CLASSES PREPARATOIRES
AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

E. Ramis / C. Deschamps / J. Odoux

ANALYSE 2.

Exercices
avec solutions

MASSON

ANALYSE

EXERCICES AVEC SOLUTIONS

2

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Des mêmes auteurs :

ANALYSE. EXERCICES AVEC SOLUTIONS, par E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. Tome 1. — 1991, 2^{e} tirage, 200 pages.

ALGÈBRE. EXERCICES AVEC SOLUTIONS, par E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. 1988, 200 pages.

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, par E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX.
Volume 1. — Algèbre. 1992, 2^{e} édition, 3^{e} tirage, 448 pages.
Volume 2. — Algèbre et applications à la géométrie. 1990, 3^{e} tirage corrigé, 312 pages.
Volume 3. — Topologie et éléments d'analyse. 1991, 3^{e} édition revue et augmentée, 384 pages.
Volume 4. — Séries et équations différentielles. 1990, 2^{e} édition, 2^{e} tirage, 328 pages.
Volume 5. — Applications de l'analyse à la géométrie. 1992, 2^{e} édition révisée et complétée, 328 pages.

Dans la collection Mathématiques Supérieures et Spéciales :

TOPOLOGIE, par H. LEHNING. 1985, 128 pages.

DÉRIVATION, avec exercices, par H. LEHNING, D. JAKUBOWICZ. 1987, 184 pages.

INTÉGRATION ET SOMMATION, avec exercices, par H. LEHNING. 1985, 128 pages.

ANALYSE EN DIMENSION FINIE, avec exercices, par H. LEHNING. 1986, 192 pages.

ANALYSE FONCTIONNELLE, par H. LEHNING. 1988, 256 pages.

Autres ouvrages :

ANALYSE RÉELLE ET COMPLEXE, par W. RUDIN. Traduit de l'anglais par N. DHOMBRES et F. HOFFMAN. 1992, 6^{e} tirage, 408 pages.

MATHÉMATIQUES POUR LA LICENCE. Second cycle des universités et écoles d'ingénieurs, par J.P. FERRIER. 1992, 2^{e} tirage, 232 pages.

Classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques

ANALYSE

EXERCICES AVEC SOLUTIONS

2

E. Ramis
Inspecteur général de l'Instruction Publique

C. Deschamps
Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand

J. Odoux
Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Champollion, à Grenoble

2[e] tirage

MASSON

Paris Milan Barcelone Bonn
1993

ISBN : 2-225-80578-4

MASSON S.A.	120, bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
MASSON S.p.A.	Via Statuto 2/4, 20121 Milano
MASSON S.A.	Avenida Principe de Asturias 20, 08012 Barcelona
DÜRR und KESSLER	Maarweg, 30, 5342 Rheinbreitbach b. Bonn

Avant-propos

Le présent volume est le second d'une série d'excercices avec solutions développées qui s'adresse aux étudiants des classes préparatoires aux Grandes Ecoles scientifiques et du premier cycle universitaire.

Les objectifs d'un recueil de ce type sont bien connus : il s'agit essentiellement d'aider le lecteur à évaluer ses connaissances et à les mettre en œuvre; ceci implique aussi bien une réflexion sur la nature des concepts et une prise de conscience des limites de l'outil constitué par le cours que la recherche d'une maîtrise des techniques de calcul.

Sauf rares exceptions, nous n'avons donné de chaque question qu'une solution, celle qui nous a paru s'exposer le plus brièvement ou offrir les plus larges prolongements; il ne s'agit naturellement pas d'une solution exhaustive et le lecteur aura toujours intérêt à poursuivre le plus loin possible sa propre démarche.

Nous avons explicité tous les raisonnements et la plupart des calculs, n'hésitant pas à aller, si nécessaire, jusqu'à l'utilisation d'une calculatrice programmable; il nous est cependant arrivé d'omettre intentionnellement quelques intermédiaires pour laisser au lecteur le soin de les rétablir.

Deux tomes sont consacrés à l'Analyse. Le premier comporte cinq chapitres : réels et suites, topologie, fonctions d'une variable réelle, intégrale, séries numériques. Ces deux dernières questions sont reprises dans le présent tome 2; par ailleurs celui-ci traite des suites et séries d'applications, des séries entières et trigonométriques, des fonctions de plusieurs variables et des équations différentielles.

Nous remercions les lecteurs qui ont bien voulu nous faire part de leurs critiques et suggestions concernant notre premier volume. Nous espérons que le second bénéficiera de la même attention.

Les Auteurs

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE DU TOME 1

SÉRIES

1.1. SERIES NUMERIQUES

$\boxed{1.1.1}$ Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

A tout $n \in \mathbb{N}^*$ associons $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$. Nous avons :

$$A_{2n} - A_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k).$$

Somme de n éléments distincts de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$ est au moins égal à la somme des n premiers éléments de $\mathbb{N}^*$, qui est $n(n+1)/2$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_{2n} - A_n \geq \frac{n+1}{8n} \geq \frac{1}{8}$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge ; la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

$\boxed{1.1.2}$ Nature de la série $\sum_{n\geq 1} a_n$, où $a_n = \int_0^{1/n} \frac{\cos^2 t \operatorname{Log}(1 + \sqrt[3]{t})}{\sqrt[3]{1+t}} dt$

Il s'agit d'une série à termes réels strictement positifs.

Par la formule de la moyenne, on constate que, si l'on pose :

$$b_n = \int_0^{1/n} \operatorname{Log}(1 + \sqrt[3]{t}) dt$$

on a $b_n > 0$, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n/b_n est compris entre les bornes sur $[0, 1/n]$ de la fonction continue $\varphi : t \mapsto \frac{\cos^2 t}{\sqrt[3]{1+t}}$. En utilisant $\varphi(0) = 1$, on en déduit $a_n \sim b_n$ au voisinage de $+\infty$.

En utilisant $0 \leq \operatorname{Log}(1 + \sqrt[3]{t}) \leq \sqrt[3]{t}$ pour tout $t \in [0, 1/n]$, on obtient : $b_n = O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$ au voisinage de $+\infty$; $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, et donc $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

$\boxed{1.1.3}$ Soient α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série $\sum a_n^\alpha$ converge. Montrer que la série $\sum a_n$ converge, et que :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)^\alpha \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^\alpha .$$

• Il s'agit d'une conséquence immédiate du fait qu'est vraie, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ l'assertion :

$$\forall(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^{n+1}\qquad (a_0+\dots+a_n)^\alpha\leqslant a_0^\alpha+\dots+a_n^\alpha \qquad (P_n)$$

• Il est clair que (P_0) est vraie.

• Preuve de (P_1). Vérifier (P_1) équivaut à montrer que l'application $f:(1+t)^\alpha-1-t^\alpha$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ est à valeurs négatives. On a :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*\qquad f'(t)=\alpha\big((1+t)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}\big).$$

Comme $x\longmapsto x^{\alpha-1}$, $\alpha-1<0$, est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(t)\leqslant 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$; f est décroissante ; or $f(0)=0$. □

• Preuve de $(P_n)\Rightarrow(P_{n+1})$, $n\geqslant 1$. En utilisant (P_1) et (P_n) :

$$\big((a_0+\dots+a_n)+a_{n+1}\big)^\alpha\leqslant(a_0+\dots+a_n)^\alpha+a_{n+1}^\alpha\leqslant(a_0^\alpha+\dots+a_n^\alpha)+a_{n+1}^\alpha. \quad □$$

Remarque. La convergence de $\sum a_n$ peut se vérifier directement. En effet, d'après la convergence de $\sum a_n^\alpha$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$. Il existe donc $n\in\mathbb{N}$ tel que $a_n<1$ pour tout $n\geqslant N$, et donc $a_n\leqslant a_n^\alpha$ pour tout $n\geqslant N$. □

1.1.4 Soit $a\in\mathbb{R}_+$ donné. Prouver la convergence de la série $\sum u_n$, où où $u_n=E\left(\dfrac{a+2^n}{2^{n+1}}\right)$, et calculer sa somme S (E est la fonction partie entière).

• La proposition est triviale si $0\leqslant a<1$ (les u_n sont tous nuls et $S=0$). Nous pouvons donc nous limiter à $a\geqslant 1$.

• Il existe un unique $N\in\mathbb{N}$ tel que $2^N\leqslant a<2^{N+1}$. On constate que, pour tout entier $n>N$ on a $a+2^n<2^{n+1}$ et donc $u_n=0$. La convergence de $\sum u_n$ en résulte : en outre $S=\sum\limits_{n=0}^{N}u_n$.

Pour $n\in\{0,1,\dots,N\}$ donné, u_n est le nombre des $p\in\mathbb{N}^*$ tels que $p\leqslant\dfrac{a+2^n}{2^{n+1}}$ i.e. tels que $2^n(2p-1)\in A$, où $A=\{1,2,\dots,E(a)\}$.

Tout entier $m\geqslant 1$ s'exprimant d'une et une seule façon sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un nombre impair, $\varphi:(n,p)\longmapsto 2^n(2p-1)$ est une bijection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$.

Pour $n\in\{0,1,\dots,N\}$ donné, on a donc :

$$u_n=\operatorname{Card}A_n\,,\ \text{où } A_n=\{q\in A\mid \exists p\in\mathbb{N}^*\quad \varphi(n,p)=q\}$$

et les A_n sont deux à deux disjoints, si bien que :

$$S = \sum_{n=0}^{N} u_n = \text{Card} \bigcup_{n=0}^{N} A_n = \text{Card } A = E(a),$$

la formule $S = E(a)$ valant d'ailleurs si $0 \leq a < 1$.

$\boxed{1.1.5}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels admettant 0 pour limite.

Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$, où $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$ sont de même nature ; en cas de convergence, comparer leurs sommes.

Il s'agit de deux séries à termes positifs. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - na_n \tag{1}$$

1°) <u>1er cas</u> : $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Soit A sa somme. La suite croissante $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} b_k$, majorée par A, admet une limite ; $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, et sa somme B vérifie $B \leq A$; de (1) on déduit $\lim_{n\to+\infty} (n\,a_n) = A - B$, ce qui exige $A = B$ (sans quoi on aurait $a_n \sim \frac{A-B}{n}$ et $\sum a_n$ divergerait).

<u>2ème cas</u> : $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

– Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{\ell=1}^{k} b_{n+\ell}$ s'écrit :

$$\sum_{\ell=1}^{k} (n+\ell)\left(a_{n+\ell-1} - a_{n+\ell}\right) \geq n \sum_{\ell=1}^{k} \left(a_{n+\ell-1} - a_{n+\ell}\right)$$

et on a : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} b_{n+\ell} \geq n\,a_n - n\,a_{n+k}$. $\qquad (2)$

Comme on dispose de $\lim_{k\to+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} b_{n+k} = \sum_{m=n+1}^{+\infty} b_m$ et de $\lim_{k\to+\infty} a_{n+k} = 0$, on obtient, en passant à la limite dans (2), et en tenant compte de $a_n \geq 0$:

$$0 \leq n\,a_n \leq \sum_{m=n+1}^{+\infty} b_m.$$

— Faisons tendre n vers $+\infty$. Au titre de somme d'une série reste d'une série convergente, on a : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=n+1}^{+\infty} b_m = 0$; d'où $\lim_{n\to+\infty} (n\,a_n) = 0$.

De (1) on déduit alors que $\sum a_n$ converge, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

2°) Compte tenu des résultats déjà obtenus, on peut affirmer que les deux séries sont de même nature, et qu'en cas de convergence elles ont la même somme.

$\boxed{1.1.6}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs. Comparer les natures des séries $\sum_{n\geq 1} a_n$, $\sum_{n\geq 1} b_n$ et $\sum_{n\geq 1} c_n$, où $b_n = n\,a_{n^2}$ et $c_n = 2^n a_{2^n}$.

1°) En utilisant : (a_n) est décroissante, et en comparant le nombre de termes de chaque somme, on vérifie que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$(k+1)a_{(k+1)^2} \leqslant \sum_{n=k^2+1}^{(k+1)^2} a_n \leqslant 3ka_{k^2}$$

i.e. $b_{k+1} \leqslant \sum_{n=k^2+1}^{(k+1)^2} a_n \leqslant 3b_k$.

On en déduit que, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=2}^{N+1} b_n \leqslant \sum_{n=2}^{(N+1)^2} a_n \leqslant 3\sum_{n=1}^{N} b_n.$$

— Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, on a $\sum_{n=1}^{N+1} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$; $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge au titre de série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées.

— Si $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, on a $\sum_{n=1}^{N} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{(N+1)^2} a_n \leqslant a_1 + 3\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$; $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge pour la même raison que ci-dessus.

En conclusion, $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ sont de même nature.

2°) Ici : $2^k a_{2^{k+1}} \leqslant \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_n \leqslant 2^k a_{2^k}$

i.e. $\frac{1}{2}c_{k+1} \leqslant \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_n \leqslant c_k$.

En raisonnant comme au 1°), on constate que $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} c_n$ sont de même nature.

<u>Remarque</u>. En appliquant le 2°) à la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} 1/n^\alpha$, $\alpha>0$, on constate que celle-ci à la même nature que la série géométrique $\sum_{n\geq 1} (2^{1-\alpha})^n$, qui converge pour $\alpha > 1$.

$\boxed{1.1.7}$ Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, positive et croissante.

Montrer que les séries $\sum_{n\geq 1} a_n$, $\sum_{n\geq 1} b_n$ et $\sum_{n\geq 1} c_n$, où :

$$a_n = f(e^{-n}) \;;\; b_n = n\,f(e^{-n^2}) \;;\; c_n = \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

sont de même nature.

1°) L'application $t \mapsto f(e^{-t})$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ est continue, positive et décroissante ; $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est donc une suite décroissante de réels positifs ; d'après l'exercice précédent, $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ sont de même nature.

2°) Rappelons le résultat du cours : soit $g : [\alpha,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une application positive et décroissante ; alors l'intégrale impropre $\int_\alpha^{+\infty} g(t)dt$ et la série $\sum_{n\geq p} g(n)$, où $p\in\mathbf{N}$ est fixé tel que $p\geq\alpha$, sont de même nature

– En appliquant à $g(t) = f(e^{-t})$, avec $\alpha = p = 1$, on constate que la nature de $\sum_{n\geq 1} a_n$ est celle de $I = \int_1^{+\infty} f(e^{-t})dt$.

– Comme $u \mapsto \operatorname{Log} u$ est un C^1-difféomorphisme croissant de $[e,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, la nature de I est celle de $J = \int_e^{+\infty} \frac{1}{u}\, f\left(\frac{1}{u}\right)du$.

L'application $u \mapsto \frac{1}{u}\, f\left(\frac{1}{u}\right)$ étant décroissante sur $[e,+\infty[$ (au titre de produit de deux applications positives et décroissantes), la propriété rappelée s'applique : J et $\sum_{n\geq 3} c_n$ sont de même nature. □

$\boxed{1.1.8}$ Soient P la partie de $\mathbf{N}$ constituée des nombres premiers, et $\varphi : n \mapsto p_n$ la bijection croissante $\mathbf{N} \mapsto P$ définie par :

$$p_0 = 2 \ ; \ p_{n+1} = \min(P\setminus \{p_0,\dots,p_n\}) \text{ pour tout } n\in\mathbf{N}.$$

1°) Dans cette question, on donne $\alpha\in\mathbf{R}$, $\alpha > 1$.

Montrer que la série $\sum 1/p_n^\alpha$ converge. A tout $n\in\mathbf{N}$, on associe :

$$\theta_n = \prod_{k=0}^{n} (1 - 1/p_k^\alpha).$$

Montrer qu'il existe $\theta = \lim_{n\to+\infty} \theta_n$, que $\theta\in\mathbf{R}_+^*$, que $\frac{1}{\theta} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha}$.

2°) Quelle est la nature de la série $\sum 1/p_n$?

– Rappelons que $\zeta(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^t}$ est défini si, et seulement si $t > 1$.

– Notons que p_n est le $(n+1)$-ième nombre premier, et rappelons qu'à tout $m\in\mathbf{N}^*$ on peut associer une unique suite de naturels $(\nu_k)_{k\in\mathbf{N}}$, presque nulle, telle que : $m = \prod_{k=0}^{+\infty} p_k^{\nu_k}$.

1°) a) On établit par récurrence : $p_n \geq n+2$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

D'où : $\quad 0 < p_n^{-\alpha} \leq (n+2)^{-\alpha} < 1$ pour tout $n\in\mathbf{N}$. (1)

Puisque $\alpha > 1$, $\sum(n+2)^{-\alpha}$ converge ; $\sum p_n^{-\alpha}$ converge donc. □

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\theta_n>0$ d'après (1), et on dispose de :

$$\operatorname{Log}\theta_n=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Log}(1-p_k^{-\alpha})$$

On a : $\operatorname{Log}(1-p_k^{-\alpha})\sim -p_k^{-\alpha}$ au voisinage de $+\infty$. Comme la série à termes négatifs $\sum_{k\geq 0}(-p_k^{-\alpha})$ est convergente, la série $\sum_{k\geq 0}\operatorname{Log}(1-p_k^{-\alpha})$ est convergente ; il existe donc $\lambda=\lim_{n\to+\infty}(\operatorname{Log}\theta_n)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. De la continuité de la fonction exponentielle, on déduit l'existence de $e^\lambda=\lim_{n\to+\infty}\theta_n$, $e^\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. □

c) Jusqu'à nouvel ordre, $n\in\mathbb{N}$ est fixé. On a :

$$1/\theta_n=\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{1-p_k^{-\alpha}}\ .$$

Pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, $0<p_k^{-\alpha}<1$ entraîne :

$$\frac{1}{1-p_k^{-\alpha}}=\sum_{\nu_k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_k^{\alpha\nu_k}}\ .$$

En utilisant le théorème classique sur le produit d'un nombre fini de séries numériques absolument convergentes, on obtient :

$$\frac{1}{\theta_n}=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\left(\sum_{\nu_0+\dots+\nu_n=\nu}\frac{1}{(p_0^{\nu_0}\dots p_n^{\nu_n})^\alpha}\right)$$

— Soit $\mu\in\mathbb{N}$. Nous disposons de la somme partielle $S_\mu\leqslant 1/\theta_n$, où :

$$S_\mu=\sum_{\nu=0}^{\mu}\left(\sum_{\nu_0+\dots+\nu_n=\nu}\frac{1}{(p_0^{\nu_0}\dots p_n^{\nu_n})^\alpha}\right)$$

S_μ est une somme finie de réels de la forme $1/m^\alpha$, $m\in\mathbb{N}^*$; notons $1/M^\alpha$ le plus petit d'entre eux. Comme chaque décomposition $m=\prod_{k=0}^{+\infty}p_k^{\nu_k}$ est unique, chacun des éléments $1/m^\alpha$ de la somme S_μ n'intervient qu'une fois ; le nombre de ces éléments est donc au plus M ; on a :

$$S_\mu\leqslant\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^\alpha}\leqslant\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^\alpha}$$

Comme un majorant commun à toutes les S_μ, $\mu\in\mathbb{N}$, est un majorant de $\frac{1}{\theta_n}$, on a:

$$\frac{1}{\theta_n}\leqslant\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^\alpha}\qquad(2)$$

— Pour $\mu\in\mathbb{N}$ assez grand, μ majore chacune des sommes finies $\sum_{k=0}^{+\infty}\nu_k$ associées aux décompositions des entiers m tels que $1\leqslant m\leqslant p_n$, et la somme S_μ contient tous les $1/m^\alpha$ correspondants, si bien que : $\sum_{m=1}^{p_n}\frac{1}{m^\alpha}\leqslant S_\mu$.

On a donc : $\displaystyle\sum_{m=1}^{p_n}\frac{1}{m^\alpha}\leqslant\frac{1}{\theta_n}\ .$ (3)

• Faisons maintenant tendre n vers $+\infty$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$. De (2) et (3) on déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\theta_n} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha} = \zeta(\alpha). \qquad \square$$

2°) Reprenons les notations du 1°) avec $\alpha = 1$; ici :

$$\theta_n = \prod_{k=0}^{n} (1 - 1/p_k).$$

On a : $p_k^{-1} \leqslant 1/2$, et donc $p_k^{-1} < 1$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On en déduit que restent vraies $\theta_n > 0$,

$$\frac{1}{\theta_n} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\sum_{\nu_0 + \dots + \nu_n = \nu} \frac{1}{p_0^{\nu_0} \dots p_n^{\nu_n}} \right)$$

et, en utilisant encore les S_μ :

$$\sum_{m=1}^{p_n} \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{\theta_n} \qquad (3)$$

(en revanche (2) n'a plus d'intérêt, son second membre étant infini).

• De la divergence de la série $\sum\limits_{m\geqslant 1} 1/m$, on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{m=1}^{p_n} \frac{1}{m} = +\infty$, et, compte tenu de (3) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\theta_n} = +\infty, \text{ i.e. } \lim_{n\to+\infty} \theta_n = 0.$$

• De $\operatorname{Log} \theta_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{Log}(1 - 1/p_k)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Log} \theta_n = -\infty$, on déduit la divergence de la série à termes négatifs $\sum\limits_{k\geqslant 0} \operatorname{Log}(1 - 1/p_k)$, et, en utilisant l'équivalence $\operatorname{Log}(1 - 1/p_k) \sim -1/p_k$, celle de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} (-1/p_k)$.

En conclusion, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1/p_n$ diverge.

1.1.9 Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs. Prouver de deux façons la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$, où

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n}$$

1°) En utilisant, après justification :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant e \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

2°) En se ramenant à l'étude de $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$, où $v_n = \frac{1}{n} \left(n! \prod\limits_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n}$.

1°) On vérifie que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$(k+1)^k = \prod_{i=1}^{k} \frac{(i+1)^i}{i^{i-1}} = \prod_{i=1}^{k} i\left(1+\frac{1}{i}\right)^i .$$

Or il est classique que $\left(1+\frac{1}{i}\right)^i \leqslant e$ pour tout $i\in\mathbb{N}^*$. On a donc :

$$(k+1)^k \leqslant e^k \prod_{i=1}^{k} i, \text{ et } 1 \leqslant \frac{e}{k+1}\left(\prod_{i=1}^{k} i\right)^{1/k},$$

et : $$u_k \leqslant \frac{e}{k+1}\left(\prod_{i=1}^{k} i\, a_i\right)^{1/k}.$$

En utilisant l'inégalité classique entre moyennes arithmétique et géométrique, on en déduit :

$$\forall k\in\mathbb{N}^* \quad u_k \leqslant \frac{e}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i\, a_i$$

D'où, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant e \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \sum_{i=1}^{k} i\, a_i \right\}.$$

On constate que le second membre de l'inégalité précédente s'écrit :

$$e \sum_{k=1}^{n} k\, a_k \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right).$$

D'où : $$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant e \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k .$$

Les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, à termes positifs, étant majorées, la série est convergente. □

2°) On sait (cf. exercice 5.2.6 de notre tome I) que la convergence $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ entraîne celle de $\sum_{n\geqslant 1} b_n$, où $b_n = \dfrac{a_1+2a_2+\dots+n\,a_n}{n(n+1)}$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n} k\, a_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\, a_k = \frac{n+1}{n} b_n \tag{1}$$

D'après $\frac{n+1}{n} b_n \sim b_n$ au voisinage de $+\infty$ et $b_n > 0$, la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ entraîne celle de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n} b_n$, et compte tenu de (1), celle de $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

— D'autre part : $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, \theta(n)$, avec $\lim_{n\to+\infty} \theta(n) = 1$.

D'où : $(n!)^{1/n} = \frac{n}{e}\, \mu(n)$, avec $\lim_{n\to+\infty} \mu(n) = 1$, et donc :

$v_n \sim u_n/e$ au voisinage de $+\infty$. □

$\boxed{1.1.10}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs, telle que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{a_n}$ converge. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note : $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1}c_n$, où $c_n=\frac{n^2a_n}{S_n^2}$, converge (on pourra utiliser l'exercice précédent).

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. D'où pour tout $n\geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n}c_k=\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2(S_k-S_{k-1})}{S_k^2}\leqslant\sum_{k=2}^{n}k^2\left(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}\right)$$

i.e. $$\sum_{k=2}^{n}c_k\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-k^2}{S_k}+\frac{2^2}{S_1}-\frac{(n+1)^2}{S_n},$$

et : $$\sum_{k=2}^{n}c_k\leqslant\frac{4}{S_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k+1}{S_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+2}{S_k}\qquad(1)$$

— D'après l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}\leqslant\frac{S_n}{n}\ \text{et}\ \frac{n}{S_n}\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{1/n}\qquad(2)$$

D'après l'exercice précédent, la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{a_n}$ entraîne celle de $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{1/n}$, et donc, compte tenu de (2), celle de $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n}{S_n}$.

D'après $\frac{2n+2}{S_n}\sim 2\frac{n}{S_n}$ au voisinage de $+\infty$, et $\frac{n}{S_n}>0$, celle-ci entraîne la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{2n+2}{S_n}$ et, compte tenu de (1), celle de $\sum\limits_{n\geq 1}c_n$. □

$\boxed{1.1.11}$ 1°) a) Montrer qu'il existe un $c\in\mathbb{R}_+^*$ tel que, pour toute suite $(a_k)_{k\geq 2}$ à valeurs dans $[0,1]$, et pour tout entier $n\geqslant 2$, on ait :

$$\sum_{k=2}^{n}a_k(a_k^{-1/k}-1)^2\leqslant c\qquad(1)$$

b) Montrer qu'il existe un $\gamma\in\mathbb{R}_+^*$ tel que, pour toute suite $(a_k)_{k\geq 2}$ à valeurs dans $[0,1]$, et pour tout entier $n\geqslant 2$, on ait :

$$\sum_{k=2}^{n}a_k^{1-1/k}\leqslant\sum_{k=2}^{n}a_k+\gamma\left(\sum_{k=2}^{n}a_k\right)^{1/2}\qquad(2)$$

2°) Soit $\sum a_n$ une série à termes réels positifs, convergente. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2}a_n^{1-1/n}$?

1°) a) Pour tout entier $k \geq 2$, on note f_k l'application positive et continue $[0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f_k(x) = x(x^{-1/k} - 1)^2$ si $x \in]0,1]$.

On a donc : $f_2(0) = 1$ et $f_k(0) = 0$ si $k \geq 3$.

Cette application admet en tout $x \in]0,1]$ la dérivée :

$$f_k'(x) = (x^{-1/k} - 1)\big((1-2/k)x^{-1/k} - 1\big).$$

On en déduit que f_k admet la borne supérieure μ_k :

— atteinte au point 0 si $k = 2$, et alors égale à : $\mu_2 = 1$;

— atteinte au point $(1-2/k)^k$ si $k \geq 3$, et alors égale à :

$$\mu_k = (1-2/k)^k \left(\frac{2}{k-2}\right)^2$$

On a : $\mu_k \sim e^{-2} \frac{4}{k^2}$ au voisinage de $+\infty$. La série à termes positifs $\sum_{k\geq 2} \mu_k$ est donc convergente.

• Soit $(a_k)_{k\geq 2}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. En utilisant :

$$\forall k \geq 2 \quad 0 \leq f_k(a_k) \leq \mu_k$$

on constate que la série $\sum_{k\geq 2} f_k(a_k)$ converge et que $\sum_{k=2}^{+\infty} f_k(a_k) \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \mu_k$.

On peut donc adopter : $c = \sum_{k=2}^{+\infty} \mu_k$, à condition de convenir que $a_k(a_k^{-1/k} - 1)^2$ désigne $f_k(a_k)$ même si $a_k = 0$.

b) On note : $b_k = \big(f_k(a_k)\big)^{1/2} = a_k^{1/2}(a_k^{-1/k} - 1)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité de Schwarz fournit :

$$\sum_{k=2}^{n} a_k^{1/2} b_k = \left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=2}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

et, compte tenu de (1) :

$$\sum_{k=2}^{n} a_k^{1-1/k} - \sum_{k=2}^{n} a_k \leq \left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right)^{1/2} \cdot \sqrt{c}$$

qui est (2) lorsqu'on adopte $\gamma = \sqrt{c}$.

2°) Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, on peut, quitte à remplacer $\sum a_n$ par une série tronquée, supposer $a_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\sum_{n\geq 2} a_n$ converge, les sommes partielles $\sum_{k=2}^{n} a_k$ admettent un majorant commun A. D'après (2), les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n\geq 2} a_n^{1-1/n}$ admettent le majorant $A + \gamma\sqrt{A}$; la série est donc convergente. □

$\boxed{1.1.12}$ Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, telles que $b_n \neq 0$ et $a_n + b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de la série $\sum \frac{a_n}{a_n+b_n}$ dans le cas où :

1°) la série $\sum a_n/b_n$ converge ?
2°) les séries $\sum a_n/b_n$ et $\sum (a_n/b_n)^2$ convergent ?

1°) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n+b_n}$ s'écrit $u_n = \dfrac{a_n/b_n}{1+a_n/b_n}$. La convergence de $\sum \dfrac{a_n}{b_n}$ entraînant $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$, on dispose de : $u_n \sim a_n/b_n$, au voisinage de $+\infty$ (1)

— Si a_n/b_n a un signe constant à partir d'un certain rang, on sait que (1) suffit pour que la convergence de $\sum a_n/b_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.

— Dans le cas contraire, on ne peut rien dire. Soit, par exemple, $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \sqrt{n+1}$. Le théorème des séries alternées permet d'affirmer que $\sum a_n/b_n$ converge. Par contre on a, pour tout $n\geqslant 1$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n+1}} = \frac{(-1)^n\sqrt{n+1}-1}{n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + v_n,\ \text{où } v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

On constate que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est absolument convergente, et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n/\sqrt{n}$ est semi-convergente. On en déduit que, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/n$, $\sum u_n$ est divergente.

2°) Ici $u_n = \dfrac{a_n}{b_n} - \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2 + w_n$, où $w_n = o\left(\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2\right)$

La convergence de la série $\sum (a_n/b_n)^2$, à termes positifs, entraîne l'absolue convergence de $\sum w_n$. On en déduit la convergence de $\sum u_n$.

Remarque. L'hypothèse $\sum a_n/b_n$ est convergente et $a_n/b_n \geqslant 0$, qui assure la convergence de $\sum u_n$ d'après le 1°), entraîne la convergence de $\sum (a_n/b_n)^2$. En effet, de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$, on déduit que, à partir d'un certain rang : $(a_n/b_n)^2 \leqslant a_n/b_n$.

1.1.13 Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$, où $a_n = \dfrac{\sin(\operatorname{Log} n)}{n}$.

$A(n)$ désignant $\sum\limits_{k=1}^{n} a_n$, nous allons montrer que $n \mapsto A(n)$ n'est pas une suite de Cauchy, et est donc une suite divergente ; il en résultera que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ est divergente.

• Soient, pour $\alpha\in\mathbb{N}$: $p(\alpha) = E\left(\exp(2\alpha\pi+\pi/6)\right)$ et $q(\alpha) = E\left(\exp(2\alpha\pi+5\pi/6)\right)$, où E désigne la fonction partie entière ; pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $p(\alpha) < n \leqslant q(\alpha)$, on a :

$$2\alpha\pi + \pi/6 \leqslant \operatorname{Log} n \leqslant 2\alpha\pi + 5\pi/6$$

et donc : $\sin(\operatorname{Log} n) \geqslant 1/2$ et $1/n \geqslant 1/q(\alpha)$. D'où :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N} \qquad A\big(q(\alpha)\big) - A\big(p(\alpha)\big) \geqslant \frac{q(\alpha)-p(\alpha)}{2q(\alpha)}$$

— Quand α tend vers $+\infty$, on a : $\dfrac{p(\alpha)}{q(\alpha)} \sim \dfrac{\exp(2\alpha\pi+\pi/6)}{\exp(2\alpha\pi+5\pi/6)}$

D'où : $\displaystyle \lim_{\alpha\to+\infty,\, \alpha\in\mathbb{N}} \frac{q(\alpha)-p(\alpha)}{2q(\alpha)} = \ell$, avec $\ell = \frac{1}{2}\big(1-\exp(-2\pi/3)\big) > 0$.

— Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$A\big(q(\alpha)\big) - A\big(p(\alpha)\big) \geqslant \ell/2 \text{ pour tout } \alpha \geqslant \mathbb{N}. \qquad \square$$

$\boxed{1.1.14}$ Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, avec : $a_n = \dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$, où E désigne la fonction partie entière.

a) De $|a_n| = 1/n^\alpha$ on déduit :

— Si $\alpha > 1$, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolument ;

— Si $\alpha \leqslant 0$, on n'a pas $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$; $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge.

b) Reste à étudier $0 < \alpha \leqslant 1$, cas dans lequel nous nous plaçons.

En vue de sommer par tranches, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} a_k = (-1)^n \beta_n \text{ , où } \beta_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} 1/k^\alpha.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto 1/t^\alpha$ décroît ; on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\beta_n \geqslant \frac{2n+1}{(n+1)^{2\alpha}} \quad \text{et} \quad \beta_n \leqslant \frac{2n+1}{n^{2\alpha}}. \tag{1}$$

Si $0 < \alpha \leqslant 1/2$, la première des inégalités (1) montre que l'on n'a pas $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$, et donc l'on n'a pas $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$; la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge, et, d'après un théorème classique sur la sommation par tranches, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge.

c) Plaçons-nous maintenant dans le cas $1/2 < \alpha \leqslant 1$.

La seconde des inégalités (1) entraîne : $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$.

Utilisons à nouveau le fait que $t \longmapsto 1/t^\alpha$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$.

En appliquant : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$ à $k = n^2, \dots, (n+1)^2-1$, il vient :

$$\beta_n \geqslant \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = I_n.$$

En appliquant : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$ à $k=(n+1)^2-1,\dots,(n+2)^2-2$, il vient :

$$\beta_{n+1} \leq \int_{(n+1)^2-1}^{(n+2)^2-1} \frac{1}{t^\alpha}dt = J_{n+1}.$$

D'où : $\quad \beta_n - \beta_{n+1} \geq I_n - J_{n+1}.$

— Pour $1/2<\alpha<1$, on calcule :

$$I_n = \frac{n^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha}\left(\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{1-\alpha}-1\right) ;$$

$$J_{n+1} = \frac{n^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha}\left(\left(1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)^{1-\alpha}-\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1-\alpha}\right).$$

D'où : $\quad I_n - J_{n+1} = \dfrac{4\alpha-2}{n^{2\alpha}} + O\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

— Pour $\alpha=1$, on calcule :

$$I_n = 2\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) ;$$

$$J_{n+1} = \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\operatorname{Log}\left(1+\frac{3}{n}\right)-\operatorname{Log}\left(1+\frac{2}{n}\right).$$

D'où : $\quad I_n - J_{n+1} = \dfrac{2}{n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

— Pour $1/2<\alpha\leq 1$, il existe donc $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq N$ entraîne $I_n - J_{n+1}\geq 0$, et a fortiori $\beta_n \geq \beta_{n+1}$. La série $\sum_{n\geq 1} b_n$, qui est alternée, vérifie (à partir d'un certain rang) les hypothèses du théorème des séries alternées, ce qui assure sa convergence.

On en déduit que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge en utilisant le résultat classique : si la série réelle $\sum_{n\geq 1} a_n$ admet une série sommée par tranches convergente et si a_n est de signe constant "le long d'une tranche", alors $\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente.

Démontrons cette proposition dans le cas qui nous occupe ici.

Nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\sqrt{n}) = +\infty$; notons abréviativement $p=E(\sqrt{n})$.

La valeur absolue de la différence :

$$\sum_{k=1}^{(p+1)^2-1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{m=1}^{p} b_m - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

est majorée par : $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{(p+1)^2-1} a_k\right| = \sum_{k=n+1}^{(p+1)^2-1} |a_k| \leq \beta_p.$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_p = 0$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{m=1}^{p} b_m\right) = B$, somme de la série $\sum_{n\geq 1} b_n$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = B$. □

$\boxed{1.1.15}$ Soit f une application $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(t) = \alpha + \frac{\beta}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ au voisinage de } +\infty. \quad (1)$$

Etudier la série $\sum a_n$, où $a_n = \prod_{k=0}^{n} f(k)$.

Eliminons le cas où il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n_0) = 0$, cas dans lequel $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant n_0$, et $\sum a_n$ converge.

Nous supposons donc que $f(k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui implique $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; nous disposons ainsi de la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n+1)\right)_{n \in \mathbb{N}}$. En utilisant (1) on vérifie :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ au voisinage de } +\infty. \quad (2)$$

En particulier : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$. D'où la discussion :

<u>1er cas</u> : $|\alpha| < 1$. Par la règle de d'Alembert, $\sum |a_n|$ converge ; il en résulte que $\sum a_n$ converge absolument.

<u>2ème cas</u> : $|\alpha| > 1$. La suite $(|a_n|)$ croît à partir d'un certain rang, et donc n'admet pas 0 pour limite ; on n'a pas $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, et $\sum a_n$ diverge.

<u>3ème cas</u> : $\alpha = 1$. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(t) > 0$ pour tout $t \geqslant N$; on a $\operatorname{sgn} a_n = \operatorname{sgn} a_N$ pour tout $n \geqslant N$. Quitte à multiplier tous les a_n par -1, on peut supposer que $\sum\limits_{n \geqslant N} a_n$ est une série à termes positifs.

En utilisant (2), et un complément classique de la règle de d'Alembert (cf. notre cours IV.1-2-3 3°), on constate qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, au voisinage de $+\infty$: $a_n \sim \lambda / n^{-\beta}$. D'où :

— Si $\beta < -1$, alors $\sum a_n$ converge ;
— Si $\beta \geqslant -1$, alors $\sum a_n$ diverge.

<u>4ème cas</u> : $\alpha = -1$. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(t) < 0$ pour tout $t \geqslant N$.

La série $\sum\limits_{n \geqslant N} |a_n|$ vérifie $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |f(n+1)| = -f(n+1) = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, au voisinage de $+\infty$: $|a_n| \sim \lambda / n^{\beta}$. D'où :

— Si $\beta > 1$, alors $\sum |a_n|$ converge, et $\sum a_n$ converge absolument.
— Si $\beta \leqslant 0$, on n'a pas $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$; $\sum a_n$ diverge.
— Reste le cas : $0 < \beta \leqslant 1$; alors $\sum |a_n|$ diverge, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$.

Reprenant $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(t) < 0$ pour $t \geqslant N$, nous pouvons supposer, quitte à multiplier tous les a_n par -1, que $a_n = (-1)^n |a_n|$ pour tout $n \geq N$.

La série $\sum_{n\geq N} a_n$ est alternée et elle vérifie :

$$1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim \frac{\beta}{n} \text{ au voisinage de } +\infty,\ \beta > 0.$$

Il existe donc $N' \geq N$ tel que : $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ pour tout $n \geq N'$. Compte tenu de $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, déjà acquis, on conclut, par le théorème de convergence des séries alternées, que $\sum a_n$ converge.

> $\boxed{1.1.16}$ Soit ℓ^2 l'ensemble des suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que la série $\sum |a_n|^2$ converge. Montrer que ℓ^2 est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, que $\|\cdot\| = (a_n) \mapsto \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$ est une norme sur ℓ^2, et que l'e.v.n. $(\ell^2, \|\cdot\|)$ est complet.

1°) A et B désignent les éléments $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de ℓ^2. On constate que ℓ^2 est une partie du $\mathbf{C}$-e.v. $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, non vide puisque contenant la suite nulle, et telle que :

- Si $(\alpha, A) \in \mathbf{C} \times \ell^2$, alors $(\alpha a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$;
- Si $(A,B) \in (\ell^2)^2$, alors $(a_n + b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$; en effet :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n + b_n|^2 \leq 2(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Il en résulte que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. □

2°) Soient A et B deux éléments de ℓ^2. On a :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n \bar{b}_n| = |a_n|\,|b_n| \leq \frac{|a_n^2| + |b_n|^2}{2}$$

Il en résulte que la série $\sum a_n \bar{b}_n$ est absolument convergente, et donc convergente : on dispose de l'application $(\ell^2)^2 \mapsto \mathbf{C}$ définie par :

$$(A,B) \mapsto \langle A,B \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \bar{b}_n.$$

Il est aisé de vérifier que cette application est une forme sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, dont la forme hermitienne associée, $A \to \langle A,A \rangle$, est définie positive ; $A \mapsto \sqrt{\langle A,A \rangle}$ est donc une norme sur ℓ^2.

Remarque. On peut démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur ℓ^2 sans utiliser les espaces préhilbertiens complexes : on prouve l'inégalité triangulaire en observant que si A et B, $A \neq 0$, appartiennent à ℓ^2, alors :

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(t|a_n| + |b_n|\right)^2$$

est une fonction polynômiale du second degré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives, ce qui entraîne que son discriminant est négatif (au sens large).

3°) Reste à montrer que toute suite de Cauchy d'éléments de l'e.v.n. $(\ell^2, \|\cdot\|)$ est convergente.

— Donnons-nous une telle suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, avec $A_k = (a_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous disposons de l'assertion :

(P) Pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ il existe un $K_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\|A_{k+j} - A_k\| \leqslant \varepsilon \text{ pour tous } k\geqslant K_\varepsilon \text{ et } j\in\mathbb{N},$$

i.e. $$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n^{k+j} - a_n^k|^2 \leqslant \varepsilon^2 \text{ pour tous } k\geqslant K_\varepsilon \text{ et } j\in\mathbb{N} \qquad (1)$$

— On constate que (1) implique :

$$|a_n^{k+j} - a_n^k| \leqslant \varepsilon \text{ pour tous } n\in\mathbb{N},\ k\geqslant K_\varepsilon \text{ et } j\in\mathbb{N}.$$

Il en résulte que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $(a_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ est une suite de Cauchy : il s'agit donc d'une suite convergente, et l'on dispose de $a_n = \lim\limits_{k\to+\infty} a_n^k$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ que l'on note A. On va prouver $A\in\ell^2$.

— Revenant à l'assertion (P), nous constatons que (1) implique :

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n^{k+j} - a_n^k|^2 \leqslant \varepsilon^2 \text{ pour tous } N\in\mathbb{N},\ k\geqslant K_\varepsilon \text{ et } j\in\mathbb{N}.$$

et donc (en faisant tendre j vers $+\infty$ pour N et k fixés) :

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n - a_n^k|^2 \leqslant \varepsilon^2 \text{ pour tous } N\in\mathbb{N} \text{ et } k\geqslant K_\varepsilon. \qquad (2)$$

En fixant $\varepsilon = 1$, nous en déduisons qu'il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n - a_n^K|^2 \leqslant 1 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

ce qui entraîne que la série $\sum |a_n - a_n^K|^2$ converge, et donc que $A-A_K$ appartient à ℓ^2, et encore que A appartient à ℓ^2.

— Reprenons encore (P). Nous constatons (en faisant tendre j vers $+\infty$ dans (1) pour k fixé) que (1) implique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - a_n^k|^2 \leqslant \varepsilon^2, \text{ i.e. } \|A-A_k\| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } k\geqslant K_\varepsilon$$

ce qui prouve que, dans $(\ell^2, \|\cdot\|)$: $A = \lim\limits_{k\to+\infty} A_k$. □

1.2. SUITES D'APPLICATIONS

Le théorème de Weierstrass, qui fait l'objet de l'exercice 1.2.2, joue un rôle important dans l'étude des suites d'applications. A titre d'introduction, le lecteur traitera l'exercice suivant.

1.2.1 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur $[-a,a]$ vers l'application $t \longmapsto |t|$.
On pourra utiliser : $|t| = \sqrt{1-(1-t^2)}$.

a) On sait, d'après le cours :

$$\forall u \in]-1,1[\qquad (1-u)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u^n \qquad (1)$$

avec $\alpha_n = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}$.

D'autre part le lecteur vérifiera aisément que la série $\sum_{n\geq 1} \alpha_n$ converge (par exemple en utilisant la formule de Stirling, ou encore un développement limité de α_{n+1}/α_n) ; il en déduira la convergence normale de $\sum_{n\geq 1} \alpha_n u^n$ sur $[-1,1]$ et, par continuité, la validité de (1) sur ce même segment.

En remarquant alors que, pour $t \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, on a : $1-t^2 \in [-1,1]$, il vient :

$$|t| = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1-t^2)^n, \text{ la convergence étant uniforme sur } [-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des applications polynômiales définies par :

$$P_o(t) = 1 \;;\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \; P_n(t) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_n (1-t^2)^k$$

converge donc uniformément vers $t \longmapsto |t|$ sur $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

c) Soit $b = a/\sqrt{2}$. La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des applications polynômiales définies par : $Q_n(t) = b\,P_n(t/b)$ converge uniformément vers $t \longmapsto |t|$ sur $[-b\sqrt{2},b\sqrt{2}]$. □

• **Le lecteur trouvera une autre solution et un complément au 1.2.16.**

1.2.2 <u>THEOREME DE WEIERSTRASS</u>.- On se propose de démontrer que toute application continue d'un segment réel $[a,b]$, $a<b$, dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite d'applications polynômiales.

1°) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, établir l'égalité de polynômes :

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nX)^2\, C_n^k\, X^k(1-X)^{n-k} = nX(1-X) \qquad (1)$$

b) Etant donnés $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ et $x\in[0,1]$, on note :

$$I=\{k\in\mathbb{N}\mid 0\leqslant k\leqslant n \text{ et } |x-k/n|\geqslant\alpha\}$$

Vérifier :

$$\sum_{k\in I} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}\leqslant 1/(4n\alpha^2). \qquad (2)$$

2°) a) Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). A tout $n\in\mathbb{N}^*$ on associe :

$$B_n : x\mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}.$$

Montrer que f est limite uniforme sur $[0,1]$ de la suite d'applications polynômiales $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) En déduire le théorème de Weierstrass.

La méthode utilisée ici, qui est celle des polynômes de S. Bernstein, a l'avantage de fournir explicitement une suite d'applications polynômiales qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

1°) a) Nous utiliserons : $\frac{k}{n}C_n^k = C_{n-1}^{k-1}$, $\frac{k(k-1)}{n(n-1)}C_n^k = C_{n-2}^{k-2}$.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, X^k(1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k X^k(1-X)^{n-k} = nX\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell}\, X^{\ell}(1-X)^{n-1-\ell} = nX.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\, C_n^k\, X^k(1-X)^{n-k} = P_n(X)+Q_n(X)$, avec :

$$P_n(X) = \sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k\, X^k(1-X)^{n-k} = nX \text{ (calcul précédent),}$$

et $Q_n(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, C_n^k\, X^k(1-X)^{n-k}.$

On a :

$$Q_n(X) = n(n-1)X^2\sum_{\ell=0}^{n-2} C_{n-2}^{\ell}\, X^{\ell}(1-X)^{n-2-\ell} = n(n-1)X^2.$$

Le premier membre de (1) est donc le polynôme :

$$n(n-1)X^2 + nX - 2n^2X^2 + n^2X^2 = nX(1-X). \qquad \square$$

b) Comme $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on déduit de (1) :

$$\sum_{k \in I} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{n} \tag{3}$$

Au premier membre de (3), on minore $(k/n - x)^2$ par α^2 ; au second membre, on majore $x(1-x)$ par $\sup_{t \in [0,1]} (t-t^2) = 1/4$. D'où (2).

2°) a) Soient $x \in [0,1]$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

En utilisant $\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = 1$, on établit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} \tag{4}$$

Comme f est continue, et donc uniformément continue sur l'intervalle compact $[0,1]$, on peut associer à ε un $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [0,1]^2 \quad \big(|t-u| < \alpha\big) \Rightarrow \big(|f(t)-f(u)| < \varepsilon/2\big).$$

D'autre part on dispose de : $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \in \mathbb{R}$.

Fixons un $N \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie $M/(2N\alpha^2) < \varepsilon/2$.

I étant associé à α, x et $n \geq N$ (comme au 1°) b)), reprenons (4) en écrivant le second membre sous la forme $S_1 + S_2$, avec $S_1 = \sum_{k \in I}$ et $S_2 = \sum_{k \notin I}$.

Pour $k \in I$, majorons $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$ par 2M, et écrivons (grâce à (2)) :

$$S_1 \leq 2M \sum_{k \in I} C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} \leq 2M/(4n\alpha^2) < \varepsilon/2.$$

Pour $k \notin I$, majorons $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$ par $\varepsilon/2$, ce qui est possible puisque $|k/n - x| < \alpha$. Il vient ainsi :

$$S_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin I} C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

— En conclusion, à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on peut associer $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in [0,1] \quad |B_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad \square$$

b) Soit g une application continue d'un segment réel $[a,b]$, $a<b$, dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) ; $f : x \mapsto g\big(a + (b-a)x\big)$ est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) à laquelle on sait associer la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses applications polynômiales de Bernstein, suite qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

On constate aisément que g est limite uniforme sur $[a,b]$ de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des applications polynomiales :

$$A_n : x \mapsto B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Remarque. L'étude s'étend au cas d'une application continue d'un segment réel dans un e.v.n.

$\boxed{1.2.3}$ THEOREME DE WEIERSTRASS POUR LES FONCTIONS PERIODIQUES. A tout entier $n \geq 1$ on associe l'application $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g_n(u) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(n\pi u)}{\sin^2(\pi u)} \text{ si } u \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \; ; \; g_n(u) = n \text{ si } u \in \mathbb{Z}.$$

1°) a) Montrer qu'il existe des réels $a_{n,k}$, $0 \leq k \leq n-1$, tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad g_n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} \cos(2k\pi u). \tag{1}$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 g_n(u)du$.

2°) Soit f une application 1-périodique et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A tout entier $n \geq 1$ on associe l'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \int_0^1 g_n(x-t)f(t)dt.$$

a) Montrer que f_n est un "polynôme trigonométrique", i.e. qu'il existe des réels $\alpha_{n,k}$ avec $0 \leq k \leq n-1$, et des réels $\beta_{n,k}$ avec $1 \leq k \leq n-1$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \alpha_{n,o} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha_{n,k} \cos(2k\pi x) + \beta_{n,k} \sin(2k\pi x)\right) \tag{2}$$

b) Montrer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ici encore la méthode utilisée à l'avantage de fournir explicitement une suite de fonctions polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

• On vérifie aisément que toute g_n est positive, paire, 1-périodique et continue (il suffit de vérifier la continuité au point 0).

1°) a) Pour $u \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, posons $z = \exp(i\pi u)$; compte tenu de $z \notin \{-1,1\}$, nous avons ainsi :

$$n\, g_n(u) = \left(\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-2k}\right)^2$$

et : $n\, g_n(u) = \displaystyle\sum_{(k,\ell)\in\{0,\dots,n-1\}^2} Z_{k,\ell}$; $Z_{k,\ell} = z^{2(n-1-k-\ell)}$.

On constate que $n\, g_n(u)$ peut s'écrire :

$$\sum_{k+\ell=n-1} Z_{k,\ell} + \sum_{p=0}^{n-2}\left(\sum_{k+\ell=p} Z_{k,\ell} + \sum_{k+\ell=2(n-1)-p} Z_{k,\ell}\right)$$

et donc : $n + \displaystyle\sum_{p=0}^{n-2} (p+1) \left(z^{2(n-1-p)} + z^{-2(n-1-p)}\right)$.

En notant $k = n-1-p$, il vient :

$$g_n(u) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n-k)}{n} \cos(2k\pi u)$$

On vérifie que cette égalité, établie pour $u \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vaut également pour $u \in \mathbb{Z}$. □

b) De (1) on déduit : $\int_0^1 g_n(u)du = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2°) a) Soit $x \in \mathbb{R}$; $t \mapsto g_n(x-t)f(t)$ est continue sur $[0,1]$, ce qui assure l'existence de $f_n(x)$. En utilisant (1), on constate que $f_n(x)$ s'écrit sous la forme (2), avec :

$$\alpha_{n,o} = \int_0^1 f(t)dt \; ; \; \alpha_{n,k} = \frac{2(n-k)}{n} \int_0^1 f(t) \cos(2k\pi t)dt, \; k \geqslant 1 \; ;$$

$$\beta_{n,k} = \frac{2(n-k)}{n} \int_0^1 f(t) \sin(2k\pi t)dt, \; k \geqslant 1.$$

b) Comme f et les f_n sont 1-périodiques, il suffit de prouver que f est limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$. Nous utiliserons :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) - f_n(x) = \int_0^1 g_n(x-t)\big(f(x)-f(t)\big)dt$$

ce qui résulte du 1°) b) et de la périodicité de g_n.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. La continuité uniforme de la restriction de f à $[0,1]$ permet d'associer à ε un $\eta \in]0,1/2[$ tel que :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2 \quad \big(|u-v| \leqslant \eta\big) \Rightarrow \big(|f(u)-f(v)| \leqslant \varepsilon/4\big).$$

En outre, la continuité de f garantit l'existence de $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

• Soit $x \in [0,1]$; trois cas peuvent se présenter :

<u>1er cas</u> : $x \in [\eta/2, 1-\eta/2]$ - Majorons $|f(x)-f_n(x)|$ par la somme $I_1+I_2+I_3$ des intégrales de $t \mapsto g_n(x-t)|f(x)-f(t)|$ sur $[0,x-\eta/2]$, sur $[x-\eta/2,x+\eta/2]$ et sur $[x+\eta/2,1]$.

— Sur l'intervalle $[x-\eta/2,x+\eta/2]$, nous avons $|x-t| \leqslant \eta$; d'où $|f(x)-f(t)| \leqslant \varepsilon/4$, et, compte tenu de 1,b) : $I_2 \leqslant \varepsilon/4$.

— Sur les deux autres intervalles, nous avons $|x-t| \in [\eta/2, 1-\eta/2]$; d'où

$$g_n(x-t) \leqslant \frac{1}{n \sin^2(\pi\eta/2)} \text{ , et } I_1 + I_3 \leqslant \frac{2M}{n \sin^2(\pi\eta/2)} \tag{3}$$

Ainsi dans le 1er cas : $|f(x)-f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2M}{n \sin^2(\pi\eta/2)}$.

<u>2ème cas</u> : $x \in [0,\eta/2[$. Majorons $|f(x)-f_n(x)|$ pour la somme $J_1+J_2+J_3$ des intégrales de $t \mapsto g_n(x-t)|f(x)-f(t)|$ sur $[0,\eta]$, sur $[\eta,1-\eta]$, et sur $[1-\eta,1]$.

— Sur l'intervalle $[0,\eta]$, nous avons $|x-t| \leqslant \eta$, et donc $|f(x)-f(t)| \leqslant \varepsilon/4$.

— Sur l'intervalle $[\eta,1-\eta]$, nous avons $|x-t| \in [\eta/2,1-\eta/2]$, ce qui conduit à $J_2 \leqslant \frac{2M}{n \sin^2(\pi\eta/2)}$.

— Sur l'intervalle $[1-\eta, 1]$, nous avons $|t-1| < \eta$ et $|x| < \eta$; d'où compte tenu de $f(0)=f(1)$:

$$|f(x)-f(t)| \leq |f(x)-f(0)| + |f(1)-f(t)| \leq \varepsilon/2$$

Ainsi dans le 2ème cas : $|f(x)-f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n \sin^2(\pi\eta/2)}$ (4)

<u>3ème cas</u> : $x \in]1-\eta/2, 1]$.- On procède comme dans le 2ème cas et on obtient la même majoration (4).

En résumé, la majoration (4) vaut dans les trois cas.

• Comme il est trivial qu'il existe un naturel N tel que :

$$\forall n \geq N \quad \frac{2M}{n \sin^2(\pi\eta/2)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

on peut affirmer que :

$$\forall n \geq N \quad \sup_{x \in [0,1]} |f(x)-f_n(x)| \leq \varepsilon.$$ □

Remarque. L'étude s'étend au cas d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, admettant une période (non nulle) quelconque.

1.2.4 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Montrer que sa limite, f, est une application polynômiale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons : $g_n = f_n - f_{n-1}$; g_n est une application polynômiale, et la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, g_n soit bornée sur $\mathbb{R}$; or une application polynômiale bornée sur $\mathbb{R}$ est nécessairement une constante ; pour tout $n \geq N$, nous avons donc : $g_n : t \mapsto a_n$.

Comme $\sum_{k=N}^{n} g_k = f_n - f_{N-1}$ pour tout $n \geq N$, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq N \quad f_n(t) - f_{N-1}(t) = \sum_{k=N}^{n} a_k.$$

En fixant t, et en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que la série $\sum_{k\geq N} a_k$ converge ; en notant a sa somme, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = a + f_{N-1}(t).$$ □

Remarques. a) L'étude s'étend au cas où (f_n) converge uniformément sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$, ou $]-\infty, A]$.

b) Le lecteur notera la différence entre la proposition établie dans cet exercice et le théorème de Weierstrass : ici la convergence est uniforme sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$ et non pas, seulement, sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

1.2.5 1°) Soit f une application continue d'un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; telle que $\int_a^b t^n f(t)dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application f est nulle.

2°) Montrer que le résultat du 1°) peut être en défaut si l'on remplace $[a,b]$ par un intervalle non compact de $\mathbb{R}$. On pourra utiliser les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n\, e^{(-1+i)x} dx.$$

1°) Nous allons montrer que l'intégrale $A = \int_a^b f^2(t)dt$ est nulle, ce qui, du fait de la continuité et de la positivité de f^2, entraînera que f^2 est nulle, et donc que f est nulle.

• On constate que, par linéarité : $\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$ pour toute application polynômiale P.

— Le théorème de Weierstrass dit qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications polynômiales qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers l'application continue f.

Comme f, continue sur l'intervalle compact $[a,b]$, est bornée, la suite $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f^2. Le théorème du cours sur les limites uniformes d'applications intégrables fournit :

$$A = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b P_n(t)f(t)dt, \text{ et donc } A = 0.$$ □

2°) La convergence (absolue) des I_n tient à : $|x^n\, e^{(-1+i)x}| = x^n e^{-x}$.

— On calcule $I_0 = \frac{1}{1-i}$, et on vérifie, par une intégration par parties, que $I_n = \frac{n}{1-i} I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}$$

En particulier, I_{4n+3} est réel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De $\int_0^{+\infty} x^{4n+3} e^{-x} \sin x\, dx = 0$, on déduit par le changement de variables $x = t^{1/4}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 0$$

où f est l'application continue et non nulle $t \mapsto \exp(-t^{1/4}) \sin t^{1/4}$ de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. □

$\boxed{1.2.6}$ SUITES EQUIREPARTIES. Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[0,1]$ est dite équirépartie si et seulement si elle vérifie l'assertion :

i) Pour tout sous-intervalle I de $[0,1]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \nu_I(n) = \ell_I$, où ℓ_I est la longueur de I, et où, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\nu_I(n)$ est le nombre des $k\in\{1,\dots,n\}$ vérifiant $u_k \in I$.

1°) a) La suite u définie par $u_1 = 0$, et $u_{2^q+p} = \frac{2p-1}{2^{q+1}}$ pour $q\in\mathbb{N}$ et $1\leqslant p\leqslant 2^q$ est-elle équirépartie ?

b) Montrer que si une suite est équirépartie, l'ensemble de ses valeurs est dense dans $[0,1]$. Que peut-on dire de la réciproque ? Une suite équirépartie peut-elle être convergente ?

2°) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) u est équirépartie ;

ii) Toute application $\mathcal{R}$-intégrable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ possède la propriété :

$$(\mathcal{T})\quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\right) = \int_0^1 f$$

$\left(\text{i.e. } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n(f) = 0, \text{ où } x_n(f) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f\right)$;

iii) Toute application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ possède la propriété $(\mathcal{T})$;

iv) Toute application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(1)$ possède la propriété $(\mathcal{T})$.

1°) a) Prenons l'intervalle $I = [0,1/2]$, de longueur 1/2.

Pour tout n de la forme $3.2^m = 2^{m+1} + 2^m$ nous avons, en remarquant que si $q\geqslant 1$, $u_{2^q+p} \leqslant 1/2$, s'écrit $p\leqslant 2^{q-1}$, que $u_1 \leqslant 1/2$ et que $u_2 \leqslant 1/2$:

$$\nu_I(n) = 2 + \sum_{q=1}^{m} 2^{q-1} + 2^m = 1 + 2.2^m$$

Pour la suite extraite considérée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\nu_I(n) = \frac{2}{3}$.
La suite u n'est pas équirépartie.

Remarque. Avec le même intervalle I, on aurait par contre pour la suite extraite correspondant à $n = 2^m$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\nu_I(n) = \frac{1}{2} = \ell_I$.

b) Soit u une suite équirépartie. Pour tout $]\alpha,\beta[$ tel que $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$, nous avons, en prenant $I =]\alpha,\beta[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\nu_I(n) = \beta-\alpha$. Comme $\beta-\alpha>0$, il existe un $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n}\nu_I(n)>0$, ce qui prouve que $]\alpha,\beta[$ contient des valeurs de la suite u. L'ensemble des valeurs de u est donc dense dans $[0,1]$, ce qui implique que la suite est divergente.

La réciproque est fausse : la suite étudiée en a) n'est pas équirépartie bien que l'ensemble de ses valeurs soit dense dans $[0,1]$.

2°) Comme visiblement ii) ⇒ iii) ⇒ iv), il suffit de vérifier i) ⇒ ii) et iv) ⇒ i).

a) A tout sous-intervalle I de $[0,1]$ associons sa fonction caractéristique, i.e. l'application en escalier $\chi_I : [0,1] \to \mathbb{R}$ prenant la valeur 1 en tout point de I et la valeur 0 en tout point de $[0,1]\setminus I$. Nous constatons :

$$\ell_I = \int_0^1 \chi_I \ ; \ \nu_I(n) = \sum_{k=1}^{n} \chi_I(u_k).$$

La suite u est donc équirépartie si, et seulement si, pour tout sous intervalle I de $[0,1]$, χ_I possède la propriété $(\mathcal{T})$.

Notons qu'il en résulte : ii) ⇒ i).

b) <u>Preuve de</u> i) ⇒ ii) (<u>et</u>, <u>en fait</u>, <u>de</u> i) ⇔ ii)). Par hypothèse u est une suite équirépartie.

— Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application en escalier ; il existe une partition de $[0,1]$ en intervalles deux à deux disjoints $I_1,\dots,I_p$ (éventuellement réduits à des points) tels que $\varphi = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell \chi_{I_\ell}$. On constate :

$$\int_0^1 \varphi = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell \int_0^1 \chi_{I_\ell} \ ; \ \sum_{k=1}^{n} \varphi(u_k) = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell \left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{I_\ell}(u_k)\right)$$

et donc : $x_n(\varphi) = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell x_n(\chi_{I_\ell})$.

On en déduit que φ possède la propriété $(\mathcal{T})$.

— Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{R}$-intégrable. Pour $\varepsilon>0$ donné, il existe φ et ψ, applications en escalier de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\psi \leqslant f \leqslant \varphi \quad \text{et} \quad \int_0^1 (\varphi-\psi) \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a ainsi :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi(u_k) - \int_0^1 \varphi \leqslant x_n(f) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(u_k) - \int_0^1 \psi$$

et : $\quad x_n(\psi) - \varepsilon \leqslant x_n(f) \leqslant x_n(\varphi) + \varepsilon.$

Comme φ et ψ possèdent la propriété ($\mathcal{J}$), on peut associer à ε un $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$-\varepsilon \leqslant x_n(\psi) \quad \text{et} \quad x_n(\varphi) \leqslant \varepsilon$$

et donc : $-2\varepsilon \leqslant x_n(f) \leqslant 2\varepsilon$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(f) = 0$; f possède la propriété ($\mathcal{J}$). □

c) Preuve de iv) ⇒ i). Par hypothèse u est une suite qui vérifie l'assertion iv).

Prenons un sous-intervalle I de $[0,1]$; nous pouvons supposer $I \neq \phi$, sans quoi l'assertion d'équirépartition serait triviale ; notons α et β les bornes de I.

1er cas : $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$. Soit $\varepsilon > 0$, assez petit. Notons φ l'application continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui prend la valeur 0 sur $[0,\alpha-\varepsilon/2]$ et sur $[\beta+\varepsilon/2,1]$, la valeur 1 sur $[\alpha,\beta]$, qui est affine sur $[\alpha-\varepsilon/2,\alpha]$ et sur $[\beta,\beta+\varepsilon/2]$; on a :

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \ ; \ \chi_I \leqslant \varphi \ ; \int_0^1 \varphi = \ell_I + \varepsilon/2$$

Si $\alpha < \beta$, notons ψ l'application continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui prend la valeur 0 sur $[0,\alpha]$ et sur $[\beta,1]$, la valeur 1 sur $[\alpha+\varepsilon/2,\beta-\varepsilon/2]$, qui est affine sur $[\alpha,\alpha+\varepsilon/2]$ et sur $[\beta-\varepsilon/2,\beta]$. Si $\alpha = \beta$, ψ désigne l'application nulle de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$; dans les deux cas on a :

$$\psi(0) = \psi(1) = 0 \ ; \ \psi \leqslant \chi_I \ ; \int_0^1 \psi \geqslant \ell_I - \varepsilon/2$$

Les applications φ et ψ possèdent la propriété ($\mathcal{J}$) et vérifient :

$$\psi \leqslant \chi_I \leqslant \varphi \quad \text{et} \quad \int_0^1 (\varphi-\psi) \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

En raisonnant comme en b), on constate que l'on peut associer à ε un $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$-2\varepsilon \leqslant x_n(\chi_I) \leqslant 2\varepsilon.$$

Il en résulte que χ_I possède la propriété ($\mathcal{J}$).

2ème cas : $\alpha = 0$. Quitte à écrire que I est la réunion de deux intervalles disjoints, il suffit d'établir le résultat pour I de bornes 0 et β, avec $0 \leqslant \beta < 1$. Soit $\varepsilon > 0$, assez petit ; φ est ici l'application continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui prend la valeur 0 sur $[\beta+\varepsilon/2,1-\varepsilon/2]$, la valeur 1 sur $[0,\beta]$ et en 1, qui est affine sur $[\beta,\beta+\varepsilon/2]$ et sur $[1-\varepsilon/2,1]$; ψ est définie comme dans le 1er cas. On a :

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 1 \ ; \ \psi(0) = \psi(1) = 0$$

Les applications φ et ψ possèdent la propriété $\mathcal{T}$; on constate que les inégalités (2) sont vérifiées, et on montre, comme dans le premier cas, que χ_I possède la propriété ($\mathcal{T}$).

3ème Cas. $\beta = 1$. On procède comme dans le deuxième cas.

En conclusion, pour tout sous-intervalle I de $[0,1]$, χ_I possède la propriété ($\mathcal{T}$), ce qui montre (cf a)) que la suite u est équirépartie. □

$\boxed{1.2.7}$ 1°) Reprenant les notations et les résultats de l'exercice précédent, montrer que pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[0,1]$ les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La suite u est équirépartie ;

v) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^p\right) = \frac{1}{p+1}$;

vi) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2p\pi u_k)\right) = 0 \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(2p\pi u_k)\right) = 0$$

On utilisera les exercices 1.2.2 et 1.2.3.

2°) Application. Soit $\theta \in [0,1]\setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $u = \big(n\theta - E(n\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie (E est la fonction partie entière).

Rappelons que i) s'écrit : toute $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$-intégrable, possède la propriété :

$$(\mathcal{T}) \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\right) = \int_0^1 f,$$ et sous des formes équivalentes.

On constate que v) et vi) s'écrivent respectivement :

v) Toute application $t \mapsto t^p$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{N}^*$, possède ($\mathcal{T}$).

vi) Toutes applications $t \mapsto \cos(2p\pi t)$ et $t \mapsto \sin(2p\pi t)$, $p \in \mathbb{N}^*$, possèdent ($\mathcal{T}$).

Par ailleurs il est trivial que toute application constante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ possède ($\mathcal{T}$).

1°) a) Du préambule précédent, il résulte : i) $\Rightarrow$ v) et i) $\Rightarrow$ vi).

b) Preuve de v) $\Rightarrow$ i). Par hypothèse v) est vraie. Par combinaison linéaire, il en résulte que toute application polynômiale $[0,1] \to \mathbb{R}$ possèdent $\mathcal{T}$.

– Soit alors $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on dispose (cf. 1.2.2) de $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, polynômiale, telle que

$$\varphi - \varepsilon \leq f \leq \varphi + \varepsilon$$

On a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(u_k) - \varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(u_k) + \varepsilon$$

et $$\left(\int_0^1 \varphi\right) - \varepsilon \leq \int_0^1 f \leq \left(\int_0^1 \varphi\right) + \varepsilon$$

D'où : $x_n(\varphi) - 2\varepsilon \leq x_n(f) \leq x_n(\varphi) + 2\varepsilon$.

Comme φ possède $(\mathcal{T})$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \qquad |x_n(\varphi)| \leq \varepsilon$$

et donc : $\forall n \geq n_0 \qquad |x_n(f)| \leq 3\varepsilon$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(f) = 0$; f possède la propriété $(\mathcal{T})$. □

c) Preuve de vi) $\Rightarrow$ i). Par hypothèse, vi) est vraie. Par combinaison linéaire, et compte tenu de ce que toute application constante possède $(\mathcal{T})$, on en déduit que toute application polynôme trigonométrique $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longrightarrow \alpha_0 + \sum_{p=1}^{r}\left(\alpha_p \cos(2p\pi t) + \beta_p \sin(2p\pi t)\right) \tag{2}$$

possède $(\mathcal{T})$.

— Soit alors $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$. Elle se prolonge en une application continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$, donné, on dispose (cf. 1.2.3) de $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, polynôme trigonométrique de la forme (2) vérifiant :

$$\varphi - \varepsilon \leq f \leq \varphi + \varepsilon \tag{1}$$

On montre comme en b) que f possède la propriété $(\mathcal{T})$.

L'assertion iv) du 1.2.6 est ainsi vérifiée. □

2°) On constate que la suite u prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp(2ip\pi u_k)$ s'écrit :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\exp(2i\omega)\right)^k, \quad \omega = p\pi\theta.$$

Comme θ n'est pas rationnel, $p\theta$ n'est pas entier et donc $\exp(2i\omega) \neq 1$.

Un calcul classique donne : $S_n = \frac{\sin(n\omega)}{n \sin\omega}\exp\left(i(n+1)\omega\right)$

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp(2ip\pi u_k)\right) = 0.$$

L'assertion vi) est donc vérifiée ; la suite u est équirépartie. □

$\boxed{1.2.8}$ Montrer que la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$

$$f_n = t \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos^{2k}(k\pi t)$$

converge simplement sur $[0,1]$.

<u>Indication</u> : Pour étudier la suite $\big(f_n(t)\big)$, $t\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, on pourra :

— soit utiliser l'exercice 1.2.7 (équirépartition de la suite $n\longmapsto nt-E(nt)$) ·

— soit utiliser l'égalité (que l'on établira) :

$$4^p\cos^{2p}(k\pi t) = C_{2p}^p + 2\sum_{\ell=0}^{p-1} C_{2p}^{\ell}\cos\big(2(p-\ell)k\pi t\big) \tag{1}$$

où k et p sont des entiers tels que $1\leqslant p\leqslant k$.

a) <u>Cas</u> $t\in\{0,1\}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(t)=1$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 1$.

b) <u>Cas</u> $t\in\,]0,1]\cap\mathbb{Q}$. Notons $t=p/q$, où p et q sont des entiers premiers entre eux tels que $1\leqslant p<q$ et $q\geqslant 2$.

— Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, une division donne $k=sq+r$, $0\leqslant r\leqslant q-1$; on constate que $rp\pi/q$ est un multiple de π si et seulement si r est divisible par q, i.e. $r=0$. Il en résulte que $\cos^2(k\pi t)$ est égal à 1 si k est multiple de q, et, dans le cas contraire, est majoré par :

$$\mu = \max_{1\leqslant r\leqslant q-1}\big(\cos^2(rp\pi/q)\big) < 1.$$

— Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons E_n l'ensemble des entiers $k\in\mathbb{N}_n$, $\mathbb{N}_n=\{1,\dots,n\}$, qui sont divisibles par q. Leur nombre, $\mathrm{card}(E_n)$, est la partie entière de n/q.

En distinguant $k\in E_n$, auquel cas $\cos^{2k}(k\pi t)=1$, et $k\in\mathbb{N}_n\setminus E_n$, auquel cas $\cos^{2k}(k\pi t)$ est majoré par μ^k, on a :

$$\frac{\mathrm{card}\,E_n}{n} \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{\mathrm{card}\,E_n}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{N}_n\setminus E_n}\mu^k$$

La dernière somme est majorée par $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mu^k = \frac{\mu}{1-\mu}$. De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{Card}\,E_n}{n} = \frac{1}{q}$.

D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(p/q) = 1/q.$

c) <u>Cas</u> $t\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$,

<u>*Première solution*</u>. La suite $u : n\longmapsto nt-E(nt)$, $n\geqslant 1$, est équirépartie. On a :

$$\forall k\in\mathbb{N}^* \quad \cos^{2k}(k\pi t) = \cos^{2k}(\pi u_k)$$

Soit $\varepsilon\in\,]0,1[$ donné. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons F_n l'ensemble des $k\in\mathbb{N}_n$ tels que : $u_k\in[0,\varepsilon/2]\cup[1-\varepsilon/2,1]$

En majorant $\cos^{2k}(\pi u_k)$ par 1 si $k \in F_n$, et par $\cos^{2k}(\pi\varepsilon/2)$ si $k \in \mathbf{N}_n \setminus F_n$, il vient ici :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{\text{card } F_n}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbf{N}_n \setminus F_n} \cos^{2k}(\pi\varepsilon/2) \tag{2}$$

La dernière somme est majorée par $\sum_{k=1}^{+\infty} \cos^{2k}(\pi\varepsilon/2)$. D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbf{N}_n \setminus F_n} \cos^{2k}(\pi\varepsilon/2) = 0. \tag{3}$$

Comme u est équirépartie : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\text{card } F_n}{n} = \varepsilon.$ (4)

En utilisant (2), (3) et (4), on montre que pour tout $\varepsilon \in]0,1/2[$ il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant 3\varepsilon$$

On a donc dans ce cas : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = 0.$

Seconde solution. Pour tout $p \in \mathbf{N}_n$, on peut écrire, en majorant $\cos^{2k}(k\pi t)$ par 1 si $k < p$, et par $\cos^{2p}(k\pi t)$ si $k \geqslant p$:

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{p-1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=p}^{n} \cos^{2p}(k\pi t). \tag{5}$$

En posant : $\exp(ik\pi t) = z$, $4^p \cos^{2p}(k\pi t)$ s'écrit :

$$(z+1/z)^{2p} = C_{2p}^{p} + \sum_{\ell=0}^{p-1} C_{2p}^{\ell} \left(z^{2(p-\ell)} + z^{-2(p-\ell)}\right)$$

ce qui justifie (1) et permet de majorer $f_n(t)$ par :

$$\frac{p-1}{n} + \frac{C_{2p}^{p}}{4^p} + \frac{2}{4^p} \sum_{\ell=0}^{p-1} C_{2p}^{\ell} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=p}^{n} \cos 2(p-\ell)k\pi t\right)$$

Ceci posé, considérons $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

- Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} C_{2p}^{p}/4^p = 0$ (Stirling), nous pouvons fixer $p \in \mathbf{N}^*$ de telle sorte que $C_{2p}^{p}/4^p \leqslant \varepsilon$.
- Ayant ainsi fixé p, nous pouvons fixer $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{p-1}{n} \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.
- Pour tout ℓ tel que $0 \leqslant \ell \leqslant p-1$, un calcul classique donne :

$$\left|\sum_{k=p}^{n} \cos 2(p-\ell)k\pi t\right| \leqslant \frac{2}{|\exp(ix_\ell) - 1|}$$

où $x_\ell = 2(p-\ell)\pi t$ n'appartient pas à $2\pi\mathbf{Z}$ puisque $p-\ell \in \mathbf{N}^*$ et $t \notin \mathbf{Q}$; il en résulte:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=p}^{n} \cos 2(p-\ell)k\pi t = 0$$

ce qui permet d'associer à ℓ un $\nu_\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant \nu_\ell$:

$$\left|\frac{2}{4^p} C_{2p}^{\ell} \frac{1}{n} \sum_{k=p}^{n} \cos 2(p-\ell)k\pi t\right| \leqslant \varepsilon/p.$$

Pour $n \geqslant \max(N, \nu_0, \dots, \nu_{p-1})$, nous avons ainsi :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui permet de retrouver : $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.

d) En conclusion, la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers l'application $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = 0$ si $t \notin \mathbb{Q}$;

$$f(0) = 1 \ ; \ f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \text{ si } (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p \wedge q = 1.$$

Remarque. Les f_n sont visiblement continues ; f n'est pas continue (cf. 3.1.6 de notre tome I d'exercices d'analyse) ; la convergence n'est uniforme sur aucun intervalle d'intérieur non vide.

$\boxed{1.2.9}$ Soient E et F deux $\mathbb{R}$-e.v.n., F étant complet, et $f : E \longrightarrow F$ une application continue vérifiant :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (x,y) \in E^2 \quad \| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leqslant M. \qquad (1)$$

A tout $n \in \mathbb{N}$, on associe l'application $g_n : x \longmapsto \frac{1}{2^n} f(2^n x)$ de E dans F. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E, et que sa limite est une application linéaire et continue de E dans F.

a) De (1) on déduit que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$:

$$\| f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x) \| \leqslant M,$$

et donc : $\| g_{n+1}(x) - g_n(x) \| \leqslant M/2^{n+1}$.

On en déduit que, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ et $x \in E$:

$$\| g_{n+p}(x) - g_n(x) \| \leqslant M \sum_{k=1}^{p} 1/2^{n+k} \leqslant \frac{M}{2^n}. \qquad (2)$$

La suite d'applications (g_n) vérifie donc sur E le critère de Cauchy uniforme, et comme F est complet, elle converge uniformément sur E vers une application $g : E \longrightarrow F$; les g_n étant continues, g est continue.

b) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in E^2$, $g_n(x+y) - g_n(x) - g_n(y)$ s'écrit :

$$\frac{1}{2^n}[f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)]$$

et on a, d'après (1) :

$$\| g_n(x+y) - g_n(x) - g_n(y) \| \leq M/2^n.$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad g(x+y) = g(x) + g(y). \tag{3}$$

Ainsi g est un morphisme additif de E dans F, et, par des récurrences classiques, on a déjà :

$$\forall r \in \mathbf{Q} \quad \forall x \in E \quad g(rx) = rg(x).$$

— Utilisons maintenant la continuité de g. Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $x \in E$. Nous disposons d'une suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de rationnels admettant α pour limite ; nous avons :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad g(r_n x) = r_n g(x).$$

Par passage à la limite : $g(\alpha x) = \alpha g(x)$. (4)

De (3) et (4) on déduit la linéarité de g.

$\boxed{1.2.10}$ 1°) A tout $n \in \mathbf{N}$ on associe l'application $f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, telle que :

$$f_n(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k / k!$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle simplement (resp. uniformément) sur $\mathbf{R}_+$? On pourra utiliser la formule de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ \theta(n), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \theta(n) = 1.$$

2°) Montrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, il existe une suite de polynômes $(P_{p,n})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la suite $\left(t \mapsto e^{-t} P_{p,n}(t)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ d'applications de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$ vers l'application $t \mapsto e^{-pt}$.

1°) a) En utilisant le développement en série entière de la fonction exp, dont le rayon de convergence est infini, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+ \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k/k! = e^{-t}.$$

La suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbf{R}_+$ vers l'application $t \mapsto e^{-2t}$.

b) Nous sommes conduits à étudier la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec :

$$g_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} \qquad t \mapsto e^{-2t} - f_n(t).$$

• Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé ; f_n et g_n sont C^∞ ; elles vérifient :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=0 \ ; \ \lim_{t\to+\infty} g(t)=0$$

ce qui entraîne qu'elles sont bornées. On note : $\mu_n = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |g_n(t)|$.

Soit $B_n : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k/k!$

En utilisant : $B'_n(t) = -B_n(t) + (-1)^n t^n/n!$, on constate :

$$g'_n(t) = -2e^{-t}\left(e^{-t} - B_n(t) + (-1)^n t^n/(2n!)\right) \qquad (1)$$

Compte tenu de $g_n(0)=0$, on en déduit : $\mu_n = \sup_{x\in E_n} |g_n(x)|$, où E_n est l'ensemble des zéros de g'_n. Or, en utilisant (1) :

$$\forall x\in E_n \quad |g_n(x)| = e^{-x}|e^{-x} - B_n(x)| = e^{-x}x^n/(2n!).$$

D'où : $\quad \mu_n \leqslant \lambda_n$, avec $\lambda_n = \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{e^{-t}t^n}{2n!}$

La dérivée de $t \mapsto e^{-t}t^n$ s'annulant pour $t=n$, on a : $\lambda_n = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \cdot \dfrac{1}{2n!}$.

• Lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $\lambda_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi n}}$ (Stirling).

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = 0,$$

ce qui permet d'affirmer que la suite (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers l'application nulle, et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $t \mapsto e^{-2t}$.

2°) Il suffit de montrer que, pour tout $(p,\varepsilon)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{R}_+^\star$ est vraie l'assertion $(A_{p,\varepsilon})$: Il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |e^{-pt} - e^{-t}P(t)| \leqslant \varepsilon$.

Nous allons raisonner par récurrence sur p.

a) $A_{1,\varepsilon}$ et $A_{2,\varepsilon}$ sont vraies pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star$ (prendre $P=1$ dans le cas de $A_{1,\varepsilon}$; utiliser 1°) dans le cas de $A_{2,\varepsilon}$).

b) Soit $m\geqslant 3$ tel que $A_{p,\varepsilon}$ soit vraie pour tout $(p,\varepsilon)\in\{1,\dots,m-1\}\times\mathbb{R}_+^\star$.

— Fixons $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star$, et commençons par remarquer que $A_{2,\varepsilon/2}$ étant vraie, il existe $R\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\sup_{u\in\mathbb{R}_+} |e^{-2u} - e^{-u}R(u)| \leqslant \varepsilon/2$, ce qui s'écrit (en remplaçant u par $mt/2$) :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |e^{-mt} - e^{-mt/2} R(mt/2)| \leqslant \varepsilon/2. \qquad (1)$$

Par ailleurs, pour tout $\varepsilon'\in\mathbb{R}_+^\star$, $A_{m-1,\varepsilon'}$ est vraie, et il existe $Q_{\varepsilon'}\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\sup_{u\in\mathbb{R}_+} |e^{-(m-1)u} - e^{-u}Q_{\varepsilon'}(u)| \leqslant \varepsilon'$, ce qui s'écrit (en remplaçant u par $t/2$) :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |e^{-(m-1)t/2} - e^{-t/2}Q_{\varepsilon'}(t/2)| \leqslant \varepsilon'$$

et entraîne :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |e^{-mt/2}R(mt/2) - e^{-t}Q_{\varepsilon'}(t/2)R(mt/2)| \leqslant \varepsilon' M$$

où M désigne la borne supérieure de l'application continue et positive $t \longmapsto e^{-t/2}|R(mt/2)|$, de limite 0 en $+\infty$.

Compte tenu de (1), il vient :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |e^{-mt} - e^{-t}S_{\varepsilon'}(t)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon' M$$

où $S_{\varepsilon'}$ est un polynôme.

En choisissant ε' (dont on disposait jusqu'ici) de façon que $\varepsilon' = \varepsilon/(2M)$, on constate que le polynôme $S_{\varepsilon'}$ correspondant vérifie :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |e^{-mt} - e^{-t}S_{\varepsilon'}(t)| \leqslant \varepsilon.$$

L'assertion $A_{m,\varepsilon}$ est ainsi vérifiée pour la valeur considérée de ε.

— En faisant décrire $\mathbb{R}_+^*$ à ε, on constate que $A_{m,\varepsilon}$ est vraie pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{1.2.11}$ 1°) On donne des réels $a_0, a_1, \dots, a_p$ deux à deux distincts ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le degré n'excède pas p, vérifiant la condition :

Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, la suite $\left(P_n(a_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. (1)

Montrer que la suite des applications polynomiales associées aux P_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une application polynômiale. La convergence est-elle uniforme ?

2°) Même question, en remplaçant (1) par :

Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, la suite $\left(P_n^{(i)}(a_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. (2)

L'ensemble E des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le degré n'excède pas p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie p+1 ; E admet donc une unique structure topologique d'e.v.n. ; toutes les normes sur E sont équivalentes.

1°) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$ donné. On vérifie aisément que l'on dispose des normes sur E, équivalentes :

$$\|\cdot\| : P \longmapsto \sup_{t\in[-A,A]} |P(t)| \quad ; \quad \|\cdot\|_1 : P \longmapsto \sum_{i=0}^{p} |P(a_i)|.$$

On sait (cf. interpolation de Lagrange) qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $Q(a_i) = \lim_{n\to+\infty} P_n(a_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$. On constate que la suite réelle $\left(\| P_n - Q \|_1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour limite ; il en est donc de même pour la suite $\left(\| P_n - Q \|\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui signifie que la suite des fonctions polynômiales associées aux P_n converge uniformément sur $[-A,A]$ vers la fonction polynômiale associée à Q .

— Comme on dispose de A, il y a convergence simple sur $\mathbb{R}$; en revanche, il n'y a pas nécessairement convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, ainsi que l'on s'en assure en adoptant :

$$p = 1 \ ; \ a_0 = 0, \ a_1 = 1 \ ; \ P_n = X/(n+1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Q est ici le polynôme nul ; on a bien $\lim_{n\to+\infty} P_n(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais aucune des fonctions $t \mapsto P_n(t)$, $n \geqslant 1$, n'est bornée sur $\mathbb{R}$.

2°) Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, on note φ_i l'application $P \mapsto P^{(i)}(a_i)$ de E dans $\mathbb{R}$ qui est visiblement une forme linéaire.

• Montrons que $B^\star = \{\varphi_0, \dots, \varphi_p\}$ est une base du dual $E^\star$ de E. Il suffit pour cela de montrer que la famille $B^\star$ de p+1 éléments de l'espace vectoriel $E^\star$ de dimension p+1 est libre.

Etudions $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $\psi = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \varphi_i$ soit la forme nulle.

On a $\psi(X^j) = 0$ pour tout $j \in \{0, \dots, p\}$. En remarquant que $\varphi_i(X^j)$ vaut j! pour $i = j$, et 0 pour $i > j$, il vient :

$$\psi(X^j) = \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i \varphi_i(X^j) + \lambda_j \cdot j!$$

On en déduit, par récurrence, que $\psi = 0$ s'écrit $\lambda_0 = \dots = \lambda_p = 0$. □

• Notons $B = \{\Phi_0, \dots, \Phi_p\}$ la base de E dont $B^\star$ est base duale ; on a :

$$\varphi_i(\Phi_j) = \delta_{i,j} \text{ pour tout } (i,j) \in \{0, \dots, p\}^2.$$

En notant $P_n = \sum_{j=0}^{p} \beta_{n,j} \Phi_j$, on a : $P_n^{(i)}(a_i) = \varphi_i(P_n) = \beta_{n,i}$, et la condition (2) s'écrit :

Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, il existe $\alpha_i = \lim_{n\to+\infty} \beta_{n,i}$.

Soit $\| \cdot \|_2$ la norme sur E, équivalente à $\| \cdot \|$, définie par :

$$\sum_{i=0}^{p} \beta_i \Phi_i \mapsto \sum_{i=0}^{p} |\beta_i| .$$

En désignant par Q l'élément $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i \Phi_i$ de E, on constate que la suite réelle

$\left(\|P_n-Q\|_2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour limite, et on termine comme au 1°) (contre-exemple compris).

Remarque. Au 2°), il n'est pas nécessaire de supposer que les a_i soient distincts.

$\boxed{1.2.12}$ 1°) A tout $n\in\mathbb{N}^*$ on associe $\varphi_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = \int_0^x \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{nt^2}\right)\right) dt.$$

Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'applications C^∞ qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers l'application nulle.

2°) Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ donné. Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe une application $\psi_p : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant :

i) $\psi_p^{(p)}(0) = 1$; ii) $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{p\}$ $\psi_p^{(k)}(0) = 0$;

ii) $\forall k\in\{0,1,\dots,p-1\}$ $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |\psi_p^{(k)}(x)| \leqslant \varepsilon$.

3°) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Trouver une application $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant : $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1°) On sait (cf. par exemple notre cours, III.4.2.1, 2°) que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \exp(-1/t^2)$, si $t\neq 0$ et $g(0) = 0$, est C^∞, et que $g^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ donné, $\theta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\theta_n(t) = 1 - \exp\left(-1/(nt^2)\right) \text{ si } t\neq 0 \; ; \; \theta_n(0) = 1$$

est donc C^∞, et on a $\theta_n^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. En outre θ_n est paire, à valeurs dans $]0,1]$; sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est décroissante.

Au titre de primitive de θ_n sur $[-1,1]$, φ_n est C^∞, et on a :

$$\varphi_n'(0) = 1 \; ; \; \varphi_n^{(k)}(0) = 0 \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

φ_n est impaire, croissante, et : $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |\varphi_n(x)| = \varphi_n(1)$.

• Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\varphi_n(1) = \int_0^{\varepsilon/2} \theta_n(t)dt + \int_{\varepsilon/2}^1 \theta_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \theta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ vérifiant :

$\theta_N(\varepsilon/2) \leqslant \varepsilon/2$, et donc $\varphi_n(1) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.

D'où : $\sup_{x\in[-1,1]} |\varphi_n(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. □

2°) Pour $p=0$, on peut visiblement adopter $\psi_o : t \longmapsto 1$.

• Pour $p \geqslant 1$, désignons par (A_p) l'assertion d'existence d'une application ψ_p vérifiant i), ii) et iii).

Montrons par récurrence : (A_p) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

— (A_1) est vraie, ainsi que l'on s'en assure en adoptant pour ψ_1 l'application φ_N, où N est associé à ε comme il a été dit au 1°).

— Soient $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel (A_p) est vraie, et ψ_p associé à (A_p). Notons ψ_{p+1} l'application $x \longmapsto \int_o^x \psi_p(t)dt$ de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Elle est C^∞ au titre de primitive de ψ_p, elle-même C^∞. On a :

α) $\forall x \in [-1,1] \quad \psi'_{p+1}(x) = \psi_p(x)$; β) $\psi_{p+1}(0) = 0$.

De $\psi_p^{(p)}(0) = 1$, on déduit par α) : $\psi_{p+1}^{(p+1)}(0) = 1$.

De $\psi_p^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{p\}$, on déduit par α) : $\psi_{p+1}^{(k+1)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{p\}$, et, compte tenu de β) : $\psi_{p+1}^{(k)} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{p+1\}$.

De $\sup_{x\in[-1,1]} |\psi_p^{(k)}(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $k \in \{0,1,\dots,p-1\}$, on déduit par α) :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\psi_{p+1}^{(k)}(x)| \leqslant \varepsilon \text{ pour } k \in \{1,2,\dots,p\}.$$

En outre on constate :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\psi_{p+1}(x)| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} |\psi_p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

(A_{p+1}) est aussi vraie. □

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$ donné. Nous savons que, pour $\varepsilon = \dfrac{2^{-n}}{\max(1,|a_n|)}$, l'assertion (A_n) est vraie : il existe $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant :

i) $f_n^{(n)}(0) = 1$; ii) $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{n\}$ $f_n^{(k)}(0) = 0$;

iii) $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ $\sup_{x\in[-1,1]} |f_n^{(k)}(x)| \leqslant \dfrac{2^{-n}}{\max(1,|a_n|)}$

• Nous disposons donc d'une série $\sum a_n f_n$ d'applications $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Comme : $\sup_{x\in[-1,1]} |a_n f_n(x)| \leqslant 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et comme $\sum 2^{-n}$ converge, on constate que $\sum a_n f_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[-1,1]$; les $a_n f_n$ étant C^∞ , la somme f de la série $\sum a_n f_n$ est déjà continue. Nous allons prouver qu'elle est C^∞, et, pour cela, prouver qu'est vraie pour tout

$k \in \mathbf{N}$ l'assertion :

$$(P_k) \quad f \text{ est de classe } C^k, \text{ et } f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n^{(k)}.$$

— (P_0) a déjà été vérifiée.

— Soit $k \in \mathbf{N}$ pour lequel (P_k) est vraie. Chaque $a_n f_n^{(k)}$ est C^1 et :

$$\forall n \geq k+2 \quad \sup_{x \in [-1,1]} |a_n f_n^{(k+1)}(x)| \leq 2^{-n}.$$

Comme $\sum 2^{-n}$ converge, $\sum a_n f_n^{(k+1)}$ converge normalement, et donc uniformément sur $[-1,1]$. Par ailleurs on sait que $f^{(k)}$ est la somme de la série $\sum a_n f_n^{(k)}$. D'après un théorème classique, on en déduit que $f^{(k)}$ est de classe C^1, et que sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n^{(k+1)}$, ce qui établit (P_{k+1}). □

• Enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f^{(n)}(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m f_m^{(n)}(0) = a_n$$

ce qui prouve que f répond à la question.

• *Les deux exercices qui suivent font intervenir des "noyaux intégraux" ; le premier fournit une démonstration du théorème de Weierstrass.*

1.2.13 A tout $n \in \mathbf{N}^*$, on associe l'application $\theta_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\theta_n(t) = (1-t^2)^n \text{ si } t \in [-1,1] \ ; \ \theta_n(t) = 0 \text{ sinon.}$$

On note $\varphi_n = \theta_n / a_n$, où $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n(t)dt$.

1°) Ici $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une application continue, nulle en dehors de $[-1/2,1/2]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, f_n désigne l'application de $[-1/2,1/2]$ dans $\mathbf{R}$ qui est définie par : $x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi_n(t)dt$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-1/2,1/2]$.

2°) Ici $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$, $a<b$, est une application continue. Montrer qu'il existe une suite d'applications polynômiales convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ donné. θ_n est continue, paire et nulle en dehors de $[-1,1]$, ce qui assure l'existence de a_n. On constate :

$$a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geqslant 2\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{2}{n+1}.$$

Le "noyau" $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application positive continue, paire, nulle en dehors de $[-1,1]$, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)dt = 1.$$

1°) a) Soit $x \in [-1/2,1/2]$ fixé. L'application $t \mapsto f(x-t)\varphi_n(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue et nulle en dehors de $[-1,1]$, ce qui assure l'existence de l'intégrale $f_n(x)$. On a :

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x-t) - f(x)\big)\varphi_n(t)dt. \tag{1}$$

— Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé ; f, continue sur $[-3/2,3/2]$, y est uniformément continue, et il existe $\alpha \in]0,1[$ (indépendant de x) tel que :

$$\forall(u,v) \in \left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]^2 \quad (|u-v| \leqslant \alpha) \Rightarrow \big(|f(u)-f(v)| \leqslant \varepsilon\big) \tag{2}$$

On a :

$$0 \leqslant \int_\alpha^{+\infty} \varphi_n(t)dt = \int_\alpha^1 \varphi_n(t)dt \leqslant \frac{(n+1)(1-\alpha^2)^n}{2}$$

et donc : $$\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^{+\infty} \varphi_n(t)dt = 0. \tag{3}$$

En considérant le second membre de (1) comme la somme de trois intégrales respectivement relatives à $]-\infty,-\alpha]$, $[\alpha,+\infty[$ et $]-\alpha,\alpha[$, on constate grâce à (2), que le module de la troisième est majoré par $\varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(t)dt$ et donc par ε ; les modules des deux autres intégrales sont respectivement majorés par :

$$2M\int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(t)dt, \text{ et } 2M\int_\alpha^{+\infty} \varphi_n(t)dt,$$

où : $$M = \sup_{u\in[-1/2,1/2]} |f(u)| = \sup_{u\in\mathbb{R}} |f(u)|.$$

Compte tenu de (3), on peut associer à ε un $N \in \mathbb{N}$ (indépendant de x) tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \int_\alpha^{+\infty} \varphi_n(t)dt = \int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

et donc tel que : $\forall n \geqslant N \quad |f_n(x)-f(x)| \leqslant 3\varepsilon.$ (4)

• $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ étant fixé, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que (4) soit vrai pour tout $x \in [-1/2,1/2]$, ce qui prouve que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-1/2,1/2]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $f_n : [-1/2,1/2] \to \mathbb{R}$ est polynômiale.

En utilisant $f(x-t) = 0$ pour $t \notin [x-1/2,x+1/2]$, il vient :

$$f_n(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} f(x-t)\varphi_n(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(u)\varphi_n(x-u)du.$$

Pour $x \in [-1/2,1/2]$ et $u \in [-1/2,1/2]$, on a : $(x-u) \in [-1,1]$. D'où :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \quad f_n(x) = \frac{1}{a_n}\int_{-1/2}^{1/2} f(u)[1-(x-u)^2]^n du.$$

Reste à développer $[1-(x-u)^2]^n$ par le binôme de Newton. □

2°) Dans le cas général, on note g l'application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur $[a,b]$, qui est nulle en dehors de $]a-1,b+1[$, qui est affine sur $[a-1,a]$ et sur $[b,b+1]$.

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application affine (strictement croissante) telle que : $h(-1/2) = a-1$ et $h(1/2) = b+1$. On constate que $g \circ h$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1/2,1/2]$.

D'après 1°), on dispose d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'applications polynômiales de $[-1/2,1/2]$ dans $\mathbb{R}$ telles que, si l'on note :

$$\delta_n = \sup_{x\in[-1/2,1/2]} |f_n(x)-g\circ h(x)|$$

alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

Or, on constate : $\delta_n = \sup\limits_{t\in[a-1,b+1]} |f_n \circ h^{-1}(t)-g(t)|$.

Il en résulte que g est limite uniforme sur $[a-1,b+1]$ de la suite $(f_n \circ h^{-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'applications visiblement polynômiales. □

1.2.14 A tout $n\in\mathbb{N}$, on associe $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $\varphi_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2t^2}$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n désigne l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $x \longmapsto \int_{-n}^{n} f(x-t)\varphi_n(t)dt$.

1°) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f, simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

2°) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ donné, le "noyau" φ_n est une application continue (ce qui assure l'existence des f_n), positive, paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On a :

$$0 \leqslant \int_{-n}^{n} \varphi_n(t)dt = \frac{2}{\pi}[\text{Arc tg}\, nt]_0^n \leqslant 1$$

et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\varphi_n(t)dt = 1.$

1°) a) Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. Ecrivons :

$$f_n(x) - f(x) = A_n(x) + B_n(x)$$

où : $$A_n(x) = \int_{-n}^{n}\big(f(x-t)-f(x)\big)\varphi_n(t)dt, \tag{1}$$

et : $$B_n(x) = f(x)\Big(\int_{-n}^{n}\varphi_n(t)dt - 1\Big).$$

— Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ fixé ; f étant continue en x, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall u\in\mathbb{R}\quad (|u-x|\leqslant\alpha)\Rightarrow\big(|f(u)-f(x)|\leqslant\varepsilon\big) \tag{2}$$

On a : $\displaystyle\int_{\alpha}^{n}\varphi_n(t)dt = \frac{1}{\pi}[\mathrm{Arc\ tg}\ nt]_{\alpha}^{n}$

et donc : $$\lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{n}\varphi_n(t)dt = 0. \tag{3}$$

En considérant le second membre de (1) comme la somme de trois intégrales respectivement relatives (pour $n\geqslant\alpha$) à $[-n,-\alpha]$, $[\alpha,n]$ et $[-\alpha,\alpha]$, on constate, grâce à (2), que le module de la troisième est majoré par $\varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi_n(t)dt$ et donc par ε ; les modules des deux autres sont respectivement majorés par :

$$2M\int_{-n}^{-\alpha}\varphi_n(t)dt \quad\text{et}\quad 2M\int_{\alpha}^{n}\varphi_n(t),\ \text{où } M=\sup_{u\in\mathbb{R}}|f(u)|$$

Au total, $|f_n(x)-f(x)|$ est majoré par :

$$\varepsilon + 4M\int_{\alpha}^{n}\varphi_n(t)dt + M\Big(1-\int_{-n}^{n}\varphi_n(t)dt\Big)$$

En utilisant (3) et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\varphi_n(t)dt = 1$, on en déduit que l'on peut associer à (x,ε) un $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant N\quad |f_n(x)-f(x)|\leqslant 2\varepsilon. \tag{4}$$

On en déduit que f est limite simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. □

b) Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Pour $x\in[a,b]$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ fixés, reprenons le calcul fait en a), en considérant que $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ est, cette fois, associé à ε (indépendamment de x) par la continuité uniforme de f sur $[a-1,b+1]$, et que (2) est remplacé par :

$$\forall(u,v)\in[a-1,b+1]^2\quad (|u-v|\leqslant\alpha)\Rightarrow\big(|f(u)-f(v)|\leqslant\varepsilon\big).$$

On peut même imposer $\alpha\in\,]0,1]$; ainsi si $x\in[a,b]$ et $t\in[-\alpha,\alpha]$, alors x et $(x-t)$ appartiennent tous deux à $[a-1,b+1]$, et on a encore :

$$\Big|\int_{-\alpha}^{\alpha}\big(f(x-t)-f(x)\big)\varphi_n(t)dt\Big|\leqslant\varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi_n(t)dt.$$

On aboutit, cette fois, à la possibilité d'associer à ε un $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant N \quad \forall x\in[a,b] \quad |f_n(x)-f(x)|\leqslant 2\varepsilon.$$

On en déduit que f est limite uniforme de (f_n) sur $[a,b]$.

2°) Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, on peut reprendre le raisonnement du 1°) b), et constater que f est limite uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

• En revanche, si cette hypothèse supplémentaire n'est pas vérifiée, il se peut que f ne soit pas limite uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Voici un exemple.

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue, à valeurs dans $[0,1]$, assujettie à la condition : pour tout entier $p\geqslant 9$, $f\left(p+(1/\sqrt{p})+(1/p^2)\right)=0$ et $f(t)=1$ si $t\in[p,p+(1/\sqrt{p})]$; on notera que $p\geqslant 9$ assure $(1/\sqrt{p})+(1/p^2)\leqslant 1/2$, ce qui permet de construire une telle fonction f (par exemple affine par morceaux).

Pour tout entier $n\geqslant 9$, considérons la différence :

$$\Delta_n = f_n\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right)-f\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right) = f_n\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Compte tenu de $f\geqslant 0$, $\varphi_n\geqslant 0$ et de $n\geqslant (1/\sqrt{n})+(1/n^2)$, on a :

$$\Delta_n\geqslant\int_{1/n^2}^{1/\sqrt{n}+1/n^2} f\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}-t\right)\varphi_n(t)dt.$$

Comme $f\left(n+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}-t\right)=1$ pour tout $t\in\left[\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right]$, il vient :

$$\Delta_n\geqslant\int_{1/n^2}^{1/\sqrt{n}+1/n^2}\varphi_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\Big[\text{Arc tg}\, nt\Big]_{1/n^2}^{1/\sqrt{n}+1/n^2}$$

Le minorant de Δ_n ainsi obtenu ayant pour limite $1/2$, il est clair que, pour n suffisamment grand, on a $\Delta_n\geqslant 1/4$. On en déduit :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\geqslant 1/4. \qquad \square$$

$\boxed{1.2.15}$ PREMIER THEOREME DE DINI. Soient E un espace topologique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante ($\forall n \quad f_n\leqslant f_{n+1}$) d'applications continues de E dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur E vers une application continue $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

• Soit $x\in E$; $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, croissante, de limite $f(x)$, et on a $f_n(x)\leqslant f(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$; $\left(g_n=f-f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante d'applications continues et positives qui converge sur E vers la fonction nulle ; il s'agit de prouver que la convergence est uniforme.

• Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \{x \in E \mid g_n(x) \geqslant \varepsilon\}$; image réciproque du fermé $[\varepsilon, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par une application continue, X_n est un fermé de E. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est visiblement décroissante (pour l'inclusion) et son intersection est vide ; en effet s'il existait un $x \in E$ commun aux X_n, on aurait $g_n(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en contradiction avec $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = 0$. Comme E est compact, la famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés de E dont l'intersection est vide admet une sous-famille finie dont l'intersection est vide ; la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante, ceci implique l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que $X_p = \phi$, et donc que $X_n = \phi$ pour tout $n \geqslant p$.

Pour tout $n \geqslant p$ on a donc : $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in E$. □

Remarques. a) Le théorème reste valable si l'on remplace "suite croissante" par "suite décroissante" (changer f_n en $-f_n$ et f en $-f$).

b) Le résultat ne subsiste pas si l'on supprime la clause de compacité de E. Soit en effet $E = [0,1[$; la suite (f_n) des applications continues $t \longmapsto t^n$ est décroissante ; elle converge simplement sur E vers la fonction nulle, qui est continue ; mais la convergence n'est pas uniforme à cause de $\sup\limits_{t \in [0,1[} |t^n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{1.2.16}$ Montrer que l'application $t \longmapsto \sqrt{t}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des applications $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$P_0(t) = 0 \ : \ P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - P_n^2(t)\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

• On vérifie aisément par récurrence que les applications P_n sont polynômiales.

• Montrons par récurrence qu'est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'assertion :

$$(A_n) \quad \forall t \in [0,1] \quad 0 \leqslant P_n(t) \leqslant \sqrt{t}.$$

— Il est évident que (A_0) est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel (A_n) est vraie. De $P_n(t) \geqslant 0$ et $t - P_n^2(t) \geqslant 0$, on déduit $P_{n+1}(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$. D'autre part, pour $t \in [0,1]$:

$$\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right)\right).$$

Or on a : $\sqrt{t} - P_n(t) \geqslant 0$ et $\sqrt{t} + P_n(t) \leqslant 2\sqrt{t} \leqslant 2$.
On en déduit : $\sqrt{t} - P_{n+1}(t) \geqslant 0$. (A_{n+1}) est donc vraie. □

• Pour tout $t \in [0,1]$, la suite $(P_n(t))$, visiblement croissante, est majorée par $\sqrt{t}$; elle admet donc une limite $f(t)$ qui vérifie :

$$f(t) \geqslant 0 \text{ et } f(t) = f(t) + \frac{1}{2}\big(t - f^2(t)\big), \text{ et donc } f(t) = \sqrt{t}.$$

• La suite croissante (P_n) d'applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ converge ainsi simplement sur $[0,1]$ vers l'application $t \mapsto \sqrt{t}$. Celle-ci étant continue, la convergence est uniforme d'après l'exercice précédent.

Remarque. En utilisant $\sqrt{t^2} = |t|$, on met en évidence une suite d'applications polynômiales qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers l'application continue $t \mapsto |t|$ (cf. aussi exercice 1.2.1). Il en résulte que, pour $\alpha \in I$, où $I = [-1/2, 1/2]$, $t \mapsto |t-\alpha|$ est limite uniforme sur I d'une suite d'applications polynômiales.

On montre que la famille $\big(t \mapsto |t-\alpha|\big)_{\alpha \in I}$ est une base de l'espace des applications continues et affines par morceaux $I \to \mathbb{R}$, et que celui-ci est dense, pour la norme de la convergence uniforme, dans l'espace des applications continues $I \to \mathbb{R}$. Toute application continue $I \to \mathbb{R}$ est donc limite uniforme d'une suite d'applications polynômiales ; ce résultat s'étend aisément au cas où I est l'un quelconque des intervalles compacts de $\mathbb{R}$; on obtient ainsi une nouvelle démonstration du théorème de Weierstrass.

1.2.17 SECOND THEOREME DE DINI. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications croissantes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une application continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

• Remarquons que f est croissante. En effet, pour $(t',t'') \in [a,b]^2$, tel que $t' < t''$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(t') \leqslant f_n(t'') \text{ ; par passage à la limite : } f(t') \leqslant f(t'').$$

• Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La continuité de f sur le compact $[a,b]$ étant uniforme, il existe une subdivision $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de $[a,b]$, $a_0 = a$, $a_p = b$, telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \forall (t',t'') \in [a_{i-1}, a_i]^2 \qquad |f(t') - f(t'')| \leqslant \varepsilon.$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$; f_n étant croissante, on a, pour tout $t \in [a_{i-1}, a_i]$:

$$f(t) - f_n(a_i) \leqslant f(t) - f_n(t) \leqslant f(t) - f_n(a_{i-1})$$

et : $$|f(t) - f_n(t)| \leqslant \max_{j \in \{i-1, i\}} |f(t) - f_n(a_j)|$$

et : $$|f(t) - f_n(t)| \leqslant \varepsilon + \max_{k \in \{0, \dots, p\}} |f(a_k) - f_n(a_k)| \tag{1}$$

ainsi qu'on le constate en utilisant, pour $j\in\{i-1,i\}$:

$$|f(t)-f_n(a_j)| \leqslant |f(t)-f(a_j)| + |f(a_j)-f_n(a_j)|.$$

— On constate que, pour $n\in\mathbb{N}$ donné, (1) vaut pour tout $t\in[a,b]$.

— Pour $k\in\{0,\dots,p\}$ donné, d'après $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a_k)=f(a_k)$, il existe $N_k\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant N_k \quad |f(a_k)-f_n(a_k)|<\varepsilon.$$

— En notant $N=\max\limits_{k\in\{0,\dots,p\}} N_k$, il vient :

$$\forall n\geqslant N \quad \max_{k\in\{0,\dots,p\}} |f(a_k)-f_n(a_k)|<\varepsilon$$

et : $$\forall n\geqslant N \quad \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-f_n(t)|\leqslant 2\varepsilon.$$ □

Remarque. Le théorème reste valable si l'on remplace "suite d'applications croissantes" par "suite d'applications décroissantes".

1.2.18 1°) A tout $n\in\mathbb{N}^*$ on associe $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f_n(t)=(1-t/n)^n \text{ si } t\in[0,n] \ ; \ f_n(t)=0 \text{ si } t\geqslant n.$$

Montrer que la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers l'application $f : t\mapsto e^{-t}$.

2°) Montrer $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}(1-t^2/n)^n dt$. En déduire la valeur de I.

1°) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est visiblement continue, positive et décroissante.

• Soit $t\in\mathbb{R}_+$ fixé. On choisit un entier $n_0>t$; les suites numériques $\big(f_n(t)\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(f_n(t)\big)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature, et, éventuellement, de même limite. Or, d'après :

$$\forall n\geqslant n_0 \quad f_n(t)=\exp\big(n\,\mathrm{Log}\,(1-t/n)\big)$$

la seconde est convergente, de limite e^{-t}.

• L'application continue f est ainsi limite simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

• On constate en utilisant l'exercice précédent (second théorème de Dini) que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[0,A]$, $A\in\mathbb{R}_+^*$ (on pourrait aussi utiliser le premier théorème de Dini car, pour $t\in\mathbb{R}_+$ fixé, la suite

$(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, mais la vérification de ce dernier résultat n'est pas immédiate).

• De $\mathrm{Log}(1+x)\leqslant x$ pour tout $x>-1$, on déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \forall t\in\mathbb{R}_+ \quad 0\leqslant f_n(t)\leqslant f(t). \tag{1}$$

— Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ fixé. On dispose de $A\in\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t\geqslant A \quad e^{-t}\leqslant\varepsilon.$$

On a déjà : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \sup\limits_{t\in[A,+\infty[} |f(t)-f_n(t)|\leqslant\varepsilon.$

D'autre part, en utilisant la convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[0,A]$, on constate qu'il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n\geqslant N \quad \sup_{t\in[0,A]} |f(t)-f_n(t)|\leqslant\varepsilon.$$

Au total : $\forall n\geqslant N \quad \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)-f_n(t)|\leqslant\varepsilon.$ □

2°) a) D'après le 1°), $g : t\longmapsto e^{-t^2}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'applications continues $\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ définies par

$$g_n(t)=(1-t^2/n)^n \text{ si } t\in[0,\sqrt{n}] \;;\; g_n(t)=0 \text{ si } t\geqslant\sqrt{n}$$

et on a : $0\leqslant g_n(t)\leqslant g(t)$ pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}_+$.

— On vérifie sans difficulté la convergence des intégrales impropres :

$$I=\int_0^{+\infty} g(t)dt \;;\; I_n=\int_0^{+\infty} g_n(t)dt=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

Pour tout $A\in\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

$$0\leqslant I-I_n\leqslant\int_0^A\big(g(t)-g_n(t)\big)dt+\int_A^{+\infty} g(t)dt.$$

— Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ fixé. La convergence de I permet de fixer A tel que :

$$\int_A^{+\infty} g(t)dt\leqslant\varepsilon.$$

Comme g est limite uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,A]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^A\big(g(t)-g_n(t)\big)dt=0.$$

Il existe donc $N\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geqslant N$:

$$\int_0^A\big(g(t)-g_n(t)\big)dt\leqslant\varepsilon, \text{ et donc : } 0\leqslant I-I_n\leqslant 2\varepsilon.$$

— On a ainsi : $I=\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. □

b) $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\, du.$

En utilisant l'exercice 4.1.18 du tome I, on obtient :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u\, du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \text{ au voisinage de } +\infty.$$

D'où : $I = \sqrt{\pi}/2$.

1.3. SERIES D'APPLICATIONS.

$\boxed{1.3.1}$ Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ la série des applications $t \mapsto \frac{1}{n+n^2t^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Etudier sa convergence, et la continuité de sa somme f.

2°) Montrer que f(t) admet un développement limité à l'ordre 3, au voisinage de $+\infty$, dans l'échelle $(t^{-\lambda})_{\lambda\in\mathbb{N}}$. Ecrire ce développement.

3°) Trouver un développement asymptotique de f(t) au voisinage de 0.

1°) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$, paire, et sa restriction $\mathbb{R}_+$ est décroissante.

En utilisant $u_n(0) = \frac{1}{n}$ et $0 < u_n(t) < \frac{1}{n^2t^2}$ si $t \neq 0$, on constate que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(t)$ converge si, et seulement si $t \neq 0$; il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}^*$, et $f = \sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$; on lui associe : $D_a =]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$. On a :

$$\forall t\in D_a \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad 0 < u_n(t) \leqslant u_n(a).$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(a)$ converge, on en déduit que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement et donc uniformément sur D_a, ce qui, du fait de la continuité des u_n, entraîne que la restriction de f à D_a est continue, et que f est continue en tout point de $\mathring{D}_a$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, nous disposons de $a\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $t\in\mathring{D}_a$; d'où la continuité de f en t. Au total, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2°) Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\frac{1}{n^2(t^2+1)} \leqslant u_n(t) \leqslant \frac{1}{n^2t^2} .$$

D'où, en sommant de $n = 1$ à $+\infty$:

$$\frac{\sigma}{t^2+1} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\sigma}{t^2} , \text{ où } \sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et : $0 \leqslant \frac{\sigma}{t^2} - f(t) \leqslant \frac{\sigma}{t^2(t^2+1)}$.

En conclusion : $f(t) = \frac{\sigma}{t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right)$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On montre que $\sigma = \pi^2/6$.

2°) En posant $x = 1/t^2$, on a, pour tout $t \neq 0$:

$$f(t) = g(1/t^2), \text{ avec } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right), \quad x \in \mathbf{R}_+^* .$$

Il s'agit d'étudier $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour $x \in \mathbf{N}^*$, on constate que, pour tout $n \geqslant x$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+x}\right)$$

ce qui entraîne : $g(x) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x}$.

C désignant la constante d'Euler, il en résulte que l'application $\varepsilon : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par : $\varepsilon(x) = g(x) - \operatorname{Log} x - C$ vérifie :

$$\lim_{x \to +\infty, x \in \mathbf{N}^*} \varepsilon(x) = 0.$$

Comme g est visiblement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, en notant $[x]$ la partie entière de x :

$$g([x]) \leqslant g(x) \leqslant g(1 + [x])$$

et (pourvu que $[x] > 0$) :

$$\operatorname{Log}[x] + C + \varepsilon([x]) \leqslant g(x) \leqslant \operatorname{Log}(1 + [x]) + C + \varepsilon(1 + [x])$$

D'où : $\quad g(x) = \operatorname{Log} x + C + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$

Revenant à l'étude de f au voisinage de 0, il vient :

$$f(t) = -2 \operatorname{Log}|t| + C + \omega(t), \quad \lim_{t \to 0, t \neq 0} \omega(t) = 0.$$

1.3.2 Existe-t-il $\lim_{n \to +\infty} x_n$, où $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$?

- Ecrivons : $x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(n)$, avec :

$$u_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \; ; \; u_k(n) = 0 \text{ si } k \geqslant n.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ fixé, nous avons : $\lim_{n \to +\infty} u_k(n) = e^{-k}$.

- Le lecteur vérifiera aisément que, pour tout $x > 0$:

$$n\left(\operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \leqslant -x \quad \text{et donc} \quad \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$$

D'où : $\quad \forall k \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_k(n) \leqslant e^{-k}.$

Il en résulte que la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ d'applications de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{R}$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbf{N}^*$. D'après le théorème d'interversion des limites, sa somme, qui est $n \mapsto x_n$, admet pour limite au point $+\infty \in \overline{\mathbf{R}}$ la somme de la série $\sum_{k\geq 1} e^{-k}$, à savoir $1/(e-1)$; autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1/(e-1).$$

Remarque. La méthode que nous venons d'utiliser (dite de Weierstrass) exige que l'on ordonne la somme de telle sorte que les termes les plus petits figurent en dernier. Ici une écriture telle que :

$$x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(n), \text{ avec } v_k(n) = \left(\frac{k}{n}\right)^n \text{ si } 1 \leq k \leq n-1, \ldots$$

n'aurait rien donné.

- Voici un autre exemple d'application de cette méthode.

$\boxed{1.3.3}$ Soit E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme continu de E.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose : $v_n = \left(\mathrm{Id}_E + u/n\right)^n$. Trouver la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

- $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$, qui est lui-même un Banach.
- Par la formule de Newton : $v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$, avec :

$$u_k(n) = \frac{1}{n^k} C_n^k u^k \text{ si } 0 \leq k \leq n \text{ ; } u_k(n) = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ sinon.}$$

- Le lecteur constatera aisément que, pour $0 \leq k \leq n$: $\frac{1}{n^k} C_n^k \leq \frac{1}{k!}$.

D'où : $\quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \|u_k(n)\| \leq \|u\|^k/k!$

La convergence de la série numérique $\sum \|u\|^k/k!$ prouve alors la convergence normale sur $\mathbf{N}^*$ de la série d'applications $n \mapsto \sum_{k\geq 0} u_k(n)$.

Comme par ailleurs, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_k(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{u^k}{k!} = \frac{u^k}{k!}$$

nous sommes en droit d'appliquer le théorème d'interversion des limites qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k/k! = e^u.$$

Remarque. La même méthode s'applique dans $\mathbf{C}$ pour prouver :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad \lim_{n\to+\infty} (1+z/n)^n = e^z$$

que le lecteur pourra aussi retrouver par des procédés élémentaires en mettant $(1+z/n)$ sous forme trigonométrique.

1.3.4 1°) Trouver l'ensemble de définition D de la fonction $\theta : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^t}$, et montrer que θ est C^∞ sur D.

2°) Pour $t > 1$, exprimer $\theta(t)$ en utilisant $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^t$.

1°) D'après l'étude de la série de Riemann alternée, on a $D = \mathbf{R}_+^*$.

• On note u_n l'application $t \mapsto (-1)^{n+1}/n^t$ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$. Elle est C^∞ et :

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad \forall t \in \mathbf{R}_+^* \quad u_n^{(p)}(t) = (-1)^{n+p+1} \frac{(\operatorname{Log} n)^p}{n^t}$$

• Nous allons montrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$, $a > 0$, et donc sur tout intervalle compact inclus dans $\mathbf{R}_+^*$. Il en résultera que θ est C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et que :

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad \forall t \in \mathbf{R}_+^* \quad \theta^{(p)}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+p+1} \frac{(\operatorname{Log} n)^p}{n^t}$$

• Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ donné.

— Etudions d'abord le cas $p = 0$. Fixons $t \geq a$. La suite numérique $(|u_n(t)|)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante, de limite 0. D'après l'étude des séries alternées, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)\right| \leq \frac{1}{(n+1)^t} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{-a} = 0$, la convergence uniforme est acquise pour $\sum_{n\geq 1} u_n$.

— Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Fixons $t \geq a$. Une dérivation montre que la fonction $x \longmapsto (\operatorname{Log} x)^p . x^{-t}$ est décroissante sur $[e^{p/t},+\infty[$ et a fortiori sur $[e^{p/a},+\infty[$. Soit N un entier tel que $N > e^{p/a}$. La suite numérique $(|u_n^{(p)}(t)|)_{n\geq N}$ est décroissante, de limite 0. On en déduit que la série alternée $\sum_{n\geq 1} u_n^{(p)}(t)$ est convergente. En outre on a :

$$\forall n \geq N \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k^{(p)}(t)\right| \leq \frac{[\operatorname{Log}(n+1)]^p}{(n+1)^t} \leq \frac{[\operatorname{Log}(n+1)]^p}{(n+1)^a}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\text{Log}(n+1)\right)^p \cdot (n+1)^{-a} = 0$, le résultat est acquis pour $\sum\limits_{n\geq 1} u_n^{(p)}$.

Remarque. L'étude, classique, de la fonction $\zeta : t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1/n^t$, qui est définie sur $]1,+\infty[$ est sensiblement plus simple, en ce sens que, pour $a \in]1,+\infty[$ et $p \in \mathbf{N}$ on a :

$$\sup_{t\in[a,+\infty[} \left|\frac{(-1)^p (\text{Log}\, n)^p}{n^t}\right| \leqslant \frac{(\text{Log}\, n)^p}{n^a}$$

et que la série de Bertrand $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(\text{Log}\, n)^p}{n^a}$ converge. Il en résulte que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la série d'applications $\sum\limits_{n\geq 1} v_n^{(p)}$, $v_n(t) = 1/n^t$, converge normalement, donc uniformément sur tout $[a,+\infty[$, $a > 1$. On a :

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad \forall t \in]1,+\infty[\qquad \zeta^{(p)}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\text{Log}\, n)^p}{n^t}$$

2°) <u>Expression de</u> $\theta(t)$ <u>pour</u> $t > 1$. On peut écrire : $\theta(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^t}$ et donc :

$$\theta(t) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^t} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^t}\right)$$

et, compte tenu de ce que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^t}$ converge (puisque $t > 1$) :

$$\theta(t) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^t}\right) - \lim_{n\to+\infty} \left(2^{1-t} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^t}\right)$$

et enfin : $\theta(t) = \left(1 - 2^{1-t}\right)\zeta(t)$.

Remarque. Compte tenu de $\theta(1) = \text{Log}\, 2$, on en déduit : $\zeta(t) \sim 1/(t-1)$ lorsque t tend vers 1 $(t > 1)$.

De $1 - 1/2^t \leqslant \theta(t) \leqslant 1$, on déduit $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = 1$; d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} \zeta(t) = 1$.

$\boxed{1.3.5}$ 1°) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$, où $f_n(t)$ est $(-1)^{n+1} \text{Log}\left(1 + \frac{t}{n}\right)$, converge simplement sur $]-1,+\infty]$ et que sa somme f est C^∞.

2°) Montrer que f est développable en série entière à l'origine ; trouver le rayon de convergence du développement.

• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, Def f_n contient $]-1,+\infty[$; nous considérons les f_n comme des applications de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$; ces applications sont C^∞, et (par récurrence) :

$$\forall p \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in]-1,+\infty[\qquad f_n^{(p)}(t) = (-1)^{n+1} \frac{(-1)^{p+1}(p-1)!}{(t+n)^p} \tag{1}$$

— Nous utiliserons le résultat du cours : si $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite réelle décroissante, de limite 0, alors la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\alpha_n$ converge, et, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\alpha_k\right|\leq\alpha_{n+1} \tag{2}$$

— Pour tous $t\in\,]-1,+\infty[$ et $p\in\mathbf{N}$ $\{$avec $f^{(o)}=f\}$, ce résultat s'applique à la série numérique $\sum_{n\geq 1}f_n^{(p)}(t)$ qui est alternée : conséquence immédiate de (1) si $p\in\mathbf{N}^*$; pour $p=0$, cela se déduit aisément de :

$$|f_n(t)|=\mathrm{Log}\left(1+\frac{t}{n}\right) \text{ si } t\geq 0 \ ; \ |f_n(t)|=-\mathrm{Log}\left(1+\frac{t}{n}\right) \text{ si } -1<t<0.$$

— La convergence simple des $\sum_{n\geq 1}f_n^{(p)}$ sur $]-1,+\infty[$ en résulte.

• Nous allons montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle compact inclus dans $]-1,+\infty[$. Nous notons :

$$\rho_{p,n}(t)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k^{(p)}(t).$$

— Soient $p\in\mathbf{N}^*$ et $a>-1$ fixés. Par (2) et (1) :

$$\forall t\in[a,+\infty[\qquad |\rho_{p,n}(t)|\leq\frac{(p-1)!}{(t+n+1)^p}\leq\frac{(p-1)!}{(a+n+1)^p}$$

D'où la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1}f_n^{(p)}$ sur $[a,+\infty[$

— Soit (a,b) fixé, tel que $-1<a<0<b$. Par (2) :

$$\forall t\in[a,b]\qquad |\rho_{0,n}(t)|\leq\left|\mathrm{Log}\left(1+\frac{t}{n+1}\right)\right|\leq\mu_n$$

avec : $\mu_n=\max\left(\mathrm{Log}\left(1+\frac{b}{n+1}\right),\ -\mathrm{Log}\left(1+\frac{a}{n+1}\right)\right).$

D'où la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1}f_n$ sur $[a,b]$. □

(Cette dernière pouvait d'ailleurs se déduire de la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1}f'_n$ sur $[a,+\infty[$ et de la convergence simple de $\sum_{n\geq 1}f_n$).

• En utilisant le théorème du cours sur la dérivation d'une série d'applications, et en raisonnant par récurrence, on en déduit que la restriction de f à tout intervalle compact inclus dans $]-1,+\infty[$ est C^∞. Comme tout point de $]-1,+\infty[$ appartient à l'intérieur de l'un de ces intervalles, f admet des dérivées successives de tous ordres, données par :

$$\forall p\in\mathbf{N}^*\qquad f^{(p)}(t)=(-1)^{p+1}(p-1)!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(t+n)^p}$$

2°) La série de Mac-Laurin de f est $\sum_{p\geq 1}(-1)^{p+1}\frac{\theta(p)}{p}t^p$, $\theta(p)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$.

Pour $t=-1$, la série $\sum_{p\geq 1}\frac{\theta(p)}{p}$ diverge (d'après $\lim_{p\to+\infty}\theta(p)=1$, cf. 1.3.4).

Nous allons montrer que f coïncide sur $]-1,1[$ avec la somme de sa série de Mac-Laurin, ce qui permettra d'affirmer que f admet un développement en série entière à l'origine de rayon de convergence 1.

• Soient $t\in]-1,1[$, et $m\in\mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

$$u_{m,n}(t)=\text{Log}\left(1+\frac{t}{n}\right)-\sum_{p=1}^{m}(-1)^{p+1}\frac{t^p}{pn^p}=\sum_{p=m+1}^{+\infty}(-1)^{p+1}\frac{t^p}{pn^p}$$

On a :

$$|u_{m,n}(t)|\leqslant\frac{1}{m+1}\sum_{p=m+1}^{+\infty}\left(\frac{|t|}{n}\right)^p=\frac{1}{m+1}\left(\frac{|t|}{n}\right)^{m+1}\frac{1}{1-|t|/n}$$

et donc, en utilisant $|t|/n\leqslant|t|$ et $|t|\leqslant 1$:

$$|u_{m,n}(t)|\leqslant\frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{n^{m+1}}\cdot\frac{1}{1-|t|}\ .$$

D'où la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}u_{m,n}(t)$, et l'inégalité :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_{m,n}(t)\right|\leqslant\frac{1}{1-|t|}\cdot\frac{\zeta(m+1)}{m+1}\ ,\quad \zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\ .$$

Compte tenu de l'existence de f(t) et des $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}=\theta(p)$; il vient :

$$\left|f(t)-\sum_{p=1}^{m}(-1)^{p+1}\frac{\theta(p)}{p}t^p\right|\leqslant\frac{1}{1-|t|}\ \frac{\zeta(m+1)}{m+1}$$

– Laissant $t\in]-1,1[$ fixé, faisons tendre m vers $+\infty$. En utilisant le résultat $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$, nous obtenons (cf. 1.3.4) :

$$f(t)-\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1}\frac{\theta(p)}{p}t^p=0.$$ □

1.3.6 1°) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs, de limite $+\infty$. Montrer que l'on dispose de l'application continue :

$$f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\qquad t\mapsto f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\exp(-a_nt).$$

2°) Montrer que $\int_0^{+\infty}f(t)dt$ converge, et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$.

<u>Cas particuliers</u>. a) $a_n=n+1$; b) $a_n=2n+1$.

On considère la série $\sum(-1)^nu_n$, où u_n est l'application $t\mapsto\exp(-a_nt)$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Pour $t\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, la suite $(u_n(t))$ est décroissante, de limite 0. D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum(-1)^nu_n(t)$ converge ;

en outre sa somme est positive et :

$$\forall n\in\mathbf{N} \qquad \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k(t)\right| \leq u_n(t) = \exp(-a_n t). \qquad (1)$$

— La série $\sum(-1)^n u_n$ converge donc simplement sur $\mathbf{R}_+^*$. Soit f sa somme.

• Soit $\alpha\in\mathbf{R}_+^*$ fixé. On a : $\sup\limits_{t\in[\alpha,+\infty[}\left(\exp(-a_n t)\right) = \exp(-a_n\alpha)$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp(-a_n\alpha) = 0$, la convergence de $\sum(-1)^n u_n$ est uniforme sur $[\alpha,+\infty[$; les $(-1)^n u_n$ étant continues, la restriction de f à $[\alpha,+\infty[$ est continue ; f est donc continue en tout $t\in\,]\alpha,+\infty[$.

— Pour tout $t\in\mathbf{R}_+^*$, on intercale $\alpha\in\,]0,t[$, et on constate que f est continue en t. □

2°) Soit $n\in\mathbf{N}$. Pour tout $X\in\mathbf{R}_+$ on a :

$$\int_0^X \exp(-a_n t)\,dt = \frac{1}{a_n}\left(1-\exp(-a_n X)\right).$$

Compte tenu de $a_n > 0$, on en déduit l'existence et la valeur de :

$$\int_0^{+\infty}\exp(-a_n t)\,dt = \frac{1}{a_n}.$$

— En faisant $n=0$ dans (1) :

$$\forall t\in\mathbf{R}_+^* \qquad |f(t)| \leq \exp(-a_0 t),\ \text{et d'ailleurs } f(t) \geq 0.$$

On en déduit que f, prolongée par $f(0)=0$, admet sur $[0,+\infty[$ une intégrale impropre convergente. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a :

$$\left|f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)\right| \leq \exp(-a_n t) \qquad (1)$$

et donc, les intégrales en jeu étant toutes convergentes :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{a_k}\right| \leq \frac{1}{a_n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$. □

• a) Pour $a_n = n+1$, f est l'application de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$:

$$t\mapsto f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt = \text{Log}\,2$, nous retrouvons l'égalité classique :

$$\text{Log}\,2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}. \qquad \square$$

b) Pour $a_n = 2n+1$, f est l'application de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$:

$$t\mapsto f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\exp\left(-(2n+1)t\right) = \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt = \frac{\pi}{4}$, nous retrouvons l'égalité classique :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \qquad \square$$

• *On se propose de trouver deux exemples d'une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui n'est dérivable en aucun point de* $\mathbb{R}$*, et qui n'est monotone sur aucun intervalle (d'intérieur non vide) de* $\mathbb{R}$*. Pour cela on utilise le résultat de l'exercice suivant.*

$\boxed{1.3.7}$ Soit une application $f :]t_0-\alpha, t_0+\alpha[\to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1°) On suppose que f est dérivable en t_0. Montrer :

$$f'(t_0) = \lim_{(t,t')\to(0,0),\,(t,t')\in A} \frac{f(t')-f(t)}{t'-t}$$

où : $A = \{(t,t') \in \mathbb{R}^2 \mid (t_0-\alpha < t \leq t_0 \leq t' < t_0+\alpha) \wedge (t \neq t')\}$.

2°) On suppose qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) à valeurs dans $]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$, de limite commune t_0, telles que $a_n \leq t_0 \leq b_n$ et $a_n \neq b_n$ pour tout n, et que la suite $n \mapsto \dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ soit divergente. Que peut-on conclure ?

1°) Nous disposons de l'application $\varepsilon :]-\alpha,\alpha[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t_0+h) = f(t_0) + h\,f'(t_0) + h\,\varepsilon(h) \text{ si } h \neq 0 \ ; \ \varepsilon(0) = 0$$

et cette application est continue au point 0. Nous avons :

$$\frac{f(t')-f(t)}{t'-t} - f'(t_0) = \frac{t'-t_0}{t'-t}\cdot\varepsilon(t'-t_0) + \frac{t_0-t}{t'-t}\cdot\varepsilon(t-t_0)$$

La valeur absolue du second membre est majorée par $|\varepsilon(t'-t_0)| + |\varepsilon(t-t_0)|$. $\square$

2°) La conclusion est : f n'est pas dérivable au point t_0. En effet, si $f'(t_0)$ existait, on aurait d'après le 1°) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(t_0).$$

$\boxed{1.3.8}$ FONCTION DE VAN DER WAERDEN. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$\langle t \rangle = d(t,\mathbb{Z}) = \inf_{m\in\mathbb{Z}} |t-m|.$$

1°) A tout $n \in \mathbb{N}$ on associe l'application $u_n : t \longmapsto \dfrac{< 10^n t >}{10^n}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et que sa somme f est continue.

2°) Montrer que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

3°) Montrer que f n'est monotone sur aucun intervalle d'intérieur non vide.

Dans tout espace métrique E, l'application $x \mapsto d(x,A)$, où A est une partie non vide de E, est continue ; l'application $< >$, et donc les applications u_n, sont ainsi continues ; par ailleurs elles sont visiblement 1-périodiques.

1°) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a visiblement $<t> \in [0,1/2]$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t)| \leqslant 10^{-n}/2.$$

Comme la série numérique $\sum 10^{-n}/2$ converge, la série d'applications $\sum u_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$; les u_n étant continues, la somme f est continue ; elle est 1-périodique.

2°) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Il admet un développement décimal <u>propre</u> : $t_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \, 10^{-k}$, où $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$, où $\alpha_k \in \{0,1,\dots,9\}$ pour $k \geqslant 1$, la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ n'étant pas constante de valeur 9 à partir d'un certain rang. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot 10^{-k} \ ; \ b_n = a_n + 10^{-n},$$

ce qui entraîne : $a_n \leqslant t_0 < b_n$; $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = t_0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = t_0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Nous avons :

$$f(b_n) - f(a_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{<10^k b_n> - <10^k a_n>}{10^k}$$

— Si $k \geqslant n$, $10^k b_n$ et $10^k a_n$ diffèrent d'un entier, et $<10^k b_n> = <10^k a_n>$.

— Si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $10^k a_n$ et $10^k b_n$ sont respectivement congrus modulo 1 à :

$$A_{n,k} = \frac{\alpha_{k+1}}{10} + \sum_{\ell=k+2}^{n} \frac{\alpha_\ell}{10^{\ell-k}} \leqslant \frac{\alpha_{k+1}}{10} + \sum_{\ell=k+2}^{n} \frac{9}{10^{\ell-k}},$$

et : $$B_{n,k} = A_{n,k} + \frac{1}{10^{n-k}} \leqslant \frac{\alpha_{k+1}}{10} + \sum_{\ell=k+2}^{n} \frac{9}{10^{\ell-k}} + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \frac{9}{10^{\ell-k}}$$

On a : $$\frac{\alpha_{k+1}}{10} \leqslant A_{n,k} < B_{n,k} \leqslant \frac{1+\alpha_{k+1}}{10}.$$

On en déduit : $<10^k b_n> - <10^k a_n> = \varepsilon_k (B_{n,k} - A_{n,k}) = \varepsilon_k \cdot 10^{k-n}$,

où : $\varepsilon_k = 1$ si $\alpha_{k+1} \in \{0,1,\dots,4\}$, et $\varepsilon_k = -1$ si $\alpha_{k+1} \in \{5,6,\dots,9\}$.

Il en résulte : $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k,\ \varepsilon_k \in \{-1,1\}$. (1)

Il n'existe donc pas : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$. □

Reste à appliquer le 2°) de l'exercice précédent.

3°) Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On peut trouver $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ décimal, i.e. tel qu'à partir d'un certain rang les α_k soient nuls, et donc qu'à partir d'un certain rang les ε_k soient égaux à 1. En utilisant (1), avec n assez grand, on en déduit qu'il existe $a_n \in I$ et $b_n \in I$ tels que

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} > 0 .$$

— De même, en utilisant $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ tel que les α_k soient égaux à 5 à partir d'un certain rang, on montre qu'il existe $a'_n \in I$ et $b'_n \in I$ tels que

$$\frac{f(b'_n) - f(a'_n)}{b'_n - a'_n} < 0.$$

La restriction de f à I n'est donc pas monotone.

$\boxed{1.3.9}$ FONCTION DE WEIERSTRASS. Reprendre l'exercice précédent en adoptant :

$u_n(t) = 2^{-n} \cos m^n t$, où m est un entier pair donné, tel que $m \geq 6$.

1°) La convergence normale de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$ résulte de :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |u_n(t)| = 2^{-n}\right) \wedge \left(\sum 2^{-n} \text{ converge}\right)$$

Les u_n et la fonction somme f sont continues et 2π-périodiques.

2°) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $j_n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$j_n \pi m^{-n} \leq t_0 < (1+j_n) \pi m^{-n}.$$

En notant : $a_n = j_n \pi m^{-n}$ et $b_n = (1+j_n) \pi m^{-n}$, nous avons :

$$a_n \leq t_0 < b_n \ ;\ b_n - a_n = \pi m^{-n} \ ;\ \lim_{n\to+\infty} a_n = t_0 \ ;\ \lim_{n\to+\infty} b_n = t_0 .$$

Il suffit donc de prouver que la suite $n \mapsto \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ est divergente.

• Pour $t\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$ nous avons, avec des notations classiques :

$$f(t)=S_{n-1}(t)+2^{-n}\cos m^n t+R_n(t).$$

Faisons successivement $t=a_n$ et $t=b_n$.

★ En utilisant : m^{k-n} est un entier pair pour $k>n$, nous avons :

$$R_n(a_n)=R_n(b_n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}2^{-k}.$$

★ $2^{-n}\left(\cos m^n a_n-\cos m^n b_n\right)=\frac{2}{2^n}\cos(j_n\pi)=\frac{2}{2^n}(-1)^{j_n}.$

★ Pour $0\leqslant k\leqslant n-1$:

$$\left|\cos m^k a_n-\cos m^k b_n\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{m^k(b_n-a_n)}{2}\right|\leqslant m^k\cdot\pi\, m^{-n}.$$

D'où :

$$\left|S_{n-1}(b_n)-S_{n-1}(a_n)\right|\leqslant\frac{\pi}{m^n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{m}{2}\right)^k\leqslant\frac{\pi}{2^n}\,\frac{1}{m/2-1}=\frac{\pi}{2^n}\,\frac{2}{m-2}.$$

En utilisant $b_n-a_n=\pi\, m^{-n}$, on en déduit :

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{2}\right)^n\cdot\left((-1)^{j_n+1}+\theta_n\frac{\pi}{m-2}\right)\qquad(1)$$

avec $\theta_n\in[-1,1]$. Comme $m\geqslant 6$ entraîne $\frac{\pi}{m-2}<1$, il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right|=+\infty.$$

3°) Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On peut trouver $n\in\mathbb{N}$ assez grand pour que I contienne trois multiples entiers consécutifs a_n, b_n et c_n de $\pi\, m^{-n}$. En utilisant (1), on constate :

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\cdot\frac{f(c_n)-f(b_n)}{c_n-b_n}<0.$$ □

$\boxed{1.3.10}$ Existence et calcul de : $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}nt\,e^{-nt^2}$, $t\in\mathbb{R}$.

A tout $n\in\mathbb{N}$ on associe l'application $u_n:t\longmapsto nt\,e^{-nt^2}$, impaire et C^∞, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; elle est la dérivée de l'application $v_n:t\longmapsto-\frac{1}{2}e^{-nt^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) L'étude de la série géométrique nous apprend que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$, et que sa somme g est donnée par :

$$\forall t\in\mathbb{R}^*\quad g(t)=\frac{-1/2}{1-e^{-t^2}}$$

b) Pour $t\in\mathbb{R}$ fixé, on a $u_n(t)=o(1/n^2)$ au voisinage de $+\infty$, et la série numérique $\sum u_n(t)$ converge. En d'autres termes, la série d'applications $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$; on étudie sa somme f.

• Soient $a\in\mathbb{R}_+^*$, et $E_a=\mathbb{R}\setminus]-a,a[$. En calculant u_n', on constate que, pour n fixé, la restriction de u_n à $[1/\sqrt{2n},+\infty[$ est positive et décroissante. On en déduit :

$$\forall n\geqslant 1/2a^2 \quad \sup_{t\in E_a}|u_n(t)|=u_n(a).$$

Comme $\sum u_n(a)$ converge, il en résulte que $\sum u_n$, qui est $\sum v_n'$ converge normalement et donc uniformément sur E_a. Comme $\sum v_n$ converge simplement sur E_a, on peut affirmer, d'après le cours, que la restriction de f à E_a est la dérivée de la restriction de g à E_a. En particulier :

$$\forall t\in \overset{\circ}{E}_a \quad f(t)=g'(t)=\frac{t\,e^{-t^2}}{(1-e^{-t^2})^2} \tag{1}$$

• Tout $t\in\mathbb{R}^*$ appartenant à un $\overset{\circ}{E}_a$, (1) vaut pour tout $t\in\mathbb{R}^*$. Par ailleurs il est clair que $f(0)=0$; f est ainsi déterminée.

Remarque. On constate : $\lim\limits_{t\to 0,\, t\neq 0}|f(t)|=+\infty$; f est discontinue en 0 ; comme les u_n sont continues, la convergence de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas uniforme.

$\boxed{1.3.11}$ Soit $\sum f_n$ une série d'applications d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur A. Soit d'autre part $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante ($\forall n\in\mathbb{N}\quad g_{n+1}\leqslant g_n$) d'applications de A dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\exists M\in\mathbb{R}_+^* \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \sup_{t\in A}|g_n(t)|\leqslant M. \tag{1}$$

Montrer que la série $\sum f_n g_n$ converge uniformément sur A.

L'e.v.n. $\mathbb{R}$ étant complet, il suffit de montrer que la série d'applications $\sum f_n g_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A.

• Comme $\sum f_n$ converge uniformément sur A, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on dispose de $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$, et la suite d'applications $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

On a $f_n=R_{n-1}-R_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Par la transformation d'Abel, on constate que, pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k} g_{n+k} = -\sum_{k=1}^{p} R_{n+k}\left(g_{n+k} - g_{n+k+1}\right) + R_n g_{n+1} - R_{n+p} g_{n+p+1}$$

• Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \sup_{t\in A} |R_n(t)| \leqslant \varepsilon .$$

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(g_{n+k} - g_{n+k+1}\right) = g_{n+1} - g_{n+p+1}$.

Pour tous entiers $n \geqslant N$ et $p \in \mathbb{N}^*$, il vient (compte tenu de (1)) :

$$\forall t \in A \quad \left|\sum_{k=1}^{p}\left(f_{n+k} g_{n+k}\right)(t)\right| \leqslant 4M\varepsilon \qquad \square$$

$\boxed{1.3.12}$ Soient $\sum a_n$ une série convergente à termes réels positifs, et $\varphi : n \mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$.

A tout $n \in \mathbb{N}$, on associe l'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = 0 \text{ si } t < r_n \; ; \; f_n(t) = a_n \text{ si } t \geqslant r_n \tag{1}$$

1°) Montrer que la série d'applications $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

2°) Etudier sa somme f (monotonie, existence de bornes, continuité éventuelle).

On sait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, ce qui justifie l'existence de φ.

1°) On constate : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| = a_n$.

Comme la série numérique $\sum a_n$ converge, la série d'applications $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Monotonie. Chaque f_n étant croissante, f est croissante.

b) Existence de bornes. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant f_n(t) \leqslant a_n$.

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant f(t) \leqslant a$, où $a = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

— Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ fixé. On dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \leqslant \varepsilon$; il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble fini $\varphi(\{0,\dots,N\})$ soit inclus dans $[-A,A]$. On constate :

$$\forall t < -A \quad \forall n \in \{0,\dots,N\} \quad f_n(t) = 0 \; ; \; \forall t > a \quad \forall n \in \{0,\dots,N\} \quad f_n(t) = a_n .$$

D'où : $\forall t < -A \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \varepsilon$; $\forall t > A \quad 0 \leqslant a - f(t) \leqslant \varepsilon$.

— Il en résulte : $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$; $\lim_{t\to+\infty} f(t) = a$.

c) Continuité. Pour n donné, f_n est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{r_n\}$, continue à droite en r_n, et admet 0 pour limite à gauche en r_n.

— Soit $t_o \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. La série $\sum f_n$ d'applications toutes continues en t_o convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$, f est continue en t_o.

— Soit $t_o \in \mathbb{Q}$. On note $n_o = \varphi^{-1}(t_o)$. Pour $n \neq n_o$, f_n est continue en t_o ; la série $\sum_{n \neq n_o} f_n$ d'applications toutes continues en t_o convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$, sa somme, qui est $f - f_{n_o}$, est continue en t_o ; f est donc continue à droite en t_o, et admet $f(t_o) - a_{n_o}$ pour limite à gauche en t_o ; il y a continuité de f en t_o si, et seulement si $a_{n_o} = 0$.

Retenons que f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et que, dans le cas où $a_n > 0$ pour tout n, $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des points de discontinuité de f.

Remarque. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

— On sait que, pour toute application croissante $g : I \to \mathbb{R}$, l'ensemble des points de discontinuité de g est fini ou dénombrable, et qu'en chacun d'eux le saut de g est strictement positif.

— Inversement, soient E une partie dénombrable de I, et $\sum a_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs. La construction précédente (dans laquelle $\varphi : n \mapsto r_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E) permet de trouver une application croissante $f : I \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité soit E, et telle qu'en chaque r_n le saut soit a_n (s'il existe n_o tel que $r_{n_o} = \inf I$, il y a lieu de modifier f_{n_o} de façon à la rendre discontinue à droite).

$\boxed{1.3.13}$ 1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la continuité de l'application $f_n : t \mapsto \dfrac{nt - E(nt)}{2^n}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (E est la fonction partie entière).

2°) Etudier la série d'applications $\sum_{n \geq 1} f_n$: continuité de la somme, sauts aux points de discontinuité.

1°) f_n est l'application $\frac{1}{n}$-périodique qui coïncide avec $t \mapsto nt/2^n$ sur $[0, 1/n[$. En tout $t_o \notin \frac{1}{n}\mathbb{Z}$, elle est continue.

En tout $t_o \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$, elle prend la valeur $f_n(t_o) = 0$, est continue à droite admet la limite à gauche $f_n(t_o-) = 1/2^n$; elle est donc discontinue en t_o, et admet $-1/2^n$ pour saut en t_o.

2°) De : $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t)| \leq 1/2^n$, et de $\sum 1/2^n$ converge, on déduit que $\sum_{n \geq 1} f_n$

converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Soit f sa somme.

a) Le théorème sur la continuité en un point de la somme d'une série d'applications continues en ce point montre que f est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, et (appliqué à la série des restrictions des f_n à $[t_o,+\infty[$) que f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

b) Soit $t_o \in \mathbb{Q}$. Le théorème d'interversion des limites appliqué à la série des restrictions des f_n à $]-\infty,t_o[$, montre que f admet en t_o la limite à gauche :

$$f(t_o-) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t_o-).$$

Comme, d'après 1°), $f_n(t_o-)$ est $f_n(t_o) + 1/2^n$ ou $f_n(t_o)$, selon que $nt_o \in \mathbb{Z}$ ou $nt_o \notin \mathbb{Z}$, le saut de f en t_o est :

$$\sigma(t_o) = f(t_o) - f(t_o-) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n(t_o)}{2^n}$$

où $\varepsilon_n(t_o) = 1$ si $nt_o \in \mathbb{Z}$, et $\varepsilon_n(t_o) = 0$ si $nt_o \notin \mathbb{Z}$.

— Si $t_o = 0$, on a ainsi : $\sigma(0) = -\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = -1$.

— Si $t_o = \frac{p}{q}$, où $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et où p et q sont premiers entre eux, on constate que $nt_o \in \mathbb{Z}$ s'écrit $n = kq$, $k \in \mathbb{Z}$; on a :

$$\sigma(t_o) = -\sum_{k=1}^{+\infty} 1/2^{kq} = \frac{-1}{2^q-1}.$$

$\boxed{1.3.14}$ A tout $n \in \mathbb{N}$ on associe l'application $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f_n(x,y) = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$$

1°) Déterminer $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum f_n(x,y) \text{ converge}\}$.

2°) Prouver que $f : (x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x,y)$ est C^1 sur Ω.

Les $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont de classe C^∞.

1°) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé ; $\sum f_n(x,y)$ est une série entière en x, de rayon de rayon de convergence $R_y = \max(1,y^2)$; pour $x = \pm R_y$, la série numérique $\sum f_n(x,y)$ diverge (on n'a pas $\lim_{n\to+\infty} f_n(x,y) = 0$).

— D'où : $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \max(1,y^2)\}$.

Il en résulte que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (faire un dessin).

2°) Notations. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $(x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$.

A tout $(x_0,y_0)\in\Omega$ on associe une boule fermée B, de centre (x_0,y_0), de rayon $r>0$ assez petit pour que $B\subset\Omega$ (Ω est ouvert). On note :

$$\alpha=\max(|x_0-r|,|x_0+r|) \ ; \ \beta=0 \text{ si } |y_0|\leqslant r \ ;$$

$$\beta=\min(|y_0-r|,|y_0+r|) \text{ si } |y_0|>r.$$

On a ainsi : $\alpha=\sup\limits_{(x,y)\in B}|x|$, $\beta=\inf\limits_{(x,y)\in B}|y|$, $(\alpha,\beta)\in\Omega$.

En outre $|\alpha|<1$ si $|y_0|\leqslant 1$ (cf. dessin)

a) Continuité de $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Soit $(x_0,y_0)\in\Omega$. Associons-lui une boule B. On a (cf. notations) :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \sup_{(x,y)\in B}|f_n(x,y)|\leqslant\frac{\alpha^n}{1+\beta^{2n}}.$$

D'après $(\alpha,\beta)\in\Omega$, $\sum\frac{\alpha^n}{1+\beta^{2n}}$ converge ; $\sum f_n$ converge ainsi normalement et donc uniformément sur B ; la restriction de f à B est continue ; f est continue en (x_0,y_0). □

b) Existence et continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}:\Omega\to\mathbb{R}$. Pour $y\in\mathbb{R}$ fixé, l'application $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+y^{2n}}$ de $]-R_y,R_y[$ dans $\mathbb{R}$ admet $x\mapsto\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}$ pour application dérivée d'après l'étude des séries entières. On dispose donc de :

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\Omega\to\mathbb{R} \quad (x,y)\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}.$$

En raisonnant comme en a), on montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue. □

c) Existence et continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$. Nous disposons des applications :

$$\frac{\partial f_n}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad (x,y)\to\frac{-2nx^ny^{2n-1}}{(1+y^{2n})^2}, \ (n\in\mathbb{N}^*).$$

Pour $y\in\mathbb{R}$ fixé, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)$ est une série entière en x de rayon de convergence $R'_y=\max(y^2,1/y^2)\geqslant R_y$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\partial f_n}{\partial y}$ converge simplement sur:

$$\Omega'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<\max(y^2,1/y^2)\}.$$

En fait il s'agit d'étudier cette série sur $\Omega\subset\Omega'$(avec d'ailleurs $\Omega\neq\Omega'$).

• Soient $(x_0,y_0)\in\Omega$ et $B\subset\Omega$ associée à (x_0,y_0). Nous allons montrer que quitte à imposer à B une condition supplémentaire, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\partial f_n}{\partial y}$ converge normalement et donc uniformément sur B.

Nous utiliserons le fait que $u\mapsto\frac{u}{(1+u)^2}$, $u\in\mathbb{R}_+$, est à valeurs dans $[0,\frac{1}{4}]$, et décroissante sur $[1,+\infty]$.

– Si $|y_0|<1$, nous imposons : $|y|\leq 1$ pour tout $(x,y)\in B$. D'où :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \quad \sup_{(x,y)\in B}\left|\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right|\leq 2n\,\alpha^n.$$

Or, ici, $\alpha<1$, et donc $\sum 2n\,\alpha^n$ converge. □

– Si $|y_0|=1$, nous imposons : $|y|\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ pour tout $(x,y)\in B$. D'où :

$$\forall (x,y)\in B \quad \frac{|y|^{2n-1}}{(1+y^{2n})^2}\leq\frac{1}{4|y|}\leq\frac{1}{2}$$

et : $$\forall n\in\mathbb{N}^\star \quad \sup_{(x,y)\in B}\left|\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right|\leq n\,\alpha^n.$$

Or, ici, $\alpha<1$, et donc $\sum n\,\alpha^n$ converge. □

– Si $|y_0|>1$, nous imposons : $|y|\geq 1$ pour tout $(x,y)\in B$. D'où :

$$\forall (x,y)\in B \quad \frac{|y|^{2n-1}}{(1+y^{2n})^2}\leq\frac{\beta}{|y|}\,\frac{\beta^{2n-1}}{(1+\beta^{2n})^2}\,,\ (\beta>0)$$

et : $$\forall n\in\mathbb{N}^\star \quad \sup_{(x,y)\in B}\left|\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\right|\leq\beta\,\frac{2n\,\alpha^n\beta^{2n-1}}{(1+\beta^{2n})^2}$$

Comme $(\alpha,\beta)\in\Omega$, la série majorante converge. □

• Reprenons $(x_0,y_0)\in\Omega$. Nous avons su lui associer une boule fermée $B\subset\Omega$ de centre (x_0,y_0), de rayon r sur laquelle $\sum_{n\geq 1}\frac{\partial f_n}{\partial y}$ converge uniformément.

I désignant l'intervalle ouvert $]y_0-r,y_0+r[$, il y a :

– convergence simple de $\sum(y\longmapsto f_n(x_0,y))$ sur I_r ;

– convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1}\left(y\longmapsto\frac{\partial f_n}{\partial y}(x_0,y)\right)$ sur I_r.

Ceci assure l'existence de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial f_n}{\partial y}(x_0,y_0)$.

• On dispose ainsi de $\frac{\partial f}{\partial y}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, et il s'agit de la somme de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\partial f_n}{\partial y}$. Pour tout $(x_0,y_0)\in\Omega$, celle-ci converge uniformément sur une boule de centre (x_0,y_0), de rayon $r>0$, les $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ étant continues, ceci assure la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en (x_0,y_0). □

1.4. SÉRIES ENTIÈRES

$\boxed{1.4.1}$ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence R. Que peut-on dire du rayon de convergence R' de la série entière $\sum b_n z^n$ dans les différents cas suivants :

1°) $\forall n \in \mathbf{N}$ $\quad b_n = a_n^2$;

2°) $\forall n \in \mathbf{N}$ $\quad b_n = f(n)a_n$, où f est une fonction rationnelle non nulle ;

3°) $\forall n \in \mathbf{N}$ $\quad (b_{2n+1} = 0) \wedge (b_{2n} = a_n)$?

1°) $|b_n z_o^n| = \left(|a_n|(\sqrt{|z_o|})^n\right)^2$ pour tous $z_o \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$.

a) Soit $z_o \in \mathbf{C}$ tel que $|z_o| < R^2$. La série $\sum\left(|a_n|(\sqrt{|z_o|})^n\right)$ converge ; la suite $\left(|a_n|(\sqrt{|z_o|})^n\right)$ est bornée ; la suite $(|b_n z_o^n|)$ est bornée. En utilisant le lemme d'Abel on en déduit $R' \geqslant |z_o|$. En jouant sur z : $R' \geqslant R^2$.

b) Soit $z_o \in \mathbf{C}$ tel que $|z_o| < \sqrt{R'}$. La série $\sum |b_n z_o^{2n}|$ converge ; la suite $(|b_n z_o^{2n}|)$, qui est la suite $(|a_n z_o^n|^2)$ est bornée ; la suite $(|a_n z_o^n|)$ est bornée et (par le lemme d'Abel) : $R \geqslant |z_o|$.

En jouant sur z_o : $R \geqslant \sqrt{R'}$.

c) Au total : $R' = R^2$. □

2°) a) Soit $z_o \in \mathbf{C}$ tel que $|z_o| < R$. Choisissons un réel $r \in]|z_o|, R[$.

On a : $\quad |b_n z_o^n| = \left|f(n)\left(\frac{z_o}{r}\right)^n\right| |a_n r^n|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Comme f est une fonction rationnelle et comme $\frac{|z_o|}{r} < 1$, on constate :

$$\lim_{n\to+\infty} f(n)\left(\frac{z_o}{r}\right)^n = 0 \text{ ; la suite } \left(\left|f(n)\left(\frac{z_o}{r}\right)^n\right|\right) \text{ est donc bornée.}$$

Comme $r < R$, la série $\sum |a_n r^n|$ converge ; la suite $(|a_n r^n|)$ est bornée. Il résulte que la suite $(|b_n z_o^n|$ est bornée, et que $R' \geqslant |z_o|$.

En jouant sur z_o : $R' \geqslant R$.

b) On peut fixer $N \in \mathbf{N}$ assez grand pour que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $f(n) \neq 0$, et donc $a_n = g(n) b_n$, où g est la fonction rationnelle non nulle $1/f$. En échangeant les rôles des deux séries entières : $R \geqslant R'$.

c) Au total : $R' = R$. □

3°) a) Soit $z_o \in \mathbf{C}$ tel que $|z_o| < \sqrt{R}$. La série $\sum |a_n z_o^{2n}|$ converge ; la suite $(|a_n z_o^{2n}|)$, qui est la suite $(|b_{2n} z_o^{2n}|)$ est bornée ; or la suite nulle $(|b_{2n+1} z_o^{2n+1}|)$ est bornée ; la suite $(|b_n z_o^n|)$ est donc bornée, et $R' \geqslant |z_o|$.

En jouant sur z_o : $R' \geqslant \sqrt{R}$.

b) Soit $z_o \in \mathbf{C}$ tel que $|z_o| < R'^2$. La série $\sum |b_n(\sqrt{|z_o|})^n|$ converge; la suite $\left(|b_n(\sqrt{|z_o|})^n|\right)$ est bornée ; a fortiori la suite $\left(|b_{2n}(\sqrt{|z_o|})^{2n}\right)$, qui est la suite $(|a_n z_o^n|)$ est bornée, et donc $R \geqslant z_o$.

En jouant sur z_o : $R \geqslant R'^2$.

c) Au total : $R' = \sqrt{R}$. □

$\boxed{1.4.2}$ Soient un polynôme non nul $P \in \mathbf{C}[X]$, et une série entière complexe $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, de somme notée f. Trouver le rayon de convergence R' de la série entière $\sum P(n) a_n z^n$, et exprimer sa somme g en fonction de f.

Exemple. $a_n = 2^n/n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; $P(X) = X^2+1$.

---

a) Montrons que $R' \leqslant R$. C'est trivial si $\deg P = 0$ (auquel cas $R' = R$). Supposons donc : $\deg P \geqslant 1$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} |P(n)| = +\infty$; il existe $n_o \in \mathbf{N}$ tel que $|P(n)| \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant n_o$.

Pour tout $z_o \in \mathbf{C}$ tel que $|z_o| > R$, la divergence de $\sum |a_n z_o^n|$ entraîne ainsi celle de $\sum\limits_{n\geqslant n_o} |P(n) a_n z_o^n|$. D'où $R' \leqslant |z_o|$.

En jouant sur z_o : $R' \leqslant R$. □

b) En utilisant une base convenablement choisie de l'espace vectoriel des polynômes dont le degré n'excède pas $\deg P = p$, on a :

$$P = c_o + \sum_{k=1}^{p} c_k X(X-1) \dots (X-k+1)$$

Soit $z_o \in \mathbf{C}$ tel que $|z_o| < R$. Pour $N \in \mathbf{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} P(n) a_n z_o^n$ s'écrit :

$$c_o \sum_{n=0}^{N} a_n z_o^n + \sum_{k=1}^{p} c_k z_o^k \sum_{n=k}^{N} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z_o^{n-k}$$

Or, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant k} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}$ est la dérivée d'ordre k de la série entière $\sum a_n z^n$; elle admet R pour rayon de convergence. On en déduit qu'il existe :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} P(n) a_n z_o^n = \sum_{k=0}^{p} c_k z_o^k f^{(k)}(z_o)$$

On a donc $R' \geqslant |z_o|$.

En jouant sur z_o : $R' \geqslant R$; compte tenu de a) : $R' = R$.

En outre :

$$g(z) = \sum_{k=0}^{p} c_k z^k f^{(k)}(z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z| < R.$$

Exemple. Ici $R=+\infty$, $f(z)=e^{2z}$, $P=1+X+X(X-1)$

D'où : $g(z)=(1+2z+4z^2)e^{2z}$ pour tout $z\in\mathbf{C}$.

Remarques. a) $R=R'$ résulte aussi du 1.4.1, 2°).

b) Si l'on considère comme connues la formule d'Hadamard, et la formule, valable pour des suites à termes positifs dont l'une converge :

$$\limsup (x_n y_n) = \big(\lim(x_n)\big)\big(\limsup (y_n)\big)$$

on écrit : $|P(n)| \sim |b_p| n^p$ au voisinage de $+\infty$ ($b_p\neq 0$) ; on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} |P(n)|^{1/n} = 1,\ \limsup |P(n)a_n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n} \text{ et } R'=R.$$

$\boxed{1.4.3}$ Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence $R>0$ et $R'>0$. Que peut-on dire du rayon de convergence R'' de la série entière $\sum a_n b_n z^n$?

• Soit $z_0\in\mathbf{C}$ fixé, tel que $0<|z_0|<RR'$. L'application $t\longmapsto |z_0|/t$ de $]0,R]$ dans $\mathbf{R}_+^*$ décroit de $+\infty$ à $\frac{|z_0|}{R}<R'$; il est clair qu'il existe $(\alpha,\beta)\in(\mathbf{R}_+^*)^2$ vérifiant $0<\alpha<R$, $0<\beta<R'$ et $|z_0|=\alpha\beta$; les suites $(|a_n|\alpha^n)$ et $(|b_n|\beta^n)$ sont ainsi bornées, et donc la suite $(|a_nb_n||z_0^n|)$ est bornée, ce qui (d'après le lemme d'Abel) entraîne $|z_0|\leqslant R''$.

• On a ainsi $|z_0|\leqslant R''$ pour tout $z_0\in\mathbf{C}$ tel que $|z_0|<RR'$, ce qui exige $R''\geqslant RR'$. On ne peut obtenir mieux. En effet :

— Si $a_n=b_n=1$, alors $R=R'=R''=1$, et donc $R''=RR'$.

— Si $a_{2p}=0$, $a_{2p+1}=1$, $b_{2p}=1$, $b_{2p+1}=0$, alors $a_nb_n=0$ pour tout n ; on a $R=R'=1$, $R''=+\infty$ et donc $R''>RR'$.

Application. Si $a_n\neq 0$ et $b_n=1/a_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, alors $RR'\leqslant 1$ (ici $R''=1$).

Remarque. Si l'on considère comme connues la formule d'Hadamard et la formule, valable pour des suites à termes positifs :

$$\limsup (x_ny_n) \leqslant \big(\limsup (x_n)\big)\big(\limsup (y_n)\big),$$

de : $\frac{1}{R}=\limsup |a_n|^{1/n}$, $\frac{1}{R'}=\limsup |b_n|^{1/n}$, $\frac{1}{R''}=\limsup |a_nb_n|^{1/n}$

on déduit : $\frac{1}{R''}\leqslant\frac{1}{RR'}$, et donc $R''\geqslant RR'$.

$\boxed{1.4.4}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe. Comparer les rayons de convergence R et R' des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum S_n z^n$, où $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$.

---

a) Pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $z \in \mathbf{C}$ on a, en utilisant $a_n = S_n - S_{n-1}$:

$$|a_n z^n| \leqslant |S_n z^n| + |z| \cdot |S_{n-1} z^{n-1}|. \qquad (1)$$

Pour $z \in \mathbf{C}$ fixé, tel que $|z| < R'$, les séries numériques $\sum |S_n z^n|$ et $\sum_{n \geqslant 1} |S_{n-1} z^{n-1}|$ convergent, et, d'après (1), $\sum |a_n z^n|$ converge.

Nous avons donc déjà : $R' \leqslant R$.

b) Nous constatons que $\sum S_n z^n$ est la série entière produit $\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum z^n\right)$. D'où, par la théorie des séries entières produits : $R' \geqslant \min(R, 1)$.

c) A ce stade : si $R \leqslant 1$, alors $R' = R$.

d) Etudions le cas $R > 1$. Nous avons déjà : $1 \leqslant R' \leqslant R$. (2)

D'après $R > 1$, $\sum a_n$ converge et on dispose de $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

<u>1er cas</u> : $S \neq 0$. Ici $\sum S_n$ diverge, et donc $R' \leqslant 1$. D'après (2) : $R' = 1 < R$.

<u>2ème cas</u> : $S = 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ n'est autre que $-S_n$.

— Fixons $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $1 \leqslant |z_0| < R$. Nous savons que $\sum\limits_k |a_k z_0^k|$ converge. D'autre part, en utilisant $|z_0|^n \leqslant |z_0|^k$ pour $k \geqslant n$:

$$|R_n z_0^n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z_0^n\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k z_0^k| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k z_0^k|.$$

La suite $(R_n z_0^n)$ est ainsi bornée, et donc la suite $(S_n z_0^n)$ est bornée. D'après le lemme d'Abel, $\sum S_n z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.

— Soit z tel que $|z| < R$. En adoptant $z_0 = (|z| + R)/2$, on constate que $\sum S_n z^n$ converge absolument. D'où $R' \geqslant R$, et donc ici $R' = R$.

• *L'exercice suivant est destiné à établir un résultat classique, que nous utiliserons par la suite à plusieurs reprises.*

$\boxed{1.4.5}$ Soient $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R > 0$, et $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| = R$ et que $\sum a_n z_0^n$ converge.

1°) Montrer que la série entière converge uniformément sur $\{t z_0 \mid t \in [0, 1]\}$.

2°) Vérifier : $\lim\limits_{t \to 1,\, t \in [0,1[} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (t z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$.

Nous avons $z_0 \neq 0$. Par transformation $z \longmapsto z/z_0$, nous nous ramenons au cas $z_0 = 1$.

Considérons donc une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1, telle que la série $\sum a_n$ converge.

1°) Pour tous $(n,p) \in \mathbf{N}^2$ et $t \in [0,1]$, nous avons par la transformation d'Abel, en notant $S_{n,k} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{n+\ell}$:

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} t^{n+k} = \sum_{k=1}^{p} S_{n,k}(t^{n+k} - t^{n+k+1}) + S_{n,p} t^{n+p+1}.$$

Compte tenu de $0 \leqslant t \leqslant 1$, il vient :

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} t^{n+k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |S_{n,k}|(t^{n+k} - t^{n+k+1}) + |S_{n,p}| t^{n+p+1}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. D'après le critère de Cauchy, la convergence de $\sum a_n$ assure l'existence de $N \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \left|\sum_{\ell=1}^{k} a_{n+\ell}\right| \leqslant \varepsilon$$

et donc tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad \left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} t^{n+k}\right| \leqslant \varepsilon$$

Notant u_n l'application $t \longmapsto a_n t^n$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$, nous constatons que la série d'applications $\sum u_n$, à valeurs dans l'espace de Banach $\mathbf{C}$, est uniformément de Cauchy sur $[0,1]$; il en résulte qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$. □

2°) Comme les u_n sont continues, la somme $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ de la série $\sum u_n$ est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$. D'où, en particulier :

$$\lim_{t \to 1,\, t \in [0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$ □

• *Nous allons étudier une réciproque du résultat de l'exercice précédent.*

1.4.6 CONVERGENCE AU SENS DE POISSON. On dit que la série complexe $\sum a_n$ converge au sens de Poisson si, et seulement si la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence 1 et si, f désignant l'application $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ de $]-1,1[$ dans $\mathbf{C}$, il existe $\lim_{t \to 1,\, t<1} f(t)$.

1°) a) Toute série convergente au sens de Poisson est-elle convergente ?

b) Etudier le cas d'une série à termes réels positifs.

2°) Soit $\sum a_n$ une série complexe convergente au sens de Poisson, et telle que $a_n = o(1/n)$ au voisinage de $+\infty$. Montrer qu'elle est convergente.

1°) a) La réponse est négative, ainsi que le montre l'exemple suivant.

On adopte $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; $\sum (-z)^n$ a pour rayon de convergence 1 ; pour $t \in]-1,1[$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n$ s'écrit $\frac{1}{1+t}$; il existe donc $\lim_{t \to 1, t<1} f(t) = 1/2$; or $\sum (-1)^n$ diverge. □

b) Soit $\sum a_n$, avec $a_n \in \mathbf{R}_+$, une série convergente au sens de Poisson. On note $\ell = \lim_{t \to 1, t<1} f(t)$, où $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Chaque $t \mapsto a_n t^n$ étant croissante sur $]0,1[$, f est croissante sur $]0,1[$; on a donc $f(t) \leqslant \ell$ pour tout $t \in]0,1[$; a fortiori (les a_n étant positifs) :

$$\forall t \in]0,1[\quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \leqslant \ell.$$

En fixant N et en faisant tendre $t<1$ vers 1, on obtient :

$$\forall N \in \mathbf{N} \quad \sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant \ell.$$

La série positive $\sum a_n$, dont les sommes partielles sont majorées, est convergente.

2°) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons : $\Delta(n) = f(1-1/n) - \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Il existe : $\lim_{n \to +\infty} f(1-1/n) = \ell$. Reste à montrer : $\lim_{n \to +\infty} \Delta(n) = 0$.

On peut écrire : $\Delta(n) = A(n) - B(n)$ avec :

$$A(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k (1-1/n)^k \; ; \; B(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - (1-1/n)^k\right).$$

• Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. D'après $a_n = o(1/n)$, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $|a_k| \leqslant \varepsilon/k$ pour tout entier $k \geqslant N$.

Pour tout entier $n \geqslant N$, on a donc :

$$|A(n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-1/n)^k \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} (1-1/n)^k \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit : $\lim_{n \to +\infty} A(n) = 0$.

• Pour tous $x \in [0,1[$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$1 - x^k = (1-x)(1+x+\ldots+x^{k-1}) \leqslant k(1-x).$$

D'où : $\quad |B(n)| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k|a_k|.$

Au second membre, on reconnaît une moyenne de Cesaro associée à la suite $(n|a_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limite 0. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} B(n) = 0$. □

Remarque. Par une démonstration beaucoup plus difficile, Littlewood a montré que le résultat du 2°) subsiste si l'on remplace $a_n = o(1/n)$ par $a_n = O(1/n)$ au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{1.4.7}$ Calculer $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$, et $B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

A et B sont les sommes de séries numériques absolument convergentes (d'après $n(2n+1) \sim 2n^2$ au voisinage de $+\infty$). En utilisant l'exercice 1.4.5, on peut écrire $A = \lim\limits_{t\to 1, t<1} f(t)$, et $B = \lim\limits_{t\to -1, t>-1} f(t)$, où f est la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n(2n+1)}$, de rayon de convergence 1. Pour $t \in]-1,1[$:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{2n+1} = -\operatorname{Log}(1-t) - 2g(t).$$

• Pour $t \in]0,1[$: $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-\sqrt{t} + \operatorname{Arg\,th}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

ce qui conduit, en utilisant $\operatorname{Arg\,th}\sqrt{t} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$ à :

$$f(t) = 2 - \frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\operatorname{Log}(1+\sqrt{t}) + \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\operatorname{Log}(1-\sqrt{t})$$

et à : $A = 2 - 2\operatorname{Log} 2 \simeq 0{,}6137056$.

• Pour $t \in]-1,0[$: $g(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-t})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-\sqrt{-t} + \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-t}}{\sqrt{-t}}$

et : $\quad f(t) = -\operatorname{Log}(1-t) + 2 - 2\,\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{-t}}{\sqrt{-t}}$

D'où : $\quad B = 2 - \operatorname{Log} 2 - \pi/2 \simeq -0{,}2639435$.

$\boxed{1.4.8}$ Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries complexes convergentes.
On suppose que la série produit $\sum c_n$, avec $c_n = \sum\limits_{p+q=n} a_p b_q$, est convergente.
Prouver : $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ (1)

Introduisons les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ qui, du fait des hypothèses ont un rayon de convergence au moins égal à 1. Désignons par f, g et h leurs sommes respectives. D'après le théorème sur le produit de séries entières on a : $h(z) = f(z)g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

D'autre part, que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ soit $R>1$ ou $R=1$, on a, d'après la convergence de $\sum a_n$ (cf. exercice 1.4.5) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{t\to 1,\, t\in\mathbf{R},\, t<1} f(t)$$

et l'on dispose de relations analogues pour g et h.

On peut donc passer à la limite dans $h(t)=f(t)g(t)$ lorsque le réel t, strictement inférieur à 1, tend vers 1 ; d'où (1).

$\boxed{1.4.9}$ Soit une série entière réelle $\sum a_n t^n$, $a_n \geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, de rayon de convergence 1. On note f sa somme, et on pose :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n\in\mathbf{N}.$$

1°) On suppose ici : $\lim_{t\to 1,\, t<1} (1-t)f(t) = 1$, et on se propose de montrer :

$s_n \sim n$ au voisinage de $+\infty$.

a) Soit $\mathbf{B}$ l'ensemble des applications bornées de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$; $\mathbf{B}$ est muni de la norme de la convergence uniforme. On note $\mathcal{B}$ la partie de $\mathbf{B}$ telle qu'à toute $g\in\mathcal{B}$ on peut associer :

$$u(g) = \lim_{t\to 1,\, t<1} G(t), \text{ où } G(t) = (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n g(t^n).$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est un $\mathbf{R}$-e.v, que l'application $g \longmapsto u(g)$ de $\mathcal{B}$ dans $\mathbf{R}$ est linéaire et continue, que $\mathcal{B}$ est une partie fermée de $\mathbf{B}$.

b) Montrer que, si g est continue, alors $u(g) = \int_0^1 g(x)dx$.

c) Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$h(t)=0 \text{ si } t\in[0,1/e[\ ; \ h(t)=1/t \text{ si } t\in[1/e,1].$$

Montrer : $h\in\mathcal{B}$. Calculer $u(h)$ et conclure.

2°) On suppose ici : $\lim_{t\to 1,\, t<1} (1-t)^2 f(t) = 1$.

Montrer : $s_n \sim n^2/2$ au voisinage de $+\infty$.

1°) a) Pour toute $g\in\mathbf{B}$, G est définie sur $[0,1[$.

$\mathcal{B}$, qui contient $t\longmapsto 1$, est visiblement un sous espace vectoriel de $\mathbf{B}$.

La linéarité de u est triviale. Sa continuité résulte de ce que :

$$\forall g\in\mathcal{B} \quad |u(g)| \leqslant \|g\| \lim_{t\to 1,\, t<1} (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \|g\|$$

La preuve de ce que $\mathcal{B}$ est une partie fermée de $\mathbf{B}$ fait l'objet d'un complément que le lecteur trouvera à la fin du sous-chapitre (n°1-4-30).

b) Pour toute $g_k : t \longmapsto t^k$, $k\in\mathbb{N}$, on constate que :

$$\forall t\in[0,1[\quad (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n g_k(t^n) = \frac{1-t}{1-t^{k+1}}\,\alpha_k(t),$$

où : $\quad \alpha_k(t) = (1-t^{k+1})\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t^{k+1})^n.$

On a : $\quad \lim\limits_{t\to 1, t<1} \frac{1-t}{1-t^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$, et $\lim\limits_{t\to 1, t<1} \alpha_k(t) = 1$. D'où : $g_k\in\mathcal{B}$ et :

$$u(g_k) = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 g(x)dx.$$

Par linéarité, on en déduit : $g\in\mathcal{B}$ et $u(g) = \int_0^1 g(x)dx$ valent pour toute application polynomiale (restreinte à $[0,1]$), et donc pour toute application continue, ainsi qu'on le constate en utilisant la densité des applications polynomiales dans l'ensemble des applications continues (conséquence du théorème de Weierstra

c) Soit $\varepsilon\in]0,\frac{1}{e}[$. On note φ_ε (resp. ψ_ε) l'application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec h sauf sur $]\frac{1}{e},\frac{1}{e}+\varepsilon[$ (resp. $]\frac{1}{e}-\varepsilon,\frac{1}{e}[$), intervalle sur lequel elle est affine (faire une figure). On a : $\varphi_\varepsilon \leqslant h \leqslant \psi_\varepsilon$.

Pour $t\in[0,1[$, $H(t) = (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n h(t^n)$ dont l'existence est assurée par le fait que h est bornée, est compris entre :

$$\Phi_\varepsilon(t) = (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \varphi_\varepsilon(t^n), \text{ et } \Psi_\varepsilon(t) = (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \psi_\varepsilon(t^n)$$

qui admettent, lorsque t tend vers 1, les limites respectives :

$$u(\varphi_\varepsilon) = \int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)dx, \text{ et } u(\psi_\varepsilon) = \int_0^1 \psi_\varepsilon(x)dx$$

qui vérifient (cf. figure) :

$$u(\varphi_\varepsilon) \geqslant \int_0^1 h(x)dx - \frac{e\varepsilon}{2}, \text{ et } v(\psi_\varepsilon) = \int_0^1 h(x)dx + \frac{e\varepsilon}{2}$$

A ε on peut associer $\tau\in[0,1[$ tel que, pour $t\in[\tau,1[$:

$$-\varepsilon + u(\varphi_\varepsilon) \leqslant \Phi_\varepsilon(t) \leqslant \Psi_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon + u(\psi_\varepsilon)$$

et donc : $-(1+\frac{e}{2})\varepsilon \leqslant H(t) - \int_0^1 h(x)dx \leqslant (1+\frac{e}{2})\varepsilon.$

D'où l'existence de $u(h) = \int_0^1 h(x)dx = 1.$ $\square$

• Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, nous avons $h(e^{-n/p}) = 0$ si $n>p$ et $h(e^{-n/p}) = e^{n/p}$ si $n\leqslant p$, ce qui entraîne :

$$H(e^{-1/p}) = (1-e^{-1/p})\sum_{n=0}^{n} a_n.$$

Compte tenu de $\lim\limits_{p\to+\infty} H(e^{-1/p}) = 1$ et de $1-e^{-1/p} \sim \frac{1}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$, on obtient $s_p \sim p$. $\square$

2°) Nous savons que la primitive $t \mapsto \int_0^t f(x)dx$ de f sur [0,1[s'écrit :
$F : t \mapsto t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^n$.

Pour $t \in [0,1[$ tendant vers 1, nous avons $f(t) \sim \frac{1}{(1-t)^2}$ et donc (d'après l'étude de l'intégration des relations de comparaison) :

$$F(t) \sim \int_0^t \frac{1}{(1-x)^2}dx, \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^n \sim \frac{1}{1-t},$$

En posant $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$ on a (cf. 1°) : $\sigma_n \sim n$ au voisinage de $+\infty$.

— Ecrivons : $s_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)(\sigma_k - \sigma_{k-1})$, $(\sigma_{-1} = 0)$.

i.e. : $s_n = (n+1)\sigma_n - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k$.

D'après $\sigma_n \sim n$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\sigma_n}{n^2} = 1$.

On écrit : $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k = \frac{n-1}{2n} \dfrac{\sum_{k=1}^{n-1} k \frac{\sigma_k}{k}}{\sum_{k=1}^{n-1} k}$

En utilisant $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n/n = 1$, on obtient, par la moyenne de Cesaro :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k = \frac{1}{2}.$$

En conclusion : $\lim_{n\to+\infty} s_n/n^2 = 1/2$. □

$\boxed{1.4.10}$ Soient $\sum a_n t^n$ et $\sum b_n t^n$ des séries entières réelles, de rayons de convergence R et R', de sommes A et B. On suppose que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $R = +\infty$, et que la suite (b_n/a_n) admet une limite ℓ.

1°) Montrer que $R' = +\infty$.

2°) Vérifier : $\lim_{t\to+\infty} \frac{B(t)}{A(t)} = \ell$.

1°) De l'existence de $\lim_{n\to+\infty} (b_n/a_n)$ on déduit : $b_n = O(a_n)$ au voisinage de $+\infty$.

— Soit $t \in \mathbb{R}$. On a : $|b_n t^n| = O(|a_n t^n|)$ au voisinage de $+\infty$.
Comme $\sum |a_n t^n|$ converge, on en déduit que $\sum |b_n t^n|$ converge.
— Ceci vaut pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc $R' = +\infty$. □

2°) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|b_n - \ell a_n| \leqslant \varepsilon a_n$ pour tout entier $n \geqslant p$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (ce qui entraîne $A(t) > 0$) on peut écrire :

$$\left|\frac{B(t)}{A(t)} - \ell\right| \leqslant \frac{1}{A(t)} \sum_{n=0}^{p-1} |b_n - \ell a_n| t^n + \varepsilon \frac{1}{A(t)} \sum_{n=p}^{+\infty} a_n t^n.$$

En utilisant : $\dfrac{1}{A(t)} \leqslant \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{p} a_n t^n}$, et $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n t^n \leqslant A(t)$,

il vient : $\left|\dfrac{B(t)}{A(t)} - \ell\right| \leqslant \dfrac{P(t)}{Q(t)} + \varepsilon$,

où P et Q sont les polynômes $\sum_{n=0}^{p-1} |b_n - \ell a_n| X^n$ et $\sum_{n=0}^{p} a_n X^n$, tels que $\deg Q = p$ et $\deg P \leqslant p-1$, ce qui entraîne $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{P(t)}{Q(t)} = 0$.

On peut donc associer à ε un $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \geqslant \lambda$:

$0 \leqslant \dfrac{P(t)}{Q(t)} \leqslant \varepsilon$, et donc $\left|\dfrac{B(t)}{A(t)} - \ell\right| \leqslant 2\varepsilon$. □

$\boxed{1.4.11}$ Soit $\sum c_n$ une série réelle convergente. On se propose de vérifier :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} e^{-t} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{c_n}{n!} e^{-t} t^n dt \qquad (1)$$

1°) a) On note $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ et $s = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$. Montrer que les séries entières $\sum \frac{c_n}{n!} t^n$ et $\sum \frac{s_n}{n!} t^n$ ont chacune un rayon de convergence infini.

b) Montrer que, f et g désignant les sommes de ces séries entières :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^{x} e^{-t} f(t) dt = e^{-x} (g(x) - f(x)) \qquad (2)$$

2°) Vérifier (1), en utilisant le 1°) et le résultat de l'exercice précédent.

3°) Dans le cas où $\sum |c_n|$ converge, donner une démonstration directe de (1).

1°) a) Les suites (c_n) et (s_n) admettant les limites 0 et s, elles sont bornées. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les séries $\sum |c_n t^n/n!|$ et $\sum |s_n t^n/n!|$ admettent une série majorante de la forme $\sum |M t^n/n!|$; elles sont donc convergentes. □

b) De $g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{s_n}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{n!} t^n$, on déduit :

$$g'(t)-g(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{s_{n+1}-s_n}{n!}\,t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_{n+1}}{n!}\,t^n=f'(t).$$

D'où: $g'-g=f'$, ce qui entraîne :

$$e^{-t}f'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}g(t)\right) \tag{3}$$

Une intégration par parties donne, pour tout $x\in\mathbf{R}$:

$$\int_0^x e^{-t}f(t)dt=\Big[-e^{-t}f(t)\Big]_0^x+\int_0^x e^{-t}f'(t)dt$$

ce qui, compte tenu de (3) et de $f(0)=g(0)$, n'est autre que (2). □

2°) Une intégration par parties montre que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{n!}e^{-t}t^n dt$ (dont la convergence est triviale) ne dépend pas de $n\in\mathbf{N}$; en utilisant $n=0$, on constate qu'elle vaut 1. Vérifier (1) revient donc à vérifier :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}f(t)dt=s, \text{ i.e. } \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)-f(x)}{e^x}=s.$$

— On a : $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$, avec $a_n=1/n!$

Comme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{c_n/n!}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}c_n=0$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{s_n/n!}{a_n}=s$, l'exercice précédent permet de retrouver le résultat du 1°) a), et fournit :

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}f(x)=0, \text{ et } \lim_{x\to+\infty}e^{-x}g(x)=s.$$ □

3°) On fait ici l'hypothèse, plus forte : $\sum|c_n|$ converge.

• Soit $x\in\mathbf{R}_+^*$ fixé. En notant $M=\sup_{n\in\mathbf{N}}|c_n|$, on a :

$$\forall n\in\mathbf{N}\qquad \sup_{t\in[0,x]}\left|\frac{c_n}{n!}e^{-t}t^n\right|\leq M\frac{x^n}{n!}$$

On en déduit que la série des applications $t\longmapsto\dfrac{c_n}{n!}e^{-t}t^n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0,x]$, ce qui permet d'écrire :

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{n!}e^{-t}t^n\right)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x\frac{c_n}{n!}e^{-t}t^n dt.$$

• En faisant varier x on en déduit que, φ_n désignant l'application $x\longmapsto\displaystyle\int_0^x\frac{c_n}{n!}e^{-t}t^n dt$, la série $\sum\varphi_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+^*$.

On vérifie par récurrence : $\forall n\in\mathbf{N}\quad \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^n dt=n!$.

D'où : $\forall n\in\mathbf{N}\quad \sup_{x\in\mathbf{R}_+^*}|\varphi_n(x)|\leq|c_n|$.

Puisque nous avons supposé que $\sum|c_n|$ converge, $\sum\varphi_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_n(x) = c_n$.

D'après le théorème d'interversion des limites, on en déduit que la somme de la série $\sum\varphi_n$ admet $\sum c_n$ pour limite en $+\infty$, d'où (1).

Remarque. Vaut si $\sum c_n$ est semi-convergente. En notant $S_{n,k} = \sum\limits_{\ell=1}^{k} c_{n+\ell}$ et en utilisant Abel, le lecteur vérifiera :

$$\sum_{k=1}^{p}\varphi_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{p} S_{n,k}\, e^{-x}\frac{x^{n+k+1}}{(n+k+1)!} + S_{n,p}\int_0^x \frac{e^{-t}\,t^{n+p+1}}{(n+p+1)!}\,dt$$

et il en déduira la convergence uniforme de $\sum\varphi_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{1.4.12}$ 1°) Soient $\sum a_n t^n$ et $\sum b_n t^n$ des séries entières réelles, de rayons de convergence R et R', de sommes A et B. On suppose que $a_n > 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, que $R = 1$, que $\sum a_n$ diverge, qu'il existe $\lim(b_n/a_n) = \ell$.

Montrer que $R' \geqslant 1$, et que $\lim\limits_{t\to1,\,t<1}\frac{B(t)}{A(t)} = \ell$.

2°) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de réels. On note f la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{c_n}{n}t^n$.

Existence et calcul de $\lim\limits_{t\to1,\,t<1}\frac{f(t)}{\mathrm{Log}(1-t)}$.

1°) Laissé au lecteur, qui s'inspirera de l'exercice 1.4.10 (il remarquera que $R' = 1$ si $\ell\neq0$).

2°) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $a_n = 1/n$ et $b_n = c_n/n$. La série entière $\sum\limits_{n\geqslant1}a_n t^n$ a pour rayon de convergence 1, et pour somme :

$$A :]-1,1[\ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad t\longmapsto -\mathrm{Log}(1-t).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n} = \ell$, où $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}c_n$, on peut utiliser le 1°) : la série entière $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{c_n}{n}t^n$ a un rayon de convergence $R'\geqslant1$, et sa somme f vérifie :

$$\lim_{t\to1,\,t<1}\frac{f(t)}{\mathrm{Log}(1-t)} = -\ell.$$

$\boxed{1.4.13}$ Soient $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R>0$, et f sa somme.

1°) Montrer que la série entière $\sum b_n z^n$, où $b_n = a_n/n!$, a pour rayon de convergence $+\infty$; soit F sa somme.

2°) Montrer qu'à tout réel $\rho \in]0,R[$ on peut associer un réel $A(\rho)$ tel que :

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad |F(z)| \leqslant A(\rho)\exp(|z|/\rho)$$

1°) Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ fixé. Ayant choisi arbitrairement le réel $r \in]0,R[$, nous avons :

$$b_n z_0^n = a_n r^n \cdot \frac{(z_0/r)^n}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Les séries $\sum a_n r^n$ et $\sum (z_0/r)^n/n!$ étant convergentes, les suites $(a_n r^n)$ et $\left((z_0/r)^n/n!\right)$ sont bornées ; la suite $(b_n z_0^n)$ est donc bornée, ce qui montre que le rayon de convergence R' de $\sum b_n z^n$ vérifie $R' \geqslant |z_0|$.

— Comme on dispose de z_0, on a $R' = +\infty$. □

2°) Soient $\rho \in]0,R[$ et $z \in \mathbf{C}$ fixés. Comme f est une application continue du disque ouvert $(0,R)$ dans $\mathbf{C}$, on dispose de l'application continue :

$$\varphi : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbf{C} \quad \theta \longmapsto f(\rho e^{i\theta})\exp\left(\frac{z}{\rho}\, e^{-i\theta}\right).$$

• Nous allons établir : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta = 2\pi F(z).$ (2)

— Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, nous avons : $\varphi(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(\theta)$, où

$$\varphi_n(\theta) = a_n \rho^n e^{in\theta}\exp\left(\frac{z}{\rho}\, e^{-i\theta}\right).$$

Or : $\displaystyle\sup_{\theta \in [0,2\pi]} |\varphi_n(\theta)| \leqslant |a_n|\rho^n.\exp\left(\frac{|z|}{\rho}\right)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Comme la série $\sum |a_n|\rho^n$ converge (d'après $\rho < R$), il en résulte que la série d'applications $\sum \varphi_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0,2\pi]$, et admet φ pour somme, ce qui permet d'écrire :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n \int_0^{2\pi} e^{in\theta}.\exp\left(\frac{z}{\rho}\, e^{-i\theta}\right)d\theta \tag{3}$$

— Fixons $n \in \mathbf{N}$, et notons : $\psi(\theta) = e^{in\theta}.\exp\left(\frac{z}{\rho}\, e^{-i\theta}\right)$.

Nous avons : $\psi(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(\theta)$, où $\psi_k(\theta) = \dfrac{z^k}{\rho^k}\dfrac{1}{k!}\, e^{i(n-k)\theta}$

Or : $\displaystyle\sup_{\theta \in [0,2\pi]} |\psi_k(\theta)| \leqslant \frac{(|z|/\rho)^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Comme la série $\displaystyle\sum_k \frac{(|z|/\rho)^k}{k!}$ converge, il en résulte que la série $\sum_k \psi_k$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,2\pi]$, et admet ψ pour somme, ce qui permet d'écrire (pour $n \in \mathbf{N}$ fixé) :

$$\int_0^{2\pi} \psi(\theta)d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\rho^k}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta = \frac{z^n}{\rho^n}\frac{2\pi}{n!}$$

En effet $\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta$ est 2π si $k=n$, et 0 si $k\neq n$.

— Revenant à (3), nous obtenons :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta = 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = 2\pi F(z)$$

• Comme :

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta\right| \leqslant \exp\left(\frac{|z|}{\rho}\right) . \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(\rho e^{i\theta})|$$

nous constatons qu'il suffit d'adopter : $A(\rho) = \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} |f(\rho e^{i\theta})|$ pour obtenir la proposition.

$\boxed{1.4.14}$ INEGALITES DE CAUCHY. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R>0$, et de somme f. Pour tout $r\in[0,R[$, on pose :

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

1°) Montrer :

$$\forall n\in\mathbf{N} \quad \forall r\in[0,R[\quad |a_n r^n| \leqslant M(r). \tag{1}$$

2°) On suppose ici que $R=+\infty$, et qu'il existe deux réels ρ et k strictement positifs tels que :

$$\forall r\in\mathbf{R}_+^* \quad (r\geqslant\rho) \Rightarrow \left(M(r)\leqslant e^{kr}\right) \tag{2}$$

Montrer qu'il existe $N\in\mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall n\geqslant N \quad |a_n|^{1/n} \leqslant ke/n. \tag{3}$$

On dispose de l'application continue f du disque ouvert (0,R) dans $\mathbf{C}$, et la compacité du cercle $|z|=r$ assure l'existence de $M(r)$.

1°) Soient $n\in\mathbf{N}$ et $r\in[0,R[$ fixés. L'application $\theta\mapsto f(re^{i\theta})e^{-in\theta}$ de $[0,2\pi]$ dans $\mathbf{C}$ est la somme de la série d'applications $\sum_p u_p$, où :

$$u_p(\theta) = a_p r^p \exp\left(i(p-n)\theta\right)$$

Comme : $\sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} |u_p(\theta)| = |a_p r^p|$ pour tout $p\in\mathbf{N}$, et comme $\sum\limits_p |a_p r^p|$ converge (d'après $r<R$), la convergence de $\sum\limits_p u_p$ est normale, et donc uniforme sur $[0,2\pi]$. Les applications continues u_p étant intégrables sur $[0,2\pi]$ on a, d'après le cours :

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}\right)d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}d\theta \tag{4}$$

On constate que, pour tout $m\in\mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{im\theta}d\theta$ vaut 0 ou 2π selon que $m\neq 0$ ou $m=0$; (4) s'écrit donc :

$$2\pi a_n r^n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

D'où : $$|2\pi a_n r^n| \leqslant \int_0^{2\pi} M(r)d\theta = 2\pi.M(r).$$ □

Application. Supposons que $R=+\infty$ et que f soit bornée sur $\mathbb{C}$. On écrit (1) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, avec $M(r)=M$ fixé, et on fait tendre r vers $+\infty$. On en déduit que f est une application constante.

2°) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. D'après (1) et (2) on a :

$$|a_n|^{1/n} \leqslant \inf_{r\geqslant\rho}\left(\frac{1}{r}\exp\left(\frac{kr}{n}\right)\right) \tag{5}$$

Une dérivation montre que l'application $r\mapsto \frac{1}{r}\exp(\frac{kr}{n})$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ admet le minimum ke/n, atteint pour $r=n/k$.

Le second membre de (5) est donc ke/n si $\rho\leqslant n/k$. D'où (3), en adoptant pour N l'un quelconque des entiers supérieurs à $k\rho$.

1.4.15 Soient $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R>0$, de somme f, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls. On suppose qu'il existe $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n/b_{n+1}=\beta$, avec $|\beta|<R$. Vérifier :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = f(\beta) \tag{1}$$

• Choisissons arbitrairement un réel $r\in\,]|\beta|,R[$.

D'après $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n/b_{n+1}=\beta$, il existe $p\in\mathbb{N}^*$, désormais fixé lui aussi, tel que : $\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|\leqslant r$ pour tout entier $n\geqslant p$. (2)

• Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

— Considérons $(n,q)\in\mathbb{N}^2$, tel que $n\geqslant p$ et $q\leqslant n-p$. Notons :

$$\Delta_n = \frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a_k\beta^k \; ; \; u_{n,k} = a_k\left(\frac{b_{n-k}}{b_n} - \beta^k\right)$$

Comme $u_{n,0}=0$, nous avons : $\Delta_n = A_{n,q}+B_{n,q}+C_n$ avec :

$$A_{n,q} = \sum_{k=1}^{q-1} u_{n,k} \; ; \; B_{n,q} = \sum_{k=q}^{n-p} u_{n,k} \; ; \; C_n = \sum_{k=n-p+1}^{n} u_{n,k}.$$

Comme $\sum_k |a_k r^k|$ converge, nous pouvons convenir que q a été fixé de telle sorte que $\sum_{k=q}^{+\infty} |a_k r^k| \leq \varepsilon$; on a, naturellement : $n \geq p+q$.

Comme $|\beta| < r$, il vient : $\sum_{k=q}^{+\infty} |a_k \beta^k| \leq \varepsilon$. (3)

D'autre part, en utilisant $\frac{b_{n-k}}{b_n} = \prod_{i=1}^{k} \frac{b_{n-i}}{b_{n-i+1}}$, (4)

on constate, grâce à (2) : $\left|\frac{b_{n-k}}{b_n}\right| \leq r^k$, pour $n-k \geq p$.

D'où : $\left|\sum_{k=q}^{n-p} a_k \frac{b_{n-k}}{b_n}\right| \leq \sum_{k=q}^{n-p} |a_k r^k| \leq \varepsilon$,

et, compte tenu de (3) : $|B_{n,q}| \leq 2\varepsilon$, $(n \geq p+q)$.

— Revenant à (4) nous avons, pour chaque entier $1 \leq k \leq q-1$ fixé :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n-k}}{b_n} = \beta^k, \text{ et donc : } \lim_{n\to+\infty} u_{n,k} = 0.$$

Il en résulte : $\lim_{n\to+\infty} A_{n,q} = 0$. Il existe donc $N_o \geq p+q$ tel que :

$$\forall n \geq N_o \quad |A_{n,q}| \leq \varepsilon.$$

— Reste à étudier C_n $(n \geq p+q)$. Pour $n-p+1 \leq k \leq n$:

$$\frac{b_{n-k}}{b_n} = \frac{b_p}{b_n} \cdot \frac{b_{n-k}}{b_p}.$$

On sait (grâce à (4)) que : $\left|\frac{b_p}{b_n}\right| \leq r^{n-p}$. En notant M le plus grand élément de la famille $(|b_i/b_p|)_{0 \leq i \leq p-1}$, il vient :

$$|b_{n-k}/b_n| \leq M r^{n-p}$$

et donc : $\sum_{k=n-p+1}^{n} \left|a_k \frac{b_{n-k}}{b_n}\right| \leq M \sum_{k=n-p+1}^{n} |a_k| r^k . r^{n-p-k}$

En notant M' le plus grand élément de la famille $(r^{-j})_{1 \leq j \leq p}$, on a :

$$\sum_{k=n-p+1}^{n} \left|a_k \frac{b_{n-k}}{b_n}\right| \leq MM' \sum_{k=n-p+1}^{n} |a_k| r^k \leq MM'\varepsilon,$$

et, compte tenu de (3) et de $n-p+1 \geq q$:

$$|C_n| \leq MM'\varepsilon + \varepsilon, \quad (n \geq p+q).$$

— Au total, pour tout entier $n \geq N_o$, on a :

$$|\Delta_n| \leq (MM'+4)\varepsilon.$$

• En conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = 0$. Or : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k = f(\beta)$. □

1.4.16 Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de complexes vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbf{N} \quad a_{n+p} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, a_{n+p-k}$$

où $p\in\mathbf{N}^*$, $(a_0, \dots, a_{p-1})\in\mathbf{C}^p$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)\in\mathbf{C}^p$ sont donnés.

1°) Montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul. En déduire une méthode de calcul de a_n.

2°) Expliciter le calcul dans le cas particulier : $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$.

3°) Peut-on énoncer une réciproque ?

1°) Notons : $\alpha = \max\left\{1, \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k|\right\}$ et $M = \max\left\{|a_0|, \dots, |a_{p-1}|\right\}$.

Montrons par récurrence : $\forall n\in\mathbf{N} \quad |a_{n+p}| \leqslant M\alpha^{n+1}$. (1)

— Pour $n=0$: $a_p = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k a_{p-k}$; d'où $|a_p| \leqslant M \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k| \leqslant M\alpha$.

— Supposons maintenant (1) vérifiée jusqu'à l'ordre $n-1$, $(n\geqslant 1)$. Ecrivons :

$$|a_{n+p}| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k| \, |a_{n+p-k}|$$

où $|a_{n+p-k}| \leqslant M\alpha^{n+1-k}$ si $k\leqslant n$, et $|a_{n+p-k}| \leqslant M$ si $k > n$.

Comme $\alpha\geqslant 1$, on peut écrire dans tous les cas : $|a_{n+p-k}| \leqslant M\alpha^n$; d'où $|a_{n+p}| \leqslant M\alpha^{n+1}$.

On en déduit que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant 1/\alpha > 0$. □

• Pour tout $z\in\mathbf{C}$ vérifiant $|z| < R$, notons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Pour tout $n\in\mathbf{N}$: $a_{n+p} z^{n+p} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^k \, . \, a_{n+p-k} z^{n+p-k}$, et par sommation :

$$f(z) - \sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell z^\ell = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p-k} z^{n+p-k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^k \left(f(z) - \sum_{\ell=0}^{p-k-1} a_\ell z^\ell \right)$$

(en convenant comme d'habitude que $\sum_{\ell=0}^{p-k-1} a_\ell z^\ell = 0$ si $k=p$).

On en tire :

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^k - 1 \right) f(z) = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{\ell=0}^{p-k-1} \alpha_k a_\ell z^{\ell+k} - \sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell z^\ell$$

Convenons alors de poser $\alpha_0 = -1$, et $Q(z) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k z^k$. Comme $Q(0) = -1$, il vient, au moins pour $|z|$ suffisamment petit :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

où : $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{p-k-1} \alpha_k a_\ell z^{\ell+k} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{\ell=k}^{p-1} \alpha_k a_{\ell-k} z^\ell = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant p-1} \alpha_k a_{\ell-k} z^\ell$.

Enfin : $P(z) = \sum_{\ell=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{\ell} (\alpha_k a_{\ell-k}) z^\ell$ (en particulier : deg $P \leqslant p-1$).

Ainsi f est une fonction rationnelle, n'admettant pas 0 comme pôle. On peut la développer en série entière au voisinage de 0, et retrouver les coefficients a_n (unicité du développement).

2°) Exemple. $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$. Ici $Q(z) = \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} z - 1$ et $P(z) = (\frac{1}{2} a_0 - a_1) z - a_0$, soit :

$$f(z) = \frac{(a_0 - 2a_1) z - 2a_0}{z^2 + z - 2}$$

On vérifie : $f(z) = \frac{4}{3} \frac{a_0 - a_1}{z+2} - \frac{1}{3} \frac{a_0 + 2a_1}{z-1}$

d'où, pour $|z| < 1$: $f(z) = \frac{2(a_0 - a_1)}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n + \frac{a_0 + 2a_1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3} + (-1)^n \frac{a_0 - a_1}{3 \times 2^{n-1}}$ (2)

Remarque. En fait (2) se trouve plus simplement en remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2a_{n+2} + a_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n = \quad = 2a_1 + a_0$.

En posant : $a_n = b_n + (2a_1 + a_0)/3$, on obtient $2b_{n+1} + b_n = 0$, et donc $b_n = (-1/2)^n b_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calcule $b_0 = 2(a_0 - a_1)/3$. D'où (2).

3°) Réciproquement, considérons la fonction rationnelle $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, où $Q(0) \neq 0$. On peut toujours se ramener à $Q(0) = -1$, donc à $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ avec $\alpha_0 = -1$.

Si on suppose deg $P \leqslant p-1$, alors les coefficients du développement $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vérifient : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+p} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k a_{n+p-k}$.

Il suffit d'écrire $Q(z) f(z) = P(z)$, et d'annuler le coefficient du terme en z^{n+p} dans le produit $\left(\sum_{k=0}^{p} \alpha_k z^k\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)$. □

$\boxed{1.4.17}$ 1°) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}$.

2°) Montrer que la série entière $\sum_p a_p \frac{z^p}{p!}$ a un rayon de convergence infini, et que sa somme f est donnée par $f(z) = \exp(\exp z)$.

3°) Trouver une formule de récurrence permettant le calcul des a_p.

1°) Pour tout $p\in\mathbf{N}$, la série numérique à termes réels positifs $\sum n^p/n!$ converge d'après la règle de d'Alembert. Notons que $a_0 = e$. □

2°) <u>Dans cette question</u> $z\in\mathbf{C}$ <u>est fixé</u>. A tout $n\in\mathbf{N}$ associons :

$$u_n : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{C} \qquad P \longmapsto \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{P}\frac{n^p z^p}{p!}$$

et étudions la série d'applications $\sum u_n$.

— Pour tous $n\in\mathbf{N}$ et $P\in\mathbf{N}$ nous avons :

$$|u_n(P)| \leqslant \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{n^p|z|^p}{p!} = \frac{e^{n|z|}}{n!}$$

Comme la série numérique $\sum\frac{e^{n|z|}}{n!}$ converge (elle a pour somme $\exp(e^{|z|})$, on en déduit que $\sum u_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbf{N}$.

— Pour tout $n\in\mathbf{N}$ fixé, il existe :

$$\lim_{P\to+\infty} u_n(P) = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{n^p z^p}{p!} = \frac{e^{nz}}{n!}.$$

— En utilisant soit le fait que $\mathbf{R}$ est complet, soit le fait que la série des limites $\sum\frac{e^{nz}}{n!}$ converge, on peut appliquer le théorème d'interversion des limites. On a :

$$\lim_{P\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(P)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{nz}}{n!}. \qquad (1)$$

— D'autre part, pour tout $P\in\mathbf{N}$ fixé, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(P) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{P}\frac{n^p z^p}{p!}\right)$$

et pour $0\leqslant p\leqslant P$, chacune des séries $\sum_n \frac{1}{n!}\frac{n^p z^p}{p!}$ converge ; par linéarité, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(P) = \sum_{p=0}^{P}\left(\frac{z^p}{p!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^p}{n!}\right) = \sum_{p=0}^{P}a_p\frac{z^p}{p!}$$

En utilisant (1), on en déduit que $\sum_p a_p\frac{z^p}{p!}$ converge, et a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{nz}}{n!}$, qui n'est autre que $\exp(\exp z)$. □

3°) Somme d'une série entière de rayon de convergence infini, f est C^∞ sur $\mathbf{C}$. De $f(z) = \exp(\exp z)$, on déduit $f'(z) = e^z f(z)$. On constate (par la règle de multiplication de deux séries entières) :

$$\forall p\in\mathbf{N} \qquad (p+1)\,\frac{a_{p+1}}{(p+1)!} = \sum_{k=0}^{p}\frac{a_k}{k!(p-k)!}$$

et : $\quad a_o = e \; ; \; a_{p+1} = \sum_{k=0}^{n} C_p^k a_k$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, (2)

ce que l'on retrouve en utilisant $a_p = f^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, la formule de Leibniz donnant, à partir de $f'(z) = e^z f(z)$:

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad f^{(p+1)}(z) = e^z \sum_{k=0}^{p} C_p^k f^{(k)}(z).$$

$\boxed{1.4.18}$ Rayon de convergence R et somme f de la série entière complexe $\sum a_n z^n$, où (a_n) est la suite définie par $(a_o, a_1, \alpha, \beta) \in \mathbf{C}^4$ et :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad (n+1)(n+2)a_{n+2} = \alpha(n+1)a_{n+1} + \beta a_n.$$

La suite $(b_n = n! a_n)$ est définie par $b_o = a_o$, $b_1 = a_1, \alpha, \beta$ et :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad b_{n+2} = \alpha b_{n+1} + \beta b_n.$$

L'étude d'une telle suite est classique. Elle fait intervenir les zéros de :

$$T(X) = X^2 - \alpha X - \beta.$$

<u>1er cas</u> : $\alpha^2 + 4\beta \neq 0$. $T(X)$ a deux zéros distincts ξ et η. On a :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad b_n = A\xi^n + B\eta^n$$

avec : $\quad (A+B = a_o) \wedge (A\xi + B\eta = a_1)$.

D'où : $\quad R = +\infty$, et $f(z) = Ae^{\xi z} + Be^{\eta z}$.

<u>2ème cas</u> : $\alpha^2 + 4\beta = 0$. $T(X)$ a un zéro double ξ. On a (en éliminant le cas $\xi = 0$, qui correspond à $(\alpha, \beta) = (0,0)$ et $f(z) = a_o + a_1 z$) :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad b_n = (A+Bn)\xi^n$$

avec : $\quad (A = a_o) \wedge \big((A+B)\xi = a_1\big)$.

D'où : $\quad R = +\infty$, et $f(z) = Ae^{\xi z} + B \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi^n z^n}{(n-1)!} = (A+B\xi z)e^{\xi z}$.

$\boxed{1.4.19}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par :

$$a_o = a_1 = a_2 = 1 \; ; \; a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)} \text{ si } n \geq 2.$$

1°) a) Montrer que les suites (a_n) et (na_n) sont respectivement décroissante et croissante.

b) En déduire le rayon de convergence R de la série entière réelle $\sum a_n t^n$.

2°) Montrer que la somme f de cette série entière est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. En déduire une expression de f(t).

1°) a) Il s'agit de montrer que sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les assertions :

$$(P_n) \quad a_0 \geqslant a_1 \geqslant \dots \geqslant a_n \ ; \ 0 \leqslant a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant \dots \leqslant n\,a_n \qquad (Q_n)$$

— Après avoir calculé $a_3 = 5/6$ et $a_4 = 17/24$, on constate que les assertions sont vraies pour tout $n \in \{1,2,3,4\}$.

— Soit m un entier $\geqslant 4$ tel que (P_m) et (Q_m) soient vraies. On a, en particulier, $a_{m-2} \geqslant 0$, et donc $a_{m+1} \leqslant a_m$, ce qui montre que (P_{m+1}) est vraie.

On a aussi : $ma_m \geqslant (m-2)a_{m-2}$, et donc :

$$(m+1)a_{m+1} - ma_m = a_m - \frac{a_{m-2}}{2} \geqslant \frac{m-4}{2m}\, a_{m-2} \geqslant 0$$

ce qui montre que (Q_{m+1}) est vraie. □

b) On a $a_0 = 1$ et, d'après (Q_n) : $a_n \geqslant 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'où $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, d'après (P_{n+1}) et (Q_{n+1}) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1.$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = 1$, et $R = 1$.

2°) Pour tout $t \in]-1,1[$, on a :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \ ; \ f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} t^n.$$

Compte tenu de : $a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = 0$, on constate :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(a_{n+1}-a_n)t^n = -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} t^n \qquad (1)$$

Le second membre de (1) est $-t^2 f(t)/2$. Le premier membre est :

$$f'(t) - f(t) - \sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^n = f'(t) - f(t) - tf'(t).$$

On en déduit que f est solution sur $]-1,1[$ de :

$$y' - \frac{2-t^2}{2(1-t)}\, y = 0 \qquad (E)$$

Comme $f(0) = 1$, il en résulte :

$$\forall t \in]-1,1[\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}\right).$$

1.4.20 A tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, on associe la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} \sin nt$; lorsqu'elle converge, sa somme est notée $\Phi(t,x)$. Trouver l'ensemble de définition D de la fonction Φ, et expliciter $\Phi(t,x)$ pour $(t,x)\in D$.

Application. Calculer $A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$ et $B=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n}$

1°) a) Il est clair que, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $t\in\pi\mathbb{Z}$, $\Phi(t,x)$ existe et vaut 0.

b) Soient x tel que $|x|>1$ et $t\notin\pi\mathbb{Z}$. On a $\lim_{n\to+\infty}|x|^n/n=+\infty$. L'existence de $\Phi(t,x)$ exigerait $\lim_{n\to+\infty}\sin nt=0$, et donc $\lim_{n\to+\infty}|\cos nt|=1$, ce qui serait en contradiction avec :

$$\big(\sin(n+2)t-\sin nt=2\sin t.\cos(n+1)t\big)\wedge(\sin t\neq 0).$$

Ainsi, pour $|x|>1$, $\Phi(t,x)$ n'existe que si $t\in\pi\mathbb{Z}$.

2°) Soit x fixé, tel que $|x|<1$. La série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}u_{x,n}$, où $u_{x,n}(t)=\frac{x^n}{n}\sin nt$, et la série dérivée convergent normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$; en effet, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|u_{x,n}(t)|=|x|^n/n\ ;\ \sup_{t\in\mathbb{R}}|u'_{x,n}(t)|=|x|^n.$$

Leurs sommes sont donc définies sur $\mathbb{R}$; celle de la première est $t\mapsto\Phi(t,x)$, que l'on note f_x ; celle de la seconde est $\frac{d}{dt}(f_x)$; les $u'_{x,n}$ étant continues, cette dernière est continue ; f_x est donc C^1 sur $\mathbb{R}$, et, visiblement, 2π-périodique et impaire.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, f_x admet pour dérivée au point t :

$$\mathcal{R}e\sum_{n=1}^{+\infty}(xe^{it})^n=\frac{x\cos t-x^2}{1+x^2-2x\cos t}$$

Compte tenu de $f_x(0)=0$, on en déduit :

$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad f_x(t)=\int_0^t\frac{x\cos u-x^2}{1+x^2-2x\cos u}\,du$$

Le changement de variable $u=2\,\mathrm{Arc\,tg}\,v$ ne permet d'expliciter $f_x(t)$ que pour $t\in\,]-\pi,\pi[$, mais compte tenu de $f_x(\pi)=0$ et de la 2π-périodicité, cela suffit pour déterminer f_x. On calcule :

$$\forall t\in\,]-\pi,\pi[\qquad f_x(t)=-\frac{t}{2}+\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right),\ |x|<1\qquad (1)$$

3°) a) Soit $x=1$. En utilisant la transformation d'Abel, et les majorations classiques de $\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}$, on constate que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{int}}{n}$, et donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nt}{n}$ convergent uniformément sur tout intervalle de la forme :

$$I_{m,\alpha}=[2m\pi+\alpha,\ 2(m+1)\pi-\alpha],\ \alpha\in\,]0,\pi[,\ m\in\mathbb{Z}.$$

On en déduit que $f_1 : t \mapsto \Phi(t,1)$ est définie et continue sur la réunion des $I_{m,\alpha}$, et donc sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Mais nous avons vu : $\Phi(t,1)=0$ pour tout $t\in\pi\mathbb{Z}$: f_1 est ainsi définie sur $\mathbb{R}$.

La série $\sum_{n\geq 1} u'_{1,n}$ n'étant pas convergente sur $\mathbb{R}$, nous ne pouvons pas l'utiliser pour expliciter $f_1(t)$.

— Nous remarquerons que, pour $t\in\mathbb{R}$ fixé, la fonction $S_t : x \mapsto \Phi(x,t)$, qui est définie au moins sur $]-1,1]$ d'après ce qui précède, est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n(t)x^n$, où $a_n(t)=\frac{\sin nt}{n}$, de rayon de convergence $R\geq 1$ (en fait $R=1$ si $t\notin\pi\mathbb{Z}$, ainsi que cela résulte du 1°b)).

En utilisant l'exercice 1.4.5, nous obtenons (pour t fixé) :

$$S_t(1) = \lim_{x\to 1,\, x<1} S_t(x), \text{ i.e., } f_1(t) = \lim_{x\to 1,\, x<1} f_x(t).$$

En utilisant (1), nous en déduisons que f_1 est l'application impaire et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$f_1(0)=0 \ ; \ f_1(t)=\frac{\pi-t}{2} \text{ pour } t\in\,]0,\pi] \cdot$$

Elle est discontinue aux points $2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$.

b) Soit $x=-1$. En utilisant : $\frac{(-1)^n}{n}\sin nt = \frac{1}{n}\sin n(t+\pi)$, on déduit de 3°) a) que $f_{-1} : t\mapsto\Phi(t,-1)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad f_{-1}(t) = f_1(t+\pi).$$

La fonction f_{-1} est discontinue aux points $(2m+1)\pi$, $m\in\mathbb{Z}$.

4°) En conclusion, Φ est définie sur $D=\mathbb{R}\times[-1,1]\cup\pi\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$.

<u>Application</u>. L'existence et la valeur de A et B résultent du 3°). On a :

$$A=f_1(1)=\frac{\pi-1}{2} \ ; \ B=f_{-1}(1)=f_1(1+\pi)=-\frac{1}{2}.$$

Nous retrouverons ce résultat à l'exercice 1.5.3.

$\boxed{1.4.21}$ Soit $k\in\mathbb{N}^*$ fixé. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$a_n=1$ si n est de la forme m^k, où $m\in\mathbb{N}^*$; $a_n=0$ sinon.

1°) Trouver le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.

2°) Soit f la somme de cette série entière. Montrer que, E désignant la fonction partie entière, on a, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$:

$$\frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} E(n^{1/k})z^n \qquad (1)$$

1°) Admettant une suite extraite constante de valeur 1, la suite (a_n) n'admet pas 0 pour limite ; la série $\sum a_n$ diverge donc. D'où : $R \leqslant 1$.

— La suite (a_n) étant bornée, le lemme d'Abel fournit $R \geqslant 1$.

— Au total : $R = 1$.

2°) Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, nous disposons donc de $f(z)/(1-z)$.

a) Cherchons le rayon de convergence R' de la série entière $\sum E(n^{1/k}) z^n$.

— Pour $n \geqslant 1$, on a $E(n^{1/k}) \geqslant 1$; la série $\sum E(n^{1/k})$ diverge, et $R' \leqslant 1$.

— En utilisant $E(n^{1/k}) \leqslant n^{1/k}$, on obtient :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad |E(n^{1/k}) z^n| \leqslant n^{1/k} |z|^n.$$

Comme la série entière $\sum n^{1/k} z^n$ a visiblement le rayon de convergence 1, on en déduit $R' \geqslant 1$, et, donc, au total : $R' = 1$.

b) Soit $z \in \mathbf{C}$ fixé tel que $|z| < 1$.

Toutes les séries en jeu étant convergentes, nous avons :

$$(1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} E(n^{1/k}) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} [E(n^{1/k}) - E\big((n-1)^{1/k}\big)] z^n. \tag{2}$$

— Soit n un entier de la forme $n = m^k$, $m \in \mathbf{N}^*$. On a $E(n^{1/k}) = m$.

En utilisant $n-1 < m^k$, on obtient $E\big((n-1)^{1/k}\big) < m$.

En utilisant $(m-1)^k < m^k$, et (s'agissant d'entiers) : $(m-1)^k \leqslant n-1$, on obtient $E\big((n-1)^{1/k}\big) \geqslant m-1$. Au total $E\big((n-1)^{1/k}\big) = m-1$, et :

$$E(n^{1/k}) - E\big((n-1)^{1/k}\big) = 1 = a_n.$$

— Soit $n \in \mathbf{N}^*$ qui n'est pas de la forme m^k. Il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$m^k < n < (m+1)^k.$$

On a $E(n^{1/k}) = m$, et aussi $E\big((n-1)^{1/k}\big) = m$, car $m^k \leqslant n-1 < (m+1)^k$. D'où :

$$E(n^{1/k}) - E\big((n-1)^{1/k}\big) = 0 = a_n.$$

— Enfin $a_0 = 0$.

Le second membre de (2) est donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, i.e. $f(z)$. □

$\boxed{1.4.22}$ On donne $a \in \mathbf{R}_+^*$.

1°) a) Soit $g : [-a,a] \to \mathbf{R}$ une application C^∞, paire, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [0,a] \quad g^{(2n)}(t) \geqslant 0.$$

Montrer : $\forall t \in [-a,a] \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} t^{2n}$ (1)

b) Application. Montrer que $t \mapsto \operatorname{tg} t$ admet un développement en série entière à l'origine, dont on précisera le rayon de convergence.

2°) Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ une application C^∞ vérifiant :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [-a,a] \quad f^{(2n)}(t) \geq 0.$

Montrer :

$$\forall t \in [-a,a] \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \tag{2}$$

1°) a) Remarquons d'abord que, du fait de la parité de g :

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(2k)}$ est paire, $g^{(2k+1)}$ est impaire, et, en particulier $g^{(2k+1)}(0) = 0$.

— Il suffit de vérifier (1) pour $t \in [0,a]$.

• Soit $t \in [0,a]$, fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n+1$, avec reste intégral :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} t^{2k} + I_n(t)$$

où $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{(t-u)^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(2n+2)}(u)du$, intégrale d'une fonction positive sur le segment $[0,t]$, $t \geq 0$, est un réel positif (inférieur à $g(t)$).

La série positive $\sum \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} t^{2n}$ a ses sommes partielles majorées par $g(t)$; elle est donc convergente.

• Limitons-nous provisoirement à $t \in [0,a[$, fixé. L'application $u \mapsto \frac{t-u}{a-u}$ de $[0,t]$ dans $\mathbb{R}$ est décroissante, et donc à valeurs dans $[0,\frac{t}{a}]$; on en déduit en écrivant $t-u = \frac{t-u}{a-u}(a-u) \leq \frac{t}{a}(a-u)$:

$$0 \leq I_n(t) \leq \left(\frac{t}{a}\right)^{2n+1} \int_0^t \frac{(a-u)^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(2n+2)}(u)du$$

et a fortiori (en intégrant de 0 à a, et non de 0 à t) :

$$0 \leq I_n(t) \leq \left(\frac{t}{a}\right)^{2n+1} I_n(a) \leq \left(\frac{t}{a}\right)^{2n+1} g(a).$$

D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(t) = 0$, et : $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} t^{2n}$.

• A ce stade, nous pouvons affirmer que la série entière $\sum \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} t^{2n}$, qui (du fait de $g^{(2k+1)}(0) = 0$) est la série de Mac-Laurin de la fonction g, converge en tout point de $[0,a]$, et qu'elle a pour somme $g(t)$ pour $t \in [0,a[$.

En utilisant l'exercice 1.4.5, on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} a^{2n} = \lim_{t\to a,\, t<a} g(t) = g(a). \qquad \square$$

Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(t) = 0$ est vrai pour tout $t \in [0,a]$.

b) Application. Soit G l'application $t \mapsto 1 + tg^2 t$ de $]-\pi/2,\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. Elle est paire, C^∞, telle que $\lim\limits_{t\to\pi/2,\, t<\pi/2} G(t) = +\infty$; on vérifie par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,\pi/2[\quad G^{(2n)}(t) \geqslant 0.$$

En jouant sur $a \in]0,\pi/2[$, on constate que G admet un développement en série entière à l'origine, de rayon de convergence $\pi/2$; il en est donc de même pour la primitive $t \mapsto tg\, t$ de G.

2°) On associe à f les applications de $[-a,a]$ dans $\mathbb{R}$:

$$g : t \mapsto f(t) + f(-t), \text{ et } h : t \mapsto f(t) - f(-t)$$

qui sont C^∞, et respectivement paire et impaire.

• En utilisant : $g^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) + f^{(2n)}(-t)$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,a] \quad g^{(2n)}(t) \geqslant 0.$$

D'où, par application du 1°) :

$$\forall t \in [-a,a] \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n, \ \left(g^{(2k+1)}(0) = 0\right) \tag{3}$$

• Soit $t \in [0,a]$. En utilisant : $h^{(2k)}(t) = f^{(2k)}(t) - f^{(2k)}(-t)$ et donc $h^{(2k)}(0) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient, par la formule de Taylor-Lagrange :

$$h(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} t^{2k+1} + J_n(t) \ ; \ J_n(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^{2n+1}}{(2n+1)!} h^{(2n+2)}(u)du.$$

Or, de $h^{(2n+2)}(u) = f^{(2n+2)}(u) - f^{(2n+2)}(-u)$ et de $f^{(2n+2)} \geqslant 0$ on déduit :

$$|h^{(2n+2)}(u)| \leqslant f^{(2n+2)}(u) + f^{(2n+2)}(-u) = g^{(2n+2)}(u).$$

D'où : $|J_n(t)| \leqslant I_n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Compte tenu de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(t) = 0$, il en résulte : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(t) = 0$.

• A ce stade, nous avons obtenu :

$$\forall t \in [0,a] \quad h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

ce qui s'étend à $t \in [-a,a]$ puisque h est impaire. D'où :

$$\forall t \in [-a,a] \quad h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{n}(0)}{n!} t^n, \ \left(h^{(2k)}(0) = 0\right). \tag{4}$$

Compte tenu de $f = \frac{1}{2}(g+h)$, (3) et (4) entraînent (2). □

1.4.23 Soient a un réel tel que $|a|<1$, et $\sum f_n$ la série des applications $t \mapsto \sin(a^n t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1°) a) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la somme f de $\sum f_n$ est C^∞.

2°) Montrer que f est développable en série entière à l'origine.

1°) a) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la majoration :

$$\sup_{t\in[-A,A]} |f_n(t)| \leq A|a|^n.$$

Comme $|a|<1$, $\sum |a|^n$ converge ; d'où la convergence normale, et donc uniforme de $\sum f_n$ sur $[-A,A]$.

Comme on dispose de A, on en déduit la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, chaque f_n étant continue, la restriction de la somme f de la série $\sum f_n$ à tout $[-A,A]$ est continue ; on en déduit que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est C^∞, et, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_n^{(p)}(t) = a^{np} \sin(a^n t + p\pi/2)$$

et donc : $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n^{(p)}(t)| \leq (|a|^p)^n$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$; on a $|a|^p < 1$; $\sum (|a|^p)^n$ converge, ce qui entraîne que la série $\sum f_n^{(p)}$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$; sa somme est notée g_p.

• De la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$, et de la convergence uniforme de $\sum f_n'$ sur $\mathbb{R}$, on déduit que la somme f de $\sum f_n$ est dérivable, et admet pour dérivée la somme g_1 de $\sum f_n'$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on constate de la même façon que la somme g_p de $\sum f_n^{(p)}$ est dérivable et admet pour dérivée la somme g_{p+1} de $\sum f_n^{(p+1)}$.

En raisonnant par récurrence, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f admet une dérivée d'ordre p donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{np} \sin(a^n t + p\pi/2).$$

2°) a) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. On a : $f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(t)$, avec :

$$f_p(t) = \sin(a^p t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(a^p t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Le problème consiste à intervertir les signes de sommation sans utiliser la théorie des séries doubles (hors programme).

A tout $p\in\mathbb{N}$ associons l'application :

$$h_p : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(a^p t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

On a : $\sup_{n\in\mathbb{N}} |h_p(n)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a^p t|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sh}|a^p t|$.

Comme $\operatorname{sh}|a^p t| \sim |t|\,|a|^p$ lorsque p tend vers $+\infty$, et comme $\sum |a|^p$ converge, on en déduit que $\sum_p h_p$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{N}$.

D'autre part, pour p fixé : $\lim_{n\to+\infty} h_p(n) = f_p(t)$.

Par application du théorème d'interversion des limites on obtient :

$$f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} h_p(n)$$

i.e. $f(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_{p,k}\right)$; $v_{p,k} = (-1)^k \frac{(a^p t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Pour $k\in\mathbb{N}$ fixé, la série $\sum_p v_{p,k}$ est convergente, de somme :

$$(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{p=0}^{+\infty} (a^{2k+1})^p = (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{1-a^{2k+1}}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$ fixé, on a donc (somme de n+1 séries convergentes) :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_{p,k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_{p,k}\right)$$

D'où : $$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{1-a^{2k+1}} \qquad (1)$$

b) D'après a), l'égalité (1) vaut pour tout $t\in\mathbb{R}$, ce qui montre que f admet un développement en série entière à l'origine, de rayon de convergence infini.

Remarque. L'étude du 2°), faite sans utiliser le 1°), prouve aussi que f est de classe C^∞.

$\boxed{1.4.24}$ Développer en série entière à l'origine $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que :

$$f(t) = \sqrt{(1-\sqrt{1-t^2})/t^2} \quad \text{si } t\neq 0.$$

• Soit $t\in[-1,1]\setminus\{0\}$. Compte tenu de la positivité de f(t) et de

$$\left((1+|t|)^{1/2}-(1-|t|)^{1/2}\right)^2 = 2\left(1-(1-t^2)^{1/2}\right)$$

on a : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+|t|)^{1/2}-(1-|t|)^{1/2}}{|t|}$.

En utilisant le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{1/2}$, dont le rayon de convergence est 1, on obtient, pour $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$f(t) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3 \ldots (4n-1)}{2.4 \ldots (4n+2)} t^{2n}\right) \qquad (1)$$

• On prolonge f par continuité en convenant : $f(0) = 1/\sqrt{2}$; (1) est ainsi valable pour tout $t \in]-1,1[$, ce qui montre que f est développable en série entière à l'origine.

$\boxed{1.4.25}$ Quel est le nombre N de façons de régler la somme de 100 francs en utilisant des pièces de 1,5 et 10 francs ?

• Soit F la fonction rationnelle $z \mapsto \frac{1}{(1-z)(1-z^5)(1-z^{10})}$ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$. Elle admet un développement en série entière à l'origine de rayon de convergence 1 (plus petit des modules des pôles). U désignant le disque $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, on a pour tout $z \in U$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \ ; \ \frac{1}{1-z^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{5n} \ ; \ \frac{1}{1-z^{10}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{10n} .$$

En utilisant le théorème sur le produit de séries absolument convergentes et l'unicité du développement en série entière, on obtient :

$$\forall z \in U \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où : $a_n = \mathrm{Card}\{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{N}^3 \mid \xi + 5\eta + 10\zeta = n\}$.

• Il est clair que $N = a_{100}$.

Il existe de multiples façons de calculer a_{100}. En voici une. On a :

$$\forall z \in U \quad \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

où : $b_n = \mathrm{Card}\{(\xi,\eta) \in \mathbb{N}^2 \mid \xi + 5\eta = n\}$.

On constate : $b_n = 1 + E(n/5)$. On écrit, pour $z \in U$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{10n}\right)$$

D'où : $a_{100} = \sum_{k=0}^{10} b_{10k} = 11 + 2\sum_{k=1}^{10} k = 121.$

$\boxed{1.4.26}$ Soient $\varphi = \text{Arc sin}$, $g = \varphi' + \varphi''$ et $f = \text{Log} \circ g$.

Montrer que f admet un développement en série entière à l'origine ; le déterminer.

On constate que g est définie sur $]-1,+1[$, de classe C^∞ et que :

$$\forall t \in]-1,1[\quad g(t) = (1+t-t^2)(1-t^2)^{-3/2}$$

Les racines de $1+t-t^2 = 0$ étant notées $\alpha = (1-\sqrt{5})/2$ et $\beta = (1+\sqrt{5})/2$, f est définie sur $]\alpha,1[$, de classe C^∞ (par composition d'applications C^∞). On a (par dérivation logarithmique) :

$$\forall t \in]\alpha,1[\quad f'(t) = \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{3t}{1-t^2} + \frac{1-2t}{1+t-t^2} .$$

Somme de deux fonctions rationnelles n'admettant pas 0 pour pôle, f' est développable en série entière à l'origine, de rayon de convergence $|\alpha|$ (plus petit des modules des pôles) ; par intégration, il en est de même pour f (on tiendra compte de $f(0) = 0$).

Pour $t \in]\alpha,-\alpha[$, on a :

$$\frac{3t}{1-t^2} = 3\sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n-1} \quad ; \quad \frac{1-2t}{1+t-t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^{n-1} .$$

En identifiant $1-2t$ et $(1+t-t^2) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^{n-1}$ (ce qui revient à opérer une division de polynômes suivant les puissances croissantes) on constate que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est déterminée par :

$$a_1 = 1 \ ; \ a_2 = -a_1 - 2 \ ; \ a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}, \ n \geqslant 3$$

(les a_n sont des entiers, de signes alternés, dont les valeurs absolues vont en croissant).

Pour tout $t \in]\alpha,-\alpha[$ on a donc :

$$f(t) = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} t^n .$$

<u>Autre solution</u>. Par : $\frac{1-2t}{1+t-t^2} = -\alpha^{-1}\frac{1}{1-t\alpha^{-1}} - \beta^{-1}\frac{1}{1-t\beta^{-1}}$
on obtient, pour $t \in]\alpha,-\alpha[$:

$$\frac{1-2t}{1+t-t^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha^{-n}+\beta^{-n}) t^{n-1} .$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{0 \leqslant p \leqslant n/2} 5^p \, C_n^{2p} .$$

1.4.27 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in]-1,1[$, on note $f(t)$ la longueur d'une ellipse de grand axe $2a$ et d'excentricité $|t|$. Développer la fonction f en série entière à l'origine.

a) Soit $t \in]-1,1[$. En utilisant le paramétrage

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sqrt{1-t^2}\sin\theta,\quad \theta \in [0,2\pi]$$

d'une ellipse de grand axe $2a$ et d'excentricité $|t|$, on obtient :

$$dx^2 + dy^2 = a^2(1-t^2\cos^2\theta)d\theta^2.$$

D'où, en notant $s_t(\theta)$ la longueur de l'arc de l'ellipse dont les extrémités ont pour paramètres 0 et $\theta \in [0,2\pi]$:

$$s_t'(\theta) = a(1-t^2\cos^2\theta)^{1/2}\ ;\ s_t(\theta) = a\int_0^\theta \sqrt{1-t^2\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

En utilisant le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, de rayon de convergence 1, on a, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$:

$$\frac{1}{a}s_t'(\theta) = 1 - \frac{1}{2}t^2\cos^2\theta - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)}t^{2n}\cos^{2n}\theta\,.$$

La fonction s_t' est donc la somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement et donc uniformément sur $[0,2\pi]$ à cause de :

$$\left|\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}t^{2n}\cos^{2n}\theta\right| \leqslant |t^{2n}|,\ \text{et } \sum|t^{2n}| \text{ converge.}$$

On en déduit, d'après le cours, que pour tout $\theta \in [0,2\pi]$:

$$\frac{1}{a}s_t(\theta) = \theta - \frac{1}{2}t^2\int_0^\theta \cos^2\varphi\,d\varphi - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}t^{2n}\int_0^\theta \cos^{2n}\varphi\,d\varphi$$

Comme, pour des raisons de symétries, $f(t) = 4s_t(\pi/2)$, on a, grâce à

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\,\frac{\pi}{2},\quad n \in \mathbb{N}^*\ \text{(Wallis)} :$$

$$f(t) = 2\pi a\left[1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\right)^2 t^{2n}\right] \qquad (1)$$

b) L'égalité (1), valable pour tout $t \in]-1,1[$, montre que f, définie sur $]-1,1[$, admet un développement en série entière de rayon de convergence 1, et fournit ce développement.

1.4.28 Résoudre l'équation à l'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $\cos z = 1+i$. (E)

En posant $z = x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, (E) s'écrit :

$$(\cos x \operatorname{ch} y = 1) \wedge (\sin x \operatorname{sh} y = -1) \qquad (1)$$

Toute solution de (1) est solution de :

$$\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=1\right)\wedge(\cos x>0)$$
$$\wedge\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 y}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 y}=1\right)\wedge(\sin x\,\mathrm{sh}\,y<0) \qquad (2)$$

qui s'écrit, ainsi que le lecteur le vérifiera aisément :

$$\left(\cos x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\wedge\left(\sin x=\varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$$
$$\wedge\left(\mathrm{ch}\,y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\wedge\left(\mathrm{sh}\,y=-\varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right) \qquad (3)$$

avec $\varepsilon\in\{-1,1\}$.

Inversement, toute solution de (3) est visiblement solution de (1). En posant :

$$\alpha=\mathrm{Arc}\cos\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,,\quad \beta=\mathrm{Arg\,ch}\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,,$$

on en déduit que les solutions de (E) sont les :

$$\varepsilon(\alpha-i\beta)+2m\pi,\ \text{avec } \varepsilon\in\{-1,1\}\text{ et } m\in\mathbf{Z}.$$

Autre méthode. (E) s'écrit :

$$(e^{iz}=re^{i\omega})\vee(e^{iz}=\frac{1}{r}\,e^{-i\omega})$$

i.e. $\quad z=\varepsilon(\omega-i\,\mathrm{Log}\,r)+2m\pi,\ \varepsilon\in\{-1,1\},\ m\in\mathbf{Z},$

où $re^{i\omega}$ est l'une quelconque des racines de :

$$Z^2-2(1+i)Z+1=0.$$

On a : $\quad re^{i\omega}=1+i+u+iv$, avec :

$$(u+iv)^2=-1+2i,\ \text{i.e. } (u^2-v^2=-1)\wedge(uv=1)\,.$$

Il vient : $v^4=v^2+1$. On peut adopter : $v=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

On a :

$$r^2=\left(1+\frac{1}{v}\right)^2+(1+v)^2=\left(\frac{1}{v^2}+1\right)(1+v)^2$$

et $r^2=v^2(1+v)^2$, ce qui entraîne $r=v^2+v$.

Mais $v^4=v^2+1$ permet d'écrire $r=\mathrm{ch}\,\beta+\mathrm{sh}\,\beta=e^\beta$ et $\mathrm{Log}\,r=\beta$, avec :

$$\beta=\mathrm{Arg\,ch}\,v^2=\mathrm{Arg\,ch}\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,.$$

Par ailleurs : $\sin\omega=\dfrac{1+v}{r}=\dfrac{1}{v}=u,$

et : $\quad \cos\omega=\dfrac{1+u}{r}=\dfrac{1+v}{rv}=\dfrac{1}{v^2}=u^2.$

Comme $u>0$, on peut adopter : $\omega=\mathrm{Arc}\cos u^2=\mathrm{Arc}\cos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\boxed{1.4.29}$ Soit D une partie connexe de $\mathbf{C}$. On appelle détermination continue du logarithme dans D toute application $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{C}$ continue, telle que :

$$\forall z \in D \quad e^{\varphi(z)} = z .$$

1°) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux déterminations continues du logarithme dans D, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que : $\forall z \in D \quad \varphi_2(z) = \varphi_1(z) + 2ik\pi$.

2°) Montrer que s'il existe une détermination continue du logarithme dans D, alors D ne peut pas contenir le cercle $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

3°) Soit $D = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$. Pour $z \in D$ on pose : $f(t) = tz + 1 - t \quad (t \in [0,1])$, et $\varphi(z) = \int_0^1 \big(f'(t)/f(t)\big)dt$. Montrer que φ est <u>la</u> détermination continue du logarithme dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ qui vérifie $\varphi(1) = 0$ (on l'appelle détermination principale et on la note Log). Vérifier, pour $|z| < 1$:

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{n+1}/(n+1). \tag{1}$$

4°) Montrer que si φ est une détermination continue du logarithme sur l'ouvert D, alors φ est dérivable en tout point de D. Calculer sa dérivée.

Notons que l'existence de φ implique $D \subset \mathbf{C}^*$.

1°) Par hypothèse : $\forall z \in D \quad e^{\varphi_2(z) - \varphi_1(z)} = 1$, donc l'application $(\varphi_2 - \varphi_1)/2i\pi$ est continue et prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}$. Elle est donc constante (D est connexe). □

Notons que si φ_1 et φ_2 prennent la même valeur en $z_0 \in D$, alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

2°) Supposons que φ existe et que $e^{i\theta} \in D$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$. Il en résulte, par un raisonnement semblable à celui du 1°) qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbf{R} \quad \varphi(e^{i\theta}) - i\theta = 2ik\pi.$$

En faisant $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ on aboutit à une contradiction.

3°) L'hypothèse $z \notin \mathbf{R}_-$ implique que, pour z fixé, f ne s'annule pas. D'où l'existence de :

$$\varphi : D \longrightarrow \mathbf{C}, \quad z \longmapsto \int_0^1 \frac{z-1}{tz+1-t}\,dt.$$

La continuité de $(z,t) \longmapsto \frac{z-1}{tz+1-t}$ sur $D \times [0,1]$ entraîne la continuité de φ (intégrale dépendant d'un paramètre).

— Pour $z \in D$ fixé, définissons les deux applications F et G de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \left(f'(t)/f(t)\right)dt,\quad G(x) = f(x)e^{-F(x)}.$$

On constate facilement que F et G sont dérivables, et que $G'(x) = 0$. G est donc constante, et en particulier $G(0) = G(1)$; on a donc : $z = e^{\varphi(z)}$.

— Il en résulte que φ est une détermination continue du logarithme ; elle vérifie manifestement $\varphi(1) = 0$; l'unicité résulte du 1°).

Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a : $\varphi(x) = \mathrm{Log}\, x$ (on peut le vérifier par un calcul direct de l'intégrale, ou encore par un raisonnement de connexité) ; ceci justifie la notation $\mathrm{Log}\, z$ adoptée pour $\varphi(z)$ $(z \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-)$.

• Soit maintenant $z \in \mathbf{C}$, vérifiant $|z| < 1$, ce qui entraîne $1+z \in D$, et

$$\mathrm{Log}(1+z) = z\int_0^1 \frac{dt}{1+tz}.$$

Pour $t \in [0,1]$ on a $|tz| < 1$ donc : $\frac{1}{1+tz} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n z^n$. On a une série entière de la variable t, de rayon de convergence $1/|z| > 1$ (ou $+\infty$ si $z = 0$). D'où (1) en intégrant terme à terme entre 0 et 1.

• On déduit aisément de (1) que Log est dérivable sur le disque $\{z \in C \mid |z-1| < 1\}$ et de dérivée : $(\mathrm{Log})'(z) = 1/z$.

4°) Soit φ détermination continue du logarithme sur l'ouvert connexe D, $D \subset \mathbf{C}^*$. Considérons $z_0 \in D$. Nous pouvons nous restreindre à un disque ouvert de centre z_0, inclus dans D, et supposer son rayon strictement inférieur à $|z_0|$.

Autrement dit z vérifie $\left|\frac{z}{z_0} - 1\right| < 1$. Or : $e^{\varphi(z)-\varphi(z_0)} = z/z_0$. Un raisonnement de connexité prouve alors aisément : $\varphi(z) - \varphi(z_0) = \mathrm{Log}(z/z_0)$.

On en déduit que φ est développable en série entière au voisinage de chaque point z_0 de D. Elle est en particulier dérivable et :

$$\varphi'(z_0) = 1/z_0.$$

★ $\boxed{1.4.30}$ En complément à la solution de la question 1° a) de l'exercice 1.4.9 dont on reprend les hypothèses, montrer que $\mathcal{B}$ est une partie fermée de $\mathbf{B}$.

Soit $g \in \mathbf{B}$ tel qu'il existe une suite $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$ nous allons montrer : $g \in \mathcal{B}$. La proposition en résultera.

— D'après les hypothèses, $F : t \mapsto (1-t)f(t)$ est continue sur $[0,1[$ et admet une limite finie lorsque $t \in [0,1[$ tend vers 1 ; nous disposons donc de $M = \sup\limits_{t\in[0,1[} (1-t)f(t)$.

— Considérons les applications G et G_k, $k \in \mathbf{N}$, de $[0,1[$ dans $\mathbf{R}$, avec :

$$G(t) = (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n g(t^n) \; ; \; G_k(t) = (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n g_k(t^n).$$

Pour tout $t \in [0,1[$, $|G(t)-G_k(t)|$ est majoré par :

$$(1-t)\,\|g-g_k\| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \leqslant M\,\|g-g_k\|.$$

La suite $(G_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'applications de $[0,1[$ dans $\mathbf{R}$ converge donc uniformément sur $[0,1[$ vers l'application G.

Or à chaque $k \in \mathbf{N}$ on peut associer $\lim\limits_{t\to 1,\, t<1} G_k(t)$. Comme $\mathbf{R}$ est complet, par le théorème d'interversion des limites on dispose de $\lim\limits_{t\to 1,\, t<1} G(t)$. □

1.5. SERIES TRIGONOMETRIQUES

1.5.1 Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, avec $0<b-a<2\pi$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Notons $c = a+2\pi$. Il existe $\varphi : [a,c] \to \mathbb{R}$, continue, coïncidant avec f sur $[a,b]$, et vérifiant $\varphi(c) = f(a) = \varphi(a)$.

• Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La continuité de φ sur le compact $[a,c]$ étant uniforme, il existe une application continue $g_n : [a,c] \to \mathbb{R}$, affine par morceaux, vérifiant $g_n(a) = g_n(c) = f(a)$ et :

$$\forall t\in[a,c] \quad |g_n(t)-\varphi(t)| \leqslant 1/(2n).$$

(cf. par exemple le 4.1.23 de notre tome I d'exercices).

Soit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique et continue dont g_n est la restriction à $[a,c]$; elle est C^1 par morceaux ; sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et admet h_n pour somme. On peut donc trouver $p_n\in\mathbb{N}$ tel que le polynôme trigonométrique :

$$P_n : t \mapsto \sum_{k=-p_n}^{p_n} c_k(h_n)e^{ikt}$$

vérifie, pour tout $t\in[a,c]$:

$$|P_n(t) - h_n(t)| \leqslant 1/(2n), \text{ et donc } |P_n(t) - \varphi(t)| \leqslant 1/n.$$

• La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ répond à la question.

Remarque. Si $b-a \geqslant 2\pi$, on peut fixer $m\in\mathbb{N}^*$ et $c = a + 2m\pi$ de façon que $c>b$. Il existe ici une suite de "polynômes trigonométriques de période $2m\pi$" i.e. d'applications :

$$P_n : t \mapsto \sum_{k=-p_n}^{p_n} \gamma_{n,k}e^{ikt/m}$$

telle que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

1.5.2 Soient α réel tel que $0<\alpha<1$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, avec :

$$f(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{|t|^\alpha} \text{ si } t \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\} \ ; \ f(0) = f(\pi) = 0.$$

1°) Montrer que la série de Fourier de f est de la forme $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nt$, et que $b_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$.

2°) La série de Fourier de f converge-t-elle ?

1°) Comme f est 2π-périodique et localement intégrable sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier existe, et, f étant impaire, c'est une série de sinus. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sh} t \frac{\sin nt}{t^\alpha} dt.$$

On peut écrire : $\frac{\pi}{2} b_n = \lim_{x \to 0, x>0} \int_x^\pi \operatorname{sh} t . \varphi'(t) dt$

où φ est l'application de classe C^1 : $t \to \int_\pi^t \frac{\sin nu}{u^\alpha} du$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$:

Une intégration par parties fournit, pour $x \in]0,\pi]$:

$$\int_x^\pi \operatorname{sh} t . \varphi'(t) dt = [\operatorname{sh} t . \varphi(t)]_x^\pi - \int_x^\pi \operatorname{ch} t . \varphi(t) dt$$

Comme $\int_\pi^0 \frac{\sin nu}{u^\alpha} du$, $\alpha < 1$, converge, on en déduit :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{ch} t . \left(-\varphi(t)\right) dt.$$

On a : $\quad - \varphi(t) = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \int_{nt}^{n\pi} \frac{\sin v}{v^\alpha} dv.$

L'application continue $\psi : x \mapsto \int_1^x \frac{\sin v}{v^\alpha} dv$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}_+$. D'après la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin v}{v^\alpha} dv$, elle admet une limite finie en $+\infty$. Il existe donc $M = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |\psi(x)|$. On en déduit :

$$|b_n| \leq \frac{2}{\pi} . 2M \operatorname{sh} \pi . \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$ □

2°) Pour $t_0 \notin \pi\mathbb{Z}$, f est dérivable en t_0 ; la série de Fourier de f converge donc en t_0, et elle a pour somme $f(t_0)$.

Pour $t_0 \in \pi\mathbb{Z}$, la série de Fourier de f est visiblement convergente en t_0, de somme 0 ; or en un tel point $f(t_0) = 0$.

En conclusion, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, et elle a pour somme f.

$\boxed{1.5.3}$ 1°) Vérifier :

$$\forall t \in [-\pi,\pi] \qquad t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2} \qquad (1)$$

et : $$\forall t \in]-\pi,\pi[\qquad t = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n} \qquad (2)$$

2°) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une application $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2, telle que : $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2+a^2}$.

Former une équation différentielle vérifiée par f, et en déduire une expression de $f(t)$.

3°) Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \sin nt}{n^2+a^2}$, $t \in]-\pi,\pi[$.

1°) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $f(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi,\pi]$; elle est continue et C^1 par morceaux ; sa série de Fourier converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$, et admet g pour somme.

Il s'agit d'une série de cosinus. On a, avec les notations habituelles :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3} \;;\; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos nt \, dt = 4\frac{(-1)^n}{n^2},\; n \in \mathbb{N}^*.$$

On en déduit (1).

— Soit $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $g_1(t) = t$ si $t \in]-\pi,\pi[$ et $g_1(\pi) = 0$. Elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}$; en tout $t \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, elle est dérivable, sa série de Fourier converge et a pour somme $g_1(t)$.

Il s'agit d'une série de sinus. On a :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \sin nt \, dt = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n},\; n \in \mathbb{N}^*.$$

On en déduit (2).

Remarques. a) En faisant $t = 0$ dans (1) : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

b) En faisant $t = 1$, puis $t = \pi - 1$ dans (2) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2} \;;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}.$$

résultats déjà obtenus au 1.4.20.

2°) On a $\left|(-1)^n \frac{\cos nt}{n^2+a^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2+a^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2+a^2}$ converge, on en déduit que f existe au titre de somme d'une série d'applications continues qui converge normalement et donc uniformément sur $[-\pi,\pi]$, et que f est continue sur $[-\pi,\pi]$.

• Soit $h : [-\pi,\pi]$ définie par : $f(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} + a^2 h(t)$, i.e. par :

$$h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t), \text{ où } u_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{\cos nt}{n^2(n^2+a^2)}, \quad (\text{cf. } 1°)).$$

On vérifie aisément que les séries d'applications continues $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, $\sum_{n\geqslant 1} u'_n$, $\sum_{n\geqslant 1} u''_n$ convergent normalement, et donc uniformément sur $[-\pi,\pi]$, ce qui entraîne que h est C^2 et que l'on a :

$$h'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nt}{n(n^2+a^2)} \quad ; \quad h''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2+a^2} = f(t).$$

Il en résulte que f est C^2, et solution sur $[-\pi,\pi]$ de :

$$y'' - a^2 y = 1/2 \tag{E}$$

Une solution particulière de (E) est $t \mapsto -1/(2a^2)$. Compte tenu de la parité de f, on en déduit qu'il existe une constante A telle que :

$$\forall t \in [-\pi,\pi] \quad f(t) = A \operatorname{ch} at - 1/(2a^2).$$

On a $h'(\pi) = 0$, et donc $f'(\pi) = \pi/2$. Par ailleurs $f'(\pi) = A a \operatorname{sh} a\pi$.
D'où $A = \pi/(2a \operatorname{sh} a\pi)$, et finalement :

$$\forall t \in [-\pi,\pi] \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{\operatorname{ch} at}{\operatorname{sh} a\pi} - \frac{1}{2a^2}$$

3°) Il en résulte : $f'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh} a\pi}$. D'autre part :

$$f'(t) = \frac{t}{2} + a^2 h'(t).$$

En se limitant à $t \in]-\pi,\pi[$, et en utilisant 2°) on a :

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n} \left(1 - \frac{a^2}{n^2+a^2}\right)$$

Finalement :

$$\forall t \in]-\pi,\pi[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nt}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh} a\pi}$$

$\boxed{1.5.4}$ Soit $a \in \mathbf{C}$ n'appartenant pas au segment $[-1,1]$ de $\mathbf{R}$; on pourra utiliser b, racine de plus petit module de $z^2 - 2az + 1 = 0$.

1°) Développer en série de Fourier l'application $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos t}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Cas particulier ; $a = 2$.

2°) En déduire la valeur de $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{a - \cos t} dt$, $n \in \mathbf{N}$.

L'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est C^{∞}, 2π-périodique et paire. Elle admet donc une série de Fourier qui converge uniformément sur $\mathbf{R}$ et admet f pour fonction somme.

Il s'agit d'une série de cosinus : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geqslant 1} a_n \cos nt$, avec :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n = \frac{2}{\pi} I_n \; ; \; I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{a - \cos t}\, dt.$$

Au lieu de chercher à calculer I_n, nous allons trouver la série de Fourier de f par un autre procédé.

1°) L'équation $z^2 - 2az + 1 = 0$ ayant deux racines de produit 1, on a $|b| \leqslant 1$, et même $|b| < 1$, car $b = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbf{R}$, exigerait $a \in \mathbf{R}$ et $a \in [-1,1]$.

- Soit $t \in \mathbf{R}$ fixé. On peut écrire :

$$f(t) = \frac{2b}{b^2+1-2b\cos t} = \frac{2b}{1-b^2} g(b)$$

où $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est la fonction rationnelle $z \mapsto \frac{1 - z^2}{1-2z\cos t+z^2}$.

Celle-ci a pour pôles e^{it} et e^{-it}, de module commun 1 ; elle admet donc un développement en série entière de rayon de convergence 1, que l'on obtient en utilisant une décomposition en éléments simples. Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, on a, en effet :

$$g(z) = -1 + \frac{1}{1 - ze^{it}} + \frac{1}{1 - ze^{-it}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \cos nt.$$

- f admet donc le développement en série trigonométrique :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f(t) = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos nt\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt.$$

De : $\sup_{t \in \mathbf{R}} |b^n \cos nt| = |b|^n$, $|b| < 1$, et de $\sum |b|^n$ converge, on déduit que la série ainsi obtenue converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbf{R}$. D'où la possibilité d'écrire, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt\right)\cos pt\, dt = a_p$$

ce qui prouve qu'il s'agit de la série de Fourier de f. □

2°) Du 1°), on déduit : $I_n = \frac{2\pi b^{n+1}}{1-b^2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

<u>Cas particulier</u>. Pour $a = 2$, on a $b = 2-\sqrt{3}$, $\frac{2b}{1-b^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. D'où :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \frac{1}{2 - \cos t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} (2-\sqrt{3})^n \cos nt\right)$$

et : $\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{2 - \cos t}\, dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n.$

$\boxed{1.5.5}$ Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle, décroissante, de limite 0 ; on lui associe la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} f_n$, où $f_n(t) = b_n \sin nt$.

1°) Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$, et uniformément sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ qui ne contient aucun multiple entier de 2π.

2°) Etablir l'équivalence des deux assertions :

i) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$;

ii) $b_n = o(1/n)$ au voisinage de $+\infty$.

3°) On suppose ici : $b_n = O(1/n)$ au voisinage de $+\infty$.

Montrer que la somme de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est bornée et localement intégrable sur $\mathbb{R}$; trouver sa série de Fourier.

1°) Question classique. Rappelons en la démonstration.

a) Pour tout $t\in\pi\mathbb{Z}$, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(t)$, nulle, est convergente.

— En notant : $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt$, $n\in\mathbb{N}^*$, $t\in\mathbb{R}$, la transformation d'Abel permet d'écrire $\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(t)$, $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{p} (b_{n+k} - b_{n+k+1}) S_{n+k}(t) - b_{n+1} S_n(t) + b_{n+p+1} S_{n+p}(t).$$

En utilisant la formule classique :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z} \qquad |S_n(t)| \leq \frac{1}{|\sin t/2|},$$

et en tenant compte de $b_{n+k} - b_{n+k+1} \geq 0$, on a, pour $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ donné :

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2 \qquad \left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(t)\right| \leq \frac{2b_{n+1}}{|\sin t/2|} \tag{1}$$

et on constate que la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(t)$ vérifie le critère de Cauchy et est donc convergente.

— Au total, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Soit f sa fonction somme ; f est visiblement 2π-périodique et impaire.

b) La périodicité de f permet de se limiter à montrer la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur un intervalle $[\alpha, 2\pi-\alpha]$, avec $0<\alpha<\pi$.

On a : $$\sup_{t\in[\alpha,2\pi-\alpha]} \left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(t)\right| = \frac{2b_{n+1}}{\sin \alpha/2}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = 0$, $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$, et converge donc uniformément sur cet intervalle. □

Remarque : Les f_n étant continues, la somme f est continue en tout point de $]\alpha, 2\pi-\alpha[$; on en déduit aisément qu'elle est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

• Notons qu'en utilisant $\sin(t/2) \geqslant t/\pi$ pour $t \in [0,\pi]$, (1) fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in]0,\pi] \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leqslant \frac{2\pi b_{n+1}}{t}. \tag{2}$$

2°) Preuve de i) ⇒ ii). Par hypothèse, $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Nous avons, en particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin kt\right|\right) = 0.$$

et, a fortiori :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin\frac{k\pi}{4n}\right) = 0.$$

Or, pour tout entier $k \in [n+1, 2n]$ nous avons :

$$0 \leqslant b_{2n} \sin\frac{\pi}{4} \leqslant b_k \sin\frac{k\pi}{4n}.$$

Il en résulte : $\lim_{n\to+\infty} (n b_{2n}) = 0$, et, comme $0 \leqslant b_{2n+1} \leqslant b_{2n}$: $\lim_{n\to+\infty} (n b_{2n+1}) = 0$.

On en déduit aisément : $\lim_{n\to+\infty} (n b_n) = 0$. □

Preuve de ii) ⇒ i). Par hypothèse : $\lim_{n\to+\infty} (n b_n) = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 \leqslant q b_q \leqslant \varepsilon \text{ pour tout entier } q \geqslant N.$$

— Considérons $t \in]0,\pi]$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$.

En notant p la partie entière de π/t, nous pouvons écrire :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |f_k(t)| + \left|\sum_{k=n+p}^{+\infty} f_k(t)\right|$$

En majorant $|\sin kt|$ par kt, t par π/p, et kb_k par ε, il vient :

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} |f_k(t)| \leqslant \pi\varepsilon.$$

En utilisant (2), et en majorant ensuite π/t par $n+p$:

$$\left|\sum_{k=n+p}^{+\infty} f_k(t)\right| \leqslant \frac{2\pi b_{n+p}}{t} \leqslant 2(n+p) b_{n+p} \leqslant 2\varepsilon.$$

En conclusion, pour tout $t \in]0,\pi]$ nous avons :

$$\forall n \geqslant N \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(t)\right| \leqslant (\pi+2)\varepsilon.$$

— Cette inégalité s'étend trivialement à $t=0$, et donc, par parité et périodicité, à tout $t\in\mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. □

3°) Les conclusions du 1°) s'appliquent. En outre :

$\exists\, K\in\mathbb{R}_+^* \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad n\,b_n \leq K.$

Soit $t\in\,]0,\pi]$. En notant p la partie entière de π/t, on a :

$$|f(t)| \leq \sum_{k=1}^{p} |f_k(t)| + \left|\sum_{k=p+1}^{+\infty} f_k(t)\right| .$$

En majorant $|\sin kt|$ par kt, t par π/p et $k\,b_k$ par K, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} |f_k(t)| \leq \pi K.$$

En utilisant (2) et en majorant π/t par $p+1$, on a :

$$\left|\sum_{k=p+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leq \frac{2\pi b_{p+1}}{t} \leq 2(p+1)b_{p+1} \leq 2K.$$

L'inégalité $|f(t)| \leq (\pi+2)K$ est donc vraie pour tout $t\in\,]0,\pi]$; comme elle est évidemment vraie pour $t=0$, elle est vraie pour tout $t\in\mathbb{R}$ (par parité et périodicité). L'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est donc bornée.

• La restriction de f à l'intervalle période $[0,2\pi]$ est bornée et a au plus deux points de discontinuité (0 et 2π) ; elle est donc intégrable ; il en résulte que f est localement intégrable et possède une série de Fourier, qui est une série de sinus que nous notons $\sum_{n\geq 1} c_n \sin nt$.

Pour $m\in\mathbb{N}^*$ donné, calculons c_m. Nous avons :

$$\frac{\pi}{2}\, c_m = \int_0^{\pi} f(t)\sin mt\, dt = \int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)\right) dt$$

où : $g_n(t) = f_n(t)\sin mt = b_n \sin nt \sin mt$.

Il est en effet évident que la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $[0,\pi]$ et a pour somme $t\mapsto f(t)\sin mt$. Montrons que cette convergence est uniforme.

Etudions : $\rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(t) = \sin mt \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$.

$\rho_n(0)=0$ est trivial ; si $t\in\,]0,\pi]$ on utilise (2), et on écrit :

$$|\rho_n(t)| = |\sin mt| \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leq mt\cdot\frac{2\pi b_{n+1}}{t} = 2\pi m\, b_{n+1}.$$

On a donc : $\sup_{t\in[0,\pi]} |\rho_n(t)| \leq 2\pi m\, b_{n+1}$. Or $\lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = 0$. □

— La convergence uniforme permet d'écrire :

$$\frac{\pi}{2} c_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} b_n \sin nt \, \sin mt \, dt.$$

On sait que : $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n}$. D'où $c_m = b_m$.

— La série de Fourier de f est donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

$\boxed{1.5.6}$ Soit $\gamma_p = \dfrac{1}{\pi^{2p}} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$, $p \in \mathbb{N}^*$. Vérifier : $\gamma_p \in \mathbb{Q}_+^*$.

• Soit f_{2k-1} (resp. f_{2k}) $p \in \mathbb{N}^*$, 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par: $f_{2k-1}(t) = t^{2k-1}$ si $t \in]-\pi, \pi[$, $f_{2k-1}(\pi) = 0$ (resp. $f_{2k}(t) = t^{2k}$ si $t \in]-\pi, \pi]$).

Elle est localement intégrable et admet un développement en série de Fourier:

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n^k \sin nt \quad \left(\text{resp. } \frac{1}{2} a_o^k + \sum_{n\geqslant 1} a_n^k \cos nt\right).$$

En utilisant les expressions classiques des b_n^k et des a_n^k on a (par parties) :

$$b_n^{k+1} = (-1)^{n+1} \frac{2\pi^{2k}}{n} - \frac{2k(2k+1)}{n^2} b_n^k \; ; \; a_n^k = -\frac{2k}{n} b_n^k, \; (n \in \mathbb{N}^*).$$

Directement : $b_n^1 = (-1)^{n+1} \, 2/n$. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit qu'il existe des $\beta_{k,\ell} \in \mathbb{Z}$ et des $\alpha_{k,\ell} \in \mathbb{Z}$ <u>indépendants de n</u> tels que :

$$(-1)^n b_n^k = \sum_{\ell=0}^{k-1} \beta_{k,\ell} \frac{\pi^{2\ell}}{n^{2k-1-2\ell}} \; ; \quad (-1)^n a_n^k = \sum_{\ell=0}^{k=1} \alpha_{k,\ell} \frac{\pi^{2\ell}}{n^{2k-2\ell}}$$

pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. D'ailleurs (directement) : $a_o^k = \dfrac{2\pi^{2k}}{2k+1}$.

• Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a, par la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n^k)^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^{4k-2} dt = \frac{\pi^{4k-2}}{4k-1} \tag{1}$$

et :
$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^k)^2 = \frac{\pi^{4k}}{4k+1} - \frac{1}{4} (a_o^k)^2.$$

— Pour $k = 1$, on en déduit : $\gamma_1 = 1/6$ et $\gamma_2 = 1/90$. (2)

— Pour $k \geqslant 2$, on écrit, en notant $\Lambda_k = \{0, \dots, k-1\}^2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n^k)^2 = \sum_{(\ell,\ell') \in \Lambda_k} \beta_{k,\ell} \beta_{k,\ell'} \, \pi^{2(\ell+\ell')} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4k-2-2(\ell+\ell')}}.$$

Par (1) et par la définition des γ_p, on en déduit :

$$\sum_{(\ell,\ell') \in \Lambda_k} \beta_{k,\ell} \beta_{k,\ell'} \, \gamma_{2k-1-(\ell+\ell')} \in \mathbb{Q}.$$

De même : $\displaystyle\sum_{(\ell,\ell') \in \Lambda_k} \alpha_{k,\ell} \alpha_{k,\ell'} \, \gamma_{2k-(\ell+\ell')} \in \mathbb{Q}$.

A partir de (2), on en déduit par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \gamma_p \in \mathbb{Q}$. □

INTÉGRALES

Les exercices sur les intégrales multiples et sur les applications des intégrales à la géométrie sont proposés dans un autre tome de l'ouvrage.

2.1. COMPLÉMENTS SUR L'INTÉGRALE SIMPLE

2.1.1 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t^3+x^3}}\,dt$.

Montrer qu'au voisinage de 0 (pour $x>0$) on a : $f(x) \sim -\operatorname{Log} x$, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g : x \mapsto f(x) + \operatorname{Log} x$ admet un développement limité à l'ordre n ; appliquer à $n=8$.

L'existence de $f(x)$, pour $x>0$, ne pose pas de problème.

Par le changement de variable $t = xu$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{\sqrt[3]{u^3+1}}\,du$.

Au voisinage de $+\infty$: $\sqrt[3]{u^3+1} \sim u$, ce qui conduit à écrire :

$$f(x) - \int_1^{1/x} \frac{1}{u}\,du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{u^3+1}}\,du + \int_1^{1/x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{u^3+1}} - \frac{1}{u}\right)du$$

et, après le changement de variable $u = 1/t$ dans la dernière intégrale :

$$g(x) = A + \int_x^1 \varphi(t)\,dt,$$

avec : $\quad A = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{u^3+1}}\,du$, et $\varphi(t) = \frac{1}{t}\left((1+t^3)^{-1/3} - 1\right)$

On a : $\varphi(t) \sim -t^2/3$ au voisinage de 0, ce qui permet de prolonger φ en une application continue $\overline{\varphi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, en convenant : $\overline{\varphi}(0) = 0$. Il vient :

$$g(x) = A + B - \int_0^x \overline{\varphi}(t)\,dt \ ; \ B = \int_0^1 \overline{\varphi}(t)\,dt.$$

En convenant $\overline{g}(0) = A + B$, on prolonge g en une application $\overline{g} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $\overline{g}' = -\overline{\varphi}$. Comme $\overline{\varphi}$ admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0, il en est de même pour $\overline{g}$. C'est ainsi que :

$$\overline{\varphi}(t) = -\frac{t^2}{3} + \frac{2}{9}t^5 + o(t^7),$$

et $\quad \overline{g}(x) = A + B + \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x^6}{27} + o(x^8)$.

$\boxed{2.1.2}$ Existence et calcul de $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)$, où $f(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et elle vérifie : $\varphi_x(t) \sim t^{-x}$ au voisinage de 0, et $\varphi_x(t) \sim t^{-x-1}$ au voisinage de $+\infty$.

On en déduit que f est définie sur $]0,1[$.

• Pour tout $x\in\,]0,1[$, on écrit : $f(x) = g(x) + h(x)$, où

$$g(x) = x\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}dt \ ; \ h(x) = x\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt.$$

• Sur $[0,1]$, on minore $1+t$ par 1, ce qui fournit :

$$\forall x\in\,]0,1[\qquad 0 \leqslant g(x) \leqslant x\int_0^1 t^{-x}dt = \frac{x}{1-x},$$

dont on déduit : $\lim\limits_{x\to 0, x>0} g(x) = 0$.

• Sur $[1,+\infty[$, on minore $1+t$ par t, ce qui fournit :

$$\forall x\in\,]0,1[\qquad h(x) \leqslant x\int_1^{+\infty} t^{-x-1}dt = 1.$$

Soit l'application : $h_1 : x \mapsto 1-h(x)$. On a :

$$h_1(x) = x\int_1^{+\infty}\left(1 - \frac{t}{1+t}\right)t^{-x-1}\,dt = x\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x-1}}{1+t}dt.$$

En minorant à nouveau $1+t$ par t, on en déduit :

$$\forall x\in\,]0,1[\qquad 0 \leqslant h_1(x) \leqslant x\int_1^{+\infty} t^{-x-2}dt = \frac{x}{x+1}$$

et : $\lim\limits_{x\to 0, x>0} h_1(x) = 0$.

• En conclusion : $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$.

$\boxed{2.1.3}$ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Existe-t-il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt\right)$?

$F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ sont des applications C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et on dispose de $I = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, où $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ (1)

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, une intégration par parties donne :

$$\Phi(x) = x\big(F(x) - G(x)\big), \text{ où } G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$G(x) - I = \frac{1}{x}\int_0^x \big(F(t) - I\big)dt.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après (1), il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t \geqslant a \quad |F(t)-I| \leqslant \varepsilon/2.$$

Pour tout $x \geqslant a$, on a donc :

$$|G(x)-I| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^a |F(t)-I|\,dt + \frac{1}{x}\int_a^x \frac{\varepsilon}{2}\,dt$$

et, en notant $M = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |F(t)-I|$:

$$|G(x)-I| \leqslant \frac{Ma}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte : $|G(x)-I| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant \max\left(a, \frac{2Ma}{\varepsilon}\right)$

D'où : $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = I.$

Comme : $\dfrac{\Phi(x)}{x} = F(x) - G(x)$, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Phi(x)}{x} = 0.$

$\boxed{2.1.4}$ 1°) Existence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2}\,dt$, $n \in \mathbb{N}$.

2°) Existence et calcul de $J(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos zt\,dt$, $z \in \mathbb{C}$.

(On admettra $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2$).

1°) a) Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, l'existence de I_n se justifie par la continuité de $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ et par : $t^{2n} e^{-t^2} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$.

b) Une intégration par parties donne : $I_n = \dfrac{2}{2n+1} I_{n+1}$.

A partir de $I_0 = \sqrt{\pi}/2$, on en déduit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi}.$$

2°) a) Dans la suite, $z \in \mathbb{C}$ est fixé. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|\cos zt|^2 = \cos^2 \mathcal{R}e(zt) + \mathrm{sh}^2 \mathcal{J}m(zt) \leqslant \mathrm{ch}^2 \mathcal{J}m(zt)$$

et : $\quad |e^{-t^2} \cos zt| \leqslant e^{-t^2} \mathrm{ch}\, \mathcal{J}m(zt).$

D'où : $\quad |e^{-t^2} \cos zt| = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$.

Associé à la continuité de $t \mapsto e^{-t^2} \cos zt$, ce résultat assure la convergence absolue de l'intégrale impropre $J(z)$.

b) En utilisant le développement en série entière de $t \mapsto \cos zt$, de rayon de convergence infini, on constate :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad e^{-t^2} \cos zt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

où : $\quad u_n(t) = (-1)^n e^{-t^2} z^{2n} t^{2n}/(2n)!$

Pour $A \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a :

$$\sup_{t\in[0,A]} |u_n(t)| \leqslant |z|^{2n} A^{2n}/(2n)!$$

Comme $\sum |z^{2n}| A^{2n}/(2n)!$ converge, la série d'applications $\sum u_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0,A]$; les u_n étant continues, et donc intégrables, on a, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^A e^{-t^2} \cos zt\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(A), \text{ avec :} \tag{1}$$

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C} \quad A \longmapsto \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \int_0^A e^{-t^2} t^{2n}\, dt.$$

• Le premier membre de (1) a pour limite $J(z)$ lorsque A tend vers $+\infty$. Etudions le second membre. On a :

$$\sup_{A\in\mathbb{R}_+} |f_n(A)| \leqslant |z^{2n}| I_n/(2n)!$$

La règle de d'Alembert montrant que $\sum |z^{2n}| I_n/(2n)!$ converge, la série d'applications $\sum f_n$ converge sur $\mathbb{R}_+$ non seulement simplement (ce qui est acquis) mais encore normalement et donc uniformément.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous disposons de :

$$\lim_{A\to+\infty} f_n(A) = (-1)^n z^{2n} I_n/(2n)!$$

Par le théorème d'interversion des limites, on obtient l'existence de :

$$\lim_{A\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} I_n/(2n)!$$

D'où : $\quad J(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^n . n!}$

et enfin : $J(z) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z^2/4}$.

$\boxed{2.1.5}$ 1°) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable, monotone au voisinage de $+\infty$ (ce qui signifie qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que la restriction de f à $[A,+\infty[$ soit monotone) et telle que l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

a) Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum f(nh)$ converge.

b) Vérifier : $\displaystyle\lim_{h\to0,\, h>0} \left(h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)\right) = I.$ (1)

2°) Notant : $g(x) = (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} - \mathrm{Log}\, \frac{1}{1-x}$,

vérifier : $\lim_{x \to 1, x<1} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt$ (2)

1°) a) Quitte à changer f en $-f$, nous supposerons f décroissante sur $[A,+\infty[$; le théorème de la limite monotone montre l'existence de $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\ell = \lim_{t \to +\infty} f(t)$; la convergence de I exige $\ell = 0$, ce qui entraîne $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [A,+\infty[$.

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ fixé ; associons lui $M \in \mathbb{N}$ par $Mh < A \leqslant (M+1)h$.

Pour tout entier $n \geqslant M+2$, f est décroissante et positive sur $[(n-1)h, nh]$; on a :

$$f(nh) \leqslant \frac{1}{h} \int_{(n-1)h}^{nh} f(t)dt \leqslant f\big((n-1)h\big) \tag{3}$$

et, pour tout entier $N \geqslant M+2$:

$$\sum_{n=M+2}^{N} f(nh) \leqslant \frac{1}{h} \int_{(M+1)h}^{Nh} f(t)dt \leqslant \frac{1}{h} \int_{(M+1)h}^{+\infty} f(t)dt$$

Les sommes partielles de la série $\sum_{n \geqslant M+2} f(nh)$, à termes positifs, admettent ainsi un majorant commun ; la série est donc convergente, et il en est de même pour $\sum f(nh)$. □

b) Quitte à changer A, nous supposerons $A > 1$. Comme f est intégrable, et donc bornée sur $[0,A+1]$, nous disposons de $K = \sup_{t \in [0,A+1]} |f(t)|$.

A tout $h \in]0,1[$, associons encore $M \in \mathbb{N}$ par $Mh < A \leqslant (M+1)h$; nous avons ici $M \geqslant 1$. Nous aurons à utiliser :

$$h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = h \sum_{n=0}^{M} f(nh) + h \sum_{n=M+1}^{+\infty} f(nh).$$

i) Considérons la subdivision de $[0,A]$ constituée de A et des nh, $0 \leqslant n \leqslant M$; le pas en est h ; on dispose de la somme de Riemann :

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{M-1} f(nh) + (A-Mh)f(Mh).$$

On a : $\lim_{h \to 0, h>0} S(h) = \int_0^A f(t)dt.$

Soit $\Delta(h) = S(h) - h \sum_{n=0}^{M} f(nh) = (A-Mh)f(Mh) - hf(Mh).$

On constate : $|\Delta(h)| \leqslant 2Kh.$

On en déduit : $\lim_{h \to 0, h>0} h \sum_{n=0}^{M} f(nh) = \int_0^A f(t)dt.$ (4)

ii) En reprenant (3), on constate, pour tout entier $N \geqslant M+2$:

$$\sum_{n=M+2}^{N} f(nh) \leqslant \frac{1}{h} \int_{(M+1)h}^{Nh} f(t)dt \leqslant \sum_{n=M+1}^{N-1} f(nh).$$

D'où, par passage à la limite (légitimé par les convergences de I et de $\sum f(nh)$) :

$$\sum_{n=M+2}^{+\infty} f(nh) \leqslant \frac{1}{h} \int_{(M+1)h}^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{n=M+1}^{+\infty} f(nh).$$

On en déduit :

$$\left| \int_{A}^{+\infty} f(t)dt - h \sum_{n=M+1}^{+\infty} f(nh) \right| \leqslant 2Kh$$

et : $$\lim_{h\to 0, h>0} h \sum_{n=M+1}^{+\infty} f(nh) = \int_{A}^{+\infty} f(t)dt \qquad (5)$$

• (4) et (5) fournissent (1). □

2°) a) Pour tout $x \in]0,1[$, on a $\frac{x^n}{1-x^n} \sim x^n$ au voisinage de $+\infty$, dont on déduit la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1-x^n}$ et l'existence de $g(x)$.

b) Soit f l'application $t \mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Elle est continue, et peut être prolongée en une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ (encore notée f) par la convention $f(0) = 1/2$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on dispose de $f'(t) = e^{-t}\left(\frac{-1}{(1-e^{-t})^2} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)$.

On a $f'(t) \sim -e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$; il existe donc $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(t) < 0$ pour tout $t \geqslant A$, et donc tel que la restriction de f à $[A,+\infty[$ soit décroissante (une étude plus poussée montrerait que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$).

Enfin $f(t) \sim e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$, ce qui, compte tenu de la continuité de f, garantit l'existence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

c) En utilisant (1) avec $h = -\mathrm{Log}\, x$, $x \in]0,1[$, il vient :

$$\lim_{x\to 1, x<1} \left(-\mathrm{Log}\, x \sum_{n=0}^{+\infty} f(-n \,\mathrm{Log}\, x)\right) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

Comme $\lim_{x\to 1, x<1} \left(-\mathrm{Log}\, x . f(0)\right) = 0$, on a encore :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to 1, x\in]0,1[} \ell(x) \ ; \ \ell(x) = -\mathrm{Log}\, x \sum_{n=1}^{+\infty} f(-n\,\mathrm{Log}\, x)$$

En utilisant les convergences de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1-x^n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ pour $x \in]0,1[$, on vérifie :

$$g(x) - \ell(x) = (1-x+\operatorname{Log} x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

On a, toujours pour $x \in]0,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}}$$

Or : $1+x+\dots+x^{n-1} \geqslant n\,x^{(n-1)/2}$ (comparaison de deux moyennes).

D'où : $$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant \frac{1}{1-x}\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{(n+1)/2}}{n}\right|$$

et donc :

$$|g(x) - \ell(x)| \leqslant |1-x+\operatorname{Log} x| \frac{-\sqrt{x}\operatorname{Log}(1-\sqrt{x})}{1-x}$$

On en déduit aisément : $\lim\limits_{x\to 1, x<1} \big(g(x)-\ell(x)\big) = 0$; d'où (2). □

2.1.6 1°) Etudier la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\operatorname{Log} t}\,dt$.

2°) Existence et calcul de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\operatorname{Log} t}\,dt$.

1°) $f(x)$ n'est évidemment pas défini pour $x \leqslant 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; on constate que $t \longmapsto 1/\operatorname{Log} t$ est définie et continue sur l'intervalle compact $I(x)$ d'extrêmités x et x^2 ; $f(x)$ est donc défini. En utilisant la formule de la moyenne, on peut écrire :

$$f(x) = \xi(x) \int_x^{x^2} \frac{1}{t \operatorname{Log} t}\,dt, \quad \text{avec } \xi(x) \in I(x),$$

et : $f(x) = \xi(x) \Big[\operatorname{Log}(\operatorname{Log} t)\Big]_x^{x^2} = \xi(x)\operatorname{Log} 2$.

D'où l'existence de $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$, et de $\lim\limits_{x\to 1, x\neq 1} f(x) = \operatorname{Log} 2$.

On prolonge f en $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par $g(0) = 0$, $g(1) = \operatorname{Log} 2$.

— Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on dispose de $g'(x) = \dfrac{2x}{\operatorname{Log} x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{Log} x} = \dfrac{x-1}{\operatorname{Log} x}$.

D'où l'existence de $\lim\limits_{x\to 0, x>0} g'(x) = 0$, et de $\lim\limits_{x\to 1, x\neq 1} g'(x) = 1$, et donc celle de $g'(0) = 0$ et de $g'(1) = 1$; g est ainsi C^1. On a $g'(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$; g est donc strictement croissante.

— Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on dispose de $g''(x) = \dfrac{\operatorname{Log} x - (x-1)/x}{(\operatorname{Log} x)^2}$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0, x>0} g''(x) = +\infty$. D'autre part, de :

$$g''(1+t) = \frac{t - t^2/2 - t(1-t) + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{1}{2} + o(1)$$

on déduit l'existence de $\lim\limits_{x\to 1, x\neq 1} g''(x) = 1/2$, et donc celle de $g''(1) = 1/2$.

La restriction de g à $\mathbb{R}_+^*$ est ainsi C^2. En utilisant $\text{Log}\, X < X-1$, avec $X = 1/x$, on constate $g''(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$; g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$; g est convexe.

— Enfin de $x \,\text{Log}\, 2 \leqslant g(x) \leqslant x^2 \text{Log}\, 2$ pour $x \geqslant 1$, on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

D'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\text{Log}\, 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2°) J existe au titre de l'intégrale de Riemann sur l'intervalle compact $[0,1]$ de $g' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, qui est continue. On a :

$$J = g(1) - g(0) = \text{Log}\, 2.$$

2.2. INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE.

$\boxed{2.2.1}$ Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ une application continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note :

$$G(x) = \frac{1}{x}\, e^{-a/x} \int_0^a e^{t/x} g(t)dt\,.$$

Existence et calcul de $\lim\limits_{x \to 0, x>0} G(x)$.

<u>Première solution</u>. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, notons φ_x l'application continue de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_x(t) = \frac{1}{x}\, e^{(t-a)/x}$, et calculons :

$$J(x) = \int_0^a \varphi_x(t)dt = \left[e^{(t-a)/x}\right]_0^a = 1 - e^{-a/x}\,.$$

Nous constatons qu'il existe $J = \lim\limits_{x\to 0, x>0} J(x)$, et que $J = 1$. (1)

- Ecrivons

$$G(x) = \int_0^a \varphi_x(t)\big(g(t) - g(a)\big)dt + g(a)J(x). \tag{2}$$

Nous allons montrer que, dans le cas particulier où $g(a) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0, x>0} G(x) = 0$. Il en résultera, compte tenu de (1) et de (2), que, dans le cas général :

$$\lim_{x\to 0, x>0} G(x) = Jg(a) = g(a).$$

- Dorénavant : $g(a) = 0$, ce qui entraîne $\lim\limits_{t\to a, t<a} g(t) = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Il existe $\alpha \in [0,a[$ tel que :

$$\forall t \in [\alpha,a] \qquad |g(t)| < \varepsilon.$$

D'autre part $\mu(x) = \sup\limits_{t\in[0,\alpha]} |\varphi_x(t)|$, qui est $\frac{1}{x}\, e^{(\alpha-a)/x}$, vérifie :

$$\lim_{x\to 0, x>0} \mu(x) = 0. \tag{3}$$

On a donc, en notant $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |g(t)|$:

$$|G(x)| < M\mu(x)\int_0^\alpha dt + \varepsilon\int_\alpha^a \varphi_x(t)dt$$

et : $\quad |G(x)| < M\,a\,\mu(x) + \varepsilon\,,$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après (3), il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in]0,\eta[$:

$$M a \mu(x) \leqslant \varepsilon, \text{ et donc } |G(x)| \leqslant 2\varepsilon. \qquad \square$$

Deuxième solution. On commence à établir par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \to 0, x>0} \int_0^a \varphi_x(t) t^p dt = a^p,$$

ce qui entraîne, par linéarité :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \lim_{x \to 0, x>0} \int_0^a \varphi_x(t) P(t) dt = P(a).$$

On utilise ensuite le théorème de Weierstrass du 1.2.2. Le détail des calculs est laissé au lecteur.

Remarque. En reprenant la première solution, le lecteur constatera qu'il est en mesure de résoudre tout exercice du type suivant :

Soient $(a',a) \in \mathbb{R}^2$, $a' < a$, $\Lambda \subset \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \overline{\Lambda}$, $g : [a',a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue, et* $(\varphi_x)_{x \in \Lambda}$ *une famille d'applications continues de* $[a',a]$ *dans* $\mathbb{R}$, *qui converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle* $[a',\alpha]$ *tel que* $a' \leqslant \alpha < a$, *lorsque* $x \in \Lambda$ *tend vers* x_0. *On note :*

$$J(x) = \int_{a'}^a \varphi_x(t) dt, \text{ et } G(x) = \int_{a'}^a \varphi_x(t) g(t) dt, \quad (x \in \Lambda)$$

et on suppose qu'il existe $J = \lim_{x \to x_0, x \in \Lambda} J(x)$.

Montrer que, dans ces conditions : $\lim_{x \to x_0, x \in \Lambda} G(x) = Jg(a)$.

(Naturellement on peut remplacer $[a',a]$ et $[a',\alpha]$ par $[a,a']$ et $[\alpha,a']$).

• L'exercice qui suit est de ce type.

$\boxed{2.2.2}$ Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note :

$$G(x) = \int_0^1 \frac{xg(t)}{x^2+t^2} dt$$

Existence et calcul de $\lim_{x \to 0, x>0} G(x)$.

$(\varphi_x)_{x \in \mathbb{R}_+^*}$ est la famille des applications continues et décroissantes $t \longmapsto \frac{x}{x^2+t^2}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

★ Pour tout α tel que $0 < \alpha \leqslant 1$, $\sup_{t \in [\alpha,1]} |\varphi_x(t)| = \frac{x}{x^2+\alpha^2}$.

★ $\int_0^1 \varphi_x(t) dt = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg}\, x$.

On en déduit : $\lim_{x \to 0, x>0} G(x) = \frac{\pi}{2} g(0)$.

$\boxed{2.2.3}$ Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. A tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ on associe l'application $f_\lambda : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ déterminée par :

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \sin\frac{\pi t}{\lambda}\cdot f(x+t)dt .$$

1°) Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ lorsque λ tend vers 0, i.e. que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, il existe $\varphi(x) = \lim\limits_{\lambda\to 0} f_\lambda(x)$.

2°) Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact $[0,a]$, $a>0$, de $\mathbb{R}_+$, i.e. que l'application $\lambda \longmapsto \sup\limits_{x\in[0,a]} |f_\lambda(x)-\varphi(x)|$ admet 0 pour limite lorsque λ tend vers 0.

1°) La solution est basée sur :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \sin\frac{\pi t}{\lambda}\,dt = \frac{2}{\pi} .$$

— Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, nous avons :

$$f_\lambda(x) - \frac{2}{\pi}f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \sin\frac{\pi t}{\lambda}\big(f(x+t)-f(x)\big)dt$$

et donc, en notant φ la fonction $2/\pi\cdot f$:

$$|f_\lambda(x)-\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\cdot\sup_{t\in[0,\lambda]}|f(x+t)-f(x)| \tag{1}$$

Comme f est continue en x, on en déduit : $\lim\limits_{\lambda\to 0} f_\lambda(x) = \varphi(x)$. □

2°) Soit $a>0$. La continuité uniforme de f sur $[0,a+1]$ permet d'associer à tout $\varepsilon>0$ un $\alpha\in]0,1]$ tel que :

$$\forall(u,u')\in([0,a+1])^2 \quad (|u-u'|\leqslant\alpha) \Rightarrow \big(|f(u)-f(u')|\leqslant\varepsilon\big).$$

En utilisant (1), on en déduit :

$$\forall\lambda\in]0,\alpha] \quad \forall x\in[0,a] \quad |f_\lambda(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon.$$ □

$\boxed{2.2.4}$ Soit g une application continue et bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. A tout $x\in\mathbb{R}$ on associe l'intégrale impropre $f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{g(t)}{x^2+t^2}dt$.

Déterminer $D = \{x\in\mathbb{R} \mid f(x) \text{ converge}\}$ et étudier la continuité de l'application $f : x \longmapsto f(x)$ de D dans $\mathbb{R}$.

<u>Indication</u> : La discussion fait intervenir la nature de l'intégrale f(0).

Nous aurons à utiliser le cours sur la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Nous notons : $M = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}|g(t)|$.

• A tout $x\in\mathbb{R}$, nous associons les intégrales éventuellement impropres :

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{g(t)}{x^2+t^2}\,dt \quad ; \quad f_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{x^2+t^2}\,dt.$$

a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t \longmapsto g(t)/(x^2+t^2)$ est continue sur $[1,+\infty[$, et

$$\left(\forall t\in[1,+\infty[\quad \left|\frac{g(t)}{x^2+t^2}\right| \leqslant \frac{M}{t^2}\right) \wedge \left(\int_1^{+\infty} \frac{M}{t^2}dt \text{ converge}\right).$$

L'intégrale $f_2(x)$ converge donc pour tout $x\in\mathbb{R}$; on dispose de l'application $f_2 : x \longmapsto f_2(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est continue.

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des applications $x \longmapsto \int_1^n \frac{g(t)}{x^2+t^2}dt$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui, d'après la définition d'une intégrale impropre, converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f_2. On constate :

$$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_2(x)-u_n(x)| \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{M}{t^2} = \frac{M}{n}\right) \wedge \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n} = 0\right)$$

ce qui montre que la convergence est uniforme. Or, d'après la continuité de $(t,x) \longmapsto g(t)/(x^2+t^2)$ sur $[1,n]\times\mathbb{R}$, chaque u_n est continue. Il en résulte que f_2 est continue sur $\mathbb{R}$. □

b) Pour $x\neq 0$, $f_1(x)$ existe au titre d'intégrale, sur un intervalle compact, d'une application continue. $D_1 = \{x\in\mathbb{R} \mid g_1(x) \text{ converge}\}$ est donc $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ selon que $f_1(0) = \int_0^1 \frac{g(t)}{t^2}\,dt$ converge ou non ; compte tenu de a), il en est de même pour D.

• Dans les deux cas, on déduit de la continuité de $(t,x) \longmapsto g(t)/(x^2+t^2)$ sur $[0,1]\times\mathbb{R}^*$ que la restriction de f_1 à $\mathbb{R}^*$ est continue ; ainsi :

<u>1er cas</u> : $f_1(0)$ <u>diverge</u>. Alors $D=\mathbb{R}^*$, et $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

<u>2ème cas</u> : $f_1(0)$ <u>converge</u>. Alors $D=\mathbb{R}$. On sait déjà que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$. Pour prouver la continuité de f, il suffit de prouver que f_1 est continue au point 0, et, a fortiori, que f_1 est continue sur $\mathbb{R}$, ce que nous allons faire en montrant que f_1 est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des applications continues $x \longmapsto \int_{1/n}^1 \frac{g(t)}{x^2+t^2}dt$.

— Nous disposons de $\Phi :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $\Phi(t) = \int_t^1 \frac{g(u)}{u^2}du$, C^1, de dérivée $t \longmapsto -\frac{g(t)}{t^2}$, et donc, puisque $\int_0^1 \frac{g(u)}{u^2}du$ converge, de $F :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(t) = \int_0^t \frac{g(u)}{u^2}du = f_1(0) - \Phi(t)$, de dérivée $t \longmapsto \frac{g(t)}{t^2}$; F vérifie $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0} F(t) = 0$.

— Pour $x\in\mathbb{R}$ et $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$ fixés, on a (intégration par parties) :

$$\int_{1/(n+p)}^{1/n} \frac{t^2}{x^2+t^2} \cdot \frac{g(t)}{t^2}\,dt = I - J \text{ avec :}$$

$$I = \left[\frac{t^2}{x^2+t^2}F(t)\right]_{1/(n+p)}^{1/n} \quad ; \quad J = \int_{1/(n+p)}^{1/n} \frac{2tx^2}{(x^2+t^2)^2}\,F(t)dt.$$

Comme $\frac{t^2}{x^2+t^2}\leqslant 1$, on peut majorer $|I|$ par : $|F(\frac{1}{n})| + |F(\frac{1}{n+p})|$.
En appliquant à J la formule de la moyenne et en utilisant $|2tx|\leqslant x^2+t^2$, on constate qu'il existe $\xi\in[1/(n+p),1/n]$ tel que :

$$|J| = |F(\xi)|\int_{1/(n+p)}^{1/n} \frac{|x|}{x^2+t^2}\,dt \leqslant \pi|F(\xi)|.$$

D'où :

$$\left|\int_{1/(n+p)}^{1/n} \frac{g(t)}{x^2+t^2}\,dt\right| \leqslant |F(\tfrac{1}{n})| + |F(\tfrac{1}{n+p})| + \pi|F(\xi)|.$$

— Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ fixé. Il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t\in\,]0,\alpha] \qquad |F(t)|\leqslant \varepsilon/(2+\pi).$$

Ayant choisi un entier N, supérieur à $1/\alpha$, nous avons :

$$\forall n\geqslant N \quad \forall p\in\mathbb{N} \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad |v_n(x)-v_{n+p}(x)|\leqslant\varepsilon.$$

— La suite (v_n) est donc uniformément de Cauchy sur $\mathbb{R}$; comme elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f_1, elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f_1. □

$\boxed{2.2.5}$ On rappelle $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$, $x\in\mathbb{R}_+^*$. Vérifier :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}\,dt = \Gamma(x+1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{x+1}} = \Gamma(x+1)\zeta(x+1) \tag{1}$$

---

a) L'application $f : t \longmapsto \frac{t^x}{e^t-1}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ (x fixé) est continue.

Au voisinage de 0, $f(t)\sim t^{x-1}$; l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ converge donc si, et seulement si $x-1>-1$, i.e. $x>0$.

Au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o(t^{-2})$; $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Au total, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, si, et seulement si $x\in\mathbb{R}_+^*$.

• Dans ce qui suit, le réel $x\in\mathbb{R}_+^*$ est fixé.

b) Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $t>0$, on a :

$$f(t) = \frac{t^x e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{k=1}^{n} t^x e^{-kt} + f(t)e^{-nt} \tag{2}$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\,dt$ converge, et vaut :

$$\frac{1}{k^{x+1}}\int_0^{+\infty} u^x e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(x+1)}{k^{x+1}}\,.$$

D'où, toutes les intégrales en jeu étant convergentes :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \Gamma(x+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{x+1}} + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt.$$

Nous allons montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt = 0$; il en résultera la convergence (d'ailleurs fournie par l'étude de la série de Riemann) de $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^{x+1}}$ et l'égalité (1).

— Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ fixé. Comme $\int_0^1 f(t)dt$ converge, nous pouvons lui associer $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$0\leq\int_0^{\eta} f(t)dt\leq\varepsilon/2,$$

ce qui entraîne :

$$0\leq\int_0^{\eta} f(t)e^{-nt}dt\leq\varepsilon/2 \tag{3}$$

D'autre part la restriction de f à $[\eta,+\infty[$ est continue et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$; il existe donc $M=\sup\limits_{t\in[\eta,+\infty[} f(t)$, et :

$$0\leq\int_{\eta}^{+\infty} f(t)e^{-nt}dt\leq M\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt=\frac{M}{n}. \tag{4}$$

On peut associer à ε un $N\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{M}{n}\leq\frac{\varepsilon}{2}$ pour $n\geq N$.

Au total, par (3) et (4) :

$$\forall n\geq N \quad 0\leq\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}dt\leq\varepsilon$$ □

Remarque. Si $x\geq 1$, l'application f peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}_+$ et la fin de la solution est simplifiée. La même simplification s'applique dans l'exercice suivant.

> **2.2.6** Vérifier :
> $$\forall x\in\mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2+x^2}$$

La solution est laissée au lecteur. Il utilisera, pour $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty}\sin xt\ e^{-kt}dt=\mathrm{Im}\int_0^{+\infty} e^{(-k+ix)t}dt=\frac{x}{k^2+x^2}.$$

> **2.2.7** 1°) Comparer les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
> $$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n} \ ; \ g(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}dt$$
> 2°) Trouver un équivalent à $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

$f(x)$ est défini pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus(-\mathbb{N})$ ainsi qu'on le constate en utilisant le théorème des séries alternées ; $g(x)$ n'est défini que pour $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Première solution. En utilisant :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1}\, t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}, \quad t \neq -1,$$

on obtient, pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^{x-1+k} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{x-1+n}}{1+t} dt.$$

D'où :

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| = \int_0^1 \frac{t^{x-1+n}}{1+t} dt < \frac{1}{x+n} .$$

En fixant x et en faisant tendre n vers $+\infty$, on a : $g(x) - f(x) = 0$.
Les fonctions f et g coïncident donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Seconde solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on vérifie :

$$f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x} \;;\; g(x+1) + g(x) = \frac{1}{x} \;;$$

$0 < f(x) < 1/x$ (théorème des séries alternées) ;

et : $0 < g(x) < 1/x$ (majoration de l'intégrale).

La fonction $f-g$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, 2-périodique, et telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0.$$

Elle est donc nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) On a : $f(x) - f(x+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)(x+n+1)}$

Pour $x > 0$, on en déduit par le théorème des séries alternées :

$$0 \leq f(x) - f(x+1) \leq 1/x^2$$

Compte tenu de $f(x+1) + f(x) = 1/x$, il vient $f(x) \sim \frac{1}{2x}$ au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{2.2.8}$ 1°) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t,x) = \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} \text{ si } t \neq 0 \;;\; f(0,x) = x$$

est de classe C^∞.

2°) Montrer que $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3°) Montrer que la restriction de φ à $\mathbb{R}^*$ est de classe C^2. Former une équation différentielle linéaire dont une solution est la restriction de φ à $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) ; on admettra $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

4°) Exprimer $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ sans symbole d'intégration.

1°) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(u) = \frac{\sin u}{u}$ si $u \neq 0$, et $g(0) = 1$. Cette application est C^∞ au titre de somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ $f(t,x) = g(tx) \cdot h(t,x)$; $h(t,x) = x/(1+t^2)$.

On constate que $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞. Comme $(t,x) \longmapsto tx$ est C^∞, $(t,x) \longmapsto g(tx)$ est C^∞ au titre de composée d'applications C^∞ ; enfin f est C^∞ au titre de produit d'applications C^∞. □

On calcule, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{\cos(xt)}{1+t^2} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = \frac{-t\sin(xt)}{1+t^2} .$$

2°) Compte tenu du 1°), on constate, en utilisant l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de :

$$u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \int_0^n f(t,x)dt,$$

que l'application u_n est C^∞ et que :

$$u_n'(x) = \int_0^n \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt \ ; \ u_n''(x) = \int_0^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)dt.$$

— D'autre part, $t \longmapsto f(t,x)$ et $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sont intégrables sur $[0,1]$; en outre : $\forall (t,x) \in [1,+\infty[\times \mathbb{R}$ $\left(|f(t,x)| \leq \frac{1}{1+t^2}\right) \wedge \left(|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq \frac{1}{1+t^2}\right)$.

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge, on en déduit la convergence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt, \text{ et } \Phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

On dispose donc des applications $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

— On constate ensuite, que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|\varphi(x) - u_n(x)| \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \ ; \ |\Phi(x) - u_n'(x)| \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$$

et on déduit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_n')_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}$, vers φ et Φ respectivement. En utilisant les théorèmes de continuité et de dérivabilité d'une suite d'applications continues, on en déduit que φ et Φ sont continues et que $\Phi = \varphi'$. □

3°) a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé. En intégrant par parties, on constate que :

$$\psi_x(X) = \int_0^X \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)dt = \int_0^X \frac{-t\sin(xt)}{1+t^2}dt, \quad X > 0,$$

s'écrit : $\frac{1}{x}\cos(xX) \cdot \frac{X}{1+X^2} + \frac{1}{x}\int_0^X \frac{-1+t^2}{(1+t^2)^2}\cos(xt)dt.$

On vérifie aisément la convergence (absolue) de $K = \int_0^{+\infty} \frac{-1+t^2}{(1+t^2)^2}\cos(xt)dt$, et on déduit de l'existence de $\lim_{X\to+\infty} \psi_x(X)$, i.e. la convergence de :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)dt.$$

— D'après la définition d'une intégrale impropre, ψ est limite simple sur $\mathbb{R}^*$ de la suite (u''_n) d'applications continues.

— Montrons que la convergence est uniforme sur $E_\alpha = \mathbb{R}\setminus]-\alpha,\alpha[$, $\alpha>0$ donné.

Pour $x\in E_\alpha$ et $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, nous avons :

$$u''_{n+p}(x) - u''_n(x) = \int_n^{n+p} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)dt,$$

et, en intégrant par parties comme ci-dessus, et en majorant convenablement :

$$|u''_{n+p}(x)-u''_n(x)| \leqslant \frac{2}{|x|}\,\frac{n}{1+n^2} + \frac{1}{|x|}\int_n^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \leqslant \theta(n)$$

où $\theta(n) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2n}{1+n^2} + \int_n^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt\right)$ vérifie : $\lim_{n\to+\infty}\theta(n) = 0$.

La suite (u''_n) est uniformément de Cauchy, et $\mathbb{R}$ est complet. □

— De cette convergence uniforme résulte d'un part la continuité de la restriction de ψ à E_α, d'autre part, compte tenu de la convergence de (u'_n) vers φ' sur $\mathbb{R}$, le fait que la restriction de ψ à E_α est la dérivée de la restriction de φ' à E_α.

— Comme on dispose de α, on en déduit que $\psi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et que, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$: $\psi(t) = \varphi''(t)$. □

Remarque. Une règle d'Abel permet de traiter plus rapidement cette question.

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, nous avons maintenant :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}dt \;;\; \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\sin(xt)}{(1+t^2)}dt$$

et donc : $\varphi''(x) - \varphi(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}dt = -\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{xt}d(xt)$.

et encore : $\varphi''(x) - \varphi(x) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(-x)$.

— La restriction de φ à $\mathbb{R}_+^*$ est une solution de $y''-y = -\pi/2$; il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad \varphi(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \pi/2 \;;\; \varphi'(x) = \lambda e^x - \mu e^{-x}.$$

Nous avons : $\lim_{x\to 0,\,x>0}\varphi(x) = \varphi(0)$, et donc $\lambda+\mu+\pi/2 = 0$.

D'autre part φ' est bornée sur $\mathbb{R}$; en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi'(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Ceci exige $\lambda = 0$. Finalement, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-x}) \;;\; \varphi'(x) = \frac{\pi}{2}\, e^{-x} \;;\; \varphi''(x) = -\frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

— Compte tenu de parités évidentes, pour tout $x < 0$:

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2}\,(e^{x}-1) \;;\; \varphi'(x) = \frac{\pi}{2}\, e^{x} \;;\; \varphi'' = \frac{\pi}{2}\, e^{x}.$$

— En outre : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \pi/2$.

2.2.9 1°) Montrer que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^4)}\,dt$ détermine une application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3.

2°) Montrer que la restriction de φ à $\mathbb{R}_+^*$ est de classe C^4 et qu'elle est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 4, à coefficients constants.

3°) Vérifier : $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - e^{-x/\sqrt{2}} \cos x/\sqrt{2}\right)$ pour tout $x > 0$.

1°) On montre, comme dans l'exercice précédent, que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t,x) = \dfrac{\sin(xt)}{t(1+t^4)}$ si $t \neq 0$ et $f(0,x) = x$ est C^∞, et on calcule :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{\cos(xt)}{1+t^4} \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-\,t\sin(xt)}{1+t^4}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t,x) = \frac{-t^2\cos(xt)}{1+t^4} \;;\; \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(t,x) = \frac{t^3\sin(xt)}{1+t^4}\,.$$

On montre, toujours comme dans l'exercice précédent, que φ est C^3 sur $\mathbb{R}$, que sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est C^4, et qu'elle vérifie :

$$y^{(4)} + y = \pi/2. \tag{E}$$

3°) Une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est : $x \longmapsto \pi/2$. En considérant l'équation homogène associée à (E), dont l'équation caractéristique $r^4 + 1 = 0$ a pour racines $(\varepsilon + i\varepsilon')/\sqrt{2}$, on constate que la restriction de φ à $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme :

$$x \longmapsto \frac{\pi}{2} + e^{-x/\sqrt{2}}(A\cos x/\sqrt{2} + B\sin x/\sqrt{2}) + e^{x/\sqrt{2}}(C\cos x/\sqrt{2} + D\sin x/\sqrt{2})$$

De : $\quad |\varphi(x)| \leq \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{|x|\,t}{t(1+t^4)}\,dt\right| + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)}\,dt$

on déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} = 0$, et donc que $C = D = 0$.

En utilisant la continuité de φ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(0)=0$, on trouve ensuite $A=-\pi/2$, puis, en utilisant :

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} \varphi'(x)=\varphi'(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,dt=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

on obtient enfin : $-\frac{A}{\sqrt{2}}+\frac{B}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ et donc $B=0$. □

— Comme φ est impaire et comme $\varphi(0)=0$, on dispose d'une expression de $\varphi(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{2.2.10}$ On se propose de justifier la formule :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \qquad (1)$$

1°) a) Trouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$y''+y=1/x \qquad (E)$$

b) Montrer que, parmi elles, la seule qui admette une limite finie en $+\infty$ est :

$$x\longmapsto\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt\,.$$

2°) Montrer que $x\longmapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et que sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est solution de (E).

3°) Conclure.

1°) a) Les solutions de l'équation homogène associée à l'équation linéaire (E) étant les $x\longmapsto\lambda\cos x+\mu\sin x$, la méthode de variation des constantes nous incite à chercher deux applications u et v de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, telles que $x\longmapsto u(x)\cos x+v(x)\sin x$ soit solution de (E) et vérifie $u'(x)\cos x+v'(x)\sin x=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

On obtient ainsi la solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi : x\longmapsto -\cos x\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,dt+\sin x\int_1^x\frac{\cos t}{t}\,dt.$$

Comme on connaît la convergente de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{it}}{t}\,dt$, et donc celles des intégrales $C=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$ et $S=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$, une autre solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est $f : x\longmapsto\varphi(x)+S\cos x-C\sin x$. On a :

$$f(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \qquad (2)$$

et : $$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt, \text{ et : } f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt.$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $f_{\lambda,\mu} : x \longmapsto f(x) + \lambda \cos x + \mu \sin x$.

b) Etudions $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. En intégrant par parties, et en tenant compte de l'existence de $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-\cos t}{t+x} = 0$, on obtient, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$$

et : $$|f(x)| \leqslant \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,dt = \frac{2}{x}.$$

On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} (\lambda \cos x + \mu \sin x)$ n'existe que si $(\lambda,\mu) = (0,0)$. □

2°) L'application $h : (t,x) \longmapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}$ est C^∞, et vérifie :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^2 \quad 0 \leqslant \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \qquad (3)$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge, on en déduit que $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; on dispose de l'application $g : x \longmapsto g(x)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

— On a : $h'_x(t,x) = \frac{-t\,e^{-tx}}{1+t^2}$; $h''_{x^2}(t,x) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}$.

— Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On a, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [a,+\infty[$:

$$|h'_x(t,x)| \leqslant e^{-at}, \text{ et } |h''_{x^2}(t,x)| \leqslant e^{-at}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge, on dispose des applications g_1 et g_2 de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g_1(x) = \int_0^{+\infty} h'_x(t,x)dt \; ; \; g_2(x) = \int_0^{+\infty} h''_{x^2}(t,x)dt,$$

et (définition d'une intégrale impropre) g, g_1, g_2 sont limites simples sur $[a,+\infty[$ des suites d'applications $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec :

$$u_n(x) = \int_0^n h(t,x)dt \; ; \; v_n(x) = \int_0^n h'_x(t,x)dt \; ; \; w_n(x) = \int_0^n h''_{x^2}(t,x)dt$$

D'après l'étude de l'intégrale dépendant d'un paramètre, u_n, v_n et w_n sont continues et : $v_n = u'_n$; $w_n = u''_n$.

En utilisant : $|g_i(x) - u_n^{(i)}(x)| \leqslant \int_n^{+\infty} e^{-at}dt$, $i \in \{0,1,2\}$, on en déduit que les convergences de (u_n), (u'_n), (u''_n) vers g, g_1, g_2, sur $[a,+\infty[$ sont uniformes. Il en résulte que la restriction de g à $[a,+\infty[$ admet g_1 et g_2 pour dérivées d'ordre 1 et 2.

— En jouant sur le fait que l'on dispose de $a \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la restriction de g à $\mathbb{R}_+^*$ est deux fois dérivable, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\,e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \quad ; \quad g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$$

ce qui entraîne :

$$g(x) + g''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}\,. \qquad \square$$

3°) a) Etudions g(x) au voisinage de $+\infty$. En intégrant par parties, et en tenant compte de l'existence de $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-e^{-tx}}{x(1+t^2)}$, on obtient, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t\,e^{-tx}}{(1+t^2)^2}\,dt,$$

et : $$|g(x)| \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{2}{x}.$$

On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

La restriction de g à $\mathbb{R}_+^*$ est ainsi une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie en $+\infty$. D'après 1°) b) elle coïncide avec f, et (1) est justifié pour $x > 0$.

b) La convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ entraîne celle de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$. il reste à montrer que cette dernière intégrale à pour valeur $\pi/2$ (résultat classique, qui n'est naturellement pas considéré ici comme acquis a priori).

En reprenant (3), on constate que g est limite uniforme de la suite (u_n) non seulement sur tout $[a,+\infty[$, mais sur $\mathbb{R}$; d'où la continuité de g, et :

$$\frac{\pi}{2} = g(0) = \lim_{x\to0,\,x>0} g(x) = \lim_{x\to0,\,x>0} f(x).$$

Revenons à l'expression (2) de f(x), (cf. 1°) a)). Nous avons :

$$\lim_{x\to0,\,x>0}\left(\sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt\right)$$

et, pour tout $x \in\,]0,1[$:

$$0 \leqslant \sin x \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,dt \leqslant x \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = x\,|\mathrm{Log}\,x|\,.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to0,\,x>0}\left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt\right) = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to0,\,x>0}\left(\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right) = \frac{\pi}{2}\,.$ $\square$

2.2.11 Ensemble de définition et continuité de la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \cos(t^x)\,dt.$$

1°) a) Pour $x<0$ fixé (resp. $x=0$), on a :

$$\lim_{t\to+\infty}\cos(t^x)=1\ \left(\text{resp. } \lim_{t\to+\infty}\cos(t^x)=\cos 1\right).$$

L'intégrale impropre $f(x)$ est donc divergente pour $x\leqslant 0$.

On peut ainsi considérer f comme une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

b) L'application $(t,x)\longmapsto\cos(t^x)$ de $[0,1]\times\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ étant continue, on dispose de l'application continue $g : x\longmapsto\int_0^1\cos(t^x)dt$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Reste donc à étudier la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$:

$$h : x\longmapsto\int_1^{+\infty}\cos(t^x)dt.$$

Notons que l'intégrale impropre $h(1)=\int_1^{+\infty}\cos t\,dt$ est divergente.

c) Soit $x>0$ fixé. Pour tout $T>1$ nous avons :

$$\int_1^T\cos(t^x)dt=\frac{1}{x}\int_1^{T^x}u^{-1+1/x}.\cos u\,du$$

La nature de l'intégrale $h(x)$ est la même que celle de l'intégrale :

$$\varphi(x)=\int_1^{+\infty}u^{-1+1/x}.\cos u\,du$$

d) Soit $x\in\,]0,1[$ fixé. A tout $n\in\mathbb{N}^*$ associons :

$$a_n=\int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2}u^{-1+1/x}.\cos u\,du$$

Nous avons :

$$|a_n|=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(n\pi+v)^{-1+1/x}\cos v\,dv\geqslant 2(n\pi-\pi/2)^{-1+1/x}$$

On en déduit que l'intégrale impropre $\varphi(x)$ est divergente pour $x\in\,]0,1[$; on a vu qu'elle est également divergente pour $x=1$.

Reste donc à étudier la fonction φ de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

e) Soit $x>1$ fixé. Pour tout $U>1$, une intégration par parties permet d'écrire $\int_1^U u^{-1+1/x}.\cos u\,du$ sous la forme :

$$\left[u^{-1+1/x}.\sin u\right]_1^U+(1-1/x)\int_1^U u^{-2+1/x}.\sin u\,du$$

On en déduit que, pour $x>1$, l'intégrale impropre $\varphi(x)$ converge et que :

$$\varphi(x)=-\sin 1+(1-1/x)\psi(x)\ ;\ \psi(x)=\int_1^{+\infty}u^{-2+1/x}.\sin u\,du$$

(l'intégrale impropre $\psi(x)$ est en effet absolument convergente).

• A ce stade, nous pouvons affirmer que l'ensemble de définition de la fonction f est $]1,+\infty[$, et que, pour tout $x\in\,]1,+\infty[$

$$f(x)=g(x)-\frac{\sin 1}{x}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\psi(x).$$

2°) Nous allons montrer que l'application $\psi :]1,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Il en résultera que l'application $f :]1,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

— Soit un réel $A>1$ fixé ; ψ est limite simple sur $[A,+\infty[$ de la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des applications, visiblement continues, $x \mapsto \int_1^n u^{-2+1/x}.\sin u\, du$.

Pour tous $x \geqslant A$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$|\psi(x)-\psi_n(x)| = \left|\int_n^{+\infty} u^{-2+1/x}.\sin u\, du\right| \leqslant \int_n^{+\infty} u^{-2+1/A} du$$

ce qui montre que ψ est limite uniforme de (ψ_n) sur $[A,+\infty[$.

— Il en résulte que, pour tout $A>1$, la restriction de ψ à $[A,+\infty[$ est continue, et donc que $\psi :]1,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue. □

2.2.12 Exprimer $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{Arc tg}\,(x \sin t)}{\sin t} dt$, $x \in \mathbb{R}$, sans utiliser l'un des symboles $\int$ ou $\sum$.

Soit g l'application de $A = [0,\pi/2] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(t,x) = \frac{\text{Arc tg}\,(x \sin t)}{\sin t} \text{ si } t \neq 0 \ ; \ g(0,x) = x.$$

- Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(u) = \frac{\text{Arc tg}\, u}{u} \text{ pour } u \neq 0 \ ; \ h(0) = 1.$$

On constate :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad h(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2t^2} dt.$$

Comme $(t,x) \mapsto \frac{1}{1+u^2t^2}$ est une application C^∞ de $[0,1] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, h est une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On va utiliser la composition des applications de classe C^∞.

On constate :

$$\forall (t,x) \in A \quad g(t,x) = xh(x \sin t)$$

On en déduit que g est C^∞.

Pour tout $(t,x) \in A$ on calcule :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{1+x^2\sin^2 t} \ .$$

• D'après le cours, l'application $f : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} g(t,x)dt$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est C^1 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)dt$.

On calcule aisément :

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ et, comme } f(0) = 0 :$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{Arg\,sh} x. \tag{1}$$

Remarque. Pour $x \in]-1,1[$ donné, la série $\sum u_n$ d'applications continues de $[0,\pi/2]$ dans $\mathbb{R}$ définies par $u_n : t \mapsto (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \sin^{2n} t$ vérifie :

$$\forall t \in [0,\pi/2] \quad |u_n(t)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

$\sum u_n$ est ainsi normalement et donc uniformément convergente sur $[0,\pi/2]$; sa somme ψ_x, qui est continue, est définie par :

$$\psi_x(t) = \frac{\operatorname{Arc\,tg}(x \sin t)}{\sin t} \text{ si } t \neq 0 \ ; \ \psi_x(0) = x.$$

En utilisant le théorème d'intégration d'une série d'applications, on a donc :

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \, dt.$$

En utilisant le calcul des intégrales de Wallis, et le développement en série entière de $x \longmapsto \operatorname{Arg\,sh} x$, de rayon de convergence 1, on en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{Arg\,sh} x,$$

mais ce résultat est moins bon que (1).

$\boxed{2.2.13}$ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application intégrable. Montrer : $$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 e^{nx(1-t)} f(t)dt = 0.$$

a) Ici $x \in \mathbb{R}_+$ est fixé. A tout $n \in \mathbb{N}$ on associe l'application :

$$u_{x,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \longmapsto \frac{\left(-e^{x(1-t)}\right)^n}{n!}.$$

D'après le développement en série entière de la fonction exponentielle, pour $t \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum u_{x,n}(t)$ converge et a pour somme $\exp\left(-e^{x(1-t)}\right)$. La série $\sum u_{x,n}$ converge donc simplement, sur $[0,1]$ en particulier, vers l'application :

$$\varphi_x : [0,1] \to \mathbb{R} \quad t \longmapsto \exp\left(-e^{x(1-t)}\right).$$

Cette convergence sur $[0,1]$ est uniforme. En effet $|e^{x(1-t)}| \leqslant e^{|x|}$ pour tout $t \in [0,1]$; on a donc :

$$\sup_{t\in[0,1]} |u_{x,n}(t)| \leqslant \frac{e^{n|x|}}{n!} .$$

Or la série numérique $e^{n|x|}/n!$ converge.

— Comme f est bornée sur $[0,1]$, la série $\sum u_{x,n}.f$ converge uniformément sur $[0,1]$ et a pour somme $\varphi_x.f$. D'où, d'après un théorème du cours :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_{x,n}(t)f(t)dt = \int_0^1 \varphi_x(t)f(t)dt.$$

La valeur commune des deux intégrales est notée $I(x)$.

b) Il s'agit de montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 0$.

En remarquant que les applications φ_x sont positives et que f est bornée, il suffit de montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = 0$, où $J(x) = \int_0^1 \varphi_x(t)dt$.

— Pour $x\in\mathbb{R}_+$ donné, φ_x est croissante et $\varphi_x(1) = 1/e$.

Soit $\varepsilon\in\,]0,1/e[$. Notons $J_1(x)$ et $J_2(x)$ les intégrales de φ_x sur $[0,\alpha]$ et $[\alpha,1]$, $\alpha = 1-e\varepsilon$. Nous avons :

$$0 \leqslant J_2(x) \leqslant \int_\alpha^1 \varphi_x(1)dt = \varepsilon.$$

En majorant $\varphi_x(t)$ par $\varphi_x(\alpha)$ pour $t\in[0,\alpha]$:

$$0 \leqslant J_1(x) \leqslant \int_0^\alpha \varphi_x(\alpha)dt \leqslant \varphi_x(\alpha).$$

On constate : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_x(\alpha) = 0$; il existe donc $a\in\mathbb{R}_+$ tel que $\varphi_x(\alpha) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant a$, et donc $0 \leqslant J(x) \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $x \geqslant a$. □

2.2.14 1°) En utilisant l'étude des suites d'applications, calculer :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{Arc\,tg}(xt)}{1+t^4}\,dt, \quad x\in\mathbb{R}.$$

2°) A titre de vérification, calculer directement $f(1)$.

• Pour $x\in\mathbb{R}$ donné, l'application $t \mapsto \frac{t\,\mathrm{Arc\,tg}(xt)}{1+t^4}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue, et donc localement intégrable ; la convergence de l'intégrale impropre $f(x)$ tient à :

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad \left|\frac{t\,\mathrm{Arc\,tg}(xt)}{1+t^4}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{|t|}{1+t^4}$$

et à la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}dt$.

• L'application impaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des applications $f_n : x \mapsto \int_{-n}^{n} \frac{t\,\mathrm{Arc\,tg}(xt)}{1+t^4}dt$.

Comme $\varphi : (t,x) \longmapsto \frac{t \operatorname{Arc\,tg}(xt)}{1+t^4}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, toute f_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'_n(x) = \int_{-n}^{n} \frac{t^2}{(1+x^2t^2)(1+t^4)}dt.$$

La suite d'applications continues $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers l'application $g : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+x^2t^2)(1+t^4)}dt$, ainsi qu'on s'en assure en vérifiant la convergence de l'intégrale impropre $g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, et en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant g(x) - f'_n(x) \leqslant 2\int_{n}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\, dt.$$

On en déduit (cf. Cours) que f est C^1 et que $f' = g$.

• <u>Calcul de</u> $g(x) = \frac{1}{1+x^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x^2+t^2}{1+t^4} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)dt.$

— Par une décomposition en éléments simples, ou par la méthode des résidus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\, dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

— Par le changement de variable $t = 1/u$:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{u^4+1}\, du = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

— On a donc $g(0) = \pi/\sqrt{2}$. Pour $x \neq 0$, on calcule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\, dt = \frac{\pi}{|x|}.$$

D'où, pour $x\in\mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}(1+x^4)}\,(x^2+1-\sqrt{2}|x|) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{1+\sqrt{2}|x|+x^2}$$

• Compte tenu de $f(0) = 0$, une intégration fournit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = \pi \operatorname{Arc\,tg}(x\sqrt{2}+1) - \pi^2/4 \tag{1}$$

D'où : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_- \qquad f(x) = -f(-x) = \pi \operatorname{Arc\,tg}(x\sqrt{2}-1) + \pi^2/4.$

2°) Ecrivons : $f(1) = 2(I+J)$, avec :

$$I = \int_0^1 \frac{t \operatorname{Arc\,tg} t}{1+t^4}\, dt \;;\; J = \int_1^{+\infty} \frac{t \operatorname{Arc\,tg} t}{1+t^4}\, dt.$$

Par le changement de variable $t = 1/u$:

$$J = \int_0^1 \frac{u(\pi/2 - \operatorname{Arc\,tg} u)}{u^4+1}\, du = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{u}{u^4+1}\, du - I$$

D'où : $\quad f(1) = \pi\int_0^1 \frac{u}{u^4+1}\, du = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{v^2+1}\, dv = \frac{\pi^2}{8}.$

La formule (1) donne :

$$f(1) = \pi\left(\text{Arg tg } (\sqrt{2}+1) - \pi/4\right)$$

Comme Arc tg $(\sqrt{2}+1) = 3\pi/8$, on a encore : $f(1) = \pi^2/8$.

$\boxed{2.2.15}$ 1°) Montrer que l'on dispose de l'application :

$$F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, e^{itx}\, dt.$$

2°) Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles (on admettra $F(0) = \sqrt{\pi}$).

3°) F est-elle développable en série entière à l'origine ?

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale impropre $F(x)$ résulte de ce que $\psi : t \longmapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}$ est continue et donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, de $\psi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0, et $|\psi(t)| \leqslant e^{-t}$ pour $t \geqslant 1$.

• Par le changement de variable $\sqrt{t} = u$:

$$F(0) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

(la dernière égalité, qui peut s'obtenir par une considération d'intégrale double, est justifiée au 1.2.18).

2°) F est limite simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$F_n(x) = \int_{1/n}^{n} f(t,x)dt \ ; \ f(t,x) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}.$$

L'application $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ étant C^1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est C^1 et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n'(x) = i\int_{1/n}^{n} e^{-t}\sqrt{t}\, e^{itx} dt.$$

On constate que l'on dispose de l'application :

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \longmapsto i\int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\, e^{itx} dt$$

et que G est limite simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(F_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$.

De : $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |G(x) - F_n'(x)| \leqslant K_n$,

où ; $\quad K_n = \int_0^{1/n} e^{-t}\sqrt{t}\, dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\, dt,$

et de $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$ (conséquence de la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\,dt$), on déduit que (F_n') converge uniformément vers G sur $\mathbb{R}$; d'après le cours, il en résulte que F est C^1, de dérivée G.

On a donc : $\quad F'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\, e^{itx} dt$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

En intégrant par parties sur $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$, et en faisant tendre $\varepsilon\in\,]0,1[$ vers 0, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad F'(x) = \frac{i}{2(1-ix)} F(x).$$

L'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{i}{2(1-ix)} = \dfrac{-x+i}{2(1+x^2)}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ étant C^∞, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire et homogène :

$$y' = \varphi(x) y \tag{E}$$

sont C^∞ et constituent un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$; F est celle d'entre elles qui prend la valeur $\sqrt{\pi}$ au point $x=0$.

Une primitive de φ est $\Phi : x \mapsto -\frac{1}{4}\mathrm{Log}\,(1+x^2) + \frac{i}{2}\mathrm{Arc\,tg}\, x$; on en déduit que les solutions de (E) sont les $x \mapsto \lambda \exp\big(\Phi(x)\big)$ et que :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}}\left[\cos\frac{\mathrm{Arc\,tg}\,x}{2} + i \sin\frac{\mathrm{Arc\,tg}\,x}{2}\right]. \tag{1}$$

3°) Fixons $x\in\mathbb{R}$. D'après le développement en série entière de l'exponentielle, de rayon de convergence infini, la série d'applications $\sum \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{(it\,x)^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ et sa somme est $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}$.

$A \geqslant 1$ étant fixé, cette convergence est uniforme sur $[1/A, A]$. En effet :

$$\sup_{t\in[1/A,A]} \left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\frac{(it\,x)^n}{n!}\right| \leqslant a_n, \quad a_n = \sqrt{A}\,\frac{(A|x|)^n}{n!}$$

et la série numérique $\sum a_n$ converge. D'où, d'après le cours :

$$\int_{1/A}^{A} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}\int_{1/A}^{A} e^{-t}\, t^{n-1/2} dt \tag{2}$$

- Le premier membre de (2) tend vers $F(x)$ lorsque A tend vers $+\infty$.
- Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, la série $\sum u_n$, où $u_n(A) = \frac{(ix)^n}{n!}\int_{1/A}^{A} e^{-t}\, t^{n-1/2} dt$, converge sur $[1,+\infty[$, et sa somme est $A \mapsto \int_{1/A}^{A} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt$.

On constate : $\displaystyle\sup_{t\in[A,+\infty[} |u_n(A)| \leqslant b_n$.

où : $\quad b_n = \dfrac{|x|^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{n-1/2} dt = \dfrac{|x|^n}{n!}\,\Gamma\!\left(n+\frac{1}{2}\right).$

On a : $\quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{|x|}{n+1}\,\dfrac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1/2)} = |x|\,\dfrac{n+1/2}{n+1}$.

Si x a été fixé tel que $x\in\,]-1,1[$, la série $\sum b_n$ converge ; la série $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[1,+\infty[$.

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, il existe : $\lim\limits_{A\to+\infty} u_n(A) = \frac{(ix)^n}{n!}\,\Gamma(n+1/2)$.

On peut appliquer le théorème d'interversion des limites. D'où :

$$\forall x\in\,]-1,1[\qquad F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{i^n}{n!}\,\Gamma(n+1/2)\right)x^n$$

ce qui montre que F admet un développement en série entière à l'origine, de rayon de convergence $R\geqslant 1$.

— Montrons que, pour $x=1$, la "série des modules" $\sum\frac{\Gamma(n+1/2)}{n!}$ est divergente, ce qui entraîne $R=1$. Notons $\alpha_n=\Gamma(n+1/2)/n!$. En utilisant $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, on constate :

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{n+1/2}{n+1}=1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit qu'il existe $k\in\mathbf{R}_+^*$ tel que $\alpha_n\sim k/\sqrt{n}$ au voisinage de $+\infty$. □

Remarque. Si l'on sait que Γ est croissante sur $[1,+\infty[$, on a, pour $n\geqslant 1$:

$\frac{\Gamma(n+1/2)}{n!}\geqslant\frac{\Gamma(n)}{n!}=\frac{1}{n}$. Or $\sum\frac{1}{n}$ diverge. □

★Autre solution. D'après (1), F est le produit de deux applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. L'une $x\longmapsto\sqrt{\pi}(1+x^2)^{-1/4}$, admet un développement en série entière de rayon de convergence 1. L'autre s'écrit $\exp\circ\Psi$, où $\Psi(x)=\frac{i}{2}\operatorname{Arc\,tg} x$.

D'une part, exp admet un développement en série entière de rayon de convergence infini ; d'autre part, Ψ admet un développement en série entière de rayon de convergence 1, et vérifie $\Psi(0)=0$. Dans ces conditions, on montre que $\exp\circ\Psi$ admet un développement en série entière de rayon de convergence $R\geqslant 1$ (cf. par exemple le IV-3.1.2 de notre cours).

• *Les trois exercices qui suivent sont relatifs à l'étude au voisinage de* $+\infty$ *d'intégrales de la forme* $I(x)=\int_a^b \big(f(t)\big)^x dt$.

La méthode utilisée (dite méthode de Laplace) est générale, mais il nous a semblé préférable d'en faire comprendre le principe par l'étude détaillée de deux exemples, suivie de trois autres exemples laissés au lecteur.

On considère comme acquis les résultats suivants :

• La fonction gamma est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt.$$

★ $\forall x\in\mathbf{R}_+^*\quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

* $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$
* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}\, e^{-t}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$

(la dernière égalité peut s'établir en utilisant une intégrale double ; elle fait par ailleurs l'objet de l'exercice 1.2.18).

$\boxed{2.2.16}$ 1°) Soit f l'application $t \mapsto t\,e^{-t}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Prouver la convergence de $I(x) = \int_0^{+\infty} \left(f(t)\right)^x dt,\ x \in \mathbb{R}_+^*$

2°) a) Montrer qu'à tout $\delta \in]0,1[$ on peut associer un $A \in]0,1[$ tel que l'on ait, au voisinage de $+\infty$:

$$I(x) = \int_{1-\delta}^{1+\delta} \left(f(t)\right)^x dt + \left(f(1)\right)^x\, O\,(A^x) \tag{1}$$

b) Soit $\varepsilon \in]0,1[$ fixé. Montrer qu'il existe $\delta \in]0,1[$ tel que, pour tout $t \in [1-\delta, 1+\delta]$, on ait :

$$-\frac{(t-1)^2}{2}(1+\varepsilon) \leq \mathrm{Log}\left(f(t)\right) - \mathrm{Log}\left(f(1)\right) \leq -\frac{(t-1)^2}{2}(1-\varepsilon) \tag{2}$$

c) Pour $k > 0$ et $\delta > 0$ fixés, montrer :

$$\int_0^{\delta} \exp(-\,kxu^2)du \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kx}} \text{ au voisinage de } +\infty. \tag{3}$$

d) Montrer $I(x) \sim e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}$ au voisinage de $+\infty$. (4)

3°) Montrer : $\Gamma(x+1) \sim x^x\, e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ au voisinage de $+\infty$. (5)

1°) L'application $f : t \mapsto t\,e^{-t}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ est C^∞ et positive.

De $f'(t) = e^{-t}(1-t)$ on déduit le tableau de variations :

t	0	1	$+\infty$
f(t)	0 ↗	e^{-1}	↘ 0

— Etant donné $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto (t\,e^{-t})^x$ est donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En outre elle vérifie :

$$(t\,e^{-t})^x = o(1/t^2) \text{ au voisinage de } +\infty,$$

ce qui assure la convergence de $I(x)$.

2°) a) On constate (ce qui est important dans les exercices de ce type) que f admet un maximum strict au point $t = 1$ et que $\delta \in]0,1[$ étant fixé, on a, en notant $M(\delta) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+ \setminus [1-\delta, 1+\delta]} |f(t)|$:

$$M(\delta) = \max\big(f(1-\delta), f(1+\delta)\big) < f(1).$$

— Prenons x_0 tel que $I(x_0)$ converge, par exemple $x_0 = 1$. Pour tout $x > 1$ nous disposons des majorations :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \setminus [1-\delta, 1+\delta] \qquad \big(f(t)\big)^x \leqslant \big(M(\delta)\big)^{x-1}.f(t)$$

et : $\displaystyle\int_0^{1-\delta} \big(f(t)\big)^x dt + \int_{1+\delta}^{+\infty} \big(f(t)\big)^x dt \leqslant \big(M(\delta)\big)^{x-1}.I(1)$, et

$$0 \leqslant I(x) - \int_{1-\delta}^{1+\delta} \big(f(t)\big)^x dt \leqslant \big(f(1)\big)^x \frac{I(1)}{M(\delta)} \left(\frac{M(\delta)}{f(1)}\right)^x.$$

En adoptant $A = \frac{M(\delta)}{f(1)}$, on obtient (1). □

• L'existence d'un maximum strict de f au point $t = 1$ permet donc de "ramener" l'étude de $I(x)$ à celle de $\displaystyle\int_{1-\delta}^{1+\delta} \big(f(t)\big)^x dt$, qui va être conduite par encadrement au voisinage de $t = 1$.

b) On dispose de l'application $g : t \mapsto \operatorname{Log} f(t)$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$; on calcule $g'(1) = 0$ et $g''(1) = -1$. D'où le développement limité :

$$\operatorname{Log} f(t) = \operatorname{Log} f(1) - \frac{(t-1)^2}{2}\big(1+\omega(t)\big) \quad ; \ \lim_{t\to 1} \omega(t) = 0.$$

On en déduit (2) en associant à $\varepsilon \in]0,1[$ un $\delta \in]0,1[$ vérifiant :

$$\forall t \in [1-\delta, 1+\delta] \qquad |\omega(t)| \leqslant \varepsilon.$$

c) Soit $x > 0$ fixé. Par le changement de variable $\sqrt{kx}\,u = \sqrt{v}$:

$$\int_0^{\delta} \exp(-kx\,u^2)du = \frac{1}{2\sqrt{kx}} \int_0^{k\delta^2 x} v^{-1/2}\, e^{-v}\, dv.$$

(3) s'en déduit en faisant tendre x vers $+\infty$, et en utilisant $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Remarque. Toute intégrale du type $\displaystyle\int_0^{\delta} \exp(-kx\,u^{\alpha})$, $\alpha > 0$, s'étudie de la même façon (en utilisant la fonction Γ).

d) Soient $\varepsilon \in]0,1[$ fixé, $\delta \in]0,1[$ associé à ε et $A \in]0,1[$ associé à δ comme il a été dit en b) et a). Pour tout $x > 1$ on a ainsi :

$$J(x) \leqslant I(x) \leqslant K(x)$$

où : $\displaystyle J(x) = \big(f(1)\big)^x \left[\int_{1-\delta}^{1+\delta} \exp\left(-(1+\varepsilon)x\,\frac{(t-1)^2}{2}\right) dt - \frac{I(1)}{M(\delta)} A^x\right]$

et : $\displaystyle K(x) = \big(f(1)\big)^x \left[\int_{1-\delta}^{1+\delta} \exp\left(-(1-\varepsilon)x\,\frac{(t-1)^2}{2}\right) dt + \frac{I(1)}{M(\delta)} A^x\right]$.

En utilisant (3) sous la forme :

$$\int_{1-\delta}^{1+\delta} \exp\left(- kx(t-1)^2\right)dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{kx}} ,$$

on constate : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\ J(x)}{\left(f(1)\right)^x} = \sqrt{\dfrac{2\pi}{1+\varepsilon}}$

et : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\ K(x)}{\left(f(1)\right)^x} = \sqrt{\dfrac{2\pi}{1-\varepsilon}}$.

— Soit $\alpha \in]0,1[$ fixé. On dispose de $\varepsilon \in]0,1[$ tel que :

$$\sqrt{2\pi} - \alpha < \sqrt{\frac{2\pi}{1+\varepsilon}} < \sqrt{\frac{2\pi}{1-\varepsilon}} < \sqrt{2\pi} + \alpha$$

et donc de $X \in]1,+\infty[$ tel que, pour tout $x \geqslant X$:

$$\sqrt{2\pi} - \alpha \leqslant \frac{\sqrt{x}\ J(x)}{\left(f(1)\right)^x} \leqslant \frac{\sqrt{x}\ K(x)}{\left(f(1)\right)^x} \leqslant \sqrt{2\pi} + \alpha$$

ce qui entraîne :

$$\sqrt{2\pi} - \alpha \leqslant \frac{\sqrt{x}\ I(x)}{\left(f(1)\right)^x} \leqslant \sqrt{2\pi} + \alpha$$

Compte tenu de $f(1) = e^{-1}$, (4) en résulte. □

3°) Pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$ fournit :

$\Gamma(x+1) = x^{x+1} I(x)$.

(5) se déduit ainsi de (4). En particulier pour $x = n \in \mathbb{N}^*$:

$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ au voisinage de $+\infty$ (Stirling).

$\boxed{2.2.17}$ Trouver un équivalent, au voisinage de $+\infty$, à :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2e^t)^n dt .$$

1°) L'application $f : t \longmapsto 1-t^2e^t$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est C^∞. De $f'(t) = - t(2+t)e^t$ on déduit le tableau de variations :

t	0	1
f(t)	1 ↘	1-e

On constate qu'il existe un unique $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 0$. Comme visiblement $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| = e-1$, on va désormais s'intéresser à $(-1)^n I_n = \displaystyle\int_0^1 (t^2e^t-1)^n dt$.

• Soit $\varepsilon \in]0,1[$ fixé. Comme dans l'exercice précédent on dispose de $\delta \in]0,1-a[$ tel que, pour tout $t \in [1-\delta, 1]$ on ait (grâce à un développement limité de $t \mapsto \mathrm{Log}|f(t)|$ au voisinage de $t = 1$) :

$$-(1-t)\left(\frac{3e}{e-1} + \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{Log}|f(t)| - \mathrm{Log}(e-1) \leqslant -(1-t)\left(\frac{3e}{e-1} - \varepsilon\right).$$

On dispose par ailleurs de la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0, 1-\delta] \quad |f(t)|^n \leqslant (e-1)^n A^n$$

où : $A = \dfrac{M(\delta)}{e-1}$, avec $M(\delta) = \sup\limits_{t \in [0,1-\delta]} |f(t)|$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $J_n \leqslant (-1)^n I_n \leqslant K_n$,

où : $$J_n = (e-1)^n \left[\int_{1-\delta}^{1} \exp\left(-\left(\frac{3e}{e-1} + \varepsilon\right) n(1-t)\right) dt - A^n\right]$$

et : $$K_n = (e-1)^n \left[\int_{1-\delta}^{1} \exp\left(-\left(\frac{3e}{e-1} - \varepsilon\right) n(1-t)\right) dt + A^n\right]$$

On voit intervenir $\displaystyle\int_0^{\delta} \exp(-knu)\,du = \frac{1}{kn}\int_0^{k\delta n} e^{-v} dv$, qui est équivalent à $\dfrac{1}{kn}$ au voisinage de $+\infty$.

On constate : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,J(n)}{(e-1)^n} = \left(\frac{3e}{e-1} + \varepsilon\right)^{-1}$

et : $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,K(n)}{(e-1)^n} = \left(\frac{3e}{e-1} - \varepsilon\right)^{-1}.$$

D'où, en raisonnant comme dans l'exercice précédent :

$$I_n \sim (-1)^n \frac{(e-1)^{n+1}}{3en}.$$

$\boxed{2.2.18}$ Etablir les équivalences, au voisinage de $+\infty$.

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \, dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

et : $$\int_0^{\pi/2} e^{x\cos t} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^x$$

Laissé au lecteur, qui utilisera la méthode de Laplace.

$\boxed{2.2.19}$ 1°) Etablir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^n e^{-t} t^n dt = \frac{1}{2}$.

2°) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}$

Laissé au lecteur qui traitera 1°) en écrivant :

$$\frac{1}{n!}\int_0^n e^{-t}\, t^n\, dt = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 (t\, e^{-t})^n\, dt,$$

en montrant, par la méthode de Laplace :

$$\int_0^1 (t\, e^{-t})^n\, dt \sim \frac{1}{2}\, e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \text{ au voisinage de } +\infty,$$

et en concluant en utilisant la formule de Stirling.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Les exercices concernant les formes différentielles et l'analyse vectorielle sont proposés dans un autre tome de l'ouvrage.

3.1. CONTINUITE. DIFFERENTIABILITE

3.1.1 Soit E un e.v.n., I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, et $f : I \longrightarrow E$ une application dérivable.

1°) Soit $a \in I$. Existe-t-il $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a),x\neq y} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$?
On examinera, en particulier, le cas où f' est continue en a.

2°) On suppose maintenant que f est continûment dérivable sur I, et on étudie $F : I\times I \longrightarrow E$ définie par :

$F(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ si $x\neq y$; $F(x,x) = f'(x)$.

a) Montrer que F est continue.

b) Soit $a\in I$ tel que $f''(a)$ existe. Montrer que F est différentiable en (a,a).

1°) a) Notons que s'il existe une limite ℓ, alors on a :

$$\ell = \lim_{x\to a,x\neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \text{ i.e. } \ell = f'(a).$$

Ceci dit, il n'existe pas nécessairement une limite, ainsi que le montre le contre exemple suivant :

$$E = I = \mathbf{R}, \quad f(0) = 0 \ ; \ f(t) = t^2\sin(1/t) \text{ pour } t\neq 0.$$

On constate que f est dérivable, avec en particulier, $f'(0) = 0$. En notant $x_n = 1/(\pi/2+2n\pi)$ et $y_n = 1/2n\pi$, avec $n\in\mathbf{N}^*$, on constate l'existence de :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} \neq f'(0).$$

On remarquera que, ici, f' n'est pas continue au point 0.

b) Limitons-nous maintenant au cas où f' est continue au point a.

— Soit $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$. Nous pouvons lui associer $\alpha\in\mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$\|f'(t)-f'(a)\| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } t \in I_\alpha, \text{ où } I_\alpha = I \cap]a-\alpha, a+\alpha[\qquad (1)$$

Pour tout couple (x,y) d'éléments distincts de I_α, l'inégalité des accroissements finis appliquée à $t \longrightarrow f(t) - tf'(a)$ entre x et y conduit à

$$\left\|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(a)\right\| \leqslant \varepsilon. \qquad (2)$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,a),x\neq y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(a)$.

2°) F admet des dérivées partielles du premier ordre continues, et est donc continûment différentiable sur l'ouvert $(I \times I)\setminus\Delta$ de $\mathbf{R}^2$, où :

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

a) Reste à prouver la continuité de F en un point (a,a), $a \in I$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Comme au 1°) b), associons lui $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ vérifiant (1).

Pour tout couple (x,y) d'éléments distincts de I_α, nous avons (2), qui s'écrit ici : $\|F(x,y)-F(a,a)\| \leqslant \varepsilon$. (3)

Pour tout $x \in I_\alpha$, nous avons $\|f'(x)-f'(a)\| \leqslant \varepsilon$; (3) vaut pour (x,x). □

b) Limitons-nous ici au cas où $f''(a)$ existe :

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Nous pouvons lui associer $\beta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\|f'(t)-f'(a)-(t-a)f''(a)\| \leqslant \varepsilon|t-a| \qquad (4)$$

pour tout $t \in I_\beta$, où $I_\beta = I \cap]a-\beta, a+\beta[$

On en déduit, pour tout couple $(a+h, a+k)$ d'éléments distincts de I_β :

$$\left\|\int_{a+h}^{a+k} \big(f'(t)-f'(a)-(t-a)f''(a)\big)dt\right\| \leqslant \varepsilon\left|\int_{a+h}^{a+k} |t-a|\,dt\right|$$

D'où, après division par $|k-h|$, et compte tenu de $f'(a) = F(a,a)$:

$$\|F(a+h,a+k)-F(a,a) - \tfrac{1}{2}(h+k)f''(a)\| \leqslant \varepsilon \frac{\left|\int_h^k |u|\,du\right|}{|k-h|}$$

et, en majorant $|u|$ par $\max(|h|,|k|)$ dans l'intégrale :

$$\|F(a+h,a+k)-F(a,a) - \tfrac{1}{2}(h+k)f''(a)\| \leqslant \varepsilon \max(|h|,|k|).$$

Cette dernière inégalité est également vérifiée pour tout $(a+h,a+h) \in I_\beta^2$, ainsi que l'on le constate en utilisant (4). D'où l'existence de :

$$dF(a,a) : (h,k) \longmapsto \tfrac{1}{2}(h+k)f''(a). \qquad \square$$

$\boxed{3.1.2}$ Soient E un espace de Banach, U un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ contenant 0, et $f : U \longrightarrow E$ une application C^∞. On suppose en outre qu'il existe un entier p tel que :

$$f(0) = 0_E \ ; \ d^k f(0) = 0_{\mathcal{L}_k(\mathbf{R}^2,E)} \text{ pour } k \in \{1,\dots,p-1\}. \qquad (1)$$

Vérifier qu'il existe des applications C^∞, $u_\alpha : U \longrightarrow E$, telles que :

$$\forall x \in U \quad f(x) = \sum_{|\alpha|=p} u_\alpha(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

où $x = (x_1,\dots,x_n)$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

• Dans le cas où $n = 1$, la proposition a fait l'objet du 3.2.21 de notre tome I d'exercices d'analyse.

• Pour tout $x \in U$, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $p-1$, avec reste intégral, appliquée à f sur le segment $[0,x]$ donne, compte tenu de (1) :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} d^p f(tx).x^p \, dt$$

avec : $\displaystyle d^p f(tx).x^p = \sum_{|\alpha|=p} \Gamma_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(tx)$,

et $\Gamma_\alpha = \dfrac{p!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$

D'où (2), avec :

$$u_\alpha(x) = \frac{\Gamma_\alpha}{(p-1)!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \quad \partial x_n^{\alpha_n}}(tx_1,\dots,tx_n) dt.$$

ce qui montre que u_α est C^∞.

Exemple : Si $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^∞, avec :

$$f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0,$$

alors on peut écrire :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x,y) = x^2 u(x,y) + 2xy\, v(x,y) + y^2 w(x,y)$$

où u,v,w sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$.

Remarque. En complément de l'exercice précédent, le lecteur pourra montrer de façon analogue que si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est C^∞, alors $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, définie par :

$$F(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ pour } x \neq y \ ; \ F(x,x) = f'(x)$$

est également de classe C^∞.

$\boxed{3.1.3}$ Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(0,0) = 0 \ ; \ f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$

1°) Montrer que f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2°) f est-elle deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

La fonction f est visiblement de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Seul le point (0,0) pose problème.

1°) On constate que les dérivées premières f'_x et f'_y sont définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f'_x(0,0)=0,\ f'_y(0,0)=0,\ \text{et pour } (x,y)\neq(0,0) :$$

$$f'_x(x,y)=\frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\ ;\ f'_y(x,y)=\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}-\frac{2xy^2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

En notant $r=\sqrt{x^2+y^2}$, on constate que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$|f(x,y)|\leqslant r^2\ ;\ |f'_x(x,y)|\leqslant 6r\ ;\ |f'_y(x,y)|\leqslant 6r.$$

D'où la continuité de f, f'_x et f'_y sur $\mathbb{R}^2$. Elle entraîne que f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2°) En utilisant ; $f'_x(0,y)=-y$, et $f'_y(x,0)=x$, on constate l'existence de :

$$f''_{yx}(0,0)=-1,\ \text{et}\ f''_{xy}(0,0)=1.$$

Grâce au théorème de Schwarz, on en déduit que f n'est pas deux fois différentiable en (0,0).

3.1.4 L'entier $n\geqslant 1$ étant donné, on note E l'ensemble des (n,n)-matrices réelles, muni de son unique structure topologique d'e.v.n. Montrer que l'application $\Delta : M\mapsto \det M$ de E dans $\mathbb{R}$ est différentiable ; déterminer sa différentielle.

Ecrivons $M\in E$ et sa comatrice, com $M\in E$, sous les formes :

$$M=[\alpha_{ij}]_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\ ;\ \text{com}\ M=[\beta_{ij}]_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$$

Un isomorphisme d'e.v.n. permet d'identifier E à $\mathbb{R}^{n^2}$ et de considérer Δ comme une fonction polynômiale, et donc différentiable, des n^2 variables réelles α_{ij}.

— Soit $(i,j)\in\mathbb{N}_n^2$. En développant suivant la i-ième ligne, on a :

$$\det M=\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}\,\alpha_{ik}$$

et, comme, pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, β_{ik} ne dépendent pas de α_{ij} :

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{ij}}(M)=\beta_{ij}.$$

— La différentielle de Δ en $M\in E$ donné s'écrit donc :

$$d\Delta(M) : [h_{ij}] \longmapsto \sum_{i,j} \beta_{ij}h_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji}h_{ij}\Big)$$

où $[\gamma_{ij}]$ désigne la transposée de com M.

On a donc : $d\Delta(M) : H \longmapsto \mathrm{tr}\big({}^t(\mathrm{com}\, M)H\big)$, où $\mathrm{tr}\, A$ désigne la trace de la matrice A.

$\boxed{3.1.5}$ Déterminer les applications différentiables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x^4+y^4)^{\frac12} \tag{E}$$

• Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(x,y)=(x^4+y^4)^{\frac12}$; sa restriction à $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est manifestement de classe C^1 (existence et continuité de dérivées partielles).

En munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme $(x,y)\longmapsto\max(|x|,|y|)$, on constate :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad 0\leqslant g(x,y)\leqslant\sqrt{2}\ \|(x,y)\|^2.$$

On en déduit que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (le lecteur vérifiera à titre d'exercice qu'elle est même de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$).

Par ailleurs g est 2-homogène. On déduit alors de l'identité d'Euler que $g/2$ est solution de (E).

• A toute application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, associons $F=f-g/2$; f est solution différentiable de (E) si et seulement si F est différentiable et vérifie :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\,\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+y\,\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0 \tag{E_1}$$

i.e. (toujours d'après l'identité d'Euler) si F est différentiable et vérifie :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad F(tx,ty)=F(x,y) \tag{1}$$

ce qui exige que F (qui est alors continue) vérifie :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad F(x,y)=\lim_{t\to0,\,t>0} F(tx,ty)=F(0,0)$$

et soit donc constante.

• Toute application constante étant différentiable et vérifiant (1), les solutions différentiables de (E) sont les : $(x,y)\longmapsto\frac12(x^4+y^4)^{\frac12}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

3.1.6 Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in\mathbb{N}^*$, et $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une application p-positivement homogène et p fois différentiable en 0. Montrer que f est une fonction polynôme.

On peut appliquer la formule de Taylor-Young au voisinage de 0 : il existe une application continue $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(0)=0$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\quad f(x)-\sum_{k=0}^{p}P_k(x)=\|x\|^p\varepsilon(x)\tag{1}$$

où $P_0(x)=f(0)$, et où, pour $k\in\{1,\dots,p\}$:

$$P_k(x)=\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\right]^{[k]},\ \text{(puissance symbolique).}$$

Notons que P_k est un polynôme k-homogène.

— Soit $x\in\mathbb{R}^n$ fixé. En remplaçant x par tx, $t\in\mathbb{R}_+^*$, dans (1), et en divisant par t^p on obtient :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)-\sum_{k=0}^{p}t^{k-p}P_k(x)=\|x\|^p\varepsilon(tx).$$

D'où : $\displaystyle\lim_{t\to0,\,t>0}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{p}t^{k-p}P_k(x)\right)=0,$

ce qui exige :

$$P_0(x)=\dots=P_{p-1}(x)=0,\ \text{et}\ f(x)=P_p(x).\qquad\square$$

Remarque. La démonstration vaut pour des fonctions à valeurs vectorielles.

3.1.7 Déterminer les applications positivement homogènes, de classe C^2, de $\mathbb{R}_+^{*2}$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{y}{x^3}$$

• La fonction nulle n'est pas solution. Soient f une solution et k son degré d'homogénéité; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont (k-2)-homogènes, et donc $k-2=-2$, i.e. $k=0$, ce qui permet d'écrire, en notant $f(1,t)=g(t)$:

$$f(x,y)=g(y/x)$$

avec $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ de classe C^2.

On obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2y}{x^3}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}g''\left(\frac{y}{x}\right)\ ;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

g est donc solution de l'équation différentielle

$$(1+t^2)y'' + 2ty' + t = 0 \qquad \text{(E)}$$

• Inversement toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ conduit à une solution du problème.

• (E) est une équation différentielle linéaire qui s'intègre sans difficulté, on obtient ainsi les solutions :

$$f_{\lambda,\mu} : (x,y) \longmapsto \lambda \operatorname{Arc\,tg}(y/x) - y/(2x) + \mu, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

$\boxed{3.1.8}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; de classe C^1, vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |f'(t)| \leqslant k, \text{ avec } k \in]0,1[.$$

On définit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad F(x,y) = \big(x - f(y), y - f(x)\big).$$

Montrer que F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
[Indication : pour montrer que F est surjective, on pourra montrer que si $B \subset \mathbb{R}^2$ est bornée, alors $F^{-1}(B)$ est bornée, puis que $F(\mathbb{R}^2)$ est fermé]

• Notons d'abord que f est k-contractante.

• f étant C^1, F, munie de dérivées partielles continues, est C^1.

Soient (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $F(x,y) = F(x',y')$.
Il vient : $\big(x-x' = f(y)-f(y')\big) \wedge \big(y-y' = f(x)-f(x')\big)$.
On en déduit : $(|x-x'| \leqslant k|y-y'|) \wedge (|y-y'| \leqslant k|x-x'|)$
d'où : $(|x-x'| \leqslant k^2|x-x'|) \wedge (|y-y'| \leqslant k^2|y-y'|)$
et donc, d'après $k^2 < 1$: $(x,y) = (x',y')$.

F est ainsi injective.

• Le jacobien de F en (x,y) est : $\det J_F(x,y) = 1 - f'(x)f'(y) > 0$.

Il en résulte, d'après le cours (cf. théorème d'inversion locale), que $F(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert et que F induit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $F(\mathbb{R}^2)$.

• Il reste à montrer $F(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. Il suffit donc de montrer que $F(\mathbb{R}^2)$ est fermé ; en effet on a : $F(\mathbb{R}^2) \neq \emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ connexe.

– Soient $(u,v) \in F(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $|u| \leqslant M$ et $|v| \leqslant M$, et $(x,y) = F^{-1}(u,v)$.
On a : $u = x - f(y)$, $v = y - f(x)$, et donc : $|x| \leqslant M + |f(y)|$ et $|y| \leqslant M + |f(x)|$.
Par ailleurs : $|f(x)| \leqslant |f(0)| + k|x|$, et $|f(y)| \leqslant |f(0)| + k|y|$.

On en déduit aisément (compte tenu de $k^2 < 1$) :

$$|x| \leq \frac{1+k}{1-k^2}(M + |f(0)|) \; ; \; |y| \leq \frac{1+k}{1-k^2}(M + |f(0)|)$$

Il en résulte que, si $B \subset \mathbb{R}^2$ est bornée, alors $F^{-1}(B)$ est bornée.

— Soit $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $F(\mathbb{R}^2)$, de limite $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Ecrivons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(u_n, v_n) = (x_n - f(y_n), y_n - f(x_n))$, où $(x_n, y_n) = F^{-1}(u_n, v_n)$.

Etant convergente, la suite $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ; il en est donc de même de la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui admet alors une valeur d'adhérence (x,y). Par continuité de F, on en déduit $(u,v) = F(x,y)$, et donc $(u,v) \in F(\mathbb{R}^2)$.

$F(\mathbb{R}^2)$ est fermé. □

Autre preuve de la surjectivité de F. $(a,b) \in R^2$ étant donné, on constate que $F(x,y) = (a,b)$ s'écrit $G(x,y) = (x,y)$ avec :

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto (a + f(y), b + f(x)).$$

Munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$. Pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\|G(x,y) - G(x',y')\|$ s'écrit :

$$\max(|f(y) - f(y')|, |f(x) - f(x')|) \leq k \|(x,y) - (x',y')\|.$$

G est ainsi k-contractante ; le théorème du point fixe s'applique : il existe un unique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $G(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$. □

3.1.9 Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n. La norme est notée $\|\cdot\|$ ou Φ.

1°) Montrer que Φ n'est pas différentiable au point 0_E.

2°) Ici E est préhilbertien réel de produit scalaire $\langle , \rangle$; Φ est la norme euclidienne. Montrer que la restriction de Φ à $E \setminus \{0\}$ est C^1.

3°) Ici E est $\mathbb{R}^2$; $\Phi(x) = \sup(|x|,|y|)$; Φ est-elle différentiable ?

4°) Ici E est le $\mathbb{R}$-e.v. des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum |a_n|$ converge et $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$; Φ est-elle différentiable ?

1°) Fixons $e \in E$, unitaire. Considérons l'application $f : t \mapsto \Phi(te) = |t|$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. S'il existait $d\Phi(0)$, il existerait $f'(0) = d\Phi(0).e$. □

2°) $\forall (x_0, h) \in E \quad \Phi^2(x_0 + h) - \Phi^2(x_0) = 2\langle x_0, h\rangle + \Phi^2(h)$.

Pour x_0 fixé, $h \mapsto 2\langle x_0, h\rangle$ appartient à E^* et est continue à cause de $|\langle x_0, h\rangle| \leq \Phi(x_0).\Phi(h)$; on en déduit que Φ^2 admet cette application pour différentielle en x_o. Φ est donc différentiable, et $d\Phi^2 \in \mathcal{L}(E,E^\star)$ est $x \longmapsto 2\langle x,\cdot\rangle$. On constate que $d\Phi^2$ est continue ; Φ^2 est C^1. Comme $u \longmapsto \sqrt{u}$ est une application C^1 de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$, la restriction de Φ à $E\setminus\{0\}$ est C^1. $\square$

3°) D_1 et D_2 désignant les droites $y=x$ et $y=-x$, $U=\mathbb{R}^2\setminus(D_1\cup D_2)$ admet une partition en quatre ouverts dont l'un est $U_1=\{(x,y)\mid x>0$ et $-x<y<x\}$. La restriction de Φ à U_1 s'écrit $(x,y)\longmapsto x$, elle est C^∞ ; Φ est différentiable en tout $x\in U$. On a vu que Φ n'est pas différentiable en $(0,0)$. Montrons que Φ n'est pas différentiable en un point de $(D_1\cup D_2)\setminus\{(0,0)\}$, par exemple (a,a), $a>0$.

Ceci résulte de ce que $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(a,a)$ n'existe pas à cause de :

$$\lim_{x\to a,x>a}\frac{\Phi(x,a)-\Phi(a,a)}{x-a}=1\ ;\quad \lim_{x\to a,x>a}\frac{\Phi(x,a)-\Phi(a,a)}{x-a}=0.$$

4°) On va montrer par l'absurde que Φ n'est différentiable en aucun point de E. On suppose qu'il existe $A\in E$ en lequel Φ est différentiable. On a :

$$\forall H\in E\quad \Phi(A+H)-\Phi(A)=d\Phi(A).H+\|H\|\,\varepsilon(H)\qquad (1)$$

avec $\lim_{H\to 0}\varepsilon(H)=0$. Deux cas sont possibles :

α) $\underline{\exists n_o\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq n_o,\ a_n=0}$. Soit $(H_p)_{p\geq n_o}$. La suite définie par $H_p=(h_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$, où $h_{p,n}=0$ si $n<p$, $h_{p,n}=1/2^n$ si $n\geq p$.

On a : $H_p\in E$, $\|H_p\|=\sum_{n=p}^{+\infty}1/2^n>0$, $\Phi(A\pm H_p)-\Phi(A)=\|H_p\|$.

On écrit (1) pour $H=H_p$, $p\geq n_o$, puis pour $H=-H_p$. On ajoute et on divise par $\|H_p\|$. D'où : $\varepsilon(H_p)+\varepsilon(-H_p)=2$. Contradiction puisque H_p tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

β) $\underline{\forall n_o\in\mathbb{N},\quad \exists n\geq n_o,\ a_n\neq 0}$. On procède comme en α) avec ici $(H_p)_{p\geq 0}$ et $h_{p,n}=0$ si $n<p$, $h_{p,n}=a_n$ si $n\geq p$.

On a : $H_p\in E$, $\|H_p\|=\sum_{n=p}^{+\infty}|a_n|>0$, $\Phi(A+H_p)-\Phi(A)=\|H_p\|$.

En outre : $\Phi(A-2H_p)-\Phi(A)=0$. On écrit (1) pour $H=H_p$ puis pour $H=-2H_p$. Dans les deux cas, on divise par $\|H_p\|$. D'où, en utilisant encore $\lim_{p\to+\infty}H_p=0$:

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{d\Phi(A).H_p}{\|H_p\|}=1,\quad\text{et}\quad \lim_{p\to+\infty}\frac{d\Phi(A).H_p}{\|H_p\|}=0.\ \text{Contradiction.}\qquad\square$$

3.2. PROBLEMES D'EXTREMUMS

3.2.1 Existence et calcul du maximum absolu de l'application :

$f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$

1°) L'application f est C^∞, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De :

$$\frac{\partial(\mathrm{Log}\circ f)}{\partial x}(x,y) = \frac{y-x^2}{x(x+1)(x+y)} \; ; \; \frac{\partial(\mathrm{Log}\circ f)}{\partial y}(x,y) = \frac{x-y^2}{y(y+1)(x+y)}$$

on déduit que le seul point de l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ en lequel f est susceptible de présenter un extrêmum relatif est $(1,1)$; on a $f(1,1) = 1/8$.

Par ailleurs on constate :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad 0 < f(x,y) < \min\big(x,y,1/(x+y)\big) \tag{1}$$

On en déduit que f admet 0 pour borne inférieure (non atteinte).

2°) En posant $\overline{f}(x,y) = \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0,0\}$ et $f(0,0)$, on obtient une application $\overline{f} : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge f, et est continue (d'après (1)). Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a, d'après (1) :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \big(\max(x,y) > 1/a\big) \Rightarrow \big(\overline{f}(x,y) < a\big) \tag{2}$$

ce qui entraîne : $\lim\limits_{\max(x,y)\to+\infty} \overline{f}(x,y) = 0$.

— Fixons $a \in]0,1/8[$, par exemple $a = 1/10$. Soit $P = [0,10] \times [0,10]$.

D'après (2), la restriction de $\overline{f}$ à $(\mathbb{R}_+^*)^2 \setminus P$ est à valeurs dans $[0,1/10[$. D'autre part la restriction de $\overline{f}$, qui est continue, au compact P admet une borne supérieure atteinte μ ; on a $(1,1) \in P$ et donc $\mu \geqslant 1/8$; on en déduit que tout $m \in P$ tel que $\overline{f}(m) = \mu$ appartient à $(\mathbb{R}_+^*)^2$; d'après 1°), un tel point est donc nécessairement $(1,1)$.

En conclusion, l'application f admet 1/8 pour maximum absolu, et ce maximum est atteint en le seul point $(1,1)$.

3.2.2 Soient E un e.v.n., U est un ouvert convexe de E, et $f : U \longrightarrow E$ une application convexe. On suppose qu'il existe un point $a \in U$ en lequel f admet une différentielle nulle. Montrer que f admet un minimum absolu en a.

Soit x un point quelconque de $U\setminus\{a\}$. En utilisant le fait que U est convexe et ouvert, nous constatons qu'il existe un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $I=]\alpha,\beta[$, tel que $\alpha<0<1<\beta$, et une application $g:I\longrightarrow E$, à image dans U, telle que :

$$g(t)=a+t(x-a).$$

Composée d'une application convexe et d'une application affine, $\varphi=f\circ g$ est une application convexe de I dans $\mathbf{R}$.

Comme g est dérivable en 0, et f différentiable en $a=g(0)$, φ est dérivable en 0 et :

$$\varphi'(0)=df\big(g(0)\big)\cdot g'(0)=0.$$

De la convexité de φ sur l'intervalle ouvert I, on déduit :

$$\frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1-0}\geqslant\varphi'(0),\ \text{i.e.}\ f(x)\geqslant f(a).$$ □

$\boxed{3.2.3}$ Rechercher les extrêmums de l'application :

$$f:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}\qquad (x,y,z)\longmapsto\int_0^{+\infty}e^{-t}(t^3+xt^2+yt+z)^2dt.$$

---

a) Pour tout $n\in\mathbf{N}$, l'intégrale impropre $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,t^n\,dt$ converge ; en effet $\varphi:t\longmapsto e^{-t}\,t^n$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, et $\varphi(t)=o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$.

Un calcul par récurrence fournit $I_n=n!$

D'où l'existence de $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.

b) <u>1° méthode</u>. Par développement, $f(x,y,z)$ s'écrit :

$$24x^2+2y^2+z^2+12xy+4xz+2yz+240x+48y+12z+720.$$

f est C^∞, et un extrêmum ne peut être obtenu qu'en un (x,y,z) tel que :

$$(1)\quad\begin{cases}\frac{1}{2}f'_x(x,y,z)=0,\ \text{i.e.}\ 24x+6y+2z=-120\ ;\\ \frac{1}{2}f'_y(x,y,z)=0,\ \text{i.e.,}\ 6x+2y+z=-24\ ;\\ \frac{1}{2}f'_z(x,y,z)=0,\ \text{i.e.,}\ 2x+y+z=-6\ .\end{cases}$$

On constate que l'unique solution de (1) est $(x,y,z)=(-9,18,-6)$. Posons :

$$g(h,k,\ell)=f(-9+h,18+k,-6+\ell)-f(-9,18,-6).$$

Soit directement, soit par la formule de Taylor pour le polynôme f, on a :

$$g(h,k,\ell) = 24h^2 + 2k^2 + \ell^2 + 12hk + 4h\ell + 2k\ell$$
$$= (\ell+k+2h)^2 + (k+4h)^2 + 4h^2$$

ce qui montre que la forme quadratique g est définie positive, et que f présente un minimum absolu en $(-9,18,-6)$, de valeur 36.

La considération de $g(h,0,0) = 24h^2$, montre que f n'est pas majorée.

Remarque. Le calcul précédent équivaut à la réduction de la quadratique de $\mathbb{R}^3$ d'équation $f(x,y,z) = 0$, la résolution de (1) montrant qu'elle admet le point $(-9,18,-6)$ pour centre unique.

2° méthode. On vérifie que, sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, on dispose du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,P(t)Q(t)dt$, et que $(\mathbb{R}[X], \langle\, ,\,\rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ fixé, $f(x,y,z)$ est le carré de la distance du polynôme X^3 au polynôme $-xX^2 - yX - z$. Lorsque (x,y,z) décrit $\mathbb{R}^3$, ce dernier décrit le sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$ de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $(X^2,X,1)$. On peut donc affirmer que f admet un minimum absolu, atteint en l'unique polynôme : $-x_oX^2 - y_oX - z_o$ qui est la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. On détermine cette projection en écrivant que $X^3 - (-x_oX^2 - y_oX - z_o)$ est orthogonal à X^2, à X et à 1, ce qui s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} &\langle X^3 + x_oX^2 + y_oX + z_o, X^2\rangle = 0 \\ &\langle X^3 + x_oX^2 + y_oX + z_o, X\rangle = 0 \\ &\langle X^3 + x_oX + y_oX + Z_o, 1\rangle = 0 \end{aligned}\right\} \text{ i.e. } (x_o,y_o,z_o) \text{ est solution de (1).}$$

Il est ici inutile d'étudier f au voisinage du point $(-9,18,-6)$.

$\boxed{3.2.4}$ Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on considère un triangle abc isocèle ($\|\vec{ab}\| = \|\vec{ac}\|$).

Montrer que l'application $f : m \to \|\vec{bm}\| + \|\vec{cm}\| - \sqrt{3}\,\|\vec{am}\|$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admet un minimum absolu, atteint en des points que l'on précisera.

On utilise un repère orthonormal dans lequel $a = (0,-\alpha)$ avec $\alpha > 0$, $b = (\beta,0)$ et $c = (-\beta,0)$ avec $\beta > 0$.

a) L'application f est continue. Par l'inégalité triangulaire :

$$\|\vec{bm}\| \geqslant \|\vec{am}\| - \|\vec{ab}\| \quad ; \quad \|\vec{cm}\| \geqslant \|\vec{am}\| - \|\vec{ac}\| .$$

D'où : $f(m) \geq (2-\sqrt{3}) \|\vec{am}\| - 2\|\vec{ab}\|$

On en déduit que f n'est pas majorée, et qu'en outre si m n'appartient pas à la boule fermée B de centre a, de rayon $\frac{4\|\vec{ab}\|}{2-\sqrt{3}}$, alors :

$f(m) > 2\|\vec{ab}\| = f(a)$.

La restriction de f au compact B admet une borne inférieure μ, atteinte en au moins un point de B ; $a \in B$ entraîne $\mu \leq f(a)$; il en résulte que f admet μ pour minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f(x,-y) > f(x,y)$ pour $y > 0$, on constate que $f(x,y) = \mu$ exige $y \geq 0$.

b) m_0 étant successivement a,b,c, on compose $m \mapsto \|\vec{m_0 m}\|^2$, application C^∞ de $\mathbb{R}\setminus\{m_0\}$ dans $\mathbb{R}_+^\star$, avec $u \mapsto \sqrt{u}$, application C^∞ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$; on en déduit que la restriction de f à $\mathbb{R}^2\setminus\{a,b,c\}$ est C^∞ ; on constate que grad $f(m) = v + w - u\sqrt{3}$, où, u,v,w sont les vecteurs unitaires des axes respectivement dirigés par $\vec{am}$, $\vec{bm}$, $\vec{cm}$.

D'après le cours, $f(m) = \mu$ exige soit $m \in \{a,b,c\}$, et même $m \in \{b,c\}$ à cause de $-\alpha < 0$, soit grad $f(m) = 0$, i.e. $v + w = u\sqrt{3}$, ce qui s'écrit (en orientant $\mathbb{R}^2$ de façon que le repère utilisé soit direct) :

$$(\vec{mc},\vec{ma}) = (\vec{ma},\vec{mb}) = \varepsilon\pi/6 \pmod{2\pi}, \quad \varepsilon \in \{-1,1\} \tag{1}$$

Avec $\varepsilon = -1$, (1) exigerait que $(\vec{mc},\vec{mb}) = -\pi/3$, i.e., que m appartienne à un arc capable contenu dans le demi-plan $y < 0$, ce qui est à éliminer puisque $f(x,y) = \mu$ exige $y \geq 0$. Dans (1), on se limite donc à $\varepsilon = +1$.

(1) est ainsi vérifié par le point $d = (0,\beta\sqrt{3})$, situé dans le demi-plan $y > 0$ et tel que b c d soit équilatéral, et (1) s'écrit $m \in C_1 \cap C_2$, où C_1 et C_2 sont les arcs capables d'extrêmités (exlues) c et a d'une part, a et b d'autre part, ces arcs contenant l'un et l'autre le point d.

Si $\beta \neq \alpha\sqrt{3}$, C_1 et C_2 appartiennent à deux cercles distincts qui n'ont en commun que a et d, et $C_1 \cap C_2 = \{d\}$.

Si $\beta = \alpha\sqrt{3}$, $C_1 \cap C_2$ est l'intersection Γ du cercle Ω circonscrit au triangle b c d et du demi-plan $y > 0$.

On a : $f(b) = 2\beta - \sqrt{3}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; $f(d) = \beta - \alpha\sqrt{3}$.

et on vérifie : $\operatorname{sgn}\big(f(b)-f(d)\big) = \operatorname{sgn}(\alpha\sqrt{3}-\beta)$.

<u>1er Cas</u> : $\beta < \alpha\sqrt{3}$, ou $b\widehat{a}c < 2\pi/3$. Ici $f(b) > f(d)$; μ est atteint au seul point d et vaut $\beta - \alpha\sqrt{3}$.

<u>2ème Cas</u> : $\beta > \alpha\sqrt{3}$, ou $b\widehat{a}c > 2\pi/3$. Ici $f(b) < f(d)$; μ est atteint aux seuls points b et c et vaut $2\beta - \sqrt{3}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

<u>3ème Cas</u> : $\beta = \alpha\sqrt{3}$, ou $b\widehat{a}c = 2\pi/3$, on a $a \in \Omega$ (cercle circonscrit à b c d).

Ici $f(b) = f(d) = 0$. A tout point m de l'arc Γ de Ω (faire une figure) on associe $\vec{mp}$, colinéaire à $\vec{cm}$ et de même sens, tel que $\|\vec{mp}\| = \|\vec{mb}\|$, de telle sorte que $f(m) = \|\vec{cp}\| - \sqrt{3}\,\|\vec{am}\|$. On constate :

$$(\vec{pc},\vec{pb}) = (\vec{ma},\vec{mb}) = \pi/6 \ ; \ (\vec{cb},\vec{cm}) = (\vec{ab},\vec{am})$$

et on en déduit que les triangles $c\,b\,p$ et $a\,b\,m$ sont semblables. D'où :

$$\frac{\|\vec{cp}\|}{\|\vec{am}\|} = \frac{\|\vec{bc}\|}{\|\vec{ba}\|} = \frac{2\beta}{2\alpha} = \sqrt{3}, \quad \text{et } f(m) = 0.$$

Ici μ est atteint en tous les points de l'arc Γ et en ses extrémités b et c ; en outre $\mu = 0$.

Remarque. Le lecteur connaissant le théorème de Ptolémée pourra l'utiliser pour montrer que $f(m) = 0$ pour tout $m \in \Gamma$.

3.2.5 Expliciter en fonction de a et b les extremums de la restriction de

$$f : (x,y,z) \longmapsto x^3+y^3+z^3 \text{ à } \Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x+y+z = a) \wedge (x^2+y^2+z^2) = b^2\}$$

Dans $\mathbf{R}^3$ euclidien, Γ est l'intersection de la sphère $(O,|b|)$ et d'un plan dont la distance à O est $|a|/\sqrt{3}$. On a $\Gamma = \phi$ si $a^2 > 3b^2$. Si $a^2 = 3b^2$, Γ est réduit au point $(a/3,a/3,a/3)$ en lequel f prend la valeur $a^3/9$. Reste à étudier $a^2 < 3b^2$, auquel cas Γ est un cercle.

Les fonctions $g_1 : (x,y,z) \mapsto x+y+z-a$, $g_2 : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-b^2$ et f sont C^∞ sur $\mathbf{R}^2$. La restriction au compact Γ de la fonction continue f admet une borne supérieure μ et une borne inférieure μ' ; compte tenu de ce que les formes linéaires $dg_1(m)$ et $dg_2(m)$ sont visiblement linéairement indépendantes en tout $m \in \Gamma$, μ et μ' sont atteintes en des points de Γ qui vérifient (cf. multiplicateurs de Lagrange) :

$$\exists(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \quad df(m) = \lambda_1\, dg_1(m) + \lambda_2\, dg_2(m), \ m = (x,y,z)$$

i.e. $\exists(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ grad $f(m) = \lambda_1$ grad $g_1(m) + \lambda_2$ grad $g_2(m)$

$$\text{i.e.} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } (y-x)(z-x)(z-y) = 0$$

(cf. déterminant de Vandermonde)

Cette condition est vérifiée par six points de Γ, i.e., à une permutation circulaire près (qui n'altère pas $x^3+y^3+z^3$) par les deux points $C_i = (x_i,y_i,z_i)$, $i \in \{1,2\}$, déterminés par :

$$\left(x_i = y_i = (a - z_i)/2\right) \wedge \left((a-z_i)^2/2 + z_i^2 = b^2\right)$$

L'un des deux correspond donc nécessairement à μ et l'autre à μ' ; z_1 et z_2 sont les zéros de $Q(X) = 3X^2 - 2aX + a^2 - 2b^2$, et $f(C_i) = \frac{1}{4} P(z_i)$, où

$$P(X) = (a-X)^3 + 4X^3 = 3X^3 + 3aX^2 - 3a^2X + a^3.$$

Il est commode d'effectuer la division euclidienne de polynômes :

$$P(X) = (X+5a/3)Q(X) + R(X)$$

où $R(X) = \frac{2}{3}\left((3b^2-a^2)X - a^3 + 5ab^2\right)$, et d'en déduire :

$$f(C_i) = \frac{(3b^2-a^2)z_i - a^3 + 5ab^2}{6} \quad , \quad z_i = \frac{a \pm \sqrt{6b^2 - 2a^2}}{3} \quad .$$

En convenant de désigner par C_1 celui des points C_i dont la côte est la plus grande, on a $\mu = f(C_1)$ et $\mu' = f(C_2)$.

Remarque. Le calcul vaut pour $a^2 = 3b^2$; alors $f(C_1) = f(C_2) = a^3/9$, ce qui fournit une vérification.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

• *Le premier sous-chapitre est consacré exclusivement aux équations linéaires ; les équations qui se ramènent aux équations linéaires - Riccati, Lagrange, ... se trouvent dans le second sous-chapitre.*

• *En général la variable est notée* t, *et la fonction inconnue est notée* y, *ou s'il y a lieu* (x,y,z) ; *il peut cependant se trouver que la variable soit notée* x.

4.1. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

> $\boxed{4.1.1}$ Quelle condition doit vérifier l'endomorphisme u de $\mathbf{C}^n$ pour que toutes les solutions $\mathbf{R} \to \mathbf{C}^n$ de l'équation différentielle (H) $y' = u \cdot y$ soient bornées ?

(H) est une équation linéaire et homogène. Ses solutions sont C^∞.

Le polynôme caractéristique χ de u, qui est scindé sur $\mathbf{C}$, et le polynôme minimal μ de u s'écrivent :

$$\chi(x) = \prod_{i=1}^{p}(x-\lambda_i)^{m_i} \;;\; \mu(x) = \prod_{i=1}^{p}(x-\lambda_i)^{r_i},\quad 1 \leq r_i \leq m_i.$$

Le noyau N_i de $\left(u - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n}\right)^{r_i}$ est de dimension m_i, et $\mathbf{C}^n = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} N_i$.

On note u_i l'endomorphisme de N_i induit par u, et on pose :

$$v_i = u_i - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{N_i}.$$

A tout vecteur $a = \sum_{i=1}^{p} a_i$, $a_i \in N_i$, de $\mathbf{C}^n$ correspond une unique solution φ_a de (H) telle que $\varphi_a(0) = a$, et, lorsque a décrit $\mathbf{C}^n$, φ_a décrit l'ensemble des solutions de H. On a :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \varphi_a(t) = \sum_{i=1}^{p} \psi_{a_i}(t),$$

où ψ_{a_i} est l'unique solution de $y_i' = u_i \cdot y_i$ telle que $\psi_{a_i}(0) = a_i$.

De $\frac{d}{dt}\left(e^{tu_i}\right) = u_i \circ e^{tu_i}$, on déduit :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tu_i} \cdot a_i\right) = \left(u_i \circ e^{tu_i}\right) \cdot a_i = u_i \cdot \left(e^{tu_i} \cdot a_i\right),$$

et donc : $\psi_{a_i}(t) = e^{tu_i} \cdot a_i = e^{\lambda_i t}\, e^{tv_i} \cdot a_i$, et enfin, comme v_i est nilpotent d'indice r_i :

$$\psi_{a_i}(t) = e^{\lambda_i t} P_{a_i}(t), \text{ où } P_{a_i}(t) = \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{t^j}{j!} v_i^j \cdot a_i$$

— La condition imposée à u est : φ_a est bornée sur $\mathbf{R}$ pour tout $a \in \mathbf{C}^n$. Elle équivaut à : ψ_{a_i} est bornée sur $\mathbf{R}$ pour tous $i \in \mathbf{N}_p$ et $a_i \in N_i$, ($\mathbf{N}_p = \{1, \dots, p\}$).

— Soit $i \in \mathbf{N}_p$. Comme $v_i^{r_i-1} \neq 0$, il existe un $a_i \in N_i$ tel que $v_i^{r_i-1} \cdot a_i$ soit un vecteur non nul de N_i ; la fonction ψ_{a_i} correspondante vérifie :

$$\psi_{a_i}(t) \sim e^{\lambda_i t}\, t^{r_i-1}\, b_i, \quad b_i \neq 0, \text{ au voisinage de } +\infty \text{ et de } -\infty,$$

ce qui entraîne qu'elle n'est pas bornée si la partie réelle de λ_i est non nulle ou si $r_i > 1$.

Inversement si λ_i est imaginaire pur et si $r_i = 1$, alors $t \mapsto e^{\lambda_i t}$ est bornée, et pour tout $a_i \in N_i$, P_{a_i} est une constante, ce qui entraîne que ψ_{a_i} est bornée.

— En conclusion, toutes les solutions de (H) sont bornées sur $\mathbf{R}$ si, et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

i) Les valeurs propres de u sont imaginaires pures (éventuellement nulles) ;

ii) Le polynôme minimal de u n'a que des zéros simples, i.e. u est diagonalisable.

$\boxed{4.1.2}$

Résoudre (L) : $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dz}{dt} + \sqrt{3}\,x = \sin t \\ \dfrac{dz}{dt} - \dfrac{dx}{dt} + \sqrt{3}\,y = \sin t \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + \sqrt{3}\,z = \sin t \end{cases}$

• Commençons par deux remarques :

a) (L) admet pour solution $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t(1,1,1)$, ce qui ramène sa résolution à celle du système homogène (H) qui lui est associé.

b) Pour toute solution (x,y,z) de (H) la fonction $x+y+z$ est nulle.

• Notons : $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

On a : $U^2 = J - 3I$.

L'équation (H) s'écrit : $U\frac{dX}{dt} + \sqrt{3}\,X = 0$.

Une difficulté se présente du fait que la matrice U n'est pas inversible. Mais, d'après la remarque b), toute solution de (H) vérifie $JX = 0$, et donc $J\frac{dX}{dt} = 0$, et encore :

$$(U+J)\frac{dX}{dt} + \sqrt{3}\,X = 0.$$

$U + J$ étant inversible, ce dernier système s'écrit :

$$\frac{dX}{dt} + \sqrt{3}\,(U+J)^{-1}X = 0 \qquad (H_1)$$

<u>Première méthode</u>. (laissée au lecteur). On commence par résoudre (H_1), ce qui est un problème classique. On cherche ensuite celles des solutions de (H_1) qui sont solutions de (H).

<u>Deuxième méthode</u>. (H_1) nous permet de constater que toute solution $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de (H), qui a priori est dérivable, est en fait de classe C^∞, ce qui entraîne qu'elle vérifie chacune des équations :

$$U\frac{d^2X}{dt^2} + \sqrt{3}\frac{dX}{dt} = 0 \;;\; U^2\frac{d^2X}{dt^2} + \sqrt{3}\,U\frac{dX}{dt} = 0 \;;$$

$$U^2\frac{d^2X}{dt^2} - 3X = 0 \;;\; (J-3I)\frac{d^2X}{dt^2} - 3X = 0$$

et enfin : $\frac{d^2X}{dt^2} + X = 0$ $\left(\text{en effet } J\frac{d^2X}{dt^2} = 0\right)$.

Les seules solutions possibles de (H) sont ainsi les $f_{A,B} = A\sin + B\cos$, où A et B désignent des matrices colonnes constantes.

Inversement, pour A et B données, f_{AB} est solution de (H) si, et seulement si :

$$UA\cos - UB\sin + \sqrt{3}(A\sin + B\cos)$$

est une fonction nulle, ce qui s'écrit :

$$(B\sqrt{3} = -UA) \wedge (A\sqrt{3} = UB)$$

et aussi : $(B\sqrt{3} = -UA) \wedge (U^2A + 3A = 0)$ (1)

La seconde condition (1) s'écrit $JA = 0$ et signifie que la somme des éléments de la matrice A est nulle. Les solutions de (H) sont donc les $f_{A,B}$ telles que :

$$A = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix},\; B = -\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\beta-\gamma\\ \gamma-\alpha\\ \alpha-\beta\end{bmatrix},\text{ avec } \alpha+\beta+\gamma = 0.$$

Les solutions de (L) sont les (x,y,z) telles que $\alpha+\beta+\gamma=0$ et :

$$x=(\alpha+1/\sqrt{3})\sin+(\gamma-\beta)/\sqrt{3}\cdot\cos$$
$$y=(\beta+1/\sqrt{3})\sin+(\alpha-\gamma)/\sqrt{3}\cdot\cos$$
$$z=(\gamma+1/\sqrt{3})\sin+(\beta-\alpha)/\sqrt{3}\cdot\cos$$

On peut les interpréter, dans un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, comme les mouvements à accélération centrale :

$$t\longmapsto O+(\vec{A}+\vec{K})\sin t+\vec{K}\wedge\vec{A}\cos t,$$

où $\vec{K}$ désigne le vecteur unitaire $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})/\sqrt{3}$ et où $\vec{A}$ est donné, tel que $\vec{K}\cdot\vec{A}=0$. Les trajectoires sont des ellipses de centre O.

4.1.3 Soit l'équation différentielle :

$$y'''+a(t)y'+b(t)y=0 \qquad \text{(E)}$$

où a et b sont des applications continues d'un intervalle réel J dans $\mathbb{R}$.

On suppose connu un couple (u,v) de solutions de (E) sur J tel que $w=uv'-u'v$ ne prenne pas la valeur 0.

1°) Montrer que la résolution de (E) se ramène à celle des :

$$\begin{vmatrix} y & u & v \\ y' & u' & v' \\ y'' & u'' & v'' \end{vmatrix} = k,\ k\in\mathbb{R} \qquad (L_k)$$

2°) En déduire l'expression générale des solutions de (E).

L'équation (E) est linéaire et homogène ; a et b étant continues ses solutions constituent un sous-espace de dimension 3 de $C^3(J,\mathbb{R})$.

1°) L'hypothèse faite sur w permet d'écrire (L_k) sous la forme :

$$y''+\frac{-uv''+u''v}{w}y'+\frac{u'v''-u''v'}{w}y=\frac{k}{w}$$

ce qui montre que les solutions des (L_k) sur J sont, comme celles de (E), de classe C^3.

Or, en utilisant $u'''+au'+bu=0$ et $v'''+av'+bv=0$, on constate que, pour toute application $y:J\to\mathbb{R}$ de classe C^3 :

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} y & u & v \\ y' & u' & v' \\ y'' & u'' & v'' \end{vmatrix} = w(y'''+ay'+by).$$

On en déduit que l'ensemble S des solutions de (E) n'est autre que la réunion des ensembles des solutions des diverses (L_k).

2°) Pour k donné, compte tenu de l'hypothèse faite sur w, (u,v) est une base de l'espace vectoriel des solutions de :

$$\begin{vmatrix} y & u & v \\ y' & u' & v' \\ y'' & u'' & v'' \end{vmatrix} = 0$$

qui est l'équation homogène associée à l'équation linéaire (L_k). On peut donc intégrer (L_k) par la méthode de variation des constantes. On pose :

$$y = \lambda u + \mu v, \text{ avec } \lambda' u + \mu' v = 0 .$$

En faisant, au premier membre de (L_k) :

$$y' = \lambda u' + \mu v' \quad ; \quad y'' = \lambda u'' + \mu v'' + \lambda' u' + \mu' v'$$

on obtient : $\lambda' u' + \mu' v' = k/w$,
qui, associé à : $\lambda' u + \mu' v = 0$ fournit :

$$\lambda' = -kv/w^2 \quad ; \quad \mu' = ku/w^2 .$$

L'application $f_{k_1,k_2,k}$ qui à $t \in J$ associe :

$$k_1 u(t) + k_2 v(t) + k\left[- u(t)\int_{t_0}^{t} \frac{v(\tau)}{w^2(\tau)} d\tau + v(t)\int_{t_0}^{t} \frac{u(\tau)}{w^2(\tau)} d\tau \right]$$

où $t_0 \in J$ est arbitrairement fixé, engendre l'ensemble des solutions de (L_k), k fixé, lorsque (k_1,k_2) décrit $\mathbf{R}^2$; elle engendre S lorsque (k_1,k_2,k) décrit $\mathbf{R}^3$.

4.1.4 On étudie l'équation différentielle :

$$t^2 y'' + t\,A(t)\,y' + B(t) y = 0 \tag{E}$$

où A et B sont les sommes de deux séries entières réelles données, $\sum a_n t^n$ et $\sum b_n t^n$, de rayons de convergence non nuls.

1°) Discuter l'existence de solutions de la forme :

$$\varphi :]0,R[\longrightarrow \mathbf{R} \qquad t \longmapsto t^r \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n, \quad r \in \mathbf{R}, \ c_0 \neq 0.$$

On fera intervenir le "polynôme caractéristique" $T(X) = X(X-1) + a_0 X + b_0$.

2°) Utiliser cette méthode pour résoudre :

$$t(1-t)y'' + 3(1-2t)y' - 6y = 0 \tag{E_1}$$

et : $$t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0. \tag{E_2}$$

(E) est linéaire et homogène. On l'étudie séparément sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

1°) On constate par identification que, pour qu'il existe une solution de (E) du type φ, il est nécessaire que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+r)(n+r-1)c_n + \sum_{p=0}^{n} \big((p+r)a_{n-p} + b_{n-p}\big)c_p = 0.$$

Compte tenu de $c_o \neq 0$, cette condition s'écrit :

$$\big(T(r) = 0\big) \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n T(r+n) + \sigma_n = 0\big) \qquad (3)$$

où : $T(X) = X(X-1) + a_o X + b_o$,

et : $\sigma_n = \sum_{p=0}^{n-1} \big((p+r)a_{n-p} + b_{n-p}\big)c_p, \quad n \geqslant 1.$

Nous nous limitons au cas où les zéros sur $\mathbb{C}$ de T sont réels. Soit r un zéro de T.

<u>1er cas</u>. <u>On suppose</u> $T(r+n) \neq 0$ <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}^*$ (condition remplie si r est le plus grand des zéros de T). Ici la série entière $\sum c_n t^n$ est déterminée de manière unique, à un coefficient multiplicatif près ; si son rayon de convergence n'est pas nul, on a des solutions de la forme $t \mapsto c_o t^r \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n t^n$ sur un intervalle $]0,R[$.

Si la différence des zéros de T n'est pas un entier, on peut utiliser la méthode à partir de chacun des zéros, et, sous des réserves de convergence, on a toutes les solutions de (E) sur un intervalle $]0,R[$, $R>0$.

<u>2ème cas</u>. <u>On suppose que les zéros de</u> T <u>sont</u> r et r+m, $m \in \mathbb{N}^*$. Ici (3) fournit $c_1, \dots, c_{m-1}$ en fonction de c_o, mais, si $\sigma_m \neq 0$, on ne peut aller plus loin et la méthode est en échec (on peut cependant reprendre le calcul précédent à partir du plus grand zéro de T).

En revanche, si $\sigma_m = 0$ on peut obtenir les c_n, $n \geqslant m$, en fonction de c_m. Sous une réserve de convergence on obtient des solutions de la forme :

$$t \longrightarrow c_o t^r \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_n t^n + c_m t^r \sum_{n=m}^{+\infty} \gamma_n t^n$$

et, en fait, toutes les solutions sur un intervalle $]0,R[$.

<u>3ème cas</u>. <u>On suppose que</u> r <u>est zéro double de</u> T. Le calcul du 1er cas fournit (sous une réserve de convergence) une solution u sur un intervalle $]0,R[$. On effectue le changement de fonction inconnue $y = uz$. Nous verrons un exemple au 2°).

2°) a) <u>Résolution de</u> (E_1). Sur un intervalle inclus dans $]0,1[$, les solutions de (E_1) sont celles de (E) avec :

$$A(t) = \frac{3(1-2t)}{1-t} = 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-3)t^n ,$$

et : $$B(t) = \frac{-6t}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-6)t^n,$$ (les rayons de convergence sont 1 et 1).

Ici : $a_o = 3$ et $b_o = 0$. D'où $T(X) = X(X+2)$.

On adopte $r = -2$ et, comme $T(r+2) = 0$ on se trouve dans le second cas du 1°), avec $m = 2$. En utilisant (3), on calcule d'abord : $c_1 = 0$.

On vérifie ensuite que la condition $\sigma_2 = 0$ est remplie, ce qui permet de poursuivre. Pour $n \geqslant 3$, on constate que, dans σ_n, il suffit de faire varier l'indice p de 2 à n-1, les a_{n-p} étant alors égaux à -3, et les b_{n-p} à -6, si bien que :

$$\sigma_n = -3\sum_{p=2}^{n-1} p\, c_p, \quad n \geqslant 3.$$

D'où : $$n(n-2)c_n = 3\sum_{p=2}^{n-1} p\, c_p, \quad n \geqslant 3 \text{ ; i.e. } c_3 = 2c_2 \text{ et :}$$

$$n(n-2)c_n = (n-1)(n-3)c_{n-1} + 3(n-1)c_{n-1}, \quad n \geqslant 4,$$

D'où : $$(n-2)c_n = (n-1)c_{n-1}, \quad n \geqslant 3.$$

Par récurrence : $c_n = (n-1)c_2$, $n \geqslant 2$.

On obtient les solutions éventuelles :

$$t \longmapsto \frac{c_0}{t^2} + \frac{c_2}{t^2} \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)t^n = \frac{c_0}{t^2} + c_2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n$$

Les séries entières obtenues, et les séries $\sum a_n t^n$ et $\sum b_n t^n$ ayant 1 pour rayon de convergence commun, ce sont effectivement des solutions sur]0,1[. On constate qu'il s'agit des restrictions à]0,1[des :

$$f_{\lambda,\mu} : t \longmapsto \frac{\lambda}{t^2} + \frac{\mu}{(t-1)^2}$$

et on vérifie que celles-ci sont toutes les solutions de (E_1) sur tout intervalle ne contenant ni 0, ni 1.

2°) b) Résolution de (E_2). Sur un intervalle inclus dans]0,1[, les solutions de (E_2) sont celles de (E) avec :

$$A(t) = \frac{-(1+t)}{1-t} = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)t^n,$$

et $$B(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n,$$ (les rayons de convergence sont 1 et 1).

Ici : $a_o = -1$ et $b_o = 1$. D'où $T(X) = (X-1)^2$.

On adopte $r = 1$, et on se trouve dans le troisième cas du 1°).

On calcule : $-\sigma_1 = \sigma_o$; $-\sigma_n = -\sigma_{n-1} + (2n-1)c_{n-1}$, $n \geqslant 2$.

D'où : $1^2 \cdot c_1 = c_o$; $n^2 c_n = (n-1)^2 c_{n-1} + (2n-1)c_{n-1}$, et $c_n = c_o$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On obtient les solutions éventuelles $t \mapsto c_o t \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, qui sont effectivement solutions sur $]0,1[$, et même sur $]-1,+1[$. Il s'agit de restrictions des $f_\lambda : t \mapsto \frac{\lambda t}{1-t}$, qui sont d'ailleurs solutions sur tout intervalle ne contenant pas 1.

— Sur un intervalle I ne contenant ni 0, ni 1, on peut effectuer le changement de fonction inconnue $y = \frac{t}{1-t} z$. Le lecteur constatera qu'il conduit à :

$$tz'' + z' = 0 \ ; \ z' = \frac{\mu}{t} \ ; \ z = \mu \operatorname{Log}|t| + \lambda.$$

Les solutions de (E_2) sur I sont donc les :

$$g_{\lambda,\mu} : t \mapsto (\mu \operatorname{Log}|t| + \lambda) \frac{t}{1-t}.$$

<u>Remarque</u>. Des cas particuliers classiques sont les équations d'Euler, dans lesquelles A et B sont des constantes, et les équations de Bessel, dans lesquelles $A(t) = 1$ et $B(t) = t^2 - \lambda^2$.

$\boxed{4.1.5}$ 1°) Soit l'équation différentielle : $t(y''-y') + py = 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ (E_p)

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P qui soit solution de (E_p) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $P'(0) = 1$.

Trouver une relation simple entre P et $f : t \mapsto \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}}(e^{-t}t^p)$; en déduire que P admet p zéros a_i, simples et positifs, avec $a_o = 0$.

b) Montrer que (E_p) admet sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) une solution de la forme:

$$t \mapsto e^t Q(t) + P(t) \int_\alpha^t \frac{e^u}{u} du \qquad (1)$$

où Q est un polynôme que l'on exprimera au moyen de P et des $P'(a_i)$.

Résoudre (E_p).

2°) Résoudre : $t(y''-y) - py = 0$, $p \in \mathbb{N}^*$. (E_{-p})

(E_p) est linéaire et homogène. Ses solutions sur un intervalle I ne contenant pas 0 constituent un sous-espace de dimension 2 de $C^\infty(I,\mathbb{R})$.

1°) a) La somme de la série entière $\sum c_n t^n$, de rayon de convergence $R > 0$, est solution de (E_p) sur $]-R,R[$ si, et seulement si :

$$(c_o = 0) \wedge \left[n(n+1)c_{n+1} = (-p+n)c_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*\right].$$

On obtient les polynômes, de degré p, $c_1 P$, avec :

$$P(t) = \sum_{n=1}^{p} (-1)^{n-1} C_{p-1}^{n-1} \frac{t^n}{n!}$$

qui sont solutions de (E_p) sur $\mathbb{R}$. On constate : $P'(0) = 1$. □

— En appliquant à $t \mapsto e^{-t}t^p$ la formule de Leibniz, on constate :

$$P(t) = \frac{1}{p!} e^t f(t).$$

Il n'y a pas de problème si $p = 1$, P s'écrivant alors $t \longmapsto t$. Supposons donc $p \geq 2$, et écrivons $f = g^{(p-1)}$ avec $g(t) = e^{-t}t^p$.

Chacune des dérivées successives de g est le produit de $t \mapsto e^{-t}$ par un polynôme de degré p, et admet donc au plus p zéros. On a :

$$g'(t) = -e^{-t}\, t^{p-1}(t-p)$$

et : $$g''(t) = e^{-t}\, t^{p-2}(t-p+\sqrt{p})(t-p-\sqrt{p}).$$

D'où l'idée de vérifier qu'est vraie pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}$, $p \geq 2$, l'assertion :

(A_i) Les zéros de $g^{(i)}$ sont 0 d'ordre $p-i$, et i zéros simples $a_{i,j}$ avec :

$$0 < a_{i,1} < \dots < a_{i,i}.$$

La proposition à démontrer en résultera pour $i = p-1$.

— (A_1) est vraie d'après l'expression de $g'(t)$.

— Soit $i \in \{1, \dots, p-2\}$ pour lequel (A_i) a été vérifiée. Au titre de dérivée de $g^{(i)}$, $g^{(i+1)}$ admet 0 pour zéro d'ordre $p-i-1$. D'autre part, en utilisant $\lim\limits_{t \to +\infty} g^{(i)}(t) = 0$ et une extension du théorème de Rolle, on constate que $g^{(i+1)}$ admet au moins un zéro dans chacun des $(i+1)$ intervalles $]0, a_{i,1}[, \dots,]a_{i,i-1}, a_{i,i}[,]a_{i,i}, +\infty[$. On en déduit que (A_{i+1}) est vraie. □

b) Nous pouvons, sous réserve de nous limiter à un intervalle I ne contenant aucun des zéros a_i de P, faire dans (E_p) le changement de fonction inconnue $z = y/P$, qui conduit à l'équation linéaire et homogène :

$$z'' + \left(2\,\frac{P'}{P} - 1\right) z' = 0$$

dont les solutions sont les $z' = \lambda\varphi$, avec $\varphi(t) = e^t/P^2(t)$. On en déduit qu'une base de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation linéaire et homogène (E_p) est (P,F), où Φ est une primitive arbitrairement choisie de φ sur I, et où $F = P\Phi$.

— Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $1/P^2$. La partie entière est nulle ; la partie polaire associée au pôle double a_i est de la forme $\frac{B_i}{(X-a_i)^2} + \frac{C_i}{X-a_i}$.

Par la formule de Taylor, en notant $P'(a_i) = P'_i \neq 0$ et $P''(a_i) = P''_i$:

$$\frac{1}{P^2} = \frac{1}{P_i'^2 (X-a_i)^2} \cdot \frac{1}{Q_i(X-a_i)}$$

où le polynôme $Q_i(Y)$ s'écrit :

$$\left[1+\frac{P''_i}{2P'_i}Y+\dots\right]^2 = 1+\frac{P''_i}{P'_i}Y+\dots$$

Une division suivant les puissances croissantes fournit :

$$B_i = 1/P'^2_i \ ; \ C_i = -P''_i/P'^3_i .$$

On a vu $P'(0)=1$; on calcule $P''(0) = -p+1$.

De $a_i(P''_i-P'_i)=0$ on déduit $P''_i = P'_i$ pour $i\in\{1,\dots,p-1\}$.

D'où :

$$\varphi(t) = \frac{e^t}{t^2} + (p-1)\frac{e^t}{t} + \sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{P'^2_i}\left(\frac{e^t}{(t-a_i)^2}-\frac{e^t}{t-a_i}\right).$$

Comme : $\dfrac{e^t}{(t-a_i)^2}-\dfrac{e^t}{t-a_i} = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^t}{t-a_i}\right)$, on peut adopter :

$$F(t) = pP(t)\int_\alpha^t \frac{e^u}{u}\,du - e^t\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{P'^2_i}S_i(t)$$

où $\alpha\in I$ est arbitrairement fixé, et où S_i est le polynôme quotient de P par $X-a_i$.

En fait, si $\alpha>0$ (resp. $\alpha<0$), F est définie sur $\mathbf{R}^*_+$ (resp. $\mathbf{R}^*_-$), et on vérifie aisément que F est solution de (E) sur cet intervalle ; (P,F) est donc une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbf{R}^*_+$ (resp. $\mathbf{R}^*_-$)

On peut naturellement remplacer F par $\frac{1}{p}F$ qui est de la forme (1), avec :

$$Q = -\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{P'^2_i}S_i,\quad S_i = \frac{P}{X-a_i}.$$ □

2°) Pour toute solution ψ de (E_p) sur un intervalle I, la fonction $\psi_1 : t \to e^t\psi(-t)$ est solution de (E_{-p}) sur $-I$. En effet, pour tout $t\in -I$, $t\left(\psi''_1(t)-\psi'_1(t)\right) - p\psi_1(t)$ s'écrit :

$$-e^t[(-t)\left(\psi''(-t)-\psi'(-t)\right) + p\psi(-t)], \text{ qui est } 0.$$

Sur $\mathbf{R}^*_+$ (resp. $\mathbf{R}^*_-$) on a donc les solutions indépendantes de (E_{-p}) :

$$t \mapsto e^tP(-t), \text{ et } t\mapsto Q(-t)+e^tP(-t)\int_\beta^t \frac{e^{-u}}{u}du .$$

$\boxed{4.1.6}$ Etant donné $(a,b,c)\in\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, résoudre l'équation différentielle:

$$(t^2+2bt+c)^2y'' - ay = 0 \qquad \text{(E)}$$

On précisera la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbf{R}$ lorsque $b^2 = c$.

<u>Indication</u> : On effectuera le changement de fonction inconnue $y'/y = z$, et on cherchera des solutions particulières de l'équation transformée.

1°) <u>Résolution de</u> (E) <u>sur un intervalle</u> I <u>qui ne contient aucun</u> zéro du trinôme $T : t \mapsto t^2 + 2bt + c$. Les solutions de (E) sur I sont les solutions sur I de l'équation linéaire et homogène $y'' - \frac{a}{T^2} y = 0$; elles constituent un R-espace vectoriel Φ_I de dimension 2, dont nous allons chercher une base.

Au risque d'oublier une solution qui prendrait la valeur 0 sur I, posons $y'/y = z$, ce qui conduit à l'équation de Ricatti (R) : $z' + z^2 = a/T^2$.

Celle-ci admet $t \mapsto (t+k)/T(t)$ pour solution sur I si, et seulement si $(k-b)^2 = b^2 + a - c$.

<u>1er cas</u> : $b^2 + a - c > 0$. On dispose de deux solutions de (R) sur I qui, compte tenu de $2(t+b) = T'(t)$ s'écrivent :

$$\frac{T'}{2T} + \frac{p}{T} \text{ et } \frac{T'}{2T} - \frac{p}{T}, \quad \text{avec } p = \sqrt{b^2+a-c}.$$

On pourrait donc ramener la résolution de (R) à une quadrature. Il vaut mieux remarquer que toute solution de l'une ou l'autre des équations :

$$\frac{y'}{y} = \frac{T'}{2T} + \frac{p}{T} \; ; \; \frac{y'}{y} = \frac{T'}{2T} - \frac{p}{T}$$

est solution de (E) sur I. C'est le cas pour $\sqrt{|T|}\, e^{pF}$ et $\sqrt{|T|}\, e^{-pF}$, où F est une primitive sur I (arbitrairement choisie) de la fonction continue $1/T$, et il s'agit visiblement de deux éléments linéairement indépendants de Φ_I dont une base est ainsi :

$$(\sqrt{|T|}\, e^{pF} \, , \, \sqrt{|T|}\, e^{-pF}).$$

<u>2ème cas</u> : $b^2 + a - c < 0$. Si l'on considère $y'' - \frac{a}{T^2} y = 0$ comme une équation différentielle à l'inconnue $y \in \mathbf{C}^I$, l'ensemble des solutions est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel donc une base est, avec $q = \sqrt{-b^2 - a + c}$ et $p = iq$:

$$(\sqrt{|T|}\, e^{iqF} \, , \, \sqrt{|T|}\, e^{-iqF})$$

et dont une autre base, formée de fonctions réelles, est :

$$\left(\sqrt{|T|}\cos(qF) \, , \, \sqrt{|T|}\sin(qF)\right) .$$

Revenant à notre problème, Φ_I admet ici la base :

$$\left(\sqrt{|T|}\cos(qF) \, , \, \sqrt{|T|}\sin(qF)\right) .$$

<u>3ème cas</u>. $b^2 + a - c = 0$. On ne dispose ici que de la solution $T'/(2T)$ de (R), qui fournit la solution $\sqrt{|T|}$ de (E) sur I.

En effectuant dans (E) le changement de fonction inconnue $y = \sqrt{|T|}\,Y$, on est ramené (quel que soit le signe, fixe, de $T(t)$ sur I) à $TY'' + T'Y' = 0$ dont une solution est F (primitive arbitrairement choisie de $1/T$ sur I).

Dans ce cas, Φ_I admet la base $(\sqrt{|T|}\,, \sqrt{|T|}\,F)$.

2°) Si T n'a pas de zéro réel ($b^2-c<0$), l'étude faite au 1°) vaut pour $I = \mathbb{R}$, et on a donc $\dim \Phi_{\mathbb{R}} = 2$; si T a un ou deux zéros réels, il peut arriver que l'on ait $\dim \Phi_{\mathbb{R}} \neq 2$, ainsi qu'on va le constater en étudiant le cas particulier où T a un zéro double.

Un changement de variable affine ramène alors (E) à l'une des formes :

$$t^4y'' - y = 0 \ ; \ t^4y'' + y = 0.$$

a) <u>Résolution de</u> $t^4y'' - y = 0$. Pour $I = \mathbb{R}_+^*$ (resp. $I = \mathbb{R}_-^*$), on est dans le premier cas du 1°) ; Φ_I admet la base (φ,ψ) où : $\varphi(t) = te^{-1/t}$ et $\psi(t) = te^{1/t}$.

On a : $\lim\limits_{t\to 0,\, t<0} \varphi(t) = -\infty$; $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0} \varphi(t) = 0$.

On vérifie : $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0} \varphi'(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0} \varphi''(t) = 0$. On en déduit que f, définie par $f(t) = \varphi(t)$ si $t>0$ et $f(t) = 0$ si $t\leqslant 0$ est C^2, et on constate qu'elle est solution de $t^4y'' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Il en est de même pour g définie par $g(t) = \psi(t)$ si $t<0$ et $g(t) = 0$ si $t\geqslant 0$. On vérifie que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ coïncide avec une $\lambda\varphi$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec une $\mu\psi$ sur $\mathbb{R}_-^*$, si bien qu'elle est de la forme $\lambda f + \mu g$. On en déduit que (f,g) est une base de $\Phi_{\mathbb{R}}$, et que $\dim \Phi_{\mathbb{R}} = 2$.

b) <u>Résolution de</u> $t^4y'' + y = 0$. Les solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ (resp. $I = \mathbb{R}_-^*$) sont les restrictions à I des fonctions $h_{\lambda,\mu} : t \longrightarrow t\big(\lambda \cos(1/t) + \mu \sin(1/t)\big)$.

Toute $h_{\lambda,\mu}$ se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$ pour la convention $h_{\lambda,\mu}(0) = 0$. Mais aucune $h_{\lambda,\mu}$, sauf $h_{0,0}$, n'est dérivable à droite ou à gauche en 0. Ici $\Phi_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

Remarque. A titre de complément, le lecteur pourra discuter la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ de : $(t^2-1)^2y'' - ay = 0$.

4.1.7	Résoudre : $(t-1)y'' + (1-2t)y' + ty = 0.$	(E)

(E) est linéaire et homogène. A cause du coefficient de y'', on l'étudie d'abord sur $I =]-\infty,1[$ (resp. $I =]1,+\infty[$; les solutions constituent un sous-espace de dimension 2 de $C^\infty(I,\mathbb{R})$.

Comme $\varphi : t \longmapsto e^t$ est visiblement une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui ne prend pas la valeur 0, on peut effectuer le changement de fonction inconnue $y = \varphi z$, ce qui conduit à :

$$(t-1)z'' - z' = 0 \qquad (E_1)$$

dont les solutions sur $]-\infty,1[$ (resp. $]1,+\infty[$) sont les restrictions à cet intervalle des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$:

$$f_{\lambda,\mu} : t \longrightarrow \lambda(t-1)^2 + \mu.$$

En fait les $f_{\lambda,\mu}$ sont solutions de (E_1) sur $\mathbf{R}$, et, à cause de

$$f_{\lambda,\mu}(1) = \mu \text{ et } f''_{\lambda,\mu}(1) = 2\lambda$$

il n'est pas possible que des solutions $f_{\lambda,\mu}$ sur $]-\infty,1[$ et $f_{\lambda',\mu'}$ sur $]1,+\infty[$ "se raccordent en 1", si $(\lambda,\mu) \neq (\lambda',\mu')$.

En conclusion, sur tout intervalle de $\mathbf{R}$ les solutions de (E) sont les :

$$t \longmapsto e^t\left(\lambda(t-1)^2 + \mu\right).$$

$\boxed{4.1.8}$ Résoudre : $4ty'' - 2y' + 9t^2y = 0$ (E)

On recherchera une solution développable en série entière.

(E) est linéaire et homogène. A cause du coefficient de y'', on l'étudie d'abord sur $I = \mathbf{R}_+^*$ (resp. $I = \mathbf{R}_-^*$) ; les solutions constituent un sous-espace de dimension 2 de $C^\infty(I,\mathbf{R})$.

• Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence non nul R ; sa somme f est C^∞ sur $]-R,R[$, et on constate que f est solution de (E) sur $]-R,R[$ si, et seulement si la série entière :

$$-2a_1 + 4a_2t + \sum\left((2n+3)(2n+6)a_{n+3} + 9a_n\right)t^{n+2}$$

a ses coefficients tous nuls, ce qui se traduit par l'existence de $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$a_{3p} = (-1)^p\lambda/(2p)! \ ; \ a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0.$$

En notant ψ la somme de la série entière $\sum\limits_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!}t^{3p}$, de rayon de convergence infini, on peut affirmer que les $\lambda\psi$, $\lambda \in \mathbf{R}$, sont solutions de (E) sur $\mathbf{R}$. On a :

Pour $t \geq 0$: $\psi(t) = c(t)$, où $c(t) = \cos t^{3/2}$.

Pour $t \leq 0$: $\psi(t) = C(t)$, où $C(t) = \text{ch}(-t)^{3/2}$.

• L'analogie entre les fonctions sin et cos (resp. sh et ch) nous invite à introduire l'application continue $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dont les restrictions à $\mathbf{R}_+$ et à $\mathbf{R}_-$ sont respectivement $s : t \longmapsto \sin t^{3/2}$ et $S : t \longmapsto \text{sh}(-t)^{3/2}$.

On constate que, sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, φ est C^∞ et vérifie (E).

En outre φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\varphi'(t) = \frac{3}{2}t^{1/2}\cos t^{3/2} \text{ si } t \geqslant 0 \ ; \ \varphi'(t) = -\frac{3}{2}(-t)^{1/2}\operatorname{ch}(-t)^{3/2} \text{ si } t \leqslant 0.$$

Mais φ' n'est dérivable ni à droite, ni à gauche en 0 ; n'étant pas deux fois dérivable sur un intervalle qui contient 0, φ n'est pas solution de (E) sur un tel intervalle.

• On en déduit qu'une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ [resp. $\mathbb{R}_-^*$] est (c,s) [resp. C,S], et que les solutions sur $\mathbb{R}$ constituent un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est (ψ).

4.1.9 Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, développer en série entière à l'origine :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto (1+t^2)^{\alpha/2}\cos(\alpha \operatorname{Arc\,tg} t)$

et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto (1+t^2)^{\alpha/2}\sin(\alpha \operatorname{Arc\,tg} t)$.

— Les fonctions f et g sont C^∞ sur $\mathbb{R}$. On les étudie conjointement en introduisant l'application $h = f + ig$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui s'écrit :

$$h = \cos^{-\alpha}\varphi \cdot e^{i\alpha\varphi}, \text{ avec } \varphi(t) = \operatorname{Arc\,tg} t.$$

En calcunt h' : $\frac{dh}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \cos^2\varphi\,\frac{dh}{d\varphi}$, on obtient :

$$h' = i\alpha\cos^{1-\alpha}\varphi \cdot e^{i(\alpha-1)\varphi}$$

D'où (récurrence), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h^{(n)} = i^n\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\cos^{n-\alpha}\varphi \cdot e^{i(\alpha-n)\varphi}.$$

Il en résulte que si h admet un développement en série entière à l'origine, celui-ci est nécessairement la série de Mac-Laurin :

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} a_n t^n, \text{ avec } a_n = \frac{i^n\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

qui admet 1 pour rayon de convergence (règle de d'Alembert appliquée à la série des modules) si $\alpha \notin \mathbb{N}$, et $+\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$.

— Soit $t \in \mathbb{R}$, tel que $|t| < 1$. Pour tout naturel $n \geqslant \alpha - 1$ et tout réel x appartenant au segment d'extrémités 0 et t, on a :

$$|\cos^{n+1-\alpha}\varphi(x) \cdot e^{i(\alpha-n-1)\varphi(x)}| \leqslant 1$$

et donc : $|h^{(n+1)}(x)| \leqslant (n+1)!\,|a_{n+1}|$.

Par Taylor-Lagrange, on en déduit, pour tout naturel $n \geqslant \alpha - 1$:

$$\left| h(t) - 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k t^k \right| \leqslant |a_{n+1} t^{n+1}|.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1} t^{n+1}| = 0$ (terme général d'une série convergente), il en résulte:

$$h(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n.$$

— En revenant à f et g, on obtient les développements en série entière de rayon de convergence 1 si $\alpha \notin \mathbf{N}$, et $+\infty$ si $\alpha \in \mathbf{N}$:

$$f(t) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-2p+1)}{(2p)!} t^{2p}$$

et
$$g(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-2p)}{(2p+1)!} t^{2p+1}.$$

(f et g sont des fonctions polynômiales pour $\alpha \in \mathbf{N}$).

$\boxed{4.1.10}$ Etant donné $\alpha \in \mathbf{R}$, résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t^2)y'' - 2(\alpha-1)ty' + \alpha(\alpha-1)y = 0 \qquad \text{(E)}$$

On montrera qu'elle admet pour solutions les fonctions f et g introduites à l'exercice précédent.

(E) est de la forme $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, où a et b sont des applications de classe C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. L'ensemble S des solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Ces solutions sont C^∞.

a) Montrons que f et g sont des éléments de S.- Posons $h = f + ig$, et

$$\psi : t \mapsto (1+t^2)h''(t) - 2(\alpha-1)th'(t) + \alpha(\alpha-1)h(t)$$

En utilisant les expressions de h, h', h'' (cf. exercice précédent) on constate:

$$\psi = \alpha(\alpha-1)\cos^{-\alpha}\varphi \cdot e^{i(\alpha-1)\varphi}\,(-e^{-i\varphi} - 2i\sin\varphi + e^{i\varphi})$$

ce qui montre que ψ est l'application nulle de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. □

b) Cherchons si les éléments f et g de S sont linéairement indépendants. Le wronskien $w = fg' - f'g$ de (f,g) est $\mathrm{Im}(f-ig)(f'+ig')$. D'où :

$$w = \mathrm{Im}(\cos^{-\alpha}\varphi \cdot e^{-i\alpha\varphi} \cdot i\alpha\cos^{1-\alpha}\varphi \cdot e^{i(\alpha-1)\varphi}) = i\alpha\,\mathrm{Im}(\cos^{1-2\alpha}\varphi \cdot e^{-i\varphi})$$

et : $w = \alpha\cos^{2(1-\alpha)}\varphi$, i.e. $w(t) = \alpha(1+t^2)^{\alpha-1}$.

— Si $\alpha \neq 0$, w ne prend pas la valeur 0 ; (f,g) est une base de S.

— Si $\alpha = 0$, $f : t \mapsto 1$ et $g : t \mapsto 0$ sont des éléments liés de S . Ici (E) s'écrit : $\frac{d}{dt}\left((1+t^2)y'\right)=0$,

et S est l'ensemble des $t \longmapsto \lambda+\mu\,\mathrm{Arc\,tg}\,t$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$\boxed{4.1.11}$ Montrer que l'équation différentielle :

$$y''-2y'+y=1/\sqrt{t} \tag{E}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ susceptible d'être prolongée en une application C^1 sur $\mathbb{R}_+$, s'annulant ainsi que sa dérivée au point 0.

Notant f cette solution, calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)/(t\,e^t)$.

(E) est linéaire. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène associée constituent un espace vectoriel dont une base est (φ,ψ), avec $\varphi(t)=e^t$ et $\psi(t)=t\,e^t$.

On en déduit les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ par la méthode de variation des constantes, en posant $y=u\varphi+v\psi$, et en assujetissant les nouvelles fonctions inconnues à la condition $u'\varphi+v'\psi=0$.

On constate que u' et v' sont données par :

$$\left(u'(t)+tv'(t)=0\right)\wedge\left(u'(t)+(t+1)v'(t)=e^{-t}/\sqrt{t}\right)$$

i.e. par : $\left(u'(t)=-e^{-t}\sqrt{t}\right)\wedge\left(v'(t)=e^{-t}/\sqrt{t}\right)$.

En utilisant $e^{-t}/\sqrt{t}\sim 1/\sqrt{t}$ au voisinage de 0 (pour $t>0$), on constate que l'intégrale $\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}d\tau$ converge pour $t>0$; elle vaut $2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2}d\tau$.

On a :

$$v(t)=\mu+2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2}d\tau,\ \text{et (intégration par parties) :}$$

$$u(t)=\lambda+e^{-t}\sqrt{t}-\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2}\,d\tau.$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les $f_{\lambda,\mu}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, avec :

$$f_{\lambda,\mu}(t)=(\lambda+\mu t)e^t+\sqrt{t}+(2t-1)e^t\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2}d\tau.$$

— Directement, ou en utilisant $y'=u\varphi'+v\psi'$, on obtient, pour $t>0$:

$$f'_{\lambda,\mu}(t)=(\lambda+\mu+\mu t)e^t+\sqrt{t}+(2t+1)e^t\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2}d\tau.$$

D'où : $\lim\limits_{t\to0,\,t>0} f_{\lambda,\mu}(t)=\lambda$; $\lim\limits_{t\to0,\,t>0} f'_{\lambda,\mu}(t)=\lambda+\mu$.

— Pour (λ,μ) donné, on convient $f_{\lambda,\mu}(0)=\lambda$, et on prolonge ainsi $f_{\lambda,\mu}$ en une application continue $\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$. Celle-ci admet une dérivée en 0, à savoir $\lim\limits_{t\to0,\,t>0} f'_{\lambda,\mu}(t)=\lambda+\mu$; elle est C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Le problème posé admet donc l'unique solution $f = f_{o,o}$. On a :

$$\lim_{t\to+\infty} f_{o,o}(t)/(t\,e^t) = 2\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$$

Il va de soi que le prolongement de f n'est pas solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{4.1.12}$ Soit f l'application 2-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec $t \longrightarrow |t|$ sur $[-1,1]$. Montrer qu'il existe une seule solution sur $\mathbb{R}$, φ, de :

$$y'' + y = f(t) \qquad \text{(E)}$$

vérifiant : $\big(\varphi(0) = 0\big) \wedge \big(\varphi'(0) = 0\big)$. (1)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, expliciter $\varphi(t)$ sans utiliser les symboles $\int$ ou $\sum$; donner une valeur décimale approchée de $\varphi(100)$.

Montrer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont bornées.

• L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant continue, (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$, toutes C^2, dont l'ensemble constitue un espace affine de dimension 2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz une, et une seule de ces solutions vérifie (1).

• En utilisant la méthode de variation des constantes, on obtient :

$$\varphi : t \longmapsto u(t)\sin t - v(t)\cos t, \text{ avec :}$$

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)\cos\tau\, d\tau \ ; \ v(t) = \int_0^t f(\tau)\sin\tau\, d\tau .$$

Comme u, v et φ sont respectivement impaire, paire et paire, il suffit de les étudier sur $\mathbb{R}_+$. On pose :

$$w(t) = u(t) + iv(t) = \int_0^t f(\tau)e^{\tau i}\, d\tau$$

et on constate que $\varphi(t)$ est la partie réelle de $e^{(-t+\pi/2)i}\cdot w(t)$.

Sur $[2k,2k+1]$, $k \in \mathbb{N}$, on a $f(t) = t-2k$ et $t \longmapsto f(t)e^{ti}$ admet la primitive:

$$\alpha_k : t \longmapsto \big(1 - (t-2k)i\big)e^{ti}.$$

Sur $[2k-1,2k]$, $k \in \mathbb{N}$, on a $f(t) = -t+2k$ et $t \longmapsto f(t)e^{ti}$ admet la primitive $-\alpha_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w(2n)$ s'écrit donc :

$$-\alpha_o(0) + \alpha_n(2n) + \sum_{k=1}^{n}\Big[\alpha_{k-1}(2k-1) + \alpha_k(2k-1) - 2\alpha_k(2k)\Big]$$

et :

$$-1 + e^{2ni} + 2\sum_{k=1}^{n}\big(e^{(2k-1)i} - e^{2ki}\big)$$

Il intervient la somme d'une suite géométrique. On a :

$$w(2n)=\left(1-e^{2ni}\right)\frac{e^{i}-1}{e^{i}+1}$$

et donc : $w(2n)=2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\cdot\sin n\cdot e^{ni}$.

On en déduit : $(2n)=2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\cdot\sin^2 n$, et pour $n=50$:

$$\varphi(100)=0{,}075\ 216\pm 5.10^{-7}.$$

— Expliciter $\varphi(t)$, $t\in\mathbf{R}_+$, équivaut à expliciter $\varphi(2n+x)$ et $\varphi(2n-x)$, $(n,x)\in\mathbf{N}\times[0,1]$. On constate que $w(2n+x)$ s'écrit :

$$w(2n)+\alpha_n(2n+x)-\alpha_n(2n)$$

et : $$2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\cdot\sin n\cdot e^{ni}+(1-xi)e^{(2n+x)i}-e^{2ni}.$$

En multipliant par $e^{(-2n-x+\pi/2)i}$ et en prenant la partie réelle :

$$\varphi(2n+x)=2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\cdot\sin n\cdot\sin(n+x)+x-\sin x.$$

On obtient de la même façon :

$$\varphi(2n-x)=2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\cdot\sin n\cdot\sin(n-x)+x-\sin x.$$

• Des expressions précédentes on déduit :

$$\forall t\in\mathbf{R}\quad |\varphi(t)|\leq 2+2\,\mathrm{tg}(1/2).$$

φ est donc bornée sur $\mathbf{R}$, et il en est de même pour toute solution $\lambda\sin+\mu\cos+\varphi$ de (E).

□

4.1.13 Résoudre l'équation différentielle :

$$t(t-1)^2y''+2(t^2-1)y'-2(t-2)y=(t-1)^2. \qquad \text{(E)}$$

On précisera la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbf{R}$, sur $]-\infty,1[$, sur $]0,+\infty[$.

Indication. On vérifiera que $t\longmapsto(t-1)^{-2}$ est solution de l'équation homogène (H) associée à (E) sur des intervalles convenablement choisis.

(E) est une équation linéaire et non homogène. Pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$ ne contenant ni 0 ni 1, l'ensemble F_I des solutions de (E) sur I est une variété affine de $\mathbf{R}^I$ dont la direction est l'ensemble Φ_I des solutions sur I de :

$$t(t-1)^2y''+2(t^2-1)y'-2(t-2)y=0 \qquad \text{(H)}$$

a) Résolution de (E) sur un intervalle I qui ne contient ni 0, ni 1. Ici : $\dim F_I=2$. Après avoir vérifié que $t\longmapsto(t-1)^{-2}$ est solution de (H) sur

$]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$, on effectue dans (E) le changement de fonction inconnue $y=(t-1)^{-2}z$, qui conduit à l'équation linéaire du premier ordre en z' :

$$tz''-2z'=(t-1)^2.$$

On en déduit que les solutions de (E) sur I sont les restrictions à I des fonctions $f_{\lambda,\mu}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, telles que :

$$f_{\lambda,\mu}(t)=(t-1)^{-2}\left(\varphi(t)+\lambda t^3+\mu\right) \tag{1}$$

avec : $\varphi(t)=\frac{t^3}{3}\operatorname{Log}|t|+t^2-\frac{t}{2}$ si $t\neq 0$, et $\varphi(0)=0$, cette dernière convention étant destinée à rendre φ continue sur $\mathbb{R}$, ce qui sera utile pour la suite.

b) <u>Raccord des solutions au point</u> $t=0$. On a, pour $t\neq 0$:

$$\varphi'(t)=t^2\operatorname{Log}|t|+\frac{t^2}{3}+2t-\frac{1}{2}\ ;\quad \varphi''(t)=2t\operatorname{Log}|t|+\frac{5t}{3}+2.$$

On constate d'abord qu'il existe $\varphi'(0)=-1/2$, et on en déduit que φ est C^1 sur $\mathbb{R}$.

On constate ensuite qu'il existe $\varphi''(0)=2$, et on en déduit que φ est C^2 sur $\mathbb{R}$.

D'après (1), il en résulte que, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $f_{\lambda,\mu}$ est C^2 sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$. On constate que :

$$f_{\lambda,\mu}(0)=\mu\ ;\ f'_{\lambda,\mu}(0)=2\mu-1/2\ ;\ f''_{\lambda,\mu}(0)=6\mu$$

sont indépendants de λ et que :

$$0\cdot f''_{\lambda,\mu}(0)-2f'_{\lambda,\mu}(0)+4f_{\lambda,\mu}(0)=1.$$

Il en résulte : $F_{]-\infty,1[}=\left\{g_{\lambda,\lambda',\mu}\mid(\lambda,\lambda',\mu)\in\mathbb{R}^3\right\}$, avec :

$$g_{\lambda,\lambda',\mu}(t)=f_{\lambda,\mu}(t)\text{ si }t\leqslant 0\ ;\ g_{\lambda,\lambda',\mu}(t)=f_{\lambda',\mu}(t)\text{ si }0\leqslant t<1.$$

On a : $g_{\lambda,\lambda',\mu}=f_{0,0}+\lambda\alpha+\lambda'\beta+\mu\gamma$

avec : $\gamma(t)=(t-1)^{-2}$;

$\alpha(t)=(t-1)^{-2}t^3$ si $t\leqslant 0$; $\alpha(t)=0$ si $0\leqslant t<1$;

$\beta(t)=0$ si $t\leqslant 0$; $\beta(t)=(t-1)^{-2}t^3$ si $0\leqslant t<1$.

$\Phi_{]-\infty,1[}$ admet (α,β,γ) pour base ; $\dim F_{]-\infty,1[}=3$.

c) <u>Raccord des solutions au point</u> $t=1$. Pour étudier $f_{\lambda,\mu}$ au voisinage de 1, posons $t=1+u$. Pour tout $u\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $f_{\lambda,\mu}(1+u)$ s'écrit :

$$\frac{(1+u)^3}{u^2}\left(\lambda+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^n}{n}\right)+\frac{1}{2u^2}+\frac{3}{2u}+1+\frac{\mu}{u^2}$$

i.e.

$$\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{u^2}+\left(3\lambda+\frac{11}{6}\right)\left(\frac{1}{u}+1+\frac{u}{3}\right)+\sum_{n=2}^{+\infty}a_n u^n$$

avec : $\quad a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{3}{n}+\frac{3}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$

Pour que $\lim\limits_{t\to 1} f_{\lambda,\mu}(t)$ existe, il faut et il suffit que :

$$(\lambda+\mu+1/2=0)\wedge(3\lambda+11/6=0)$$

i.e. que : $(\lambda=-11/18)\wedge(\mu=1/9)$.

On prolonge $f_{-11/18,1/9}$ par continuité en lui attribuant la valeur 0 au point 1 ; on obtient ainsi la seule solution possible de (E) sur $]0,+\infty[$; en remarquant que la fonction prolongée est C^∞ sur $]0,2[$ au titre de $\sum\limits_{n\geq 2}a_n(t-1)^n$ et que ses dérivées d'ordre 1 et 2 au point 1 sont respectivement 0 et $2a_2$; on constate qu'elle est effectivement solution. D'où :

– D'une part : $F_{]0,+\infty[}=\left\{f_{-11/18,1/9}\right\}$, espace affine de dimension 0.

– D'autre part : $F_{\mathbb{R}}=\left\{h_\lambda \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}$, avec :

$$h_\lambda(t)=f_{\lambda,1/9}(t)\text{ si }t\leqslant 0\ ;\ h_\lambda(t)=f_{-11/18,1/9}\text{ si }t\geqslant 0.$$

On a : $\quad h_\lambda=h_0+\lambda\alpha$, avec :

$$\alpha(t)=(t-1)^{-2}t^3\text{ si }t\leqslant 0\ ;\ \alpha(t)=0\text{ si }0\leqslant t.$$

$\Phi_{\mathbb{R}}$ admet (α) pour base ; $\dim F_{\mathbb{R}}=1$.

$\boxed{4.1.14}$ Trouver toutes les applications dérivables $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(t)=f(1/t). \tag{1}$$

On déduit de (1) que toute solution f est deux fois dérivable, que :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*\quad f''(t)=(-1/t^2)\cdot f'(1/t)$$

et que f vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle d'Euler :

$$t^2y''+y=0 \tag{E}$$

Le changement de variable $t=e^x$, légitimé par $t\in\mathbb{R}_+^*$, conduit à :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Les seules $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ susceptibles de vérifier (1) sont donc les :

$$f_{\lambda,\mu}: t\longmapsto\sqrt{t}\ (\lambda C+\mu S)$$

où C et S désignent $\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Log} t\right)$ et $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Log} t\right)$.

• Inversement, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $f_{\lambda,\mu}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$f'_{\lambda,\mu} : t \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}\left((\lambda+\mu\sqrt{3})C+(\mu-\lambda\sqrt{3})S\right)$$

En utilisant : $f_{\lambda,\mu}(1/t)=\frac{1}{\sqrt{t}}(\lambda C-\mu S)$, et l'indépendance linéaire de C et S, on constate que les applications cherchées sont les $f_{\lambda,\mu}$ telles que $\lambda=\mu\sqrt{3}$, i.e. les :

$$g_k : t \longmapsto k\sqrt{t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Log} t-\frac{\pi}{6}\right)\right),\quad k\in\mathbb{R}.$$

$\boxed{4.1.15}$ Résoudre l'équation différentielle :

$$y^{(4)}+5y''+4y=|\sin 2t| \qquad \text{(E)}$$

On montrera qu'il existe une solution $\frac{\pi}{2}$-périodique, que l'on exprimera sous la forme de la somme d'une série trigonométrique.

a) (E) est linéaire, à coefficients constants ; le second membre est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paire, $\frac{\pi}{2}$-périodique, continue, C^1 par morceaux. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc C^4, et même C^5 par morceaux.

Les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les :

$$t \longmapsto A\cos t+B\sin t+C\cos 2t+D\sin 2t.$$

Il reste donc à trouver une solution particulière de (E) ; la méthode de variation des constantes s'applique, mais elle donne lieu à des calculs fastidieux.

b) Nous allons procéder par identification à partir du fait que $t\longmapsto|\sin 2t|$ est la somme de sa série de Fourier qui converge normalement sur $\mathbb{R}$, et qui est une série de cosinus de la forme :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{p\geq 1} a_{4p}\cos 4pt.$$

On calcule: $a_{4p}=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}\cos 4pt\sin 2t\,dt=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{4p^2-1}$.

• Supposons que (E) admette une solution $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\pi/2$ périodique. Comme f est C^4 et C^5 par morceaux, les $f^{(k)}$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$ admettent des séries de Fourier qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$, et elles sont les sommes de ces séries. On a :

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{p=1}^{+\infty}(\alpha_{4p}\cos 4pt+\beta_{4p}\sin 4pt) \qquad (1)$$

On en déduit que $f^{(4)}(t)+5f''(t)+4f(t)$ s'écrit :

$$2\alpha_0 + 4\sum_{p=1}^{+\infty}(64p^4-20p^2+1)(\alpha_{4p}\cos 4pt+\beta_{4p}\sin 4pt)$$

En identifiant à $\frac{a_0}{2}+\sum_{p=1}^{+\infty} a_{4p}\cos 4pt$, et en utilisant $64p^4 - 20p^2 + 1 \neq 0$ pour tout $p\in\mathbf{N}$, on constate que la seule application $\pi/2$-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ susceptible de vérifier (E) est la somme φ de la série :

$$\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{\cos 4pt}{(4p^2-1)(64p^2-20p^2+1)}.$$

Inversement, on vérifie que cette série et les séries dérivées jusqu'à l'ordre 4 convergent normalement, et donc uniformément sur $\mathbf{R}$, et on en déduit que φ est effectivement solution de (E).

$\boxed{4.1.16}$ 1°) Soient J un intervalle de $\mathbf{R}$; a et b des applications respectivement C^0 et C^1 de J dans $\mathbf{R}$. Quelle relation doit lier a et b pour que :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{E}$$

admette deux solutions u et v telles que $v = u\,\mathrm{Log}\,u$?

2°) Résoudre : $y'' - 2(t^2 + \frac{1}{t})y' + t^4y = 0$.

1°) (E) est linéaire et homogène ; a et b étant continues, toutes les solutions de (E) sont donc C^2. Pour $y : J \to \mathbf{R}_+^*$, C^2, et $z = y\,\mathrm{Log}\,y$:

$$z'' + az' + bz = (y''+ay'+by)\,\mathrm{Log}\,y + y'' + \frac{y'^2}{y} + ay'$$

et, si en outre y vérifie (E) : $z'' + az' + bz = \frac{y'^2}{y} - by$.

Il s'agit donc d'écrire que (E) et (E_1) : $y'^2 - b(t)y^2 = 0$ ont une solution commune $u = J \to \mathbf{R}_+^*$.

(E_1) fait apparaître la condition nécessaire : $b\geq 0$, qui est supposée remplie.

<u>1er Cas</u> : $b=0$. Ici (E_2) est $y'=0$. Pour tout $k\in\mathbf{R}_+^*$ les applications $u : t \mapsto k$ et $u\,\mathrm{Log}\,u$ sont solutions de (E) sur J.

<u>2ème Cas</u> : $b\geq 0$ et $b\neq 0$. Supposons qu'il existe $u : J \to \mathbf{R}_+^*$ solution commune à (E) et à (E_1) sur J.

Par la continuité de b, il existe un intervalle $I\subset J$, d'intérieur non vide, tel que $b(t)>0$ pour tout $t\in I$.

L'application $t \mapsto \frac{u'(t)}{u(t)\sqrt{b(t)}}$ de I dans $\mathbf{R}$ est continue, à valeurs dans $\{-1,1\}$ d'après (E_1). Elle est donc constante, et il existe $\varepsilon\in\{-1,1\}$ tel que:

$$\forall t\in I \quad \frac{u'(t)}{u(t)} = \varepsilon\sqrt{b(t)}.$$

Il existe ainsi $\varepsilon \in \{-1,1\}$, $\alpha \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall t \in I \quad u(t) = \lambda \exp\left(\varepsilon \int_\alpha^t \sqrt{b(\tau)}\, d\tau\right).$$

Comme u est solution de (E) sur I, on a nécessairement :

$$\forall t \in I \quad \varepsilon \sqrt{\bar{b}(t)} = -\frac{1}{4}\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{a(t)}{2}$$

et :
$$\forall t \in I \quad u(t) = \lambda\big(b(t)\big)^{-1/4} \exp\left(-\int_\alpha^t \frac{a(\tau)}{2} d\tau\right).$$

- Inversement, pour tout intervalle $I \subset J$ tel que :

$$\forall t \in I \quad \big(\bar{b}(t) > 0\big) \wedge \Big(\big(b'(t) + 2a(t)b(t)\big)^2 = 16\, b(t)^3\Big) \qquad (1)$$

on vérifie aisément que deux solutions de (E) sur I sont φ et $\varphi \operatorname{Log} \varphi$, avec $\varphi(t) = \big(\dot{b}(t)\big)^{-1/4} \exp\left(-\int_\alpha^t \frac{a(\tau)}{2} d\tau\right)$, $\alpha \in I$, et que ces solutions sont linéairement indépendantes.

Notons que si I admet une borne $t_0 \in J \setminus I$ telle que $b(t_0) = 0$, on a $\lim\limits_{t \to t_0, t \in I} \varphi(t) = +\infty$; les solutions φ et $\varphi \operatorname{Log} \varphi$ ne peuvent donc être prolongées à un intervalle de J qui contient t_0.

2°) Ici : $a(t) = -2(t^2 + 1/t)$; $b(t) = t^4$. On constate que la condition (1) est remplie par $I = \mathbb{R}_+^*$ (resp. $I = \mathbb{R}_-^*$), et que deux solutions (indépendantes) de (E) sur I sont u et u Log u avec $u(t) = \exp(t^3/3)$. Les solutions de (E) sur I sont les :

$$f_{\lambda,\mu} : t \longmapsto (\lambda + \mu t^3)\exp(t^3/3), \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

$\boxed{4.1.17}$ Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, a et $\dot{b}$ deux applications continues de J dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une solution autre que la fonction nulle de l'équation différentielle (E) : $y'' + a(t)y' + \dot{b}(t)y = 0$.

1°) a) Montrer que si J est compact, l'ensemble $\mathcal{E}_\varphi$ des zéros de φ est fini.

b) En déduire que dans le cas où J est quelconque, l'ensemble $\mathcal{E}_\varphi$ est dénombrable.

2°) On suppose que $\mathcal{E}_\varphi$ a au moins deux éléments et on considère deux zéros consécutifs a et b de φ avec $a < b$.

Soient $\psi : J \to \mathbb{R}$ une solution de E indépendante avec φ et $\mathcal{E}_\psi$ l'ensemble de ses zéros. Montrer que a (resp. b) n'appartient pas à $\mathcal{E}_\psi$ et que $\mathcal{E}_\psi$ a un élément et un seul dans $]a,b[$.

1°) a) On raisonne par l'absurde en supposant $\mathcal{E}_\varphi$ infini. On sait que l'on dispose alors d'une injection de $\mathbf{N}$ dans $\mathcal{E}_\varphi$ et, puisque J est compact, on peut extraire de cette suite une suite convergente. Au total on dispose d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}_\varphi$, convergente de limite $\ell \in J$, vérifiant en outre : $\forall n \neq m \quad a_n \neq a_m$.

Notons que puisque $\{n\in\mathbf{N} \mid a_n = \ell\}$ a au plus un élément, quitte à tronquer la suite (a_n), nous pouvons supposer :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \neq \ell.$$

Comme $\varphi : J \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^2 on a, en particulier :

$$\varphi(\ell) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0 \ ; \quad \varphi'(\ell) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(a_n)-\varphi(\ell)}{a_n-\ell} = 0\,.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, (E) admet une unique solution qui au point ℓ de J prend pour valeur 0 ainsi que sa dérivée, et cette solution est l'application nulle de J dans $\mathbf{R}$. Comme φ n'est pas la solution nulle, l'hypothèse $\mathcal{E}_\varphi$ infini est absurde. □

b) Tout intervalle J de $\mathbf{R}$ est une réunion dénombrable d'intervalles compacts : $J = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} J_n$; puisque $\varphi : J \longrightarrow \mathbf{R}$ est une solution de (E) qui n'est pas la solution nulle, sa restriction à tout J_n est une solution qui n'est pas la solution nulle, et donc l'ensemble des zéros de φ qui appartiennent à J_n est fini ; $\mathcal{E}_\varphi$ est ainsi une réunion dénombrable d'ensembles finis. □

2°) Remarquons tout d'abord que 1°) prouve que les zéros de φ sont isolés dans J ce qui permet, lorsque $\mathcal{E}_\varphi$ a au moins deux éléments, de disposer de deux zéros a et b consécutifs, avec $a<b$.

Comme φ et ψ sont deux solutions indépendantes, le wronskien $w : J \longrightarrow \mathbf{R}$, $w(t) = \varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)$, ne s'annule pas. En particulier : $w(a) = -\psi(a)\varphi'(a) \neq 0$, d'où $a \notin \mathcal{E}_\psi$; de même $b \notin \mathcal{E}_\psi$.

• Raisonnons par l'absurde en supposant que ψ ne s'annule pas sur $]a,b[$; nous disposons alors de l'application φ/ψ qui est de classe C^2, et dont la dérivée est $-w/\psi^2$.

Comme w ne s'annule pas, w est de signe constant donc φ/ψ est strictement monotone sur $[a,b]$, ce qui est incompatible avec $(\varphi/\psi)(a) = (\varphi/\psi)(b) = 0$.

Ainsi ψ admet un zéro sur $]a,b[$, et il est clair en permutant les roles de φ et ψ que ce zéro est unique. □

$\boxed{4.1.18}$ 1°) On considère les équations différentielles (E_i) : $y''+a_i(t)y=0$, $i\in\{1,2\}$, où les a_i sont des applications continues d'un intervalle réel J dans $\mathbb{R}$, telles que $a_1\leqslant a_2$. Soient φ_1 une solution de (E_1) (autre que la fonction nulle) admettant au moins deux zéros, et α, $\beta(\alpha<\beta)$ deux zéros consécutifs de φ_1.

Montrer que toute solution de (E_2) a au moins un zéro dans $]\alpha,\beta]$.

2°) Soit (E) : $y''+a(t)y=0$, où $a : J\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue.

a) On suppose qu'il existe $t_0\in J$ et $m\in\mathbb{R}$ tels que $0<m\leqslant a(t)$ pour tout $t\geqslant t_0$ et que $]t_0,t_0+\pi/\sqrt{m}]\subset J$.

Montrer que toute solution de (E) a un zéro dans $]t_0,t_0+\pi/\sqrt{m}]$.

b) Soient α et β $(\alpha<\beta)$ deux zéros consécutifs d'une solution (non nulle) de (E), tels que $0<m\leqslant a(t)\leqslant M$ pour tout $t\in[\alpha,\beta]$. Montrer :

$\pi/\sqrt{M}\leqslant\beta-\alpha\leqslant\pi/\sqrt{m}$.

Toutes les solutions considérées sont des applications C^2 de J dans $\mathbb{R}$.

1°) Faisons l'hypothèse (H) : il existe une solution φ_2 de (E_2) qui ne prend la valeur 0 en aucun point de $]\alpha,\beta]$.

Quitte à remplacer φ_1 par $-\varphi_1$ et/ou φ_2 par $-\varphi_2$ (ce qui n'altère pas les zéros) nous pouvons supposer (en utilisant la continuité des solutions d'une équation différentielle) que : $\varphi_1(\alpha)=0$, $\varphi_1(\beta)=0$, et :

$$\varphi_1(t)>0 \text{ pour } t\in]\alpha,\beta[\ ; \ \varphi_2(t)>0 \text{ pour } t\in]\alpha,\beta] \ ; \ \varphi_2(\alpha)\geqslant 0.$$

La fonction $w=\varphi_1'\varphi_2-\varphi_1\varphi_2'$ a pour dérivée $(a_2-a_1)\varphi_1\varphi_2\geqslant 0$, et est donc croissante sur $[\alpha,\beta]$. On a $w(\alpha)\leqslant w(\beta)$ avec :

$$w(\alpha)=\varphi_1'(\alpha)\varphi_2(\alpha) \ ; \ w(\beta)=\varphi_1'(\beta)\varphi_2(\beta).$$

Or $\varphi_1'(\alpha)=\lim\limits_{t\to\alpha,\,t>\alpha}\dfrac{\varphi_1(t)}{t-\alpha}\geqslant 0$, et même $\varphi_1'(\alpha)>0$, car, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la fonction nulle est la seule solution de (E_1) telle que $y(\alpha)=0$ et $y'(\alpha)=0$. De la même façon : $\varphi_1'(\beta)<0$.

Il en résulte $w(\alpha)\geqslant 0$ et $w(\beta)<0$. (H) conduit à une contradiction. □

Remarque. De même, toute solution de (E_2) sur J a au moins un zéro dans $[\alpha,\beta[$.

2°) a) On applique 1°) avec $a_1 : t\longmapsto m$ et $a_2=a$. Une solution non nulle de (E_1) est $\varphi_1 : t\longmapsto \sin\big(\sqrt{m}(t-t_0)\big)$; deux zéros consécutifs en sont t_0 et $t_0+\pi/\sqrt{m}$. □

b) L'hypothèse $\beta-\alpha>\pi/\sqrt{m}$ conduirait (en faisant $t_o=\alpha$) à une contradiction avec le résultat de a).

• Appliquons le 1°) avec $a_1=a$ et $a_2 : t \longmapsto M$. Une solution de (E_2) est $\varphi_2 : t \longmapsto \sin(\sqrt{M}(t-\alpha))$ dont deux zéros consécutifs sont α et $\alpha+\pi/\sqrt{M}$. On doit avoir $\alpha+\pi/\sqrt{M}\in\,]\alpha,\beta]$, i.e. $\pi/\sqrt{M}\leqslant\beta-\alpha$. □

• *Les deux exercices qui suivent utilisent les résultats précédents.*

$\boxed{4.1.19}$ On considère l'équation différentielle de Bessel :

$$t^2y''+ty'+(t^2-\lambda^2)y=0,\ \lambda\in\mathbb{R}_+ \qquad (B_\lambda)$$

1°) Montrer que, pour $\lambda\leqslant 1/2$, toute solution de (B_λ) sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$), à valeurs dans $\mathbb{R}$, a au moins un zéro dans tout intervalle $]t_o,t_o+\pi]$, où $t_o>0$ (resp. $t_o+\pi<0$) ; on pourra poser $y=z\cdot|t|^{-1/2}$.

2°) On se limite ici à $\lambda\in\mathbb{N}$. On connait la solution sur $\mathbb{R}$:

$$J_\lambda : t\longmapsto (t/2)^\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(t/2)^{2n}}{n!(\lambda+n)!}$$

Montrer que J_λ a au moins un zéro dans tout intervalle $]t_o,t_o+(\lambda+1)\pi]$, où t_o et $t_o+(\lambda+1)\pi$ sont de même signe.

<u>Indication</u>. On cherchera une relation entre $J_{\lambda+1}$ et $\frac{d}{dt}(J_\lambda/t^\lambda)$.

1°) En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on constate que les solutions considérées sont C^∞ ; comme $t\longmapsto|t|^{-1/2}$ est une application C^∞ de $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) dans $\mathbb{R}_+^*$, pour toute solution y, nous pouvons poser $y=z\cdot|t|^{-1/2}$, ce qui nous ramène à l'étude des solutions de :

$$z''+a(t)z=0,\ \text{où}\ a(t)=1+\left(\frac{1}{4}-\lambda^2\right)\frac{1}{t^2} \qquad (E_\lambda)$$

Pour $\lambda\leqslant 1/2$, le 2°) a) de l'exercice précédent s'applique à (E_λ), avec $m=1$: toute solution φ de (E_λ) sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) a au moins un zéro dans tout intervalle $]t_o,t_o+\pi]$, où $t_o>0$ (resp. $t_o+\pi<0$), et il en est de même pour la solution correspondante $\varphi\cdot|t|^{-1/2}$ de (B_λ). □

2°) Pour $\lambda\in\mathbb{N}$, la fonction $t\longmapsto J_\lambda(t)/t^\lambda$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, au titre de somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Sa dérivée au point t est 0 si $t=0$; si $t\neq 0$ elle est :

$$\frac{1}{2^\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(t/2)^{2n-1}}{(n-1)!(\lambda+n)!}=-\frac{1}{t^\lambda}\left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda+1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^{2n-2}}{(n-1)!(\lambda+n)!}$$

On en déduit l'égalité d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$J_{\lambda+1} = - t^{\lambda} \frac{d}{dt}\left(\frac{J_\lambda}{t^\lambda}\right)$$

Il en résulte par le lemme de Rolle que si α et β sont deux zéros consécutifs de même signe de J_λ, il existe au moins un zéro de $J_{\lambda+1}$ dans $]\alpha,\beta[$.

• Soit $I =]t_0, t_0+(\lambda+1)\pi] \subset \mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$). D'après le 1°), J_0 a au moins un zéro dans chacun des intervalles $]t_0,t_0+\pi], \dots,]t_0+\lambda\pi, t_0+(\lambda+1)\pi]$; ces zéros, au nombre de $\lambda+1$, sont distincts. On déduit de ce qui précède que J_1 a au moins λ zéros (distincts) dans I, et, par récurrence, que J_λ a au moins un zéro dans I. □

$\boxed{4.1.20}$ Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution (autre que la fonction nulle) de l'équation différentielle (E) : $y'' + e^t y = 0$.

1°) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_\varphi$ de ses zéros est infini, dénombrable.

2°) Montrer qu'il existe une surjection strictement croissante $n \mapsto a_n$ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathcal{E}_\varphi \cap \mathbb{R}_+$. Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, et trouver un équivalent à a_n au voisinage de $+\infty$.

1°) $\mathcal{E}_\varphi$ est dénombrable (pas nécessairement infini) d'après l'exercice 4.1.17 .

D'autre part on a : $e^t \geq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Considérons l'équation différentielle $y'' + y = 0$ dont une solution non nulle est $t \mapsto \sin t$. Deux zéros consécutifs de cette solution sont $n\pi$ et $(n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'exercice 4.1.18, 1°) (avec $J = \mathbb{R}_+^*$) on constate que φ a au moins un zéro sur tout intervalle $]n\pi,(n+1)\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, et donc une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{E}_\varphi \cap [0,n\pi]$ est un ensemble fini, dont le cardinal est noté α_n ; visiblement : $\alpha_n \geq n$ et $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n + 1$. Nous disposons donc d'une bijection strictement croissante θ_n de $\{1,\dots,\alpha_n\}$ sur $\mathcal{E}_\varphi \cap [0,n\pi]$; pour tout entier $m \geq n$, θ_n est la restriction de θ_m à $\{1,\dots,\alpha_n\}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = \{n \in \mathbb{N} \mid p \leq \alpha_n\}$ est non vide ; soit a_p la valeur commune des $\theta_n(p)$, $n \in A_p$. Il est clair que $p \mapsto a_p$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathcal{E}_\varphi \cap \mathbb{R}_+$. □

D'après $\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N_0 \quad \frac{\pi}{4n} < \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{\pi}{2(n+1)} \qquad (1)$$

Soient $n \geqslant N_0$ fixé, et $J_n =]2 \operatorname{Log} 2n,\ 2 \operatorname{Log} 2(n+1)]$.

Pour $t \in J_n$, nous avons : $(2n)^2 < e^t \leqslant [2(n+1)]^2$

D'après 4.1.18a), φ a un zéro sur $]2 \operatorname{Log} 2n,\ 2 \operatorname{Log} 2n + \frac{\pi}{2n}]$ intervalle inclus dans J_n d'après (1), et donc au moins un zéro sur J_n.

D'après 4.1.18b), deux zéros consécutifs de φ sur J_n sont à une distance au moins égale à $\frac{\pi}{2(n+1)}$. Comme, d'après (1) :

$$2 \operatorname{Log} 2(n+1) - 2 \operatorname{Log} 2n < 2 \frac{\pi}{2(n+1)}$$

φ a au plus deux zéros sur J_n.

• Soit M_0 le cardinal de l'ensemble fini $\mathcal{E}_\varphi \cap [0, 2 \operatorname{Log} 2N_0]$. En utilisant ce qui précède, on a, pour tout $n \geqslant N_0$:

$$a_{M_0+(n-N_0)} \leqslant 2 \operatorname{Log} 2n < a_{M_0+2(n-N_0)+1}$$

Par changement de notations on a, pour tout $n \geqslant M_0 + 1$:

$$2 \operatorname{Log}(n-M_0+2N_0-1) < a_n \leqslant 2 \operatorname{Log} 2(n-M_0+N_0).$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{2 \operatorname{Log} n} = 1$,

i.e. $a_n \sim 2 \operatorname{Log} n$ au voisinage de $+\infty$. □

$\boxed{4.1.21}$ Soient $p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\int_1^{+\infty} t|p(t)|dt$ converge, et $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une solution de (E) : $y'' + p(t)y = 0$.

1°) Montrer que $t \mapsto \varphi(t)/t$ est bornée au voisinage de $+\infty$.

2°) Montrer qu'il existe $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi'(t)$.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz relatif aux équations linéaires, on sait que φ existe et est de classe C^2.

1°) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons :

$$\varphi'(t) - \varphi'(1) = \int_1^t \varphi''(u)du = -\int_1^t u\, p(u) \frac{\varphi(u)}{u} du \tag{1}$$

– Soit $t \geqslant 1$. Nous avons, par (1) :

$$|\varphi'(t)| \leqslant |\varphi'(1)| + \int_1^t \left|\frac{\varphi(u)}{u}\right| |u\, p(u)| du \tag{2}$$

Or, φ' étant continue, nous disposons de $\sup\limits_{x\in[1,t]} |\varphi'(x)|$, et cette borne est atteinte en un $x_0 \in [1,t]$. D'où, par (2) :

$$\sup_{x\in[1,t]} |\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(1)| + \int_1^{x_0} |\frac{\varphi(u)}{u}|\,|up(u)|du$$

$$\leqslant |\varphi'(1)| + \int_1^t |\frac{\varphi(u)}{u}|\,|up(u)|du. \qquad (3)$$

— Soit maintenant $t \geqslant 2$. Nous avons :

$$|\frac{\varphi(t)}{t}| \leqslant |\frac{\varphi(t)}{t-1}| \leqslant |\frac{\varphi(1)}{t-1}| + |\frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{t-1}|$$

et : $$|\frac{\varphi(t)}{t}| \leqslant |\varphi(1)| + \sup_{x\in[1,t]} |\varphi'(x)|$$

et (cf. (3)) : $$|\frac{\varphi(t)}{t}| \leqslant c + \int_2^t |\frac{\varphi(u)}{u}|\,|up(u)|du$$

où : $$c = |\varphi(1)| + |\varphi'(1)| + \int_1^2 |\varphi(u)|\,|p(u)|du.$$

En utilisant le 4.1.13 de notre tome I d'exercices d'Analyse (lemme de Gronwall), on en déduit :

$$\forall t \geqslant 2 \quad |\frac{\varphi(t)}{t}| \leqslant c \exp\left(\int_2^t |up(u)|du\right)$$

et a fortiori, grâce à la convergence d'une intégrale impropre :

$$\forall t \geqslant 2 \quad |\frac{\varphi(t)}{t}| \leqslant c \exp\left(\int_2^{+\infty} |up(u)|du\right). \qquad \square$$

2°) D'après 1°), l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} up(u)\frac{\varphi(u)}{u}du$ est absolument convergente, et, compte tenu de (1), il existe :

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) = \varphi'(1) - \int_1^{+\infty} p(u)\varphi(u)du. \qquad \square$$

4.1.22 Soient $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\int_0^{+\infty} |p(t)|dt$ converge, et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une solution de (E) : $y'' + y - p(t)y = 0$.

Montrer que φ est bornée.

La continuité de p fait que φ est C^2 ; φ est solution sur $\mathbb{R}_+$ de :

$$y'' + y = p(t)\varphi(t) \qquad (E_1)$$

En résolvant (E_1) par variation des constantes, on constate qu'il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = A\cos t + B\sin t + \int_0^t \sin(t-u)p(u)\varphi(u)du$$

et : $$|\varphi(t)| \leqslant c + \int_0^t |\varphi(u)|\,|p(u)|du, \quad c = |A| + |B|.$$

En utilisant l'exercice 4.1.13 du tome I (lemme de Gronwall) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |\varphi(t)| \leqslant c \exp\left(\int_0^t |p(u)|du\right)$$

et donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |\varphi(t)| \leqslant c \exp\left(\int_0^{+\infty} |p(u)|du\right).$ □

$\boxed{4.1.23}$ Soit $p : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$, C^1, telle que :

$$\exists\, A \in \mathbb{R}_+^\star \quad \forall t \geqslant A \quad \big(p(t) > 0\big) \wedge \big(p'(t) \geqslant 0\big)$$

Montrer que toute solution $\varphi : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ de (E) : $y'' + p(t)y = 0$ est bornée au voisinage de $+\infty$.

De ce que p est C^1, on déduit que φ est C^3.

On dispose de l'application $\psi = \varphi^2 + \dfrac{\varphi'^2}{p}$ de $[A,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$; on calcule $\psi' = -p'\varphi'^2/p^2$ et on constate : $\psi' \leqslant 0$; ψ est ainsi décroissante, et on a, en particulier :

$$\forall t \geqslant A \quad \psi(t) \leqslant \psi(A),$$

ce qui entraîne :

$$\forall t \geqslant A \quad \varphi^2(t) \leqslant \psi(A).$$ □

4.2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

Dans les deux premiers exercices de ce sous chapitre, on étudie des méthodes de résolution approchée d'une équation différentielle.

4.2.1 Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On lui associe l'équation différentielle : $y' = f(x,y)$ (1)

Soit $P = [a,b] \times [y_0-r, y_0+r] \subset D$. On suppose qu'il existe $(k,M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

(i) $\forall (x,y) \in P \quad |f(x,y)| \leqslant M$;

(ii) $\forall (x,y) \in P \quad \forall (x',y') \in P \quad |f(x',y') - f(x,y)| \leqslant k(|x-x'| + |y-y'|)$;

(iii) $b-a \leqslant r/M$.

On considère la solution φ de (1) sur $[a,b]$ telle que $\varphi(a) = y_0$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $h = (b-a)/n$, et, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $x_i = a+ih$.

1°) Montrer qu'il existe une unique application $\varphi_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $\varphi_n(a) = y_0$ et que la restriction de φ_n à chaque $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, soit affine, de dérivée $f(x_i, \varphi_n(x_i))$.

2°) Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[a,b]$; on explicitera un majorant de $|\varphi_n(x) - \varphi(x)|$ pour $x \in [a,b]$.

En déduire une méthode de résolution approchée de l'équation (1) (dite "méthode d'Euler" ou méthode de la tangente).

3°) Soit φ la solution de $(x^2-4)y' + xy = 2$ sur $]-2,2[$, qui vérifie $\varphi(0) = 0$. Calculer une valeur approchée de $\varphi(1)$ par la méthode précédente. Vérifier en calculant exactement $\varphi(1)$.

• Notons que, d'après le cours, P est un "cylindre de sécurité" de l'équation (1) : f est k-lipschtzienne sur P, donc k-lipschitzienne en y. L'existence et l'unicité de φ en résultent. Notons pour la suite, que pour tout $x \in [a,b]$, $|\varphi'(x)| \leqslant M$; φ est donc M-lipschitzienne sur $[a,b]$.

• y_0 étant donné, considérons la relation de récurrence : $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, et soit $(\mathcal{A}_i)$ l'assertion : « y_i est défini, et $y_i \in [y_0 - i\frac{r}{n}, y_0 + i\frac{r}{n}]$ » . $(\mathcal{A}_0)$ est vraie. Supposons $(\mathcal{A}_i)$ vraie, avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Il en résulte $(x_i, y_i) \in P$, donc y_{i+1} est défini. D'autre part

$|y_{i+1}-y_0| \leqslant |y_{i+1}-y_i| + |y_i-y_0|$. Or $|y_{i+1}-y_i| = |hf(x_i,y_i)| \leqslant M\,\frac{b-a}{n} \leqslant \frac{r}{n}$; d'autre part $|y_i-y_0| \leqslant i\,\frac{r}{n}$, et donc $|y_{i+1}-y_0| \leqslant (i+1)\frac{r}{n}$; $(\mathcal{A}_{i+1})$ est vraie. Ainsi $y_0, \dots, y_n$ sont définis.

1°) De toute évidence, φ_n est l'unique application continue affine par morceaux vérifiant $\varphi_n(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. □

2°) Notons $\varepsilon_i = \sup\limits_{x\in[x_0,x_i]} |\varphi(x)-\varphi_n(x)|$, $(\varepsilon_0 = 0)$.

Pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$, on a : $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$ et $\varphi_n'(x) = f(x_i,y_i)$.

D'où : $|\varphi'(x)-\varphi_n'(x)| \leqslant k(|x-x_i| + |\varphi(x)-y_i|)$.

Or : $|\varphi(x)-y_i| \leqslant |\varphi(x)-\varphi(x_i)| + |\varphi(x_i)-\varphi_n(x_i)| \leqslant Mh + \varepsilon_i$,

et donc : $|\varphi'(x)-\varphi_n'(x)| \leqslant kh + k(Mh+\varepsilon_i)$.

Par application des accroissements finis, il en résulte :

$$|\varphi(x)-\varphi_n(x)| \leqslant k(M+1)h^2 + kh\varepsilon_i + |\varphi(x_i)-\varphi_n(x_i)|.$$

D'où :

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad |\varphi(x)-\varphi_n(x)| \leqslant k(M+1)h^2 + (1+kh)\varepsilon_i,$$

relation qui est encore vraie si $x \in [x_0, x_i]$. On en déduit :

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant k(M+1)h^2 + (1+kh)\varepsilon_i.$$

Une simple récurrence donne, compte tenu de $\varepsilon_0 = 0$:

$$\varepsilon_i \leqslant k(M+1)h^2[1 + (1+kh) + \dots + (1+kh)^{i-1}]$$

D'où finalement :

$$\varepsilon_n \leqslant (M+1)h[(1+kh)^n - 1].$$

En utilisant $1+t \leqslant e^t$, $t\in\mathbb{R}$, et $nh = b-a$, on obtient :

$$\forall x \in [a,b] \qquad |\varphi(x)-\varphi_n(x)| \leqslant (M+1)\left(e^{k(b-a)}-1\right)\frac{b-a}{n} \tag{2}$$

La convergence uniforme de φ_n vers φ sur $[a,b]$ en résulte.

• φ_n est une solution approchée de (1). Concrètement les couples (x_i,y_i) $(0 \leqslant i \leqslant n)$ donnent φ_n sous forme tabulée, l'incertitude étant majorée (uniformément) par (2).

Remarque. Le majorant (en $1/n$) fourni par (2) n'est pas très petit. On constate effectivement que le procédé indiqué ici converge lentement. Il existe de bien meilleures méthodes (cf. exercice suivant).

3°) Il s'agit ici d'une équation linéaire, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution φ sur $]-2,2[$ vérifiant $\varphi(0) = 0$. Nous nous intéresserons ici à la restriction de φ à $[0,1]$. P est de la forme $[0,1] \times [-r,r]$.

Pour $(x,y)\in P$ on a : $\left|\frac{2-xy}{x^2-4}\right| \leqslant \frac{2+r}{3}$. Nous devons donc choisir r et M de telle sorte que : $\frac{2+r}{3} \leqslant M \leqslant r$. C'est possible avec : $M = r = 1$.

L'existence de k résulte de la continuité de f'_x et f'_y sur P, et l'on peut choisir $k \geqslant \max\{\sup_P |f'_x(x,y)|, \sup_P |f'_y(x,y)|\}$. Le lecteur vérifiera qu'ici $k = 1$ convient.

• $n\in\mathbb{N}^*$ étant choisi, on adopte $h = 1/n$ et on définit la suite $(y_0,\dots,y_n)$ par $y_{i+1} = y_i + hf(x_i,y_i)$. On prend y_n comme valeur approchée de $\varphi(1)$, avec ici, d'après (2) :

$$|y_n - \varphi(1)| < 2(e-1)\,\frac{1}{n} < \frac{3,44}{n}\ .$$

Un calcul pour $n = 100$ donne : $y_{100} \simeq -\ 0,602\ 644$.

Le lecteur vérifiera que les solutions sur $]-2,2[$ de l'équation proposée sont les :

$$x \longmapsto \left(\lambda - 2\,\mathrm{Arc\,sin}\frac{x}{2}\right) / \sqrt{4-x^2}$$

et que la valeur exacte de $\varphi(1)$ est $-2\frac{\mathrm{Arc\,sin}(1/2)}{\sqrt{3}}$, soit :

$$\varphi(1) = -\pi/3\sqrt{3} = -0,604\ 600 \pm 5.10^{-7}.$$

Remarque. Nous n'avons pas cherché à évaluer l'erreur sur le calcul (ou "erreur de chute") dans l'itération ci-dessus. L'importance de l'erreur sur la méthode ne la rend pas nécessaire. Par contre, pour de plus grandes valeurs de n la question peut se poser. Expérimentalement on peut constater : $y_{1000} \simeq -\ 0,604\ 403$, $y_{10000} \simeq -0,604\ 580$; il ne semble pas y avoir propagation excessive des erreurs sur chaque y_i. Il n'en est pas toujours ainsi. C'est le problème de la stabilité, que nous n'aborderons pas ici.

4.2.2 1°) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2, $x_0\in I$ et $\theta\in]0,1]$. Déterminer $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} - \left(\alpha\varphi'(x_0) + \beta\varphi'(x_0+\theta h)\right)$$

soit un infiniment petit d'ordre maximal lorsque h tend vers 0.

2°) En déduire une amélioration possible de la méthode utilisée dans l'exercice précédent (on ne demande pas de majorer l'erreur). Expérimenter les cas $\theta = 1/2$ et $\theta = 1$ sur l'exemple.

1°) Au voisinage de 0 : $\left(\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\right)/h = \varphi'(x_0) + (h/2)\varphi''(x_0) + o(h)$,
et : $\alpha\varphi'(x_0) + \beta\varphi'(x_0+\theta h) = (\alpha+\beta)\varphi'(x_0) + \beta\theta\, h\,\varphi''(x_0) + o(h)$.
D'où la solution : $(\alpha,\beta) = \left(1 - 1/(2\theta), 1/(2\theta)\right)$.

2°) Reprenons l'équation différentielle $y' = f(x,y)$, et la solution φ telle que $\varphi(x_0) = y_0$; f étant supposée de classe C^1, φ est de classe C^2 au voisinage de x_0.

L'idée de la méthode précédente était de remplacer sur $[x_0, x_0+h]$ la courbe représentative de φ par sa tangente au point d'abscisse x_0, puis d'itérer le procédé en $x_1 = x_0+h$, etc ... . Autrement dit on approchait $\big(\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\big)/h$ par $\varphi'(x_0)$.

Le 1°) nous conduit à utiliser maintenant l'approximation :

$$\big(\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\big)/h \simeq \alpha\varphi'(x_0) + \beta\varphi'(x_0+\theta h)$$

avec $\varphi'(x_0) = f(x_0,y_0)$. Mais $\varphi'(x_0+\theta h) = f\big(x_0+\theta h, \varphi(x_0+\theta h)\big)$ n'est pas connu. On peut songer à l'approcher par $f\big(x_0+\theta h, y_0+\theta h\, f(x_0,y_0)\big)$ (c'est-à-dire à évaluer $\varphi(x_0+\theta h)$ par la méthode de la tangente). Cette approximation convient car, comme le lecteur le vérifiera :

$$\begin{aligned} f\big(x_0+\theta h, y_0+\theta h\, f(x_0,y_0)\big) &= f(x_0,y_0) + \theta h[f'_x(x_0,y_0) + f(x_0,y_0)f'_y(x_0,y_0)] + o(h) \\ &= \varphi'(x_0) + \theta h\varphi''(x_0) + o(h) \end{aligned}$$

et ainsi le développement effectué au 1°) reste inchangé.

Application. On obtient les algorithmes suivants :

. Cas $\theta = 1/2$ (Méthode dite de la tangente améliorée) : $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Ici :

$$y_{i+1} = y_i + hf\big(x_i + h/2,\ y_i+(h/2)\,f(x_i,y_i)\big).$$

. Cas $\theta = 1$ (Méthode dite d'Euler-Cauchy) : $\alpha = \beta = 1/2$. Ici :

$$y_{i+1} = y_i + (h/2)[f(x_i,y_i) + f\big(x_{i+1}, y_i + hf(x_i,y_i)\big)] .$$

Exemple. Avec l'exemple de l'exercice précédent on trouve, toujours pour $n = 100$, et alors que $\varphi(1) = -0{,}604\ 600 \pm 5.10^{-7}$:

$(\theta = 1/2)$ $\quad \varphi(1) \simeq -0{,}604\ 594$;

$(\theta = 1)$ $\quad \varphi(1) \simeq -0{,}604\ 607$.

C'est nettement mieux que $\varphi(1) \simeq -0{,}602\ 644$ trouvé au 4.2.1.

Remarque. Si on applique la méthode d'Euler-Cauchy à l'équation $y' = f(x)$, on retrouve la méthode des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale.

4.2.3 Sans chercher à résoudre l'équation différentielle :

$$4yy' - 4y + t = 0 \qquad \text{(E)}$$

construire les graphes des solutions. On remarquera que $t \mapsto t/2$ est solution, et on étudiera d'abord les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Nous remarquons que si φ est une solution sur un intervalle I, alors $t \mapsto -\varphi(-t)$ est solution sur $-I$. D'autre part nous constatons qu'une solution ne peut s'annuler qu'en $t=0$.

Nous chercherons donc d'abord les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$ s'en déduiront par symétrie du graphe par rapport à l'origine ; enfin pour obtenir les autres solutions, nous chercherons à raccorder des solutions déjà obtenues, le raccord ne pouvant se faire qu'en $t=0$.

1°) <u>Etude pour</u> $(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. L'équation (E) s'écrit :

$$y' = 1 - t/(4y) \tag{1}$$

et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

Considérons alors une solution maximale $\varphi : I \to \mathbb{R}_+^*$, I étant un intervalle de bornes a et b, $\left((a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2,\ a<b\right)$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si $\varphi(t_0) = t_0/2$ pour $t_0 \in I$, alors φ est la solution $t \mapsto t/2$ (et $I = \mathbb{R}_+^*$).

Nous écarterons désormais ce cas ; il en résulte que $\varphi(t) - t/2$ garde sur I un signe constant (non nul).

Faisons quelques remarques préliminaires.

(P_1) φ <u>est une fonction concave</u>.

En effet, de : $\varphi'(t) = 1 - t/\left(4\varphi(t)\right)$ on déduit que φ est de classe C^2 (et même C^∞ par récurrence). On calcule :

$$4\varphi(t)\varphi''(t) + \left(2\varphi'(t) - 1\right)^2 = 0.$$

D'où : $\varphi''(t) \leq 0$ pour tout $t \in I$; φ' est ainsi décroissante. □

(P_2) <u>Si</u> a (resp. b) <u>est fini</u>, <u>et si</u> φ <u>admet en</u> a (resp. b) <u>une limite finie celle-ci est nécessairement</u> 0.

En effet, supposons par exemple $b < +\infty$, et $\ell = \lim\limits_{t \to b,\, t<b} \varphi(t)$, avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

On a, d'après (1) : $\lim\limits_{t \to b,\, t<\ell} \varphi'(t) = 1 - 1/(4\ell)$. Appliquons le théorème de Cauchy-Lipschitz au point (b,ℓ) ; il existe une solution définie sur un voisinage de b, et se raccordant avec φ en b, en contradiction avec le fait que φ est solution maximale. □

(P_3) <u>Si</u> φ <u>est croissante sur</u> I, <u>alors</u> $b = +\infty$, <u>et</u> $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi'(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\varphi(t)}{t} = \dfrac{1}{2}$.

En effet, soit $t_0 \in I$. Comme φ est croissante et concave, on a $\varphi'(t_0) \geq 0$ et :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) \leq \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi'(t_0) \tag{2}$$

Si b était fini, φ serait croissante et majorée et admettrait une limite, nécessairement dans $\mathbb{R}_+^*$, en contradiction avec (P_2). On a donc $b = +\infty$.

Puisque φ' est décroissante et positive, il existe $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty}\varphi'(t)$, $\ell \in \mathbf{R}_+$.
D'après un exercice classique, on en déduit : $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)/t = \ell$, et, compte tenu de (1) : $\ell \neq 0$ et $\ell = 1 - 1/(4\ell)$; d'où $\ell = 1/2$. □

(P_4) Pour tout $t \in I$, $\varphi'(t)$ et $\varphi(t) - t/4$ sont de même signe.

* Ces préliminaires acquis, distinguons deux cas suivant la position de φ par rapport à $t \longmapsto t/2$.

Premier cas : $\varphi(t) > t/2$ pour tout $t \in I$.

— En utilisant (1) et $\varphi(t) > 0$, nous constatons $\varphi'(t) > 1/2$ pour tout $t \in I$ (ce qui entraîne $\varphi''(t) < 0$ strictement) ; φ est strictement croissante.

— Soit $t_0 \in I$. Par concavité :

$$\forall t \in I \quad 0 < \varphi(t) \leqslant \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi'(t_0),\ \left(\varphi'(t_0) > 0\right).$$

On en déduit $a > -\infty$ (sans quoi on aboutirait à une contradiction en faisant tendre t vers $-\infty$). Comme φ est croissante et minorée, il existe $\lim\limits_{t\to a,\, t>a}\varphi(t)$, et cette limite est 0 d'après (P_2).

De $\varphi(t) > t/2$ résulte alors $a \leqslant 0$. Supposons $a = 0$; comme φ' est décroissante, il existe $\ell = \lim\limits_{t\to 0,\, t>0}\varphi'(t)$, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}_+$; d'où, par application du théorème des accroissements finis : $\ell = \lim\limits_{t\to 0,\, t>0}\dfrac{\varphi(t)}{t}$, et, comme ci-dessus, $\ell = 1/2$, ce qui exige $\varphi'(t) \leqslant 1/2$ pour tout $t \in I$, en contradiction avec $\varphi'(t) > 1/2$. On a donc $a < 0$.

— Comme φ est croissante, on a, d'après (P_3) :

$$b = +\infty \ ; \ \lim_{t\to+\infty}\varphi'(t) = 1/2 \ ; \ \lim_{t\to+\infty}\varphi(t)/t = 1/2.$$

Etudions la branche infinie, ce qui revient à étudier $\delta(t) = \varphi(t) - t/2$. Nous aurons : $\delta(t) > 0$, $\delta'(t) > 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta'(t) = 0$, ce qui entraîne l'existence de $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta(t) = \ell$, avec $\ell \in \overline{\mathbf{R}}^*_+$.

Supposons $\ell \in \mathbf{R}^*_+$. Comme on vérifie aisément :

$$\forall t \in I \quad 2\delta(t)\delta'(t) + t\delta'(t) - \delta(t) = 0,$$

il vient : $\lim\limits_{t\to+\infty} t\delta'(t) = \ell$. En posant $\psi(t) = t\delta(t)$, on constate que $\psi'(t) = t\delta'(t) + \delta(t)$ vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi'(t) = 2\ell$, et que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\psi(t)}{t} = 2\ell$, en contradiction avec $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta(t) = \ell$, et $\ell \neq 0$. On a donc $\ell = +\infty$.

En conclusion : toute solution maximale φ de (E) à valeurs dans $\mathbf{R}^*_+$, telle que $\varphi(t) > t/2$ pour $t \in I$, est définie sur un intervalle $I =]a, +\infty[$, avec $a < 0$; elle croît de 0 à $+\infty$; elle est concave ; sa courbe représentative présente une branche parabolique de coefficient directeur 1/2.

<u>Deuxième cas</u> : $0<\varphi(t)<t/2$ <u>pour tout</u> $t\in I$.

— On a $a\geqslant 0$ et $\varphi'(t)<1/2$ pour tout $t\in I$ (ce qui entraîne $\varphi''(t)<0$). Comme φ' est décroissante et majorée, il existe $\lim\limits_{t\to a,\, t>a}\varphi'(t)$; en utilisant $\varphi(t)=t/4\bigl(1-\varphi'(t)\bigr)$, on en déduit qu'il existe $\lim\limits_{t\to a,\, t>a}\varphi(t)$; cette dernière limite est 0 d'après (P_2).

Si l'on avait $a>0$, il en résulterait, d'après (1) : $\lim\limits_{t\to a,\, t>a}\varphi'(t)=-\infty$, en contradiction avec la décroissance de φ'. On a donc $a=0$.

De $a=0$ et $\lim\limits_{t\to a,\, t>a}\varphi(t)=0$, on déduit, en reprenant un raisonnement déjà rencontré : $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0}\varphi'(t)=\lim\limits_{t\to 0,\, t>0}\varphi(t)/t=1/2$.

— La fonction φ' ne peut être positive, sans quoi, d'après (P_3), on aurait : $b=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi'(t)=1/2$, en contradiction avec : φ' est décroissante et $\varphi'(t)<1/2$ pour tout $t\in I$.

Il existe donc $t_0\in I$ tel que $\varphi'(t_0)<0$. En utilisant l'inégalité de concavité (2), on constate $b<+\infty$; φ' étant décroissante, on à $\varphi'(t)<0$ pour tout $t\in[t_0,b[$; φ est décroissante et minorée sur $[t_0,b[$; il existe donc $\lim\limits_{t\to b,\, t<b}\varphi(t)$, et cette limite est 0 d'après (P_2) ; en utilisant (1), on en déduit : $\lim\limits_{t\to b,\, t<b}\varphi'(t)=-\infty$.

Strictement décroissante sur I (à cause de $\varphi''(t)<0$), φ' a un zéro unique t_1.

En conclusion : <u>toute solution maximale</u> φ <u>de</u> (E) <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{R}_+^*$, <u>telle que</u> $\varphi(t)<t/2$ <u>pour tout</u> $t\in I$ <u>est définie sur un intervalle</u> $I=]0,b[$, <u>avec</u> $b>0$; <u>elle est concave et on a le tableau de variation</u> :

t	0		t_1		b
$\varphi'(t)$	$1/2$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$\varphi(t)$	0	$\nearrow$	$t_1/4$	$\searrow$	0

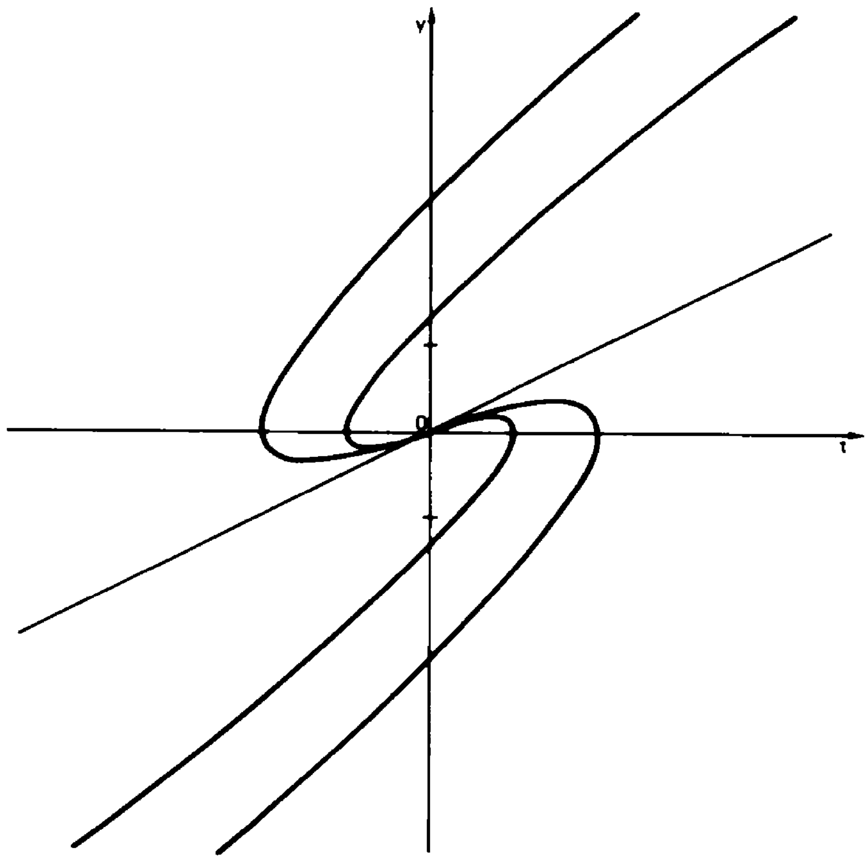
• Nous allons montrer qu'étant donné $a\in\mathbb{R}_-^*$, il existe une unique solution de (E) définie sur $]a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, admettant 0 pour limite en a.

— Il ne peut exister deux telles solutions φ_1 et φ_2 sans quoi (Cauchy-Lipschitz) on aurait $\varphi_1(t)\neq\varphi_2(t)$ pour tout $t\in]a,+\infty[$; d'où par continuité (quitte à transposer φ_1 et φ_2) : $\operatorname{sgn}(\varphi_2-\varphi_1)=1$; comme :

$$\varphi_2'(t)-\varphi_1'(t)=\frac{t}{4\varphi_1(t)\varphi_2(t)}\bigl(\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\bigr)$$

on aurait $\varphi_2'(t)-\varphi_1'(t)<0$ pour tout $t\in]a,0[$, en contradiction avec

$$\varphi_2(t)-\varphi_1(t)>0 \text{ et } \lim_{t\to a,\, t>a}\bigl(\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\bigr)=0.$$



— Supposons qu'il existe une telle solution φ ; celle-ci, qui est C^2 et strictement croissante, induit un difféomorphisme de $]a,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$; le difféomorphisme réciproque φ^{-1} est solution C^2 sur $]0,+\infty[$ de :

$$\frac{dt}{dy}=\frac{4y}{4y-t} \qquad (2)$$

et vérifie : $\lim\limits_{y\to 0,\, y>0} \varphi^{-1}(y)=a.$

Inversement, il existe un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ contenant $(a,0)$ sur lequel $(t,y)\mapsto \frac{4y}{4y-t}$ est C^1. Il existe donc un $\eta>0$ et une unique application : $\psi :]-\eta\ \eta[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit solution de (2) sur $]-\eta,\eta[$ et vérifie $\psi(0)=a$. On constate que ψ est C^2 ; on a $\psi'(0)=0$, et, pour $y\in]-\eta,\eta[$:

$$\big(4y-\psi(y)\big)\psi''(y)+\big(4-\psi'(y)\big)\psi'(y)=4.$$

En particulier : $\psi''(0)=-4/a>0$. Quitte à modifier η, on peut (par continuité) supposer $\psi''(t)>0$ pour tout $t\in]-\eta,\eta[$, ce qui entraîne $\psi'(t)>0$ pour tout $t\in]0,\eta[$; ψ induit donc un C^2-difféomorphisme de $]0,\eta[$ sur un intervalle $]a,a'[$, $a'>a$; le difféomorphisme réciproque noté θ vérifie (1) sur $]a,a'[$; par Cauchy-Lipschitz $\big(t_0,\theta(t_0)\big)$, $t_0\in]a,a[$, définit une solution maximale Φ de (E) à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, dont θ est une restriction ; en utilisant l'étude précédente, on constate que Φ est définie sur $]a,+\infty[$. $\square$

• On montre de la même façon qu'étant donné $b\in\mathbb{R}_+^*$, il existe une unique solution de (E) définie sur $]0,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ admettant 0 pour limite en b.

2°) Revenons à l'équation (E). En utilisant la symétrie par rapport à 0, nous déduisons du 1°) les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$.

Les autres solutions s'obtiennent en prolongeant et en raccordant en $t=0$:

– une solution sur $]-b',0[$, $b'>0$, à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$, et une solution sur $]0,b[$, $b>0$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$;

– l'une de ces solutions et la solution $t\mapsto t/2$.

Courbes isoclines. Pour tout $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ donné, la solution du problème de Cauchy admet une dérivée m telle que $4y_0m-4y_0+t_0=0$. La "courbe isocline", ensemble des points de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ par lesquels passe un graphe de solution admettant une tangente de coefficient directeur m donné est donc $\Delta_m\setminus\{(0,0)\}$, où Δ_m est la droite d'équation $4(m-1)y+t=0$; en particulier Δ_0 et Δ_1 sont les droites d'équations $y=t/4$ et $t=0$.

• La figure représente quelques graphes de solutions de (E).

Remarque. En fait on sait résoudre (E) au titre d'équation homogène. Les graphes des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) autres que $t\mapsto t/2$ sont inclus dans les supports des arcs paramétrés $(\mathbb{R},f_\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$, avec :

$$f_\alpha : u \to \left(t=\alpha u e^u,\ y=\alpha(u+1)e^u/2\right).$$

$\boxed{4.2.4}$ Etant donné $\omega\in\mathbb{R}_+^*$, on étudie l'équation différentielle :

$$y''+\omega^2\sin y=0 \qquad \text{(E)}$$

1°) Vérifier que les solutions maximales de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution. On suppose qu'il existe $(t_0,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ tel que $\varphi(t_0)=k\pi$. Montrer que le point $(t_0,k\pi)$ est centre de symétrie du graphe de φ.

3°) Ici φ désigne la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ déterminée par : $\varphi(0)=y_0$ et $\varphi'(0)=y_0'$, où $(y_0,y_0')\in\mathbb{R}^2$ est donné. Vérifier :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \varphi'^2(t)-2\omega^2\cos\varphi(t)=y_0'^2-2\omega^2\cos y_0 \qquad (1)$$

Donner l'allure du graphe de φ. On fera intervenir $\Delta=y_0'^2-2\omega^2\cos y_0-2\omega^2$.

(E) est l'équation différentielle du pendule simple.

1°) L'application $y\mapsto -\omega^2\sin y$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est ω^2-lipschitzienne ; en raisonnant comme pour les équations linéaires (cf. IV. 5.1.1, 2° de notre cours) on constate que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier.

2°) On constate que $\psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $\psi(t) = 2k\pi - \varphi(2t_o - t)$ est solution de (E), et que $\psi(t_o) = \varphi(t_o)$, $\psi'(t_o) = \varphi'(t_o)$; d'où $\psi = \varphi$. □

3°) De $\varphi''(t) + \omega^2 \sin\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, on déduit, en multipliant par $2\varphi'(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi'^2(t) - 2\omega^2 \cos\varphi(t)\right) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

$\varphi'^2 - 2\omega^2 \cos\varphi$ est donc une constante, dont la valeur s'obtient en faisant $t = 0$. □

<u>Premier cas</u> : $\Delta > 0$. Posons $\Delta = 2\omega^2\alpha^2$, $\alpha > 0$. Il vient :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \varphi'^2(t) = 2\omega^2 \cos\varphi(t) + 2\omega^2(1+\alpha^2) \geqslant 2\omega^2\alpha^2 > 0.$$

φ' ne prend pas la valeur 0, et garde donc un signe fixe. En remarquant que $-\varphi$ est la solution de (E) associée à $(-y_o, -y'_o)$, nous pouvons supposer $y'_o > 0$; ainsi :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \varphi'(t) \geqslant \omega\alpha\sqrt{2}.$$

φ croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$. Comme φ prend toute valeur $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, le graphe de φ admet une infinité de centres de symétrie (cf. 2°))

Soit $(t_o, t_1) \in \mathbf{R}^2$ déterminé par : $\varphi(t_o) = 0$, $\varphi(t_1) = 2\pi$.

Compte tenu de $\varphi'(t) > 0$, (1) fournit : $\varphi'(t_o) = \varphi'(t_1)$. On constate que : $\psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $\psi(t) = -2\pi + \varphi(t + t_1 - t_o)$ est solution de (E) et que $\psi(t_o) = 0 = \varphi(t_o)$, $\psi'(t_o) = \varphi'(t_1) = \varphi'(t_o)$; d'où $\psi = \varphi$, et ainsi :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi, \text{ où } T = t_1 - t_o.$$

D'après le 2°), le point de $[t_o, t_1]$ en lequel φ prend la valeur π est $(t_o + t_1)/2$.

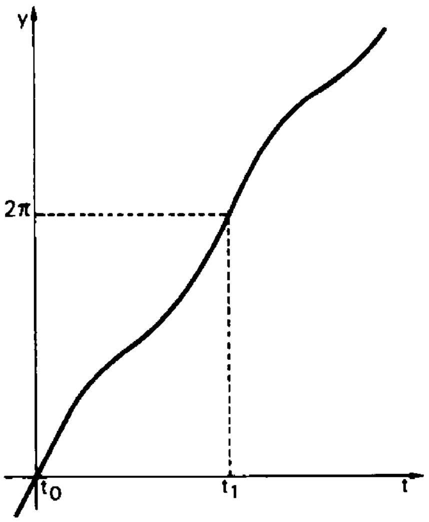


fig. 1

La restriction de φ à $[t_o, t_o + T/2]$ (resp. à $[t_o + T/2, t_1]$ est concave (resp. convexe) ainsi qu'on le constate grâce à $\operatorname{sgn}\varphi''(t) = -\operatorname{sgn}\left(\sin\varphi(t)\right)$. D'où le graphe de la restriction de φ à $[t_o, t_1]$ celui de φ s'en déduit par les translations $T\vec{i} + 2\pi\vec{j}$ (cf. figure 1).

Du point de vue cinématique, le pendule tourne toujours dans le même sens et son mouvement admet la période T.

Remarque. φ est un C^∞-difféomorphisme de **R** sur **R**, dont la détermination se ramène à celle de φ^{-1}, lui-même défini par :

$$y \longmapsto \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\omega^2 \cos u + y_0'^2 - 2\omega^2 \cos y_0}}\, du .$$

En particulier :

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega^2 \cos u + y_0'^2 - 2\omega^2 \cos y_0}}\, du .$$

Deuxième cas : $\Delta < 0$. Nous allons exhiber une famille de solutions de (E) sur **R**, et nous vérifierons ensuite que φ figure parmi elles.

$\Delta < 0$ s'écrit : $\cos y_0 - y_0'^2/(2\omega^2) > -1$. Comme $\cos y_0 - y_0'^2/(2\omega^2) \leqslant 1$, il existe un unique $\theta \in [0,\pi[$ tel que : $\cos\theta = \cos y_0 - y_0'^2/(2\omega^2)$, et (1) s'écrit:

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \varphi'^2(t) = 2\omega^2\left(\cos\varphi(t) - \cos\theta\right) \tag{2}$$

• Si $\theta = 0$, c'est-à-dire si : $(1 - \cos y_0) + y_0'^2/(2\omega^2) = 0$, ou encore si $y_0 = 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) et $y_0' = 0$, alors φ est l'application constante $t \longmapsto y_0$ (le pendule est au repos).

• Supposons maintenant $\theta \in]0,\pi[$. Nous inspirant de la remarque précédente et de (2), considérons l'application $\psi :]-\theta,\theta[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$y \longmapsto \int_0^y \frac{1}{\omega\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}\, du.$$

Nous constatons que ψ est impaire, C^∞, à dérivée strictement positive ; ψ induit donc un C^∞-difféomorphisme croissant de $]-\theta,\theta[$ sur $]-T,T[$, où l'on a posé :

$$T = \int_0^{\theta} \frac{1}{\omega\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}\, du \quad \text{(intégrale impropre convergente).}$$

Notons $\Phi :]-T,T[\longrightarrow]-\theta,\theta[$ le difféomorphisme réciproque, qui est C^∞. On a :

$$\forall t \in]-T,T[\quad \Phi'(t) = \omega\sqrt{2\left(\cos\Phi(t) - \cos\theta\right)} \tag{3}$$

D'où : $\quad \forall t \in]-T,T[\quad \Phi'^2(t) = 2\omega^2\left(\cos\Phi(t) - \cos\theta\right)$

et donc : $\quad 2\Phi'(t)\Phi''(t) = -2\omega^2\Phi'(t)\sin\Phi(t)$.

Compte tenu de $\Phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in]-T,T[$, Φ est solution de (E) sur $]-T,T[$.

D'autre part, par construction : $\lim\limits_{t\to T,\, t<T} \Phi(t) = \theta$; d'après (3) et (E) :

$$\lim_{t\to T,\, t<T} \Phi'(t) = 0 \ ; \quad \lim_{t\to T,\, t<T} \Phi''(t) = -\omega^2 \sin\theta .$$

On en déduit qu'en posant $\Phi(T) = \theta$, et, par imparité, $\Phi(-T) = -\theta$, on prolonge Φ en une application C^2 sur $[-T,T]$, et, on constate que celle-ci est solution de (E) sur $[-T,T]$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on peut prolonger Φ d'abord à $[-T,3T]$ en posant $\Phi(t) = -\Phi(t-2T)$ pour $t\in\,]T,3T]$, puis, par périodicité, à $\mathbb{R}$ tout entier, l'application ainsi obtenue, encore notée Φ, admettant la période

$$4T = 4\int_0^\theta \frac{1}{\omega\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}\,du .$$

Son graphe (cf. figure 2) se construit aisément (la restriction à $[0,T]$ est concave d'après $\Phi(t)\in[0,\pi]$ pour $t\in[0,T]$).

— Remarquons maintenant que, pour tous $t_0\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{Z}$:

$$\Phi_{t_0,k} : t \longmapsto \Phi(t_0+t) + 2k\pi$$

est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

— Nous allons enfin montrer que l'on peut choisir le couple (t_0,k) de façon que : $\Phi_{t_0,k}(0) = y_0$ et $\Phi'_{t_0,k}(0) = y'_0$, ce qui permettra d'affirmer que l'application $\Phi_{t_0,k}$ correspondante n'est autre que φ.

Pour fixer les idées, supposons $y'_0 \geqslant 0$. De $\cos\theta = \cos y_0 - y_0'^2/(2\omega^2)$, et donc $\cos\theta \leqslant \cos y_0$, on déduit l'existence de $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y_0 - 2k\pi \in [-\theta,\theta]$; d'où celle de $t_0\in[-T,T]$ telle que $\Phi(t_0) = y_0 - 2k\pi$. Pour le couple (t_0,k) ainsi déterminé : $\Phi_{t_0,k}(0) = \Phi(t_0) + 2k\pi = y_0$; $\Phi'_{t_0,k}(0) = \Phi'(t_0) = \omega\sqrt{2(\cos y_0 - \cos\theta)} = y'_0$ $\square$

(Avec $y'_0 \leqslant 0$, on aurait effectué la construction ci-dessus avec $(-y_0,-y'_0)$, et on aurait eu $\varphi = -\Phi_{t_0,k}$).

Du point de vue cinématique, le pendule oscille et son mouvement a pour période $4T$.

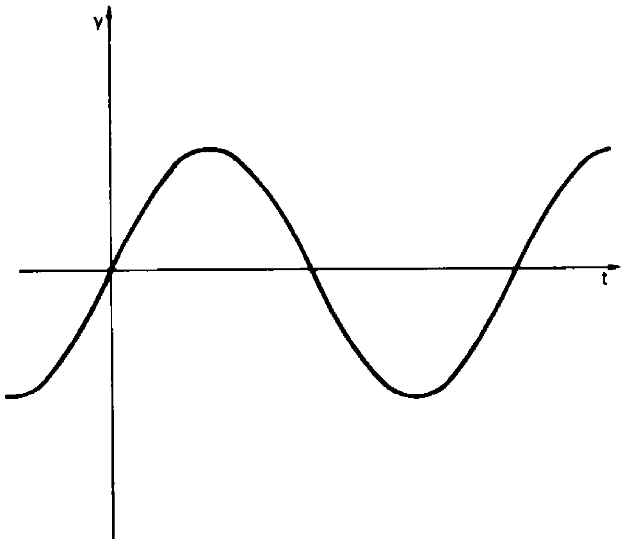


fig. 2

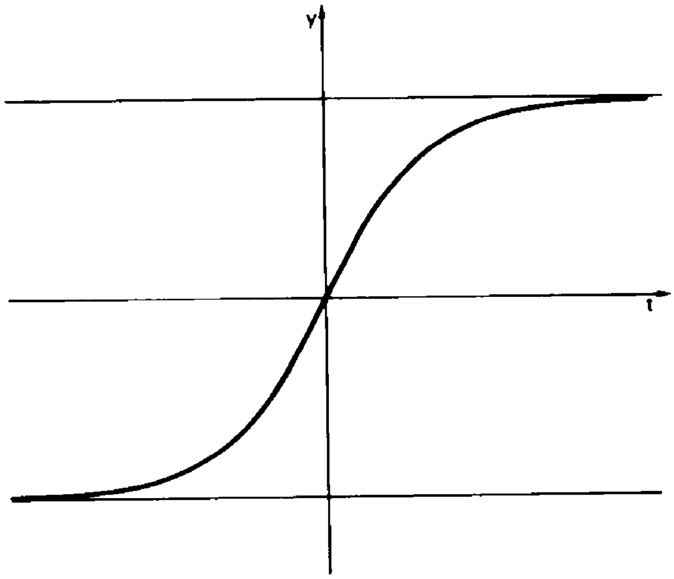


fig. 3

<u>Troisième cas</u> : $\Delta = 0$. Ici (1) s'écrit :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \varphi'^2(t) = 4\omega^2 \cos^2\big(\varphi(t)/2\big),$$

Considérons l'application ψ : $]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie par : $y \longmapsto \displaystyle\int_0^y \frac{1}{2\omega \cos u/2}\,du$.

Nous constatons que ψ est un C^∞-difféomorphisme croissant de $]-\pi,\pi[$ sur $\mathbf{R}$. Soit $\Phi = \psi^{-1}$. Nous avons :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \Phi'(t) = 2\omega \cos\big(\Phi(t)/2\big)$$

et nous en déduisons (comme ci-dessus) que Φ est solution de (E) sur $\mathbf{R}$.

— Pour tous $t_0 \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{Z}$, $\Phi_{t_0,k} : t \longmapsto \Phi(t_0+t) + 2k\pi$ est solution de (E) sur $\mathbf{R}$.

— Supposons encore $y_0' \geqslant 0$. Soit $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y_0 - 2k\pi \in [-\pi,\pi]$. Comme $\Delta = 0$ s'écrit $y_0'^2 = 4\omega^2 \cos^2(y_0/2)$, on a : $y_0' = 2\omega \cos \dfrac{y_0 - 2k\pi}{2}$.

Si $y_0 \in \pi + 2\pi\mathbf{Z}$, alors $y_0' = 0$ et φ est l'application constante $t \longmapsto y_0$ (le mobile est au repos).

Sinon on a $y_0 - 2k\pi \in]-\pi,\pi[$. Soit $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\Phi(t_0) = y_0 - 2k\pi$. Pour le couple (t_0,k) ainsi déterminé :

$$\Phi_{t_0,k}(0) = \Phi(t_0) + 2k\pi = y_0 \quad ; \quad \Phi'_{t_0,k}(0) = \Phi'(t_0) = 2\omega \cos \frac{\Phi(t_0)}{2} = y_0'$$

et donc $\varphi = \Phi_{t_0,k}$. L'interprétation cinématique est immédiate.

<u>*Remarque*</u>. Dans ce dernier cas, on peut expliciter les solutions. On a :

$$\psi(y) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Log}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi+y}{4}\right) \; : \; \Phi(t) = 4 \operatorname{Arc\,tg}\left(\operatorname{th} \frac{\omega t}{2}\right)$$

Le graphe de Φ fait l'objet de la figure 3.

$\boxed{4.2.5}$ Soit e un réel tel que $0 < e < 1$.

1°) Montrer qu'il existe une unique application continue f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant $f(0) = 0$, et $\operatorname{tg} f(x) = \sqrt{1-e}\, \operatorname{tg} x$ pour tout $x \notin \pi\mathbf{Z} + \pi/2$.

2°) Montrer que cette application peut être définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \int_0^{f(x)} \frac{dt}{\sqrt{1 - e\cos^2 t}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - e\sin^2 t}}$$

1°) Le lecteur vérifiera qu'une solution est $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arc\,tg}(\sqrt{1-e}\,\operatorname{tg} x) \text{ si } x \in]-\pi/2,\pi/2[\;;\; f(\pi/2) = \pi/2 \;; \\ f(x+m\pi) = f(x) + m\pi \text{ si } x \in]-\pi/2,\pi/2] \text{ et } m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Soit f_1 une autre solution. L'application $\varphi = \pi^{-1}(f_1 - f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue ; du fait de $\operatorname{tg} f_1(x) = \operatorname{tg} f(x)$, elle prend une valeur entière en tout $x \notin \pi\mathbb{Z} + \pi/2$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'intervalle $I_k =]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$ est un connexe de $\mathbb{R}$; la restriction de φ à I_k étant continue, $\varphi(I_k)$ est un connexe de $\mathbb{Z}$ (d'après ce qui précède) ; la topologie de $\mathbb{Z}$ étant discrète, ce connexe est un point ; la restriction de φ à I_k est donc constante, à valeur entière ; par continuité, $\varphi(k\pi + \pi/2)$ est un entier. Ainsi $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

En reprenant le raisonnement précédent (en remplaçant I_k par $\mathbb{R}$), on constate que φ est constante sur $\mathbb{R}$, et donc nulle puisque $\varphi(0) = 0$. On a ainsi $f_1 = f$.

2°) Pour $x \notin \pi\mathbb{Z} + \pi/2$ on dispose (cf. expression de $f(x)$ du 1°)) de

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-e}}{1 - e\sin^2 x}$$

Mais $1 - e\sin^2 x = 1 - e\,\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1 - \dfrac{e\sin^2 f(x)}{1 - e\cos^2 f(x)}$

et : $\qquad (1 - e\sin^2 x)\big(1 - e\cos^2 f(x)\big) = 1 - e.$

On en déduit que, pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z} + \pi/2$, on dispose de :

$$f'(x) = \sqrt{1 - e\cos^2 f(x)} \,/\, \sqrt{1 - e\sin^2 x}.$$

On a : $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2,\, x \neq \pi/2} f'(x) = 1/\sqrt{1-e}$. D'où l'existence de $f'(\pi/2)$ et la continuité de f' en $\pi/2$. Finalement, f' est C^1.

— On constate que f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle à variables séparables :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e\sin^2 x}} - y'\,\frac{1}{\sqrt{1 - e\cos^2 y}} = 0 \qquad \text{(E)}$$

Associons à (E) la forme différentielle de degré 1, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \longmapsto \omega(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - e\sin^2 x}}\,dx - \frac{1}{\sqrt{1 - e\cos^2 y}}\,dy.$$

Il s'agit manifestement d'une forme différentielle exacte et l'on dispose de :

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \longmapsto A(x) - B(y)$$

avec :

$$A(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - e\sin^2 t}}\,dt, \text{ et } \quad B(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 - e\cos^2 t}}\,dt$$

qui est de classe C^∞ et vérifie $\omega = dF$.

Considérons l'application $\psi : x \longmapsto F\big(x, f(x)\big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par composition, elle est de classe C^1 et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= dF\big(x, f(x)\big)\cdot\big(1, f'(x)\big)\\ &= \omega\big(x, f(x)\big)\cdot\big(1, f'(x)\big) = 0\end{aligned}$$

ψ est donc constante ; on a : $\forall x\in\mathbf{R}\quad A(x)-B(f(x))=0$.

Comme l'application $B:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est de classe C^∞, à dérivée strictement positive, elle établit un C^∞-difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $B(\mathbf{R})$, qui est égal à $\mathbf{R}$ d'après $\lim\limits_{y\to+\infty} B(y)=+\infty$; B^{-1} désignant le C^∞-difféomorphisme réciproque, on a $f(x)=(B^{-1}\circ A)(x)$ pour tout $x\in\mathbf{R}$. □

$\boxed{4.2.6}$ Résoudre : $xy'-y=\dfrac{y^2}{y-x}\,e^{-y/x}$ (E)
et représenter graphiquement les solutions.

(E) est une équation différentielle homogène. A cause de $e^{-y/x}$, on doit l'étudier séparément sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, ce qui rend licite le changement de fonction inconnue $t=y/x$, lequel conduit à l'équation à variables séparables:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{t^2}{x(t-1)}\,e^{-t} \qquad \text{(S)}$$

Pour tout (x_0,t_0) tel que $x_0\neq 0$ et $t_0\neq 1$, (S) admet (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz) une unique solution maximale ψ telle que $\psi(x_0)=t_0$. Si $t_0=0$, cette solution est nulle, ce qui correspond au fait que les applications nulles de $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ dans R sont solutions maximales de (E). Si $t_0\neq 0$, ψ n'est pas nulle et, d'après Cauchy-Lipschitz, elle ne prend pas la valeur 0 ; elle ne prend évidemment pas la valeur 1, et donc ψ' ne s'annule pas et a un signe constant ; ψ est déterminée par son application réciproque donnée par :

$$\frac{dx}{x}=\frac{t-1}{t^2}\,e^t\,dt$$

et qu'elle s'écrit $\psi^{-1}=\lambda\varphi$, avec :

$$\varphi(t)=\exp(e^t/t)\ ;\ \lambda=x_0\exp(-e^{t_0}/t_0)\neq 0.$$

On a : $\dfrac{d\varphi}{dt}(t)=\varphi(t)\cdot\dfrac{t-1}{t^2}\,e^t$. D'où le tableau :

t	$-\infty$		0			1		$+\infty$
$\varphi(t)$	1	$\searrow$	0 ‖	$+\infty$	$\searrow$	e^e	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que φ induit trois C^∞-difféomorphismes $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$, de $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ respectivement sur $I_1=]0,1[$, $I_2=]e^e,+\infty[$ et $I_3=I_2$. On en déduit que les solutions maximales non nulles de E sont les :

$$\Phi_{i,\lambda}:\lambda I_i\to\mathbf{R}\quad x\mapsto x\,\varphi_i^{-1}(x/\lambda)\ ;\ i\in\{1,2,3\},\ \lambda\in\mathbf{R}^*.$$

Leurs représentations graphiques constituent les courbes Γ_λ, $\lambda\in\mathbf{R}^*$, définies paramétriquement par : $x=\lambda\varphi(t)$, $y=\lambda t\varphi(t)$, $t\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$.

Les Γ_λ se déduisent par les homothéties (O,λ) de Γ_1, que l'on construit en utilisant $x = \varphi(t)$, déjà étudiée, et $y = t\varphi(t)$, qui fournit :

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t)\cdot u(t), \quad u(t) = 1 + \frac{t-1}{t}e^t.$$

On a $u'(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2}e^t$, ce qui montre que u est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et qu'elle admet un unique zéro $\alpha \in]0,1[$. D'où le tableau :

t	$+\infty$		0			α		1			$+\infty$
x	1	↘	0	$+\infty$	↘	β	↘	δ	δ	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	$+\infty$	↘	γ	↗	δ	δ	↗	$+\infty$

On calcule les valeurs approchées : $\delta = e^e \simeq 15{,}154\ 262$; $\alpha \simeq 0{,}659\ 046$; $\beta \simeq 18{,}782\ 913$; $\gamma \simeq 12{,}378\ 805$.

Γ_1 admet une asymptote d'équation $x = 1$, et deux branches paraboliques dans les directions Ox et Oy. La seule difficulté du tracé (laissé au lecteur) est une question d'unité.

4.2.7 Trouver toutes les solutions C^2 de l'équation différentielle :

$$y''^2 + 2yy'' - y'^2 = 0 \tag{E}$$

et les représenter graphiquement.

Il est évident que toute fonction constante (en particulier la fonction nulle) est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

1°) a) <u>Recherche des solutions</u> C^3 <u>de</u> (E). Soient I un invervalle de $\mathbb{R}$, et ψ une solution C^3 de (E) sur I. En utilisant :

$$\frac{d}{dx}(y''^2+2yy''-y'^2) = 2y'''(y+y'')$$

on constate :

$$\forall x \in I \quad \psi'''(x)\left(\psi(x) + \psi''(x)\right) = 0.$$

Supposons – hypothèse (H) – qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\psi'''(x_0) \neq 0$. Puisque ψ''' est continue, il existe un intervalle J tel que $\{x_0\} \subset J \subset I$ sur lequel ψ''' ne prend pas la valeur 0 ; ψ est donc solution sur J de l'équation $y + y'' = 0$, et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in J \quad \psi(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

En écrivant que ψ vérifie $(y+y'')^2 = y^2+y'^2$ sur J, on obtient $\lambda^2+\mu^2 = 0$; en d'autres termes ψ est nulle sur J, ce qui est contradictoire avec $\psi'''(x_0)\neq 0$. L'hypothèse (H) est donc absurde, et ψ''' est nulle sur I.

Les solutions C^3 de (E) sont donc les solutions de $y'''=0$ qui vérifient (E), i.e. les $x \mapsto ax^2+bx+c$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $4a^2+4ac-b^2=0$.

On obtient les solutions maximales, définies sur $\mathbb{R}$:

$$g_\nu : x \mapsto \nu,\ \nu\in\mathbb{R}\ ;\ f_{\lambda,\mu} : x \mapsto \lambda\big((x-\mu)^2-1\big),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}.$$

Les représentation graphiques des g_ν dans un plan affine rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont les droites dirigées par $\vec{i}$; celles des $f_{\lambda,\mu}$ sont les paraboles de direction asymptotique $(O,\vec{j})$ qui coupent l'axe $(O,\vec{i})$ en deux points dont la différence des abscisses est 2.

b) Montrons que toute solution C^2 de (E) est nécessairement C^3. Soit φ une solution C^2 de (E) sur un intervalle I. Pour tout $x_0\in I$ tel que $\big(\varphi(x_0),\varphi'(x_0)\big)\neq(0,0)$, il existe un intervalle J tel que $\{x_0\}\subset J\subset I$ sur lequel la fonction $\dfrac{\varphi+\varphi''}{\sqrt{\varphi^2+\varphi'^2}}$ est définie et continue ; comme, d'après :

$$(y+y'')^2=y^2+y'^2, \tag{E}$$

cette fonction prend ses valeurs dans $\{-1,1\}$, elle est constante et on a :

$$\forall x\in J\quad \varphi''(x)=-\varphi(x)+\varepsilon\sqrt{\varphi^2(x)+\varphi'^2(x)},\ \varepsilon\in\{-1,1\}.$$

On en déduit que φ est C^3 sur J, et plus généralement sur tout sous-intervalle de I sur lequel $\varphi^2+\varphi'^2$ ne prend pas la valeur 0 ; sur un tel sous-intervalle, φ coïncide donc avec une g_ν, $\nu\neq 0$ ou une $f_{\lambda,\mu}$.

— Soit $\varphi : I\to\mathbb{R}$ une solution C^2 et non nulle de (E). Montrons par l'absurde que $A=\{t\in I \mid (\varphi^2+\varphi'^2)(t)=0\}$ est vide, ce qui entraînera que φ est C^3. Supposons qu'il existe $\alpha\in A$. Comme $A\neq I$, on dispose de $\beta\in I\setminus A$ avec, pour fixer les idées, $\beta<\alpha$. On note J le plus grand intervalle inclus dans $I\setminus A$ et contenant β ; majoré par α, J admet une borne supérieure γ, et $\gamma\in A$ (sans quoi on aurait $\gamma<\alpha$ et on pourrait prolonger J par continuité). Sur $J=[\beta,\gamma[$, φ est d'un type g_ν, $\nu\neq 0$, ou $f_{\lambda,\mu}$. En faisant tendre $t\in J$ vers γ, on décèle dans les deux cas une contradiction avec $(\varphi^2+\varphi'^2)(\gamma)=0$.

2°) Autre méthode. L'équation (E) est homogène en (y,y',y''). Les solutions C^2 de (E) qui ne prennent pas la valeur 0 sont les solutions C^2 de l'équation différentielle :

$$\left(\frac{y''}{y}\right)^2+2\,\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2=0 \tag{E_1}$$

que le changement de fonction inconnue $y'/y=z$ transforme en :

$$(z'+1+z^2)^2=1+z^2.$$

Le nouveau changement de fonction inconnue $z=\operatorname{sh}\varphi$ (i.e. $\varphi=\operatorname{Arg\,sh} z$) ramène à la recherche des solutions C^1 de :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} + \operatorname{ch}\varphi\right)^2 = 1 \qquad (E_2)$$

Pour chacune de ces solutions, $\frac{d\varphi}{dx} + \operatorname{ch}\varphi$ est une fonction continue, à valeurs dans $\{-1,1\}$. Les solutions C^1 de (E_2) sont donc les solutions (automatiquement C^1) de l'une et de l'autre des équations à variables séparables:

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\operatorname{ch}\varphi - 1 \ ; \qquad \frac{d\varphi}{dx} = -\operatorname{ch}\varphi + 1 \quad (2)$$

La fin du calcul est laissée au lecteur.

4.2.8 Trouver les solutions C^1 de l'équation différentielle :

$$y = xy'^2 + y'^3 \qquad (E)$$

On discutera le nombre des solutions du problème de Cauchy en (x_0,y_0).

(E) est une équation de Lagrange dont les solutions affines sur $\mathbb{R}$ sont $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x+1$.

Pour (x_0,y_0) donné, toute solution du problème de Cauchy en (x_0,y_0) a pour dérivée en x_0 une des racines de $m^3 + x_0m^2 - y_0 = 0$, équation incomplète du troisième degré dont la discussion (classique) fait intervenir (cf. fig. 1):

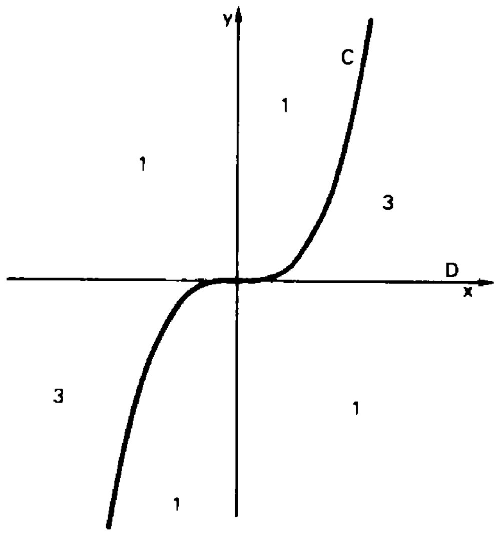


fig. 1

$$A = \{(x,y) \mid y(y-4x^3/27) > 0\} \ ; \ B = \{(x,y) \mid y(y-4x^3/27) < 0\}$$

$$C = \{(x,y) \mid y-4x^3/27 = 0\} \ ; \ D = \{(x,y) \mid y = 0\}.$$

L'équation $m^3 + x_0m^2 - y_0 = 0$ admet une racine simple si $(x_0,y_0) \in A$, trois racines simples si $(x_0,y_0) \in B$, une racine simple $(x_0/3)$ et une racine double $(-2x_0/3)$ si $(x_0,y_0) \in C \setminus \{(0,0)\}$, une racine simple $(-x_0)$ et une racine double (0) si $(x_0,y_0) \in D \setminus \{(0,0)\}$, enfin une racine triple (0) si $(x_0,y_0) = (0,0)$.

a) Soient $(x_o,y_o) \neq (0,0)$ et t_o une racine simple de $m^3 + x_o m^2 - y_o = 0$, ce qui implique $3t_o^2 + 2x_o t_o \neq 0$; i.e. $t_o \notin \{0,-2x_o/3\}$. Par application des théorèmes des fonctions implicites et de Cauchy-Lipschitz, on constate qu'il existe, au voisinage de x_o, une unique solution C^1, φ, de (E) qui vérifie $\varphi(x_o) = y_o$ et $\varphi'(x_o) = t_o$; en fait cette solution est C^2 et en dérivant (E), on obtient :

$$\varphi''(x_o) = \frac{1 - t_o}{3t_o + 2x_o}$$

Eliminons $t_o = 1$, auquel cas φ est une restriction de $x \mapsto x+1$.

De $\varphi'(x_o) \neq 0$ et $\varphi''(x_o) \neq 0$, on déduit que φ' induit un C^1-difféomorphisme d'un intervalle V, $x_o \in V$, (que l'on peut supposer assez petit pour que φ' n'y prenne ni la valeur 0 ni la valeur 1) sur un intervalle W, $t_o \in W$, et que la restriction de φ à V est fournie par :

$$(y = xt^2+t^3) \wedge (y' = t) \wedge (t \in W)$$

et par : $$(y = xt^2+t^3) \wedge \left(\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{t-1} = -\frac{3t}{t-1}\right) \wedge (t \in W)$$

ou encore par :

$$\varphi = g_{\lambda_o} \circ f_{\lambda_o}^{-1},\ x \in V, \text{ avec :}$$

avec :

$$f_\lambda(t) = -t - \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{(t-1)^2} \ ;\ g_\lambda(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{\lambda t^2}{(t-1)^2} \qquad (1)$$

et $\lambda_o = (x_o+t_o+1/2)(t_o-1)^2$, étant entendu que $f_{\lambda_o}^{-1}$ désigne l'application réciproque de la bijection de W sur V induite par f_λ.

On voit intervenir les courbes algébriques Γ_λ de $\mathbb{R}^2$, représentées paramétriquement par (1), le graphe de la restriction de φ à V étant ici inclus dans Γ_{λ_o}.

b) Inversement soit $\lambda \in \mathbb{R}$; f_λ et g_λ, données par (1), sont C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, et :

$$f'_\lambda(t) = -1 - \frac{2\lambda}{(t-1)^3} \ ;\ g'_\lambda(t) = t\, f'_\lambda(t).$$

Soit J un intervalle ne contenant ni 1, ni $\tau = 1 - \sqrt[3]{2\lambda}$; f_λ induit un C^∞-difféomorphisme de J sur $I = f_\lambda(J)$, et, l'application réciproque étant notée f_λ^{-1}, on vérifie aisément que $\varphi = g_\lambda \circ f_\lambda^{-1}$ est solution de (E) sur I ; le graphe de φ est inclus dans Γ_λ.

c) Ceci vaut, en particulier, si $0 \in J$; on constate alors (en supposant $\lambda \neq 1/2$) que Γ_λ est tangente à D en un point que nous notons $(\mu,0)$ avec $\mu = \lambda - 1/2 \neq 0$.

En utilisant $y = xt^2 + t^3$, on a $y \sim \mu t^2$ au voisinage de $t = 0$; on en déduit que la concavité de Γ_λ en $(\mu,0)$ contient B.

Les restrictions de φ à $I' = \{x \in I \mid x \leq \mu\}$ et à $I'' = \{x \in I \mid x \geq \mu\}$ sont solutions ; on peut raccorder en μ chacune d'elles à l'autre, mais aussi à la solution affine $x \mapsto 0$. Retenons que, pour tout $(x_0, 0)$ tel que $x_0 \neq 0$, le problème de Cauchy en $(x_0, 0)$ admet une solution de dérivée $-x_0$ et de dérivée seconde $-(1+x_0)/x_0$, correspondant à $\lambda = (x_0+1)^2/2$ et une infinité de solutions de dérivée 0, dont une correspond à $\lambda = x_0 + 1/2$. La figure 2 correspond à $x_0 = 1$.

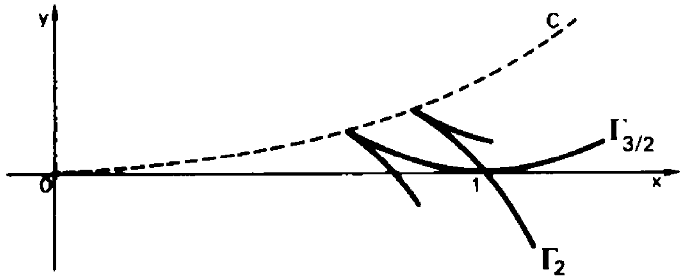


fig. 2

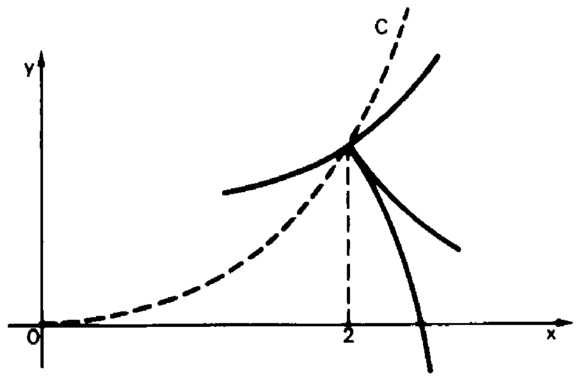


fig. 3

d) Reprenons b) en supposant que J admet $\tau = 1 - \sqrt[3]{2\lambda}$ pour extrémité gauche (en supposant $\lambda \neq 0$, sans quoi on aurait $\tau = 1$). Notons (ξ, η) le point de Γ_λ qui correspond à $t = \tau$; on a $\xi = -3\tau/2$, $\eta = -\tau^3/2$ et donc $(\xi, \eta) \in C$.

On constate $f'_\lambda(\tau) = g'_\lambda(\tau) = 0$, ce qui montre que (ξ, η) est un point stationnaire de Γ_λ. Au voisinage de $t = \tau$, on calcule (pour $\lambda \neq 1/2$, et donc $\xi \neq 0$)

$$x - \xi \sim \frac{9}{4\xi+6}(t-\tau)^2 \ ; \ y - \eta \sim -\frac{3\xi}{2\xi+3}(t-\tau)^2,$$

ce qui montre que (ξ, η) est un point de rebroussement de Γ_λ, en lequel la tangente à Γ_λ a pour pente τ.

La solution $\varphi = g_\lambda \circ f_\lambda^{-1}$ de (E) sur I peut être prolongée en une solution sur $I \cup \{\xi\}$ par la convention $\varphi(\xi) = \eta$, qui entraîne l'existence de $\varphi'(\xi) = \tau$.

Il va de soi que le même raisonnement vaut pour un intervalle J qui admet τ pour extrémité droite. Retenons que, pour tout (x_0, y_0) tel que $y_0 = 4x_0^3/27$ et $x_0 \neq 0$, le problème de Cauchy en (x_0, y_0) admet une solution de dérivée $x_0/3$, de dérivée seconde $(3-x_0)/(9x_0)$, et deux solutions de dérivée $-2x_0/3$ (dont les graphes sont des arcs de Γ_λ, avec $2\lambda = (1 + 2x_0/3)^3$, qui aboutissent au point de rebroussement). La figure 3 correspond à $x_0 = 2$.

e) Pour $\lambda = 0$, on a $f_o(t) = -t - 1/2$ et $g_o(t) = -t^2/2$; Γ_o est la parabole d'équation $y = \varphi(x)$, où $\varphi(x) = -(x+1/2)^2/2$, et φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Ce qui a été dit en c) est valable : φ peut se raccorder avec $x \mapsto 0$ au point $x_o = -1/2$, qui correspond au sommet de Γ_o. Ici Γ_o n'a pas de point de rebroussement, mais elle est tangente à C au point $(-3/2,-1/2)$.

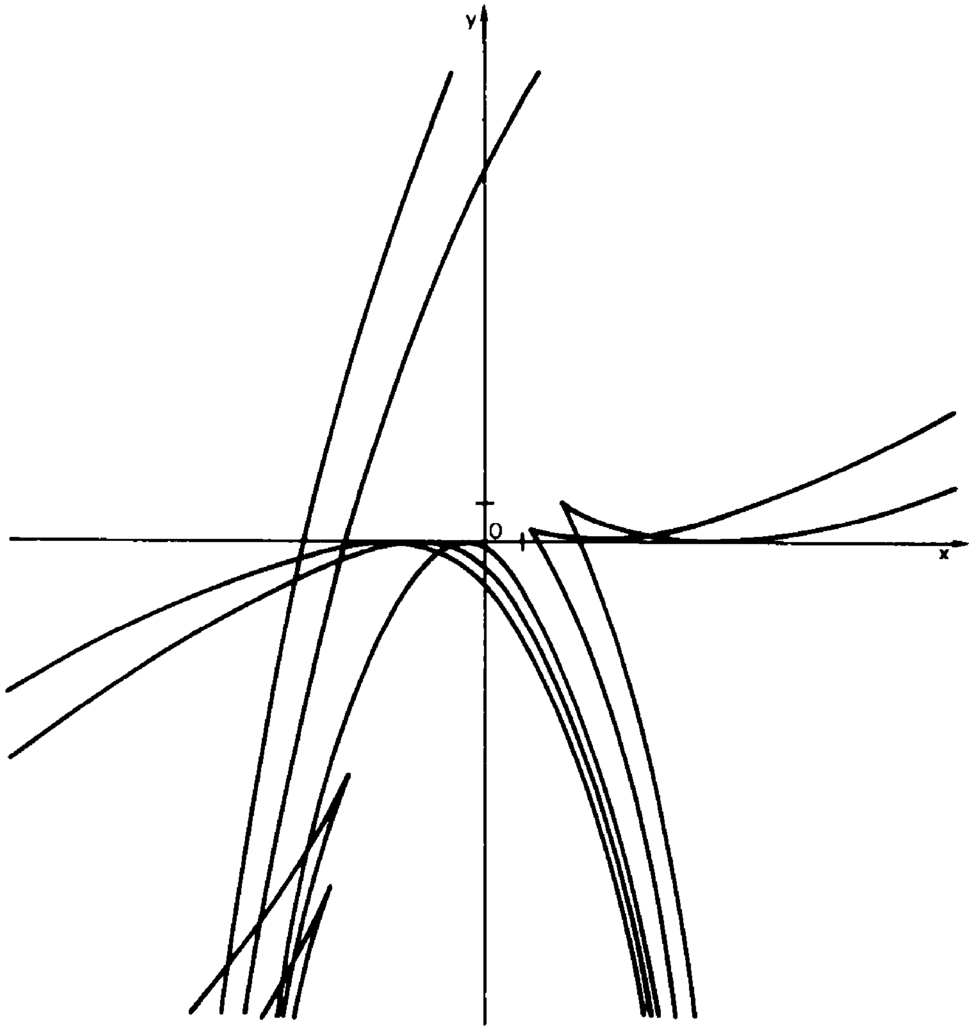


fig. 4

f) Reste à étudier le cas $\lambda = 1/2$, pour lequel d) s'applique avec $\tau = \xi = \eta = 0$, à ceci près qu'au voisinage de $t = 0$ on calcule :

$$x \sim \frac{3}{2}t^2 \; ; \; y \sim t^3$$

ce qui montre que (0,0) est point de rebroussement de première espèce de $\Gamma_{1/2}$, la tangente en (0,0) étant l'axe des x. On dispose de deux solutions de (E) sur des intervalles admettant 0 pour extrémité gauche et droite respectivement. Chacune d'elles peut être raccordée en 0 avec la solution $x \mapsto 0$.

Le problème de Cauchy admet en (0,0) une infinité de solutions, toutes à dérivée nulle en 0.

• La figure 4 représente quelques graphes de solutions.

$\boxed{4.2.9}$ 1°) Soient a,b,c trois applications continues d'un intervalle ouvert J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telles que l'on connaisse deux solutions sur J, ψ_1 et ψ_2, de l'équation différentielle

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{E}$$

Résoudre (E).

2°) Résoudre : $(x^2-1)(xy'-y) = 2(y^2-x^2)$ (F)

et construire les graphes des solutions.

1°) (E) est une équation de Riccati. Elle s'écrit $y' = F(x,y)$, où F est continue sur $J\times\mathbf{R}$ et y admet une dérivée partielle par rapport à y continue; le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : deux solutions distinctes de (E) sur J (en particulier ψ_1 et ψ_2) ne prennent la même valeur en aucun point de J.

a) Ceci justifie le changement de fonction inconnue $y = \psi_1 + 1/z$, qui ramène la résolution de (E) à la recherche des solutions ne s'annulant pas de l'équation linéaire :

$$z' + \big(2a(x)\psi_1(x) + b(x)\big)z + a(x) = 0 \tag{L_1}$$

dont on connaît la solution $1/(\psi_2-\psi_1)$.

Les solutions de (E) sont ψ_1 et les applications $I \longrightarrow \mathbf{R}$ de la forme :

$$g_\alpha = \psi_1 + \frac{\psi_2-\psi_1}{1+\alpha(\psi_2-\psi_1)w}, \quad \alpha\in\mathbf{R},$$

où w est une solution non nulle, arbitrairement choisie, de :

$$z' + \big(2a(x)\psi_1(x) + b(x)\big)z = 0$$

et où l'intervalle $I\subset J$ est choisi de sorte que la fonction $1+\alpha(\psi_2-\psi_1)w$ ne s'annule pas sur I.

b) Voici une autre solution, dans laquelle ψ_1 et ψ_2 jouent des rôles plus symétriques. On constate qu'à toute solution ψ de (E) sur J distincte de ψ_1 et ψ_2, on peut associer l'application $\varphi = \frac{\psi-\psi_1}{\psi-\psi_2}$ de J dans $\mathbf{R}$, que celle-ci ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1, et que : $\psi = \frac{\psi_2\varphi-\psi_1}{\varphi-1}$.

Une dérivation logarithmique donne :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\psi'-\psi_1'}{\psi-\psi_1} - \frac{\psi'-\psi_2'}{\psi-\psi_2}$$

De plus, ψ et ψ_i, $i\in\{1,2\}$, étant des solutions de (E) :

$$\psi'-\psi_i' = \big(a(\psi+\psi_i)+b\big)(\psi-\psi_i).$$

D'où : $\dfrac{\varphi'}{\varphi} = a(\psi_1-\psi_2)$.

Soit u une solution non nulle, arbitrairement choisie, de :

$$z' = a(x)\big(\psi_1(x)-\psi_2(x)\big)z.$$

Il existe un réel $\lambda\neq 0$ tel que $\varphi=\lambda u$, et $\psi = \dfrac{\lambda u\psi_2-\psi_1}{\lambda u-1}$.

— Inversement soient $\lambda\in\mathbf{R}_+^*$, et $I\subset J$ un intervalle sur lequel la fonction $f_\lambda = \dfrac{\lambda u\psi_2-\psi_1}{\lambda u-1}$ est définie (i.e. sur lequel u ne prend pas la valeur $1/\lambda$). On a : $f_\lambda = \psi_2+1/\theta_\lambda$, où $\theta_\lambda = \dfrac{\lambda u-1}{\psi_2-\psi_1}$. On vérifie que θ_λ est solution sur I de :

$$z' + \big(2a(x)\psi_2(x)+b(x)\big)z + a(x) = 0 \qquad (L_2)$$

et, θ_λ ne prenant pas la valeur 0, on en déduit (cf. 1°) que f_λ est solution de (E) sur I.

2°) Notons que $\psi_1 : x\mapsto x$ et $\psi_2 = -\psi_1$ sont solutions de (F) sur $\mathbf{R}$.

a) L'étude du 1°) s'applique avec $a(x) = \dfrac{2}{x(x^2-1)}$. Pour tout intervalle de I de $\mathbf{R}$ ne contenant ni 0, ni 1, ni -1, les solutions de (F) sur I sont les restrictions de ψ_1, de ψ_2 et de celles des f_λ, $\lambda\in\mathbf{R}^*$, qui sont définies sur I, avec :

$$f_\lambda(x) = x\,\frac{(x+1)^2+\lambda(x-1)^2}{(x+1)^2-\lambda(x-1)^2} \text{ si } \lambda\in\mathbf{R}^*\backslash\{1\}\,;$$

$$f_1(x) = (x^2+1)/2.$$

En fait, les f_λ sont définies sur $\mathbf{R}$, sauf celles qui correspondent à $\lambda\in\mathbf{R}_+^*\backslash\{1\}$, et qui admettent deux points de discontinuité ξ_λ et $1/\xi_\lambda$ avec $\xi_\lambda = \dfrac{\sqrt{\lambda}+1}{\sqrt{\lambda}-1}$.

b) Les f_λ sont toutes définies aux points $0,1,-1$. On calcule :

$$f_\lambda(1)=1\ ;\ f_\lambda'(1)=1\ :\ f_\lambda(-1)=1\ ;\ f_\lambda'(-1)=-1$$

$f_\lambda(0)=0$ et $f_\lambda'(0)=\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$ si $\lambda\neq 1$; $f_1(0)=\dfrac{1}{2}$ et $f_1'(0)=0$.

On en déduit que, pour tout $\lambda\in\mathbf{R}^*$, il existe un intervalle ouvert contenant 0 (resp. 1 ; resp. -1) sur lequel f_λ est solution de (F). En outre :

— En 0 une solution ne se raccorde (ainsi que sa dérivée) qu'avec elle-même ;

— En 1, toute f_λ se raccorde avec toute $f_{\lambda'}$, et aussi avec ψ_1 ;

— En -1, toute f_λ se raccorde avec toute $f_{\lambda'}$, et aussi avec ψ_2.

Le lecteur en déduira aisément les solutions de (F) sur $\mathbf{R}$.

c) Les graphes des solutions de (F) sont les droites d'équation $y=x$ et $y=-x$, la parabole d'équation $y=(x^2+1)/2$, et les cubiques Γ_λ d'équations $y=f_\lambda(x)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$.

$\Gamma_{1/\lambda}$ se déduit de Γ_λ par symétrie par rapport à Oy. Toutes les Γ_λ contiennent les points $(1,1)$ et $(-1,1)$, en lesquels elles ont une tangente commune, et le point O.

En utilisant :

$$\frac{y}{x}=\frac{(1+\lambda)+2(1-\lambda)/x+(1+\lambda)/x^2}{(1-\lambda)+2(1+\lambda)/x+(1-\lambda)/x^2}$$

On constate (par division) que Γ, admet une asymptote d'équation :

$$y=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}x-\frac{8\lambda}{(1-\lambda)^2}$$

qui est parallèle à la tangente en O.

Pour $\lambda\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, Γ_λ admet en outre deux asymptotes parallèles à Oy.

Le lecteur construira quelques graphes sur une même figure.

$\boxed{4.2.10}$ Résoudre : $x^2yy''+(xy'-y)^2=0$	(E)

<u>Première méthode</u>. (E) s'écrit : $x^2(yy''+y'^2)-2xyy'+y^2=0$

i.e. $\quad x^2(y^2)''-2x(y^2)'+2y^2=0.$

Une application ψ d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ est donc solution de (E) sur I si, et seulement si elle est deux fois dérivables sur I, et si ψ^2 est solution sur I de l'équation d'Euler :

$$x^2u''-2xu'+2u=0 \tag{F}$$

(F) admet $x\mapsto x$ et $x\mapsto x^2$ pour solutions sur $\mathbb{R}$; comme elle est linéaire et homogène, les $f_{\lambda,\mu}: x\mapsto \lambda x^2+\mu x$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, en constituant l'ensemble des solutions sur tout intervalle qui ne contient pas 0, et plus généralement sur tout intervalle (le raccord en 0 de $f_{\lambda,\mu}$ et de $f_{\lambda',\mu'}$ ainsi que de leurs deux premières dérivées exigeant $(\lambda,\mu)=(\lambda',\mu')$).

Les solutions de (E) sont donc les applications deux fois dérivables, à graphe inclus dans l'un des ensembles $\Gamma_{\lambda,\mu}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=f_{\lambda,\mu}(x)\}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

— Pour $\lambda\geqslant 0$ et $\mu=0$, on obtient les $x\mapsto kx$, $k\in\mathbb{R}$, solutions sur $\mathbb{R}$.

— Pour $\lambda<0$ et $\mu=0$, on n'obtient rien.

— Pour $\mu\neq 0$, on obtient les $\sqrt{f_{\lambda,\mu}}$ et les $-\sqrt{f_{\lambda,\mu}}$ qui sont solutions sur tout intervalle sur lequel $f_{\lambda,\mu}$ ne prend que des valeurs strictement positives ; les représentations graphiques sont des arcs de coniques dont un sommet est O et dont un axe de symétrie est Ox.

Seconde méthode. (E) est homogène en (y,y',y''). La fonction nulle est solution sur $\mathbb{R}$. Les solutions qui ne prennent pas la valeur 0 sont données par :

$$\frac{y'}{y} = z \ ; \ x^2z' = -2x^2z^2 + 2xz - 1 .$$

Quitte à raccorder en 0, on travaille séparément sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, ce qui conduit à résoudre l'équation de Riccati :

$$z' = -2z^2 + \frac{2}{x}z - \frac{1}{x^2}$$

dont on connaît les deux solutions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto 1/(2x)$. Les calculs sont laissés au lecteur qui pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

MASSON, Editeur
120, boulevard Saint-Germain
75280 Paris Cedex 06
Dépôt légal : Janvier 1993

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
av. d'Embrun, 05003-GAP
Dépôt légal 811 – décembre 1992

9 782225 805783

ISBN : 2-225-80578-4