  appartient à  $E([z', x])$ . On en conclut que la borne supérieure de cet ensemble est supérieure à celle de  $E([z, x])$ . En échangeant les rôles de  $z$  et  $z'$ , on obtient l'égalité.  $\square$

La borne supérieure de l'ensemble  $E([z, x])$  est appelée *hauteur* du rayon  $\pi([z, x])$  et est notée  $h(x)$ .

**Définition 1.6.** Un point conique  $x$  de  $L(\Gamma)$  est géométriquement mal approché si  $h(x)$  est fini.

Si  $\pi([z, x])$  est borné,  $x$  est clairement géométriquement mal approché. La réciproque est-elle vraie ? Le but du paragraphe suivant est, entre autre, de répondre à cette question.

## 2. Points géométriquement mal approchés

Considérons un point conique  $x$  géométriquement mal approché et un réel  $t > h(x)$  vérifiant

$$\gamma(H_t^+) \cap H_t^+ = \emptyset \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty.$$

Par définition de  $h(x)$ , il existe  $T > 0$  tel que  $\pi([r(T), x))$  ne rencontre pas  $\pi(H_t)$ . L'horocycle  $\pi(H_t)$  sépare  $S$  en deux composantes connexes donc deux cas se présentent :

- (i)  $\pi([r(T), x)) \subset \pi(H_t^+)$ ;
- (ii)  $\pi([r(T), x)) \subset S - \pi(H_t^+)$ .

Le premier cas est exclu par la propriété 1.2. Il reste donc le cas (ii). L'ensemble  $\pi([z, r(T)])$  étant compact, on en déduit qu'il existe  $t' \geq t$  tel que

$$\pi([z, x)) \cap \pi(H_{t'}^+) = \emptyset.$$

On peut donc énoncer la caractérisation suivante :

**Proposition 2.1.** *Soit  $x$  un point conique de  $L(\Gamma)$ . Le point  $x$  est géométriquement mal approché si et seulement si il existe  $t > 0$  tel que*

$$\pi([z, x)) \cap \pi(H_t^+) = \emptyset.$$

Remarquons que cette proposition n'implique pas que si  $x$  est géométriquement mal approché, alors  $\pi([z, x))$  est borné. En effet, dans le cas où  $L(\Gamma)$  contient un point parabolique  $y$  n'appartenant pas à  $\Gamma(\infty)$ , la surface  $S$  admet au moins deux cuspsides disjointes (voir par exemple le groupe  $\Gamma(2)$  du chapitre II), donc le rayon  $\pi([z, x))$  peut ne pas être borné sans pour autant rencontrer une cuspide  $C(H_t^+)$  (figure 9).

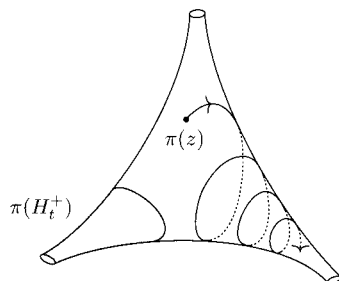
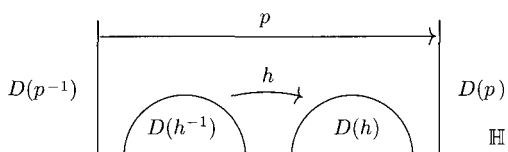


FIGURE 9.  $\Gamma = \Gamma(2)$

En revanche, si les points paraboliques de  $L(\Gamma)$  sont tous des images par  $\Gamma$  du point  $\infty$ , la projection sur  $S$  de la région de Nielsen  $N(\Gamma)$  est la réunion d'un ensemble compact et de  $\pi(H_t^+)$  (avec  $t$  grand) (proposition I.4.11), donc si  $x$  est géométriquement mal approché, alors  $\pi([z, x))$  est borné.

**Corollaire 2.2.** *On suppose que l'ensemble des points paraboliques de  $L(\Gamma)$  est égal à  $\Gamma(\infty)$ . Un point conique  $x$  de  $L(\Gamma)$  est géométriquement mal approché si et seulement si  $\pi([z, x))$  est borné.*

Considérons à présent le cas particulier où le groupe  $\Gamma$  est un groupe de Schottky  $S(p, h)$  engendré par une translation  $p$  et par une isométrie hyperbolique  $h$  (voir paragraphe II.1) (figure 10).

FIGURE 10.  $\Gamma = S(p, h)$ 

Comme nous l'avons vu dans le chapitre II (propriété II.1.9), sous ces hypothèses, l'ensemble des points paraboliques de  $S(p, h)$  est égal à l'orbite du point  $\infty$ . Le corollaire 2.2 s'applique donc à ce cas là. On rappelle (proposition II.2.2) qu'un point conique de  $L(S(p, h))$  est représenté de façon unique par une suite  $s(x) = (s_i)_{i \geq 1}$  vérifiant

$$s_i \in \{h^{\pm 1}, p^{\pm 1}\}, \quad s_{i+1} \neq s_i^{-1}$$

et si  $s_i \in \{p^{\pm 1}\}$  alors il existe  $j > i$  tel que  $s_j \in \{h^{\pm 1}\}$ .

La proposition suivante caractérise les points géométriquement mal approchés en termes de codage.

**Proposition 2.3.** *Soit  $x$  un point conique de  $L(S(p, h))$ . Posons  $s(x) = (s_i)_{i \geq 1}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le point  $x$  est géométriquement mal approché ;*
- (ii) *il existe un entier  $r > 0$  tel que si  $s_i \in \{p^{\pm 1}\}$  alors il existe  $1 \leq j \leq r$  tel que  $s_{i+j} \in \{h^{\pm 1}\}$ .*

*Démonstration.*

Non (ii)  $\Rightarrow$  non (i). Considérons la suite  $(a_i)_{i \geq 1}$  construite à partir de  $s(x)$  en regroupant les termes consécutifs  $p$  et  $p^{-1}$ . Soit  $z_0$  un point de l'ensemble  $\mathbb{H} - (D(h) \cup D(h^{-1}) \cup D(p) \cup D(p^{-1}))$ . Une telle suite vérifie les conditions

$$a_i \in \{p^n, h^{\pm 1} \mid n \in \mathbb{Z}^*\}, \quad a_i \neq a_{i+1}^{-1},$$

$$\text{si } a_i = p^n \text{ alors } a_{i+1} \in \{h^{\pm 1}\},$$

$$\text{et } x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_1 \cdots a_n(z_0).$$

Par hypothèse, il existe une sous-suite  $(a_{i_k})_{k \geq 1}$  telle que  $a_{i_k} = p^{n_k}$  avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |n_k| = +\infty$ . Posons  $\gamma_k = a_1 \cdots a_{i_k}$ . On a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k^{-1}(z_0) = \infty \quad \text{et} \quad \gamma_k^{-1}(x) \in \overline{D(h) \cup D(h^{-1})} \quad (\text{voir propriétés II.1.4}).$$

Les points  $\gamma_k^{-1}(x)$  appartiennent à un compact de  $\mathbb{R}$  donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite de rayons  $[\gamma_k^{-1}(z_0), \gamma_k^{-1}(x))$  converge vers une géodésique  $(\infty y)$ . Par conséquent pour tout  $t > 0$ , il existe  $k \geq 1$  tel que

$$[\gamma_k^{-1}(i), \gamma_k^{-1}(x)) \cap H_t^+ \neq \emptyset.$$

Cette propriété entraîne que le rayon  $\pi([z_0, x))$  n'est pas borné et donc que  $x$  n'est pas géométriquement mal approché.

Non (i)  $\Rightarrow$  non (ii). Supposons que  $x$  ne soit pas géométriquement mal approché et choisissons  $z$  sur la géodésique  $(\infty x)$ . Par hypothèse il existe une suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  convergeant vers  $+\infty$  et  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  dans  $S(p, h)$  telles que

$$\gamma_n([z, x)) \cap H_{t_n} \neq \emptyset.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\gamma_n$  s'écrive sous la forme d'un mot réduit  $c_1 \cdots c_{\ell_n}$  vérifiant

$$c_1 \in \{h^{\pm 1}\}, \quad c_i \in \{p^{\pm 1}, h^{\pm 1}\} \text{ pour } i \geq 2, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = +\infty.$$

Le point  $\gamma_n(\infty)$  appartient à  $\overline{D(h) \cup D(h^{-1})} \cap \mathbb{R}$ , qui est un compact de  $\mathbb{R}$ , et la suite des rayons des arcs de cercles euclidiens  $(\gamma_n(\infty)\gamma_n(x))$  converge vers  $+\infty$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(x) = \infty.$$

Cette propriété entraîne l'existence de  $N_1 > 0$  tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad c_1 = s_{\ell_n}^{-1}, \dots, c_h = s_1^{-1}.$$

En effet, on a  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_1 \cdots s_n(z_0)$ . Si la condition précédente n'est pas satisfaite, il existe une sous-suite  $(\gamma_{n_p})_{p \geq 1}$  telle que la première lettre du mot réduit correspondant à  $\gamma_{n_p} s_1 \cdots s_{\ell_{n_p}}$  soit la lettre  $c_1$ . Dans ce cas d'après la propriété II.1.4(i),  $\gamma_{n_p}(x)$  appartient au compact  $\overline{D(h) \cup D(h^{-1})} \cap \mathbb{R}$ , ce qui est exclu.

Par conséquent, pour  $n \geq N_1$ , le point  $\gamma_n(x)$  appartient à  $D(s_{\ell_n+1})(\infty)$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(x) = \infty$ , il existe  $N_2 \geq N_1$  tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad s_{\ell_n+1} \in \{p^{\pm 1}\}.$$

Soit  $n \geq N_2$ . Le point  $s_{\ell_n+1}^{-1} \gamma_n(x)$  appartient à  $D(s_{\ell_n+2})(\infty)$  et on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{\ell_n+1}^{-1} \gamma_n(x) = \infty$  donc, en reprenant le même raisonnement, il existe  $N_3 \geq N_2$  tel que

$$\forall n \geq N_3, \quad s_{\ell_n+1} \in \{p^{\pm 1}\} \quad \text{et} \quad s_{\ell_n+2} = s_{\ell_n+1}.$$

En réitérant ce raisonnement, on obtient une suite croissante  $(N_k)_{k \geq 2}$  satisfaisant la condition suivante :

$$\forall n \geq N_k, \quad s_{\ell_n+1} \in \{p^{\pm 1}\}, s_{\ell_n+1} = \cdots s_{\ell_n+k-1},$$

ce qui contredit la propriété (i).  $\square$

### 3. Applications à la théorie des approximations diophantiennes

Nous privilégions à présent le groupe modulaire  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . L'ensemble des points paraboliques associé à ce groupe est réduit à l'orbite du point  $\infty$  et est égal à  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  (propriétés II.3.7). La surface modulaire  $S = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})/\mathbb{H}$  admet donc un seul type de cuspide  $\pi(H_t^+)$ , où  $H_t^+$  est un horodisque centré au point  $\infty$  (figure 11).

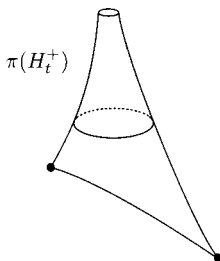


FIGURE 11.  $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$

Le but de ce paragraphe est de mettre en parallèle les excursions d'un rayon géodésique  $\pi([z, x))$ , où  $x$  est un irrationnel, dans  $\pi(H_t^+)$ , et une approximation de  $x$  par une suite de rationnels.

Nous commençons par exposer trois résultats bien connus en théorie des nombres que nous démontrons ensuite en prenant un point de vue hyperbolique.

**3.1. Trois théorèmes classiques.** De tout temps les mathématiciens ont voulu donner des approximations rationnelles de nombres qu'ils manipulaient. L'idée des fractions continues est apparue très tôt [23, chapitre V]. Dans le paragraphe II.4, nous en avons donné une interprétation géométrique en utilisant le pavage de Farey de  $\mathbb{H}$ . Une branche de la théorie des approximations diophantiennes consiste à construire un dictionnaire entre des propriétés algébriques d'un irrationnel et celles de la suite d'entiers  $(n_i)_{i \geq 0}$  associée à son développement en fractions continues. Un des exemples est la proposition II.4.10 qui relie les réels quadratiques aux suites presque périodiques.

Une autre branche porte sur la vitesse de convergence de la suite de rationnels associée au développement en fractions continues. Un des problèmes, par exemple, est de trouver la « meilleure » fonction (au sens du comportement asymptotique)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  décroissante vers 0 telle que pour tout  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , il existe une suite de rationnels  $(p_n/q_n)_{n \geq 1}$  vérifiant

$$|x - p_n/q_n| \leq f(|q_n|) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |q_n| = +\infty.$$

Remarquons que si  $p_n$  est la partie entière de  $nx$ , la suite  $(p_n/n)_{n \geq 1}$  vérifie

$$|x - p_n/n| \leq 1/n.$$

La fonction  $f(n)$  cherchée est donc inférieure à  $1/n$ .

Le théorème suivant est l'un des premiers résultats sur cette question, une de ses démonstrations classiques repose sur des propriétés du développement en fractions continues [47, Chapter 6, Theorem 6.24].

**Théorème 3.1.** *Pour tout  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , il existe une suite  $(p_n/q_n)_{n \geq 1}$  de rationnels vérifiant*

$$|x - p_n/q_n| \leq 1/(2q_n^2) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |q_n| = +\infty.$$

Peut-on trouver une fonction  $f(n)$  plus rapide que  $1/n^2$ ? La réponse est négative et découle de l'exercice suivant :

**Exercice 3.2.** Démontrer que pour tous  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q$  dans  $\mathbb{N}^*$ , l'inégalité suivante est satisfaite :

$$|\sqrt{2} - p/q| \geq 1/(4q^2).$$

La fonction  $f$  cherchée vérifie donc l'encadrement

$$1/4 \leq n^2 f(n) \leq 1/2.$$

Ceci nous conduit naturellement à introduire pour chaque irrationnel  $x$  la quantité

$$\nu(x) = \inf \{c > 0 \mid \exists (p_n/q_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{Q}, |x - p_n/q_n| \leq c/q_n^2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} |q_n| = +\infty\}.$$

D'après le théorème 3.1, cette quantité est inférieure à  $1/2$  pour tout  $x$ . Le théorème suivant est plus précis. Il se démontre par exemple en associant à la suite des rationnels donnée par le développement en fractions continues, une suite de cercles, et en étudiant leur position relative [47, Chapter 6, Theorem 6.25].

**Théorème 3.3.** *Pour tout irrationnel  $x$ , on a*

$$\nu(x) \leq 1/\sqrt{5}.$$

De plus  $\nu(x) = 1/\sqrt{5}$  si et seulement s'il existe  $a, b, c, d$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que

$$ac - bd = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{aN + b}{cN + d}, \quad \text{où } N \text{ est le nombre d'or.}$$



Parmi les irrationnels on distingue les *réels mal approchés*  $x$  pour lesquels la quantité  $\nu(x)$  est strictement positive. C'est le cas par exemple de  $\sqrt{2}$ .

Le théorème suivant relie cette propriété à une propriété de la suite d'entiers  $(n_i)_{i \geq 0}$  associée au développement en fractions continues de  $x$ . Sa démonstration originelle [22, Theorem 2.20] n'est pas très éloignée de celle que nous proposons. C'est un bel exemple d'utilisation d'un système dynamique pour démontrer un résultat portant sur la théorie des nombres.

**Théorème 3.4.** *Soit  $x$  un irrationnel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la suite  $(n_i)_{i \geq 0}$  est bornée ;*
- (ii) *le réel  $x$  est mal approché.*

### 3.2. Démonstrations hyperboliques des théorèmes 3.1, 3.3 et 3.4.

Les démonstrations des théorèmes 3.1 et 3.3 que nous proposons ne sont pas plus élémentaires que celles d'origine ! Notre but ici n'est pas de gagner en simplicité mais d'illustrer le fait que le monde mathématique n'est pas cloisonné.

Dans la suite de ce paragraphe,  $\Gamma$  désigne le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et  $p$  la translation définie par  $p(z) = z + 1$ . Cette translation engendre le stabilisateur  $\Gamma_\infty$  du point  $\infty$  dans  $\Gamma$ .

On rappelle (lemme I.3.13), que le diamètre euclidien de l'image par une isométrie  $\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty$  de l'horocycle  $H_t$  centré au point  $\gamma(\infty)$  est  $1/(c^2(\gamma)t)$ , où  $c(\gamma)$  est égal à la valeur absolue du coefficient  $c$  apparaissant dans l'écriture de  $\gamma(z)$  sous la forme  $\gamma(z) = (az+b)/(cz+d)$ , avec  $ad-bc = 1$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a donc l'équivalence suivante (figure 12) :

$$(*) \quad (\infty x) \cap \gamma(H_t) \neq \emptyset \implies |x - a/c(\gamma)| \leq 1/(2tc^2(\gamma)).$$

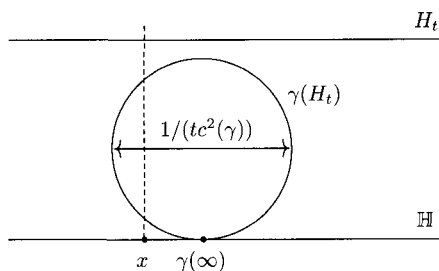


FIGURE 12

Le lemme suivant joue le rôle de passerelle entre la théorie des approximations et l'étude des rayons géodésiques sur la surface  $S = \Gamma/\mathbb{H}$ . On rappelle que  $\pi$  désigne la projection de  $\mathbb{H}$  sur  $S$ .

**Lemme 3.5.** *Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(r(s))_{s \in \mathbb{R}}$  un paramétrage par longueur d'arcs de la géodésique orientée  $(\infty x)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *il existe une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  de réels positifs telle que  $\pi(r(s_n))$  appartienne à l'horocycle  $\pi(H_t)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$  ;*
- (ii) *il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  de  $\Gamma - \Gamma_\infty$  telle que*

$$|x - \gamma_n(\infty)| \leq 1/(2tc^2(\gamma_n)) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c(\gamma_n) = +\infty.$$

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Nous reprenons essentiellement les arguments de la démonstration de la proposition I.3.14. Le fait que  $\pi(r(s_n))$  appartienne à  $\pi(H_t)$  se traduit sur  $\mathbb{H}$  par l'existence de  $\gamma_n \in \Gamma$  tel que

$$r(s_n) \in \gamma_n(H_t).$$

La géodésique  $(\infty x)$  rencontre  $\gamma_n(H_t)$  donc  $|x - \gamma_n(\infty)| \leq 1/(2tc^2(\gamma_n))$ . Montrons que la suite  $(c(\gamma_n))_{n \geq 1}$  n'est pas bornée.

La suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $+\infty$ , donc on peut supposer que les cercles  $(\gamma_n(H_t))_{n \geq N}$  sont tous différents et ne sont pas des translatés l'un de l'autre. Autrement dit, quels que soient  $n \neq m$  et  $k$  et  $k'$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a

$$\gamma_n \neq p^k \gamma_m p^{k'}.$$

Supposons que la suite des réels  $c_n = c(\gamma_n)$  soit bornée. Écrivons  $\gamma_n$  sous la forme

$$\gamma_n(z) = (a_n z + b_n)/(c_n z + d_n).$$

Notons  $e_n$  la partie entière de  $a_n/c_n$  et  $e'_n$  celle de  $d_n/c_n$  et introduisons l'isométrie  $g_n$  de  $\Gamma$  définie par

$$g_n = t^{-e'_n} \gamma_n t^{-e_n}.$$

Cette isométrie s'écrit

$$g_n(z) = ((a_n - c_n e_n)z + b'_n)/(c_n z + (-c_n e'_n + d_n)).$$

On a les inégalités  $0 \leq a_n - c_n e_n < c_n$  et  $0 \leq d_n - c_n e'_n < c_n$  donc la suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  est bornée. Le groupe  $\Gamma$  étant discret, cette suite est finie, ce qui est impossible.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Par hypothèse, la géodésique  $(\infty x)$  rencontre chaque cercle  $\gamma_n(H_t)$ . Soit  $s_n$  le plus grand réel  $s$  tel que  $r(s) \in \gamma_n(H_t)$ . On a  $r(s_n) = x + ibe^{-s_n}$ , où  $b$  est un réel  $> 0$  fixé. Notons  $R_n$  le diamètre euclidien de

$\gamma_n(H_t)$ . Le centre de ce cercle euclidien est le point  $\gamma_n(\infty) + iR_n$ , donc l'équation suivante est vérifiée :

$$(x - \gamma_n(\infty))^2 + (be^{-s_n} - R_n)^2 = R_n^2.$$

Les suites  $(x - \gamma_n(\infty))_{n \geq 1}$  et  $(R_n)_{n \geq 1}$  convergent vers 0. Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ .  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer les théorèmes 3.1 et 3.3.

*Démonstration du théorème 3.1.* Soit  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Montrons qu'il existe une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  de réels positifs telle que

$$\pi(r(s_n)) \in \pi(H_1) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $z \in (\infty x)$  tel que  $\pi([z, x))$  ne rencontre pas  $\pi(H_1)$ . Relevons la situation sur  $\mathbb{H}$ . Considérons l'isométrie elliptique  $r$  de  $\Gamma$ , d'ordre 3, définie par  $r(z) = (z - 1)/z$ . Les images de l'horocycle  $H_1$  par  $r$  et  $r^2$  sont des cercles de diamètre euclidien 1, tangents à l'axe réel respectivement au point 1 et 0, et tangents entre eux au point  $1/2 + i/2$  (figure 13).

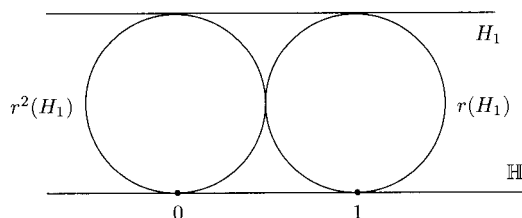


FIGURE 13

Comme nous l'avons vu dans le chapitre II (exercice II.3.5), l'ensemble  $\Delta$  défini par

$$\Delta = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |z| \geq 1 \text{ et } |z - 1| \geq 1\},$$

est un domaine fondamental de  $\Gamma$  (figure 14).

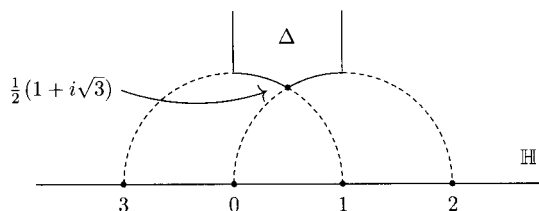


FIGURE 14

Par conséquent, il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma(z)$  appartienne à  $\Delta$ . Le point  $x$  n'appartient pas à l'orbite sous  $\Gamma$  du point  $\infty$  et le rayon  $[\gamma(z), \gamma(x))$ , qui est un arc de cercle, ne rencontre pas  $H_1$  donc ce rayon est inclus dans  $\mathbb{H} - H_1^+$ . Pour les mêmes raisons, il est aussi inclus dans  $\mathbb{H} - r(H_1^+)$  et  $\mathbb{H} - r^2(H_1^+)$ . Comme  $\gamma(z)$  appartient à  $\Delta$ , ce rayon est donc inclus dans un compact, ce qui est impossible.

Pour conclure, il suffit d'utiliser l'équivalence (\*), le lemme 3.5 et de remarquer que si  $\gamma$  n'appartient pas à  $\Gamma_\infty$ , alors le point  $\gamma(\infty)$  est un rationnel de la forme  $a/c(\gamma)$ , où  $a$  et  $c(\gamma)$  sont des entiers premiers entre eux.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.3.* On rappelle que  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  est l'ensemble des points coniques de  $\Gamma$  (propriété II.3.7). D'après le lemme 3.5, les quantités  $\nu(x)$  et  $h(x)$  sont liées par la relation :

$$\nu(x) = 1/(2h(x)).$$

Le théorème 3.3 s'énonce donc en termes de hauteur de rayons géodésiques sous la forme

$$\inf_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} h(x) = \sqrt{5}/2.$$

Démontrons cette égalité. Considérons le cas où  $x$  est le point fixe d'une isométrie hyperbolique  $\gamma$  de  $\Gamma$ . Prenons  $z$  sur l'axe de cette isométrie, sous cette condition, le rayon  $\pi([z, x))$  est égal à  $\pi((\gamma^- \gamma^+))$ , qui est une géodésique compacte de  $S$ . Donc  $h(x)$  est le plus grand  $t > 0$  tel que

$$\pi((\gamma^- \gamma^+)) \cap \pi(H_t) \neq \emptyset.$$

Autrement dit, sur  $\mathbb{H}$  on a l'expression (figure 15)

$$h(x) = \max_{g \in \Gamma} |g(\gamma^-) - g(\gamma^+)|/2.$$

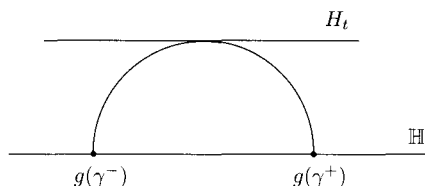


FIGURE 15

Posons  $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$  avec  $ad - bc = 1$ . L'expression suivante résulte d'un simple calcul

$$(**) \quad |g(\gamma^-) - g(\gamma^+)| = \sqrt{(a+d)^2 - 4}/c(g\gamma g^{-1}).$$

Prenons le cas particulier où  $x$  est le nombre d'or introduit à la fin du paragraphe II.4, et défini par

$$\mathcal{N} = (1 + \sqrt{5})/2.$$

Comme nous l'avons vu dans ce paragraphe, ce point est fixé par l'isométrie hyperbolique  $\gamma = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}$  de  $\Gamma$ , qui s'écrit encore sous la forme

$$\gamma(z) = (2z + 1)/(z + 1).$$

On déduit de l'expression (\*\*) l'égalité suivante :

$$h(\mathcal{N}) = (\sqrt{5}/2) \min_{g \in \Gamma} c(g\gamma g^{-1}).$$

Pour tout  $g \in \Gamma$ , l'isométrie  $g\gamma g^{-1}$  est hyperbolique donc  $c(g\gamma g^{-1})$  n'est pas nul. Par ailleurs cette quantité est un entier donc  $c(g\gamma g^{-1}) \geq 1$ . Dans le cas particulier où  $\gamma = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}$ , on a  $c(\gamma) = 1$  donc

$$h(\mathcal{N}) = \sqrt{5}/2.$$

On en conclut que pour tout  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$$h(x) \leq \sqrt{5}/2.$$

Démontrons l'inégalité contraire. Soit  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Par définition de  $h(x)$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on a

$$h(\gamma x) = h(x).$$

On peut donc se restreindre aux irrationnels  $x$  de  $[0, 1]$ . Nous allons utiliser le développement en fractions continues de  $x$ , noté  $([0; n_1, \dots, n_k])_{k \geq 1}$ . Comme dans le paragraphe II.4, introduisons les isométries  $\mathcal{T}_1(z) = z + 1$ ,  $\mathcal{T}_{-1}(z) = z/(z + 1)$  et  $s(z) = -1/z$ . Ces trois isométries sont liées par la relation  $s\mathcal{T}_{-1}s = \mathcal{T}_1^{-1}$ .

Soit  $k \geq 2$ . Posons  $\gamma_k = \mathcal{T}_{-1}^{n_1} \dots \mathcal{T}_{(-1)^k}^{n_k}$ . On rappelle les propriétés suivantes (exercice II.4.4 et proposition II.4.5) :

- si  $k$  est pair, alors  $\gamma_k(0) = [0; n_1, \dots, n_k]$  et  $\gamma_k(\infty) = [0; n_1, \dots, n_{k-1}]$ ;
- si  $k$  est impair, alors  $\gamma_k(0) = [0; n_1, \dots, n_{k-1}]$  et  $\gamma_k(\infty) = [0; n_1, \dots, n_k]$ ;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} [0; n_1, \dots, n_k] = x$ .

Notre démonstration repose sur le lemme suivant qui relie les entiers  $(n_i)_{i \geq 1}$  à la hauteur  $h(x)$ .

**Lemme 3.6.** *Il existe une suite  $(g_i)_{i \geq 2}$  de  $\Gamma$  telle que*

$$g_i^{-1}(\infty x) \cap H_{(n_{i+1}/(n_{i+1}+1))/2} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} c(g_i^{-1}) = +\infty.$$

*Démonstration.* Si  $i$  est pair posons  $g_i = \gamma_{i-1}$ . On a

$$g_i^{-1} = s \circ \mathcal{T}_1^{n_{i-1}} \circ \mathcal{T}_{-1}^{n_{i-2}} \circ \dots \circ \mathcal{T}_1^{n_1} \circ s.$$

Donc  $g_i^{-1}(\infty)$  est le rationnel  $-[0; n_{i-1}, n_{i-2}, \dots, n_1]$ , et le développement en fractions continues de  $g_i^{-1}(x)$  est  $([n_i; n_{i+1}, \dots, n_k])_{k \geq 1}$ .

Si  $i$  est impair, posons  $g_i = \gamma_{i-1} \circ s$ . On a :

$$g_i^{-1} = T_{-1}^{n_{i-1}} \circ T_1^{n_{i-2}} \circ \dots \circ T_1^{n_1} \circ s.$$

Donc  $g_i^{-1}(\infty)$  est le rationnel  $[0; n_{i-1}, n_{i-2}, \dots, n_1]$  et  $g_i^{-1}(x)$  a pour développement en fractions continues la suite  $(-[n_i, n_{i+1}, \dots, n_k])_{k \geq 1}$ .

Dans les deux cas on a :

$$|g_i^{-1}(\infty) - g_i^{-1}(x)| \geq n_i + 1/(n_{i+1} + 1).$$

Ce qui démontre la première partie du lemme.

La seconde partie provient du fait que les suites  $(c(g_{2i}))_{i \geq 1}$  et  $(c(g_{2i+1}))_{i \geq 1}$  sont des suites d'entiers positifs strictement croissantes.  $\square$

Revenons à présent à la démonstration de notre inégalité. Considérons un paramétrage par longueurs d'arcs  $(r(s))_{s \in \mathbb{R}}$  de la géodésique orientée  $(\infty x)$ . Si la suite  $(n_i)_{i \geq 1}$  contient une infinité de termes  $\geq 3$ , d'après les lemmes 3.5 et 3.6, il existe une suite non bornée  $(s_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{R}^+$  telle que

$$\pi(r(s_n)) \in \pi(H_{3/2}).$$

Donc  $h(x) \geq 3/2$ , ce qui entraîne en particulier  $h(x) > \sqrt{5}/2$ .

Sinon, quitte à remplacer  $x$  par  $\gamma_i^{-1}(x)$  avec  $i \geq 1$ , deux cas se présentent :

- ou bien la suite  $(n_i)_{i \geq 1}$  contient une infinité de termes égaux à 2 et  $1 \leq n_i \leq 2$  pour tout  $i \geq 1$ ,
- ou bien tous les termes de la suite  $(n_i)_{i \geq 1}$  sont égaux à 1.

Dans le premier cas, d'après les lemmes 3.5 et 3.6, il existe une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  non bornée de  $\mathbb{R}^+$  telle que

$$\pi(r(s_n)) \in \pi(H_{7/6}).$$

Donc  $h(x) \geq 7/6$ , et en particulier,  $h(x) > \sqrt{5}/2$ .

Dans le second cas,  $x$  est relié au nombre d'or. Plus précisément, on a  $\mathcal{T}_1(x) = \mathcal{N}$ , donc  $h(x) = h(\mathcal{N})$  et, d'après la première partie de la démonstration,  $h(x) = \sqrt{5}/2$ .  $\square$

Remarquons que, comme nous l'avons vu à la fin du paragraphe II.4, la projection sur  $S$  de l'axe de l'isométrie hyperbolique  $\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}$  est la plus courte géodésique compacte de  $S$ . Il résulte de la démonstration du théorème 3.3, que c'est aussi celle qui monte le moins haut dans la cuspide  $\pi(H_1^+)$ .

Il nous reste à démontrer le théorème 3.4.

*Démonstration du théorème 3.4.* Soit  $x$  un irrationnel. Comme nous l'avons déjà remarqué,  $\nu(x)$  et  $h(x)$  sont liés par la relation :

$$\nu(x) = 1/(2h(x)).$$

Donc  $x$  est mal approché si et seulement si  $x$  est géométriquement mal approché. Rappelons que, d'après le corollaire 2.2, cette propriété est équivalente au fait que le rayon  $\pi([z, x))$  soit borné.

Non (i)  $\Rightarrow$  non (ii). Supposons que la suite  $(n_i)_{i \geq 1}$  ne soit pas bornée. Pour tout  $t > 0$ , il existe une sous-suite  $(n_{i_k})_{k \geq 1}$  dont les termes sont tous  $\geq 2t$ . Soit  $(r(s))_{s \in \mathbb{R}}$  un paramétrage par longueurs d'arcs de la géodésique orientée  $(\infty x)$ . D'après les lemmes 3.5 et 3.6, il existe une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{R}^+$  convergeant vers  $+\infty$  telle que

$$\pi(r(s_n)) \in \pi(H_t).$$

On en déduit que  $h(x)$  est supérieur à  $t$  pour tout  $t > 0$  et donc que  $x$  n'est pas géométriquement mal approché.

Non (ii)  $\Rightarrow$  non (i). Supposons que  $\pi([i, x))$  ne soit pas borné. Pour tout entier  $k \geq 2$  la surface  $S$  privée de la cuspide  $\pi(H_k^+)$  est bornée donc il existe  $K \geq 2$  tel que pour tout  $k \geq K$  (figure 16)

$$\pi([i, x)) \cap \pi(H_k) \neq \emptyset.$$

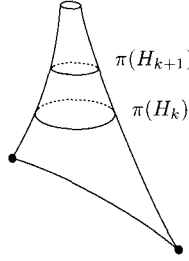


FIGURE 16

Sur  $\mathbb{H}$ , cette propriété se traduit par l'existence d'une suite  $(g_k)_{k \geq K}$  de  $\Gamma$  vérifiant

$$g_k^{-1}([i, x)) \cap H_k \neq \emptyset.$$

Les coefficients de l'homographie  $g_k$  sont des entiers donc  $\text{Im } g_k^{-1}(i) \leq 1$ . Le rayon  $g_k^{-1}([i, x))$  coupe donc  $H_k$  en deux points, ce qui entraîne l'inégalité

$$|\text{Re}(g_k^{-1}(i)) - g_k^{-1}(x)| > k.$$

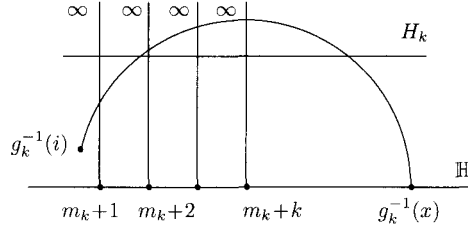


FIGURE 17

Ce rayon rencontre donc au moins  $k$  géodésiques verticales de la forme (figure 17)

$$((m_k + 1)\infty), ((m_k + 2)\infty), \dots, ((m_k + k)\infty).$$

Par conséquent, le rayon  $[i, x)$  rencontre  $k$  lignes de Farey consécutives

$$g_k T_1^{m_k+1}(0\infty), \dots, g_k T_1^{m_k+k}(0\infty).$$

En revenant à la construction géométrique du développement en fractions continues exposée dans le paragraphe II.3, on obtient que pour tout  $k \geq K$ , il existe  $n_i \geq k$ .  $\square$

#### 4. Commentaire

L'approche géométrique des nombres, telle que nous la présentons dans le paragraphe VII.3, permet de retrouver d'autres résultats classiques notamment sur le spectre de Markov, en reliant cet objet arithmétique aux longueurs des géodésiques compactes et simples du quotient de  $\mathbb{H}$  par le groupe  $\Gamma(2)$ , introduit dans le chapitre II ([14], [32], [51]). Elle permet également de formuler en termes de dynamique des questions de théorie des nombres. Par exemple, citons la question ouverte portant sur le caractère mal approché des nombres algébriques  $x$  de degré  $n \geq 3$  qui revient, sur la surface modulaire, à se demander si les rayons  $\pi([i, x))$  sont bornés.

Cette approche, dont un des textes fondateurs est la thèse de S. Patterson ([45]), s'adapte aux groupes kleinien  $\Gamma$  géométriquement finis agissant sur une variété de Hadamard pincée [35]. Elle élargit donc le champ de la théorie des approximations diophantiennes, en remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $L(\Gamma)$  et  $\mathbb{Q}$  par l'orbite d'un point parabolique.

La théorie métrique des approximations peut être également abordée sous cet angle géométrique, et être généralisée, le rôle de la mesure de Lebesgue étant alors joué par une mesure de Patterson ([46], [57]). Ce point de vue permet par exemple d'obtenir une version générale du théorème de



Khintchine dont l'énoncé classique porte sur l'équivalence entre la convergence (respectivement divergence) de la série  $\sum_{n \geq 1} \Psi(n)$ , où  $\Psi$  est une fonction décroissante, strictement positive, et le fait que la mesure de Lebesgue de l'ensemble des réels  $x$  approchés par une suite de rationnels  $(p_n/q_n)_{n \geq 1}$  vérifiant  $|x - p_n/q_n| \leq \Psi(q_n)/q_n$  soit nulle (respectivement pleine).

À l'initiative de S. Dani et G. Margulis, cette approche a été également développée pour résoudre des problèmes d'approximations diophantiennes dans  $\mathbb{R}^n$  ([55, Chapter IV], [41]). Le système dynamique mis en jeu dans ce contexte est l'action d'un groupe fermé de  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  sur l'espace symétrique  $M^n = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ . Une belle illustration de l'efficacité de ce changement de point de vue est la démonstration de la conjecture d'Oppenheim qui porte sur les formes quadratiques irrationnelles, non dégénérées et indéfinies de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ), et affirme que si  $Q$  est une telle forme, alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $v \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$  tel que  $|Q(v)| \leq \varepsilon$ . Sa démonstration, due à G. Margulis, repose sur la description topologique des orbites du groupe  $\mathrm{SO}^0(p, q)$  sur  $M^n$ , où  $(p, q)$  est la signature de  $Q$  ([4, appendice de E. Breuillard], [28], [42], [55]). Dans le même esprit, G. Margulis a montré que la conjecture de Hardy-Littlewood, qui énonce que pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , il existe des suites d'entiers  $(q_n)_{n \geq 1}, (p_n)_{n \geq 1}, (r_n)_{n \geq 1}$ , avec  $q_n > 0$ , telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n |x - p_n/q_n| |y - r_n/q_n| = 0$ , est reliée aux orbites du groupe  $D$  des matrices  $3 \times 3$  diagonales de la forme  $(e^{t_1+t_2}, e^{-t_1}, e^{-t_2})$  sur  $M^3$  [55, section 30]. À l'heure où nous écrivons ce texte, cette méthode n'a pas (encore) permis d'apporter une réponse à cette conjecture mais a enrichi le domaine des systèmes dynamiques d'une question ouverte à savoir : les orbites bornées de  $D$  sur  $M^3$  sont-elles compactes ?

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ARNOUX – « Le codage du flot géodésique sur la surface modulaire », *Enseign. Math. (2)* **40** (1994), no. 1-2, p. 29–48.
- [2] E. ARTIN – « Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen », *Mathematisches Seminar, Hamburg* (1924), p. 171–175.
- [3] L. AUSLANDER, L. GREEN & F. HAHN – *Flows on homogeneous spaces*, Annals of Mathematics Studies, vol. 53, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [4] M. BABILLOT – « Points entiers et groupes discrets : de l'analyse aux systèmes dynamiques », in *Rigidité, groupe fondamental et dynamique*, Panoramas & Synthèses, vol. 13, Société Mathématique de France, Paris, 2002, avec un appendice d'Emmanuel Breuillard, p. 1–119.
- [5] W. BALLMANN, M. GROMOV & V. SCHROEDER – *Manifolds of non-positive curvature*, Progress in Math., vol. 61, Birkhäuser, Basel, 1985.
- [6] A. F. BEARDON – *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Math., vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [7] T. BEDFORD, M. KEANE & C. SERIES (éds.) – *Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces*, Oxford Science Publications, New York, The Clarendon Press Oxford University Press, 1991, Papers from the Workshop on Hyperbolic Geometry and Ergodic Theory held in Trieste, April 17–28, 1989.
- [8] M. BERGER & B. GOSTIAUX – *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2<sup>e</sup> édn., Mathématiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1992.
- [9] F. BONAHOE & J.-P. OTAL – « Variétés hyperboliques à géodésiques arbitrairement courtes », *Bull. London Math. Soc.* **20** (1988), no. 3, p. 255–261.

- [10] M. BOURDON – « Structure conforme au bord et flot géodésique d'un  $CAT(-1)$ -espace », *Enseign. Math. (2)* **41** (1995), no. 1-2, p. 63–102.
- [11] B. H. BOWDITCH – « Geometrical finiteness with variable negative curvature », *Duke Math. J.* **77** (1995), no. 1, p. 229–274.
- [12] R. BROUZET & H. BOUALEM – *La planète R – Voyage au pays des nombres réels*, Dunod, Paris, 2002.
- [13] M. P. DO CARMO – *Riemannian geometry*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser, Boston, MA, 1992.
- [14] J. W. S. CASSELS – *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 45, Cambridge University Press, New York, 1957.
- [15] J.-P. CONZE & Y. GUIVARC'H – « Densité d'orbites d'actions de groupes linéaires et propriétés d'équidistribution de marches aléatoires », in *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, Springer, Berlin, 2002, p. 39–76.
- [16] F. DAL'BO – « Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages », *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **30** (1999), no. 2, p. 199–221.
- [17] F. DAL'BO – « Topologie du feuilletage fortement stable », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 3, p. 981–993.
- [18] F. DAL'BO, J.-P. OTAL & M. PEIGNÉ – « Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis », *Israel J. Math.* **118** (2000), p. 109–124.
- [19] F. DAL'BO & M. PEIGNÉ – « Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées sur la surface modulaire en courbure non constante », in *Méthodes des opérateurs de transfert : transformations dilatantes de l'intervalle et dénombrement de géodésiques fermées*, Astérisque, vol. 238, Société Mathématique de France, Paris, 1996, p. 111–177.
- [20] F. DAL'BO & M. PEIGNÉ – « Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting », *J. reine angew. Math.* **497** (1998), p. 141–169.
- [21] F. DAL'BO & A. N. STARKOV – « On noncompact minimal sets of the geodesic flow », *J. Dynam. Control Systems* **8** (2002), no. 1, p. 47–64.
- [22] S. G. DANI – « Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation », *J. reine angew. Math.* **359** (1985), p. 55–89.

- [23] J. DIEUDONNÉ (éd.) – *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900*, 2<sup>e</sup> éd., Hermann, Paris, 1986.
- [24] P. EBERLEIN – « Geodesic flows on negatively curved manifolds. I », *Ann. of Math. (2)* **95** (1972), p. 492–510.
- [25] P. EBERLEIN – « Geodesic flows on negatively curved manifolds. II », *Trans. Amer. Math. Soc.* **178** (1973), p. 57–82.
- [26] P. EBERLEIN & B. O'NEILL – « Visibility manifolds », *Pacific J. Math.* **46** (1973), p. 45–109.
- [27] D. FERTE – « Flot horosphérique des repères sur les variétés hyperboliques de dimension 3 et spectre des groupes kleinien », *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **33** (2002), no. 1, p. 99–123.
- [28] É. GHYS – « Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes », in *Séminaire Bourbaki, vol. 1991/92*, Astérisque, vol. 206, Société Mathématique de France, Paris, 1992, Exp. N° 747, p. 93–136.
- [29] É. GHYS & P. DE LA HARPE – « La propriété de Markov pour les groupes hyperboliques », in *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988)*, Progress in Math., vol. 83, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, p. 165–187.
- [30] C. GODBILLON – *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
- [31] W. H. GOTTSCHALK & G. A. HEDLUND – *Topological dynamics*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 36, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1955.
- [32] A. HAAS – « Diophantine approximation on hyperbolic Riemann surfaces », *Acta Math.* **156** (1986), no. 1-2, p. 33–82.
- [33] P. DE LA HARPE – « Free groups in linear groups », *Enseign. Math. (2)* **29** (1983), no. 1-2, p. 129–144.
- [34] G. A. HEDLUND – « Fuchsian groups and transitive horocycles », *Duke Math. J.* **2** (1936), no. 3, p. 530–542.
- [35] S. HERSONSKY & F. PAULIN – « Hausdorff dimension of Diophantine geodesics in negatively curved manifolds », *J. reine angew. Math.* **539** (2001), p. 29–43.
- [36] S. KATOK – *Fuchsian groups*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [37] A. Y. KHINTCHINE – *Continued fractions*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1963.

- [38] M. KULIKOV – « The horocycle flow without minimal sets », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), no. 6, p. 477–480.
- [39] S. P. LALLEY – « Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, non-Euclidean tessellations and their fractal limits », *Acta Math.* **163** (1989), no. 1-2, p. 1–55.
- [40] D. D. LONG & A. W. REID – « Pseudomodular surfaces », *J. reine angew. Math.* **552** (2002), p. 77–100.
- [41] G. A. MARGULIS – « Dynamical and ergodic properties of subgroup actions on homogeneous spaces with applications to number theory », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990)*, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991, p. 193–215.
- [42] D. W. MORRIS – *Ratner's theorems on unipotent flows*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2005.
- [43] P. J. NICHOLLS – *The ergodic theory of discrete groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 143, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [44] P. PANSU – « Le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative », in *Séminaire Bourbaki, vol. 1990/91*, Astérisque, vol. 201–203, Société Mathématique de France, Paris, 1991, Exp. N° 738, p. 269–298.
- [45] S. J. PATTERSON – « Diophantine approximation in Fuchsian groups », *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **282** (1976), no. 1309, p. 527–563.
- [46] S. J. PATTERSON – « The limit set of a Fuchsian group », *Acta Math.* **136** (1976), no. 3-4, p. 241–273.
- [47] H. RADEMACHER – *Lectures on elementary number theory*, Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1977, Reprint of the 1964 original.
- [48] M. RATNER – « Raghunathan's conjectures for  $SL(2, \mathbb{R})$  », *Israel J. Math.* **80** (1992), no. 1-2, p. 1–31.
- [49] T. ROBLIN – *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.), vol. 95, Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [50] C. SERIES – « Symbolic dynamics for geodesic flows », *Acta Math.* **146** (1981), no. 1-2, p. 103–128.
- [51] C. SERIES – « The geometry of Markoff numbers », *Math. Intelligencer* **7** (1985), no. 3, p. 20–29.

- [52] C. SERIES – « The modular surface and continued fractions », *J. London Math. Soc. (2)* **31** (1985), no. 1, p. 69–80.
- [53] J. G. SINAI – « Markov partitions and U-diffeomorphisms », *Funkcional. Anal. i Priložen* **2** (1968), no. 1, p. 64–89.
- [54] A. N. STARKOV – « Fuchsian groups from the dynamical viewpoint », *J. Dynam. Control Systems* **1** (1995), no. 3, p. 427–445.
- [55] A. N. STARKOV – *Dynamical systems on homogeneous spaces*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 190, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2000, translated from the 1999 Russian original by the author.
- [56] D. SULLIVAN – « The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **50** (1979), p. 171–202.
- [57] D. SULLIVAN – « Disjoint spheres, approximation by imaginary quadratic numbers, and the logarithm law for geodesics », *Acta Math.* **149** (1982), no. 3-4, p. 215–237.

## INDEX

- aire hyperbolique, 3
- cocycle de Busemann, 8, 128
- conjecture d'Oppenheim, 158
- conjecture de Hardy-Littlewood, 158
- cuspidé, 27
- développement en fractions continues, 62
- domaine de Dirichlet, 17
- ensemble limite, 20
- ensemble non errant, 80, 114
- feuilletage fortement stable, 120
- flot, 75
- flot géodésique, 77, 78, 130, 132
- flot horocyclique, 107, 109, 135, 136
- forme bilinéaire de Lorentz, 123
- géodésique, 3, 88, 125
- groupe de congruence modulo 2, 56
- groupe de Schottky, 40
- groupe de Schottky généralisé, 43
- groupe fuchsien, 16
- groupe fuchsien élémentaire, 21
- groupe fuchsien convexe-cocompact, 30
- groupe fuchsien géométriquement fini, 30
- groupe kleinien, 36
- groupe lorentzien, 128
- groupe modulaire, 53
- horocycle, 9, 128
- horodisque, 9
- isométrie elliptique, 13, 126
- isométrie hyperbolique, 13, 126
- isométrie parabolique, 13, 126
- isométries positives, 11, 125
- lemme du ping-pong, 73
- ligne de Farey, 63
- longueur hyperbolique, 2
- mélange topologique, 91
- mesure de Patterson, 38
- nombre d'or, 72, 149
- pavage de Farey, 62
- point conique, 23
- point divergent, 76
- point errant, 75
- point géométriquement mal approché, 144
- point horocyclique, 22
- point parabolique, 24
- réel mal approché, 150
- réel quadratique, 70
- région de Nielsen, 29
- série de Poincaré, 38
- semi-flot, 75
- semi-trajectoire, 75
- spectre de Markov, 157
- spectre des longueurs, 88
- théorème de Khintchine, 158
- trajectoire, 75
- variété de Hadamard pincée, 36