CLASSES PREPARATOIRES
AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

E. Ramis / C. Deschamps / J. Odoux

ANALYSE 1.

Exercices
avec solutions

MASSON

ANALYSE

EXERCICES AVEC SOLUTIONS

1

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Des mêmes auteurs :

ANALYSE. EXERCICES AVEC SOLUTIONS. Classes Préparatoires aux Grandes Écoles Scientifiques.
Tome 2. — 1985, 224 pages.

ALGÈBRE. EXERCICES AVEC SOLUTIONS. 1988, 200 pages.

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES. Classes Préparatoires. Enseignement supérieur 1er cycle.
Volume 1. — Algèbre. 1989, 2e édition, 448 pages.
Volume 2. — Algèbre et applications à la géométrie. 1987, 2e tirage corrigé, 312 pages.
Volume 3. — Topologie et éléments d'analyse. 1988, 2e édition, 2e tirage, 376 pages.
Volume 4. — Séries et équations différentielles. 1990, 2e édition, 2e tirage, 328 pages.
Volume 5. — Applications de l'analyse à la géométrie. 1981, 320 pages.

Autres ouvrages :

DÉRIVATION, avec exercices, par H. LEHNING et D. JAKUBOWICZ. *Collection Mathématiques Supérieures et Spéciales, n° 2*. 1987, 184 pages.

INTÉGRATION ET SOMMATION, avec exercices, par H. LEHNING. *Collection Mathématiques Supérieures et Spéciales, n° 3*. 1985, 128 pages.

ANALYSE FONCTIONNELLE, par H. LEHNING. *Collection Mathématiques Supérieures et Spéciales, n° 5*. 1988, 256 pages.

TOPOLOGIE, par H. LEHNING. *Collection Mathématiques Supérieures et Spéciales, n° 1*. 1985, 128 pages.

L'ANALYSE HARMONIQUE. Son développement historique, par J.-P. PIER. 1990, 344 pages.

Dans la collection *Maîtrise de Mathématiques Pures* :

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE CLASSIQUE, par J.E. BERTIN et M.-J. BERTIN. Avant-propos de J. DIEUDONNÉ. 1981, 152 pages.

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE CLASSIQUE - EXERCICES, par M.-P. MALLIAVIN et A. WARUSFEL. 1981, 128 pages.

ALGÈBRE COMMUTATIVE. APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE ET THÉORIE DES NOMBRES, par M.-P. MALLIAVIN. 1985, 250 pages.

ALGÈBRE COMMUTATIVE. APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE ET THÉORIE DES NOMBRES - EXERCICES, par M.-J. BERTIN et E. WEXLER-KREINDLER. 1986, 208 pages.

CALCUL DIFFÉRENTIEL, par A. AVEZ. 1983, 152 pages.

CALCUL DIFFÉRENTIEL : EXERCICES, par B. EL MABSOUT. 1984, 168 pages.

Classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques

ANALYSE

EXERCICES AVEC SOLUTIONS

1

E. Ramis
Inspecteur général de l'Instruction Publique

C. Deschamps
Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Louis-le-Grand

J. Odoux
Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Champollion, à Grenoble

2e tirage

MASSON

Paris Milan Barcelone Bonn
1991

ISBN : 2-225-80098-7

MASSON S.A.	120, bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
MASSON S.p.A.	Via Statuto 2/4, 20121 Milano
MASSON S.A.	Balmes 151, 08008 Barcelona
DÜRR UND KESSLER	Maarweg, 30, 5342 Rheinbreitbach b. Bonn

Avant-propos

Le présent volume est le premier d'une série d'exercices avec solutions développées qui s'adresse aux étudiants des classes préparatoires aux Grandes Ecoles scientifiques et du premier cycle universitaire.

Les objectifs d'un recueil de ce type sont bien connus : il s'agit essentiellement d'aider le lecteur à évaluer ses connaissances et à les mettre en œuvre; ceci implique aussi bien une réflexion sur la nature des concepts et une prise de conscience des limites de l'outil constitué par le cours que la recherche d'une maîtrise des techniques de calcul.

Sauf rares exceptions, nous avons donné de chaque question qu'une solution, celle qui nous a paru s'exposer le plus brièvement ou offrir les plus larges prolongements; il ne s'agit naturellement pas d'une solution exhaustive, et le lecteur aura toujours intérêt à poursuivre le plus loin possible sa propre démarche.

Nous avons explicité tous les raisonnements et la plupart des calculs n'hésitant pas à aller, si nécessaire, jusqu'à l'utilisation d'une calculatrice programmable; il nous est cependant arrivé d'omettre intentionnellement quelques intermédiaires pour laisser au lecteur le soin de les rétablir.

Ayant prévu de consacrer deux tomes à l'Analyse, nous avons opté pour une répartition par thèmes, de préférence à une répartition par niveaux; on trouvera donc côte à côte, dans chacun des cinq chapitres, des exercices de difficulté fort inégale; nous avons cependant indiqué par un astérique les plus délicats d'entre eux, ainsi que ceux qui exigent une connaissance préalable à l'ensemble du cours.

Pour des raisons d'ordre typographique, nous avons désigné les ensembles fondamentaux par les lettres majuscules N, Z, Q, R, C (de préférence à N, ...).

Nous remercions par avance tous les lecteurs qui voudront bien nous faire part de leurs critiques et suggestions.

Les Auteurs.

TABLE DES MATIÈRES

RÉELS. SUITES

1.1. RÉELS

$\boxed{1.1.1}$ Soit K un corps commutatif, totalement ordonné. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) K est archimédien et complet ;

ii) Toute partie non vide et majorée de K admet une borne supérieure.

1° Preuve de i) $\Rightarrow$ ii). Par hypothèse, K est archimédien et complet. Soit E une partie non vide et majorée de K. Nous utiliserons :

LEMME : *Etant donné* $\varepsilon \in K_+^*$, *il existe un élément* a *de* E *et un majorant* b *de* E *tels que :* $0 \leqslant b-a \leqslant \varepsilon$.

Soit m un majorant de E. Notons $N' = \{n \in \mathbb{N} \mid m - n\varepsilon \text{ est majorant de } E\}$.

Contenant 0, N' n'est pas vide. Soit α un élément de $E (\neq \phi)$; K étant archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N\varepsilon > m - \alpha$, ce qui entraîne $m - N\varepsilon < \alpha$, et donc $n \notin N'$ pour tout $n \geqslant N$; N' est ainsi majoré. N' admet donc un plus grand élément n_0 ; $m - n_0\varepsilon$, que nous notons b, est un majorant de E tel que $b - \varepsilon$ ne soit pas majorant de E ; il existe donc $a \in A$ tel que : $b - \varepsilon < a \leqslant b$, et le lemme est acquis. □

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons appliquer le lemme avec $\varepsilon = 1/n$ (inverse dans K de $n1_K$). Nous construisons ainsi deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de K vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n \in E \text{ ; } b_n \text{ est un majorant de } E \text{ ; } 0 \leqslant b_n - a_n \leqslant 1/n.$$

D'où, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$a_n - a_{n+p} \leqslant b_{n+p} - a_{n+p} \leqslant 1/(n+p)$$

et : $$a_{n+p} - a_n \leqslant b_n - a_n \leqslant 1/n,$$

ce qui entraîne :

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant 1/n.$$

K étant archimédien, la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de K admet 0 pour limite. Il en résulte que (a_n) est une suite de Cauchy, et, K étant complet, une suite convergente ; soit c sa limite. D'après $0 \leq b_n - a_n \leq 1/n$, c est aussi limite pour la suite (b_n). Prouvons que c est borne supérieure de E.

— Pour tous $a \in E$ et $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $a \leq b_n$, et donc $a \leq c$ (par passage à la limite) c est ainsi un majorant de E.

— Soit $d \in K$ tel que $d < c$. D'après $c = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, il existe $N \in \mathbb{N}^{\star}$ tel que : $d < a_N \leq c$; d n'est pas majorant de E. □

2° Preuve de ii) ⇒ i). Par hypothèse, toute partie non vide et majorée de K admet une borne supérieure, ce qui entraîne, par passage aux opposés, que toute partie non vide et minorée de K admet une borne inférieure.

a) Montrons par l'absurde que K est archimédien. Faisons l'hypothèse (H) : il existe $(a,A) \in K^2$ tel que $0 < a < A$, et que $na \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$E = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de K ; elle admet une borne supérieure b ; comme $a > 0$, $b - a$ n'est pas un majorant de E, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $b - a < Na \leq b$; il en résulte $(N+1)a > b$, en contradiction avec $b = \sup E$; (H) est donc absurde. □

b) Montrons que K est complet, i.e. que toute suite de Cauchy d'éléments de K est convergente. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite.

— A $1 \in K_+^{\star}$ on peut associer $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - a_N| \leq 1$ dès que $n \geq N$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \max\{|a_0|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$
La suite (a_n) est donc bornée.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{a_p \mid p \geq n\}$; A_n étant une partie non vide et bornée de K, on dispose de $x_n = \inf A_n$ et de $y_n = \sup A_n$, avec $x_n \leq y_n$. La suite (x_n) est croissante et majorée par y_0. Montrons qu'elle est convergente. $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de K. Nous disposons donc de $\ell = \sup X$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^{\star}$; il existe (d'après la définition d'une borne supérieure) un $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\ell - \varepsilon < x_N \leq \ell$; pour tout $n \geq N$, on a : $\ell - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \ell$. Il en résulte $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

On montre de la même façon que la suite (y_n), décroissante et minorée par x_0, admet une limite ℓ' ; de $x_n \leq y_n$ on déduit $\ell \leq \ell'$. Faisons l'hypothèse $\ell \neq \ell'$, ce qui permet de poser $\ell' = \ell + 3\alpha$, avec $\alpha > 0$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. En utilisant $x_N = \inf\{a_p \mid p \geq N\}$ et $x_N \leq \ell$, nous constatons qu'il existe un entier $P \geq N$ tel que : $x_N \leq a_P \leq x_N + \alpha \leq \ell + \alpha$; il existe de même un entier $Q \geq N$ tel que : $\ell' - \alpha \leq y_N - \alpha \leq a_Q \leq y_N$. Ainsi :

$$\exists \alpha \in K_+^{\star} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists P \geqslant N \quad \exists Q \geqslant N \quad |a_Q - a_P| \geqslant \alpha$$

en contradiction avec : (a_n) est une suite de Cauchy.

L'hypothèse $\ell \neq \ell'$ est donc absurde, et on a $\ell = \ell'$.

— Pour tout $\varepsilon \in K_+^{\star}$, il existe $N \in \mathbb{N}^{\star}$ tel que :

$$\ell - \varepsilon \leqslant x_N \leqslant \ell \leqslant y_N \leqslant \ell + \varepsilon$$

ce qui entraîne : $\ell - \varepsilon \leqslant a_p \leqslant \ell + \varepsilon$ pour tout $p \geqslant N$. D'où $\lim\limits_{p \to +\infty} a_p = \ell$. □

Remarque. Sachant qu'à un isomorphisme près il existe un seul corps commutatif archimédien (et donc totalement ordonné) et complet, on peut affirmer qu'à un isomorphisme près il existe un seul corps commutatif, totalement ordonné dans lequel toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. D'où deux procédés de définition de $\mathbb{R}$ qui conduisent au "même corps".

$\boxed{1.1.2}$ Soit E un ensemble infini totalement ordonné dans lequel toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. On suppose en outre :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (x<y) \Rightarrow (\exists z \in E \quad x<z<y)$$

Montrer que E est non dénombrable. Que peut-on en déduire pour $\mathbb{R}$?

1° Faisons l'hypothèse (H) : il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ sur E.

En notant $\varphi(n) = a_n$ nous constatons que E est l'ensemble des éléments de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous allons montrer par récurrence qu'il existe deux suites d'éléments de E, l'une, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante, l'autre, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, décroissante telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (x_n < y_n) \wedge (a_n \notin [x_n, y_n])$$

— A partir de a_0, qui est connu, et compte tenu de ce que E est infini, on peut trouver $y_0 \in E$ tel que $a_0 < y_0$, auquel cas on intercale $x_0 \in E$ tel que $a_0 < x_0 < y_0$, ou trouver $x_0 \in E$ tel que $x_0 < a_0$, auquel cas on intercale $y_0 \in E$ tel que $x_0 < y_0 < a_0$

— soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on connaisse $(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ et $(y_0, \dots, y_n) \in E^{n+1}$ avec :

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n < y_n \leqslant y_{n-1} \leqslant \dots \leqslant y_1 \leqslant y_0$$

et $a_0 \notin [x_0, y_0]$, $a_1 \notin [x_1, y_1]$, …, $a_n \notin [x_n, y_n]$.

Trois cas peuvent se produire :

i) $a_{n+1} \notin [x_n, y_n]$. On pose $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = y_n$.

ii) $a_{n+1} \in [x_n, y_n[$. Il existe $b \in E$ tel que $a_{n+1} < b < y_n$. On pose $x_{n+1} = b$ et $y_{n+1} = y_n$.

iii) $a_{n+1} = y_n$. Il existe $b \in E$ tel que $x_n < b < a_{n+1}$. On pose $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = b$.

Les deux suites étant ainsi mises en évidence, nous constatons que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, qui est une partie de E non vide et majorée (par y_0) admet une borne supérieure ℓ. En utilisant $x_p \leqslant y_q$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, nous avons $x_n \leqslant \ell \leqslant y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte qu'il n'existe pas $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell = a_N$, car on aurait alors $a_N \in [x_N, y_N]$. On aboutit à $\ell \notin E$, ce qui constitue une contradiction. □

2° En particulier $\mathbb{R}$, qui vérifie toutes les conditions imposées à E, est non dénombrable.

$\boxed{1.1.3}$ On rappelle que, pour tout sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$:

— ou bien il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$ (G est dit <u>sous groupe discret</u>) ;

— ou bien G est dense dans $\mathbb{R}$.

Dans le premier cas, si $G \neq \{0\}$, alors $\alpha = \min\{x \in G \mid x > 0\}$.

1° Soient a et b deux réels non nuls. Montrer que le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par a et b, $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, est discret si, et seulement si $a/b \in \mathbb{Q}$.

2° Soient a et b deux réels non nuls, tels que $a/b \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $E = a\mathbb{N} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1° a) Supposons que $G = \alpha\mathbb{Z}$, avec $\alpha > 0$ (puisque $G \neq \{0\}$) ; a et b appartenant à G, il existe $p \in \mathbb{Z}^\star$ et $q \in \mathbb{Z}^\star$ tels que $a = \alpha p$ et $b = \alpha q$. D'où $a/b \in \mathbb{Q}$. □

b) Inversement supposons que $a/b \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}^\star$ et $q \in \mathbb{N}^\star$, premiers entre eux, tels que $a/b = p/q$.

Posons $c = a/p = b/q$; on a $a = cp$ et $b = cq$; on en déduit $G \subset |c|\mathbb{Z}$, ce qui prouve que G est discret. □

On peut même préciser que $G = |c|\mathbb{Z}$. En effet, p et q étant premiers entre eux, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $up + vq = 1$; on a donc :

$$c = cup + cvq, \text{ i.e. } c = au + bv$$

ce qui entraîne $c \in G$, et donc $|c|\mathbb{Z} \subset G$. Or on a vu : $G \subset |c|\mathbb{Z}$. □

2° $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est ici dense dans $\mathbb{R}$, mais a priori rien ne dit que $E \subset G$ le soit. Nous allons commencer par vérifier :

LEMME : *Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $E \cap]0,\varepsilon[$ *n'est pas vide.*

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la densité de G dans $\mathbb{R}$, il existe $(n_0,m_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $0 < an_0 + bm_0 < \varepsilon$. Deux cas sont alors possibles :

i) $n_0 \in \mathbb{N}$. Le résultat est alors acquis.

ii) $n_0 \leqslant -1$. Alors : $0 < \dfrac{an_0 + bm_0}{|n_0|} \leqslant an_0 + bm_0 < \varepsilon$.

Toujours d'après la densité de G dans $\mathbb{R}$, il existe $(n_1,m_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que:

$$0 < an_1 + bm_1 < (an_0+bm_0)/|n_0|.$$

Si $n_1 \in \mathbb{N}$, le résultat est acquis. Si $n_1 \leqslant -1$, on écrit :

$$0 < an_1|n_0| + bm_1|n_0| < an_0 + bm_0 < \varepsilon$$

ce qui entraîne : $a(n_0 - n_1|n_0|) + b(m_0 - m_1|n_0|) \in]0,\varepsilon[$.

Comme : $n_0 - n_1|n_0| \in \mathbb{N}$, le résultat est encore acquis. □

Preuve de la densité de $E \cap \mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$. Soit $(\alpha,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.

Ayant choisi $c \in E \cap]0,\varepsilon[$, ce qui est possible d'après le lemme, notons k la partie entière (positive) de α/c. Nous avons :

$$kc \leqslant \alpha < (k+1)c < \alpha + \varepsilon, \text{ et donc : } (k+1)c \in E \cap]\alpha,\alpha+\varepsilon[$$ □

Preuve de la densité de $E \cap \mathbb{R}_-$ *dans* $\mathbb{R}_-$. Soit $(\alpha,\varepsilon) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^*$. En appliquant ce qui précède à $E' = (-a)\mathbb{N} + b\mathbb{Z}$, ensemble des opposés des éléments de E, nous constatons que $E' \cap]-\alpha,-\alpha+\varepsilon[$ n'est pas vide ; il en résulte que $E \cap]\alpha-\varepsilon,\alpha[$ n'est pas vide. □

• Nous allons retrouver le résultat du 2° par une méthode plus élémentaire.

1.1.4 1° Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(t) = t - [t]$, où $[t]$ est la partie entière de t. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; montrer que $\Phi = \{\varphi(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie dense de $[0,1]$.

2° Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; montrer que $x\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3° Soient a et b deux réels non nuls, tels que $a/b \notin \mathbb{Q}$; montrer que $E = a\mathbb{N} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1° — Visiblement : $\Phi\subset[0,1[$.

— Pour tout $t\in\mathbb{R}$, la distance de t à $\mathbb{Z}$, notée $d(t)$, vérifie :

$$d(t)=\min\{\varphi(t),1-\varphi(t)\}\leqslant 1/2.$$

Posons $\alpha=d(x)$. Nous constatons que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $d(nx)$ est égal à $d(n\alpha)$ et appartient à $[0,1/2]\setminus\mathbb{Q}$. En utilisant les inégalités, strictes d'après $\alpha\notin\mathbb{Q}$:

$$\alpha[1/\alpha]<1<\alpha[1/\alpha]+\alpha$$

nous constatons qu'il existe $n_1\in\{[1/\alpha],[1/\alpha]+1\}$ tel que :

$$0<d(n_1\alpha)<\alpha/2 \text{ ; i.e. } 0<d(n_1x)<\alpha/2.$$

Par récurrence, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$ il existe un $n_j\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$0<d(n_j\alpha)<\alpha/2^j.$$

— Soit $\varepsilon\in]0,1/2[$. D'après ce qui précède, il existe $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $\beta=d(qx)$ vérifie $0<\beta<\varepsilon$. Posons $m=[1/\beta]$.

Selon que $\varphi(qx)=\beta$ ou $\varphi(qx)=1-\beta$, nous avons, pour tout $k\in\{1,\dots,m\}$, $\varphi(kqx)=k\beta$ ou $\varphi(kqx)=1-k\beta$.

Nous disposons, suivant le cas, de la subdivision de $[0,1]$:

$$(0,\beta,\dots,m\beta,1) \quad \text{ou} \quad (0,1-m\beta,\dots,1-\beta,1)$$

qui est formée de 0,1, et d'éléments de Φ, la différence de deux termes consécutifs de la subdivision étant inférieure à ε. Pour tout $t\in[0,1]$, il existe donc un élément de Φ dans $[t-\varepsilon,t+\varepsilon]$. □

2° Soit $(\alpha,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Nous disposons de $\varphi(\alpha)\in[0,1[$ et du sous-intervalle non vide $I=]\varphi(\alpha),\min(1,\varphi(\alpha)+\varepsilon)[$ de $[0,1]$. D'après le 1°, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\varphi(nx)\in I$, et donc :

$$\varphi(\alpha)<\varphi(nx)<\varphi(\alpha)+\varepsilon$$

En posant $m=[\alpha]-[nx]$, on constate qu'il existe $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ tel que :

$$nx+m\in]\alpha,\alpha+\varepsilon[.$$ □

3° D'après le 2°, $a/b\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$; posons $J=\{t\in\mathbb{R}\mid bt\in I\}$. Il existe $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ tel que $na/b+m\in J$; on a $na+mb\in I$. □

$\boxed{1.1.5}$ Soit $s \in C$ tel que $|s| = 1$. On note : $S = \{s^n \mid n \in N\}$.

1° On suppose que s n'est pas racine de l'unité, i.e. que $s^m \neq 1$ pour tout $m \in N^*$. Montrer que S est une partie dense de $U = \{z \in C \mid |z| = 1\}$.

2° On suppose que s est racine de l'unité ; on note $q = \min\{m \in N^* \mid s^m = 1\}$ Montrer que $S = \Omega$, où Ω est l'ensemble des racines q-ièmes de l'unité.

On note θ l'argument de s qui appartient à $[0, 2\pi[$. L'hypothèse est $\theta/\pi \notin Q$ au 1°, et $\theta/\pi \in Q$ au 2°.

1° D'après l'exercice précédent, $\theta N + 2\pi Z$ est dense dans R.

Soit $(z, \varepsilon) \in U \times R_+^*$. La surjectivité et la continuité de $t \mapsto e^{it}$ font qu'il existe $(\alpha, \eta) \in R \times R_+^*$ tel que $e^{i\alpha} = z$ et :

$$\forall t \in]\alpha-\eta, \alpha+\eta[\qquad |e^{it} - z| < \varepsilon .$$

Il existe $(n, m) \in N \times Z$ tel que : $n\theta + 2m\pi \in]\alpha-\eta, \alpha+\eta[$; on a donc $|e^{in\theta} - z| < \varepsilon$, i.e. $|s^n - z| < \varepsilon$. □

2° Partie non vide et minorée de N^*, $\{m \in N^* \mid s^m = 1\}$ admet bien un plus petit élément q, et on a :

$$\Omega = \{1, \omega, \dots, \omega^{q-1}\}, \text{ où } \omega = \exp(i\ 2\pi/q).$$

— En considérant la division euclidienne $n = kq + r$, où r est un entier tel que $0 \leq r \leq q-1$, on constate $s^n = (s^q)^k \cdot s^r = s^r$; S est donc inclus dans $S_0 = \{s^r \mid r \in N \text{ et } 0 \leq r \leq q-1\}$; comme, à l'évidence, $S_0 \subset S$, on a $S = S_0$.

— Par ailleurs $s \in \Omega$ entraîne $S_U \subset \Omega$. Comme il est clair que Ω admet q pour cardinal, il suffit de montrer que l'indexation de S_0 par $\{1, 2, \dots, q-1\}$ est injective pour être en droit d'affirmer que $S_U = \Omega$. Or, si l'on avait $(r, r') \in N^2$, tel que $0 \leq r < r' \leq q-1$ et $s^r = s^{r'}$, on aurait $s^{r'-r} = 1$ et $1 \leq r' - r < q$, contrairement à $q = \min\{m \in N^* \mid s^m = 1\}$. □

Remarque. L'entier $q \in N^*$ qui intervient au 2° est le dénominateur du représentant irréductible p/q du rationnel $\theta/(2\pi)$, et on a $s = \omega^p$.

Le lecteur reliera cette question à l'étude des polygones réguliers de q côtés (convexes et étoilés) inscrits dans un cercle donné et ayant un sommet donné.

$\boxed{1.1.6}$ 1° Montrer que, pour tout sous groupe multiplicatif G de R_+^* :

— ou bien il existe un réel $a > 1$ tel que $G = a^Z = \{a^n \mid n \in Z\}$, et alors, si $G \neq \{1\}$, on a $a = \min\{x \in G \mid x > 1\}$ (on dit que G est discret) ;

— ou bien G est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.

2° A titre d'application, déterminer : $S = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1\}$.
On montrera que $G = \{x + y\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^* \mid (x,y) \in S\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

1° Se déduit d'un résultat classique sur les sous groupes additifs de $\mathbb{R}$, en utilisant l'isomorphisme $t \mapsto e^t$ de $(\mathbb{R},+)$ sur $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ qui est aussi un homéomorphisme. □

2° • Commençons par quelques remarques.

a) $\sqrt{2}$ étant irrationnel, pour tout $(x,y,x',y') \in \mathbb{Z}^4$,

$$(x+y\sqrt{2} = x'+y'\sqrt{2}) \iff ((x,y) = (x',y')).$$

b) Pour tous $(x,y) \in S$, $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et $\varepsilon' = \{-1,1\}$, on a $(\varepsilon x, \varepsilon' y) \in S$; on peut donc se ramener à la recherche de $S_0 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1\}$; on note que $(0,0) \notin S$.

c) En utilisant: $x^2 - 2y^2 = (x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})$, on a, pour tout $(x,y) \in S_0$:

$$0 < x - y\sqrt{2} \leq 1 \leq x + y\sqrt{2} \quad \text{et} \quad -x - y\sqrt{2} \leq -1 \leq -x + y\sqrt{2} < 0.$$

• Venons-en à l'étude de G.

— G n'est pas vide $((1,0) \in S$ et donc $1 \in G)$;

— G est stable par produit : pour tous $(x+y\sqrt{2}) \in G$ et $(x'+y'\sqrt{2}) \in G$, on constate : $(x+y\sqrt{2})(x'+y'\sqrt{2}) = X + Y\sqrt{2}$, avec :

$$X = xx' + 2yy' \quad \text{et} \quad Y = xy' + x'y$$

et : $$X^2 - 2Y^2 = (x^2-2y^2)(x'^2-2y'^2) = 1.$$

— G est stable par passage à l'inverse : pour tout $(x+y\sqrt{2}) \in G$, on constate que $(x+y\sqrt{2})^{-1} = x - y\sqrt{2}$ est un élément de G.

G est ainsi un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$. □

• Nous allons maintenant montrer que $G_0 = \{t \in G \mid t > 1\}$ admet un plus petit élément. En utilisant la remarque c), nous constatons que :

$$G_0 = \{x + y\sqrt{2} \mid (x,y) \in S_0 \setminus (1,0)\}.$$

— Il n'y a aucun $x \in \mathbb{N}$ tel que $(x,0) \in S_0 \setminus (1,0)$;

— Il n'y a aucun $x \in \mathbb{N}$ tel que $(x,1) \in S_0$;

— Le seul $x \in \mathbb{N}$ tel que $(x,2) \in S_0$ est 3 ; on dispose, en particulier de l'élément $3 + 2\sqrt{2}$ de S_0 ;

— Pour $y \geqslant 3$, $(x,y) \in S_0$ exige $x^2 = 1 + 2y^2 \geqslant 19$, et $x \geqslant 5$, et $x + y\sqrt{2} \geqslant 5 + 3\sqrt{2}$, et donc $x + y\sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{2}$.

Nous avons ainsi : $3 + 2\sqrt{2} = \min G_0$, et (cf. 1°) : $G = (3+2\sqrt{2})^{\mathbb{Z}}$.

D'où, en tenant compte de la remarque a) :

$$S_0 = \{(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } x_n + y_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n\}.$$

On peut expliciter :

$$x_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} C_n^{2k}\, 3^{n-2k}\, 8^k \quad ; \quad y_n = 2\sum_{0 \leqslant k \leqslant (n-1)/2} C_n^{2k+1}\, 3^{n-2k-1}\, 8^k$$

Les premiers termes de S_0 sont : (1,0), (3,2), (17,12), (99,70) ...

$\boxed{1.1.7}$ Trouver les points d'accumulation de chacun des ensembles :

$$E = \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\} \quad ; \quad F = \left\{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{m+n} \mid (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$$

Rappelons que $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de $E \subset \mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout voisinage V de a dans $\mathbb{R}$, $E \cap V$ est un ensemble infini, ou encore si, et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de E deux à deux distincts.

1° Nous avons, en évidence, les points d'accumulation de E :

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) \; ; \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \; \frac{1}{p} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)$$

Nous allons montrer qu'il n'y en pas d'autre.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)\right[$. Nous allons montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments appartenant à $\left[\frac{1}{p+1} + \varepsilon, \frac{1}{p} - \varepsilon\right]$, ce qui impliquera qu'il n'y a aucun point d'accumulation de E dans $\left]\frac{1}{p+1} + \varepsilon, \frac{1}{p} - \varepsilon\right[$, et entraînera la proposition.

Si k est un entier tel que $k > 1/\varepsilon$, il n'y a aucun $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{p+1} + \varepsilon \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} \leqslant \frac{1}{p} - \varepsilon \tag{1}$$

car (1) exigerait : $\frac{1}{p+1} < \frac{1}{\ell} < \frac{1}{p}$, et donc : $p < \ell < p+1$, ce qui constituerait une contradiction.

Ainsi, pour tout élément $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ de E appartenant à $\left[\frac{1}{p+1} + \varepsilon, \frac{1}{p} - \varepsilon\right]$, nous avons : $\max(m,n) \leqslant 1/\varepsilon$. □

2° Nous avons, en évidence, les points d'accumulation de F

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^{n+n}, \quad \text{et} \quad e = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n}\right)^{1+n}$$

Nous allons montrer qu'il n'y en a pas d'autre en utilisant la partition $F = F' \cup F''$, où $F' = \{(\frac{1}{1}+\frac{1}{n})^{1+n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Les éléments de F" sont les éléments de F tels que $(m \geq 2) \wedge (n \geq 2)$. L'un d'eux est $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{2+2} = 1$. Tous les autres vérifient : $(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})^{m+n} \leq (\frac{1}{2}+\frac{1}{3})^{m+n}$.
Pour tout $\alpha > 0$, il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments de F" n'appartenant pas à $[0,\alpha]$; comme il n'y a d'autre part qu'un nombre fini d'éléments de F' n'appartenant pas à $[e-\alpha, e+\alpha]$, on peut affirmer que tous les points d'accumulation de F appartiennent à $[0,\alpha] \cup [e-\alpha, e+\alpha]$. □

1.2. SUITES NUMERIQUES

$\boxed{1.2.1}$ Soit $\sum$ l'ensemble des suites $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs entières, telles que $p_1 \geq 2$, et $p_{n+1} \geq p_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de montrer que $\sum$ est équipotent à $]1,2]$.

1° A tout élément p de $\sum$ on associe la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$$

Montrer que u admet une limite, appartenant à $]1,2]$, que l'on notera f(p).

2° Montrer qu'à tout $x \in]1,2]$ on peut associer une unique suite $p \in \sum$ telle que $f(p) = x$. Conclure.

Nous aurons à utiliser l'assertion :

$$(A_m) \qquad \forall \alpha \in]0,1[\qquad (1-\alpha) \prod_{i=0}^{m} \left(1 + \alpha^{(2^i)}\right) < 1$$

qui est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$, ainsi qu'on le vérifie par récurrence.
[(A_0) est évidemment vraie ; on passe de (A_m) à (A_{m+1}) en remplaçant α par α^2].

1° Pour toute $p \in \sum$, la suite u associée est visiblement strictement croissante, et, compte tenu de (A_n) elle vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{p_1} \leq u_n \leq \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{1}{p_1}\right)^{2^{k-1}}\right) < \frac{1}{1 - 1/p_1} \leq 2 \qquad (1)$$

La suite u a donc une limite f(p) appartenant à $]1,2]$. □

Remarquons qu'en outre, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

$$u_n < u_{n+m} \leqslant u_n \prod_{i=1}^{m} \left(1 + \left(\frac{1}{p_n^2}\right)^{2^{i-1}}\right) < \frac{u_n}{1 - 1/p_n^2}$$

D'où (en fixant n et en faisant tendre m vers $+\infty$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < f(p) \leqslant \frac{u_n}{1 - 1/p_n^2} \tag{2}$$

2° Inversement soit $x \in]1,2]$. E est la partie entière ; $\mathbb{N}_n$ est $\{1,\dots,n\}$.

a) Montrons qu'il existe un unique élément $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\sum$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la condition :

$$(B_n) \quad u_n < x \leqslant \frac{u_n}{1 - 1/p_n^2}, \text{ où } u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$$

Pour cela nous allons établir par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique famille $(p_1,\dots,p_n)$ d'entiers vérifiant l'assertion :

$$(C_n) \quad (p_1 \geqslant 2) \wedge (\forall k \in \mathbb{N}_{n-1} \quad p_{k+1} \geqslant p_k^2) \wedge (\forall k \in \mathbb{N}_n \quad B_n).$$

• (C_1) s'écrit : $(p_1 \geqslant 2) \wedge B_1$, ou encore, grâce à un calcul simple :

$$(p_1 \geqslant 2) \wedge \left(\frac{x}{x-1} - 1 < p_1 \leqslant \frac{x}{x-1}\right)$$

Cette condition est vérifiée par le seul entier $E\left(\frac{x}{x-1}\right)$, que nous notons P_1, et qui est bien supérieur à 2, à cause de $x \in]1,2]$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'il existe une unique famille $(P_1,\dots,P_n)$ vérifiant (C_n). Pour que la famille $(P_1,\dots,P_n,p_{n+1})$ vérifie (C_{n+1}), il faut et il suffit que :

$$(p_{n+1} \geqslant P_n^2) \wedge B_{n+1}$$

ce qui s'écrit : $(p_{n+1} \geqslant P_n^2) \wedge \left(\frac{x}{x-U_n} - 1 < p_{n+1} \leqslant \frac{x}{x-U_n}\right)$, où U_n désigne $\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{P_n}\right)$.

Cette condition est vérifiée par le seul entier $E\left(\frac{x}{x-U_n}\right)$, que nous notons P_{n+1}, et qui est bien supérieur à P_n^2, à cause de (B_n) qui donne :

$$0 < x - U_n \leqslant \frac{U_n}{P_n^2 - 1}, \quad \text{et donc} \quad \frac{U_n}{x-U_n} \geqslant P_n^2 - 1, \text{ et enfin } P_{n+1} > P_n^2 - 1$$

b) Comme, d'après (2), toute suite $p \in \sum$ telle que $f(p) = x$ doit vérifier: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (B_n), la seule solution possible de l'équation $f(p) = x$ est la suite P, mise en évidence en a), et donnée par : $P_1 = E\left(\frac{x}{x-1}\right)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n+1} = E\left(\frac{x}{x-U_n}\right), \text{ où } U_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{P_k}\right) .$$

D'autre part cette suite P a pour image par f un réel $X \in]1,2]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x - U_n$ et $X - U_n$ appartiennent à $\left]0, \frac{U_n}{P_n^2 - 1}\right]$, et donc :

$$|x-X| \leqslant \frac{U_n}{P_n^2-1}$$

Comme $U_n \leqslant 2$, et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty$, nécessairement $x = X$; l'équation $f(p) = x$ admet donc P pour solution unique.

c) En conclusion f est une bijection de Σ sur $]1,2]$.

$\boxed{1.2.2}$ Soit S l'ensemble des suites $q = (q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, croissantes au sens large. On se propose de démontrer que S est équipotent à $]0,1]$.

1° A tout élément q de E on associe la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k}$$

Montrer que v admet une limite, appartenant à $]0,1]$, que l'on notera $g(q)$.

2° Montrer qu'à tout $x \in]0,1]$ on peut associer une unique suite $q \in E$ telle que $g(q) = x$. Conclure.

3° Montrer que $x \in]0,1]$ est rationnel si et seulement si la suite $g^{-1}(x)$ est stationnaire.

Il s'agit d'une variante - plus simple - de l'exercice précédent. En ce qui concerne 1° et 2°, nous ne donnerons qu'une ébauche de solution.

1° Pour toute $q \in S$, v est strictement croissante, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{q_1} \leqslant v_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1 \tag{1}$$

La suite v a donc une limite $g(q)$ appartenant à $]0,1]$. □

Remarquons qu'en outre, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$v_n < v_{n+m} \leqslant v_n + \frac{1}{q_1 \cdots q_n} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{q_n^i} < v_n + \frac{1}{q_1 \cdots q_n} \frac{1}{q_n - 1}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n < g(q) \leqslant v_n + \frac{1}{q_1 \cdots q_n} \frac{1}{q_n - 1} \tag{2}$$

2° Inversement soit $x \in]0,1]$.

a) En s'inspirant de l'exercice précédent, le lecteur montrera qu'il existe un unique élément $q = (q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de S vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la condition :

$$(C_n) \qquad v_n < x \leqslant v_n + \frac{1}{q_1 \cdots q_n}\ \frac{1}{q_n - 1}, \quad \text{où} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_1 \cdots q_k}$$

et que cette suite Q est donnée par : $Q_1 = E\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$Q_{n+1} = E\left(1 + \frac{1}{Q_1 \cdots Q_n (x - V_n)}\right), \quad \text{où} \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Q_1 Q_2 \cdots Q_k}$$

b) On montre alors que la seule solution possible de l'équation $g(q) = x$ est la suite Q.

D'autre part cette suite Q a pour image par g un réel $X \in]0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $x - V_n$ et $X - V_n$ appartiennent à $]0, \frac{1}{Q_1 \cdots Q_n}\ \frac{1}{Q_n - 1}]$,

et donc : $|x - X| \leqslant \frac{1}{Q_1 \cdots Q_n}\ \frac{1}{Q_n - 1} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Nécessairement : $x = X$.

3° a) Supposons que $q \in S$ est stationnaire, i.e. que :

$$\exists m \in \mathbb{N}^\star \quad \forall n \geqslant m \quad q_n = q_m$$

Ecrivons : $x = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{q_1 \cdots q_k} + \frac{1}{q_1 \cdots q_m} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{q_m}\right)^i$

Les deux sommes $\sum$ qui interviennent dans l'égalité précédente sont des rationnels, et donc x est rationnel.

b) Soit $q \in S$ telle que $g(q) = \frac{\alpha}{\beta}$, $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, $\alpha \leqslant \beta$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ nous avons :

$$v_n < \frac{\alpha}{\beta} \leqslant v_n + \frac{1}{q_1 \cdots q_n}\ \frac{1}{q_n - 1}$$

et donc : $\beta q_1 \cdots q_n v_n < \alpha q_1 \cdots q_n \leqslant \beta q_1 \cdots q_n v_n + \frac{\beta}{q_n - 1}$.

Comme $\alpha q_1 \cdots q_n$ et $\beta q_1 \cdots q_n v_n$ sont des entiers distincts, nous avons donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \frac{\beta}{q_n - 1} \geqslant 1, \text{ i.e. : } \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \quad q_n \leqslant 1 + \beta$$

ce qui exige que la suite croissante q soit stationnaire.

$\boxed{1.2.3}$ Soit S l'ensemble des suites $\mathcal{E} = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout n, $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$. A tout élément $\mathcal{E}$ de S on associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{\varepsilon_0}{1} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{2} + \dots + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}{2^n}$$

1° Montrer que la suite (a_n) est convergente, de limite appartenant à $[-2,2]$, limite que l'on notera $f(\mathcal{E})$.

2° Montrer qu'à tout $x \in [-2,2]$, on peut associer une suite $\mathcal{E} \in S$ telle que $f(\mathcal{E}) = x$; cette suite est-elle unique ?

3° Soit $\&$ un élément de S ; en utilisant pour $|h| \leqslant \frac{\pi}{4}$, l'égalité $\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sin 2h}$, prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\, a_n\right) = \varepsilon_0 \sqrt{2 + \varepsilon_1 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\sqrt{2+\varepsilon_n\sqrt{2}}}}$$

Etudier la suite de terme général $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$.

La résolution de cet exercice est laissée au lecteur.

$\boxed{1.2.4}$ MOYENNE DE CESARO. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un e.v.n. E.

1° Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs vérifiant :

$$\alpha_0 > 0 \ ; \ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = +\infty.$$

On suppose ici que la suite (a_n) admet une limite ℓ. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k\right) / \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)$$

admet ℓ pour limite.

2° On suppose ici qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que la suite $(a_{n+p}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite λ. Montrer que la suite $(a_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet λ/p pour limite.

Application : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par la récurrence :

$$x_0 \in]0,\pi[\ ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \sin x_n.$$

Trouver un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$, dans l'échelle $(n^k)_{k\in\mathbb{Q}}$.

3° On suppose ici que $E = \mathbb{R}$, que $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout n et que la suite (a_{n+1}/a_n) admet une limite L. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet L pour limite.

1° Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$; nous avons $S_n > 0$ pour tout n ; d'où l'existence de la suite (b_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$b_n - \ell = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_k - \ell)\right) / S_n$$

Il suffit donc de démontrer la proposition dans le cas où $\ell = 0$. Supposons $\ell = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Associons lui $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \|a_n\| \leqslant \varepsilon/2.$$

Pour tout $n \geqslant N$ écrivons :

$$b_n = \frac{1}{S_n} \sum_{k=o}^{N-1} \alpha_k a_k + \frac{1}{S_n} \sum_{k=N}^{n} \alpha_k a_k$$

ce qui entraîne, compte tenu du choix de N :

$$\| b_n \| \leqslant \frac{1}{S_n} \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k a_k \right\| + \varepsilon/2.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, il existe $N' \geqslant N$ tel que :

$$\forall n \geqslant N' \quad \frac{1}{S_n} \left\| \sum_{k=o}^{N-1} \alpha_k a_k \right\| \leqslant \varepsilon/2.$$

et donc : $\forall n \geqslant N' \quad \| b_n \| \leqslant \varepsilon$. □

Remarques. a) On peut remplacer la condition $\alpha_0 \neq 0$ par : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_p \neq 0$, à condition d'introduire alors la suite $(b_n)_{n \geqslant p}$.

b) Voici deux cas particuliers. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \ell, \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n^2} = \ell/2.$$

c) Si $E = \mathbb{R}$, le résultat vaut pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

d) Le résultat se déduit de la sommation des relations de comparaison sur les séries (voir par exemple notre IV.1.6.1, 2°).

2° A tout $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ nous associons la suite $u^{(i)}$ de terme général $a_{(n+1)p+i} - a_{np+i} = u_n^{(i)}$, $n \in \mathbb{N}$, qui est extraite de la suite $(a_{n+p} - a_n)$ et admet donc λ pour limite.

D'après le 1° (tous les α_k étant égaux à 1), la suite de terme général :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=o}^{n-1} u_k^{(i)} = \frac{1}{n}(a_{np+i} - a_i), \; n \in \mathbb{N}^\star,$$

admet λ pour limite. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{np+i}/n) = \lambda$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{np+i}}{np+i} = \frac{\lambda}{p}, \text{ pour tout } i \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$ □

Remarque. Ici encore, si $E = \mathbb{R}$, le résultat vaut pour $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

Application. On vérifie par récurrence que (x_n) est strictement décroissante, à valeurs dans $]0, \pi[$, et donc convergente ; égale à son sinus, la limite de (x_n) est 0 ; x_n est donc infiniment petit avec $1/n$, et, pour n tendant vers $+\infty$:

$$\sin x_n \sim x_n \; ; \; x_n^2 - \sin^2 x_n \sim x_n^4/3.$$

D'où : $\quad x_n^2 - x_{n+1}^2 \sim x_n^2 \cdot x_{n+1}^2/3$, et $\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2} \sim 1/3$.

La proposition du 2° s'applique avec $a_n = 1/x_n^2$, $p = 1$ et $\lambda = 1/3$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/x_n^2}{n} = \frac{1}{3}, \text{ et (puisque } x_n > 0) : x_n \sim \sqrt{3/n}.$$

Le lecteur trouvera une généralisation dans l'exercice n° 3.3.7.

3° Posons $u_n = \operatorname{Log} a_n$; $u_{n+1} - u_n = \operatorname{Log}(a_{n+1}/a_n)$; $u_n/n = \log \sqrt[n]{a_n}$.
A priori $L \geqslant 0$. Si $L \in \mathbb{R}_+^*$, il vient : $\lim(u_{n+1} - u_n) = \operatorname{Log} L$. D'où, d'après le 2°:

$$\lim u_n/n = \operatorname{Log} L, \quad \text{et } \lim \sqrt[n]{a_n} = L.$$

La remarque du 2°, permet d'étendre à $L = 0$, et aussi à $L = +\infty$.

Remarque. L'étude des séries entières (comparaison des règles de Cauchy et de d'Alembert) fournit une autre démonstration.

$\boxed{1.2.5}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

i) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \geqslant 1$;

ii) $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad a_{m+n} \leqslant a_m . a_n$

Etudier la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$, où $b_n = \dfrac{\operatorname{Log} a_n}{n}$.

— Commençons par remarquer que :

a) La suite (b_n) est réelle et positive ;

b) Pour tout $(n,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a (récurrence) : $a_{qn} \leqslant (a_n)^q$
et donc : $\dfrac{\operatorname{Log} a_{qn}}{qn} \leqslant \dfrac{\operatorname{Log} a_n}{n}$.

— De a) nous déduisons l'existence de $\ell = \inf\limits_{n\geqslant 1} b_n$, avec $\ell \geqslant 0$.

— Nous allons montrer que la suite (b_n) admet ℓ pour limite.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\ell \leqslant b_N < \ell + \varepsilon$.

Tout entier $n \geqslant N$ s'écrit (par division euclidienne) $n = qN + r$, avec $q \geqslant 1$ et $0 \leqslant r \leqslant N-1$. D'où :

$$\frac{\operatorname{Log} a_n}{n} \leqslant \frac{\operatorname{Log} a_{qN}}{n} + \frac{\operatorname{Log} a_r}{n}$$

En majorant $\operatorname{Log} a_r$ par $M = \max\limits_{0\leqslant\rho\leqslant N-1} (\operatorname{Log} a_\rho)$, et en écrivant (grâce à b)) :

$$\frac{\operatorname{Log} a_{qN}}{n} \leqslant \frac{\operatorname{Log} a_{qN}}{qN} \leqslant \frac{\operatorname{Log} a_N}{N} < \ell + \varepsilon$$

on constate que, pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$\ell \leqslant b_n < \ell + \varepsilon + \frac{M}{n}$$

Pour tout $n \geqslant \max(N, M/\varepsilon)$, on a donc :

$$\ell \leqslant b_n \leqslant \ell + 2\varepsilon.$$ □

D'une manière analogue le lecteur pourra traiter l'exercice suivant :

1.2.6 Soit (a_n) une suite réelle vérifiant :

i) la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée ;

ii) $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad a_m + a_n \leqslant a_{m+n}$

Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente

1.2.7 Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_n désigne l'excès de $(2+\sqrt{3})^n$ sur sa partie entière.

La formule du binôme montre que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier.

Compte tenu de $u_n \in [0,1[$, $u_n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier appartenant à l'intervalle $[(2-\sqrt{3})^n, 1+(2-\sqrt{3})^n[$. Comme $0 < (2-\sqrt{3})^n \leqslant 1$, cet entier est 1. En d'autres termes : $u_n = 1 - (2-\sqrt{3})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que la suite est croissante, de limite 1.

1.2.8 A toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs, on associe la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}$$

1° Dans le cas où $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite (x_n) est convergente et trouver sa limite.

2° On suppose ici qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a_n \leqslant \lambda^{(2^n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (x_n) est convergente.

3° On suppose ici qu'il existe $\lambda > 1$ et $\alpha > 2$ tels que $a_n \geqslant \lambda^{(\alpha^n)}$ pour une infinité de valeurs de n. Montrer que la suite (x_n) est divergente.

4° Etudier successivement les cas : $a_n = n$, $a_n = n!$, $a_n = n^n$.

α) Pour une suite (a_n) donnée, on passe de x_n à x_{n+1} en remplaçant a_n par $a_n+\sqrt{a_{n+1}}$. Toute suite (x_n) est donc croissante.

β) Les suites (x_n) et (x'_n) associées à deux suites (a_n) et (a'_n) telles que : $a_n \leqslant a'_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ vérifient elles-mêmes : $x_n \leqslant x'_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; si (x'_n) converge, (x_n) est croissante et majorée ; elle converge donc.

1° On a ici : $x_{n+1}^2 = 1 + x_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Considérant le zéro positif $\omega=(1+\sqrt{5})/2$ de X^2-X-1 (tel que $1<\omega$), on en déduit :

$$\omega^2 - x_{n+1}^2 = \omega - x_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

D'où, par récurrence : $x_n<\omega$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Croissante et majorée, la suite x_n est convergente, et sa limite ℓ vérifie : $(1<\ell\leqslant\omega)\wedge(\ell^2=1+\ell)$. D'où : $\ell=\omega=(1+\sqrt{5})/2$. □

2° On pose : $a_n=b_n\lambda^{(2^n)}$ avec $0\leqslant b_n\leqslant 1$, et on constate que (x_n/λ) est la suite associée à la suite (b_n). En utilisant la remarque β) et le 1°, on déduit que la suite (x_n/λ) est convergente. Il en est de même de la suite (x_n). □

3° Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $a_n\geqslant\lambda^{(\alpha^n)}$. En minorant par 0 les a_k tels que $1\leqslant k\leqslant n-1$, on constate : $x_n\geqslant\lambda^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}=+\infty$, on en déduit que la suite (x_n) n'est pas majorée et que, par suite, elle est divergente.

4° Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous allons vérifier l'assertion $n^n\leqslant\exp(2^n)$, qui s'écrit : $n\log n\leqslant 2^n$, et que nous notons (A_n).

D'après le 2° (avec $\lambda=e$), il en résultera que la suite (x_n) associée à la suite $(a_n=n^n)$ est convergente, ce qui entraînera (d'après la remarque β)) que les suites (x_n) associées aux suites $(a_n=n!)$ et $(a_n=n)$ sont convergentes.

— Pour $n\in\{1,2,3\}$, l'assertion (A_n) se vérifie directement.

— Pour $n\geqslant 4$, elle est une conséquence de $\operatorname{Log} n<n$ et de

$$n^2\leqslant 2^n \quad , \quad \text{i.e. } 2\operatorname{Log} n\leqslant n\operatorname{Log} 2$$

ce qui résulte de ce que $(\operatorname{Log} t)/t$ décroît de $(\operatorname{Log} 2)/2$ à 0 lorsque t croît de 4 à $+\infty$ (utiliser une dérivation). □

$\boxed{1.2.9}$ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant à la fois :

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1}-u_n)=0$; ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$; iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

Montrer que $E=\{u_n-v_m \mid (n,m)\in\mathbb{N}^2\}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

Démonstration par l'absurde. Faisons l'hypothèse (H) : la partie E de $\mathbb{R}$ n'est pas dense, i.e. il existe $(a,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ tel que :

$$\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n-v_m\notin\,]a-\varepsilon,a+\varepsilon[\tag{1}$$

D'après i), à ε on peut associer un $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant N \quad |u_{n+1}-u_n|\leqslant\varepsilon \tag{2}$$

D'après iii), on a : $\lim\limits_{m\to+\infty}(u_N-v_m)=-\infty$, ce qui implique l'existence d'un $M\in\mathbb{N}$ tel que $u_N-v_M\leqslant a-\varepsilon$.

D'après (1), le réel $u_{N+1}-v_M$ ne peut appartenir à $]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$; il ne peut pas non plus appartenir à $[a+\varepsilon,+\infty[$, sans quoi on aurait $u_{N+1}-u_N\geqslant 2\varepsilon$, en contradiction avec (2) ; on a donc : $u_{N+1}-v_M\leqslant a-\varepsilon$.

En raisonnant par récurrence, on montre sans difficulté :

$$\forall n\geqslant N \quad u_n-v_M\leqslant a-\varepsilon$$

ce qui est en contradiction avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_M)=+\infty$ (conséquence de ii)). □

$\boxed{1.2.10}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant à la fois :

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$; ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

1° Trouver l'adhérence de $A=\{u_n-E(u_n) \mid n\in\mathbb{N}\}$; E est la partie entière.

2° Trouver l'adhérence de $B=\{\sin(u_n) \mid n\in\mathbb{N}\}$

On utilise l'exercice précédent, avec $v_n=n$ au 1°, et $v_n=2n\pi$ au 2°.

1° On a : $\overline{A}\subset[0,1]$.

Pour tout $]\alpha,\beta[\,\subset[0,1]$, avec $\alpha<\beta$, il existe un $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ tel que : $(u_n-m)\in\,]\alpha,\beta[$, ce qui implique $(u_n-m)\in\,]0,1[$ et donc $m=E(n)$; il existe donc un $n\in\mathbb{N}$ tel que $\big(u_n-E(u_n)\big)\in\,]\alpha,\beta[$.

Il en résulte : $]0,1[\,\subset\overline{A}$, et, comme $\overline{A}$ est fermé : $[0,1]\subset\overline{A}$.

En conclusion : $\overline{A}=[0,1]$.

2° On a : $\overline{B} \subset [-1,1]$.

Pour tout $]\alpha,\beta[\subset [-1,1]$, avec $\alpha < \beta$, il existe un $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$(u_n - 2m\pi) \in \left] \operatorname{Arc\,sin} \alpha, \operatorname{Arc\,sin} \beta \right[$$

ce qui implique : $\sin(u_n) \in]\alpha,\beta[$.

Il en résulte : $]-1,1[\subset \overline{B}$, et, comme $\overline{B}$ est fermé, $[-1,1] \subset \overline{B}$.
En conclusion : $\overline{B} = [-1,1]$.

Exemples. On peut adopter $u_n = \sqrt{n}$, ce qui se justifie en utilisant $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

On peut aussi adopter $u_0 = 0$ et $u_n = \operatorname{Log} n$ pour $n \geqslant 1$, ce qui se justifie en utilisant $\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n = \operatorname{Log}(1 + 1/n)$.

$\boxed{1.2.11}$ Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 et de la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sin 2u_n$.

a) A partir de u_1, tous les u_n appartiennent à $[-1,+1]$. Quitte à opérer un changement d'indexation, on peut donc supposer : $u_0 \in [-1,+1]$.

On élimine $u_0 = 0$, auquel cas $u_n = 0$ pour tout n.

Quitte à remplacer tous les u_n, qui sont de même signe, par les nombres opposés, on peut se limiter à : $u_0 \in]0,1]$.

b) On étudie $\varphi : t \mapsto \sin 2t$ sur $[0,1]$. Elle est de classe C^∞.

t	0	$\pi/4$	1
$\varphi(t)$	0 ↗	1	↘ $\sin 2$

Nous notons :

$$I = [0,\pi/4], \qquad J = [\pi/4,1]$$

De $\sin 2 > \pi/4$, nous déduisons $\varphi(J) \subset J$.

Nous avons en outre :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) \geqslant 4/\pi \cdot t \quad \text{(car } \varphi \text{ est concave)} \tag{1}$$

$$\forall t \in J \quad -k \leqslant \varphi'(t) \leqslant 0 \ ; \ k = |2\cos 2| < 1 \tag{2}$$

Posons $f(t) = t - \varphi(t)$. D'après (1), 0 est le seul zéro de f sur I. D'après $f(\pi/4) < 0$, $f(1) > 0$, et $f'(t) > 0$ pour tout $t \in J$, f admet sur J un zéro unique r, et on a $r = \varphi(r)$. On peut retrouver ce dernier résultat en remarquant que f induit une application k-contractante de l'espace métrique J dans lui-même, et en appliquant le théorème du point fixe.

c) 1er *Cas.* $u_0 \in J$. D'après le théorème du point fixe, (u_n) admet r pour limite. Directement on peut raisonner ainsi :

D'après $\varphi(J)\subset J$, la suite prend ses valeurs dans J. Comme $\varphi(u_n)=u_{n+1}$ et $\varphi(r)=r$, la formule des accroissements finis donne, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-r=\varphi'(\xi_n).(u_n-r),\quad \xi_n \text{ compris entre } u_0 \text{ et } r.$$

D'où, par récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases} u_n\in J\ ;\ \operatorname{sgn}(u_n-r)=\operatorname{sgn}\big((-1)^n(u_0-r)\big) \\ |u_n-r|\leqslant k^n|u_0-r|,\ 0<k<1. \end{cases}$$

La suite admet r pour limite ; u_n oscille autour de r, en se rapprochant de r alternativement par valeur supérieure et par valeur inférieure. C'est ainsi qu'en choisissant, par exemple, $u_0=0{,}9$ et en utilisant une calculatrice on obtient 0,9477471 pour valeur approchée de r à 10^{-7} près.

2ème *Cas*. $u_0\in]0,\pi/4[$. En utilisant (1) : $u_1\geqslant 4/\pi\cdot u_0$. Si $u_1\in]0,\pi/4[$, en itérant : $u_2\geqslant(4/\pi)^2\cdot u_0$. De toute façon, comme $4>\pi$, il existe un plus petit entier $p\geqslant 1$ tel que $u_{p-1}\in]0,\pi/4[$ et $u_p\in J$. En posant $u_{p+n}=v_n$, on se ramène au premier cas ; on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=r$.

$\boxed{1.2.12}$ Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par la donnée de u_0 et de : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=(u_n-1)^2.$

• La fonction $f: t\longmapsto (t-1)^2$ étant continue, une limite éventuelle ne peut être que l'une des racines de l'équation $f(t)-t=0$, à savoir $\alpha=(3-\sqrt{5})/2$ ou $\beta=(3+\sqrt{5})/2$.

Nous aurons à utiliser le tableau de variation de f :

t	0	α	1	2	β	+∞
f(t)	1 ↘	α ↘	0 ↗	1 ↗	β ↗	+∞

et les relations suivantes, valables pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=(u_n-\alpha)(u_n-\beta) \tag{1}$$

$$u_{n+1}-\alpha=(u_n-\alpha)(u_n+\alpha-2) \tag{2}$$

$$u_{n+1}-\beta=(u_n-\beta)(u_n+\beta-2) \tag{3}$$

$$u_{n+2}-u_n=u_n(u_n-1)(u_n-\alpha)(u_n-\beta) \tag{4}$$

Les trois premières se justifient sans difficulté. La dernière résulte, compte tenu de (2) et (3) de :

$$u_{n+2} - u_n = (u_{n+1} - \alpha)(u_{n+1} - \beta) + (u_n - \alpha)(u_n - \beta).$$

Le lecteur pourra s'aider d'une figure.

• En remarquant que tous les u_n, sauf peut être u_0, sont positifs, on peut se limiter au cas où $u_0 \geqslant 0$. On a la discussion :

<u>*Cas* I</u> : $u_0 \in [0,1]$. Ce cas se subdivise en :

I.1 : $u_0 \in [0,\alpha[$. Le tableau montre : $f([0,\alpha[) =]\alpha,1]$ et $f(]\alpha,1]) = [0,\alpha[$. En raisonnant par récurrence, on en déduit, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_{2p} \in [0,\alpha[, \ u_{2p+1} \in]\alpha,1]$$

et (en utilisant (4)) :

$$u_{2p+2} \leqslant u_{2p}, \quad u_{2p+3} \geqslant u_{2p+1} \ .$$

Dans ce cas I.1, les suites (u_{2p}), (u_{2p+1}) sont respectivement décroissante et minorée par 0, croissante et majorée par 1. Chacune d'elles admet une limite qui, à cause de (4), appartient à $\{0,1,\alpha,\beta\}$. On en déduit sans difficulté :

$$\lim u_{2p} = 0, \quad \lim u_{2p+1} = 1.$$

I.2 : $u_0 \in]\alpha,1]$. On a $u_1 \in [0,\alpha[$ et, à la notation près, on est ramené a au cas I.1. Ici :

$$\lim u_{2p} = 1, \quad \lim u_{2p+1} = 0.$$

I.3 : $u_0 = \alpha$. La suite est constante ; $u_n = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>*Cas* II</u> : $u_0 \in]1,2]$. On a $u_1 \in]0,1]$, ce qui ramène au cas I.

<u>*Cas* III</u> : $u_0 \in]2,\beta[$. On constate que $u_1 < u_0$ et que $u_1 \in]1,\beta[$. Si $u_1 \in]1,2]$, on est ramené au cas II, et donc au cas I. Sinon on a $u_1 \in]2,\beta]$, $u_2 < u_1$ et $u_2 \in]1,\beta[$.

Comme il n'est pas possible que la suite soit décroissante et à valeurs dans $]2,\beta[$, (car elle aurait alors une limite dans $[2,\beta[$), il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \in]2,\beta[$ et $u_{p+1} \in]1,2]$; on est ramené au cas II, et donc au cas I.

<u>*Cas* IV</u> : $u_0 = \beta$. La suite est constante ; $u_n = \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>*Cas* V</u> : $u_0 > \beta$. On vérifie par récurrence que la suite est croissante ; il n'est pas possible qu'elle soit majorée, car elle aurait alors une limite dans $]\beta,+\infty[$; on a donc $\lim u_n = +\infty$. On peut d'ailleurs remarquer que, d'après (3) :

$$u_{n+1} - \beta > 2(\beta-1)(u_n - \beta).$$

Remarque. On constate qu'il existe un voisinage de α (resp. β) sur lequel $f'(t) < -1$ (resp. $f'(t) > 1$), ce qui explique que le point α (resp. β) est "répulsif", et que la suite ne peut admettre α (resp. β) pour limite que dans le cas où il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $u_k = \alpha$ (resp. $u_k = \beta$).

$\boxed{1.2.13}$ Soit $a\in\mathbb{R}_+^\star$. Etudier la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

u_0 est donné ; $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\varphi(u_n)$, où $\varphi(t)=\dfrac{a(1+a^2)}{1+t^2}$

Pour $n\geqslant 1$, on a : $u_n\in\,]0,a(1+a^2)]$. Quitte à changer l'indexation, nous pouvons supposer que u_0 appartient à cet intervalle.

— Si la suite admet une limite, celle-ci est solution de l'équation $\varphi(t)-t=0$ qui s'écrit $(t-a)P(t)=0$, où $P(t)=t^2+at+a^2+1$.

La seule limite éventuelle est donc a ; par ailleurs si $u_0=a$, alors $u_n=a$ pour tout n, et la suite est constante. Dans ce qui suit, nous supposons

— Par un calcul direct, ou par la formule des accroissements finis et compte tenu de $\varphi(a)=a$, on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-a=k_n(u_n-a) \tag{1}$$

avec : $k_n=-\dfrac{a^2+au_n}{1+u_n^2}$, et $k_n=f'(\xi_n)$, ξ_n compris entre u_n et a.

On en déduit : $\mathrm{sgn}(u_n-a)=\mathrm{sgn}[(-1)^n(u_0-a)]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En particulier, si $u_0\neq a$, alors $u_n\neq a$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

— Il en résulte que des deux suites $v=(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w=(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, l'une prend ses valeurs dans $]0,a[$, l'autre dans $]a,a(1+a^2)]$.

Mais, φ étant strictement décroissante et donc $\varphi\circ\varphi$ étant strictement croissante, on constate en utilisant $u_{n+2}=(\varphi\circ\varphi)(u_n)$:

$$\mathrm{sgn}(u_{n+4}-u_{n+2})=\mathrm{sgn}(u_{n+2}-u_n)\ \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

ce qui entraîne que les suites v et w sont monotones. Comme elles sont bornées elles admettent des limites que l'on note α et β. La suite u converge si, et seulement si $\alpha=\beta=a$.

Les réels α et β sont des racines de l'équation $(\varphi\circ\varphi)(t)-t=0$. En remarquant que celle-ci admet pour racine complexe toute racine complexe de $\varphi(t)-t=0$, et que, par ailleurs elle s'écrit $Q(t)=0$, avec :

$$Q(t)=t[(1+t^2)^2+a^2(1+a^2)^2]-a(1+a^2)(1+t^2)^2$$

on peut affirmer que le polynôme Q est divisible par $(X-a)P$. On trouve :

$$Q(t)=(t-a)P(t)R(t),\quad R(t)=t^2-a(1+a^2)t+1$$

Premier cas : $0<a\leqslant 1$. On constate que $Q(t)=0$ admet a pour seule racine réelle (elle est triple si $a=1$) ; on a $\alpha=\beta=a$; la suite est convergente.

Deuxième cas : $a>1$. Ici $Q(t)=0$ admet trois racines réelles distinctes et on ne peut conclure.

Nous allons raisonner par l'absurde en utilisant (1), après avoir remarqué que $\varphi'(a)=-2a^2/(1+a^2)$ vérifie $\varphi'(a)<-1$, et que, d'après la continuité de φ', il existe $\eta\in]0,a[$ tel que $\varphi'(t)\leqslant -1$ pour tout $t\in[a-\eta,a+\eta]$.

Faisons l'hypothèse (H) : la suite u admet a pour limite. Il en résulte qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $|u_n-a|\leqslant\eta$ pour tout $n\geqslant N$. En utilisant (1), on en déduit, par récurrence : $|u_n-a|\geqslant|u_N-a|$ pour tout $n\geqslant N$, ce qui constitue une contradiction avec (H) (puisque nous nous en tenons à $u_0\neq a$, ce qui entraîne $|u_N-a|>0$).

$\boxed{1.2.14}$ Soit a un réel tel que $0<a<1$. Etudier la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : u_0 est donné ; $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=a^{u_n}$.

Exercice laissé au lecteur, qui s'inspirera de l'étude qui précède ; il fera la liaison avec l'exercice 3.4.12.

$\boxed{1.2.15}$ Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels strictement positifs, de limite 0. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $(u_0,u_1)\in\mathbb{R}^2$ et de :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\quad u_{n+1}=(2+\alpha_n+\beta_n)u_n-(1+\beta_n)u_{n-1}\qquad(1)$$

admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Existe-t-il $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}/u_n$?

- Si $(u_0,u_1)=(0,0)$, alors $u_n=0$ pour tout n ; la suite admet 0 pour limite; éliminons ce cas.
- En posant $x_n=u_n-u_{n-1}$ avec $u_{-1}=0$, (1) devient :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\quad x_{n+1}-x_n=\alpha_n u_n+\beta_n x_n\qquad(2)$$

Notons que l'hypothèse $(u_0,u_1)\neq(0,0)$ implique $(u_{n-1},u_n)\neq(0,0)$ et $(u_n,x_n)\neq(0,0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.

Nous nous trouvons dans un, et un seul, des trois cas suivants :

a) *Il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(u_p, x_p) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$. D'après (2) :

$$x_{p+1} > x_p \ ; \ x_{p+1} > 0 \ ; \ u_{p+1} > u_p \ ; \ u_{p+1} > 0$$

et (récurrence) : $\forall n > p \quad (x_{n+1} > x_n > 0) \wedge (u_{n+1} > u_n > 0)$.

d'où : $\forall q \in \mathbb{N}^* \quad u_{p+q} \geqslant u_{p+1} + (q-1)x_{p+2}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Pour tout $n > p+1$, nous disposons de $y_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}} - 1$, et nous constatons :

$$y_{n+1} = \alpha_n + (1+\beta_n) \frac{y_n}{1+y_n} \tag{3}$$

Comme $u_n > u_{n-1}$ entraîne $y_n > 0$, la suite $(y_{n+1})_{n>p+1}$ est positive et majorée par la suite convergente $(1+\alpha_n+\beta_n)_{n>p+1}$; elle est donc bornée et admet au moins une valeur d'adhérence, nécessairement positive. Si elle admettait une valeur d'adhérence $\lambda > 0$, elle admettrait tout $\lambda/(1+m\lambda)$, $m \in \mathbb{N}$, pour valeur d'adhérence, et elle aurait donc des termes dans tout voisinage de 0 ; comme

$$\left(y_n < \varepsilon,\ \alpha_n < \frac{\varepsilon^2}{1+2\varepsilon}\ ,\ \beta_n < \frac{\varepsilon^2}{1+2\varepsilon}\right) \Rightarrow \left(y_{n+1} < \varepsilon\right)$$

ce dont on s'assure en utilisant (3) et le fait que $t \longmapsto t/(1+t)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle admettrait 0 pour limite, ce qui constituerait une contradiction.

La suite bornée (y_{n+1}) admet ainsi 0 pour valeur d'adhérence unique, et donc comme limite. En d'autres termes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}/u_n = 1$.

b) *Il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(u_p, x_p) \in \mathbb{R}_-^2 \setminus \{(0,0)\}$. En raisonnant comme en a), on montre : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}/u_n = 1$.

c) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n x_n < 0$. De $u_n(u_n - u_{n-1}) < 0$ on déduit : u_n appartient à l'intervalle ouvert d'extrêmités 0 et u_{n-1}. Il en résulte que :

– Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; elle admet une limite $\ell \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous disposons ici de $z_n = 1 - \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$, avec $z_n \in]0,1[$, et nous constatons :

$$z_{n+1} = -\alpha_n + (1+\beta_n) \frac{z_n}{1-z_n} \tag{4}$$

La suite bornée $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet au moins une valeur d'adhérence, appartenant nécessairement à $[0,1]$. Pour que 1 soit valeur d'adhérence, il faudrait, d'après (4), qu'il existe des z_n dans tout intervalle $[A,+\infty[$, ce qui est impossible.

D'autre part, si la suite admettait une valeur d'adhérence $\mu \in]0,1]$, elle admettrait tout $\mu/(1-m\mu)$, $m \in \mathbb{N}$, pour valeur d'adhérence, ce qui constituerait une contradiction (ce que le lecteur vérifiera comme en a). On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = 1.$$

— Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est croissante et majorée par 0 ; elle admet une limite $\ell \leqslant 0$; on montre que, encore dans ce cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = 1$.

1.2.16 Etudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$, où $u_n = \left(1 + \frac{in}{n^2-1}\right)^n$.

Au voisinage de $+\infty$, $\theta_n = \text{Arc tg } \frac{n}{n^2-1}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$.

Pour $n \geqslant 2$, nous avons : $u_n = (\cos n\theta_n + i \sin n\theta_n)/\cos^n \theta_n$.

De $\theta_n \sim 1/n$ résulte : $\lim(\cos n\theta_n + i \sin n\theta_n) = \cos 1 + i \sin 1$.

D'autre part $\text{Log} \cos^n \theta_n = n \,\text{Log}(\cos \theta_n)$ est équivalent à $n(\cos\theta_n - 1)$, et donc à $-n\theta_n^2/2$, et enfin à $-1/(2n)$. D'où : $\lim(\cos^n \theta_n) = 1$.

En conclusion : $\lim u_n = \cos 1 + i \sin 1$.

1.2.17 Existe-t-il $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$, où $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$ et $u_k = \frac{k^2+k+1+i}{k^2+k+1-i}$?

En écrivant $\frac{1}{k^2+k+1} = \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}$, on constate que, si l'on pose

$\varphi_k = \text{Arc tg}\, k$, alors on a : $1/(k^2+k+1) = \text{tg}(\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ et :

$u_k = \exp\big(2i(\varphi_{k+1} - \varphi_k)\big)$

Il en résulte : $P_n = \exp\big(2i(\varphi_{n+1} - \varphi_1)\big)$.

Comme $\varphi_1 = \pi/4$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_{n+1} = \pi/2$, il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \exp(i\pi/2) = i.$$

TOPOLOGIE

2.1. TOPOLOGIE GÉNÉRALE

2.1.1 Soient E un espace topologique séparé, A et B deux compacts de E vérifiant : $A\cap B=\phi$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de E, vérifiant :

$$A\subset U \ ; \ B\subset V \ ; \ U\cap V=\phi$$

• Soit a un point de E tel que : $a\notin A$. A tout $x\in A$ (vérifiant donc $x\neq a$) on peut associer deux ouverts U_x et V_x vérifiant :

$$x\in U_x \ ; \ a\in V_x \ ; \ U_x\cap V_x=\phi \quad \text{(E est séparé)}$$

La famille $(U_x)_{x\in A}$ est un recouvrement ouvert de A. On peut donc en extraire un recouvrement fini : $\left(U_{x_i}\right)_{i\in N_n}$. Notons alors $U=\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ et $V=\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Il est immédiat que U et V sont des ouverts vérifiant $A\subset U$ et $a\in V$. Par ailleurs si $x\in U\cap V$, alors il existe $i_0\in N_n$ vérifiant $x\in U_{x_{i_0}}$ (car $x\in U$), et aussi $x\in V_{x_{i_0}}$ (car $x\in V$) ce qui contredit $U_{x_{i_0}}\cap V_{x_{i_0}}=\phi$. Ainsi $u\cap V=\phi$.

• Soit maintenant $x\in B$. Comme $A\cap B=\phi$, on a : $x\notin A$. D'après ce qui précède il existe deux ouverts U'_x et V'_x vérifiant : $A\subset U'_x$; $x\in V'_x$; $U'_x\cap V'_x=\phi$.

Comme précédemment $(V'_x)_{x\in B}$ est un recouvrement ouvert de B, dont on extrait un recouvrement fini $\left(V'_{x_i}\right)_{i\in N_n}$. Le lecteur vérifiera alors aisément que $U'=\bigcap_{i=1}^{n} U'_{x_i}$ et $V'=\bigcup_{i=1}^{n} V'_{x_i}$ répondent à la question.

• Si (E,d) est métrique, il suffit de supposer que A et B sont des fermés d'intersection vide. On prend, avec $\delta(x)=d(x,A)-d(x,B)$:

$$U=\{x\in E \mid \delta(x)<0\} \ ; \ V=\{x\in E \mid \delta(x)>0\}.$$

2.1.2 Soient E et F deux espaces topologiques séparés, F étant supposé compact. On suppose qu'il existe une application $f:E\rightarrow F$ possédant les deux propriétés :

i) Pour tout $y\in F$, $f^{-1}(y)$ est un compact de E ;

ii) f est fermée (i.e. pour tout fermé A de E, f(A) est un fermé de F).

Montrer que E est compact.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E d'intersection vide. Nous allons montrer qu'il existe une sous-famille finie d'intersection vide.

Soit $y\in F$; $\left(A_i \cap f^{-1}(y)\right)_{i\in I}$ est une famille de fermés du compact $f^{-1}(y)$, et son intersection est vide. Il existe donc une partie finie de I, que nous notons J_y, telle que :

$$B_y \cap f^{-1}(y) = \phi, \text{ où } B_y = \bigcap_{i\in J_y} A_i .$$

Remarquons : $\forall x \in B_y \quad f(x) \neq y$. (1)

B_y est un fermé de E ; d'après ii), $f(B_y)$ est un fermé de F.

Nous avons $\bigcap_{y\in F} f(B_y) = \phi$; en effet s'il existait $z \in \bigcap_{y\in F} f(B_y)$, nous aurions en particulier $z \in f(B_z)$, et donc $z = f(x)$ avec $x \in B_z$, ce qui constituerait une contradiction avec (1).

Comme F est compact, on peut trouver n éléments $y_1, \dots, y_n$ de F tels que :

$$\bigcap_{i=1}^{n} f\left(B_{y_i}\right) = \phi .$$

Or $f\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_{y_i}\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f\left(B_{y_i}\right)$. D'où : $\bigcap_{i=1}^{n} B_{y_i} = \phi$. Comme chaque B_{y_i} est une intersection finie de A_i, il en est de même de $\bigcap_{i=1}^{n} B_{y_i}$. □

2.1.3 Soient E un espace topologique compact et $(A_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés connexes de E. Montrer que $A = \bigcap_{n\in \mathbb{N}} A_n$ est connexe.

Par l'absurde. Faisons l'hypothèse (H) : A n'est pas connexe.

Il existe donc deux fermés non vides et disjoints, B_1 et B_2, de A dont la réunion est A ; puisque A est fermé, B_1 et B_2 sont des fermés de E, et donc des compacts (car E est compact).

E étant séparé, d'après 2.1.1, il existe deux ouverts Ω_1 et Ω_2 tels que

$$B_1 \subset \Omega_1, \ B_2 \subset \Omega_2, \ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi .$$

$\Omega_1 \cup \Omega_2$ est un ouvert de E, que nous notons Ω ; nous avons $A \subset \Omega$.

En notant $F_n = A_n \setminus \Omega$, nous constatons que $(F_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une famille de fermés de E dont l'intersection $A\setminus\Omega$ est vide ; E étant compact, on peut en extraire une sous famille d'intersection vide $(F_n)_{n\in I}$, où I est une partie finie de $\mathbb{N}$; en posant $m = \max I$, et en remarquant que $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $F_m = \phi$, et donc $A_m \subset \Omega$.

Nous constatons que $A_m \cap \Omega_1$ et $A_m \cap \Omega_2$, qui contiennent respectivement B_1

et B_2, sont des ouverts non vides disjoints de A_m, et que leur réunion est A_m, ce qui contredit la connexité de A_m.

L'hypothèse (H) est donc absurde. □

Remarque. La compacité de E est essentielle. Soient en effet $E = \mathbb{R}^2$, et $A_n = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, n[\times]-1, 1[)$. Le lecteur vérifiera que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés connexes de E, mais qu'ici $A = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times]-1, 1[)$ n'est pas connexe.

★ $\boxed{2.1.4}$ ESPACES DE BAIRE. 1° Soit E un espace topologique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts denses de E, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans E.

ii) Pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés d'intérieur vide de E, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ a un intérieur vide.

Tout espace topologique E vérifiant i) et ii) est dit espace de Baire.

2° Soit G un ouvert d'un espace de Baire E. Montrer que G (muni de la topologie induite) est un espace de Baire.

3° Soit E un espace métrique complet. Montrer que c'est un espace de Baire.

1° Conséquence directe de ce que, pour toute partie A de E :

$$E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$$

2° Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de G denses dans G, et U l'intersection des U_n. Comme G est un ouvert de E, chaque U_n est un ouvert de E ; associons lui :

$$O_n = U_n \cup \overset{\circ}{\widehat{E \setminus G}}$$

qui, au titre de réunion de deux ouverts de E, est un ouvert de E. Nous avons :

$$\overline{O}_n = \overline{U}_n \cup \overline{E \setminus \overline{G}}.$$

Comme U_n est dense dans G, on a $\overline{U}_n \supset G$, et donc $\overline{U}_n \supset \overline{G}$. Comme $\overline{E \setminus \overline{G}} \supset E \setminus \overline{G}$, on en déduit $\overline{O}_n = E$.

$(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi une suite d'ouverts denses de l'espace de Baire E ; l'intersection O des O_n est donc dense dans E ; on a :

$$E=\overline{O}=\overline{U}\cup\overline{E\setminus\overline{G}}=\overline{U}\cup E\setminus\overset{\circ}{\overline{G}}$$

Il en résulte : $\overline{U}\supset E\setminus(E\setminus\overset{\circ}{\overline{G}})$, et $\overline{U}\supset\overset{\circ}{\overline{G}}$.

Comme G est ouvert, $G\subset\overline{G}$ entraîne $G\subset\overset{\circ}{\overline{G}}$. On a donc $\overline{U}\supset G$, et U est dense dans G. □

3° Soient G un ouvert non vide de E, et $U=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ où les U_n sont des ouverts denses de E. Il s'agit de montrer : $G\cap U\neq\emptyset$.

Pour cela, montrons qu'il est possible de construire par récurrence une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (pour l'inclusion) de boules fermées de E telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, B_n soit inclus dans $G\cap U_n$ et de rayon inférieur à $1/2^n$.

— Comme G est un ouvert non vide et U_0 un ouvert dense de E, $G\cap U_0$ est un ouvert non vide de E, qui contient donc une boule fermée de E, et aussi une boule fermée concentrique à la précédente et de rayon inférieur à 1.

— Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que l'on dispose de la famille $(B_0,B_1,\dots,B_n)$ vérifiant les conditions énoncées ci-dessus. L'intérieur de B_n, qui est un ouvert contenant la boule ouverte de même centre et de même rayon que B_n, est un ouvert non vide de E ; il rencontre U_{n+1} (qui est dense dans E) ; $\overset{\circ}{B}_n\cap U_{n+1}$ est un ouvert non vide de E, et contient donc une boule fermée B_{n+1} de rayon inférieur à $1/2^{n+1}$. On a :

$$B_{n+1}\subset B_n,\ B_{n+1}\subset U_{n+1},\ B_n\subset G,\ \text{et donc : } B_{n+1}\subset G\cap U_{n+1}\ .$$

L'existence de la suite en résulte.

E étant complet, on peut appliquer le théorème des fermés emboités : il existe un point $a\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n$. Comme $B_n\subset G\cap U_n$ pour tout n, on en déduit :

$a\in G\cap U$. □

Remarque. Tout espace topologique localement compact (i.e. séparé et tel que tout point admette un voisinage compact) est un espace de Baire. On le montre en remplaçant dans la démonstration du 3° les B_n par des voisinages compacts d'un point (i.e. des compacts d'intérieur non vide).

★ 2.1.5 Soit f une application de $\mathbb{R}_+$ dans un e.v.n. On lui associe les propriétés.

(P) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$; (Q) $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$ $\lim\limits_{n\to+\infty}f(nt)=0$.

Il est évident que : $P\Rightarrow Q$.

1° Est-il vrai que $Q \Rightarrow P$?

2° On suppose que f est uniformément continue. Montrer que $Q \Rightarrow P$.

3° On suppose que f est continue. Montrer que $Q \Rightarrow P$.

Pour résoudre cette question, plus difficile, on établira :

LEMME. *Etant donnés* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $0 \leqslant \alpha < \beta$, *et* $p \in \mathbb{N}$, *il existe* $a \in \mathbb{R}_+$ *tel que :* $\bigcup_{n \geqslant p}]n\alpha, n\beta[\supset]a,+\infty[$

et on utilisera le fait que $\mathbb{R}_+$ est un espace de Baire (cf. N°2.1.4).

1° Il n'est pas vrai que $Q \Rightarrow P$. Montrons-le par un contre-exemple.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in \pi + \mathbb{N} \ ; \ f(x) = 0 \text{ si } x \notin \pi + \mathbb{N}.$$

a) Comme $\lim_{n\to+\infty} f(\pi+n) = 1$, f ne vérifie pas P.

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Il existe au plus un $n \in \mathbb{N}$ tel que $nt \in \pi + \mathbb{N}$. En effet l'hypothèse : $(n \neq n') \wedge (nt \in \pi + \mathbb{N}) \wedge (n't \in \pi + \mathbb{N})$ conduirait à $(n-n')t \in \mathbb{Z}$, puis à $t \in \mathbb{Q}$, et enfin à $nt \in \mathbb{Q}$, ce qui constituerait une contradiction ($\pi \notin \mathbb{Q}$). La suite $n \mapsto f(nt)$ prend donc au plus une fois la valeur 1 ; elle admet la limite 0. Il en résulte que f vérifie Q.

De a) et b) on déduit que Q n'entraîne pas P.

2° Nous supposons que f est uniformément continue et vérifie Q.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad (|x-y| \leqslant \eta) \Rightarrow (\|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon/2).$$

On a $\lim_{n\to+\infty} f(n\eta) = 0$; il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \qquad \|f(n\eta)\| \leqslant \varepsilon/2.$$

Pour tout $x \geqslant N\eta$, on pose $m = E(x/\eta)$, on constate $|x-m\eta| \leqslant \eta$ et $m \geqslant N$, ce qui entraîne :

$$\|f(x)-f(m\eta)\| \leqslant \varepsilon/2, \text{ et } \|f(m\eta)\| \leqslant \varepsilon/2 \ ; \text{ d'où } \|f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Il en résulte que f vérifie P. □

3° *Démonstration du lemme.* $\mathbb{R}$ est archimédien. D'après $\beta-\alpha > 0$, il existe un entier $n_0 \geqslant p$ tel que $n_0(\beta-\alpha) > \beta$. Posons $a = n_0\beta$.

Soit $t \in]a,+\infty[$. Notons $m-1$ la partie entière de t/β :

$$(m-1)\beta \leqslant t < m\beta.$$

Comme $n_0\beta < t$, il vient $n_0 \leqslant m-1$, i.e. $n_0 < m$.

On a : $m(\beta-\alpha) > \beta$, i.e. $m\alpha < (m-1)\beta$. D'où : $m\alpha < t < m\beta$.

En utilisant $m > p$: $t \in \bigcup_{n \geqslant p}]n\alpha, n\beta[$. □

Le lemme étant acquis, nous supposons que f est continue et vérifie Q. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. A tout $k \in \mathbb{N}$ nous associons $A_k = \{t \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \geqslant k \quad \| f(nt) \| \leqslant \varepsilon\}$.

En écrivant $A_k = \bigcap_{n \geqslant k} \{t \in \mathbb{R}_+ \mid \| f(nt) \| \leqslant \varepsilon\}$, et en utilisant la continuité de f, nous constatons que A_k est un fermé de $\mathbb{R}_+$. Or l'hypothèse entraîne $\mathbb{R}_+^* \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ (vérification aisée).

$\mathbb{R}_+$, muni de la distance usuelle, est un espace métrique complet, et donc un espace de Baire ; les fermés A_k ne peuvent être tous d'intérieur vide (sans quoi leur réunion serait d'intérieur vide). Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{A}_p \neq \emptyset$; on peut trouver $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant \alpha < \beta$ et $]\alpha,\beta[\subset A_p$.

D'après le lemme, il existe $a > 0$ tel que $]a,+\infty[\subset \bigcup_{n \geqslant p}]n\alpha, n\beta[$. A tout $t > a$ on peut donc associer un entier $m \geqslant p$ tel que $t \in]m\alpha, m\beta[$, ce qui entraîne $t/m \in A_p$ et donc (cf. définition de A_k) :

$$\| f(m \cdot t/m) \| \leqslant \varepsilon, \quad \text{i.e. } \| f(t) \| \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t > a \quad \| f(t) \| \leqslant \varepsilon$. □

Remarques. a) D'après le 3°, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie Q, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, et il est classique que f est uniformément continue.

b) Le lecteur pourra reprendre l'exercice en remplaçant Q par Q' : il existe une suite réelle positive $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant à la fois :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \; ; \; \lim_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \; ; \; \forall t > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} f(t + a_n) = 0.$$

c) Dans l'énoncé de l'exercice, on peut remplacer $\mathbb{R}_+$ par $\mathbb{R}_+^*$. En effet seule intervient la topologie de $\mathbb{R}_+$; on peut donc le munir d'une distance topologiquement équivalente à la distance usuelle, et telle que $\mathbb{R}_+^*$ soit soit complet (une telle distance existe).

On peut aussi remarquer que $\mathbb{R}_+^*$ est un espace de Baire (comme ouvert de $\mathbb{R}_+$, ou comme espace topologique localement compact).

★ $\boxed{2.1.6}$ COMPACTIFIÉ D'ALEXANDROFF. Un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si chacun de ses points admet un voisinage compact.

1° Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique localement compact, et E' l'ensemble obtenu en adjoignant à E un point $a \notin E$.

On note $\mathcal{T}'$ l'ensemble des parties A de E' qui vérifient une (et d'ailleurs une seule) des deux conditions suivantes :

i) $A \in \mathcal{T}$; ii) $A = \{a\} \cup (E \setminus C)$, où C est un compact de E.

a) Montrer que $\mathcal{T}'$ est une topologie sur E'.

b) Montrer que l'espace topologique $(E', \mathcal{T}')$ est compact. On dit qu'il s'agit d'un compactifié d'Alexandroff de $(E, \mathcal{T})$.

2° Soit $(E'_1, \mathcal{T}'_1)$ un espace topologique compact et $a_1 \in E'_1$. Notons : $E_1 = E'_1 \setminus \{a_1\}$. On suppose qu'il existe un homéomorphisme f de E sur E_1. Montrer qu'alors $(E', \mathcal{T}')$ et $(E'_1, \mathcal{T}'_1)$ sont homéomorphes. (En particulier le compactifié d'Alexandroff de E obtenu en 1° est indépendant - à un isomorphisme près - du choix de a ; ceci permet de parler d'unicité).

1° a) Montrons que $\mathcal{T}'$ vérifie les trois axiomes qui caractérisent une topologie :

(O_1) Nous avons visiblement : $\emptyset \in \mathcal{T}'$ et $E' \in \mathcal{T}'$. □

(O_2) Soient $A \in \mathcal{T}'$ et $B \in \mathcal{T}'$.

— Si $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{T}$, alors $A \cap B \in \mathcal{T}$, et donc $A \cap B \in \mathcal{T}'$.

— Si $B \in \mathcal{T}$ et $A = \{a\} \cup (E \setminus C)$, où C est un compact de E, alors $A \cap B = (E \setminus C) \cap B$. La partie compacte C de l'espace topologique séparé $(E, \mathcal{T})$ est fermée ; la partie $E \setminus C$ est donc ouverte. On en déduit $A \cap B \in \mathcal{T}$, et donc $A \cap B \in \mathcal{T}'$.

— Si $A = \{a\} \cup (E \setminus C)$ et $B = \{a\} \cup (E \setminus D)$, où C et D sont des compacts de E, alors $A \cap B = \{a\} \cup \big(E \setminus (C \cup D)\big)$; $C \cup D$ est un compact de E ; d'où $A \cap B \in \mathcal{T}'$. □

(O_3) Soit $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, où $A_i \in \mathcal{T}'$ pour tout $i \in I$.

Ecrivons $i \in J$ si A_i vérifie i), et $i \in K$ si A_i vérifie ii). On a $I = J \cup K$ et $J \cap K = \emptyset$.

— Si $K = \emptyset$, on a $A \in \mathcal{T}$ et donc $A \in \mathcal{T}'$.

Supposons $K \neq \emptyset$: On a : $a \in A$. En écrivant $A_i = \{a\} \cup (E \setminus C_i)$, C_i compact de E, pour tout $i \in K$, il vient :

$$E' \setminus A = E \setminus A = \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i)$$

et : $$E' \setminus A = \left(\bigcap_{i \in J} (E \setminus A_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i \in K} C_i\right)$$

$\bigcap_{i \in K} C_i$ est un compact de E ; $\bigcap_{i \in J} (E \setminus A_i)$ est un fermé de E ; il en résulte que $E' \setminus A$ est un compact C de E et que $A = \{a\} \cup (E \setminus C)$ appartient à $\mathcal{T}'$. □

Il est ainsi acquis que $\mathcal{T}'$ est une topologie sur E'. Notons que $E \in \mathcal{T}'$ et que les intersections avec E des éléments de $\mathcal{T}'$ sont les éléments de $\mathcal{T}$; il en résulte que $\mathcal{T}$ est la topologie induite sur E par $\mathcal{T}'$.

b) Soient x et y deux points distincts de E' ; montrons qu'ils admettent dans E' des voisinages disjoints.

– Si $x \in E$ et $y \in E$, ceci résulte de ce que E est séparé et $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

– Supposons $x = a$ et $y \in E$. Soit C un voisinage compact de y dans E ; c'est aussi un voisinage de y dans E' (car $E \in \mathcal{T}'$); $A = \{a\} \cup (E \setminus C)$ est un voisinage ouvert de a dans E', et $A \cap C = \emptyset$.

Il est ainsi acquis que $(E', \mathcal{T}')$ est séparé. Pour montrer qu'il est compact considérons un recouvrement ouvert $(A_i)_{i \in I}$ de E' ; il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in A_{i_0}$, et on a : $A_{i_0} = \{a\} \cup (E \setminus C)$, où C est un compact de E. Les A_i recouvrent le compact C, il existe une partie finie J de I telle que $(A_i)_{i \in J}$ recouvre C ; on constate que $(A_i)_{i \in K}$, où $K = J \cup \{i_0\}$, recouvre E'. □

2° Soit $\hat{f}$ le prolongement de f défini par $\hat{f}(a) = a_1$. Le lecteur constatera aisément que $\hat{f}$ est un homéomorphisme de $(E', \mathcal{T}')$ sur $(E_1', \mathcal{T}_1')$. (Remarquer que pour tout compact C_1 de E_1, $\{a_1\} \cup (E_1 \setminus C_1)$ s'écrit $E_1' \setminus C_1$ et est donc un ouvert de E_1').

$\boxed{2.1.7}$ PROJECTION STEREOGRAPHIQUE. Dans $\mathbb{R}^{n+1}$ euclidien, on note S_n la sphère $\{x \mid \|x\| = 1\}$, P_n l'hyperplan d'équations $x_{n+1} = 0$, et a le point $(0, \dots, 0, 1)$. On appelle projection stéréographique de pôle a l'application :

$$f : S_n \setminus \{a\} \to P_n \qquad x \mapsto D_{ax} \cap P_n$$

où D_{ax} désigne la droite affine de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui contient a et x.

Montrer qu'il s'agit d'un homéomorphisme.

Remarquons d'abord que pour tout $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ de S_n on a : $(x \neq a) \Leftrightarrow (x_{n+1} \neq 1)$.

– Soit $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ avec $\|x\| = 1$ et $x_{n+1} \neq 1$ un point quelconque de $S_n \setminus \{a\}$. La droite D_{ax} est $\{\lambda x + (1-\lambda)a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Explicitons :

$$\lambda x + (1-\lambda)a = \left(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \ 1 + \lambda(x_{n+1} - 1)\right).$$

Nous constatons que f(x) correspond à $\lambda = (1 - x_{n+1})^{-1}$, et s'écrit $(x_1', \dots, x_{n+1}')$, avec : $\quad x_k' = x_k(1 - x_{n+1})^{-1}$ pour $k \in \mathbb{N}_n$, et $x_{n+1}' = 0 \qquad (1)$

– Soit $x' = (x_1', \dots, x_{n+1}')$ avec $x_{n+1}' = 0$ un point quelconque de P_n. L'équation $f(x) = x'$, à l'inconnue $x \in S_n \setminus \{a\}$, s'écrit :

$$x_k = x_k'(1 - x_{n+1}) \text{ pour } k \in \mathbb{N}_n, \text{ et } \sum_{k=1}^{n} x_k'^2 (1 - x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2 = 1$$

et aussi, compte tenu de $1-x_{n+1}\neq 0$:

$$x_k = x'_k(1-x_{n+1}) \text{ pour } k\in N_n, \text{ et } (1-x_{n+1})\sum_{k=1}^{n} x'^2_k = 1+x_{n+1}.$$

L'équation $f(x)=x'$ admet donc une solution unique donnée par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left(\|x'\|^2-1\right)/\left(\|x'\|^2+1\right), \text{ où } \|x'\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x'^2_k \ ; \\ x_k = 2x'_k / \left(\|x'\|^2+1\right) \text{ pour } k\in N_n \end{cases} \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) montrent que f est une bijection continue, et que f^{-1} est continue. □

Notons que, $\varphi:(x_1,\dots,x_n,0)\longmapsto(x_1,\dots,x_n)$ étant un homéomorphisme de P_n sur R^n, $\varphi\circ f$ est un homéomorphisme de $S_n\setminus\{a\}$ sur R^n.

★ **2.1.8** En utilisant les définitions et les résultats des deux exercices précédents :

1° Montrer que R^n est localement compact. Quel est son compactifié d'Alexandroff ?

2° Dans le cas $n=1$, montrer que $\overline{R}$ est homéomorphe au demi-cercle fermé Γ intersection du cercle S_1 et du demi-plan d'équation $x_2\geqslant 0$; $\overline{R}$ est-il homéomorphe à S_1 ?

3° Q (muni de la distance naturelle) est-il localement compact ?

1° On sait que R^n n'est pas compact. En revanche R^n est séparé, et tout point de R^n admet pour voisinage une boule fermée, qui est compacte ; R^n est donc localement compact.

L'exercice précédent montre que le compactifié d'Alexandroff de R^n s'identifie à la sphère $S_n=\{x \mid \|x\|=1\}$ de R^{n+1}.

2° Soit $p:\Gamma\longrightarrow\overline{R}$ telle que $p(1,0)=+\infty$, $p(-1,0)=-\infty$, et que pour tout $m\in\Gamma$ distinct des extrémités, $p(m)$ soit l'abscisse du point de la droite Om dont l'ordonnée est 1. On constate aisément que p est un homéomorphisme de Γ sur $\overline{R}$.

S_1 et Γ ne sont pas homéomorphes car si l'on enlève au premier un point quelconque on obtient un connexe, ce qui n'est pas vrai pour le second. Il en résulte que S_1 et $\overline{R}$ ne sont pas homéomorphes.

3° Nous allons montrer que Q n'est pas localement compact, et, pour cela, que 0 n'a pas de voisinage compact dans Q.

Faisons l'hypothèse (H) : le point 0 admet dans $\mathbb{Q}$ un voisinage compact V. On sait qu'il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $W \cap \mathbb{Q} = V$; on peut trouver $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]-\alpha,\alpha[\subset W$; on a :

$$(]-\alpha,\alpha[\cap \mathbb{Q}) \subset V$$

V, qui est compact, est fermé dans $\mathbb{R}$ (en effet la topologie de V est aussi bien celle qui est induite par la topologie de $\mathbb{Q}$ que celle qui est induite par la topologie de $\mathbb{R}$). Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ appartenant à $]-\alpha,\alpha[$; x est adhérent à $]-\alpha,\alpha[\cap \mathbb{Q}$, et donc à V, ce qui entraîne $x \in V$ et constitue une contradiction puisque $V \subset \mathbb{Q}$. □

2.2. ESPACES MÉTRIQUES

2.2.1 $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1° Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^p$; montrer que, dans l'ensemble des boules fermées contenant K, il existe une unique boule de rayon minimum.

2° On se place ici dans $\mathbb{R}^2$; montrer que si δ désigne le diamètre de K le rayon R de la boule de rayon minimum vérifie :

$$R \leqslant \delta/\sqrt{3}$$

On rappelle que K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$.

— On suppose que K n'est pas réduit à un point ; en effet pour $K = \{a\}$ le premier résultat est trivial (la boule fermée de centre a, de rayon 0) et le second aussi car $R = \delta = 0$.

— Désormais $\delta > 0$, et toute boule fermée $B_f(x,r)$ de centre x, de rayon r, contenant K, a un rayon $r > 0$.

1° a) *Existence*. On pose :

$$E = \left\{ r \in \mathbb{R}_+^* \mid \exists B_f(x,r) \supset K \right\}$$

— K étant compact, il est borné ; d'où $E \neq \phi$.

— E est minorée par 0 (et même par $\delta/2$).

Il existe ainsi $R = \inf E$. Par définition de R, on dispose d'une suite (x_n) de $\mathbb{R}^p$, et d'une suite (r_n) de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(K \subset B_f(x_n, r_n)\right) \wedge \left(\lim_{n\to+\infty} r_n = R\right).$$

On peut toujours supposer que tous les r_n sont inférieurs à $R+1$, et, en prenant un point a de K (qui n'est pas vide) que tous les x_n appartiennent à la boule fermée, et donc compacte $B_f(a,R+1)$.

Quitte à effectuer une extraction, on peut donc supposer que la suite (x_n) est convergente, et poser :

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n \;.$$

Pour tout $y \in K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$d(x_n, y) \leqslant r_n$$

Par passage à la limite, on conclut : $d(x,y) \leqslant R$ et donc $K \subset B_f(x,R)$; cette dernière boule fermée, qui contient K, est clairement de rayon minimum. □

b) *Unicité.* Si $K \subset B_f(y,R)$, le théorème de la médiane prouve que :

$$K \subset B_f\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{R^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2}\right)$$

Comme R est minimum, $x = y$. □

Remarque. L'unicité tient au choix de la norme euclidienne. Elle ne subsiste pas si l'on munit $\mathbb{R}^p$ de la norme $(x_1, \dots, x_p) \mapsto \sup|x_i|$, ainsi que le lecteur le vérifiera.

2° Grâce à la translation $y \mapsto y-x$, qui ne modifie aucune distance, nous supposerons $K \subset B_f(0,R)$. Nous utiliserons le lemme (valable dans $\mathbb{R}^p$) :

LEMME. S *désignant la sphère* $(0,R)$ *de* $\mathbb{R}^p$, *pour tout* $u \in \mathbb{R}^p$, *unitaire, il existe un* $x \in K \cap S$ *tel que* $(x|u) \leqslant 0$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\frac{u}{n} \neq 0$, et donc $K \not\subset B_f\left(\frac{u}{n}, R\right)$, ce qui entraîne l'existence de $x_n \in K$ vérifiant :

$$\|x_n\|^2 \leqslant R^2 \quad \text{et} \quad \left\|x_n - \frac{u}{n}\right\|^2 > R^2 \tag{1}$$

et donc : $-2(x_n|u) + \frac{1}{n} > 0$ (2)

A valeurs dans le compact K, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une suite extraite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dont la limite est notée x. On a $x \in K$. Par passage à la limite, on déduit $\|x\| = R$ de (1) et $(x|u) \leqslant 0$ de (2). □

— Adoptons maintenant $p = 2$. Ne serait-ce que parce que l'application $x \mapsto \|x\|$ atteint son maximum sur K, on dispose de $x_1 \in K \cap S$.

Comme $R>0$, on peut appliquer le lemme à $u=\frac{x_1}{R}$: il existe $x_2 \in K\cap S$ tel que $(x_2|x_1)\leqslant 0$, ce qui implique $x_2 \neq x_1$. Deux cas sont possibles :

1er *Cas*. $x_2 = -x_1$; on a évidemment $\|x_1-x_2\| = 2R$ et, puisque $(x_1,x_2)\in K^2$, on dispose de l'inégalité $2R\leqslant\delta$; d'où : $R\leqslant\delta/2<\delta/\sqrt{3}$. □

$2^{\text{ème}}$ *Cas*. $x_2 \neq -x_1$. En orientant $\mathbb{R}^2$ de manière canonique, on dispose de l'angle α des vecteurs x_1 et x_2 avec $\alpha\in[\frac{\pi}{2},\pi[$ ou $\alpha\in]-\pi,-\frac{\pi}{2}]$; prenant v unitaire, tel que l'angle de x_1 et de v soit $\frac{\alpha}{2}$, il est clair que x_1 et x_2 appartiennent au demi plan *ouvert* de $\mathbb{R}^2$ défini par $(v|x)>0$.

D'après le lemme, il existe x_3 de $K\cap S$ tel que $(v|x_3)\leqslant 0$. Il est trivial que x_1,x_2,x_3 sont trois points distincts de $K\cap S$ et parmi ces trois points il est possible de trouver deux points x_i et x_j tels que l'angle formé par les vecteurs x_i et x_j appartiennent à $[\frac{2\pi}{3},\pi[$. En utilisant :

$$\|x_i-x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\|x_i\|\|x_j\| \cos(\widehat{x_i,x_j})$$

on déduit : $3R^2 \leqslant \|x_i-x_j\|^2 \leqslant \delta^2$

d'où : $R\leqslant\delta/\sqrt{3}$ □

Remarques. a) $R=\delta/\sqrt{3}$ est obtenu pour un triangle équilatéral.

b) Dans $\mathbb{R}^p$, la formule peut se généraliser par :

$$R\leqslant\delta\sqrt{\frac{p}{2(p+1)}}\ .$$

$\boxed{2.2.2}$ Soit (E,d) un espace métrique, et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application qui vérifie :

i) φ est croissante ;

ii) $\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad \varphi(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$;

iii) $\forall(u,v)\in\mathbb{R}_+^2 \quad \varphi(u+v)\leqslant\varphi(u)+\varphi(v)$.

1° Montrer que $\delta : (x,y)\longmapsto\varphi\big(d(x,y)\big)$ est une distance sur E.

2° Montrer que si φ est continue en 0, alors d et δ sont topologiquement équivalentes. Sont-elles équivalentes ?

3° Montrer, par un exemple, que si φ n'est pas continue en 0, d et δ peuvent ne pas être topologiquement équivalentes.

1° φ étant croissante, comme $\varphi(0)=0$, φ, et donc δ, est à valeur dans $\mathbb{R}_+$, On a immédiatement :

$$\delta(x,y)=\delta(y,x) \text{ et } \big(\delta(x,y)=0\big) \Longleftrightarrow (x=y) \text{ pour tout } (x,y)\in E^2.$$

Enfin soit $(x,y,z)\in E^3$. On a : $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$; φ étant croissante, il vient : $\delta(x,y)\leqslant\varphi\{d(x,z)+d(z,y)\}$ et, d'après iii) : $\delta(x,y)\leqslant\delta(x,z)+\delta(z,y)$; δ est donc bien une distance sur E. □

2° φ étant continue en 0, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star$ il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^\star$ tel que :

$$\forall t\in[0,\alpha]\qquad \varphi(t)\in[0,\varepsilon].$$

On a : $\quad\forall(x,y)\in E^2\qquad \Big(d(x,y)\leqslant\alpha\Big)\Rightarrow\Big(\delta(x,y)\leqslant\varepsilon\Big)$

ce qui prouve que $\mathrm{Id}_E : (E,d)\longrightarrow(E,\delta)$ est uniformément continue.

• Pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star$, $\beta=\varphi(\varepsilon)$ vérifie $\beta\in\mathbb{R}_+^\star$ d'après ii). Si $t\in\mathbb{R}_+$ vérifie $\varphi(t)\in[0,\beta[$, alors $t\in[0,\varepsilon[$, car d'après i) $t\geqslant\varepsilon$ exige $\varphi(t)\geqslant\varphi(\varepsilon)=\beta$.

D'où : $\quad\forall(x,y)\in E^2\qquad\Big(\varphi\{d(x,y)\}<\beta\Big)\Rightarrow\{d(x,y)<\varepsilon\}$

ce qui prouve que $\mathrm{Id}_E : (E,\delta)\longrightarrow(E,d)$ est uniformément continue.

• Au total les métriques d et δ sont évidemment topologiquement équivalentes ; nous avons en outre démontré que (E,d) et (E,δ) sont simultanément complets.

— On peut appliquer ce qui précède à $\varphi : u\longrightarrow\frac{u}{1+u}$ ou $\varphi : u\rightarrow\min(1,u)$. On constate alors que δ est borné. Si ce n'est pas le cas de d, d et δ ne sont pas équivalentes.

3° Supposons φ non continue en 0. Soit $m=\lim\limits_{u\to 0,u>0}\varphi(u)$ (théorème de la limite monotone). On a : $m\in\mathbb{R}_+^\star$ et $\varphi(u)\geqslant m$ pour tout $u\in\mathbb{R}_+^\star$.

On constate aisément, pour tous $a\in E$ et $r\in]0,m[$, que la boule ouverte $B_0(a,r)$ pour la distance δ est le singleton $\{a\}$.

Ainsi $\mathcal{T}_\delta$ est la topologie discrète. Il suffisait donc de partir d'une distance d telle que $\mathcal{T}_d$ ne soit pas la topologie discrète pour aboutir à $\mathcal{T}_d\neq\mathcal{T}_\delta$.

Remarque. De telles applications existent. Il suffit de partir d'une application φ vérifiant i) ii) iii) (par exemple $u\mapsto\frac{u}{1+u}$) et de la modifier en posant : $\psi(0)=0$ et $\forall u\in\mathbb{R}_+^\star\quad\psi(u)=1+\varphi(u)$.

2.2.3 Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F. On note C l'ensemble (éventuellement vide) des points de E en lesquels f est continue. Montrer qu'il existe une suite décroissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ d'ouverts de E telle que $C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star}U_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons U_n la réunion des ouverts de E dont l'image par f a un diamètre inférieur à $1/n$ (au sens large), et soit $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$.

En remarquant qu'une partie de F de diamètre inférieur à $1/(n+1)$ est aussi une partie de F de diamètre inférieur à n, nous avons : $U_{n+1} \subset U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Soit c un point de C. De $\lim_{x \to c, x \in E} f(x) = f(c)$ on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ouvert O de E contenant c, tel que f(O) soit inclus dans la boule ouverte $B_0(f(c), 1/2n)$ de F, ce qui implique que le diamètre de f(O) soit inférieur à $1/n$ et que O soit l'un des ouverts dont la réunion est U_n.

On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c \in U_n$. D'où : $c \in A$ et $C \subset A$.

— Soit a un point de A. Pour toute boule ouverte $B_0(f(a), r)$ de F, on peut trouver $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $r \geqslant 1/m$; l'un, au moins des ouverts dont la réunion est U_m contient a ; soit Ω un tel ouvert ; $f(\Omega)$, partie de F de diamètre inférieur à $1/m$ (et donc à r) et contenant f(a), est inclus dans $B_0(f(a), r)$.

On a ainsi : $f(a) = \lim_{x \to a, x \in E} f(x)$, i.e. $x \in C$ et donc $A \subset C$. □

$\boxed{2.2.4}$ 1° Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}^p$ qui est bornée, et vérifie en outre $\lim_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Montrer que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de cette suite est un fermé connexe de $\mathbb{R}^p$.

2° Soit (a_n) une suite réelle vérifiant $\lim_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Montrer que l'ensemble A de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

On désigne par d une distance sur $\mathbb{R}^p$ associée à une norme de $\mathbb{R}^p$; cette distance induit la topologie usuelle de $\mathbb{R}^p$.

1° Posant $A_n = \overline{\{a_p \mid p \geqslant n\}}$, on a $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$; A est donc une partie fermée de $\mathbb{R}^p$; la suite (a_n) étant bornée, A est une partie bornée de $\mathbb{R}^p$; A est donc une partie compacte de $\mathbb{R}^p$. □

• Pour prouver la connexité de A, raisonnons par l'absurde. Faisons l'hypothèse (H) : A n'est pas connexe. Puisque A est fermé, il existe donc deux fermés F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^p$ vérifiant :

$$F_1 \cup F_2 = A \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset \quad F_1 \neq \emptyset \quad F_2 \neq \emptyset$$

F_1 et F_2 sont trivialement des parties compactes de $\mathbb{R}^p$ et puisqu'elles sont

non vides, la fonction continue $(x,y) \mapsto d(x,y)$ atteint son minimum sur le compact $F_1 \times F_2$; comme $F_1 \cap F_2 = \phi$ on dispose de $\alpha > 0$, $\alpha = \inf_{(x,y) \in F_1 \times F_2} d(x,y)$.
Posons :

$$U = \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(x,F_1) < \alpha/3\} ; \quad V = \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(x,F_2) < \alpha/3\}$$

U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^p$ contenant respectivement F_1 et F_2 et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in U \times V \qquad d(x,y) \geq \alpha/3 \tag{1}$$

$U \cup V$ est un ouvert contenant A ; en réutilisant le fait que la suite (a_n) est bornée, donc à valeurs dans un compact, l'ensemble des entiers n tels que $a_n \notin U \cup V$ est fini et on dispose ainsi de $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad a_n \in U \cup V$$

On dispose aussi de $N' \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N' \quad d(a_{n+1}, a_n) < \alpha/3.$$

Prenons un point de F_1 ; comme U est un voisinage de ce point, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq \sup(N,N')$ tel que :

$$a_{n_0} \in U$$

Prenant de même un point de F_2, on trouve $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$, tel que $a_{n_1} \in V$.
Posons :

$$\mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N} \mid (n_0 \leq n \leq n_1) \wedge (a_n \in U)\}$$

$\mathbb{N}'$ est une partie non vide, majorée de $\mathbb{N}$; elle admet un plus grand élément n_2 et l'on a : $a_{n_2} \in U$.

Comme $U \cap V = \phi$, $n_2 < n_1$ et donc $n_2 + 1 \leq n_1$; d'ou $a_{n_2+1} \notin U$. Comme $n_2 + 1 > N$, $a_{n_2+1} \in V$.

On vient de trouver $a_{n_2} \in U$, $a_{n_2+1} \in V$ vérifiant :

$$d(a_{n_2}, a_{n_2+1}) < \alpha/3 \qquad (\text{car } n_2 \geq N')$$

ce qui est en contradiction avec (1). L'hypothèse (H) est donc absurde. □

Remarque. Le lecteur notera que si la suite (a_n) n'est pas bornée le résultat peut être inexact. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ il pourra construire la suite suivante :

. partir de (1,0) passer à (2,0) puis "monter" sur l"hyperbole $xy = 1$ au point (2,1/2).

.sur cet hyperbole remonter, avec cette fois des pas en abscisse en 1/2, jusqu'au point (1,1).

..redescendre sur cette hyperbole, avec cette fois des pas en abscisse en 1/4, jusqu'au point (3,1/3) et descendre au point (3,0).

.descendre alors sur l'axe des abscisses au pas 1/8 jusqu'à (1,0) et recommencer. ...

2° Il suffit de prouver que si $(a,b) \in A^2$ avec $a<b$ alors $]a,b[\subset A$; A sera ainsi un intervalle, fermé comme au 1°.

Soient donc $(a,b)\in A^2$, avec $a<b$, et $x\in\,]a,b[$. Donnons-nous $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}$; on peut supposer $a<x-\varepsilon<x+\varepsilon<b$. Il existe $N'\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant N' \quad |a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$$

a étant valeur d'adhérence, et a appartenant à $]-\infty,x-\varepsilon[$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ vérifiant :

$$n_0\geqslant \sup(N,N') \ ; \ a_{n_0}<x-\varepsilon$$

b étant de même valeur d'adhérence, et b appartenant à $]x+\varepsilon,+\infty[$, il existe $n_1\in\mathbb{N}$ vérifiant :

$$n_1\geqslant n_0 \ ; \ a_{n_1}>x+\varepsilon$$

Comme dans le 1°, on forme l'entier n_2, et on constate facilement que :

$$a_{n_2+1}\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon] \text{ avec } n_2+1>N$$ □

[2.2.5] Soient a et b deux réels, $a<b$, et $f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$ une application continue. La suite (a_n) est une suite d'éléments de $[a,b]$ définie par $a_0\in[a,b]$ et la récurrence : pour tout n, $a_{n+1}=f(a_n)$.

Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, alors la suite (a_n) est convergente.

Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de (a_n) ; comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ il s'agit d'un intervalle (exercice précédent), fermé, contenu dans $[a,b]$, non vide car $[a,b]$ est compact. Désignons par $[\alpha,\beta]$ cet intervalle avec $\alpha\leqslant\beta$.

• Si $\alpha=\beta$, la suite (a_n) est à valeurs dans un compact et admet une unique valeur d'adhérence, elle converge. □

• Montrons que l'hypothèse $\alpha<\beta$ est absurde.

i) Tout d'abord pour $c\in[\alpha,\beta]$, on a : $f(c)=c$.

En effet, puisque c est valeur d'adhérence, on dispose d'une suite extraite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ telle que $c=\lim\limits_{n\to+\infty}a_{\varphi(n)}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_{\varphi(n)+1}-a_{\varphi(n)}\right)=0$, on a aussi $c=\lim\limits_{n\to+\infty}a_{\varphi(n)+1}$.

D'autre part, f est continue et pour tout n, on a la relation

$$a_{\varphi(n)+1}=f\left(a_{\varphi(n)}\right). \text{ D'où : } f(c)=\lim_{n\to+\infty}a_{\varphi(n)+1}.$$

L'unicité de la limite entraîne $c=f(c)$. □

ii) d'après i), pour tout n, $a_n \notin [\alpha,\beta]$ (sinon la suite serait constante, donc convergente ce qui serait incompatible avec deux valeurs d'adhérence $\alpha<\beta$).

iii) $]\alpha,\beta[$ est ainsi un voisinage de la valeur d'adhérence $\frac{\alpha+\beta}{2}$, voisinage ne contenant aucun a_n, ce qui est absurde. □

$\boxed{2.2.6}$ Soit E un espace métrique compact. Montrer qu'il existe une partie de E à la fois dénombrable et dense dans E.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on dispose du recouvrement de E par la famille de boules ouvertes $\left(B_0(x,1/n)\right)_{x\in E}$; E étant compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini ; il existe ainsi une partie finie X_n de E telle que

$$E=\bigcup_{x\in X_n} B_0(x,1/n).$$

Posons $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$; réunion dénombrable de parties finies de E, X est une partie dénombrable de E. Montrons que X est dense de E.

Soit O un ouvert non vide de E ; il existe une boule ouverte $B=B_0(a,r)$ de rayon $r>0$, incluse dans O. Choisissons $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $N\geqslant 1/r$; a appartient à l'une des boules de la famille $\left(B_0(x,1/N)\right)_{x\in X_N}$; il existe ainsi $x\in X_N$ tel que $d(a,x)<1/N\leqslant r$, et la boule B rencontre X_N ; a fortiori O rencontre X_N, et donc O rencontre X. □

★ $\boxed{2.2.7}$ LE PROCÉDÉ DIAGONAL. Soient E un ensemble, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1° Montrer que la suite dite "diagonale", $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où x_n désigne $a_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n(n)}$ est une suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2° Montrer que, pour tout $m\in\mathbb{N}$ fixé, la suite tronquée $(x_n)_{n\geqslant m}$ est extraite de la suite $n\mapsto a_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m(n)}$, $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, ψ_p désigne $\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_p$.

1° Il suffit de vérifier que $n\mapsto\psi_n(n)$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme φ_{n+1} est strictement croissante, on a :

$$\varphi_{n+1}(n+1) \geqslant n+1.$$

D'autre part ψ_n est strictement croissante, au titre de composée d'applications strictement croissantes. D'où :

$$\psi_{n+1}(n+1) = \psi_n \circ \varphi_{n+1}(n+1) \geqslant \psi_n(n+1) > \psi_n(n). \qquad \square$$

2° Soit m fixé. Pour tout $n \geqslant m$, $\psi_n(n) = \psi_m \circ \varphi_{m+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$, ce qui montre que $(x_n)_{n\geqslant m}$ est extraite de $\left(a_{\psi_m(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé diagonal associé à la suite d'applications $(\varphi_n)_{n\geqslant m}$. $\square$

Remarque. Le procédé diagonal remplace le procédé d'extraction finie lorsque celui-ci ne convient pas. On peut, par exemple, faire une première extraction (associée à φ_0) pour assurer une propriété P_0 ; de la suite extraite $\left(a_{\varphi_0(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut alors faire une seconde extraction (associée à φ_1) pour assurer une propriété P_1... . Par récurrence on peut alors extraire pour assurer successivement des propriétés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le procédé diagonal nous assure la construction d'une suite extraite qui, pour des propriétés P_n judicieuses (par exemple une convergence), aura toutes les propriétés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le lecteur trouvera un exemple d'application dans l'exercice suivant.

★ $\boxed{2.2.8}$ Soient E et F deux espaces métriques compacts, et k un réel strictement positif ; $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des applications k-lipschitziennes de E dans F. Sauf avis contraire, toute suite est indexée par $n \in \mathbb{N}$.

1° Montrer que, d désignant la distance sur F :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{E}^2 \qquad \delta(f,g) = \sup_{x\in E} d\big(f(x),g(x)\big)$$

définit une distance δ sur $\mathcal{E}$.

• On se propose de montrer que l'espace métrique $(\mathcal{E},\delta)$ est compact.

Pour cela on utilise une partie $A \subset E$ dénombrable et dense dans E (cf. exercice 2.2.6), que l'on considère comme l'image d'une suite (a_n).

2° Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{E}$.

a) Montrer qu'il existe une suite (g_n) extraite de (f_n), telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $\big(g_n(a_p)\big)$ d'éléments de F soit convergente.

b) Montrer que la suite (g_n) converge simplement sur E, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$ la suite $\big(g_n(x)\big)$ d'éléments de F admet une limite, que l'on note $g(x)$.

c) Montrer que l'application $g : E \longrightarrow F$ est un élément de $\mathcal{E}$.

d) Montrer que g est limite uniforme sur E de la suite (g_n), c'est-à-dire que : $\lim_{n\to+\infty} \delta(g_n, g) = 0$.

3° Conclure.

1° L'espace métrique compact (F,d) est borné, ce qui assure l'existence de la distance δ sur $\mathcal{E}$.

2° a) • Montrons par récurrence qu'est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$ l'assertion : (A_m) Il existe une famille $(\varphi_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que, en notant $\psi_i = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_i$:

Pour tout $i \in \{0,1,\dots,m\}$, la suite $\left(f_{\psi_i(n)}(a_i)\right)$ est convergente.

— La suite $\left(f_n(a_0)\right)$, à valeurs dans l'espace métrique compact F, admet une suite extraite convergente ; il existe donc $\varphi_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que $\left(f_{\varphi_0(n)}(a_0)\right)$ converge ; A_0 est ainsi vérifiée.

— Supposons que $A_m (m \geqslant 0)$ a été vérifiée, grâce à l'existence d'une famille $(\varphi_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$. La suite $\left(f_{\psi_m(n)}(a_{m+1})\right)$, à valeurs dans l'espace métrique compact F admet une suite extraite convergente ; il existe donc $\varphi_{m+1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\left(f_{\psi_m\circ\varphi_{m+1}(n)}(a_{m+1})\right)$ converge; la famille $(\varphi_i)_{0\leqslant i\leqslant m+1}$ vérifie manifestement A_{m+1}.

• Notons (g_n) la suite extraite de (f_n) par le procédé diagonal (cf. exercice précédent) associé à la suite d'applications (φ_n).

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite tronquée $\left(g_n(a_p)\right)_{n\geqslant p}$, extraite de la suite convergente $\left(f_{\psi_p(n)}(a_p)\right)$ est elle même convergente ; il en est de même de la suite $\left(g_n(a_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. □

b) Soit $x \in E$. Nous allons montrer que la suite $\left(g_n(x)\right)$ est de Cauchy, ce qui nous permettra d'affirmer qu'elle est convergente (l'espace métrique (F,δ) est compact ; il est complet).

Pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B_0(x, \varepsilon/3k)$ contient un point $a_p \in A$; la suite $\left(g_n(a_p)\right)$ est convergente d'après a), et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geqslant N$ et $m \geqslant N$: $d\left(g_n(a_p), g_m(a_p)\right) \leqslant \varepsilon/3$.

On peut majorer $d\left(g_n(x), g_m(x)\right)$ par :

$$d\left(g_n(x), g_n(a_p)\right) + d\left(g_n(a_p), g_m(a_p)\right) + d\left(g_m(a_p), g_m(x)\right)$$

et donc, compte tenu de ce que g_n et g_m sont k-lipschitziennes, par :

$$2kd_1(x,a_p) + d\big(g_n(a_p),g_m(a_p)\big)$$

et enfin par ε (d_1 désigne la distance sur E). □

c) Soit $(x,y)\in E^2$. On a, grâce à la continuité de $d : F^2 \to \mathbb{R}$,

$$d\big(g(x),g(y)\big) = \lim_{n\to+\infty} d\big(g_n(x),g_n(y)\big).$$

Comme $d\big(g_n(x),g_n(y)\big) \leqslant kd_1(x,y)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a donc :

$$\forall (x,y)\in E^2 \quad d\big(g(x),g(y)\big) \leqslant kd_1(x,y)$$ □

d) Soit $\varepsilon > 0$. La famille de boules ouvertes $\big(B_0(x,\varepsilon/3k)\big)_{x\in E}$ recouvrant le compact E, il existe une partie finie X de E telle que :

$$E = \bigcup_{x\in X} B_0(x,\varepsilon/3k)$$

Pour chaque $x\in X$, $\big(g_n(x)\big)$ converge et il existe $N_x\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant N_x \quad d\big(g_n(x),g(x)\big) \leqslant \varepsilon/3.$$

L'ensemble fini $\{N_x \mid x\in X\}$ admet un plus grand élément N.

Nous allons montrer :

$$\forall n\geqslant N \quad \sup_{y\in E} d\big(g_n(y),g(y)\big) \leqslant \varepsilon$$

ce qui entraîne que g est limite uniforme de la suite (g_n).

Considérons pour cela un $y\in E$. Il existe $x\in X$ tel que $d_1(x,y) < \varepsilon/3k$; pour tout $n\geqslant N$, $d\big(g_n(y),g(y)\big)$ est majoré par :

$$d\big(g_n(y),g_n(x)\big) + d\big(g_n(x),g(x)\big) + d\big(g(x),g(y)\big)$$

et donc par : $2kd_1(y,x) + d\big(g_n(x),g(x)\big) \leqslant \varepsilon$. □

3° D'après le 2°, de toute suite d'éléments de l'espace métrique $(\mathcal{E},\delta)$ on peut extraire une sous-suite convergente. Il en résulte que $(\mathcal{E},\delta)$ est compact.

$\boxed{2.2.9}$ On considère un plan affine euclidien, identifié à $\mathbb{R}^2$.

1° Montrer que l'ensemble U des triplets (p_1,p_2,p_3) formés de points non alignés de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2)^3$, et que l'application $r : U\to\mathbb{R}$ qui à $(p_1,p_2,p_3)\in U$ associe le rayon du cercle circonscrit au triangle $p_1p_2p_3$ est continue.

2° Soient K_1,K_2,K_3 trois cercles de $\mathbb{R}^2$ tels qu'aucune droite ne les rencontre tous.

a) Montrer que l'ensemble E des rayons des cercles rencontrant à la fois K_1,K_2 et K_3 est un compact de R. On note λ (resp. μ) la borne supérieure (resp. inférieure) de E.

b) Montrer qu'il existe un cercle de rayon λ (resp. μ) tangent à la fois à K_1,K_2 et K_3.

(On ne considère que des cercles de rayons strictement positifs).

L'application $\big((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\big) \to (x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)$ est visiblement un homéomorphisme qui permet d'identifier $(R^2)^3$ et R^6.

1° A tout $(p_1,p_2,p_3)\in(R^2)^3$, avec $p_i=(x_i,y_i)$, associons :

$$(1)\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

et rappelons que (1) équivaut à $(p_1,p_2,p_3)\notin U$, et que (2) est une équation du cercle circonscrit au triangle $p_1p_2p_3$ lorsque $(p_1,p_2,p_3)\in U$; (1) et (2) sont respectivement de la forme : $D(x_1,\dots,y_3)=0$ et :

$$(x^2+y^2)D(x_1,\dots,y_3)+xA(x_1,\dots,y_3)+yB(x_1,\dots,y_3)+C(x_1,\dots,y_3)=0$$

où D,A,B,C sont des fonctions polynômes et donc des fonctions continues $(R^2)^3\to R$.

a) Image réciproque du fermé $\{0\}$ de R par l'application continue D, $(R^2)^3\setminus U$ est ainsi un fermé de $(R^2)^3$, et U est un ouvert de $(R^2)^3$.

b) L'application $r=U\to R$ s'écrit $r=\sqrt{P/D}$, où P est un polynôme, et où la fonction rationnelle P/D ne prend sur U que des valeurs strictement positives ; d'où la continuité de r (qui est à valeurs strictement positives).

Remarquons que l'application $(-1/2.\ A/D,\ -1/2.\ B/D)$ qui à (p_1,p_2,p_3) associe le centre du cercle circonscrit au triangle $p_1p_2p_3$ est, elle aussi, continue sur U.

2° Notons que les cercles K_i sont deux à deux disjoints.

a) On constate aisément que K_1,K_2 et K_3 sont des compacts de R^2 ; $K_1\times K_2\times K_3$ est donc un compact de $(R^2)^3$; par ailleurs l'hypothèse entraîne que tout élément de $K_1\times K_2\times K_3$ appartient à U ; $K_1\times K_2\times K_3$ est donc un compact de U, et son image E' par l'application continue r est un compact de R, inclus dans $R_+^\star$.

On a manifestement $E' \subset E$. Par ailleurs pour tout $\rho \in E$, il existe un cercle de rayon ρ rencontrant à la fois K_1, K_2 et K_3 et ce cercle a été obtenu lorsque l'on a considéré la partie $K_1 \times K_2 \times K_3$ de U, si bien que $\rho \in E'$. Au total $E' = E$.

b) La notation (c,ρ) désignant le cercle de centre c et de rayon ρ, une condition nécessaire et suffisante pour que (c,ρ) et (c',ρ') aient deux points communs est : $|\rho - \rho'| < d(c,c') < \rho + \rho'$.

— D'après a), il existe un cercle (a,λ) rencontrant K_1, K_2, K_3 en des points m_1, m_2, m_3, et tel qu'aucun cercle de rayon $\rho > \lambda$ ne rencontre à la fois K_1, K_2 et K_3. Nous allons montrer que (a,λ) est tangent en m_1 à $K_1 = (\omega_1, \rho_1)$; le résultat s'étendra à K_2 et K_3.

Raisonnons par l'absurde en supposant que (a,λ) et K_1 ont deux points communs m_1 et m_1'. Etudions l'intersection de K_1 et d'un cercle assujetti à contenir m_2 et m_3, soit $(c, d(c,m_2))$ où c décrit la médiatrice Δ de $[m_2, m_3]$. Ce cercle a deux points communs avec K_1 si, et seulement si son centre c vérifie l'assertion :

$$(A_c) \qquad |d(c,m_2) - \rho_1| < d(c,\omega_1) < d(c,m_2) + \rho_1 .$$

Le point a est une position particulière de c pour laquelle (A_c) est vraie. La continuité de la fonction distance fait qu'il existe $\alpha \in R_+^*$ tel que (A_c) soit vraie pour tout $c \in \Delta$ tel que $d(c,a) < \alpha$. Le théorème de Pythagore montre que l'on peut trouver $b \in \Delta$ vérifiant à la fois $d(b,a) < \alpha$ et $d(b,m_2) > d(a,m_2)$. Le cercle $(b, d(b,m_2))$ a un rayon strictement supérieur à λ, et il rencontre à la fois K_1, K_2, K_3. Nous aboutissons à une contradiction. $\square$

— On raisonne de la même façon pour montrer qu'il existe un cercle de rayon μ tangent à la fois à K_1, K_2 et K_3.

Remarque. En utilisant la théorie de l'inversion, on montre que la recherche des cercles tangents à K_1, K_2 et K_3 se ramène à celle des cercles tangents à trois cercles K_1', K_2' et K_3' tels que K_1' et K_2' aient le même centre, que K_3' soit intérieur à K_1' et extérieur à K_2'. Le lecteur vérifiera qu'il est conduit à étudier quatre fois l'intersection de deux cercles, et que le problème admet huit solutions.

2.2.10 Montrer qu'il existe un et un seul couple $(x,y) \in R^2$ vérifiant: $(x = 1/4.\sin(x+y)) \wedge (y = 1+2/3.\text{Arc tg}(x-y))$.

On se place dans l'espace métrique complet (R^2, d), où d est la distance associée à la norme $(x,y) \rightarrow |x| + |y|$. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \to \big(1/4.\sin(x+y),\ 1+2/3.\text{Arc tg}(x-y)\big).$$

Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ on a (accroissements finis) :

$$\sin\beta - \sin\alpha = (\beta-\alpha)\cos\gamma, \text{ et } \text{Arc tg}\beta - \text{Arc tg}\alpha = \frac{\beta-\alpha}{1+\gamma_1^2}.$$

Pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ on a donc :

$$|\sin(x+y) - \sin(x'+y')| \leqslant |(x+y) - (x'+y')|$$

et $$|\text{Arc tg}(x-y) - \text{Arc tg}(x'-y')| \leqslant |(x-y) - (x'-y')|$$

et par conséquent :

$$d\big(f(x,y),f(x',y')\big) \leqslant \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{2}{3}\right)\left(|x-x'| + |y-y'|\right).$$

Il en résulte que l'application f est k-contractante, avec $k = 11/12$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe, et affirmer que l'équation $f(x,y) = (x,y)$ admet une solution unique. □

2.2.11 THEOREME DU POINT FIXE SUR UN ESPACE METRIQUE COMPACT.

Soient (E,d) un espace métrique compact, et $f = E \to E$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y)\in E^2 \qquad (x\neq y) \Rightarrow \Big(d\big(f(x),f(y)\big) < d(x,y)\Big) \qquad (1)$$

1° a) L'application f est-elle nécessairement contractante ?

b) Montrer que f admet un unique point fixe a.

2° Montrer que a est limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0\in E$ (arbitrairement choisi) et de : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1° a) Adoptons $E = [0,1]$, qui est un espace métrique compact pour la distance usuelle, et $f : [0,1]\to[0,1]$ définie par $x\mapsto \sin x$.

Pour $x\neq y$, nous avons $|\sin x - \sin y| = |x-y|\,|\cos\xi|$, où ξ appartient à l'intervalle ouvert d'extrêmités x et y, et donc à $]0,1[$, ce qui entraîne $|\cos\xi| < 1$. La condition (1) est vérifiée.

— Cependant f n'est pas contractante, $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ interdisant l'existence de $k < 1$ tel que :

$$\forall x\in[0,1] \qquad |\sin x| \leqslant k|x|$$

b) Etant visiblement 1-lipschitzienne, f est continue. L'application $x\mapsto d\big(x,f(x)\big)$ de E dans $\mathbb{R}_+$ est continue, et (compacité de E) elle admet un minimum atteint en un point a de E.

On ne peut avoir $a \neq f(a)$, sans quoi (1) entraînerait :

$$d\big(f(a), f(f(a)\big) < d\big(a, f(a)\big)$$

en contradiction avec : a réalise le minimum de $d\big(x, f(x)\big)$.

Ainsi $a = f(a)$ et f admet le point fixe a. Par (1) on décelerait une contradiction s'il existait un autre point fixe $a' \neq a$. □

2° Toutes les suites sont indexées par $\mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons, d'après (1), ou une inégalité triviale :

$$d(a, x_{n+1}) = d\big(f(a), f(x_n)\big) \leqslant d(a, x_n)$$

La suite $\big(d(a, x_n)\big)$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est ainsi décroissante ; elle admet une limite $\ell \geqslant 0$, et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(a, x_n) \geqslant \ell \tag{2}$$

Faisons l'hypothèse $\ell > 0$. La suite (x_n) à valeurs dans le compact E admet une suite extraite convergente, $\left(x_{\varphi(n)}\right)$, de limite b. Par passage à la limite, on constate $d(a,b) = \ell$.

La suite $\left(x_{1+\varphi(n)}\right)$, i.e. $\left(f(x_{\varphi(n)}\right)$ est convergente de limite $f(b)$.

On a, car $a \neq b$:

$$d\big(a, f(b)\big) = d\big(f(a), f(b)\big) < d(a,b)$$

D'où l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $d\left(a, x_{1+\varphi(N)}\right) < \ell$, ce qui constitue une contradiction avec (2).

L'hypothèse $\ell > 0$ est donc absurde. On a $\ell = 0$. □

$\boxed{2.2.12}$ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n)$, où f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, en outre, la suite admet une unique valeur d'adhérence a. Montrer qu'elle admet a pour limite.

- Comme f est continue, $f(a)$ est valeur d'adhérence de la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, qui s'écrit $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, et donc de la suite donnée. Il en résulte: $f(a) = a$.
- D'après la continuité de f au point a, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (|x-a| < \alpha) \Rightarrow (|f(x)-a| < 1) \tag{1}$$

• Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $\varepsilon < \min(\alpha, 1)$; $K = \{x \in \mathbb{R} \mid \varepsilon \leqslant |x-a| \leqslant 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}$; $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K\}$ est fini, sans quoi on pourrait extraire de la suite donnée une suite convergeant dans K, en contradiction avec $a \notin K$; il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \notin K$ pour tout $n \geqslant N$.

D'autre part, a étant valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ne peut avoir $|x_n - a| > 1$ pour tout $n \geqslant N$; il existe donc $N' \geqslant N$ tel que $|x_{N'} - a| < \varepsilon$. En utilisant $\varepsilon \leqslant \alpha$ et (1), on constate $|f(x_{N'}) - a| < 1$, i.e. $|x_{N'+1} - a| < 1$, ce qui, compte tenu de $x_{N'+1} \notin K$ exige $|x_{N'+1} - a| < \varepsilon$. Plus généralement, on montre par récurrence : $|x_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N'$. □

Remarque. Le résultat s'étend à une suite à valeurs dans un espace métrique dans lequel les boules fermées sont compactes (par exemple un e.v.n. de dimension finie).

2.3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

2.3.1 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1° Montrer que : $d : (f,g) \longrightarrow \sup_{t\in[0,1]} \operatorname{Arc\,tg}|f(t)-g(t)|$ est une distance sur E.

2° Est-ce que : $f \longrightarrow d(f,0)$ est une norme sur E ?

1° La seule difficulté consiste à vérifier l'inégalité triangulaire. Pour $z \in \mathbb{R}_+$ fixé, $y \longmapsto \operatorname{Arc\,tg} y - \operatorname{Arc\,tg}(y+z) + \operatorname{Arc\,tg} z$ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ à dérivée positive, et, donc, croissante ; comme elle s'annule en 0, cette application est positive, si bien que :

$$\forall (y,z) \in \mathbb{R}_+ \quad \operatorname{Arc\,tg}(y+z) \leqslant \operatorname{Arc\,tg} y + \operatorname{Arc\,tg} z$$

Comme l'application Arc tg est croissante, on a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $x \leqslant y+z$:

$$\operatorname{Arc\,tg} x \leqslant \operatorname{Arc\,tg} y + \operatorname{Arc\,tg} z.$$

L'inégalité triangulaire en résulte.

2° La réponse est négative car on n'a pas :

$$\forall (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E \quad d(\lambda f, 0) = \lambda d(f,0)$$

ainsi que l'on le constate en adoptant, par exemple, $\lambda = 2$ et $f(t) = t$.

$\boxed{2.3.2}$ Soit E un K-espace vectoriel normé ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $H = \operatorname{Ker} u$ un hyperplan, noyau de la forme linéaire non nulle u.

Montrer que H est fermé si et seulement si u est continue.

1° Si u est continue, $H = u^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque par une application continue du singleton $\{0\}$ qui est fermé dans K.

2° La surjectivité de u (non nulle) fait que u prend la valeur 1.

Supposons maintenant H fermé. Soit alors $a \in E \setminus H$, $u(a) = 1$. On sait que $a + H$ est fermé (image de H par l'homéomorphisme $x \mapsto a+x$). D'autre part : $0 \notin a+H$ $\left(\text{car } u(0) \neq 1\right)$; il existe donc $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B = B_f(0,r)$ ne rencontre pas $a + H$.

Nous allons montrer : $|u(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$, ce qui entraînera $|u(x)| \leqslant 1/r$ pour tout $x \in B_f(0,1)$; d'où la continuité de u.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in B$ tel que $|u(x)| > 1$. On dispose de $y = \dfrac{x}{u(x)}$ $\left(\text{car } u(x) \neq 0\right)$; on a :

$$u(y) = 1 \quad \text{et} \quad \|y\| = \frac{\|x\|}{|u(x)|} \leqslant \|x\| \leqslant r$$

et donc $y \in B \cap (a + H)$, en contradiction avec $B \cap (a + H) = \emptyset$. □

Autre solution : Reprenons $a \in E \setminus H$, tel que $u(a) = 1$. Nous avons $E = H \oplus Ka$. Supposons u non continue, et donc non bornée sur S, sphère de centre 0 et de rayon 1. Par récurrence, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de S vérifiant :

$$|u(x_n)| \geqslant n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ecrivons $x_n = y_n + \alpha_n a$, $(y_n, \alpha_n) \in H \times K$.

Les $\alpha_n = u(x_n)$ sont non nuls, et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{x_n}{\alpha_n} = \frac{y_n}{\alpha_n} + a \quad \text{et} \quad \left\|\frac{x_n}{\alpha_n}\right\| = \frac{1}{|u(x_n)|} \leqslant \frac{1}{n}.$$

On en déduit d'abord que la suite $(x_n/\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet la limite 0, ensuite que la suite $(y_n/\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet la limite $-a$. Cette dernière suite étant à valeurs dans H, qui est fermé, on a : $-a \in H$, en contradiction avec $u(-a) = -1$. □

$\boxed{2.3.3}$ Soit E un espace vectoriel normé.

1° Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant 1/2^n \tag{1}$$

Montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy.

2° Montrer que de toute suite de Cauchy de E on peut extraire une suite vérifiant (1).

3° Montrer que E est complet si, et seulement si toute suite de E vérifiant (1) converge.

4° Montrer que E est complet si, et seulement si toute série de E absolument convergente est convergente.

1° Pour tout $(n,p)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on a :

$$\|x_{n+p}-x_n\| = \left\|\sum_{k=0}^{p-1}(x_{n+k+1}-x_{n+k})\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1}\|x_{n+k+1}-x_{n+k}\|$$

et, compte tenu de (1) :

$$\|x_{n+p}-x_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1}(1/2)^{n+k} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}(1/2)^{n+k} = 1/2^{n-1}.$$

A tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ on peut associer $N\in\mathbb{N}$ tel que $1/2^{N-1}\leqslant\varepsilon$: on a ainsi :

$$\forall n\geqslant N \quad \forall p\in\mathbb{N} \quad \|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\varepsilon. \qquad \square$$

2° Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Nous disposons de l'application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ définie par $\varphi(0)=0$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\varphi(n)=\max\left(1+\varphi(n-1),A_n\right)$, où ;

$$A_n = \min\{N\in\mathbb{N} \mid \forall p\geqslant N \quad \forall q\geqslant N \quad \|x_p-x_q\|\leqslant 1/2^n\}$$

En utilisant $\varphi(n+1)>\varphi(n)$, nous constatons :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \|x_{\varphi(n+1)}-x_{\varphi(n)}\|\leqslant 1/2^n$$

ce qui montre que la suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ répond à la question. $\square$

3° Supposons que E est complet. Toute suite de E vérifiant (1) est une suite de Cauchy d'après le 1° ; c'est donc une suite convergente.

Inversement supposons que toute suite de E qui vérifie (1) est convergente.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E ; d'après 2°, elle admet une valeur d'adhérence ; elle admet donc celle-ci pour limite (on sait en effet que toute valeur d'adhérence d'une suite de Cauchy est limite de la suite).$\square$

4° La partie directe est connue. Inversement supposons que toute série de E absolument convergente est convergente.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui vérifie (1). De $\|x_n-x_{n+1}\|\leqslant 1/2^n$, on déduit que la série $\sum(x_{n+1}-x_n)$ est absolument convergente, et donc convergente;

il en résulte que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

La condition suffisante pour que E soit complet qui a été mise en évidence au 3° est ainsi remplie. □

$\boxed{2.3.4}$ Soient E et F deux K-e.v.n. ($K = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{C}$), $u : E \to F$ une application linéaire. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes;

i) u est continue ;

ii) Pour toute suite (a_n) d'éléments de E, convergente de limite 0_E, la suite $\left(u(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F est bornée.

Preuve de i) ⇒ ii). Trivial car la continuité de u en 0_E entraîne :

$$\lim_{n\to+\infty} u(a_n) = 0_F$$ □

Preuve de ii) ⇒ i). On raisonne par l'absurde ; si u est non continue, comme u est une application linéaire, u est non bornée sur la sphère unité S de E. Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \exists a_n \in S \quad \text{tel que} \quad \|u(a_n)\| \geqslant n$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}}$; (b_n) est une suite d'éléments de E, convergente de limite 0_E $\left(\|b_n\| = 1/\sqrt{n}\right)$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\|u(b_n)\| \geqslant \sqrt{n}$, en contradiction avec ii). □

★ $\boxed{2.3.5}$ Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que, pour toute solution sur $\mathbb{R}$, f, de l'équation différentielle : $y'' + y'\cos t + y\sin t = 0$ on ait :

$$|f'''(\pi)| \leqslant k\left(|f(0)| + \int_2^4 |f'(t)|dt\right).$$

— Les fonctions cos et sin étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle considérée admet des solutions sur $\mathbb{R}$, toutes de classe C^∞, et l'ensemble E de ces solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 .

— L'application N de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$N(f) = |f(0)| + \int_2^4 |f'(t)|dt$$

est visiblement une semi-norme.

Nous allons montrer qu'en fait il s'agit d'une norme.

— Soit $g \in E$ telle que $N(g) = 0$. L'intégrale sur $[2,4]$ de la fonction continue $|g'|$ étant nulle, g' est nulle sur $[2,4]$; g est donc constante sur $[2,4]$, et même nulle (à cause de $g(3)\sin 3 = 0$) ; g et ω, application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sont ainsi deux solutions de l'équation différentielle considérées telles que $g(3) = \omega(3)$ et $g'(3) = \omega'(3)$, ce qui, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, exige que g et ω coïncident. Il en résulte que N est une norme sur E.

Comme toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, et comme $f \longmapsto f'''(\pi)$, forme linéaire sur un tel espace, est continue, il existe un réel strictement positif k tel que :

$$\forall f \in E \qquad |f'''(\pi)| \leqslant k\, N(f)$$ □

$\boxed{2.3.6}$ Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $g \in E$ fixée, on note Φ la forme linéaire sur E définie par $f \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Montrer que Φ est continue et calculer $\|\Phi\|$ lorsque E est muni de la norme :

1° $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ 2° $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt\right)^{1/2}$.

3° $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$

Le cas $g = 0$ étant trivial, nous supposons désormais $g \neq 0$.

Nous avons donc : $\|g\|_\infty > 0$.

1° Nous constatons :

$$\forall f \in E \qquad |\Phi(f)| \leqslant \|g\|_1 \cdot \|f\|_\infty$$

ce qui prouve que Φ est continue et que $\|\Phi\| \leqslant \|g\|_1$.

— Soit $\varepsilon \in]0, \|g\|_1]$ donné. Nous disposons de l'application $f_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $t \longmapsto \dfrac{g(t)}{\varepsilon + |g(t)|}$ et $\left(x \longmapsto \dfrac{x}{\varepsilon + 1}\right.$ étant croissante sur $\left.\mathbb{R}_+\right)$:

$$\|f_\varepsilon\|_\infty = \|g\|_\infty / (\varepsilon + \|g\|_\infty).$$

D'autre part $\Phi(f_\varepsilon)$ s'écrit $\int_0^1 \frac{g^2(t)}{\varepsilon+|g(t)|}dt$, et on a :

$$\int_0^1 |g(t)| - \Phi(f_\varepsilon) = \varepsilon\int_0^1 \frac{|g(t)|}{\varepsilon+|g(t)|}dt \leqslant \varepsilon .$$

Ainsi, pour cette application non nulle f_ε :

$$\frac{|\Phi(f_\varepsilon)|}{\|f_\varepsilon\|_\infty} \geqslant \left(\|g\|_1 - \varepsilon\right)\frac{\varepsilon+\|g\|_\infty}{\|g\|_\infty} \tag{1}$$

Le second membre de (1) a pour limite $\|g\|_1$ lorsque ε tend vers 0. On en déduit :

$$\|\Phi\| \geqslant \|g\|_1 \text{ , et, finalement : } \|\Phi\| = \|g\|_1 .$$ □

2° Grâce à l'inégalité de Schwarz nous constatons :

$$\forall f\in E \qquad |\Phi(f)| \leqslant \|g\|_2 \cdot \|f\|_2$$

avec égalité si l'on prend $f = g$.

Φ est donc continue, et $\|\Phi\| = \|g\|_2$. □

3° Nous constatons :

$$\forall f\in E \qquad |\Phi(f)| \leqslant \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

ce qui prouve que Φ est continue, et que $\|\Phi\| \leqslant \|g\|_\infty$.

L'application $|g| : [0,1] \longrightarrow R$ étant continue, elle admet un maximum atteint en $t_0 \in [0,1]$; on a $\|g\|_\infty = |g(t_0)|$. Nous envisageons ici le cas $t_0 \in]0,1[$, les cas $t=0$ et $t=1$ se traitant de manière identique.

Soit $\varepsilon \in]0,\|g\|_\infty]$ donné. La continuité de g en t_0 permet de trouver $\eta \in]0,\min(t_0,1-t_0)[$ tel que :

$$\forall t\in]t_0-\eta, t_0+\eta[\qquad |g(t)| \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon .$$

Notons f_ε l'application de $[0,1]$ dans R qui est continue, nulle en dehors de $]t_0-\eta,t_0+\eta[$, qui prend la valeur 1 en t_0 et est affine sur $[t_0-\eta,t_0]$ et sur $[t_0,t_0+\eta]$ (il s'agit d'une fonction "pic") ; f_ε est un élément non nul de E et l'on a $\|f_\varepsilon\|_1 = \eta$. D'autre part :

$$\Phi(f_\varepsilon) = \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} g(t)f_\varepsilon(t)dt$$

conduit à : $|\Phi(f_\varepsilon)| \geqslant \left(\|g\|_\infty - \varepsilon\right)\eta$.

Ainsi :

$$\frac{|\Phi(f_\varepsilon)|}{\|f_\varepsilon\|_1} \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon . \tag{2}$$

Le second membre de (2) a pour limite $\|g\|_\infty$ lorsque ε tend vers 0. On en déduit $\|\Phi\| \geqslant \|g\|_\infty$, et, finalement : $\|\Phi\| = \|g\|_\infty$ □

Remarque. On sait : $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$.

Ainsi le 3° suffit pour prouver la continuité de Φ dans les trois cas. Cette inégalité "explique" aussi les inégalités "en sens inverse" sur la norme de Φ.

2.3.7 1° L'entier $n \geqslant 1$ étant donné, on note E l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n ; on munit E de sa structure topologique d'e.v.n. (unique puisque E est de dimension finie). Montrer que le sous-ensemble Δ constitué des matrices de E qui sont diagonalisables est dense dans E.

2° Le résultat subsiste-t-il si E est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n ?

1° Nous pouvons considérer que E a été muni de la norme :

$$\|\cdot\| : [\alpha_{ij}]_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant n} \longmapsto \max_{i,j} |\alpha_{i,j}|$$

norme qui induit l'unique structure topologique d'e.v.n. de E.

Soient $M \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Nous allons montrer qu'il existe un élément de Δ appartenant à la boule ouverte de E dont le centre est M et dont le rayon est ε. La densité de Δ dans E en résultera.

Nous savons qu'il existe une matrice carrée régulière P telle que $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure ; notons $P^{-1}MP = [a_{ij}]_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant n}$

L'endomorphisme $N \longmapsto PNP^{-1}$ de E étant continu au point $P^{-1}MP$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $N \in E$:

$$\left(\|N - P^{-1}MP\| < \eta\right) \Rightarrow \left(\|PNP^{-1} - M\| < \varepsilon\right).$$

On note D_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre a_{ii} et de rayon η. Il est possible de choisir n éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *deux à deux distincts* de $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \lambda_i \in D_i.$$

Soit A la matrice triangulaire supérieure déduite de $P^{-1}MP$ en remplaçant les termes diagonaux a_{ii} par les λ_i ; on constate :

$$\|A - P^{-1}MP\| < \eta, \text{ et donc } \|PAP^{-1} - M\| < \varepsilon.$$

Or A est diagonalisable (puisque son polynôme caractéristique admet les racines deux à deux distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_n$) ; il en résulte que PAP^{-1}, qui est semblable à A, est diagonalisable.

2° La réponse est négative. Nous allons en effet voir que, dans le cas où $n=2$ et où M est la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, pour $r>0$ assez petit aucune matrice appartenant à la boule ouverte $B(M,r)$ de E n'est diagonalisable.

Toute matrice appartenant à $B(M,r)$ s'écrit :

$$M_\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 & -1+\eta_2 \\ 1+\eta_3 & \eta_4 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \max_{1\leqslant i\leqslant 4} |\eta_i| < r$$

Son polynôme caractéristique s'écrit :

$$X^2 - (\eta_1+\eta_4)X + \eta_1\eta_4 + (1-\eta_2)(1+\eta_3)$$

et a pour discriminant :

$$\Delta_\eta = -4 + 4\eta_2 - 4\eta_3 + 4\eta_2\eta_3 + (\eta_1-\eta_4)^2$$

On constate : $\Delta_\eta < -4 + 8r + 8r^2$.

Pour toute $M_\eta \in B(M,1/10)$, on a donc $\Delta_\eta < 0$, et M_η non diagonalisable. □

2.3.8 Soit M une matrice carrée complexe d'ordre n. Montrer :

$$\det(\exp M) = \exp(\operatorname{tr} M) \qquad (1)$$

---

a) Plaçons-nous d'abord dans le cas où M est diagonalisable : il existe $P\in GL(n)$ telle que $P^{-1}MP$ s'écrive $D=\operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. On constate :

$$\forall m\in\mathbb{N} \quad P^{-1}\left(\sum_{k=o}^{m} \frac{M^k}{k!}\right)P = \sum_{k=o}^{m} \frac{D^k}{k!}$$

ce qui, du fait de la continuité de l'application linéaire $N \mapsto P^{-1}NP$, entraîne : $P^{-1}(\exp M)P = \exp D$

et donc : $\det(\exp M) = \det(\exp D)$.

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$: $D^k = \operatorname{diag}(\alpha_1^k,\dots,\alpha_n^k)$; d'où :

$$\exp D = \operatorname{diag}(e^{\alpha_1},\dots,e^{\alpha_n}), \text{ et } \det(\exp D) = \exp(\alpha_1+\dots+\alpha_n).$$

Ainsi : $\det(\exp M) = \exp(\operatorname{tr} D)$; or $\operatorname{tr} D = \operatorname{tr} M$.

L'égalité (1) est donc acquise dans le cas où M est diagonalisable.

b) L'application $M \mapsto \operatorname{tr} M$ de E dans $\mathbb{C}$ est linéaire, et donc continue (puisque $E = M_{\mathbb{C}}(n)$ est de dimension finie). L'application $f \mapsto \exp(\operatorname{tr} M)$ de E dans $\mathbb{C}$ est donc continue.

L'application $M \mapsto \exp M$ de E dans E est continue (somme d'une série entière de rayon de convergence infini dans une algèbre de Banach). Par composition d'applications continues, l'application $g : M \to \det(\exp M)$ de E dans $\mathbb{C}$ est continue.

D'après a) les applications f et g coïncident sur la partie Δ de E constituée des matrices diagonalisables. D'après l'exercice précédent, Δ est dense dans E, ce qui permet d'affirmer que $f = g$. □

2.3.9 L'entier $n \geq 1$ étant donné, on note E l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n ; on munit E de son unique structure topologique d'e.v.n. (dimension finie). Soit $O(n)$ le groupe orthogonal de E.

1° Montrer que $O(n)$ est un compact de E.

2° $O(n)$ est-il un connexe de E ? Quelles sont les composantes connexes de $O(n)$?

Nous pouvons considérer que E a été muni de la norme :

$$\|\cdot\| : [\alpha_{ij}]_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq n} \longmapsto \max_{i,j} |\alpha_{ij}| .$$

1° E étant de dimension finie, il suffit de prouver que la partie $O(n)$ de E est à la fois fermée et bornée.

a) L'application $A \mapsto (A, {}^tA)$ de E dans E^2 est linéaire, et donc continue (dimension finie). L'application $(B,C) \mapsto BC$ de E^2 dans E est bilinéaire, et donc continue.

Il en résulte que l'application $A \mapsto A\,{}^tA$ de E dans E est continue ; image réciproque de I_n par cette application, $O(n)$ est un fermé de E.

b) Soit $P = [p_{ij}]_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq n}$ un élément de $O(n)$. On sait que :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 = 1, \qquad (\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\})$$

D'où : $\quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \quad |p_{ij}| \leq 1$, et donc $\|P\| \leq 1$, $O(n)$ est ainsi une partie bornée de E. □

Remarque. La démonstration vaut pour des matrices complexes, en envisageant le groupe unitaire.

2° a) L'application $A \mapsto \det A$ de E dans $\mathbb{R}$ est continue ($\det A$ est une fonction polynômiale des coefficients de A). Pour $A \in O(n)$, on a $\det A = 1$ si $A \in SO(n)$, groupe spécial orthogonal de E, et $\det A = -1$ si $A \in O(n) \setminus SO(n)$.

Aucune de ces parties n'étant vide, O(n) n'est pas connexe puisque son image par l'application det n'est pas un intervalle de R.

b) Nous allons commencer par montrer que SO(n) est connexe par arcs et donc connexe.

Il suffit pour cela (quitte à utiliser une "réunion de deux arcs") de montrer que pour tout $A \in SO(n)$, on peut joindre A à I_n (qui appartient à SO(n)) par un arc continu, contenu dans SO(n).

Soit $A \in SO(n)$. L'étude de la réduction du groupe orthogonal nous apprend qu'il existe $P \in SO(n)$ telle que $P^{-1}AP$ s'écrive :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \boxed{M_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{M_\ell} \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{où} \quad M_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}, \ \theta_i \in R$$

A tout $t \in [0,1]$ nous pouvons associer la matrice B(t) déduite de B en remplaçant M_i par la matrice :

$$M_i(t) = \begin{bmatrix} \cos(t\,\theta_i) & -\sin(t\,\theta_i) \\ \sin(t\,\theta_i) & \cos(t\,\theta_i) \end{bmatrix}$$

Nous avons $B(t) \in SO(n)$, et nous disposons de l'application $\gamma : t \longmapsto B(t)$ de [0,1] dans SO(n). Il s'agit d'un arc continu joignant $I_n = B(0)$ à $B = B(1)$. L'application $\varphi : M \longmapsto PMP^{-1}$ de E dans E est linéaire et donc continue ; elle conserve SO(n) ; $\varphi \circ \gamma$ est donc un arc continu, contenu dans SO(n), et joignant $I_n = \varphi(I_n)$ à $A = \varphi(B)$. □

On passe de SO(n) à O(n) \ SO(n) par l'application continue $A \longmapsto PA$, avec P fixée dans O(n) \ SO(n) ; ce dernier ensemble est donc lui aussi connexe.

En conclusion, les deux composantes connexes de O(n) sont SO(n) et O(n) \ SO(n).

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

3.1. LIMITES ; CONTINUITÉ

3.1.1 Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telle qu'existe:

$$\ell = \lim_{t\to+\infty} \big(f(t+1) - f(t)\big)$$

Vérifier : $\lim\limits_{t\to+\infty} \big(f(t)/t\big) = \ell$ (1)

En utilisant $\lim\limits_{t\to+\infty} \big(E(t)/t\big) = 1$, on constate qu'il s'agit de vérifier :

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0, \text{ où } F(t) = \frac{1}{t}\big(f(t) - \ell E(t)\big) \tag{2}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Nous commençons par fixer $A > 0$ tel que :

$$\forall u \geqslant A \quad |\varphi(u)| \leqslant \varepsilon, \text{ où } \varphi(u) = f(u+1) - f(u) - \ell \tag{3}$$

Pour tout $t \geqslant A$, notons $N(t)$ l'entier $E(t-A)$ qui vérifie :

$$A \leqslant t - N(t) < A+1, \quad \text{et} \quad N(t) \leqslant E(t) \leqslant t.$$

Ecrivons : $F(t) = G(t) + H(t)$, avec :

$$G(t) = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N(t)} \varphi(t-k) \; ; \; H(t) = \frac{1}{t}\Big[f\big(t-N(t)\big) - \ell\big(E(t) - N(t)\big)\Big]$$

D'après (3) : $|G(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{t} N(t) \leqslant \varepsilon$.

Désignant par M la borne supérieure de la fonction continue $|f|$ sur $[A, A+1]$, nous avons : $|H(t)| \leqslant \big(M + |\ell|(A+1)\big) / t$.

En posant $A' = \big(M + |\ell|(A+1)\big) / \varepsilon$, nous constatons :

$$\forall t \geqslant \max(A, A') \quad |F(t)| \leqslant 2\varepsilon.$$

□

3.1.2 1° Soient E un ensemble, et $(I_a)_{a\in E}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (a,b) \in E^2 \quad (a \neq b) \Rightarrow (I_a \cap I_b = \emptyset) \tag{1}$$

Montrer que E est au plus dénombrable.

2° Soit f une application quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note L l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} f(x)$ existe, cette limite étant alors notée $\ell(a)$.

Montrer que $A = \{a \in L \mid \ell(a) \neq f(a)\}$ est au plus dénombrable.

1° On sait qu'il existe une bijection $n \mapsto r_n$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$. Pour tout $a \in E$ on a $I_a \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$; $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n \in I_a\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$; elle admet un plus petit élément que l'on note $\varphi(a)$. On définit ainsi une application $\varphi : E \to \mathbb{N}$. D'après (1), φ est injective. □

2° Soit $r \in \mathbb{Q}$; notons $A_r = \{a \in A \mid f(a) \leqslant r < \ell(a)\}$, et plaçons-nous d'abord dans le cas où $A_r \neq \emptyset$. Soit $a \in A_r$; d'après $r < \lim\limits_{x \to a, x > a} f(x)$, il existe un intervalle ouvert non vide $I_a =]a, a+\alpha_a[$, $\alpha_a > 0$, tel que

$$\forall x \in I_a \quad f(x) > r.$$

Soient maintenant a et b deux points distincts de A_r, auxquels nous associons les intervalles ouverts non vides I_a et I_b ; montrons $I_a \cap I_b = \emptyset$. Supposons pour fixer les idées que $a < b$ et qu'il existe un point $x \in I_a \cap I_b$. Nous avons successivement :

$$a < b < x < a + \alpha_a \ : \ b \in I_a \ ; \ f(b) > r \ ; \ b \notin A_r$$

Nous aboutissons donc à une contradiction.

Les $(I_a)_{a \in A_r}$ vérifiant donc (1), A_r est au plus dénombrable (éventuellement vide !). Il en est donc de même pour $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} A_r$, qui n'est autre que :

$$A' = \{a \in A \mid f(a) < \ell(a)\}$$

En appliquant ce dernier résultat à $-f$, nous constatons que $A'' = \{a \in A \mid \ell(a) < f(a)\}$ est lui-aussi au plus dénombrable. Or $A = A' \cup A''$. □

| 3.1.3 | 1° Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue dont la restriction φ à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est injective. Montrer que f est injective.

2° Le résultat vaut-il lorsque c'est la restriction de f à $\mathbb{Q}$ qui est injective ?

1° Par l'absurde. Faisons l'hypothèse (H) : f n'est pas injective. Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, tel que $f(a) = f(b)$; la restriction de f à $[a,b]$ n'est pas constante (sinon φ ne serait pas injective) ; on a donc $f([a,b]) = [m,M]$ avec $m < M$.

On vérifie que, pour tout réel $y \in]m,M[$, $\{x \in [a,b] \mid f(x) = y\}$ admet au moins deux éléments ; l'un deux est nécessairement rationnel (sinon φ ne serait pas injective) ; notons le $g(y)$; nous obtenons ainsi une application

$g :]m,M[\to \mathbb{Q}$ manifestement injective, ce qui constitue une contradiction car $\mathbb{Q}$ est dénombrable, et $]m,M[$ ne l'est pas.

L'hypothèse (H) est donc absurde. □

2° La réponse est négative. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \ ; \ f(x) = 2x^2 \text{ si } x < 0$$

est continue et non injective, bien que sa restriction à $\mathbb{Q}$ soit injective.

3.1.4 Soient f et g deux applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Etudier la continuité de l'application M de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$M(x) = \sup_{t\in[-1,1]} \{f(t) + xg(t)\}$$

Pour x donné, l'existence de $M(x)$ tient à la continuité de $f + xg$ sur $[-1,1]$. Elimons le cas où g est nulle ; M est alors constante et donc continue.

Nous supposons donc que $\mu = \sup_{t\in[-1,1]} |g(t)|$ est non nul, et nous allons montrer que M est continue au point $a \in \mathbb{R}$.

Considérons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et associons lui $\eta = \varepsilon/\mu$. Soit $x \in]a-\eta, a+\eta[$.

Pour tout $t \in [-1,1]$, $f(t) + xg(t) = f(t) + ag(t) + (x-a)g(t)$ est majoré par $f(t) + ag(t) + |x-a|\cdot|g(t)|$ et donc par $M(a) + \varepsilon$. D'où :

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\quad M(x) \leqslant M(a) + \varepsilon.$$

En transposant a et x, on obtient :

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\quad M(a) \leqslant M(x) + \varepsilon.$$ □

3.1.5 1° Soit α un réel de la forme $\frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'à toute application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que $f(0) = f(1)$, on peut associer un $t_0 \in [0, 1-\alpha]$ tel que $f(t_0+\alpha) = f(t_0)$.

2° Le résultat s'étend-il à un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$?

1° L'application $g : t \mapsto f(t+\alpha) - f(t)$, de $[0, 1-\alpha]$ dans $\mathbb{R}$, est continue. Supposons qu'elle ne prenne pas la valeur 0. Il en résulte :

$$\forall t \in [0, 1-\alpha] \quad \operatorname{sgn} g(t) = \operatorname{sgn} g(0) \neq 0.$$

D'où : $\operatorname{sgn}\big(f(1)-f(0)\big) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=0}^{p-1} g(k\alpha)\right) = \operatorname{sgn} g(0)$,

et donc $f(1)-f(0) \neq 0$, ce qui constitue une contradiction. □

2° La réponse est négative. Considérons en effet $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha^{-1} \notin \mathbb{N}$ et associons lui l'application continue $f : t \mapsto t - \dfrac{\sin^2(\pi t/\alpha)}{\sin^2(\pi/\alpha)}$.

Ici : $f(0) = f(1)$, et : $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+\alpha) = f(t) + \alpha$. □

$\boxed{3.1.6}$ A tout $r \in \mathbb{Q}$ on associe son unique représentant canonique p/q ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^\star$, p et q premiers entre eux) et on dit que p et q sont respectivement le numérateur et le dénominateur de r.

1° Soient $N \in \mathbb{N}^\star$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$. Montrer que l'ensemble A des rationnels de $I = [a,b]$ dont le dénominateur est au plus égal à N est fini.

2° Etudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x/(1+x^2)$ si $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$,

$f(x) = pq/(p^2+q^2+2q)$ si $x \in \mathbb{R}_+$ est rationnel de représentant canonique p/q.

1° Pour tout entier $q \geqslant 1$ donné, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels de dénominateur q appartenant à I ; le numérateur p doit en effet appartenir à $[qa,qb]$.

En faisant varier q de 1 à N, on constate que l'ensemble A est fini, au titre de réunion finie d'ensembles finis.

2° a) On constate : $0 \leqslant f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. D'où la continuité de f au point 0.

b) Soit $x_0 > 0$. Nous allons montrer :
$$\lim_{x \to x_0,\, x \neq x_0} f(x) = \frac{x_0}{1+x_0^2}. \tag{1}$$

Comme visiblement $f(x_0) = \dfrac{x_0}{1+x_0^2}$ ou $f(x_0) \neq \dfrac{x_0}{1+x_0^2}$ suivant que $x_0 > 0$ appartient à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{Q}$, il en résultera :

f *est continue en* x_0 *si* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *discontinue en* x_0 *si* $x_0 \in \mathbb{Q}$

• Comme on a : $\displaystyle\lim_{x \to x_0,\, x \notin \mathbb{Q}} f(x) = \frac{x_0}{1+x_0^2}$, montrer (1) revient, d'après un théorème classique sur les limites, à montrer :

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in \mathbb{Q} \setminus \{x_0\}} f(x) = \frac{x_0}{1+x_0^2} \tag{2}$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

<u>LEMME</u>. Soit $(r_n = p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels admettant une limite $a \in \mathbb{R}$, et ne prenant pas la valeur a, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} q_n = +\infty$ (et aussi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |p_n| = +\infty$ si $a \neq 0$).

Soient $M \in \mathbb{N}^*$, et $A = \{r = \frac{p}{q} \in [a-1,a+1] \mid q \leqslant M\}$ qui contient visiblement au moins deux entiers. D'après le 1°, A est fini ; $A \setminus \{a\}$ est donc fini, non vide, et il existe $\eta = \min_{r \in A \setminus \{a\}} |r-a|$, $\eta > 0$. Compte tenu de l'hypothèse, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $0 < |p_n/q_n - a| < \eta$, et donc $q_n \geqslant M$. □

• On obtient (2) en utilisant le lemme avec $x = x_0$ et :

$$f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{p_n/q_n}{(p_n/q_n)^2 + 1 + 2/q_n} \quad .$$

$\boxed{3.1.7}$ J désigne l'ensemble des sous-intervalles d'intérieur non vide de $[0,1]$. Soit f l'application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ ainsi définie :

— Pour $t = 1$, on pose $f(1) = 0$.

— Pour $t \in [0,1[$, on considère l'unique développement décimal *propre* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \, 10^{-k}$ de t, ce qui signifie que $\{k \in \mathbb{N}^* \mid a_k \neq 9\}$ est infini (si t est décimal, il admet en outre un développement décimal *impropre*).

Si $\{k \in \mathbb{N} \mid a_{2k+1} \neq 1\}$ est infini, on pose $f(t) = 0$.

Sinon, on constate qu'il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$(a_{2k+1} = 1 \text{ pour tout } k \geqslant p) \wedge \left((p = 0) \vee (a_{2p-1} \neq 1)\right)$$

et on pose : $f(t) = \sum_{k=p}^{+\infty} a_{2k+2} \, 10^{-1-k+p} = 0, a_{2p+2} \, a_{2p+4} \ldots$ (ce dernier développement pouvant être impropre).

1° Montrer que, pour tout $I \in J$, on a $f(I) = [0,1]$.

2° Montrer que f n'est continue en aucun point de $[0,1]$.

1° Il suffit de vérifier que $f(I) = [0,1]$ pour les $I \in J$ fermés.

• Considérons donc $[u,v]$ tel que $0 \leqslant u < v \leqslant 1$, et écrivons le développement décimal propre : $u = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \, 10^{-k}$.

Constatons d'abord qu'il est possible de choisir un entier n (assez grand), tel que $\alpha_n \neq 9$ et que $10^{-n} < v - u$. En notant :

$$w = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, 10^{-k} + 10^{-n} = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} (1+\alpha_n) 00 \ldots$$

nous avons ainsi : $u < w \leqslant u + 10^{-n} < v$.

Constatons ensuite qu'il est possible de choisir un entier m, tel que $2m > n+1$ et que $2.10^{-(2m+1)} < v - w$. En notant :

$$u' = w + 10^{-(2m+1)} = 0,\underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}(1+\alpha_n)0 \dots 0\,1}_{2m+1}0\,0\dots$$

et $v' = w + 2.10^{-(2m+1)}$, nous avons ainsi : $[u',v'] \subset [u,v]$.

Nous allons montrer $f([u',v']) = [0,1]$. La proposition en résultera.

• Soit r un élément quelconque de $[0,1]$, et $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\, 10^{-k}$ son développement décimal propre si $r \neq 1$, et impropre si $r = 1$ (alors $r = 0,99\dots$).

Nous constatons que r est l'image par f de $\rho \in [u',v']$ tel que :

$$\rho = 0,\underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}(1+\alpha_n)0 \dots 0\,1}_{2m+1}\; b_1\,1\,b_2\,1\,b_3\,1\dots$$

à savoir $\rho = u' + 10^{-(2m+1)}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\, 10^{-2k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-2k}\right)$ □

2° La discontinuité de f en un point $t \in [0,1]$ tient à ce que, pour tout voisinage V de t dans $[0,1]$, on a $f(V) = [0,1]$.

3.1.8 La fonction $t \longmapsto \sin t^2$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

La réponse est négative. Choisissons en effet $\varepsilon = 1$.

Pour tout $\alpha > 0$, nous constatons que, quand t parcourt $I_\alpha = [\pi/\alpha, \alpha+\pi/\alpha]$, t^2 parcourt un intervalle d'amplitude supérieure à 2π, et $\sin t^2$ parcourt $[-1,1]$.

Il existe donc deux points t_1 et t_2 de I_α tels que $\sin t_1^2 = 0$ et $\sin t_2^2 = 1$.

Pour ces deux points : $|t_1 - t_2| \leqslant \alpha$ et $|\sin t_1^2 - \sin t_2^2| \geqslant \varepsilon$

3.1.9 Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $(h,k) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t)| \leqslant h|t| + k. \tag{1}$$

La réciproque est-elle vraie ?

---

a) Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (t',t'') \in \mathbb{R}^2 \quad (|t'-t''| \leqslant \alpha) \Rightarrow \big(|f(t') - f(t'')| \leqslant 1\big)$$

Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons $\xi_i = i\alpha.\mathrm{sgn}(t)$; notons p la partie entière de $|t/\alpha|$. Nous pouvons écrire :

$$f(t) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} \big(f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})\big) + \big(f(t) - f(\xi_p)\big).$$

En majorant par 1 d'une part $|f(t) - f(\xi_p)|$, d'autre part chacun des $|f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})|$, nous obtenons :

$$|f(t)| \leqslant |f(0)| + 1 + p, \text{ et } |f(t)| \leqslant \big(|f(0)| + 1\big) + \alpha^{-1}|t|.$$

Cette dernière inégalité est encore vraie pour $t = 0$. □

b) La réciproque n'est pas vraie. La fonction $t \longmapsto \sin t^2$ n'est pas uniformément continue sur R (cf. exercice précédent), et pourtant elle vérifie (1), avec $h = k = 1$.

3.1.10 On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications de R dans R telles qu'à chacune d'elles, f, on puisse associer un $k_f \in \mathsf{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathsf{R}^2 \quad |f(x)-f(y)| \leqslant k_f |\sin x - \sin y|.$$

1° Montrer que $\mathcal{E}$ est un R-espace vectoriel.

2° Montrer que toute $f \in \mathcal{E}$ est périodique, continue et bornée.

3° Si $f \in \mathcal{E}$ est dérivable, est-ce que f' est un élément de $\mathcal{E}$?

4° Une application $h : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ qui coïncide avec $t \longmapsto t$ sur $[0,\pi/2]$ peut elle appartenir à $\mathcal{E}$?

5° Soit $g : t \longmapsto \mathrm{Log}(1 + \sin t + |\sin t|)$. A-t-on $g \in \mathcal{E}$?

1° L'application nulle de R dans R est un élément de $\mathcal{E}$. Par ailleurs, on vérifie aisément que, pour tous $(f,g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathsf{R}^2$, l'application $h = \alpha f + \beta g$ est un élément de $\mathcal{E}$, avec $k_h = |\alpha| k_f + |\beta| k_g$.

2° Le 2π-périodicité de $f \in \mathcal{E}$ résulte de :

$$\forall t \in \mathsf{R} \quad |f(t+2\pi) - f(t)| \leqslant 0.$$

— Toute $f \in \mathcal{E}$ est lipschitzienne, et donc uniformément continue, ainsi que cela résulte (par la formule des accroissements finis) de :

$$\forall (x,y) \in \mathsf{R}^2 \quad |\sin x - \sin y| = |x-y|\,|\cos z| \leqslant |x-y|.$$

— Toute $f \in \mathcal{E}$, qui est continue, est bornée sur $[0,2\pi]$; elle est donc bornée sur R, du fait de sa 2π-périodicité. On peut aussi invoquer :

$$\forall t \in \mathsf{R} \quad |f(t)| \leqslant |f(0)| + k_f.$$

3° La réponse est négative. La fonction sinus appartient à $\mathcal{E}$ (avec $k_f = 1$) ; la fonction cosinus n'appartient pas à $\mathcal{E}$, ainsi que le montre :

$$\forall k \in R_+ \qquad |\cos\pi - \cos 0| > k|\sin\pi - \sin 0|.$$

4° Une telle application h admet au point $\pi/2$ une dérivée à gauche égale à 1. Or toute $f \in \mathcal{E}$ vérifie :

$$\forall t \in R^\star \qquad \left|\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+t\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{t}\right| \leqslant k_f \left|\frac{\cos t - 1}{t}\right|$$

et admet 0 pour dérivée au point $\pi/2$.

La réponse est donc négative.

5° On constate que g est l'application continue, 2π-périodique, vérifiant $g(\pi-t) = g(t)$ pour tout $t \in R$, qui coïncide avec $t \mapsto 0$ sur $[-\pi/2,0]$, et avec $t \mapsto \mathrm{Log}(1+2\sin t)$ sur $[0,\pi/2]$.

On va comparer $|g(x)-g(y)|$ et $|\sin x - \sin y|$ pour tout $(x,y) \in R^2$. .

La fonction sinus étant 2π-périodique, et telle que $\sin(\pi-t) = \sin t$ pour tout $t \in R$, compte tenu des valeurs absolues, on peut limiter la comparaison à $-\pi/2 \leqslant x < y \leqslant \pi/2$, ce qui entraîne $\sin x < \sin y$.

. Soit $y \in [-\pi/2,0]$; alors $|g(x)-g(y)| = 0$.

. Soit $y \in [0,\pi/2]$. Distinguons deux cas :

— Si $x \in [-\frac{\pi}{2},0]$, alors $|g(x)-g(y)| = \mathrm{Log}(1+2\sin y)$. Comme, pour tout $u > -1$, $\mathrm{Log}(1+u) \leqslant u$, et comme ici $\sin y \leqslant \sin y - \sin x$, il vient :

$$|g(x)-g(y)| \leqslant 2(\sin y - \sin x).$$

— Si $x \in]0,y]$, alors $|g(x)-g(y)| = \mathrm{Log}(1+2\sin y) - \mathrm{Log}(1+2\sin x)$.

Par le théorème des accroissements finis, il existe $z \in]x,y[$ tel que :

$$|g(x)-g(y)| = (\sin y - \sin x)\frac{2\cos z}{1+2\sin z}, \quad z \in]0,\pi/2[,$$

et donc : $|g(x)-g(y)| \leqslant 2(\sin y - \sin x)$.

En conclusion :

$$\forall (x,y) \in R^2 \qquad |g(x)-g(y)| \leqslant 2|\sin x - \sin y|$$

On a donc $g \in \mathcal{E}$, avec $k_g = 2$.

3.1.11 Trouver toutes les applications continues $f : R \to R$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in R^2 \qquad f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y) \tag{1}$$

L'application nulle de R dans R est visiblement une solution. Eliminons la.

Recherche d'une condition nécessaire. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et non nulle, vérifiant (1). Retenons tout d'abord :

$$f^2(0).\left[1 - f^2(0)\right] = 0 \ ; \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad f(2t)f(0) = f^4(t) \tag{2}$$

On ne peut avoir $f(0) = 0$, sans quoi on aurait $f(t) = 0$ pour tout t, et l'application f serait nulle. Ainsi : $f(0) \in \{-1,1\}$.

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. De (2) on déduirait $f(a/2) = 0$, et, par récurrence, $f(a/2^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde d'après : f est continue et $f(0) \neq 0$. Ainsi f ne prend pas la valeur 0 et, par continuité :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sgn} f(t) = \operatorname{sgn} f(0).$$

Comme par ailleurs : $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t).f(-t) = f^2(0)f^2(t)$, on peut ajouter que f est paire.

Nous disposons ainsi de l'application $g = \operatorname{Log}\left[\operatorname{sgn} f(0).f\right]$ qui est continue, paire, et vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x+y) + g(x-y) = 2\left[g(x) + g(y)\right] \tag{3}$$

En raisonnant par récurrence, on déduit de (3) :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \quad g(nt) = n^2 g(t)$$

ce qui entraîne : $\forall (q,t) \in \mathbb{N}^\star\times\mathbb{R} \quad g(t/q) = 1/q^2.g(t)$

et : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star \quad g(p/q) = 1/q^2.g(p) = p^2/q^2.g(1)$

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{Q}_+ \quad g(t) = kt^2$, avec $k = g(1)$.

Grâce à la continuité de g, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = \lim_{t\to x,\, t\in\mathbb{Q}} (kt^2) = kx^2$$

Ainsi, nécessairement, l'application paire g s'écrit $x \mapsto kx^2$ et la fonction f s'écrit : $x \mapsto \varepsilon.\exp(kx^2)$, avec $\varepsilon \in \{-1,+1\}$.

Réciproque. Pour tous $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et $k \in \mathbb{R}$, il est aisé de vérifier que l'application $x \mapsto \varepsilon.\exp(kx^2)$ répond à la question.

Remarque. La méthode que nous venons d'employer pour trouver l'application g s'applique à d'autres exercices. Citons la recherche de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ l'une des conditions :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \ ; \ f(x+y) = f(x).f(y)$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$$

Mais il existe une méthode plus "performante" qui consiste à commencer à montrer que toute solution est nécessairement de classe C^k ($k = 1, 2, \ldots$ suivant l'exercice). Nous allons exposer cette méthode sur l'exemple suivant.

$\boxed{3.1.12}$ Trouver toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) + f(x-y) = f(x).f(y) \qquad (1)$$

L'application nulle de R dans R est visiblement une solution. Eliminons la.

Recherche d'une condition nécessaire. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et non nulle, vérifiant (1). Retenons tout d'abord :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 2f(t) = f(t).f(0) \qquad (2)$$

En particulier $\big(2 - f(0)\big).f(0) = 0$, et $f(0) = 2$ $\big($car $f(0) = 0$ entraînerait, d'après (2), la nullité de $f\big)$.

Notons : $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) + f(-t) = 2f(t)$; f est donc paire.

La continuité de f en 0 implique l'existence de $\alpha > 0$ tel que $f(t) \geqslant 1$ pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$, et donc tel que (puisque f est localement intégrable sur R) :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt \geqslant 2\alpha > 0.$$

Par ailleurs de (1) nous déduisons :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x+t)dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-t)dt = f(x) \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt$$

et grâce à deux changements de variables :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(u)du = f(x) \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt \qquad (3)$$

L'intégrale (indépendante de x) qui figure au second membre de (3) étant non nulle, et l'application $x \longmapsto 2\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(u)du$ étant de classe C^1 nous pouvons affirmer que f est de classe C^1 et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt\right) \cdot f'(x) = 2[f(x+\alpha) - f(x-\alpha)] \qquad (4)$$

Mais $x \longmapsto f(x+\alpha) - f(x-\alpha)$ est alors de classe C^1, ce qui entraîne que f' est de classe C^1 et que f est de classe C^2.

Ce résultat acquis, on déduit de (1), après deux dérivations successives par rapport à x pour y fixé (resp. par rapport à y pour x fixé), et par comparaison des résultats :

$$\forall (x,y) \in R^2 \qquad f''(x).f(y) = f(x).f''(y)$$

ce qui exige : $\forall x \in R \quad 2f''(x) = f''(0).f(x)$.

En considérant que f est paire et que $f(0) = 2$, on en déduit (en discutant suivant $\operatorname{sgn} f''(0)$) que f est nécessairement de l'une des formes :

$$x \longmapsto 2 \ ; \ x \longmapsto 2 \operatorname{ch} \omega x \ (\omega \in R_+^\star) \ ; \ x \longmapsto 2 \cos \omega x (\omega \in R_+^\star) \tag{5}$$

Réciproque. Il est aisé de vérifier que toute application de R dans R de l'une des formes (5) répond à la question.

$\boxed{3.1.13}$ Soient f une application de R dans R et a un réel non nul tels que :

$$\forall t \in R \qquad f(t+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(t) - [f(t)]^2} \tag{1}$$

1° Montrer que f est périodique.

2° Pour a donné, trouver un exemple d'une telle fonction f.

1° Soit $g : R \longrightarrow R$ telle que $g(t) = f(t) - 1/2$ pour tout $t \in R$. On a :

$$\forall t \in R \qquad g(t+a) = \sqrt{1/4 - [g(t)]^2} \tag{2}$$

dont on déduit :

$$\forall t \in R \qquad g(t+2a) = \sqrt{1/4 - [g(t+a)]^2} = \sqrt{g(t)^2}$$

et, comme (2) implique que g est à valeurs positives :

$$\forall t \in R \qquad g(t+2a) = g(t).$$

Ainsi g, et donc f, admet 2a pour période.

2° On constate que (2) est vérifiée par $t \longmapsto \frac{1}{2}\left|\sin \frac{\pi t}{2a}\right|$. On peut donc adopter :

$$f : t \longmapsto \frac{1}{2}\left(1 + \left|\sin \frac{\pi t}{2a}\right|\right).$$

$\boxed{3.1.14}$ Déterminer toutes les applications $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2 \qquad |f(x)-f(y)| \geqslant |x-y| \tag{1}$$

---

a) On a en évidence les solutions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto 1-t$.

b) Comme nécessairement $|f(1)-f(0)| \geqslant 1$ et $f([0,1]) \subset [0,1]$, pour toute solution f on se trouve dans l'une ou l'autre des situations suivantes :

<u>1er *Cas*</u> : $f(0)=0$ et $f(1)=1$. En faisant successivement $y=0$ et $y=1$ dans (1) on a alors simultanément :

$$\forall x\in[0,1] \quad |f(x)|\geqslant|x|,\text{ i.e. } f(x)\geqslant x$$

et : $$\forall x\in[0,1] \quad |f(x)-1|\geqslant|x-1|,\text{ i.e. } 1-f(x)\geqslant 1-x.$$

Dans ce cas, f est donc $t\mapsto t$.

<u>2ème *Cas*</u> : $f(0)=1$ et $f(0)=0$. On applique ce qui précède à $g : t\mapsto f(1-t)$, et on constate que, dans ce cas, f est $t\mapsto 1-t$.

Les seules solutions sont donc $t\mapsto t$ et $t\mapsto 1-t$.

3.2. DÉRIVEES ; ROLLE ; TAYLOR

$\boxed{3.2.1}$ Soit $f : [a,b[\,\to\mathbb{R}$, $a<b$, une application dérivable à droite. Montrer qu'il existe un sous-intervalle ouvert non vide de $]a,b[$ en tout point duquel f est continue.

Faisons l'hypothèse (H) : la proposition est fausse.

• Déduisons-en qu'est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'assertion :

$$(\mathcal{R}_n)\left\{\begin{array}{l} \text{Il existe } (x_n,y_n,z_n)\in([a,b[)^3 \text{ vérifiant :}\\ y_{n-1}<y_n<z_n<x_n<z_{n-1}\ ;\ z_n-y_n<1/n\\ \forall t\in[y_n,z_n] \quad \left|\dfrac{f(x_n)-f(t)}{x_n-t}\right|\geqslant n \end{array}\right.$$

étant entendu que $(\mathcal{R}_0)$ signifie qu'il existe (x_0,y_0,z_0) tel que

$$a<y_0<z_0<x_0<b,$$

assertion qui est évidemment vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ pour lequel $(\mathcal{R}_{n-1})$ est vraie. D'après (H), il existe $x_n\in\,]y_{n-1},z_{n-1}[$ en lequel f est discontinue, et, plus précisément, discontinue à gauche (l'existence de $f'_d(x_n)$ assurant la continuité à droite). Il existe donc $\varepsilon_n>0$ tel que, pour tout $\alpha>0$, on peut trouver un $y\in\,]x_n-\alpha,x_n[$ tel que $|f(x_n)-f(y)|\geqslant\varepsilon_n$.

En adoptant $\alpha=\min(x_n-y_{n-1},1/n,\varepsilon_n/2n)$, on constate qu'il existe $y_n\in\,]y_{n-1},x_n[$ vérifiant $x_n-y_n<\min(1/n,\varepsilon_n/2n)$ et $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_n$, ce qui implique que y_n vérifie : $\left|\dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right|\geqslant 2n.$

D'autre part la continuité à droite de f en y_n entraîne :

$$\lim_{t\to y_n,\, t>y_n} \left|\frac{f(x_n)-f(t)}{x_n - t}\right| = \left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n - y_n}\right|$$

Il existe donc $z_n \in \left]y_n, x_n\right[$ tel que :

$$\forall t \in [y_n, z_n] \quad \left|\frac{f(x_n)-f(t)}{x_n - t}\right| \geqslant n \qquad (1)$$

Comme $z_n - y_n < x_n - y_n < 1/n$, $(\mathcal{R}_n)$ est vraie.

• On vient de construire une suite $n \mapsto [y_n, z_n]$ de segments emboités telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (z_n - y_n) = 0$. D'où l'existence d'une limite ℓ commune aux suites (y_n) et (z_n), avec $\ell \in [y_n, z_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui fournit, d'après (1)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{f(x_n)-f(\ell)}{x_n - \ell}\right| \geqslant n$$

On a : $\quad 0 < x_n - \ell < z_{n-1} - y_{n-1}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$. Il y a contradiction avec l'existence de $\lim\limits_{t\to\ell,\, t>\ell} \dfrac{f(t)-f(\ell)}{t - \ell}$.

En conclusion, l'hypothèse (H) est absurde.

$\boxed{3.2.2}$ Soient E un e.v.n. et $f : [0,1] \longrightarrow E$ une application continue en 0. On suppose en outre qu'il existe $\ell = \lim\limits_{t\to 0,\, t>0} \dfrac{f(2t)-f(t)}{t}$.

Montrer que f est dérivable en 0.

— Notons que si f admet $\lambda \in E$ pour dérivée en 0, alors :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(2t)-f(0)}{t} = 2\lambda, \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lambda, \quad \text{et donc } \lambda = \ell.$$

— Ramenons-nous au cas $f(0) = 0$ et $\ell = 0$ en considérant l'application :

$$g : [0,1] \longrightarrow E \qquad t \mapsto f(t) - f(0) - t.\ell$$

continue en 0, telle que $g(0) = 0$ et que : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{g(2t)-g(t)}{t} = 0.$ (1)

Nous allons montrer que g admet 0 pour dérivée en 0, ce qui entraînera que f admet ℓ pour dérivée en 0.

— Pour tout $t \in \left]0,1\right]$, $\big(g(t)-g(0)\big)/t = g(t)/t$ s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{g(t/2^k) - g(t/2^{k+1})}{t/2^{k+1}} + \frac{g(t/2^{n+1})}{t}$$

Donnons-nous $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\big($d'après (1)$\big)$ un $\eta \in \left]0,1\right]$ tel que :

$$\forall u \in]0,\eta] \qquad \left\| \frac{g(2u)-g(u)}{u} \right\| \leqslant \varepsilon/2.$$

Considérons $t \in]0,\eta]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g(t)/t\|$ est majoré par :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \left\| \frac{g(t/2^k) - g(t/2^{k+1})}{t/2^{k+1}} \right\| + \left\| \frac{g(t/2^{n+1})}{t} \right\|$$

et donc $\left(\text{les } t/2^{k+1} \text{ appartenant à }]0,\eta]\right)$ par :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \frac{g(t/2^{n+1})}{t} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \frac{g(t/2^{n+1})}{t} \right\|$$

t étant fixé, on a (continuité de g en 0) : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{g(t/2^{n+1})}{t} = 0$.

D'où l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left\| \frac{g(t/2^{n+1})}{t} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En écrivant la majoration précédente pour cet entier n (qui dépend de t) :

$$\|g(t)/t\| \leqslant \varepsilon$$

Cette inégalité vaut pour tout $t \in]0,\eta]$. D'où $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(t)}{t} = 0$. □

$\boxed{3.2.3}$ Soient E un e.v.n. complet (Banach) et $f : [0,1] \to E$ une application dérivable en tout point de $]0,1[$. On suppose en outre qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t \in]0,1[\qquad \|tf'(t)-f(t)+f(0)\| \leqslant kt^2$$

Montrer que f est dérivable en 0.

Soit $g :]0,1[\to E \quad t \mapsto \{f(t)-f(0)\} / t$.

Cette application est dérivable et :

$$\forall t \in]0,1[\quad \|g'(t)\| = \frac{\|tf'(t)-f(t)+f(0)\|}{t^2} \leqslant k.$$

Pour tout $(t_1,t_2) \in (]0,1[)^2$, on a (par l'inégalité des accroissements finis sur $[t_1,t_2]$ si $t_1 \neq t_2$) :

$$\|g(t_1)-g(t_2)\| \leqslant k|t_1-t_2|.$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc, en posant $\eta = \min(\varepsilon/k,1)$

$$\forall (t,t') \in (]0,\eta[)^2 \qquad \|g(t)-g(t')\| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi g vérifie, à droite de 0, le critère de Cauchy pour les fonctions ; comme E est complet, il existe $\lim\limits_{t \to 0, t > 0} g(t)$; autrement dit il existe $f'(0)$. □

Remarque. Le lecteur aura noté la différence entre cet exercice et le précédent, dans lequel la valeur de la dérivée éventuelle résultait immédiatement de la donnée ; il s'agissait alors de montrer qu'une fonction admettait en un point donné une limite *donnée ;* dans le présent exercice, la méthode consiste à utiliser le critère de Cauchy pour montrer l'existence d'une limite *qu'il n'est pas question de calculer*.

$\boxed{3.2.4}$ Soit E un e.v.n. et $f : [a,+\infty[\to E$ une application dérivable telle qu'il existe $\lim\limits_{t\to+\infty}\big(f(t)+f'(t)\big) = \ell$. Vérifier $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

Quitte à poser $F(t) = f(t) - \ell$, nous pouvons nous limiter à $\ell = 0_E$.

Soit $g : [a,+\infty[\to E \quad t \mapsto e^t.f(t)$

g est dérivable, de dérivée $t \mapsto e^t\big(f(t)+f'(t)\big)$.

Donnons-nous $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$. D'après l'hypothèse, il existe $b \geqslant a$ tel que :

$$\forall t \geqslant b \quad \|f(t)+f'(t)\| \leqslant \varepsilon/2$$

D'où : $$\forall t \geqslant b \quad \|g'(t)\| \leqslant \varepsilon\, e^t/2 \tag{1}$$

Pour tout $t \geqslant b$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[b,t]$ à g et à $u \mapsto \varepsilon\, e^u/2$ $\big($ce que permet (1)$\big)$, on obtient :

$$\|g(t)-g(b)\| \leqslant \varepsilon(e^t-e^b)/2$$

D'où : $\|f(t)\| \leqslant \varphi(t)$; $\varphi(t) = \varepsilon(1 - e^{b-t})/2 + e^{-t}\|g(b)\|$.

On constate : $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = \varepsilon/2$.

Il existe donc $c \geqslant b$ tel que $\varphi(t) \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \geqslant c$.

Finalement, à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$ on sait associer $c \geqslant a$ tel que :

$$\forall t \geqslant c \quad \|f(t)\| \leqslant \varepsilon .$$ □

Remarque. Voici une autre solution, valable dans l'hypothèse plus restrictive où f est de classe C^1. On constate que f est solution sur $[a,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(L) \quad y' + y = h(t), \text{ où } h = f + f'.$$

En utilisant l'ensemble des solutions de L, on constate qu'il existe $\lambda \in E$ tel que, pour tout $t \geqslant a$:

$$f(t) = \lambda e^{-t} + F(t) \ ; \ F(t) = e^{-t}.\int_a^t e^u h(u)du.$$

Nous avons tout d'abord : $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda e^{-t} = 0$.

Donnons-nous ensuite $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$. Il existe $b \geqslant a$ tel que, pour tout $t \geqslant b$, on a : $\|h(t)\| \leqslant \varepsilon/2$, et donc : $\|F(t)\| \leqslant \psi(t)$, avec :

$$\psi(t) = \left\| e^{-t} . \int_a^b e^u h(u)du \right\| + \varepsilon(1 - e^{b-t})/2$$

On en déduit (comme ci-dessus) : $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 0$. □

$\boxed{3.2.5}$ Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbf{C}$ une application de classe C^2 telle qu'il existe :

$$\lim_{t\to+\infty} \big(f(t)+f''(t)\big) \quad [\text{resp. } \lim_{t\to+\infty} \big(f(t)+f'(t)+f''(t)\big)].$$

Existe-t-il $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$?

Cet exercice est laissé au lecteur qui s'inspirera de la remarque qui précède.

$\boxed{3.2.6}$ A l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2, on associe l'application $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad F(t) = 2f(t) - tf'(t).$$

Montrer que f est paire si et seulement si F est paire.

- Si f est paire, f' est impaire, donc F paire (f dérivable suffit).
- Supposons F paire :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad 2f(t) - tf'(t) = 2f(-t) + tf'(-t)$$

soit encore, en posant : $g(t) = f(t) - f(-t)$:

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad 2g(t) - tg'(t) = 0.$$

Considérons alors l'application $t \mapsto g(t)/t^2$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ (resp. $\mathbf{R}_-^*$). Elle a pour dérivée au point t : $\big(tg'(t) - 2g(t)\big)/t^3 = 0$. Elle est constante. Il en résulte :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^* \quad g(t) = \lambda^+ t^2$$
$$\forall t \in \mathbf{R}_+^* \quad g(t) = \lambda^- t^2.$$

Comme g est de classe C^2 : $g''(0) = \lim\limits_{t\to0,\, t>0} g''(t) = \lim\limits_{t\to0,\, t<0} g''(t)$.
Il en résulte :

$$\lambda^+ = \lambda^-, \text{ donc } g(t) = \lambda t^2 \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Par ailleurs, g est manifestement impaire ; elle est donc nulle et f est paire. □

Remarque. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$f(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}_-$

$f(t) = t^2$ si $t \in \mathbb{R}_+$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (mais n'admet pas de dérivée seconde en 0). F est paire ($F = 0$) bien que f ne soit pas paire.

$\boxed{3.2.7}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note D_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe le déterminant $D_n(t)$, d'ordre n, dans lequel le terme correspondant à la ligne i et à la colonne j est :

$$t^{j-i+1}/(j-i+1)! \quad \text{si} \quad j \geqslant i-1 \; ; \quad 0 \text{ si } j < i-1.$$

Donner une expression aussi simple que possible de $D_n(t)$.

$D_n'(t)$ est la somme des n déterminants obtenus en remplaçant, successivement dans chaque ligne, les éléments par leurs dérivées. Les n-1 premiers de ces déterminants sont nuls pour avoir deux lignes identiques. Reste le dernier qui, après développement par rapport à sa dernière ligne, n'est autre que $D_{n-1}(t)$. Ainsi $D_n' = D_{n-1}$.

A partir de $D_1(t) = t$, on en déduit, par récurrence : $D_n(t) = t^n/n!$

$\boxed{3.2.8}$ On note F l'ensemble des applications indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui sont positives ainsi que toutes leurs dérivées successives.

1° Soit $(f,g) \in F^2$. Montrer que $u = \lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R}_+)$, $s = f+g$, $p = f.g$, $v = f \circ g$ sont des éléments de F.

2° Déterminer les éléments de F qui admettent une application réciproque appartenant à F.

Pour toute $f \in F$, les dérivées successives appartiennent à F ; d'autre part f et ses dérivées successives sont croissantes.

1° Comme f et g sont C^∞, il en est de même de u,s,p,v (cf. Cours).

a) En ce qui concerne u et s, la proposition résulte de :

$$u^{(n)} = \lambda f^{(n)} \quad \text{et} \quad s^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Notons : $(\lambda f) \notin F$ pour $\lambda < 0$ et $f \neq 0$; F n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) On obtient $p \in F$ en utilisant a) et :

$$p^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(k)} . g^{(n-k)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Notons que le résultat s'étend par récurrence au produit d'un nombre quelconque d'éléments de F, et donc à tout $P(f_1, \dots, f_n)$, où P est un polynôme à coefficients positifs et où les f_i sont des éléments de F.

c) Le lecteur établira par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} P_{n,k}(g', \dots, g^{(n)}) . f^{(k)} \circ g$$

où $P_{n,k}$ est un polynôme à coefficients positifs.

$P_{n,k}(g', \dots, g^{(n)}) \geqslant 0$ résulte de b) ; $f^{(k)} \circ g \geqslant 0$ est trivial. D'où $v \in F$.

2° Les conditions à remplir par $f \in F$, automatiquement croissante et C^{∞}, pour répondre à la question sont :

i) f est strictement croissante et $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, ce qui garantit que f induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$;

ii) L'application positive f' ne prend pas la valeur 0, ce qui garantit que f induit un C^{∞}-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$;

iii) $\varphi = f^{-1}$ et ses dérivées successives sont positives.

Notons que si $f \in F$ vérifie ii), alors (f' étant croissante) :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \geqslant f(0) + (x-0)f'(0)$$

et donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Compte tenu de ii), i) peut donc être remplacée par : $f(0) = 0$.

— Considérons donc $f \in F$ qui vérifie ii) et $f(0) = 0$. Cherchons à exprimer iii). Nous avons d'après le cours :

$$\varphi' = \frac{1}{f' \circ \varphi} \quad ; \quad \varphi'' = -\frac{f'' \circ \varphi}{(f' \circ \varphi)^3}$$

Comme $\varphi(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, nous avons $\varphi \geqslant 0$. De $f' \geqslant 0$ et $f'' \geqslant 0$ nous déduisons : $f' \circ \varphi \geqslant 0$ et $f'' \circ \varphi \geqslant 0$ ce qui entraîne :

$$\varphi' \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi'' \leqslant 0 \cdot$$

Il apparaît la condition nécessaire $\varphi'' = 0$, i.e. $\varphi : t \mapsto at+b$. Compte tenu de $\varphi(0) = 0$ et de ce que φ est strictement croissante, elle devient même :

$$\varphi : t \mapsto at, \ a > 0.$$

Revenant à f, nous constatons que les seules solutions possibles sont les $f : t \mapsto \alpha t$, $\alpha > 0$, qui répondent visiblement à la question.

$\boxed{3.2.9}$ Soit f une application de classe C^∞ de R dans R. Calculer les dérivées successives de $g = f \circ \mathrm{Log}$.

Au titre de composée d'applications de classe C^∞, g est une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t) = \frac{1}{t} f'(\mathrm{Log}\, t) \quad ; \quad g''(t) = \frac{1}{t^2}\big(f''(\mathrm{Log}\, t) - f'(\mathrm{Log}\, t)\big)$$

et on vérifie par récurrence que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g^{(n)}(t) = \frac{1}{t^n} \sum_{k=o}^{n-1} B_n^k \, f^{(n-k)}(\mathrm{Log}\, t) \qquad (1)$$

où les B_n^k sont des entiers relatifs qui ne dépendent pas du choix de f.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; nous allons obtenir les B_n^k en utilisant $f : x \mapsto e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ici : $g(t) = t^\lambda$ et $f^{(n-k)}(\mathrm{Log}\, t) = \lambda^{n-k} t^\lambda$, pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. En écrivant (1) pour $t = 1$, on en déduit que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) = B_n^0 \lambda^n + B_n^1 \lambda^{n-1} + \dots + B_n^{n-1} \lambda$$

et que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) = B_n^0 \lambda^{n-1} + B_n^1 \lambda^{n-2} + \dots + B_n^{n-1} .$$

D'où l'égalité entre éléments de $\mathbb{R}[X]$:

$$(X-1) \dots (X-n+1) = B_n^0 X^{n-1} + B_n^1 X^{n-2} + \dots + B_n^{n-1}$$

ce qui fournit $B_n^0 = 1$, et, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$B_n^k = (-1)^k \textstyle\sum_k(1,2,\dots,n-1), \text{ où } \sum_1(X_1,\dots,X_{n-1}), \dots, \sum_{n-1}(X_1,\dots,X_{n-1})$$

sont les polynômes symétriques élémentaires dans $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_{n-1}]$.

C'est ainsi que : $B_3^1 = -3$, $B_3^2 = 2$, $B_4^1 = -6$, ...

$\boxed{3.2.10}$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, avec $f_n(t) = t^{n-1}\,\mathrm{Log}(1+t)$. Vérifier que $f_n^{(n)}$ existe et est déterminée par :

$$\forall t \in]-1,+\infty[\quad f_n^{(n)}(t) = (n-1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+t)^k}$$

1° f_n est de classe C^∞ au titre de produit de deux applications de classe C^∞ de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

2° Il s'agit de vérifier par récurrence qu'une assertion (A_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— De $f_1(t) = \mathrm{Log}(1+t)$ et $f_1'(t) = \frac{1}{1+t}$, on déduit que (A_1) est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on a démontré que (A_n) est vraie. La formule de Leibniz donne (avec un abus de notation évident) :

$$f_{n+1}^{(n+1)} = (tf_n)^{n+1} = tf_n^{(n+1)} + (n+1)\, f_n^{(n)} .$$

Pour tout $t \in]-1,+\infty[$, $f_{n+1}^{(n+1)}(t)/(n-1)!$ s'écrit donc :

$$- t \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(1+t)^{k+1}} + (n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+t)^k}$$

ou, en utilisant $t = (1+t) - 1$:

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(1+t)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(1+t)^{k+1}} + (n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+t)^k}$$

ou, en utilisant un changement d'indexation dans le terme médian :

$$n \frac{1}{1+t} + \sum_{k=2}^{n} \frac{-k + (k-1) + (n+1)}{(1+t)^k} + \frac{n}{(1+t)^{n+1}}$$

ou enfin :

$$n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(1+t)^k} .$$

Il en résulte que l'assertion (A_{n+1}) est vraie. □

3.2.11 THÉOREME DE DARBOUX. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Il s'agit de prouver que si a et b, $a<b$, sont deux points de I, alors l'intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $f'(a)$ et $f'(b)$ est inclus dans $f'(I)$.

Première démonstration. Considérons $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(a) = f'(a) \ ; \ \varphi(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \text{ pour } t \in]a,b].$$

φ étant visiblement continue, $\varphi([a,b])$ est un segment contenant les points $f'(a)$ et $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \varphi(b)$. Ce segment est inclus dans $f'(I)$ ainsi qu'on le constate en utilisant $\varphi(a) = f'(a)$, et pour $t \in]a,b]$:

$$\varphi(t) = f'(\xi),\ \xi \in]a,t[\quad \text{(accroissements finis)}.$$

Considérons de même $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\psi(b) = f'(b) \ ; \ \psi(t) = \frac{f(t)-f(b)}{t-b} \text{ pour } t \in [a,b[.$$

$\psi([a,b])$ est un segment contenant les points $f'(b)$ et m, qui est inclus dans $f'(I)$.

Réunion de deux segments d'intersection non vide, $\varphi([a,b]) \cup \psi([a,b])$ est un segment inclus dans $f'(I)$ et contenant $f'(a)$ et $f'(b)$. □

Deuxième démonstration. Soit $\Delta = \{(x,y) \in [a,b]^2 \mid x > y\}$.

Δ est un convexe de $\mathbb{R}^2$, et donc un connexe de $\mathbb{R}^2$. Considérons :

$$F : \Delta \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \longmapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

F étant visiblement continue, $F(\Delta)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, et donc un intervalle qui est inclus dans $f'(I)$ ainsi qu'on le constate en utilisant encore la formule des accroissements finis.

Pour tout $x \in]a,b[$, on a $(x,a) \in \Delta$ et donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in F(\Delta)$.

D'où, par passage à la limite : $f'(a) \in \overline{F(\Delta)}$. De même $f'(b) \in \overline{F(\Delta)}$. Il en résulte que l'intervalle ouvert d'extrêmités $f'(a)$ et $f'(b)$ est inclus dans $F(\Delta)$, et donc dans $f'(I)$. □

3.2.12 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a<b$, une application dérivable, telle que $f'(a) = f'(b)$.

Montrer : $\exists \xi \in]a,b[\quad f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$

$\big($On pourra commencer par le cas où $f'(a) = f'(b) = 0\big)$.

Cas particulier : $f'(a) = f'(b) = 0$. Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(a) = 0 \ ; \quad \varphi(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \text{ pour } t \in]a,b].$$

φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$, et :

$$\forall t \in]a,b] \quad \varphi'(t) = \frac{(t-a)f'(t) - \big(f(t)-f(a)\big)}{(t-a)^2}$$

Il s'agit de montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $\varphi'(\xi) = 0$

On a : $\quad \varphi'(b) = -k$, et $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = k$, avec $k = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}$

D'après la formule des accroissements finis appliquée à φ sur $[a,b]$, il existe : $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = k$.

Si $k = 0$ $\big($i.e. si $f(a) = f(b)\big)$ on peut adopter $\xi = c$.

Si $k \neq 0$, on a $\varphi'(c).\varphi'(b) < 0$; en utilisant l'exercice précédent, on en déduit que $\varphi'([c,b])$ est un intervalle contenant 0 ; il existe donc $\xi \in]c,b[$ tel que $\varphi'(\xi) = 0$. □

Cas général : On applique le cas particulier à $g : t \longmapsto f(t) - \alpha(t-a)$, avec $\alpha = f'(a) = f'(b)$.

Interprétation géométrique. Il existe un point M de l'arc Γ d'équation $y=f(x)$, distinct des extrémités, tel que la tangente en M à Γ contienne le point $\{a,f(a)\}$.

> $\boxed{3.2.13}$ Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que l'équation $P(x)=e^x$, à l'inconnue $x\in\mathbb{R}$, n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Notons f l'application $t\mapsto e^t-P(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui est de classe C^∞. D'après le théorème de Rolle, si f admet n zéros, f' en admet au moins n-1.

Il en résulte que si f admettait une infinité de zéros, il en serait de même de f', et par récurrence, de toutes les dérivées successives de f.

Or, comme P est une fonction polynôme on a, pour p suffisamment grand :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad f^{(p)}(t)=e^t\neq 0.$$

On aboutirait à une contradiction. □

> $\boxed{3.2.14}$ Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, une application de classe C^2 ; on suppose que f est non affine, et que, posant $M=\sup\limits_{t\in[a,b]}|f''(t)|$, on a $M>0$.
>
> 1° Dans cette question $f(a)=f(b)=0$.
>
> a) Montrer que pour tout $x\in[a,b]$, il existe $c_x\in\,]a,b[$ tel que :
>
> $$f(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c_x) \qquad (1)$$
>
> En déduire : $\forall x\in[a,b]\quad |f(x)|\leqslant\frac{M}{2}(x-a)(b-x) \qquad (2)$
>
> et : $\quad |f'(a)|\leqslant\frac{M}{2}(b-a)\ ;\ |f'(b)|\leqslant\frac{M}{2}(b-a) \qquad (3)$
>
> b) Montrer que, s'il existe $x_0\in\,]a,b[$ tel que $f(x_0)=\frac{M(x_0-a)(x_0-b)}{2}$, alors pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)=\frac{M(x-a)(x-b)}{2}$.
>
> Montrer qu'il en est de même si $f'(a)=-\frac{M}{2}(b-a)$.
>
> c) Montrer que pour tout $x\in\,]a,b[$, $|f'(x)|<\frac{M}{2}(b-a)$.
>
> 2° a) Montrer l'existence de deux fonctions polynômes du second degré $t\mapsto T_i(t)$, $i=1$ et $i=2$, vérifiant : $T_i(a)=f(a)$, $T_i(b)=f(b)$, $\|T_i''\|=M$
>
> et : $\quad\forall t\in[a,b]\quad T_1(t)\leqslant f(t)\leqslant T_2(t)$
>
> b) Montrer :
>
> $$\forall t\in[a,b]\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{M}{2}(b-a)\leqslant f'(t)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+\frac{M}{2}(b-a)$$
>
> les inégalités étant strictes pour $t\in\,]a,b[$.

1° a) Pour $x = a$ (resp. $x = b$) (1) est trivial (prendre par exemple $c_x = \frac{a+b}{2}$). □

— Fixons $x \in]a,b[$. Introduisons $\Phi : [a,b] \to R$, définie par :

$$\Phi(t) = f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b), \text{ avec } A = \frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

Φ est une application de classe C^2 ; $\Phi(a) = \Phi(b) = \Phi(x) = 0$.

Par Rolle, il existe $\alpha \in]a,x[$ et $\beta \in]x,b[$ vérifiant $\Phi'(\alpha) = \Phi'(\beta) = 0$; à nouveau par Rolle, il existe $c_x \in]\alpha,\beta[$, et donc $c_x \in]a,b[$, vérifiant $\Phi''(c_x) = 0$; on constate $A = f''(c_x)$. □

En majorant $|f''(c_x)|$ par M dans :

$$|f(x)| = \frac{(x-a)(b-x)}{2}|f''(c_x)|, \text{ on obtient (2).}$$

. En utilisant (2) avec $x = t$, et compte tenu de $f(a) = 0$:

$$\forall t \in]a,b[\qquad \left|\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right| = \left|\frac{f(t)}{t-a}\right| \leqslant \frac{M}{2}(b-t)$$

En prenant les limites lorsque $t \to a$, $t > a$, on obtient la première inégalité (3). L'autre s'obtient de la même façon.

b) Soit $g : [a,b] \to R$, $\quad t \mapsto \frac{M}{2}(t-a)(t-b) - f(t)$.

Cette application est de classe C^2 ; elle vérifie $g'' \geqslant 0$, et est donc convexe ; comme $g(a) = g(b) = 0$, on en déduit $g \leqslant 0$.

— Si on suppose qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $g(x_0) = 0$, alors g atteint un maximum en x_0, et $g'(x_0) = 0$; la tangente en x_0 au graphe de g a pour équation $y = 0$; par convexité, on en déduit $g = 0$.

— Si on suppose $f'(a) = -M(b-a)/2$, alors $g'(a) = 0$; par convexité, on en déduit $g = 0$.

N.B. On aurait pu déduire le signe de g' et les variations de g de ce que g' est croissante.

c) La proposition est triviale lorsque f est $t \mapsto \varepsilon M(t-a)(t-b)/2$, $\varepsilon \in \{-1,1\}$, car alors, pour tout $t \in]a,b[$:

$$|f'(t)| = M|2t - (a+b)|/2 < M(b-a)/2$$

En utilisant b) et le changement éventuel de f et $-f$, il suffit donc d'établir la proposition dans le cas où :

$$\forall t \in]a,b[\qquad |f(t)| < M(t-a)(b-t)/2$$

Plaçons-nous dans ce cas, et considérons $x \in]a,b[$. Introduisons :

$$\psi : [a,x] \to R \qquad t \mapsto f(t) - f(x)\,\frac{t-a}{x-a}$$

ψ est de classe C^2, telle que $\psi'' = f''$; $\psi(a) = \psi(x) = 0$.

Comme $\sup_{t\in[a,x]} |\psi''(t)| \leqslant M$, a) donne : $|\psi'(x)| \leqslant M(x-a)/2$,

i.e. $\quad |f'(x) - \frac{f(x)}{(x-a)}| \leqslant M(x-a)/2.$

Compte tenu de $|f(x)| / (x-a) < M(b-x)/2$, on a :

$$|f'(x)| < M(b-a)/2. \qquad \square$$

2° Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}t - \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$, h est de classe C^2 telle que : $h'' = f''$; $h(a) = h(b) = 0$.

On applique les résultats du 1° à g. $\square$

$\boxed{3.2.15}$ Soient f et g deux applications dérivables d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que f, g, f', g' ne prennent que des valeurs strictement positives et que f'/g' soit strictement croissante. Etudier f/g.

— Notons que f et g sont strictement croissantes. Soit $(t_1,t_2) \in I^2$, $t_1 < t_2$.

Compte tenu de $g(t_1) < g(t_2)$ et de $g'(t) > 0$ pour tout $t \in I$, on sait (grâce à une généralisation de la formule des accroissements finis) qu'il existe $t_3 \in]t_1,t_2[$ tel que : $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{g(t_2)-g(t_1)} = \frac{f'(t_3)}{g'(t_3)}$ et donc (f'/g' étant strictement croissante), que :

$$\frac{f'(t_1)}{g'(t_1)} < \frac{f(t_2)-f(t_1)}{g(t_2)-g(t_1)} < \frac{f'(t_2)}{g'(t_2)} \tag{1}$$

En remarquant que $\operatorname{sgn} \circ (f/g)' = \operatorname{sgn} \circ (f'/g' - f/g)$, on constate que l'on ne peut avoir $(f/g)'(t_1) \geqslant 0$ et $(f/g)'(t_2) \leqslant 0$, sans quoi, à cause de (1), on aurait :

$$\frac{f(t_1)}{g(t_1)} < \frac{f(t_2)-f(t_1)}{g(t_2)-g(t_1)} < \frac{f(t_2)}{g(t_2)}$$

et donc : $f(t_1)g(t_2) < g(t_1)f(t_2)$ et $g(t_1)f(t_2) < f(t_1)g(t_2)$, ce qui serait absurde.

— Il en résulte que l'application $(f/g)'$ ne peut avoir deux zéros et que, plus précisément, les deux cas suivants sont seuls possibles *a priori* :

a) $(f/g)'$ n'a pas de zéro ; (f/g) est strictement monotone ;

b) $(f/g)'$ a un zéro unique α, avec $(f/g)'(t) > 0$ si $t > \alpha$ et $(f/g)'(t) < 0$ si $t < \alpha$; f/g est strictement croissante (resp. décroissante) à droite (resp. à gauche) de α, et présente donc un minimum en α.

Montrons par un exemple que tous les cas possibles se présentent effectivement. Soient $f = t \mapsto t^2+1$ et $g : t \mapsto t$. Les conditions de l'énoncé sont remplies pour $I =]0,+\infty[$, et on est alors dans le cas b), avec $\alpha = 1$. Mais si l'on se restreint à $]0,1[$ (resp. $]1,+\infty[$), on est dans le cas a), avec f/g strictement décroissante (resp. croissante).

$\boxed{3.2.16}$ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow E$, où E est un e.v.n., une application dérivable telle que f' soit uniformément continue. On suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ existe ; montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t)$ existe aussi.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On lui associe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} \qquad \big(|x-y| \leqslant \alpha\big) \Rightarrow \big(\| f'(x)-f'(y) \| \leqslant \varepsilon/2\big)$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $\forall t \in [x,x+\alpha] \quad \| f'(t)-f'(x) \| \leqslant \varepsilon/2$.

Appliquons alors alors l'inégalité des accroissements finis à $t \longmapsto f(t) - tf'(x)$ sur le segment $[x,x+\alpha]$. Il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \left\| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} - f'(x) \right\| \leqslant \varepsilon/2 \tag{1}$$

Or α étant fixé (indépendant de x) on peut écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\big(f(x+\alpha)-f(x)\big) = 0$.
Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \geqslant A \qquad \left\| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \right\| \leqslant \varepsilon/2 \tag{2}$$

En écrivant : $\| f'(x) \| \leqslant \left\| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} - f'(x) \right\| + \left\| \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \right\|$, on déduit de (1) et (2) : $\forall x \geqslant A \quad \| f'(x) \| \leqslant \varepsilon$.

En conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. □

Remarque. Considérons $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t}\sin(t^2)$.
On remarque : $f'(t) = -\frac{1}{t^2}\sin(t^2) + 2\cos(t^2)$; f' est continue (mais par uniformément continue). On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, mais $f'(t)$ n'a pas de limite lorsque $t\to+\infty$.

$\boxed{3.2.17}$ Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable, telle que $f''(a)$ existe. Vérifier :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0);h_1\neq 0,h_2\neq 0} \frac{g(h_1,h_2)}{h_1 h_2} = f''(a) \tag{1}$$

où: $\quad g(h_1,h_2) = f(a+h_1+h_2) - f(a+h_1) - f(a+h_2) + f(a)$.

Nous notons : $\varphi(u) = f'(a+u) - f'(a) - uf''(a)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après l'existence de $f''(a)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[a-\alpha,a+\alpha]$ soit inclus dans I et que :

$$\forall u \in [-\alpha,+\alpha] \qquad |\varphi(u)| \leqslant \varepsilon |u| \tag{2}$$

Soit (h_1,h_2) tel que $0<|h_1|\leqslant \alpha/2$ et $0<|h_2|\leqslant \alpha/2$, ce qui garantit l'existence de $g(h_1,h_2)/(h_1/h_2)$. Notons ψ la fonction :

$$u \longmapsto f(a+h_1+u) - f(a+u) - uh_1 f''(a)$$

qui est dérivable sur $[0,h_2]$ (resp. $[h_2,0]$), de dérivée telle que :

$$\psi'(u) = \varphi(h_1+u) - \varphi(u)$$

Pour tout $u\in[0,h_2]$ (resp. $[h_2,0]$), on a, grâce à (2) :

$$|\psi'(u)| \leqslant \varepsilon\big(|h_1+u| + |u|\big) \leqslant \varepsilon\big(|h_1| + 2|h_2|\big).$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à ψ sur $[0,h_2]$ (resp.$[h_2,0]$) donne après division par $h_1h_2 \neq 0$:

$$\left|\frac{g(h_1,h_2)}{h_1h_2} - f''(a)\right| \leqslant \varepsilon\left(1 + 2\,\frac{|h_2|}{|h_1|}\right).$$

En transposant h_1 et h_2 on en déduit :

$$\left|\frac{g(h_1,h_2)}{h_1h_2} - f''(a)\right| \leqslant \varepsilon \min\left(1 + 2\,\frac{|h_2|}{|h_1|}\ ,\ 1 + 2\,\frac{|h_1|}{|h_2|}\right). \tag{3}$$

L'un des réels $|h_2|/|h_1|$ ou $|h_2|/|h_1|$ étant inférieur à 1, le second membre de (3) est majoré par 3ε. □

$\boxed{3.2.18}$ Soient un réel a, et deux applications dérivables, f et g, de $]a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que g' ne prenne pas la valeur 0 et que :

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty .$$

a) On suppose qu'il existe $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$. Montrer $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)}$.

b) Que penser de la réciproque ?

---

a) Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, quitte à remplacer a par un réel plus grand, on peut supposer que g ne prend pas la valeur 0 sur $]a,+\infty[$.

— Quitte à remplacer f par $t \longmapsto f(t) - \ell g(t)$, on peut supposer $\ell = 0$.

• Dans ces conditions, soit $\varepsilon>0$. Il existe $A>a$ tel que :

$$\forall u \in [A,+\infty[\qquad \left|\frac{f'(u)}{g'(u)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\ . \tag{1}$$

A étant ainsi fixé, puisque g' ne prend pas la valeur 0, on constate que l'on a $g(t)-g(A)\neq 0$ pour tout $t>A$, et que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(A)}{g(t)-g(A)} = 0$.

Il existe donc B tel que B>A et que :

$$\forall t \in [B,+\infty[\qquad \left|\frac{f(A)}{g(t)-g(A)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2}$$

On a de même $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{g(A)}{g(t)-g(A)} = 0$, et il existe C tel que C>A et que

$$\forall t \in [C,+\infty[\qquad \left|\frac{g(A)}{g(t)-g(A)}\right| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Soit $t \geqslant \max(B,C)$. D'après (3) :

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leqslant 2\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \left(1 + \frac{g(A)}{g(t)-g(A)}\right) \tag{4}$$

Or :
$$\frac{f(t)}{g(t)}\left(1 + \frac{g(A)}{g(t)-g(A)}\right) = \frac{f(t)-f(A)}{g(t)-g(A)} + \frac{f(A)}{g(t)-g(A)} \tag{5}$$

Comme il existe $\xi \in]A,t[$ tel que : $\dfrac{f(t)-f(A)}{g(t)-g(A)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

on a, d'après (1) : $\left|\dfrac{f(t)-f(A)}{g(t)-g(A)}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$,

et, compte tenu de (2) et de (5),(4) fournit $\left|\dfrac{f(t)}{g(t)}\right| \leqslant \varepsilon$.
On en déduit :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)/g(t) = 0.$$ □

b) La réciproque est fausse. Avec $a = 0$, $f(t) = t + \cos t$, $g(t) = t$, on a en effet : $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$; $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)/g(t) = 1$.
Mais $f'(t)/g'(t) = 1 - \sin t$ n'a pas de limite lorsque $t\to+\infty$.

Remarques. a) Le lecteur pourra vérifier que le résultat reste valable si l'on remplace ℓ par $+\infty$.
b) Il pourra reprendre l'exercice avec l'hypothèse

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0 \ ; \ \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

(en supposant que g ne prend pas la valeur 0 sur $]a,+\infty[$).

$\boxed{3.2.19}$ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application deux fois dérivable, majorée et telle que $f'' \geqslant \alpha^2 f$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est donné.

1° Montrer : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = 0$.

2° Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) \leqslant f(0).\exp(-\alpha t)$.

Notons que $f'' \geqslant 0$, et donc que f est convexe.

1° a) Montrons d'abord par l'absurde que $f' \leqslant 0$.

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(a) > 0$. Par convexité :

$$\forall t \geqslant a \quad f(t) \geqslant f'(a).(t-a) + f(a)$$

ce qui entraîne : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$, en contradiction avec le fait que f soit majorée. □

b) Ainsi f est décroissante, et minorée par 0. D'où l'existence de $\ell = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$, avec $\ell \geqslant 0$.

c) Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. Supposons $\ell > 0$. On a :

$$\forall t \in R_+ \quad f''(t) \geqslant \alpha^2 \ell$$

En étudiant $t \longmapsto f'(t) - \alpha^2 \ell t$, qui est ainsi croissante, on constate :

$$\forall t \in R_+ \quad f'(t) - \alpha^2 \ell t \geqslant f'(0)$$

ce qui entraîne : $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$, en contradiction avec $f' \leqslant 0$. □

Nous avons démontré : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$. (1)

d) Comme f' est croissante et majorée par 0, il existe $\ell' = \lim\limits_{t \to +\infty} f'(t)$, avec $\ell' \leqslant 0$. Montrons par l'absurde que $\ell' = 0$.

Supposons $\ell' < 0$. On a : $\forall t \in R_+ \quad f'(t) \leqslant \ell'$.

En étudiant $t \longmapsto f(t) - \ell' t$, qui est ainsi décroissante, on constate :

$$\forall t \in R_+ \quad f(t) - \ell' t \leqslant f(0)$$

ce qui entraîne : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -\infty$, en contradiction avec (1). □

2° De $f'' \geqslant \alpha^2 f$ et $f' \leqslant 0$ on déduit : $f'f'' \leqslant \alpha^2 ff'$, ce qui entraîne que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante. Il en résulte :

$$\forall t \in R_+ \quad \alpha^2 f^2(t) - f'^2(t) \leqslant \lim_{x \to +\infty} \left(\alpha^2 f^2(x) - f'^2(x)\right) = 0,$$

i.e. $\alpha^2 f^2 \leqslant f'^2$; compte tenu de $\alpha f \geqslant 0$ et de $f' \leqslant 0$, il en résulte : $\alpha f \leqslant -f'$.

L'application $g : t \longmapsto f(t)\exp(\alpha t)$, de dérivée $g' : t \longmapsto \left(f'(t) + \alpha f(t)\right)\exp(\alpha t)$ est donc décroissante et :

$$\forall t \in R_+ \quad g(t) \leqslant g(0) = f(0).$$ □

3.2.20 Soient a un réel, n un entier positif, et f une application de classe C^n d'un voisinage de a dans R. On pose :

$$\Delta(h) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}\, C_n^p f(a+ph).$$

Prouver l'existence de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta(h)}{h^n}$.

(Le calcul fait intervenir les entiers $A_{n,k} = \sum_{p=o}^{n} (-1)^{n-p} C_n^p p^k$, dont on donnera une expression aussi simple que possible).

— L'hypothèse implique l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit définie et de classe C^n sur $]a-\alpha, a+\alpha[$, ce qui entraîne que la fonction Δ est définie et de classe C^n sur $]-\alpha/n, \alpha/n[$.

On peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre n pour chacun des $f(a+ph)$, $0 \leqslant p \leqslant n$. Après combinaisons linéaires, on en déduit que Δ admet le développement limité au voisinage de 0 (dont on connaît l'unicité) :

$$P : h \mapsto \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!} A_{n,k} f^{(k)}(a) h^k \tag{1}$$

— Dans le cas particulier où $f(t) = e^t$, ce développement s'écrit :

$$P : h \mapsto \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!} A_{n,k} e^a h^k \tag{2}$$

Mais on a alors directement :

$$\Delta(h) = e^a \sum_{k=o}^{n} (-1)^{n-p} C_n^p (e^h)^p = e^a (e^h - 1)^n$$

En utilisant $e^h - 1 = h + o(h)$, on constate que P s'écrit ici :

$$P : h \mapsto e^a h^n \tag{3}$$

La comparaison de (2) et de (3) fournit :

$$A_{n,n} = n! \;;\; A_{n,k} = 0 \text{ pour } 0 \leqslant k < n.$$

Revenant au cas général, (1) s'écrit : $P(h) = f^{(n)}(a) h^n$.

Il en résulte : $\lim\limits_{h \to o} \dfrac{\Delta(h)}{h^n} = f^{(n)}(a)$.

3.2.21 Soient E un e.v.n., I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et $f : I \longrightarrow E$ une application de classe C^n. On suppose en outre qu'il existe un entier p tel que :

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(p-1)}(0) = 0 \;,\; 1 \leqslant p \leqslant n. \tag{1}$$

1° Montrer qu'il existe une unique application continue $g : I \mapsto E$ telle que $g(x) = x^{-p} f(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{0\}$.

2° Montrer que g est de classe C^{n-p}. Calculer $g^{(k)}(0)$, $0 \leqslant k \leqslant n-p$.

1° Pour tout $x \neq 0$, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre p-1, avec reste intégral, appliquée à f sur le segment d'extrémités 0 et x s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=o}^{p-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)dt$$

Compte tenu de (1), le changement de variable de $t = xu$ dans l'intégrale conduit à :

$$\forall x \in I\setminus\{0\} \quad \frac{f(x)}{x^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^1 (1-u)^{p-1} f^{(p)}(xu)du \qquad (2)$$

— L'application $(x,u) \mapsto xu$ de $I\times[0,1]$ dans R est de classe C^∞ et donc (par produit et composition) l'application :

$$\varphi : I\times[0,1] \longrightarrow E \qquad (x,u) \mapsto (1-u)^{p-1} f^{(p)}(xu)$$

est continue et possède des dérivées partielles par rapport à x, toutes continues, jusqu'à l'ordre n-p ; pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-p$, on a :

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k} : I\times[0,1] \longrightarrow E \qquad (x,u) \mapsto (1-u)^{p-1} u^k f^{(p+k)}(xu)$$

Par applications successives du théorème de dérivation d'une intégrale de Riemann dépendant d'un paramètre, on en déduit que l'application

$\Phi : x \mapsto \int_0^1 \varphi(x,u)du$ de I dans E est de classe C^{n-p}.

— En particulier : $\lim\limits_{x\to o} \Phi(x) = \int_0^1 \varphi(0,u)du = \frac{f^{(p)}(0)}{p}$

En utilisant (2), on en déduit l'existence de :

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{f(x)}{x^p} = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

D'où l'existence du prolongement continu g de $x \mapsto x^{-p}f(x)$ et l'égalité (d'applications de I dans E) : $g = \frac{1}{(p-1)!}\Phi$.

2°) L'égalité précédente montre que, comme Φ, g est de classe n-p. En particulier au point 0 on a, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-p$:

$$g^{(k)}(0) = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^1 \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(0,u)du = \frac{f^{(p+k)}(0)}{(p-1)!} \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^k du .$$

3.3. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

3.3.1 Trouver un équivalent à $S_n = \sum_{p=1}^{n} 2^p \operatorname{Log} p$ au voisinage de $+\infty$.

Soit $\alpha \in]0,1[$ un réel fixé. Pour chaque entier n, on dispose de l'entier $k = E(n\alpha)$ qui vérifie : $k \leqslant n\alpha < k+1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on peut écrire :

$$\operatorname{Log}(n\alpha) . \sum_{p=k+1}^{n} 2^p \leqslant S_n \leqslant \operatorname{Log} n \sum_{p=1}^{n} 2^p$$

ou :

$$\left(1 + \frac{\operatorname{Log}\alpha}{\operatorname{Log} n}\right)\left(1 - 2^{k-n}\right) \leqslant \frac{S_n}{2^{n+1} \operatorname{Log} n} \leqslant 1 - \frac{1}{2^n} \qquad (1)$$

Comme: $k-n \leqslant n(\alpha-1)$ on constate : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{k-n} = 0$ et de (1) on déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{2^{n+1} \operatorname{Log} n} = 1 .$$

En conclusion : $S_n \sim 2^{n+1} \operatorname{Log} n$ au voisinage de $+\infty$.

3.3.2 Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, trouver un équivalent au voisinage de $+\infty$ à $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{n\alpha}$

Nous avons $S_n = n^{n\alpha} \Sigma_n$, avec $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} (1-k/n)^{n\alpha}$.

a) De $\operatorname{Log}(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$, nous déduisons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Sigma_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-k\alpha) \leqslant \frac{1}{1-e^{-\alpha}} \qquad (1)$$

b) Soit $\varepsilon \in]0,1[$ fixé. D'après $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x} = 1$, il existe $\beta \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in [-\beta, 0] \quad (1+\varepsilon)x \leqslant \operatorname{Log}(1+x)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons K la partie entière de $n\beta$, soit :

$$K \leqslant n\beta < K+1, \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} K = +\infty.$$

En utilisant $K < n$, et donc $K \leqslant n-1$, il vient :

$$\sum_n \geqslant \sum_{k=o}^{K} \exp\left(n\alpha \operatorname{Log}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)$$

et, comme $-\beta \leqslant -k/n \leqslant 0$ pour tout $k \in \{0,\dots,K\}$:

$$\sum_n \geqslant \theta_n, \text{ où } \theta_n = \sum_{k=o}^{K} \exp\left(-k(1+\varepsilon)\alpha\right) \tag{2}$$

La suite θ_n est croissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = \dfrac{1}{1-\exp\left(-(1+\varepsilon)\alpha\right)}$. (3)

c) A ce stade on peut utiliser deux méthodes (et il en est ainsi dans beaucoup d'exercices de ce type).

Première méthode. Nous allons utiliser les notions de limites inférieure et supérieure : dans $\mathbb{R}$ la suite $(\sum_n)$, qui est bornée, admet une limite supérieure L et une limite inférieure ℓ. En utilisant (1), (2) et (3), on obtient, pour $\varepsilon \in]0,1[$ fixé :

$$\lim_{n\to+\infty} \theta_n = \frac{1}{1-\exp\left(-(1+\varepsilon)\alpha\right)} \leqslant \ell \leqslant L \leqslant \frac{1}{1-e^{-\alpha}} .$$

Par passage à la limite lorsque ε tend vers 0 : $\ell = L = 1/(1-e^{-\alpha})$. On en déduit que la suite $(\sum_n)$ est convergente, de limite $1/(1-e^{-\alpha})$, et donc que :

$$S_n \sim n^{n\alpha}/(1-e^{-\alpha}) \text{ au voisinage de } +\infty. \tag{4}$$

Deuxième méthode. Pour $\mu > 0$ donné, déterminons successivement :

i) $\varepsilon \in]0,1[$ tel que : $\dfrac{1}{1-\exp\left(-(1+\varepsilon)\alpha\right)} \geqslant \dfrac{1}{1-e^{-\alpha}} - \dfrac{\mu}{2}$

ii) ε étant ainsi fixé (ce qui fournit (θ_n)), N tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \theta_n \geqslant \frac{1}{1-\exp\left(-(1+\varepsilon)\alpha\right)} - \frac{\mu}{2}$$

Pour tout $n \geqslant N$, nous avons ainsi :

$$\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \mu \leqslant \sum_n \leqslant \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$$

On retrouve : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_n = 1/(1-e^{-\alpha})$, et donc (4).

Remarque. D'une manière analogue, le lecteur montrera qu'étant donné $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (k!)^{-\alpha/n} \sim \frac{1}{\alpha} \frac{n}{\operatorname{Log} n}$$

(Il pourra partager la somme en utilisant $K = E\left(\varepsilon \dfrac{n}{\operatorname{Log} n}\right)$, $\varepsilon > 0$ fixé).

$\boxed{3.3.3}$ On pose $f(t) = \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\operatorname{cotg}^2 t}$. Montrer qu'il existe $\lim\limits_{t\to o} f(t) = \ell$, et trouver la partie principale de $f(t) - \ell$ (dans l'échelle puissance).

Nous considérons f comme une application, visiblement paire et continue, de $D =]-\pi/2,\pi/2[\setminus\{0\}$ dans R. Nous allons chercher un développement limité de f(t) au voisinage de 0, à l'ordre 2 (quitte à le prolonger à l'ordre 4 si cela s'avère nécessaire). Pour tout $t\in D$, nous avons :

$$\mathrm{Log}\big(f(t)\big) = \varphi(t).\psi(t)$$

où : $$\varphi(t) = \left(\frac{\mathrm{tg}\, t}{t}\right)^{-2}, \text{ et } \psi(t) = t^{-2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{\sin t}{t}\right).$$

Nous avons : $\varphi(t) = \left(1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right)^{-2} = 1 - \frac{2t^2}{3} + o(t^2)$,

$$\psi(t) = t^{-2}\,\mathrm{Log}\left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + o(t^4)\right) = -\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{72}\right)t^2 + o(t^2).$$

D'où : $$\mathrm{Log}\big(f(t)\big) = \left(1 - \frac{2t^2}{3}\right).\left(-\frac{1}{6} - \frac{t^2}{180}\right) + o(t^2)$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{19}{180}\, t^2 + o(t^2).$$

On en déduit que, pour tout $t\in D$:

$$f(t) = e^{-1/6}.\exp\left(\frac{19}{180}\, t^2 + o(t^2)\right)$$

et : $$f(t) = e^{-1/6} + \frac{19}{180}\, e^{-1/6} t^2 + o(t^2).$$ □

$\boxed{3.3.4}$ Développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \mapsto \mathrm{Log}\big(\mathrm{Arc\,tg}\,(t+1)\big)$

La fonction $f = \mathrm{Log}\, g$ est définie sur $]-1,+\infty[$. Au voisinage de 0 :

$$g'(t) = \frac{1}{2+2t+t^2} = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + o(t)$$

$$\mathrm{Arc\,tg}\,(t+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + o(t^2).$$

Ecrivons : $f(t) = \mathrm{Log}\,\frac{\pi}{4} + \mathrm{Log}\big(1 + u(t)\big)$, avec :

$$u(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + o(t^2)\right)$$

On en déduit :

$$f(t) = \mathrm{Log}\,\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\, t - \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}\right)t^2 + o(t^2).$$

$\boxed{3.3.5}$ 1° Etudier la fonction de R vers R :

$$f : t \to \mathrm{Arc\,sin}\, u(t), \text{ où } u(t) = \frac{t^2}{\sqrt{2(t^4-2t^2+2)}}$$

2° Développement limité de f(t), à l'ordre 10, au voisinage de 0.

1° La fonction paire u est continûment dérivable sur R et elle vérifie :

$$\forall t \in \mathrm{R} \quad 1-u^2(t)=\frac{(t^2-2)^2}{2(t^4-2t^2+2)}\,;\quad \lim_{t\to+\infty} u(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La fonction paire f est donc continue sur R, et continûment dérivable sur $\mathrm{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$. On obtient aisément :

$$\forall t \in \mathrm{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\} \quad f'(t)=\frac{2t\varepsilon(t)}{t^4-2t^2+2},\ \varepsilon(t)=\mathrm{sgn}(2-t^2).$$

Le théorème de prolongement de la dérivée nous apprend qu'il existe :

$$f'_d(\sqrt{2})=-\sqrt{2}\ ;\ f'_g(\sqrt{2})=\sqrt{2}\ ;\ f'_d(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}\ ;\ f'_g(\sqrt{2})=\sqrt{2}$$

Nous avons le tableau :

t	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f(t)	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	$\pi/4$

2° Sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$, $f'(t)=2t/(2-2t^2+t^4)$.

Une division suivant les puissances croissantes, suivie d'une intégration, fournit les développements limités au voisinage de 0 :

$$f'(t)=t+t^3+1/2.t^5-1/4.t^9+o(t^9)$$

et : $$f(t)=1/2.t^2+1/4.t^4+1/12.t^6-1/40.t^{10}+o(t^{10}).$$

$\boxed{3.3.6}$ Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ au voisinage de 0, et p un entier vérifiant $p\geqslant 2$. On suppose que f et g vérifient au voisinage de 0 :

$$f(t)=t+at^p+bt^{2p-1}+o(t^{2p-1})\ ;\ g(t)=t+a't^p+b't^{2p-1}+o(t^{2p-1})$$

1° Etudier la fonction $g\circ f-f\circ g$ au voisinage de 0.

2° Appliquer à la recherche des parties principales $g\circ f-f\circ g$ dans les cas :

a) $f(t)=\sin t$; $g(t)=\mathrm{sh}\, t$

b) $f(t)=\mathrm{tg}\, t$; $g(t)=\mathrm{th}\, t$

1° Pour développer les puissances de f(t), écrivons : $f(t)=t\big(1+u(t)\big)$ avec :

$$u(t) = at^{p-1} + bt^{2p-2} + o(t^{2p-2}).$$

Il vient alors : $f(t)^p = t^p\left(1 + pa\,t^{p-1} + o(t^{p-1})\right)$ et $f(t)^{2p-1} = t^{2p-1} + o(t^{2p-1})$

d'où: $\quad g\circ f(t) = t + (a+a')t^p + (b+b'+paa')t^{2p-1} + o(t^{2p-1})$

et, par échange des rôles de f et g :

$$g\circ f(t) - f\circ g(t) = o(t^{2p-1}).$$

2° Notons que des raisonnements de parité montrent ici que :

$$g\circ f(t) - f\circ g(t) = O(t^7).$$

En calculant les termes en t^7 des développements à l'ordre 7, on trouve :

$$\mathrm{sh}(\sin t) - \sin(\mathrm{sh}\, t) = t^7/45 + o(t^7)$$
$$\mathrm{th}(\mathrm{tg}\, t) - \mathrm{tg}(\mathrm{th}\, t) = -2t^7/45 + o(t^7).$$

$\boxed{3.3.7}$ On donne deux réels $a>0$, $\alpha>1$ et une application continue f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que, au voisinage de 0 : $f(t) = t - at^\alpha + o(t^\alpha)$.

1° Montrer que, à tout $t_0>0$ assez petit, on peut associer la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $t_{n+1} = f(t_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2° Montrer qu'une telle suite converge vers 0, et que, au voisinage de 0 : $t_n \sim bn^\beta$, où b et β sont des réels qui ne dépendent pas de t_0.

1° On constate qu'il existe $c>0$ tel que $0<f(t)<t$ pour tout $t\in\,]0,c]$.

Soit $t_0\in\,]0,c]$. On constate que $t_1 = f(t_0)$ vérifie $0<t_1<t_0$, que l'on dispose de $t_2 = f(t_1)$, et, par récurrence, de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme t_0, où $t_{n+1} = f(t_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2° Cette suite est décroissante, minorée par 0, et donc convergente, de limite ℓ, avec $0\leqslant \ell < t_0$. Comme f est continue, on ne peut avoir $\ell>0$, sans quoi l'on aurait à la fois $f(\ell) = \ell$ et $\ell\in\,]0,c]$, ce qui est impossible ; ainsi $\ell = 0$.

— Pour n tendant vers $+\infty$, on peut écrire successivement :

$$t_{n+1} = t_n\left(1 - at_n^{\alpha-1} + o(t_n^{\alpha-1})\right)$$
$$t_{n+1}^{1-\alpha} = t_n^{1-\alpha}\left(1 + (\alpha-1)at_n^{\alpha-1} + o(t_n^{\alpha-1})\right)$$
$$t_{n+1}^{1-\alpha} = t_n^{1-\alpha} + (\alpha-1)a + o(1).$$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(t_{n+1}^{1-\alpha} - t_n^{1-\alpha}\right) = (\alpha-1)a.$

En utilisant la moyenne de Cesaro, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_{n+1}^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{n+1} = (\alpha-1)a, \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{t_{n+1}^{1-\alpha}}{n+1} = (\alpha-1)a.$$

D'où : $t_n \sim bn^{\beta}$, où $\beta = 1/(1-\alpha)$ et $b = \left((\alpha-1)a\right)^{\beta}$. □

Exemple. Dans le cas où $f(t) = \sin t$, qui correspond à $a = 1/6$ et $\alpha = 3$, l'étude vaut pour $t_0 \in]0,\pi[$ et on retrouve $t_n \sim \sqrt{3/n}$ (cf. exercice 1.2.4).

3.3.8 A tout $n \in \mathbb{N}^*$ on associe la fonction f_n de R vers R définie par :

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}$$

Soit λ un réel strictement positif, donné.

1° Montrer que l'équation $f_n(t) = \lambda$ admet une unique solution $x_n \in]n,+\infty[$.

2° Montrer qu'il existe un réel ω tel que $x_n \sim \omega n$ au voisinage de $+\infty$.

1° La restriction de f_n à $]n,+\infty[$ est continue et décroît strictement de $+\infty$ à 0. □

2° Soit un réel $\alpha > 1$, fixé. Etudions la suite $\left(f_n(n\alpha)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a :

$$f_n(n\alpha) = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha - k/n}$$

D'après $\alpha > 1$, l'application $t \mapsto 1/(\alpha-t)$ de $[0,1]$ dans R est continue, et donc intégrable. D'où (cf. interprétation de la valeur moyenne) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha-k/n} = \int_0^1 \frac{dt}{\alpha-t} = \text{Log } \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

— On en déduit :

$$\forall \alpha \in]1,+\infty[\quad \lim_{n\to+\infty} f_n(n\alpha) = \varphi(\alpha), \text{ où } \varphi(\alpha) = \text{Log } \frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad (1)$$

L'application $\varphi : \alpha \mapsto \text{Log}\,\alpha/(\alpha-1)$ de $]1,+\infty[$ dans R est continue et décroît strictement de $+\infty$ à 0. Elle prend la valeur λ en un unique point $\omega > 1$, qui s'écrit : $\omega = 1/(1-e^{-\lambda})$

Pour tout $\varepsilon \in]0,\omega-1[$ nous avons (φ étant décroissante) :

$$\varphi(\omega+\varepsilon) < \lambda < \varphi(\omega-\varepsilon)$$

i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(n(\omega+\varepsilon)\right) < \lambda < \lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(n(\omega-\varepsilon)\right).$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad f_n\big(n(\omega+\varepsilon)\big) \leqslant \lambda \leqslant f_n\big(n(\omega-\varepsilon)\big)$$

et aussi (la restriction de f_n à $]n,+\infty[$ étant strictement décroissante) ;

$$\forall n \geqslant N \quad n(\omega-\varepsilon) \leqslant x_n \leqslant n(\omega+\varepsilon)$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n/n) = \omega$. □

3.3.9 1° Soit la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t-1} + \frac{2}{t-2} + \frac{4}{t-4} + \frac{8}{t-8}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2° On pose $F(t) = \max\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(t)\}$, pour $t \notin \{1,2,4,8\}$.

Montrer que F se prolonge par continuité aux points 1,2,4,8. L'application prolongée (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est-elle continue ?

3° Montrer que F admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 4 ; donner ce développement.

1° Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient aucun des points 1,2,4,8, la fonction f est définie, de classe C^∞, et strictement décroissante. On a le tableau :

t	$-\infty$		1		2		4		8		$+\infty$
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	0

On constate que :

— la restriction de f à $]4,8[$, notée g, établit un C^∞-difféomorphisme de $]4,8[$ sur $\mathbb{R}$; la restriction de f à $]8,+\infty[$, notée h, établit un C^∞-difféomorphisme de $]8,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$;

— la fonction f admet trois zéros $a \in]1,2[$, $b \in]2,4[$, $c \in]4,8[$.

On en déduit que F coïncide avec $h^{-1} \circ f$ sur chacun des intervalles $]1,a[$, $]2,b[$, $]4,c[$, $]8,+\infty[$, et avec $g^{-1} \circ f$ sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$, $[a,2[$, $[b,4[$, $[c,8[$. Par composition d'applications C^∞ et strictement décroissantes, F est C^∞ et strictement croissante sur chacun des huit intervalles que nous venons de considérer.

Par composition de limites :

$$\lim_{t\to1,\, t<1} F(t) = 8, \quad \lim_{t\to1,\, t>1} F(t) = 8, \quad \text{et donc} \quad \lim_{t\to1,\, t\neq1} F(t) = 8,$$

et le résultat est le même aux points 2,4,8.

Considérons donc que F prend la valeur 8 aux points 1,2,4,8, ce qui est nécessaire, et suffisant pour définir un prolongement de F à R qui soit continu en chacun de ces points. □

D'après ce qui précède, le prolongement est continu en tout $t \in R$ distinct de a,b,c. Par contre, en chacun des points a,b,c, il n'est continu qu'à droite ; on constate en effet que, par exemple :

$$\lim_{t\to a,\, t>a} F(t) = c = F(a), \text{ mais } \lim_{t\to a,\, t<a} F(t) = +\infty.$$

2° Nous nous limitons ici à l'intervalle $]b,c[$, qui contient 4, sur lequel F est continue. Pour tout $t \in \,]b,c[\,\backslash\{4\}$ nous avons, en utilisant l'égalité $f\big(F(t)\big) = f(t)$ qui est triviale :

$$\frac{8}{F(t)-8} - \frac{4}{t-4} = \varphi(t)$$

où : $$\varphi(t) = \frac{1}{t-1} + \frac{2}{t-2} + \frac{8}{t-8} - \frac{1}{F(t)-1} - \frac{2}{F(t)-2} - \frac{4}{F(t)-4}$$

φ est continue sur $]b,c[$, et $\lim_{t\to 4} \varphi(t) = \varphi(4) = -15/7$.

D'où, au voisinage de 4 :

$$\frac{8}{F(t)-8} - \frac{4}{t-4} \sim -\frac{15}{7} . \tag{1}$$

et donc :

$$\frac{8}{F(t)-8} \sim \frac{4}{t-4}, \text{ et encore : } F(t) - 8 \sim 2(t-4).$$

Il est ainsi possible d'écrire sur $]b,c[$:

$$F(t) = 8 + (t-4)\big(2 + \varepsilon(t)\big)$$

où ε est continue, telle que $\varepsilon(0) = 0$.

En portant dans (1), on obtient : $\dfrac{-4\varepsilon(t)}{(t-4)\big(2+\varepsilon(t)\big)} \sim -\dfrac{15}{7}$,

et : $\varepsilon(t) \sim \dfrac{15}{14}(t-4)$,

et donc : $F(t) = 8 + 2(t-4) + \dfrac{15}{14}(t-4)^2 + o\big((t-4)^2\big)$

3.3.10 1° Montrer que, pour tout $n \in Z$, la fonction $f : t \mapsto \mathrm{tg}\,t - t$ admet un unique zéro appartenant à $I_n = \,]n\pi-\pi/2, n\pi+\pi/2[$

2° Prouver l'existence d'un développement asymptotique de x_n lorsque n tend vers $+\infty$, dans l'échelle $(n^k)_{k\in Z}$, à la précision $1/n^4$; le déterminer.

1° Pour tout $n \in Z$, f est définie et de classe C^∞ sur I_n ; on a $f'(t) = \mathrm{tg}^2 t \geqslant 0$; f est strictement croissante. D'où le tableau de variation :

t	$n\pi-\pi/2$		$n\pi$		$n\pi+\pi/2$
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-n\pi$	$\nearrow$	$+\infty$

□

On a : $x_0 = 0$; $x_{-n} = -x_n$ (imparité de f).
Pour $n \geq 1$, cas auquel nous allons nous limiter, on a :

$$x_n = n\pi + y_n, \text{ avec } y_n \in]0,\pi/2[$$

On calcule : $\operatorname{tg} y_n = \operatorname{tg} x_n = x_n$. D'où $y_n = \operatorname{Arc\,tg} x_n = \pi/2 - \operatorname{Arc\,tg}(1/x_n)$

Retenons : $x_n = n\pi + \pi/2 - \operatorname{Arc\,tg}(1/x_n)$, $n \geq 1$. (1)

2) De (1), on déduit le développement asymptotique à la précision $1/n^0$:

$$x_n = \pi n + \pi/2 + o(1).$$

On en déduit : $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}$

et : $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et : $\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'où le développement asymptotique à la précision $1/n^2$:

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit :

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)\frac{1}{n^3\pi} - \left(\frac{3}{\pi^2} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{2n^4\pi} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

et $\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi^2}\right)\frac{1}{n^3\pi} - \left(\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{2n^4\pi} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

D'où le développement asymptotique à la précision $1/n^4$:

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi^2}\right)\frac{1}{n^3\pi} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\right)\frac{1}{2n^4\pi} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$ □

Remarques. a) On montrerait par récurrence que x_n admet un développement à toute précision $1/n^p$, $p \in \mathbb{N}$.
b) Le lecteur pourra étudier l'équation : $t \sin t = 1$.

3.4. ÉTUDE PRATIQUE D'UNE FONCTION

3.4.1 On donne $(s,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer :

$$\mu = \sup_{0<\alpha<1} m(\alpha), \text{ où } m(\alpha) = \min\left(s^{1/\alpha}, t^{1/(1-\alpha)}\right)$$

Par symétrie, on peut limiter l'étude à : $0<s\leqslant t$.

1er *Cas :* $0<s\leqslant 1\leqslant t$. Ici, pour tout $\alpha\in\,]0,1[$: $s^{1/\alpha}\leqslant 1\leqslant t^{1/(1-\alpha)}$,

et : $\quad \mu=\sup\limits_{0<\alpha<1} s^{1/\alpha}$, i.e. $\mu=s$.

2ème *Cas :* $1<s\leqslant t$. On a : $\operatorname{sgn}\left(s^{1/\alpha}-t^{1/(1-\alpha)}\right)=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{Log} s-\frac{1}{1-\alpha}\operatorname{Log} t\right)$

et : $\quad \operatorname{sgn}\left(s^{1/\alpha}-t^{1/(1-\alpha)}\right)=\operatorname{sgn}\varphi(\alpha)$, où $\varphi(\alpha)=\operatorname{Log} s-\alpha\operatorname{Log}(st)$.

La fonction φ est décroissante sur $]0,1[$ et prend la valeur 0 au point $\alpha_0=\frac{\operatorname{Log} s}{\operatorname{Log}(st)}\in\,]0,1[$; $m(\alpha)$ est $t^{1/(1-\alpha)}$ sur $]0,\alpha_0[$ et $s^{1/\alpha}$ sur $]\alpha_0,1[$. On a le tableau :

α	$0 \qquad \alpha_0 \qquad 1$
$m(\alpha)$	$\nearrow \ \mu \ \searrow$

et donc : $\mu=s^{1/\alpha_0}=\exp\left(\frac{\operatorname{Log}(st)}{\operatorname{Log} s}\operatorname{Log} s\right)$, i.e. $\mu=st$.

3ème *Cas :* $0<s\leqslant t<1$. En raisonnant comme pour le deuxième cas, on trouve encore : $\mu=st$.

3.4.2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note E l'ensemble des applications de la forme :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad t\mapsto a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kt$$

avec : $\quad a_0\geqslant a_1\geqslant\dots\geqslant a_n>0$

On pose : $M(f)=\sup\limits_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi}|f(t)|$; $\mu(f)=\sup\limits_{\pi/2\leqslant t\leqslant\pi}|f(t)|$.

Vérifier :

$$\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{n+1}\leqslant\inf_{f\in E}\frac{\mu(f)}{M(f)}\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{n+1}.$$

Toute $f\in E$ est continue, et donc bornée sur $[-\pi,\pi]$ et sur $[\pi/2,\pi]$.

— Soit $f\in E$. Notons $\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Nous avons $|f(t)|\leqslant\sigma$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $|f(0)|=\sigma$, ce qui entraîne $M(f)=\sigma$.

Notons que $\pi/2.\mu(f)$ majore la valeur absolue de l'intégrale de f sur $[\pi/2,\pi]$, intégrale égale à :

$$\frac{\pi}{2}a_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\sin(k\pi/2)=\frac{\pi}{2}a_0-a_1+\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}}(-1)^{i-1}\frac{a_{2i+1}}{2i+1}$$

Nous avons : $\frac{\pi}{2}a_0 - a_1 \geqslant \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a_0 \geqslant \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{\sigma}{n+1}$.
Par ailleurs : $\frac{a_3}{3}-\frac{a_5}{5}\geqslant 0$, $\frac{a_7}{7}-\frac{a_9}{9}\geqslant 0, \dots$, en groupant les termes deux à deux (et en tenant compte éventuellement d'un terme complémentaire positif) :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^{i-1}\,\frac{a_{2i+1}}{2i+1}\geqslant 0.$$

— Ainsi : $\frac{\mu(f)}{M(f)}\geqslant \left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{n+1}$ pour toute $f\in E$.

— Soit $g\in E$ correspondant à $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 1$; $\sigma = M(g) = n+1$.

On a (calcul classique) :

$$g(t) = \frac{1}{2}+\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2}$$

D'où :

$$\forall t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \qquad |g(t)|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sin\pi/4} .$$

On en déduit :

$$\frac{\mu(g)}{M(g)}\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{n+1} .$$

□

$\boxed{3.4.3}$ Pour tout $x\in[0,2]$, vérifier qu'en posant $y = \operatorname{Arc}\cos(1-x)$ on a :

$$1-1/2.y^2\leqslant 1-x\leqslant 1-1/2.y^2+1/24.y^4. \qquad (1)$$

et $$\sqrt{2x}\leqslant y\leqslant\sqrt{5x}. \qquad (2)$$

1° Soient $f_0 : t\longmapsto -\cos t+1$, et $f_i : t\longmapsto\int_0^t f_{i-1}(u)du$, $i\in\mathbb{N}^\star$. On constate que f_0 est positive, et, par récurrence que les f_i, $i\in\mathbb{N}^\star$, sont croissantes et positives sur $\mathbb{R}_+$; f_2 et f_4, qui sont paires, sont donc positives sur $\mathbb{R}$
D'où :

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad 1-1/2.t^2\leqslant\cos t\leqslant 1-1/2.t^2+1/24.t^4$$

ce qui fournit (1).

2° $\forall x\in[0,2] \quad y = \operatorname{Arc}\cos(1-x) \iff (y\in[0,\pi])\wedge(\sqrt{x}=\sqrt{2}.\sin y/2)$.

On vérifie que la fonction $\varphi : y\longmapsto\sqrt{2}\,\frac{y/2}{\sin y/2}$, prolongée par continuité grâce à $\varphi(0)=\sqrt{2}$, est croissante sur $[0,\pi]$. On a $\varphi(\pi)=\pi/\sqrt{2}$, et donc

$$\forall y\in[0,\pi] \qquad 2\sin y/2\leqslant y\leqslant\pi\sin y/2$$

et : $$\forall x\in[0,2] \qquad \sqrt{2}.\sqrt{x}\leqslant\operatorname{Arc}\cos(1-x)\leqslant\pi/\sqrt{2}.\sqrt{x}$$

(2) s'en déduit, compte tenu de ce que $\pi^2<10$.

$\boxed{3.4.4}$ Vérifier : $\forall t\in[0,1] \qquad t+1/3.t^3\leqslant \operatorname{tg} t\leqslant t+14/25.t^3$

Soient φ et ψ les applications de $[0,\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\varphi(t) = \operatorname{tg} t - t - 1/3.t^3 \quad ; \quad \psi(t) = t + 14/25.t^3 - \operatorname{tg} t.$$

Nous avons : $\varphi'(t) = \operatorname{tg}^2 t - t^2$; $\psi'(t) = 42/25.t^2 - \operatorname{tg}^2 t$

et donc : $\operatorname{sgn} \varphi'(t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} t - t)$; $\operatorname{sgn} \psi'(t) = \operatorname{sgn}(\sqrt{42}/5.t - \operatorname{tg} t)$.

a) Nous constatons (en étudiant $t \mapsto \operatorname{tg} t - t$) que $\varphi' \geqslant 0$; comme $\varphi(0) = 0$, nous en déduisons $\varphi \geqslant 0$. La première inégalité vaut ainsi sur $[0,\pi/2[$.

b) Nous constatons que $\theta : t \mapsto \sqrt{42}/5.t - \operatorname{tg} t$ est croissante sur $[0,t_0]$ et décroissante sur $[t_0,\pi/2[$, où $t_0 \in]0,\pi/2[$ est donné par $\cos^2 t_0 = 5/\sqrt{42}$.
Comme $\theta(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to\pi/2,\, t<\pi/2} \theta(t) = -\infty$, il en résulte que θ admet sur $[0,\pi/2[$ un zéro unique t_1 ; ψ est croissante sur $[0,t_1]$,décroissante sur $[t_1,\pi/2[$.

On a : $\psi(0) = 0$ et (en utilisant une calculatrice) : $\psi(1) = 39/25 - \operatorname{tg} 1 > 0$.

On en déduit que ψ ne prend que des valeurs positives sur $[0,1]$. □

$\boxed{3.4.5}$ Etudier la fonction f de R vers R telle que : $f(t) = (e^t+1)^{1/t}$.

---

f est une application dérivable de R^* dans R^*_+. On a :

$$\operatorname{Log} f(t) = \frac{1}{t}\operatorname{Log}(e^t+1) = 1 + \frac{1}{t}\operatorname{Log}(1+e^{-t})$$

On en déduit : $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 1$: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = e$;

$\lim\limits_{t\to0,\, t>0} f(t) = +\infty$; $\lim\limits_{t\to0,\, t<0} f(t) = 0$. On prolonge par : $f(0) = 0$.

On calcule : $f'(t) = \frac{1}{t} f(t).\varphi(t)$, où $\varphi(t) = \frac{e^t}{e^t+1} - \frac{1}{t}\operatorname{Log}(1+e^t)$.

D'où, sans nouveau calcul : si $t<0$, $\varphi(t)>0$ et $f'(t)<0$.

Si $t>0$, on écrit $\varphi(t) = -\frac{1}{e^t+1} - \frac{1}{t}\operatorname{Log}(1+e^{-t})$; d'où $f'(t)<0$.

On dispose du tableau :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
f(t)	1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	e

Le lecteur tracera aisément la représentation graphique de f. Il constatera que celle-ci admet une demi tangente à gauche en 0 portée par Ox, en remarquant qu'au voisinage de 0 et à gauche :

$$\operatorname{Log}\big(f(t)/(-t)\big) = \operatorname{Log} f(t) - \operatorname{Log}(-t) \sim (\operatorname{Log}2)/t.$$

$\boxed{3.4.6}$ Etudier la fonction $f : t \mapsto \frac{t^2+1}{t-1}\, e^{1/t}$ de R vers R .

a) Continuité et limites. A priori f est définie, continue et dérivable sur $R \setminus \{0,1\}$.

Au voisinage de 0, on a : $f(t) \sim -e^{1/t}$, et donc :

$$\lim_{t\to 0,\, t>0} f(t) = -\infty \; ; \quad \lim_{t\to 0,\, t<0} f(t) = 0 \; ; \quad \lim_{t\to 0,\, t<0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

Nous obtenons une application continue et dérivable à gauche en 0, encore notée f, en convenant : $f(0) = 0$. Sa représentation graphique Γ contient $0 = (o,o)$ et admet $(0,-\vec{i})$ pour demi-tangente en 0.

Au voisinage de 1, on a $f(t) \sim 2e/(t-1)$.

Au voisinage de $+\infty$, et aussi de $-\infty$, nous avons :

$$f(t) = \left(t + 1 + \frac{2}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = t + 2 + \frac{7}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

D'où l'existence d'une branche infinie pour Γ avec asymptote Δ d'équation $y = t + 2$; Γ est au "dessus" de Δ au voisinage de $+\infty$, au "dessous" au voisinage de $-\infty$.

b) Variation. Pour tout $t \in R \setminus \{0,1\}$, $f'(t) = e^{1/t}\, \frac{\varphi(t)}{t^2(t-1)^2}$, avec :

$$\varphi(t) = t^4 - 3t^3 - t + 1 \; ; \; \varphi'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 1 \; ; \; \varphi''(t) = 6t(2t-3).$$

On constate tout d'abord que φ' admet un unique zéro $\alpha \in \,]2,3[$. On dispose ensuite le tableau :

t	$-\infty$		0		β		1		α		γ		$+\infty$
$\varphi(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Une calculatrice fournit les valeurs approchées :

$\beta \simeq 0{,}563\,671\,342$; $f(\beta) \simeq -17{,}802\,698\,09$

$\gamma \simeq 3{,}071\,488\,446$; $f(\gamma) \simeq 6{,}975\,341\,616$

Le tracé de Γ est laissé au lecteur.

$\boxed{3.4.7}$ Etudier la fonction $f : t \mapsto t\, \mathrm{Log}|e^t - 1|$ de R vers R.

a) Continuité et limites. A priori f est définie sur R^*. Au voisinage de 0 :

$$e^t - 1 \sim t \; ; \; \mathrm{Log}|e^t - 1| \sim \mathrm{Log}|t| \; ; \; f(t) \sim t\,\mathrm{Log}\,|t|.$$

D'où : $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to 0} f(t)/t = -\infty$.

Nous obtenons une application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en convenant $f(0) = 0$. Sa représentation graphique Γ contient le point $O = (o,o)$ et admet Oy pour tangente d'inflexion en O. Nous avons : $f(t) = 0$ pour $t = 0$ et pour $t = \mathrm{Log}\,2$.

Pour $t > 0$, $f(t) = t^2 + t\,\mathrm{Log}(1-e^{-t})$. Au voisinage de $+\infty$:

$$f(t) \sim t^2 \ ; \ \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$$

et même : $f(t) - t^2 \sim -t\,e^{-t}$; la courbe Γ est asymptote (pour $t \to +\infty$) à la parabole représentant $t \longmapsto t^2$, et "au dessous" de la parabole.

Pour $t < 0$, $f(t) = t\,\mathrm{Log}(1-e^{t})$. Au voisinage de $-\infty$:

$$f(t) \sim -t\,e^{t} \ ; \ \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0.$$

b) <u>Dérivée et variation</u> : L'application f est C^{∞} sur $\mathbb{R}^{\star}$, mais non dérivable en 0.

Pour $t \neq 0$, $\quad f'(t) = \mathrm{Log}|e^{t}-1| + t\,\dfrac{e^{t}}{e^{t}-1}$.

Le signe de $f'(t)$ n'est en évidence que si $t \geqslant \mathrm{Log}\,2$ $\{$alors $f'(t) \geqslant 0\}$.

On a :

$$f''(t) = \frac{e^{t}}{(e^{t}-1)^2}\,\varphi(t), \text{ où } \varphi(t) = 2e^{t} - t - 2$$

En utilisant $\varphi'(t) = 2e^{t} - 1$, on dresse le tableau :

t	$-\infty$		α		$-\mathrm{Log}2$		0		$+\infty$
$\varphi(t)$	$+\infty$	↘	0	↘		↗	0	↗	$+\infty$

$\{\alpha,\varphi(\alpha)\}$ est un point d'inflexion de Γ. Une calculatrice fournit (avec une précision bien inutile pour le tracé de Γ) : $\alpha \simeq -1{,}593\ 624\ 261$;

$f(\alpha) \simeq 0{,}361\ 969\ 996$; $f'(\alpha) \simeq 0{,}179\ 239\ 391$.

On calcule : $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = +\infty$; $\lim\limits_{t\to-\infty} f'(t) = 0$; $f'(-\mathrm{Log}\,2) = 0$.

De $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t\,e^{t}}{e^{t}-1} = 1$ on déduit $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = -\infty$. D'où le tableau :

t	$-\infty$		α		$-\mathrm{Log}2$		0		β		$+\infty$
$f'(t)$	0	↗		↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$f(t)$	0	↗		↗		↘	0	↘		↗	$+\infty$

Une calculatrice fournit :

$$\beta \simeq 0{,}276\ 392\ 892 \quad ; \quad f(\beta) \simeq -0{,}316\ 346\ 712\ ;$$
$$-\mathrm{Log}2 \simeq -0{,}693\ 147\ 181 \quad ; \quad f(-\mathrm{Log}2) \simeq 0{,}480\ 453\ 014\ .$$

Le tracé de Γ est laissé au lecteur.

$\boxed{3.4.8}$ Etudier la fonction $f : t \mapsto |\mathrm{tg}\, t|^{\cos t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

---

a) Définition ; continuité. Soit D la réunion des intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction tg est définie et ne prend pas la valeur 0. La fonction f est continûment dérivable sur D ; elle est paire, de période 2π, et vérifie :

$$\forall t \in D \quad f(\pi - t) = 1/f(t) \tag{1}$$

En utilisant $\mathrm{Log}\big(f(t)\big) = \cos t\ \mathrm{Log}|\mathrm{tg}\, t|$, on constate :

$$\lim_{t\to 0,\, t\neq 0} f(t) = 0.$$

En utilisant $\mathrm{Log}\big(f(t)\big) = \cos t\ \mathrm{Log}|\sin t| - \cos t\ \mathrm{Log}|\cos t|$, on constate :

$$\lim_{t\to\pi/2,\, t\neq\pi/2} f(t) = 1$$

On prolonge f en convenant : $f(t) = 0$ pour tout $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, et $f(t) = 1$ pour tout $t \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$. On obtient ainsi une application continue de $\mathbb{R}\setminus\{\pi + 2\pi\mathbb{Z}\}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Variation. Pour tout $t \in D$:

$$f'(t) = -f(t).\sin t.\varphi(t), \quad \varphi(t) = \mathrm{Log}|\mathrm{tg}\, t| - 1/\sin^2 t$$

La fonction φ est visiblement croissante sur $]0,\pi/2[$. D'où le tableau de variation de f sur $[0,\pi/2[$ et, grâce à (1), sur $[0,\pi[$:

t	0		$\pi/4$		α		$\pi/2$		$\pi-\alpha$		$3\pi/4$		π
$\varphi(t)$	$-\infty$	$-$	-2	$-$	0	$+$	$+\infty \,\Vert\, +\infty$	$+$	0	$-$	-2	$-$	$-\infty$
$f(t)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	μ	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\mu}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule les valeurs approchées :

$$\alpha \simeq 1{,}252\ 106\ 771 \quad ; \quad \mu \simeq 1{,}415\ 425\ 054$$

On a : $\lim_{t\to\pi/2} f'(t) = -\infty$; la fonction f n'est pas dérivable en les $t \in \pi/2 + n\mathbb{Z}$, la représentation graphique Γ admettant en ces points une tangente parallèle à $(O,\vec{j})$.

En écrivant, pour $t \in]0,\pi/2[$:

$$\text{Log}\,\frac{f(t)}{t} = (\cos t - 1)\text{Log}(\text{tg}\,t) + \text{Log}\left(\frac{\text{tg}\,t}{t}\right)$$

on constate : $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0} \left(f(t)/t\right) = 1$.

En 0, et plus généralement en tout $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, f admet une dérivée à droite égale à 1, et une dérivée à gauche égale à -1.

3.4.9 Etudier la fonction f de R vers R telle que $f(t) = \dfrac{1}{\text{Log}(1+t)} - \dfrac{1}{t}$.

Initialement f est une application dérivable de $D =]-1,+\infty[\, \setminus \{0\}$ dans R, et, pour tout $t \in D$:

$$f'(t) = -\frac{1}{(1+t)\left[\text{Log}(1+t)\right]^2} + \frac{1}{t^2}.$$

En utilisant : $\lim\limits_{t\to -1,\, t\in D} f(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to -1,\, t\in D} f'(t) = -\infty$, on constate que f peut être prolongée par continuité au point $t = -1$, en convenant : $f(-1) = 1$, et que la fonction ainsi prolongée n'est pas dérivable en $t = -1$ (la représentation graphique admet au point $(-1,1)$ une demi-tangente dirigée par $\vec{j}$).

Au voisinage de 0 on a : $tf(t) = -1 + \left(1 - t/2 + t^2/3 + o(t^2)\right)^{-1}$; $tf(t) = -1 + \left(1 + t/2 - t^2/12 + o(t^2)\right)$; $f(t) = 1/2 - t/12 + o(t)$. Ce qui montre que f peut être prolongée par continuité au point $t = 0$, en convenant $f(0) = 1/2$, et que la fonction ainsi prolongée admet $-1/12$ pour dérivée en $t = 0$.

En constatant que, au voisinage de 0, $(1+t)\left(\text{Log}(1+t)\right)^2$ s'écrit :

$$t^2(1+t)\left(1 - t + 11/12.t^2 + o(t^2)\right), \text{ ou } t^2\left(1 - 1/12t^2 + o(t^2)\right)$$

le lecteur vérifiera : $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in D} f'(t) = -1/12$.

Il en déduira que la fonction prolongée à -1 et à 0, abusivement notée f, est continue sur $[-1,+\infty[$, et continûment dérivable sur $]-1,+\infty[$.

— Pour étudier son sens de variation, remarquons que, pour tout $t \in D$:

$$\text{sgn}\, f'(t) = \text{sgn}\, u(t).\text{sgn}\, v(t)$$

avec : $u(t) = \text{Log}(1+t) + \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = \text{Log}(1+t) - \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$.

Sans calcul, on constate : $\forall t \in D \quad \text{sgn}\, u(t) = \text{sgn}(t)$.

On calcule :

$$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^{3/2}}\left(\sqrt{1+t} - 1 - t/2\right)$$

D'où : $\forall t \in D \quad \text{sgn}\, v'(t) = \text{sgn}\left((1+t) - (1+t/2)^2\right) = \text{sgn}(-1)$.

Compte tenu de $f'(0)<0$, on en déduit : $\forall t\in]-1,+\infty[\quad f'(t)<0$.

Reste à constater : $\lim\limits_{t\to+\infty,\, t\in D} f(t)=0$, pour disposer du tableau :

t	-1		0		$+\infty$
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Le lecteur tracera aisément la représentation graphique de f.

3.4.10 Etudier la fonction $f : t\mapsto 2te^{1/t}+4t^3-15t^2+18t$, de R vers R.

L'ensemble de définition de f est R^*. On constate aisément :

$f(t)\sim 4t^3$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;

$\lim\limits_{t\to0,\, t>0} f(t)=+\infty$; $\lim\limits_{t\to0,\, t<0} f(t)=0$; $\lim\limits_{t\to0,\, t>0} f(t)/t=18$.

Pour $t\neq0$, on a : $f'(t)=2\,\dfrac{t-1}{t}\,e^{1/t}\varphi(t)$,

où $\quad\varphi(t)=1+(6t^2-9t)e^{-1/t}$.

Pour $t\notin]0,3/2[$, on a, sans calcul : $\varphi(t)>0$.

Sur $]0,3/2[$, on utilise : $\varphi'(t)=3e^{-1/t}(t-1)(4t+3)/t$.

Compte-tenu de $\varphi(0)=\varphi(3/2)=1$ et de $\varphi(1)=1-3/e<0$, on en déduit que φ admet exactement deux zéros, α et β, avec $0<\alpha<1<\beta<3/2$. D'où :

t	$-\infty$		0 | 0		α		1		β		$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 | $+\infty$	$\searrow$	λ	$\nearrow$	μ	$\searrow$	ν	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule : $\mu=2e+7\simeq12{,}436\,564$.

Un calcul approché de α,β, et donc de λ,ν, (par exemple pour discuter l'équation $f(t)=m$) est assez délicat. En effet on constate que λ,μ et ν ont des valeurs très voisines, et donc que α et β doivent être calculés avec une grande précision.

Il est donc préférable d'utiliser une calculatrice programmable. On peut alors opérer par simple dichotomie. On trouve :

$\alpha\simeq0{,}829\,885\,726$; $\beta\simeq1{,}159\,475\,564$;

$\lambda\simeq12{,}431\,667$; $\nu\simeq12{,}433\,472$;

La représentation graphique est laissée au lecteur qui utilisera d'abord un repère orthogonal dans lequel les vecteurs unitaires des axes ont pour longueurs respectives 3cm et 0,5cm ; l'arc $t\in[\alpha,\beta]$ se présente alors comme un segment de droite. Pour préciser cet arc il pourra utiliser un nouveau repère orthogonal dans lequel les vecteurs unitaires des axes ont pour longueurs respectives 20cm et 100cm, en se limitant à la partie du plan tOy qui correspond à $t \in [0,5;1,5]$ et $y \in [12,4;12,6]$.

$\boxed{3.4.11}$ 1° Discuter et résoudre l'équation à l'inconnue $t \in \mathbb{R}$:

(E_a) $\quad \text{Arc}\sin(5t-20t^3+16t^5) = \text{Arc}\sin(5a-20a^3+16a^3)$

où a est un paramètre réel.

2° Trouver des valeurs approchées des racines $(E_{0,6})$.

1° a) Arc sin étant une application strictement croissante de $[-1,+1]$ sur $[-\pi/2,\pi/2]$, nous avons :

$$(E_a) \qquad \big(|P(a)| \leqslant 1\big) \wedge \big(P(t) = P(a)\big)$$

où P désigne la fonction polynômiale $t \mapsto 5t - 20t^3 + 16t^5$, qui est impaire. La clé de l'exercice est :

$$\forall t \in [-1,+1] \qquad P(t) = \sin(5\,\text{Arc}\sin t) \tag{1}$$

Les zéros positifs de P' : $t \mapsto 5(1-12t^2+16t^4)$ sont :

$$t' = \frac{\sqrt{6-\sqrt{20}}}{4} \simeq 0,309 \quad ; \quad t'' = \frac{\sqrt{6+\sqrt{20}}}{4} \simeq 0,809$$

Ils appartiennent à $]0,1[$. Or, d'après (1) :

$$\forall t \in]-1,1[\qquad P'(t) = 5\,\frac{\cos(5\,\text{Arc}\sin t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

d'où : $\quad t' = \sin(\pi/10)$: $P(t') = 1$; $t'' = \sin(3\pi/10)$; $P(t'') = -1$.

On peut dresser le tableau :

t	0		t'		t''		1		$+\infty$
$P(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

et construire la représentation graphique Γ de P (laissée au lecteur).

b) Nous constatons : $\quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad \big(|P(t)| \leqslant 1\big) \iff (|t| \leqslant 1)$. D'où :

1er *Cas :* $|a| > 1$. (E_a) n'a pas de racine.

2ème *Cas :* $|a| \leqslant 1$. Les racines de (E_a) sont celles de l'équation algébrique $P(t) = P(a)$. Le tableau, ou la courbe Γ, montrent qu'elles sont au nombre de 5, à condition de compter pour 2 les racines doubles éventuelles (que l'on obtient pour $a \in \{-1,-t'',-t',t',t'',1\}$) ; elles sont incluses dans $[-1,+1]$, et séparées pour $-t'',-t',t',t''$; l'une d'elles est a.

En fait on peut résoudre au moyen des formules :

$$t = \sin\varphi \quad ; \quad \sin 5\varphi = \sin 5\alpha \quad \text{où } \alpha = \text{Arc sin } a \, .$$

La seconde donne :

$$(\varphi = \alpha + 2k\pi/5) \vee (\varphi = \pi - \alpha - 2k\pi/5) , \quad k \in \mathbb{Z},$$

et les cinq solutions s'écrivent :

$$t_k = \sin(\alpha + 2k\pi/5) , \quad k \in [-2,2] , \quad \alpha = \text{Arc sin } a.$$

Elles admettent les expressions, moins commodes pour le calcul numérique :

$$a, \; a\cos\frac{2\pi}{5} + \varepsilon\sqrt{1-a^2}\sin\frac{2\pi}{5} \; , \; a\cos\frac{4\pi}{5} + \varepsilon\sqrt{1-a^2}\sin\frac{4\pi}{5}, \; \varepsilon \in \{-1,1\}.$$

2° Une calculatrice donne pour valeurs approchées de t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2:

- 0,955 638 ; -0,575 435 ; 0,6 ; 0,015 182 ; 0,946 255.

$\boxed{3.4.12}$ 1° Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^*$ les deux équations :

$$\text{(E)} \quad a^t = t \; ; \; a^{(a^t)} = t \quad \text{(E')}$$

à l'inconnue $t \in \mathbb{R}$, ont-elles les mêmes racines ?

2° Résoudre (E) et (E') pour $a = e^{-3}$.

1° Une racine de (E) {resp. (E')} est nécessairement strictement positive.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $a^t = t$ entraîne $a^{(a^t)} = a^t = t$

Ainsi *toute racine de* (E) *est racine de* (E').

b) La discussion de (E) est aisée. En écrivant :

$$\text{(E)} \quad \varphi(t) = \text{Log } a, \quad \text{où} \quad \varphi(t) = (\text{Log } t)/t$$

et en utilisant la représentation graphique Γ de l'application continue φ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ (laissée au lecteur), on constate que :

— Pour $a \in]0,1[$, (E) admet une unique racine $\gamma \in]0,1[$;

— Pour $a \in]1,e^{1/e}[$, (E) admet deux racines γ_1 et γ_2 telles que $1 < \gamma_1 < e < \gamma_2$;

— Pour $a > e^{1/e}$, (E) n'admet pas de racine ;

— Pour $a = 1$ (resp. $a = e^{1/e}$), (E) admet l'unique racine 1 (resp. e).

c) En écrivant (E') sous les formes : $a^t \,\text{Log } a = \text{Log } t$

et : $\quad (a^t - t)(-\text{Log } a) = \text{Log } a^t - \text{Log } t$

on constate que, si $t \in \mathbb{R}_+^*$ est racine de (E') et n'est pas racine de E,

alors : $\dfrac{\operatorname{Log} a^t - \operatorname{Log} t}{a^t - t} = -\operatorname{Log} a$

ce qui, du fait de stricte croissance de Log, exige $\operatorname{Log} a < 0$, i.e. $a \in]0,1[$. Ainsi, *pour tout* $a \geq 1$, (E) *et* (E') *ont les mêmes racines*.

d) Nous allons voir qu'il n'en est pas de même pour tout $a \in]0,1[$.

Soit $a \in]0,1[$. Ecrivons, en posant $m = -\operatorname{Log} a$ avec $m > 0$, et en remarquant qu'ici toute solution de (E') vérifie $\operatorname{Log} t < 0$, i.e. $t \in]0,1[$:

$$(E') \quad f(t) = 0, \text{ où } f(t) = \operatorname{Log}(-\operatorname{Log} t) + mt - \operatorname{Log} m$$

L'application $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et nous avons :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = +\infty , \quad \lim_{t \to 1} f(t) = -\infty$$

ce qui confirme le fait que (E') a au moins une racine, à savoir la racine unique de (E), que nous notons γ. En utilisant :

$$f'(t) = \frac{1}{t \operatorname{Log} t} + m \ ; \ f''(t) = \frac{-\operatorname{Log} t - 1}{(t \operatorname{Log} t)^2} \ ; \ f''(e^{-1}) = 0 \ ; \ f'(e^{-1}) = m - e$$

nous constatons que si $m \leq e$, alors $f' \leq 0$, et (E') admet la racine unique γ.

Etudions maintenant le cas où $m > e$ (i.e. $a \in]0, e^{-e}[$). Ici f' admet deux racines α et β telles que $\alpha < e^{-1} < \beta$, et nous avons :

t	0		α		β		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	λ	$\nearrow$	μ	$\searrow$	$-\infty$

Nous allons montrer que la racine γ commune à (E) et à (E') vérifie $\alpha < \gamma < \beta$, i.e. (cf. tableau) $f'(\gamma) > 0$; il en résultera $\lambda < 0$ et $\mu > 0$, ce qui nous permettra d'affirmer que (E') a trois racines γ, γ' et γ'' telles que :

$$\gamma' < \alpha < \gamma < \beta < \gamma''.$$

Nous avons : $(\operatorname{Log} \gamma)/\gamma = -m < -e$, ce qui montre (en utilisant la courbe Γ du 1° b) et en notant que $\varphi(e^{-1}) = -e$) que : $\gamma < e^{-1}$, i.e. que : $-\operatorname{Log} \gamma > 1$.

D'où : $f'(\gamma) = \dfrac{1}{\gamma \operatorname{Log} \gamma} + m = \dfrac{(-\operatorname{Log} \gamma)^2 - 1}{\gamma(-\operatorname{Log} \gamma)} > 0.$ □

Remarques. a) (E') est l'équation aux abscisses des points d'intersection de la courbe C d'équation $y = \operatorname{Log}(-\operatorname{Log} x)$ et de la droite D d'équation $y = -mx + \operatorname{Log} m$. Il y a trois points d'intersection si, et seulement si $m > e$. On notera que, pour $m = e$, la droite D qui s'écrit $y = -ex + 1$ est la tangente à C en son point d'inflexion $(e^{-1}, 0)$; on peut considérer que e^{-1} est alors racine triple de (E').

b) Plaçons-nous dans le cas $a \in]0,e^{-e}[$ où (E') admet trois racines $\gamma' < \gamma < \gamma''$. Soit $\gamma_1 = a^{\gamma'}$. On constate : $a^{\gamma_1} = \gamma'$ donc $a^{(a^{\gamma_1})} = a^{\gamma'} = \gamma_1$; γ_1 est ainsi racine de (E'). On n'a pas $\gamma_1 = \gamma'$ (sinon on aurait $\gamma' = a^{\gamma'}$, et donc $\gamma' = \gamma$). On n'a pas $\gamma_1 = \gamma$ (sinon on aurait $\gamma = a^{\gamma'}$ et $\gamma' = \gamma$). On a donc $\gamma_1 = \gamma''$ et, ainsi $\gamma'' = a^{\gamma'}$. De même : $\gamma' = a^{\gamma''}$.

2° Résolution de (E). L'équation est ici : $e^{-3t} = t$. La racine, unique, vérifie : $\gamma \in]0,1[$. Une première approche de la racine est obtenue en donnant à t des valeurs simples :

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4
e^{-3t}	1	0,74	0,55	0,41	0,30

Il en résulte $\gamma \in [3/10, 4/10]$.

a) La forme de l'équation suggère une résolution par itération (suite récurrente $x_{n+1} = e^{-3x_n}$). Mais si on note $\varphi(t) = e^{-3t}$, on constate que $\varphi'(t) = -3e^{-3t}$ est, en valeur absolue, assez proche de 1 dans l'intervalle considéré. Ainsi, même si la méthode converge, ce ne peut être que lentement (et il en est de même si l'on écrit l'équation $t = \varphi^{-1}(t)$!) [1]

b) Considérons plutôt $f : t \mapsto e^{-3t} - t$. On vérifie aisément $f'(t) < 0$ et $f''(t) > 0$ sur $[3/10, 4/10]$. On obtiendra donc un encadrement de γ en appliquant la méthode de Newton en 0,3 (calcul par défaut) et la méthode des parties proportionnelles sur $[3/10, 4/10]$ (calcul par excès) :

$$x_0 = 0{,}3 - \frac{f(0{,}3)}{f'(0{,}3)}, \quad x_1 = 0{,}3 - \frac{0{,}4 - 0{,}3}{f(0{,}4) - f(0{,}3)} \cdot f(0{,}3).$$

On trouve : $\gamma = 0{,}35 \pm 2.10^{-3}$.

c) On peut améliorer ce résultat en remplaçant (E) par :

$$t = \frac{1}{2}(t + e^{-3t})$$

pour laquelle la méthode d'itération converge rapidement (et en oscillant, ce qui facilite le calcul d'erreur). On obtient, en partant de $x_0 = 0{,}35$:

---

(1) De fait, la suite récurrente : $x_{n+1} = e^{-3x_n}$ diverge. Elle admet deux valeurs d'adhérence qui sont précisément γ' et γ'' (atteintes très lentement). La suite récurrente $x_{n+1} = -\frac{1}{3}\operatorname{Log} x_n$ converge bien vers γ, mais très lentement ; même avec une calculatrice programmable, elle ne convient pas pour le calcul de γ car les erreurs dues au calcul ("erreurs de chute") sont trop importantes.

$x_0 = 0,35$

$x_1 = 0,349\ 968\ 875$

$x_2 = 0,349\ 969\ 651$

$x_3 = 0,349\ 969\ 631$

$x_4 = 0,349\ 969\ 632$

D'où la valeur $\gamma \simeq 0,349\ 969\ 632$.

Résolution de (E'). Compte tenu de la remarque b) du 1°, nous nous contenterons de calculer γ'.

Nous notons ici : $\varphi(t) = \exp\{-3 \exp(-3t)\}$. Une première approche fournit :

t	0	0,1	0,2
$\varphi(t)$	0,05	0,108	0,193

d'où : $\gamma' \in [1/10, 2/10]$ (rappelons : $\gamma' < 1/e$).

La méthode itérative converge ici très lentement {cf. note (1) dans la résolution de (E)}. On peut l'accélérer en remplaçant (E') par :

$$5 \exp\{-3 \exp(-3t)\} - 4t = t.$$

On obtient, en partant de $x_0 = 0,15$:

$x_0 = 0,15$ $\quad x_1 = 0,158\ 405\ 831$ $\quad x_2 = 0,140\ 664\ 558$

$x_3 = 0,136\ 570\ 998$ $\quad x_4 = 0,136\ 153\ 505$ $\quad x_5 = 0,136\ 122\ 304$

$x_6 = 0,136\ 120\ 057$ $\quad x_7 = 0,136\ 119\ 896$ $\quad x_8 = 0,136\ 119\ 884$

$x_9 = 0,136\ 119\ 883$

Nous prendrons $\gamma' \simeq 0,136\ 119\ 883$; d'où $\gamma'' \simeq 0,664\ 739\ 763$.
{La suite (x_n) n'étant pas oscillante, un calcul d'erreur serait ici plus délicat. De toute façon, il est difficile de tenir compte de l'incertitude dûe aux calculs intermédiaires, ou erreurs de chutes}.

Remarques. a) Nous avons utilisé à deux reprises la remarque suivante : Pour accélérer la convergence d'une méthode itérative, on remplace l'équation $\varphi(t) = t$ par $\alpha\varphi(t) + (1-\alpha)t = t$ en choisissant α de sorte que la dérivée de $t \mapsto \alpha\varphi(t) + (1-\alpha)t$ soit voisine de 0 au voisinage de la racine cherchée.

b) Le lecteur étudiera la suite (a_n) donnée par $a_0 \in \mathbb{R}$, et, pour tout n, $a_{n+1} = a^{a_n}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$, en s'inspirant de ce qui précède et de l'exercice 1.2.13.

INTÉGRALE

4.1. INTÉGRALE DE RIEMANN

4.1.1 Soit f une application intégrable d'un segment réel $[a,b]$, $a<b$, dans un espace de Banach E. On suppose que $A=\{t\in[a,b],\ f(t)\neq 0\}$ est dénombrable (resp. négligeable ; resp. d'intérieur vide). Montrer que l'intégrale f sur $[a,b]$ est nulle.

Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on note σ_p la subdivision de $[a,b]$ qui fait intervenir p sous-segments de longueur $(b-a)/p$; d'après l'hypothèse faite sur A, on peut choisir sur chacun de ces sous-segments un point en lequel f prend la valeur 0 ; on obtient ainsi une subdivision pointée (σ_p,ξ_p) telle que la somme de Riemann $S(f,\sigma_p,\xi_p)$ soit nulle. On a :

$$\int_a^b f=\lim_{p\to+\infty} S(f,\sigma_p,\xi_p)=0. \qquad \square$$

4.1.2 Soit σ une application quelconque de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. A tout $x\in[0,1[$ on associe son développement décimal *propre* $\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}$ ($\{i\in\mathbb{N}^*\mid a_i\neq 9\}$ n'est pas borné) ; à 1 on associe son développement impropre ($a_i=9$ pour tout i).

On définit $f:[0,1]\to[0,1]$ par $x\mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} a_{\sigma(i)}10^{-i}$.

1° L'application f est-elle continue ?

2° Montrer que f est intégrable, et calculer $\int_0^1 f$.

Préambule. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $[t]$ désigne la partie entière de t.

Soient $x\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i 10^{-i}$ un développement décimal *pas nécessairement propre* de x, et $p\in\mathbb{N}^*$.

En notant A_p l'entier $\sum_{i=1}^{p} a_i\ 10^{p-i}=\overline{a_1\ldots a_p}$, on a :

$$A_p\leqslant 10^p x=A_p+\sum_{i>p} a_i\ 10^{p-i}\leqslant A_p+9\sum_{i>p}10^{p-i}=A_p+1$$

avec $10^p x=A_p+1$ si, et seulement si $a_i=9$ pour tout $i>p$.

α) S'il existe $i>p$ tel que $a_i \neq 9$ (ce qui exige $x\in[0,1[$), alors $A_p=[10^p x]$; il en est ainsi, en particulier, lorsque le développement considéré est propre.

β) Supposons $a_{p+1}\neq 9$, ce qui entraîne $A_p=[10^p x]$. Pour tout $y\in]x,x+10^{-p-1}[$, nous avons $y\in]0,1[$ et :

$$A_p \leqslant 10^p x < 10^p y < 10^p x + 10^{-1} = A_p + \sum_{i>p} a'_i\ 10^{p-i} \leqslant A_p + 1$$

avec $a'_{p+1}=1+a_{p+1}$, et $a'_i=a_i$ pour $i>p+1$. Retenons :

$$A_p < 10^p y < A_p + 1, \text{ et } [10^p y] = A_p .$$

γ) Supposons $a_{p+1}\neq 0$ (ce qui exige $x\in]0,1]$). Pour tout $y\in]x-10^{-p-1},x]$, nous avons $y\in]0,1]$ et :

$$A_p \leqslant A_p + \sum_{i>p} a'_i\ 10^{p-i} = 10^p x - 10^{-1} < 10^p y \leqslant 10^p x \leqslant A_p + 1$$

Ici encore : $A_p < 10^p y < A_p + 1$, et $[10^p y] = A_p$.

— En utilisant α), on constate que, dans les cas β) et γ), le développement propre de y s'écrit $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i\ 10^{-i}$, avec $b_i=a_i$ pour $i\in N_p=\{1,\dots,p\}$.

1° <u>Continuité à droite de</u> f. Soit $x\in[0,1[$, de développement propre $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\ 10^{-i}$. Donnons-nous $n\in\mathbb{N}$. Il existe visiblement $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\}\subset N_p$ et $a_{p+1}\neq 9$; pour tout $y\in]x,x+10^{-p-1}[$, (qui vérifie $y\in]0,1[$), le développement propre de y s'écrit $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i\ 10^{-i}$, avec $b_i=a_i$ pour $i\in N_p$, et donc $b_{\sigma(i)}=a_{\sigma(i)}$ pour $i\in N_n$, ce qui entraîne :

$$|f(y)-f(x)| \leqslant \sum_{i>n} |b_{\sigma(i)}-a_{\sigma(i)}|\,10^{-i} \leqslant 9 \sum_{i>n} 10^{-i} = 10^{-n}$$

Comme on dispose de n, la continuité de f à droite en x est acquise.

<u>Limite à gauche de</u> f. Soit $x\in]0,1]$, que nous écrivons $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\ 10^{-i}$, le développement étant propre si x n'est pas décimal, impropre si x est décimal (dans les deux cas, $\{i\in\mathbb{N}^* \mid a_i\neq 0\}$ n'est pas borné). Posons $\ell=\sum_{i=1}^{+\infty} a_{\sigma(i)}\ 10^{-i}$ ($\ell=f(x)$ si $x=1$ ou si $x\notin D$; en général $\ell\neq f(x)$ si $x\in D$). En raisonnant comme ci-dessus, avec ici $a_{p+1}\neq 0$, nous obtenons : $\ell=\lim\limits_{y\to x,\,y<x} f(y)$.

En résumé, f est continue en 0, en 1, et en tout point non décimal de $]0,1[$; en un point décimal de $]0,1[$, elle est continue à droite et admet une limite à gauche.

2° D'après le 1°, f est réglée et donc intégrable.

Pour tout x non décimal de $]0,1[$, de développement propre $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\, 10^{-i}$, $1-x$ est non décimal, de développement propre $\sum_{i=1}^{+\infty} (9-a_i)10^{-i}$; on a donc :

$$f(x)+f(1-x)-1=0.$$

On en déduit que l'application $x\mapsto f(x)+f(1-x)-1$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est intégrable, et nulle sauf peut être sur $D\cap[0,1]$, qui est dénombrable. D'après l'exercice précédent, son intégrale sur $[0,1]$ est nulle.

Comme $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(x)dx$, on en déduit $\int_0^1 f=\frac{1}{2}$.

4.1.3 1° Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application. On suppose que, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $E_\varepsilon=\{t\in[a,b]\ \big|\ |f(t)|>\varepsilon\}$ est fini.

Montrer que f est intégrable et que son intégrale est nulle.

2° Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ainsi définie :

— Si $t\notin\mathbb{Q}$, $f(t)=0$; si $t\in\mathbb{Q}$, et si p/q est le représentant irréductible de t, alors $f(t)=1/q$.

Montrer que f satisfait les hypothèses de 1°.

3° Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ ainsi définie :

— Si $t\notin\mathbb{Q}$, $g(t)=t/(1+t)$; si $t\in\mathbb{Q}$ et si p/q est le représentant irréductible de t, alors $g(t)=p/(p+q+1)$.

Montrer que g est intégrable, et calculer son intégrale.

1° Nous utiliserons les notions d'intégrale inférieure et supérieure.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, et $A_\varepsilon=\{t\in[a,b]\mid f(t)>\varepsilon/(b-a)\}$;

$$A_\varepsilon\subset E_{\varepsilon/(b-a)}\text{, et donc } A_\varepsilon \text{ est fini.}$$

Soit alors $\sigma=(t_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ la subdivision de $[a,b]$ dont l'ensemble image est $\{a,b\}\cup A_\varepsilon$.

Associons à σ l'application $v:[a,b]\to\mathbb{R}$, en escalier, ainsi définie :

— Pour tout i $(0\leqslant i\leqslant n)$, $v(t_i)=f(t_i)$;

— Sur tout intervalle $]t_{i-1},t_i[$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, v est constante, de valeur $\varepsilon/(b-a)$.

On constate aisément : $f\leqslant v$ et $\int_a^b v=\varepsilon$.

Il en résulte $\int_a^{*b} f\leqslant\varepsilon$.

En appliquant ce qui précède à $-f$ (qui vérifie la même hypothèse), on constate : $\displaystyle\int_{\star a}^{b} f \geqslant -\varepsilon$.

D'où : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star \quad -\varepsilon \leqslant \displaystyle\int_{\star a}^{b} f \leqslant \int_a^{\star b} f \leqslant \varepsilon.$

Donc f est intégrable sur $[a,b]$, d'intégrale nulle.

2° Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$. D'après $f \geqslant 0$, on a ici $E_\varepsilon = \{t \in [0,1] \mid f(t) > \varepsilon\}$.

On constate que les éléments de E_ε sont rationnels, et on vérifie :

$$E_\varepsilon = \{\tfrac{p}{q} \mid (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star,\ p \wedge q = 1,\ 0 \leqslant p \leqslant q \leqslant 1/\varepsilon\}$$

ce qui montre que E_ε est fini.

3° On remarque : $\forall t \in [0,1] \quad g(t) = \dfrac{t}{t+1+f(t)}$ où f est l'application définie au 2°.

Introduisons l'application $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h(t) = \frac{t}{t+1} - g(t) = \frac{t\,f(t)}{(t+1)\big(t+1+f(t)\big)}$$

On constate que, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{t}{(t+1)^2} f(t) \leqslant f(t)$$

Il en résulte que h vérifie l'hypothèse du 1° ; h est donc intégrable et d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Comme $t \mapsto t/(t+1)$ est intégrable sur $[0,1]$, on en déduit que g est intégrable sur $[0,1]$ et que :

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t}{t+1}\,dt = 1 - \operatorname{Log} 2.$$

Remarque. On pourra relier cet exercice au 3.1.6.

$\boxed{4.1.4}$ Soient a et b des réels, $a<b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application intégrable, positive et telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Montrer que $\{t \in [a,b] \mid f(t) = 0\}$ est dense dans $[a,b]$.

a) Montrons d'abord que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$, il existe $[\alpha\ \beta] \subset [a,b]$ avec $\alpha < \beta$, tels que :

$$\forall t \in [\alpha,\beta] \quad f(t) < \varepsilon .$$

Par l'absurde : supposons qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que pour tout segment $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ vérifiant $\alpha < \beta$ on ait un $t \in [\alpha,\beta]$ tel que $f(t) \geqslant \varepsilon$.

Alors à toute subdivision $\sigma = (t_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ on peut associer un pointage $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tel que :

$\forall i \in N_n \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ et $f(\xi_i) \geqslant \varepsilon$.

Il en résulte que pour toute subdivision σ il existe un pointage ξ tel que la somme de Riemann correspondante vérifie :

$$S(f,\sigma,\xi) \geqslant \varepsilon(b-a)$$

ce qui contredit manifestement la nullité de $\int_a^b f$. □

b) Montrons que l'on peut construire par récurrence une suite $[\alpha_n, \beta_n]$ de segments emboités tels que :

$$\forall n \in N \quad a \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} \leqslant \beta_n \leqslant b \quad \text{et: } \forall t \in [\alpha_n, \beta_n] \quad f(t) \leqslant 1/(n+1)$$

— Par application de a) on peut trouver $a \leqslant \alpha_0 < \beta_0 \leqslant b$ tel que :

$$\forall t \in [\alpha_0, \beta_0] \quad f(t) \leqslant 1$$

— Supposons alors $[\alpha_n, \beta_n]$ construit. On remarque que a) s'applique à la restriction de f à $[\alpha_n, \beta_n]$ $\left(0 \leqslant \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f \leqslant \int_a^b f = 0\right)$. D'où l'existence de $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$. □

• Soit alors $c \in \bigcap_{n \in N} [\alpha_n, \beta_n]$, dont l'existence est assurée par l'existence de $\lim \alpha_n \leqslant \lim \beta_n$. On constate : $0 \leqslant f(c) \leqslant 1/(n+1)$ pour tout $n \in N$. D'où $f(c) = 0$.

• Finalement, si $f : [a,b] \to R$ $(a<b)$ est intégrable et positive, et si $\int_a^b f = 0$, alors f s'annule en un point du segment $[a,b]$.

Mais ceci s'applique aussi à la restriction de f à tout segment de R inclus dans $[a,b]$. On en déduit bien le résultat annoncé. □

4.1.5 Soit $(a,b,\alpha,\beta) \in R^4$, $a<b$. On note E l'ensemble des applications continûment dérivables de R dans R prenant les valeurs α et β aux points a et b respectivement, et Φ l'application de E dans R :

$$\Phi : f \mapsto \int_a^b \left(f^2(t) + f'^2(t)\right) dt$$

1° Montrer que la partie $\Phi(E)$ de R n'est pas majorée.

2° Montrer que $\Phi(E)$ admet une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte pour un unique élément de E, qui est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

Pour tout $f \in E$, $f^2 + f'^2$ est continue, et donc intégrable sur $[a,b]$; d'où l'existence de Φ.

1° Choisissons arbitrairement des réels a' et b' tels que $a<a'<b'<b$. Pour $\lambda\notin\{\alpha,\beta\}$, soit $f_\lambda : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, telle que $f_\lambda(t)$ désigne :

$$\lambda+\frac{\alpha-\lambda}{(a-a')^2}(t-a')^2,\ \lambda,\ \text{ou}\ \lambda+\frac{\beta-\lambda}{(b-b')^2}(t-b')^2$$

suivant que t appartient à [a,a'], [a',b'], ou [b',b] . (Le lecteur vérifiera que f_λ appartient à E et que la représentation graphique de f_λ est formée d'un segment de droite et de deux arcs de paraboles). Nous avons :

$$\Phi(f_\lambda)>\int_{a'}^{b'}\lambda^2dt=\lambda^2(b'-a'). \qquad \square$$

2° Les solutions de $y''-y=0$ sont les fonctions $t\mapsto Ae^t+Be^{-t}$. Une seule d'entre elles, que nous notons g, appartient à E. Elle correspond à :

$$A=\frac{\alpha e^{-b}-\beta e^{-a}}{e^{a-b}-e^{-a+b}},\quad B=\frac{\alpha e^{b}-\beta e^{a}}{e^{-a+b}-e^{a-b}}.$$

Pour toute $f\in E$, nous constatons, en notant $f=g+u$, que $\Phi(f)-\Phi(g)$ est la somme des intégrales sur [a,b] des fonctions :

$$u^2+u'^2,\ 2(g''u+g'u'),\ 2(g-g'')u.$$

La troisième intégrale est nulle à cause de $g''=g$. La seconde s'écrit $2\big(g'(b)u(b)-g'(a)u(a)\big)$, et elle est, elle aussi, nulle. Il reste :

$$\Phi(f)-\Phi(g)=\int_a^b\big(u^2(t)+u'^2(t)\big)dt.$$

Comme u est continue, on a $\Phi(f)>\Phi(g)$ si $f\neq g$. $\square$

$\boxed{4.1.6}$ Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue. Etudier la suite de terme général :

$$I_n=\int_0^1 n^2(t^n-t^{n+1})f(t)dt.$$

a) Supposons d'abord $f(1)=0$. Notons : $M=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star$. La continuité de f permet de lui associer $\alpha\in]0,1[$ tel que:

$$\forall t\in[\alpha,1]\qquad |f(t)|\leqslant\varepsilon/2.$$

En remarquant que, pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,1]$, $t^n-t^{n+1}\geqslant0$, nous pouvons écrire :

$$|I_n|\leqslant M\int_0^\alpha n^2(t^n-t^{n+1})dt+(\varepsilon/2)\int_\alpha^1 n^2(t^n-t^{n+1})dt.$$

En remarquant que : $t^n - t^{n+1} \leqslant t^n \leqslant \alpha^n$ pour tout $t \in [0,\alpha]$, il vient :

$$\int_0^\alpha n^2(t^n - t^{n+1})dt \leqslant n^2\alpha^{n+1}.$$

De plus : $\displaystyle\int_\alpha^1 n^2(t^n-t^{n+1})dt \leqslant \int_0^1 n^2(t^n-t^{n+1})dt = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \leqslant 1$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |I_n| \leqslant Mn^2\alpha^{n+1} + \varepsilon/2$. Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2\alpha^{n+1}) = 0$.

D'où l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N \quad |I_n| \leqslant \varepsilon$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

b) Dans le cas général, écrivons $I_n = J_n + K_n$, avec :

$$J_n = \int_0^1 n^2(t^n-t^{n+1})\big(f(t)-f(1)\big)dt \; ; \; K_n = f(1)\int_0^1 n^2(t^n-t^{n+1})dt.$$

Nous constatons : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ (d'après a)), et $K_n = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}f(1)$.

D'où : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = f(1)$. □

4.1.7 On donne deux réels a et b $(a<b)$, un espace de Banach E, et deux applications $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable, $g : \mathbb{R} \to E$ localement intégrable et bornée. On note M un majorant de $\|g\|$ sur $\mathbb{R}$. Enfin on suppose qu'il existe $\ell \in E$ vérifiant :

$$\ell = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g$$

1° Vérifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b g(nt)dt = (b-a)\ell$.

2° Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)g(nt)dt = \ell\int_a^b f$.

3° Appliquer ce qui précède au cas où l'on suppose $g : \mathbb{R} \to E$ localement intégrable et T-périodique $(T>0)$.

1° Soit $a \in \mathbb{R}^*$; $\displaystyle\int_0^a g(nt)dt = \frac{1}{n}\int_0^{na} g = \frac{a}{na}\int_0^{na} g$.

D'où : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^a g(nt)dt = a\ell$.

Ce résultat est encore vrai (trivialement) si $a = 0$, et pour tous a et b :

$$\int_a^b g(nt)dt = \int_0^b g(nt)dt - \int_0^a g(nt)dt, \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_a^b g(nt)dt = (b-a)\ell.$$

2° On peut toujours supposer $M > 0$.

Si f est en escalier, le résultat se déduit immédiatement du 1°) par linéarité.

Dans le cas général, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (arbitraire). D'après les propriétés des applications intégrables, il existe $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, en escalier, telle que :

$$\int_a^b |f-\varphi| \leq \frac{\varepsilon}{3M} .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left\| \int_a^b f(t)g(nt)dt - \ell \int_a^b f \right\| \leq A + B + C$

où : $A = \left\| \int_a^b f(t)g(nt)dt - \int_a^b \varphi(t)g(nt)dt \right\|$,

$$B = \left\| \int_a^b \varphi(t)g(nt)dt - \ell \int_a^b \varphi \right\| , \quad C = \left\| \ell \int_a^b (\varphi - f) \right\| .$$

On a : $A \leq \int_a^b |f(t)-\varphi(t)| \, \| g(nt) \| dt \leq M \int_a^b |f-\varphi| \leq \varepsilon/3$

et $C \leq \| \ell \| \int_a^b |\varphi - f| \leq \varepsilon/3$.

On a vu que, comme φ est en escalier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi(t)g(nt)dt = \ell \int_a^b \varphi$; il existe donc $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$, $B \leq \varepsilon/3$ et donc :

$$\left\| \int_a^b f(t)g(nt)dt - \ell \int_a^b f \right\| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

3° L'hypothèse implique que g est bornée.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\theta(t)$ la partie entière de t/T :

$$\theta(t) \in \mathbb{Z}, \text{ et } \theta(t)T \leq t < \big(1+\theta(t)\big)T$$

On constate : $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = +\infty$; $\lim\limits_{t\to-\infty} \theta(t) = -\infty$;

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t)/t = \lim_{t\to-\infty} \theta(t)/t = 1/T$$

Pour $t \in \mathbb{R}^*$: $\frac{1}{t}\int_0^t g = \frac{1}{t}\int_0^{\theta(t)T} g + \frac{1}{t}\int_{\theta(t)T}^t g$

On a : $\left\| \frac{1}{t}\int_{\theta(t)T}^t g \right\| \leq \frac{1}{|t|} \left| \int_{\theta(t)T}^{(1+\theta(t))T} \| g \| \right| \leq M \frac{T}{|t|}$

et (en utilisant la T-périodicité de g) :

$$\frac{1}{t}\int_0^{\theta(t)T} g = \frac{\theta(t)}{t}\int_0^T g.$$

On en déduit : $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t}\int_0^t g\right) = \lim\limits_{t\to-\infty} \left(\frac{1}{t}\int_0^t g\right) = \frac{1}{T}\int_0^T g.$

Il en résulte que g vérifie les conditions requises et que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)g(nt)dt = \frac{1}{T}\left(\int_a^b f\right)\left(\int_0^T g\right) .$$

Exemples. a) Avec $g : t \mapsto e^{it}$ ($T = 2\pi$) on retrouve le résultat classique

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0.$$

b) Avec $g = |\sin t|$, on trouve : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)|\sin(nt)|dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f$.

Remarque. Le lecteur vérifiera que la condition requise pour g est réalisée si $g : \mathbb{R} \to E$ est localement intégrable et s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\ell = \lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to-\infty} g(t).$$

$\boxed{4.1.8}$ Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a et b deux réels tels que $a<b$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe, et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, à valeurs dans I.

Montrer que :

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (f \circ g)(t)dt. \tag{1}$$

— L'application convexe f est continue : d'où la continuité de $f \circ g$ sur $[a,b]$, et l'existence du second membre de (1).

D'autre part, du fait de la continuité de g, il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt = g(c)$$

On a $g(c) \in I$; d'où l'existence du premier membre de (1).

— On sait que l'application convexe f est dérivable à droite sur I, et qu'en particulier au point $g(c) \in I$, la droite d'appui :

$$y = mx + p, \quad \text{où} \quad m = f'_d(g(c)) \text{ et } p = f(g(c)) - g(c).f'_d(g(c))$$

est (dans $\mathbb{R}^2$) "au dessous" du graphe de f, ce qui signifie que :

$$\forall x \in I \quad f(x) \geq mx + p \tag{2}$$

De (2) on déduit :

$$\forall t \in [a,b] \quad (f \circ g)(t) \geq mg(t) + p$$

ce qui entraîne (en intégrant sur $[a,b]$) :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (f \circ g)(t)dt \geq m\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) + p \tag{3}$$

Le second membre de (3) est $mg(c) + p$, c'est-à-dire $f(g(c))$. □

$\boxed{4.1.9}$ 1° Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant $f(0) = 0$. Montrer :

$$2\int_0^1 f^2 \leq \int_0^1 f'^2 \tag{1}$$

2° On suppose de plus que $f(1)=0$. Peut-on améliorer l'inégalité (1) ?

1° f' étant continue, on peut écrire : $f(x)=\int_0^x f'$ pour tout $x\in[0,1]$, et, d'après l'inégalité de Schwarz :

$$f^2(x)\leqslant\left(\int_0^x 1\right)\left(\int_0^x f'^2\right)$$

Il en résulte: $\forall x\in[0,1]\quad f^2(x)\leqslant x\int_0^1 f'^2$

et par intégration : $\int_0^1 f^2\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1 f'^2$ □

2° Reprenons le calcul du 1° :

$$\forall x\in[0,1/2]\qquad f^2(x)\leqslant x\int_0^x f'^2\leqslant x\int_0^{1/2} f'^2$$

d'où :

$$\int_0^{1/2} f^2\leqslant\left(\int_0^{1/2} t\,dt\right)\left(\int_0^{1/2} f'^2\right)=\frac{1}{8}\int_0^{1/2} f'^2. \tag{2}$$

De même, pour tout $x\in[1/2,1]$, et compte tenu de $f(1)=0$:

$$f^2(x)=\left(\int_x^1 f'\right)^2\leqslant\left(\int_x^1 1\right)\left(\int_x^1 f'^2\right)$$

soit : $\forall x\in[1/2,1]\quad f^2(x)\leqslant(1-x)\int_{1/2}^1 f'^2$

et par intégration : $\int_{1/2}^1 f^2\leqslant\frac{1}{8}\int_{1/2}^1 f'^2$ (3)

Compte tenu de (2) et (3) : $8\int_0^1 f^2\leqslant\int_0^1 f'^2.$ □

Remarque. On peut montrer sous les mêmes hypothèses que :

$$\pi^2\int_0^1 f^2\leqslant\int_0^1 f'^2$$

Mais cette dernière ne peut pas être améliorée (il y a égalité pour $f : t\mapsto \sin\pi t$).

4.1.10 1° A tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ on associe $\alpha_{n,k}$ défini par :

$$\alpha_{n,k}=\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}(n-k)!\,k!}\quad\text{si } 0\leqslant k\leqslant n$$

et $\alpha_{n,k}=0$ si $k<0$ ou si $k>n$.

Vérifier que, pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, on a :

$$\alpha_{n+1,k}-\alpha_{n,k-1}=(2n-k+1)\alpha_{n,k} \tag{1}$$

et : $$\alpha_{n+1,k}-\alpha_{n,k-1}=(k+1)\alpha_{n+1,k+1} \tag{2}$$

En déduire un "tableau triangulaire" (analogue au triangle de Pascal) donnant les valeurs non nulles de $\alpha_{n,k}$ pour $0 \leqslant n \leqslant 6$.

2° A toute application continue φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on associe les applications $P(\varphi)$ et $T(\varphi)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement définies par :

$$t \longmapsto \int_0^t \varphi(u)\,du \quad \text{et} \quad t \longmapsto \int_0^t u\varphi(u)\,du.$$

a) Montrer que l'on définit ainsi deux endomorphismes P et T de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sont-ils injectifs ? Sont-ils bijectifs ?

b) Ici $f \in \mathcal{E}$ est donnée. On note : $f_0 = f$ et $F_0 = f$, ainsi que :

$$f_{n+1} = P(f_n) \quad \text{et} \quad F_{n+1} = T(F_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier l'assertion :

$$(A_n) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad F_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \alpha_{n,k} t^k f_{2n-k}(t)$$

1° En utilisant s'il y a lieu l'expression de C_{2n-k}^k, on constate $\alpha_{n,k} \in \mathbb{N}$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. On remarque : $\alpha_{n,n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— En distinguant $k = n+1$ (resp. $k = -1$), on constate que les égalités (1) et (2) sont vérifiées pour $k > n$ (resp. $k < 0$).

— En distinguant $k = 0$, on constate que, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\alpha_{n+1,k} - \alpha_{n,k-1} = \frac{(2n-k+1)!}{2^{n-k}(n-k)!k!}$$

et on en déduit que (1) et (2) sont encore vérifiées.

L'égalité (1), qui donne $\alpha_{n+1,0} = (2n+1)\alpha_{n,0}$ fournit les $\alpha_{n,0}$ à partir de $\alpha_{0,0} = 1$. L'égalité (2) fournit les autres termes du tableau (en particulier : $\alpha_{n,1} = \alpha_{n,0}$) ; le lecteur vérifiera que les cinquième et sixième lignes sont :

945	945	420	105	15	1	
10 395	10 395	4 725	1 260	210	21	1

2° a) Etant continûment dérivables, $P(\varphi)$ et $T(\varphi)$ appartiennent à $\mathcal{E}$. La linéarité de P et de T est triviale. La non surjectivité résulte de ce que $\operatorname{Im} P$ et $\operatorname{Im} T$ ne contiennent pas les applications continues mais non continûment dérivables.

L'injectivité résulte de ce que, on a (par dérivation) :

— si $\varphi \in \operatorname{Ker} P$, alors $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;

— si $\varphi \in \operatorname{Ker} T$, alors $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \neq 0$, et aussi $\varphi(0) = 0$ par continuité.

($\mathcal{E}$ étant de dimension infinie, un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ peut être à la fois injectif et non surjectif).

b) L'assertion (A_0), qui s'écrit $F_0 = f_0$, est vraie.

Compte tenu de la nullité des $F_m(0)$ et des $f_m(0)$, il suffit donc de vérifier qu'étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (A_{n-1}) soit vraie, pour **tout** $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \alpha_{n,k}\, t^k f_{2n-k}(t)\right) = t\, F_{n-1}(t) \tag{3}$$

Le premier membre de (3) s'écrit, grâce à un changement d'indexation dans la seconde somme qui va apparaître :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \alpha_{n,k}\, t^k f_{2n-k-1}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} (k+1)\alpha_{n,k+1}\, t^k f_{2n-k-1}(t)$$

et, grâce à (2), à $\alpha_{n,n} = \alpha_{n-1,n-1}$ et à $\alpha_{n-1,-1} = 0$:

$$t\left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \alpha_{n-1,k-1}\, t^{k-1} f_{2n-k-1}(t) + \alpha_{n-1,n-1}\, t^{n-1} f_{n-1}(t)\right)$$

En effectuant un changement d'indexation et en tenant compte de (A_{n-1}), on reconnaît $t\,F_{n-1}(t)$. □

4.1.11 On reprend les notations de l'exercice précédent, dans le cas où f est la fonction sinus.

1° Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application F_n est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_n(t) = P_n(t)\sin t - Q_n(t)\cos t \tag{1}$$

où P_n et Q_n sont des polynômes dont on explicitera les coefficients en fonction des $\alpha_{n,k}$ introduits dans l'exercice précédent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier les égalités de polynômes :

$$P'_{n+1} + Q_{n+1} = XP_n \ ; \ Q'_{n+1} - P_{n+1} = XQ_n \tag{2}$$

2° On définit les applications G_n, $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_n(t) = P_n(t)\cos t + Q_n(t)\sin t\ .$$

Montrer : $\forall t \in \mathbb{R} \quad G'_{n+1}(t) = t\, G_n(t)$. (3)

3° Dans cette question, $t \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ est donné. Vérifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |F_n(t)| \leqslant \frac{|t|^{2n+1}}{1.3\ \dots\ (2n+1)} \quad \text{et} \quad G_{n+1}(t) \geqslant \alpha_{n+1,0} \tag{4}$$

En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{F_n(t)}{G_n(t)} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{Q_n(t)}{P_n(t)} = \operatorname{tg} t$.

1° Ici, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f_{2i} - (-1)^i \sin$ et $f_{2i+1} - (-1)^{i+1}\cos$ sont des fonctions polynomiales. En utilisant l'assertion (A_n) de l'exercice précédent, on constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des polynômes P_n, Q_n, R_n tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_n(t) = P_n(t)\sin t - Q_n(t)\cos t + R_n(t)$$

On a : $$P_n(t) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n/2} (-1)^i \, \alpha_{n,2i} \, t^{2i} = \alpha_{n,0} - \alpha_{n,2}\, t^2 + \dots$$

et : $$Q_n(t) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^i \, \alpha_{n,2i+1} \, t^{2i+1} = \alpha_{n,1} t - \alpha_{n,3}\, t^3 + \dots$$

De la nullité de $t \longmapsto F'_{n+1}(t) - t\,F_n(t)$, on déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad U_n(t)\sin t - V_n(t)\cos t + W_n(t) = 0 \tag{5}$$

où : $U_n = P'_{n+1} + Q_{n+1} - XP_n$; $V_n = Q'_{n+1} - P_{n+1} - XQ_n$

et : $W_n = R'_{n+1} - XR_n$.

En faisant $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dans (5), on constate que les polynômes $-V_n + W_n$ et $V_n + W_n$ ont une infinité de zéros, et donc qu'ils sont nuls, ce qui entraîne la nullité de V_n et de W_n ; de la même façon on prouve la nullité des U_n. Nous avons ainsi établi :

— d'une part les égalités (2) ;

— d'autre part les égalités $R'_{n+1} = XR_n$ qui fournissent par récurrence la nullité des R_n $\left(\text{on utilise } R_0 = 0 \text{ et } R_n(0) = 0 \text{ pour tout } n\right)$.

2° La relation (3) se déduit simplement de (2).

3° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications F_n et G_n sont respectivement impaire et paire ; il suffit donc de raisonner pour $t \geqslant 0$.

La première inégalité (4), d'ailleurs valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, s'établit pour $t \geqslant 0$ en raisonnant par récurrence à partir de :

$$|F_0(t)| = |\sin t| \leqslant t \text{ pour tout } t \geqslant 0.$$

La seconde inégalité (4) s'établit pour $t \in [0, \pi/2]$, par récurrence : on constate que les $\alpha_{n,0}$ sont strictement positifs et que $G_0 : t \longmapsto \cos t$ est positive sur $[0, \pi/2]$; on en déduit, grâce à (3), que, pour $n \geqslant 1$, les G_n sont croissantes et positives sur $[0, \pi/2]$.

— Comme, pour t donné, $\dfrac{|t|^{2n+1}}{1.3 \dots (2n+1)}$ est le terme général d'une série qui converge d'après la règle de d'Alembert, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|t|^{2n+1}}{1.3 \dots (2n+1)} = 0 \text{ ; d'où : } \lim_{n \to +\infty} F_n(t) = 0. \tag{5}$$

Pour $t \in]-\pi/2,\pi/2[$, (4) et (5) entraînent : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(t)/G_n(t) = 0$.

Reste à écrire : $\dfrac{Q_n(t)}{P_n(t)} = \dfrac{-F_n(t)/G_n(t).\cos t + \sin t}{F_n(t)/G_n(t).\sin t + \cos t}$. □

$\boxed{4.1.12}$ Soient f et g deux applications continues d'un intervalle réel $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, $a<b$. On suppose que f est décroissante et que g prend ses valeurs dans $[0,1]$. Vérifier :

$$\int_{b-c}^{b} f(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant \int_a^{a+c} f(t)dt$$

où c désigne l'intégrale de g sur $[a,b]$.

On dispose de l'application continûment dérivable $\varphi : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$; pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant x-a, \text{ i.e. : } a \leqslant a+\varphi(x) \leqslant x. \qquad (1)$$

On en déduit l'existence et la dérivabilité de $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$F(x) = \int_a^{a+\varphi(x)} f(t)dt - \int_a^x f(t)g(t)dt.$$

On a : $F'(x) = g(x)[f(a+\varphi(x)) - f(x)]$.

Comme f est décroissante, on déduit de (1) :

$$f(a+\varphi(x)) - f(x) \geqslant 0.$$

D'où $F' \geqslant 0$; F est croissante, et, comme $F(a) = 0$, on a : $F \geqslant 0$. En d'autres termes :

$$\forall x \in [a,b] \quad \int_a^x f(t)g(t)dt \leqslant \int_a^{a+\varphi(x)} f(t)dt$$

— On montre de même :

$$\forall x \in [a,b] \quad \int_{b-\psi(x)}^{b} f(t)dt \leqslant \int_x^b f(t)g(t)dt,$$

où ψ est l'application $x \mapsto \int_x^b g(t)dt$. □

$\boxed{4.1.13}$ On donne $c \in \mathbb{R}_+$. Soient u et v deux applications continues et positives de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t)dt \qquad (1)$$

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant c \exp\left(\int_0^x v(t)dt\right)$ (2)

• Soit $\varepsilon>0$ fixé. Associons-lui l'application $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$w(x) = (c+\varepsilon) + \int_0^x u(t)v(t)dt$$

Elle admet uv pour dérivée et est donc de classe C^1. Compte tenu de $u\geqslant 0$ et $v\geqslant 0$, elle est à valeurs supérieures à $c+\varepsilon$, et donc strictement positive.

On a :

$$\forall t\in \mathbb{R}_+ \quad \frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{u(t)}{w(t)}\,.\, v(t) \leqslant v(t)$$

et donc :

$$\forall x\in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x \frac{w'(t)}{w(t)}dt \leqslant \int_0^x v(t)dt$$

i.e. : $\quad \forall x\in \mathbb{R}_+ \quad w(x) \leqslant w(0)\ \exp\left(\int_0^x v(t)dt\right)$

Compte tenu de $u\leqslant w$ et de $w(0)=c+\varepsilon$, on obtient :

$$\forall x\in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant (c+\varepsilon)\ \exp\left(\int_0^x v(t)dt\right) \tag{3}$$

• Comme (3) est vrai pour tout $\varepsilon\in \mathbb{R}_+^\star$, un passage à la limite fournit (2).

Remarques. a) L'introduction de ε n'est utile que si $c=0$.

b) Dans le cas $c=0$, l'exercice montre que l'unique application u continue et positive de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x\in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant \int_0^x u(t)dt$$

est l'application nulle (utiliser $v(t)=1$ pour tout $t\in \mathbb{R}_+$).

4.1.14 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a<b$, une application de classe C^2 telle que f'' admette un minorant m strictement positif. On note :

$$\varphi(t) = \exp\big(if(t)\big) \quad ; \quad I = \int_a^b \varphi(t)dt$$

Vérifier : $|I| \leqslant 4\sqrt{3/m}$. (1)

La seule continuité de f garantit l'existence de I et fournit la majoration : $|I| \leqslant b-a$ (2)

qui est plus fine que (1) si $b-a\leqslant 4\sqrt{3/m}$.

Notons que f' est strictement croissante.

1er *Cas :* $f'(a)\geqslant 0$. Pour tout $c\in\,]a,b]$, nous avons, par l'inégalité des accroissements finis appliquée à f' sur $[a,c]$:

$$f'(c) \geqslant f'(a) + (c-a)m \geqslant m(c-a) \tag{3}$$

Ecrivons $I = J(c) + K(c)$, où $J(c)$ et $K(c)$ sont les intégrales de φ sur $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement. Nous avons : $|J(c)| \leqslant c - a$.

Compte tenu de (3) et de la croissance de f', nous avons $f'(t) > 0$ pour tout $t \in [c,b]$; les fonctions $1/f'$ et φ sont de classe C^1 sur $[c,b]$, ce qui autorise à intégrer par parties à partir de :

$$K(c) = -i\int_c^b \frac{1}{f'(t)}\left(i\varphi(t)f'(t)\right)dt$$

D'où : $$K(c) = i\left(\frac{\varphi(c)}{f'(c)} - \frac{\varphi(b)}{f'(b)}\right) - iH(c)$$

avec :

$$H(c) = \int_c^b \varphi(t)\,\frac{f''(t)}{f'^2(t)}\,dt.$$

On en déduit : $|K(c)| \leqslant \frac{2}{f'(c)} + |H(c)|$.

Or : $$|H(c)| \leqslant \int_c^b \frac{f''(t)}{f'^2(t)}\,dt = \frac{1}{f'(c)} - \frac{1}{f'(b)} \leqslant \frac{1}{f'(c)}.$$

Retenons : $\forall c \in \,]a,b]$ $\quad |I| \leqslant (c-a) + \frac{3}{m(c-a)}$ (4)

L'application $u \mapsto u + 3/(mu)$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ admet $2\cdot\sqrt{3/m}$ pour minimum, atteint pour $u = \sqrt{3/m}$. Si $b - a \geqslant 2\sqrt{3/m}$, on en déduit, en faisant $c = a + \sqrt{3/m}$ dans (4), la majoration :

$$|I| \leqslant 2\sqrt{3/m} \tag{5}$$

qui est plus finie que (1) et que (2).

Si $b-a \leqslant 2\sqrt{3/m}$, (5) est encore valable, mais moins fine que (2).

2ème *Cas :* $f'(a) < f'(b) \leqslant 0$. Le changement de variable $t = a + b - u$ conduit à :

$$I = \int_a^b \exp\left(if(a+b-u)\right)du = \int_a^b \exp\left(ig(t)\right)dt$$

où $g(t) = f(a+b-t)$. On calcule, pour tout $t \in [a,b]$

$$g'(t) = -f'(a+b-t) \ ; \ g''(t) = f''(a+b-t).$$

On constate que m est minorant de g'' sur $[a,b]$, et que $g'(a) = -f'(b) \geqslant 0$. On peut donc appliquer à g l'étude faite ci-dessus. D'où : $|I| \leqslant 2\sqrt{3/m}$.

3ème *Cas :* $f'(a) < 0 < f'(b)$. Il existe $d \in \,]a,b[$ tel que $f'(d) = 0$. D'après l'étude des deux premiers cas, les intégrales de φ sur $[a,d]$ et $[d,c]$ ont chacune un module inférieur à $2\cdot\sqrt{3/m}$. D'où : $|I| \leqslant 4\sqrt{3/m}$. □

$\boxed{4.1.15}$ Dans tout l'exercice, $r \in \mathbb{R}_+^*$ est donné. Soit $P = z \mapsto \sum_{k=o}^{n} a_k z^k$ unr application polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On note :

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |P(z)|.$$

1° Pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, on pose : $I_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta})(re^{i\theta})^{-p} d\theta$.

Comparer a_p et I_p, et en déduire : $|a_p| \leqslant M(r)/r^p$. (1)

2° On suppose qu'il existe $m \in \{0, \dots, n\}$ tel que : $|a_m| = M(r)/r^m$.

Montrer que P se réduit à : $z \mapsto a_m z^m$.

1° $I_p = \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{2\pi} a_k r^{k-p} J_{k,p}$, où $J_{k,p} = \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)\theta} d\theta$.

On constate : $J_{k,p} = \delta_{k,p} . 2\pi$. D'où : $a_p = I_p$.

On en déduit :

$$2\pi |a_p| \leqslant r^{-p} \int_0^{2\pi} |P(re^{i\theta})| d\theta \leqslant 2\pi\ r^{-p} M(r)$$ □

2° Ecrivons : $2\pi r^p a_p = \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta$ et appliquons l'inégalité de Schwarz aux deux fonctions complexes $\theta \mapsto P(re^{i\theta})$ et $\theta \mapsto e^{ip\theta}$. Il vient :

$$(2\pi r^p |a_p|)^2 \leqslant \left(\int_0^{2\pi} |P(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \leqslant 4\pi^2 (M(r))^2. \qquad (2)$$

ce qui constitue d'ailleurs une autre démonstration de (1).

Mais pour $p = m$, (2) devient une égalité. On peut alors en déduire que, les fonctions complexes considérées étant continues, elles sont proportionnelles, ce qui s'écrit :

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad P(re^{i\theta}) = \alpha e^{im\theta}.$$

$P(X) - \frac{\alpha}{r^m} X^m$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ qui admet une infinité de zéros (tous les nombres complexes de module r) ; il s'agit du polynôme nul ; on a $a_k = 0$ pour tout $k \neq m$, et $a_m = \alpha / r^m$. □

$\boxed{4.1.16}$ L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = 0 \ ; \ f(x) = \int_0^x \sin\frac{1}{t} dt \text{ pour } x \neq 0$$

est-elle dérivable ? continûment dérivable ?

— Pour tout $x > 0$, la fonction $t \to \sin t^{-1}$ (qui n'est pas réglée) est bornée et localement intégrable sur $]0,x[$; d'après le cours elle est intégrable sur $[0,x]$; de même, pour $x < 0$, elle est intégrable sur $[x,0]$. Il en résulte que f est définie sur $\mathbb{R}$; elle est continue.

— Pour tout $x \neq 0$, on dispose de $f'(x) = \sin x^{-1}$.

— Pour savoir s'il existe $f'(0)$, étudions $x \mapsto f(x)/x$, au voisinage de 0. Comme f est manifestement paire, nous pouvons commencer par considérer $x > 0$. Soit alors ε tel que $0 < \varepsilon < x$. Par intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^x \sin\frac{1}{t}\,dt = [t^2\cos\frac{1}{t}]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x 2t\cos\frac{1}{t}\,dt.$$

Par passage à la limite avec $x > 0$ fixe et ε tendant vers 0 :

$$\frac{f(x)}{x} = x\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,dt$$

En utilisant :

$$\left|\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x 2t\,dt = x^2, \text{ il vient :}$$

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ et, par parité : } \lim_{x\to 0,\, x\neq 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ i.e. } f'(0) = 0\ .$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \sin x^{-1}$ n'existe pas, f est dérivable, mais non continûment dérivable sur R.

4.1.17 Déterminer l'ensemble Λ des $\lambda \in \mathrm{R}$ tels que :

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} f_\lambda(x) = 0, \text{ où } f_\lambda(x) = x^{-\lambda}\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,dt$$

— D'après l'exercice précédent, on constate que, pour tout $\lambda \in \mathrm{R}$, la fonction f_λ est définie sur $\mathrm{R}_+^\star$.

— De $f_{\lambda'}(x) = x^{\lambda-\lambda'} f_\lambda(x)$ on déduit que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a : $]-\infty,\lambda] \subset \Lambda$

— D'après l'exercice précédent, pour tous $\lambda \in \mathrm{R}$ et $x > 0$:

$$f_\lambda(x) = x^{2-\lambda}\cos\frac{1}{x} - 2x^{-\lambda}\, I(x) \quad ; \; I(x) = \int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,dt.$$

— Pour ε tel que $0 < \varepsilon < x$, une intégration par parties donne :

$$\int_\varepsilon^x t\cos\frac{1}{t}\,dt = [-\,t^3\sin\frac{1}{t}]_\varepsilon^x + \int_\varepsilon^x 3t^2\sin\frac{1}{t}\,dt\ .$$

Par passage à la limite avec $x > 0$ fixe et ε tendant vers 0 :

$$I(x) = -x^3\sin\frac{1}{x} + \int_0^x 3t^2\sin\frac{1}{t}\,dt\ .$$

D'où : $\quad |I(x)| \leqslant x^3 + \int_0^x 3t^2\,dt \leqslant 2x^3.$

1er *Cas* : $\lambda < 2$. On a $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x^{2-\lambda}\cos 1/x = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x^{-\lambda}\, I(x) = 0$.

D'où : $\lambda \in \Lambda$.

2ème *Cas* : $\lambda = 2$. On a encore $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x^{-\lambda}\, I(x) = 0$, mais ici la fonction

$x \mapsto x^{2-\lambda} \cos 1/x$ n'admet pas de limite à droite en 0.

D'où : $\quad 2 \notin \Lambda$.

3ème *Cas :* $\lambda > 2$. On constate (cf. remarque initiale) que $\lambda \in \Lambda$ serait en contradiction avec $2 \notin \Lambda$.

En conclusion : $\Lambda =]-\infty, 2[$.

4.1.18 1° Ensemble de définition I et variation de la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$.

2° Pour tout $x \in I$, trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+2)$; calculer $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

3° Montrer que la fonction $g : x \mapsto (x+1)f(x)f(x+1)$ est constante sur I. En déduire que $f(x)$ est infiniment petit avec $1/x$ et en donner un équivalent.

1° Soit φ_x l'application continue $t \mapsto \sin^x t$ de $]0,\pi/2]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \geqslant 0$, elle se prolonge par continuité au point 0, et $f(x)$ existe.

Pour $x < 0$, on constate que φ_x est équivalente, au voisinage de 0, à $t \mapsto t^x$; on en déduit $I =]-1, +\infty[$.

- Pour (x,x') tel que $-1 < x < x'$, on a : $\forall t \in]0,\pi/2[\quad \varphi_x(t) > \varphi_{x'}(t) > 0$.

On en déduit que $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement décroissante, à valeurs strictement positives.

2° Les $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, sont les intégrales de Wallis. Il s'agit ici d'étendre certaines de leurs propriétés. Pour $x \in I$ donné écrivons :

$$f(x+2) - f(x) = \frac{-1}{x+1} \int_0^{\pi/2} \cos t \, d(\sin^{x+1} t)$$

D'où (par parties) : $f(x+2) - f(x) = -f(x+2)/(x+1)$

et donc : $f(x+2) = (x+1)f(x)/(x+2)$.

A partir de $f(0) = \pi/2$ et $f(1) = 1$, on en déduit les intégrales de Wallis.

3° On constate que g est définie sur I, que $g(0) = \pi/2$ et que, pour tout $x \in I$,

$$g(x+1) - g(x) = f(x+1)\big((x+2)f(x+2) - (x+1)f(x)\big)$$

est nul d'après le 2°, ce qui entraîne :

$$\forall (x,n) \in I \times \mathbb{N} \quad g(x+n) = g(x) \text{ ; en particulier : } \forall n \in \mathbb{N} \quad g(n) = \pi/2.$$

Pour montrer que g est constante sur I, il suffit donc de vérifier :

$$\forall x \in]0,1[\quad g(x) = \pi/2$$

— Soit $x \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x)$, qui est aussi $g(x+n)$, vérifie (du fait de la décroissance de f) :

$$(x+n+1)f(n+1)f(n+2) < g(x) < (x+n+1)f(n)f(n+1)$$

De $g(n) = \pi/2$ on déduit : $f(n)f(n+1) = \frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{x+n+1}{n+2}\,\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{x+n+1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}$$

ce qui exige $g(x) = \frac{\pi}{2}$ (faire tendre n vers $+\infty$). □

• De $f(x)f(x+1) = \frac{\pi}{2(x+1)}$, on déduit, pour tout $x \in I$:

$$\big(f(x+1)\big)^2 < \frac{\pi}{2(x+1)} < \big(f(x)\big)^2, \text{ et donc : } \frac{\pi}{2(x+1)} < \big(f(x)\big)^2 < \frac{\pi}{2x}\,.$$

D'où : $\quad f(x) \sim \sqrt{\pi/2x}$ au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{4.1.19}$ Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x \sin t)dt$ admet un et un seul zéro sur $[0,\pi]$.

La fonction f est visiblement définie sur $\mathbb{R}$, et $f(0) = \pi$.

a) Montrons que f est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Sans dériver, nous constatons que si $0 \leqslant x' < x'' \leqslant \pi$, alors, pour tout $t \in]0,\pi[$:

$$0 \leqslant x' \sin t < x'' \sin t \leqslant \pi$$

et donc $f(x') > f(x'')$. □

(On retrouverait que f est décroissante sur $[0,\pi]$ en utilisant :

$$f'(x) = \int_0^{\pi} -\sin t.\sin(x \sin t)dt \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in [0,\pi])$$

b) Nous constatons $f(\pi/2) > 0$ (intégrale sur $[0,\pi]$ d'une fonction continue, positive et non nulle). Reste à vérifier $f(\pi) < 0$, ce qui permettra d'affirmer que f a un unique zéro $\alpha \in [0,\pi]$, avec même $\alpha \in]\pi/2,\pi[$.

c) La fonction $\varphi : t \mapsto \cos(\pi \sin t)$ vérifiant $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ pour tout t, nous avons : $f(\pi) = 2\int_0^{\pi/2} \varphi(t)dt$.
φ est décroissante sur $[0,\pi/2]$, et $\varphi(\pi/6) = 0$. Soient I_1 et I_2 les intégrales de φ sur $[0,\pi/6]$ et sur $[\pi/6,\pi/2]$.

— Sur $]0,\pi/6]$ $\varphi(t)$ est majorée strictement par 1 ; d'où $I_1 < \pi/6$.

— De : $\varphi''(t) = -\pi^2 \cos^2 t . \cos(\pi \sin t) + \pi \sin t . \sin(\pi \sin t)$
on déduit : $\varphi''(t) > 0$ pour tout $t \in [\pi/6,\pi/2]$. La fonction φ est donc convexe sur $[\pi/6,\pi/2]$, ce qui entraîne que I_2 est majorée par l'intégrale sur $[\pi/6,\pi/2]$ de la fonction affine ψ telle que :

$$\psi(\pi/6) = \varphi(\pi/6) = 0, \text{ et } \psi(\pi/2) = \varphi(\pi/2) = -1.$$

En utilisant l'aire du triangle : $I_2 \leqslant -1/2 \cdot (\pi/2-\pi/6) = -\pi/6$.
En conclusion : $f(\pi) = 2(I_1+I_2) < 0$. □

4.1.20 Soient deux applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a<b$, de classe C^1.
Etudier la dérivabilité de $F : x \mapsto \int_a^b f(x+t)\varphi(t)dt$

L'application $(t,x) \mapsto f(x+t)\varphi(t)$ de $[a,b]\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue ; si f est non seulement continue mais C^1, elle admet une dérivée partielle par rapport à x, qui est continue. D'après l'étude de la dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, F est continue ; elle est de classe C^1 si f est C^1 et, dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \int_a^b f'(x+t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

ce qui s'écrit, par une intégration par parties :

$$F'(x) = f(x+b)\varphi(b) - f(x+a)\varphi(a) - \int_a^b f(x+t)\varphi'(t)dt \tag{2}$$

— Si f n'est que continue, (1) n'a pas de sens. Montrons que F n'en est pas moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que (2) est valable ; il suffit pour cela d'écrire, par un changement de variable :

$$F : x \mapsto \int_{x+a}^{x+b} f(t)\varphi(t-x)dt$$

et d'appliquer un résultat classique (cf. par exemple notre cours, III.8.1.8).

4.1.21 Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a<b$, une application continue.
Etudier la dérivabilité de $F : x \mapsto \int_a^b |t-x|\varphi(t)dt$.

Soit Φ une primitive, arbitrairement choisie, de φ sur $[a,b]$.

— Pour $x \geqslant b$: $F(x) = x\int_a^b \varphi(t)dt - \int_a^b t\varphi(t)dt$.

F est donc de classe C^1 sur $[b,+\infty[$, et :

$$F'(x) = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ si } x > b \; ; \; F'_d(b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

— On montre de même que F est de classe C^1 sur $]-\infty,a]$ et que :

$$F'(x) = \Phi(a) - \Phi(b) \text{ si } x < a \; ; \; F'_g(a) = \Phi(a) - \Phi(b).$$

— Pour $x \in [a,b]$, on écrit $F(x)$ sous la forme :

$$x\int_a^x \varphi(t)dt - \int_a^x t\varphi(t)dt - x\int_x^b \varphi(t)dt + \int_x^b t\varphi(t)dt$$

On en déduit que F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et que :

$$F'(x) = \int_a^x \varphi(t)dt - \int_x^b \varphi(t)dt = 2\Phi(x) - \Phi(a) - \Phi(b) \text{ si } a < x < b \; ;$$

$$F'_d(a) = \Phi(a) - \Phi(b) = F'_g(a) \; ; \; F'_g(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = F'_d(b).$$

Finalement F est continûment dérivable sur R.

Remarque. F est en fait de classe C^2 sur $R \setminus \{a,b\}$, et même sur R lorsque $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

4.1.22 1° Soient I et J deux intervalles de R, a un point de I, $x \mapsto \varphi(x)$ une application dérivable de J dans I, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ une application continue de $I \times J$ dans R, telle que f'_x soit définie et continue sur $I \times J$.

Montrer que $F : x \mapsto \int_a^{\varphi(x)} f(t,x)dt$ est dérivable en tout $x \in J$.

2° Utiliser une dérivation pour exprimer sans symbole d'intégration :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{Log}(1+xt)}{1+t^2}\, dt$$

1° Il est aisé de vérifier que F est définie sur J. Donnons-nous $x_0 \in J$. Pour tout $h \neq 0$ tel que $x_0+h \in J$, nous pouvons écrire :

$$\big(F(x_0+h) - F(x_0)\big)/h = r_1(h) + r_2(h),$$

où : $$r_1(h) = \frac{1}{h}\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x_0+h)} f(t,x_0+h)dt \; ; \; r_2(h) = \int_a^{\varphi(x_0)} \frac{f(t,x_0+h) - f(t,x_0)}{h} dt.$$

— La formule de la moyenne nous apprend qu'il existe au moins un $\theta(h)$ compris entre $\varphi(x_0)$ et $\varphi(x_0+h)$ tel que :

$$r_1(h) = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} f\big(\theta(h), x_0+h\big).$$

Compte-tenu de la dérivabilité de φ et de la continuité de f on en déduit : $\lim\limits_{h\to 0} r_1(h) = \varphi'(x_0).f(\varphi(x_0),x_0)$.

L'étude de la dérivation de $x \mapsto \int_a^b f(t,x)dt$ montre :

$$\lim_{h\to 0} r_2(h) = \int_a^{\varphi(x_0)} f'_x(t,x_0)dt.$$

En conclusion, F est dérivable en tout point $x\in J$ et

$$F'(x) = \varphi'(x).f(\varphi(x),x) + \int_a^{\varphi(x)} f'_x(t,x)dt.$$

2° On constate que la fonction F considérée est définie sur R (en effet on a $1+xt \geqslant 1$ pour tout x et tout t compris entre 0 et x). En utilisant le 1° (avec $\varphi(x) = x$), on constate que F est dérivable sur R et on calcule :

$$F'(x) = \frac{\mathrm{Log}(1+x^2)}{1+x^2} + \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{t+x}{1+t^2} - \frac{x}{1+xt}\right)dt$$

D'où : $$F'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Log}(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{Arc\,tg}\,x$$

Comme visiblement $F(0) = 0$, on en déduit, sans nouveau calcul :

$$F(x) = 1/2.\mathrm{Arc\,tg}\,x.\mathrm{Log}(1+x^2).$$

★ $\boxed{4.1.23}$ On se propose de montrer, sans utiliser la théorie de l'intégrale de Riemann, que toute application continue d'un intervalle compact de R, $I = [a,b]$, $a<b$, dans R admet des primitives sur I.

On note A l'ensemble des applications continues et affines par morceaux de I dans R.

1° Soit $g\in A$. Montrer que g admet des primitives sur I.

2° Soit f une application continue de I dans R. Montrer que pour tout $\varepsilon\in R_+^*$ il existe $g\in A$ telle que :

$$\forall t\in I \quad |f(t)-g(t)| \leqslant \varepsilon$$

3° Soit f une application continue de I dans R.

a) Montrer qu'il existe une suite croissante $(g_n)_{n\in N}$ d'éléments de A qui converge uniformément vers f sur I.

b) On note G_n la primitive de g_n sur I qui prend la valeur 0 au point a (cf. 1°). Montrer que la suite $(G_n)_{n\in N}$ est croissante et converge sur I vers une fonction que l'on notera F.

c) Montrer que F est une primitive de f sur I.

1° Par définition, g est représentée dans R^2 par une ligne polygonale dont on désigne les sommets par (a_i,c_i), $i\in\{0,\dots,p\}$, avec $a_0=a$, $a_p=b$ et $a_i>a_{i-1}$ pour tout $i\in N_p$ $(N_p=\{1,\dots,p\})$.

Pour tout $i\in N_p$, la restriction φ_i de g à $[a_{i-1},a_i]$ s'écrit :

$$t\longmapsto \mu_i(t-a_{i-1})+c_{i-1} \quad ; \quad \mu_i=\frac{c_i-c_{i-1}}{a_i-a_{i-1}} \tag{1}$$

Par récurrence, nous pouvons associer à tout $i\in N_p$ la primitive Φ_i de φ_i sur $[a_{i-1},a_i]$ qui prend en a_{i-1} la valeur 0 si $i=1$, et la valeur $\Phi_{i-1}(a_{i-1})$ si $i>1$, à savoir :

$$t\longmapsto \frac{1}{2}\mu_1\,(t-a_0)^2+c_0(t-a_0) \quad ; \; i=1$$

$$t\longmapsto \frac{1}{2}\mu_i\,(t-a_{i-1})^2+c_{i-1}(t-a_{i-1})+\Phi_{i-1}(a_{i-1}) \quad ; \; i>1.$$

L'application $G : I\longrightarrow R$ dont la restriction à $[a_{i-1},a_i]$ est Φ_i pour tout $i\in N_p$ admet g(t) pour dérivée en tout $t\in I$: c'est trivial en tout point autre qu'un a_i, $i\in\{1,\dots,p-1\}$; en l'un de ces a_i, G admet une dérivée à droite $\varphi_{i+1}(a_i)=c_i$, une dérivée à gauche $\varphi_i(a_i)=\mu_i(a_i-a_{i-1})+c_{i-1}$ et ces dérivées sont égales d'après (1). Plus précisément, G est la primitive de g sur I qui prend la valeur 0 en a. □

2° La continuité de f sur l'intervalle compact I étant uniforme, à tout $\varepsilon\in R_+^*$ on peut associer $\eta\in R_+^*$ tel que :

$$\forall(t,t')\in I^2 \qquad (|t-t'|\leqslant\eta) \Rightarrow \big(|f(t)-f(t')|\leqslant\varepsilon/2\big) \tag{2}$$

Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ une subdivision de I dont le pas, $\max(a_i-a_{i-1})$ n'excède pas η.

Soit $g\in A$ représentée dans R^2 par la ligne polygonale dont les sommets consécutifs sont les $\big(a_i,f(a_i)\big)$, $0\leqslant i\leqslant p$. Pour tout $t\in I$, il existe $i\in N_p$ tel que $t\in[a_{i-1},a_i]$. En utilisant $f(a_i)=g(a_i)$, on a :

$$|f(t)-g(t)|\leqslant|f(t)-f(a_i)|+|g(a_i)-g(t)|$$

(2) fournit : $|f(t)-f(a_i)|\leqslant\varepsilon/2$. D'autre part :

$$|g(a_i)-g(t)|\leqslant|g(a_i)-g(a_{i-1})|=|f(a_i)-f(a_{i-1})|$$

et, d'après (2) : $\quad |g(a_i)-g(t)|\leqslant\varepsilon/2$.

En conclusion : $\quad \forall t\in I \quad |f(t)-g(t)|\leqslant\varepsilon$. □

3° a) D'après le 2°, à tout $n\in N$ on peut associer $h_n\in A$ vérifiant (avec un abus de notation évident) :

$$f-3^{-n}\leqslant h_n\leqslant f+3^{-n}$$

On dispose de $g_n \in A$ définie par : $g_n = h_n - 2.3^{-n}$.
On a : $f-3^{-n+1} \leqslant g_n \leqslant f-3^{-n}$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f - 3^{-n+1} \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant f \tag{3}$$

ce qui montre que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répond à la question.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $G_{n+1} - G_n$ de I dans $\mathbb{R}$ a pour dérivée $g_{n+1} - g_n \geqslant 0$ et prend la valeur 0 en a ; elle est donc positive. La suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi croissante.

Soit $t \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, compte tenu de $G_n(a) = 0$ la formule des accroissements finis dit qu'il existe $\theta_n \in [a,t]$ tel que :

$$G_n(t) = (t-a)g_n(\theta_n) \leqslant (t-a)f(\theta_n) \leqslant (t-a)K$$

où K désigne $\sup\limits_{x\in I} f(x)$.

Ainsi, pour tout $t \in I$, la suite $\big(G_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée ; elle admet donc une limite que l'on peut noter $F(t)$. □

c) Soit $x \in I$. Pour tout $t \in I \setminus \{x\}$, nous avons :

$$\frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{G_n(t) - G_n(x)}{t - x} \tag{4}$$

Notons $M(t)$ et $m(t)$ [resp. $M_n(t)$ et $m_n(t)$] les bornes de la fonction continue f [resp. g_n] sur l'intervalle compact d'extrêmités x et t. D'après (3) et l'inégalité des accroissements finis :

$$m(t) - 3^{-n+1} \leqslant m_n(t) \leqslant \frac{G_n(t) - G_n(x)}{t - x} \leqslant M_n(t) \leqslant M(t) \tag{5}$$

Pour t fixé, on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (5), et en tenant compte de (4) :

$$\forall t \in I \setminus \{x\} \quad m(t) \leqslant \frac{F(t) - F(x)}{t - x} \leqslant M(t)$$

En utilisant : $\lim\limits_{t\to x} m(t) = \lim\limits_{t\to x} M(t) = f(x)$, on en déduit que F admet $f(x)$ pour dérivée au point $x \in I$. □

4.2. CALCUL DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES

4.2.1 Calculer $\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n (t-\beta)^n dt$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons calculer $I_{p,q} = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^p (t-\beta)^q dt$, avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Nous obtenons par une intégration par parties :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad I_{p,q} = \frac{-p}{q+1} \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{p-1} (t-\beta)^{q+1} dt$$

(le terme "tout intégré" est nul grâce à $p \in \mathbb{N}^*$).

D'où, par une récurrence immédiate :

$$I_{p,q} = (-1)^p \frac{p!q!}{(p+q)!} I_{0,p+q}$$

Or $I_{0,p+q}$ se calcule facilement. Il vient :

$$I_{p,q} = (-1)^q \frac{p!q!}{(p+q+1)!} (\beta-\alpha)^{p+q+1}$$

et en particulier : $I_{n,n} = (-1)^n \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!} (\beta-\alpha)^{2n+1}$.

Remarque. Le lecteur constatera, à titre de vérification, que $I_{p,q}$ est bien du signe de $(-1)^q$ lorsque $\alpha < \beta$.

4.2.2 1° A tout $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p \geqslant 1$ on associe la fonction :

$$f_{p,q} : x \mapsto \int_0^x t^p (1-t)^q dt$$

Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in [0,1[\quad a f_{p,q}(x) + b f_{p-1,q-1}(x) = x^p (1-x)^q (cx-q) \qquad (1)$$

2° Exprimer sans symbole d'intégration :

$$I(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\frac{t^5}{(1-t)^{11}}} dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\frac{t}{(1-t)^{10}}} dt$$

1° Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, les fonctions $a f_{p,q} + b f_{p-1,q-1}$ et g, avec $g(x) = x^p (1-x)^q (cx-q)$ sont définies et dérivables au moins sur $[0,1[$. Elles prennent la même valeur au point 0. Il en résulte qu'elles coïncident sur $[0,1[$ si, et seulement si elles ont la même dérivée en tout point de $[0,1[$.

Après dérivation de $a\,f_{p,q} + b\,f_{p-1,q-1} - g$ et mise en facteur de $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, on constate que cette condition s'écrit : le polynôme

$$\big(a - c(1+p+q)\big)X(1-X) + q(c-p-q)X + b + pq$$

prend la valeur 0 en tout point de $]0,1[$, i.e. est le polynôme nul.

Comme $\big(1,X,X(1-X)\big)$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes dont le degré n'excède pas 2, cette condition s'écrit aussi :

$$(b = -pq) \wedge \big(q(c-p-q) = 0\big) \wedge \big(a = c(1+p+q)\big)$$

et encore :

— si $q = 0$: $\quad (b = 0) \wedge \big(a = c(1+p)\big)$

— si $q \neq 0$: $\quad (b = -pq) \wedge (c = p+q) \wedge \big(a = (p+q)(1+p+q)\big)$

2° Les fonctions I et J sont définies sur $]-\infty,1[$.

a) On a : $I = f_{p-1,q-1}$ avec $p = 8/3$ et $q = -8/3$. On constate que (1) s'applique avec $(a,b,c) = (0,64/9,0)$, et s'étend même à tout $x \in]-\infty,1[$. D'où ;

$$\forall x \in]-\infty,1[\quad I(x) = \frac{3}{8}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{8/3}.$$

b) On a : $J = f_{p-1,q-1}$ avec $p = 4/3$ et $q = -\frac{7}{3}$. Ici $(a,b,c) = (0,28/9,-1)$ et

$$\forall x \in]-\infty,1[\quad J(x) = 3/28.(-3x+7).x^{4/3}.(1-x)^{-7/3}.$$

$\boxed{4.2.3}$ Condition sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pour que les primitives de

$$f : t \longrightarrow \frac{(t-a)(t-b)}{(t-c)^2(t-d)^2}$$

soient des fonctions rationnelles.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{c,d\}$; les primitives de f sont définies sur tout intervalle ne contenant ni c ni d.

— On constate que la condition est remplie pour (a,b,c) quelconque et $d = c$.

— Supposons maintenant $c \neq d$. Il s'agit d'écrire qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{c,d\} \quad \frac{(t-a)(t-b)}{(t-c)^2(t-d)^2} = \frac{\alpha}{(t-c)^2} + \frac{\beta}{(t-d)^2} \tag{1}$$

(cf. décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples).

On constate que (1) équivaut à :

$$(\alpha+\beta = 1) \wedge \big(d\alpha + c\beta = (a+b)/2\big) \wedge (d^2\alpha + c^2\beta = ab). \tag{2}$$

En d'autres termes, il s'agit d'écrire que (2), considéré comme un système de trois équations affines à l'inconnue (α,β), est compatible. D'après $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ d & c \end{vmatrix} \neq 0$, ce système est de rang 2. Sa compatibilité se traduit par :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & c & (a+b)/2 \\ d^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & (a+b)/2 \\ d^2 & c+d & ab \end{vmatrix} = 0$$

— En conclusion la condition demandée est :

$$(d=c) \vee \big((a+b)(c+d) = 2(ab+cd)\big).$$

$\boxed{4.2.4}$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction déterminée par :

$F(t) = \mathrm{tg}(n\,\mathrm{Arc\,tg}\,t)$

Calculer les primitives de F sur tout intervalle où elle est continue.

Ecrivons $F = A/B$, avec $A = S/K$, $B = C/K$ et :

$$S(t) = \sin(n\,\mathrm{Arc\,tg}\,t) \quad ; \quad C(t) = \cos(n\,\mathrm{Arc\,tg}\,t) \quad ; \quad K(t) = \cos^n(\mathrm{Arc\,tg}\,t).$$

Nous constatons que K ne prend pas la valeur 0. Explicitons :

$$A(t) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant (n-1)/2} (-1)^k C_n^{2k+1} t^{2k+1}$$

et : $$B(t) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} (-1)^k C_n^{2k} t^{2k}.$$

A et B sont des fonctions polynômes, et F une fonction rationnelle dont les pôles, tous réels et simples, sont les zéros de C, c'est-à-dire les $t_k = \mathrm{tg}\,\theta_k$, avec $\theta_k = (1+2k)\pi/2n$, l'entier k décrivant $[-p,p-1]$, et ceci que $n = 2p$ ou que $n = 2p+1$. En notant E la partie entière de F, on a la décomposition en éléments simples :

$$F(t) = E(t) + \sum_{k=-p}^{p-1} \frac{a_k}{t-t_k}$$

En distinguant deux cas suivant la parité de n, on constate que E est nulle si $n = 2p$, et que $E(t) = t/n$ si $n = 2p+1$.

On sait d'autre part (cf. cours) que $a_k = A(t_k)/B'(t_k)$. Compte tenu de $C(t_k) = 0$, on en déduit $a_k = S(t_k)/C'(t_k)$, et donc :

$$a_k = -\frac{1+t_k^2}{n} = -\frac{1}{n\cos^2\theta_k}$$

F admet des primitives sur tout intervalle qui ne contient aucun des t_k ; ces primitives se calculent sans difficulté.

$\boxed{4.2.5}$ THEOREME DES RÉSIDUS. 1° Pour $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ donné, trouver toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto 1/(t-a)$. Comparer avec les solutions de $e^z = t-a$ ($z \in \mathbb{C}$).

2° Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle sans pôle réel, de degré $\leqslant -2$. Pour tout pôle a, on note $\operatorname{Res}_F(a)$ le résidu de F en a (coefficient de $1/X-a$ dans la décomposition en éléments simples).

a) Vérifier que $\sum \operatorname{Res}_F(a) = 0$.

b) Montrer : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt = 2i\pi \sum_{a \in P_+} \operatorname{Res}_F(a)$ (1)

où P_+ est l'ensemble des pôles de F dont la partie imaginaire est strictement positive.

1° En écrivant $a = \alpha + i\beta$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\beta \neq 0$ et $\frac{1}{t-a} = \frac{(t-\alpha)+i\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2}$, on constate que $t \mapsto 1/(t-a)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et y admet les primitives $\varphi_C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ données par :

$$\varphi_C(t) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left((t-\alpha)^2+\beta^2\right) + i \operatorname{Arc\,tg}\left((t-\alpha)/\beta\right) + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

On a : $\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left((t-\alpha)^2+\beta^2\right) = \operatorname{Log}|t-a|$.

D'autre part t-a admet un unique argument appartenant à $]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$ (et même à $]-\pi,0[$ si $\beta > 0$, et à $]0,\pi[$ si $\beta < 0$) ; en notant $\theta(t)$ cet argument, on constate :

$$\operatorname{Arc\,tg}\left((t-\alpha)/\beta\right) = \theta(t) + \varepsilon\,\pi/2, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}\beta,$$

ce qui montre que θ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que des primitives de $t \mapsto 1/(t-a)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $L_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ données par :

$$L_m(t) = \operatorname{Log}|t-a| + i\,\theta(t) + 2im\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

On constate que, pour $t \in \mathbb{R}$ donné, les $L_m(t)$ sont les racines de $e^z = t-a$.

2° Notons a_p, $p \in \mathbb{N}_n = \{1,\dots,n\}$, les pôles de F, et k_p l'ordre de a_p. On a la décomposition en éléments simples :

$$F = \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k_p} \frac{\gamma_{p,j}}{(X-a_p)^j}\right)$$

et les résidus sont les $\gamma_{p,1}$, $p \in \mathbb{N}_n$.

a) En constatant que $\deg F \leqslant -2$ et que la partie entière de la fraction rationnelle $XF(X)$ est nulle, on obtient : $\sum_{p=1}^{n} \gamma_{p,1} = 0$. □

b) Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admettant des limites en $+\infty$ et $-\infty$, la notation $[g(t)]_{-\infty}^{+\infty}$ désigne par convention : $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) - \lim\limits_{t\to-\infty} g(t)$. On constate que, pour tous $p \in \mathbb{N}_n$ et $j \geq 2$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-a_p)^j} = \frac{1}{1-j}\left[\frac{1}{(t-a_j)^{j-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

L'existence de l'intégrale de $t \mapsto F(t)$ sur $]-\infty,+\infty[$ étant assurée par $\deg F \leq -2$, cette intégrale, qui est notée I, s'écrit :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{\gamma_{p,1}}{t-a_p}\right)dt$$

(il n'est évidemment pas question de scinder en n intégrales !).

En utilisant le 1°, avec ici $a_p = \alpha_p + i\,\beta_p$, on obtient :

$$\mathcal{R}e(I) = \left[\left(\sum_{p=1}^{n}\gamma_{p,1}\right)\mathrm{Log}|t| + \sum_{p=1}^{n}\gamma_{p,1}\,\mathrm{Log}\left|1 - \frac{a_p}{t}\right|\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\mathrm{Im}(I) = \sum_{p=1}^{n}\left[\gamma_{p,1}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{t-\alpha_p}{\beta_p}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi\sum_{p=1}^{n}\left(\gamma_{p,1}.\mathrm{sgn}(\beta_p)\right)$$

Compte tenu de a) : $\mathcal{R}e(I) = 0$. D'où :

$$I = i\pi\left(\sum_{p\in J}\gamma_{p,1} - \sum_{p\in K}\gamma_{p,1}\right)$$

où J (resp. K) est la partie de $\mathbb{N}_n$ formée des p tels que $\beta_p > 0$ (resp. $\beta_p < 0$).
En tenant compte de a) : $\sum_{p\in K}\gamma_{p,1} = -\sum_{p\in J}\gamma_{p,1}$. D'où (1). □

★ **4.2.6** 1° Comme application de l'exercice précédent, calculer :

$$A_{n,m} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2m}}{t^{2n}+1}\,dt, \quad B_{n,m} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(t^{2n}+1)^2}\,dt, \quad (n,m) \in \mathbb{N}^2.$$

2° La résolution de cette question utilise l'étude des suites de fonctions.
Montrer que, pour tout réel $x \in]0,1[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt = \frac{\pi}{\sin(x\pi)}$$

(On commencera par vérifier l'égalité pour $x \in \mathbb{Q}$, convenablement choisi).

1° a) Pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $A_{n,m}$ existe si, et seulement si

$$(m \geq 0) \wedge (2n \geq 2m+2), \text{ i.e. } 0 \leq m < n. \qquad (1)$$

Nous supposons que cette condition est remplie.

Nous allons calculer $2A_{n,m}$, intégrale sur $]-\infty,+\infty[$ de la fonction associée à $F = X^{2m}/(X^{2n}+1)$, fraction rationnelle de degré inférieur à -2, sans pôle réel.

Les pôles à partie imaginaire strictement positive, tous simples, sont les

$$a_p = \omega^{2p-1}, \text{ où } \omega = \exp(i\pi/2n) \text{ et } p \in \mathbb{N}_n.$$

D'après le cours, le résidu au pôle simple a_p de la fraction $F = P/Q$ est $\gamma_p = P(a_p)/Q'(a_p)$. Ici, comme $a_p^{2n} = -1$:

$$2n\gamma_p = a_p^{2m}/a_p^{2n-1} = -a_p^{2m+1} = -\Omega^{2p-1}, \quad \Omega = \omega^{2m+1}.$$

D'où : $\quad 2A_{n,m} = 2i\pi \sum_{p=1}^{n} \gamma_p = -\frac{i\pi}{n} \sum_{p=1}^{n} \Omega^{2p-1},$

et (suite géométrique), compte tenu de $\Omega^{2n} = -1$:

$$A_{n,m} = -\frac{i\pi}{2n}\,\frac{-2\Omega}{\Omega^2-1} = \frac{i\pi}{n}\,\frac{1}{\Omega-\Omega^{-1}}$$

et : $\quad A_{n,m} = \dfrac{\pi/2n}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$

b) Pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $B_{n,m}$ existe si, et seulement si :

$$(m \geqslant 0) \wedge (4n \geqslant 2m+2), \text{ i.e. } 0 \leqslant m < 2n \tag{2}$$

— Si $m<n$, ce qui garantit l'existence des intégrales en jeu, on constate par une intégration par parties que :

$$A_{n,m} = \frac{2n}{2m+1} B_{n,m+n}.$$

Or : $\quad B_{n,m+n} + B_{n,m} = A_{n,m}$.

D'où : $\quad B_{n,m} = \left(1 - \dfrac{2m+1}{2n}\right) A_{n,m}, \quad 0 \leqslant m < n. \qquad (3)$

— Reste à étudier le cas où : $1 \leqslant n \leqslant m < 2n$.

En utilisant (3), on constate que, toutes les intégrales en jeu existant :

$$B_{n,m} = A_{n,m-n} - B_{n,m-n}$$

D'où : $\quad B_{n,m} = \left(\dfrac{2m+1}{2n} - 1\right) A_{n,m-n}, \quad 1 \leqslant n \leqslant m < 2n. \qquad (4)$

De (3) et (4) on déduit que, sous la seule hypothèse $0 \leqslant m < 2n$:

$$B_{n,m} = \left(1 - \frac{2m+1}{2n}\right) \frac{\pi/2n}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$$

2° Commençons par étudier la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t+1} dt$, dont l'ensemble de définition est visiblement $]0,1[$. Ecrivons $\varphi = f+g$, où $f(x)$ et $g(x)$, $x \in]0,1[$, sont respectivement les intégrales de $t \mapsto t^{x-1}/(t+1)$ sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$; f et g sont les limites des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'applications continues sur $[0,1]$ telles que :

$$f_n(x) = \int_{1/n}^{1} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt \quad ; \quad g_n(x) = \int_{1}^{n} \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt .$$

Soit $[a,b]\subset]0,1[$. Nous constatons :

$$\forall (t,x)\in]0,1]\times[a,b] \qquad 0\leqslant t^{x-1}\leqslant t^{a-1}$$

$$\forall (t,x)\in [1,+\infty[\times[a,b] \qquad 0\leqslant t^{x-1}\leqslant t^{b-1}$$

D'où, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, et tout $x\in[a,b]$:

$$0\leqslant f(x) - f_n(x)\leqslant \int_0^{1/n} \frac{t^{a-1}}{t+1}\,dt$$

et : $$0\leqslant g(x) - g_n(x)\leqslant \int_n^{+\infty} \frac{t^{b-1}}{t+1}\,dt .$$

On en déduit que la convergence de (f_n) vers f, et celle de (g_n) vers g sont uniformes sur $[a,b]$. Il en résulte que f et g sont continues sur tout $[a,b]\subset]0,1[$ et donc sur $]0,1[$, ce qui entraîne la continuité de φ sur $]0,1[$.

• Pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ tel que $0\leqslant m<n$, le changement de variable $t=u^{1/2n}$ dans l'intégrale $A_{n,m}$ fournit :

$$\varphi\left(\frac{2m+1}{2n}\right) = 2n\,A_{n,m} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\,\pi\right)}$$

Il en résulte que la fonction $\psi : x\longmapsto\varphi(x) - \pi/\sin(\pi x)$, qui est continue sur $]0,1[$, coïncide avec la fonction nulle sur :

$$E=\left\{\frac{2m+1}{2n}\ \middle|\ (m,n)\in\mathbb{N}^2 \text{ et } 0\leqslant m<n\right\}$$

qui est visiblement une partie de $]0,1[$.

Cette partie est dense. En effet, pour tous $\xi\in]0,1[$ et $N\in\mathbb{N}^\star$, il existe $(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}$ tel que $1\leqslant p<q$ et $|\xi-p/q|<1/N$ (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$), et on constate que $r=(2Np+1)(2Nq)$ appartient à E et vérifie $|\xi-r|<2/N$.

• Continue et nulle sur une partie dense de $]0,1[$, $\psi :]0,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ est nulle $\left(\psi^{-1}(0)\text{ est fermé et contient } E\right)$. □

$\boxed{4.2.7}$ Calculer les primitives de $f : t \longrightarrow \dfrac{1}{(t-1)\sqrt{t^2-5t+6}}$

Le changement de variable $u=1/(t-1)$ fournit les primitives de f sur chacun des intervalles sur lesquels cette fonction est continue, à savoir : $I=]-\infty,1[$, $J=]1,2[$ et $K=]3,+\infty[$, sous la forme :

$$F(t)+C=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{(4u-3)^2-1}}\,d(4u-3)$$

avec $\varepsilon=1$ sur I, $\varepsilon=-1$ sur J et sur K. Sur chacun des intervalles, il existe donc une primitive de la forme :

$$F(t)=\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\sqrt{2}}\operatorname{Arg\,ch}\left(\varepsilon'(4u-3)\right)=\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\operatorname{Arg\,ch}\left(\varepsilon'\ \frac{-3t+7}{t-1}\right)$$

avec $\varepsilon'=1$ si $4u-3>1$, i.e. $t\in J$, et $\varepsilon'=-1$ si $4u-3<-1$, i.e. $t\in I$ ou $t\in K$.

A partir de l'expression valable sur chacun des trois intervalles :

$$F(t)=\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\frac{-\varepsilon'(3t-7)-\varepsilon\,2\sqrt{2}\sqrt{t^2-5t+6}}{t-1}$$

on introduit : $\quad \varphi(t)=\dfrac{(3t-7)+2\sqrt{2}\ \sqrt{t^2-5t+6}}{t-1}$

et on constate : $\quad \dfrac{(3t-7)-2\sqrt{2}\ \sqrt{t^2-5t+6}}{t-1}=1/\varphi(t)$.

D'où : $\quad F(t)=1/\sqrt{2}.\operatorname{Log}\left(\varphi(t)\right)$ sur I et sur K ;

$\quad F(t)=1/\sqrt{2}.\operatorname{Log}\left(-\varphi(t)\right)$ sur J.

Sur chacun des intervalles, toutes les primitives de f sont données par :

$$t\mapsto 1/\sqrt{2}.\operatorname{Log}|\varphi(t)|+C.$$

4.2.8 Calculer les primitives de $f : t\mapsto t^2/(\cos t+t\sin t)^2$

Les points de discontinuité de f sont les zéros de la fonction paire $\varphi : t\rightarrow \cos t+t\sin t$.

On constate que les zéros de $\varphi' : t\mapsto t\cos t$ sont 0 et les $\pi/2+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. En utilisant $\varphi(n\pi)=(-1)^n$, on constate que φ admet un zéro unique α_n sur chaque intervalle $[n\pi, n\pi+\pi]$, $n\in\mathbb{Z}$, avec, pour $n\geqslant 0$:

$$\alpha_n\in\,]n\pi+\pi/2, n\pi+\pi[,\ \text{ et }\ \alpha_{-n}=-\alpha_{n-1}$$

Soit $k\in\mathbb{Z}$. La fonction f admet des primitives sur $I_k=]\alpha_{k-1},\alpha_k[$. Pour les obtenir on peut penser à une intégration par parties avec :

$$u(t)=t/\cos t\ ;\ v(t)=-1/(\cos t+t\sin t)$$

mais, à cause de u, on ne peut travailler que sur un sous-intervalle I de I_k qui ne contient aucun zéro de cos (tout I_k contient un tel zéro zi $k\neq 0$, et deux si $k=0$). On dispose ainsi de la primitive de f sur I :

$$G : t\mapsto u(t)v(t)+\operatorname{tg} t=\frac{\cos t(\sin t-t\cos t)}{\cos t(\cos t+t\sin t)}$$

et donc de la primitive :

$$F : t \longmapsto \frac{\sin t - t\cos t}{\cos t + t\sin t}$$

Il est aisé de vérifier que F est une primitive de f non seulement sur I, mais sur I_k tout entier.

$\boxed{4.2.9}$ Exprimer sans symbole d'intégration : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2+\cos t}dt$, $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $f : t \longrightarrow 2 + \cos t$ est continue sur $\mathbb{R}$; F est celle des primitives de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 au point 0 ; F est impaire.

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la restriction de F à $I_m =](2m-1)\pi, (2m+1)\pi[$ est fournie par le changement de variable $t = 2\,\text{Arc tg}\, u + 2m\pi = \varphi_m(u)$; φ_m est en effet un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur I_m.

On a : $(F \circ \varphi_m)'(u) = 2/(u^2+3)$, et, comme $(F \circ \varphi_m)(0) = F(2m\pi)$:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad (F \circ \varphi_m)(u) = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arc tg}\, u + F(2m\pi)$$

et : $$\forall x \in I_m \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arc tg}\left(\text{tg}\,\frac{x}{2}\right) + F(2m\pi) \qquad (1)$$

Mais F est également définie aux points $(2m+1)\pi$. Il reste donc à trouver les $F(2m\pi)$ et les $F\left((2m+1)\pi\right)$, $m \in \mathbb{Z}$.

En faisant tendre $x \in I_m$ vers $(2m+1)\pi$ [resp. $(2m-1)\pi$], et en utilisant la continuité de F, on déduit de (1) :

$$F\left((2m+1)\pi\right) = F(2m\pi) + \pi/\sqrt{3} \ ; \ F\left((2m-1)\pi\right) = F(2m\pi) - \pi/\sqrt{3}$$

D'où : $$F(2m\pi) = F\left(2(m-1)\pi\right) + 2\pi/\sqrt{3}$$

et, par récurrence à partir de $F(0) = 0$: $F(2m\pi) = 2m\pi/\sqrt{3}$.

En conclusion, F est définie par :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in I_m, \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arc tg}\left(\text{tg}\,\frac{x}{2}\right) + 2m\pi/\sqrt{3}$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad F\left((2m+1)\pi\right) = (2m+1)\pi/\sqrt{3}$$

Remarques. a) Nous aurions pu remarquer que F est impaire et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x+\pi) = K, \text{ où } K = \int_0^\pi f(t)dt$$

ce qui aurait ramené à l'étude de F sur $[0,\pi]$.

b) Le changement de variable $u = \text{tg}(t/2)$, risquait de nous conduire à

$$\int \frac{2}{u^2+3}du = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arc tg}\,\frac{u}{2} + C \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arc tg}\left(\text{tg}\,\frac{x}{2}\right) + F(0)$$

qui est faux. Se souvenir de ce qu'un changement de variable dans $\int f(t)dt$ est toujours de la forme $t = \varphi(u)$ (et non $u = \psi(t)$).

$\boxed{4.2.10}$ Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\pi/4} \mathrm{Log}(1+\mathrm{tg}\, t)dt$.

Pour $t \in [0,\pi/4]$, on a = $1 + \mathrm{tg}\, t = \sqrt{2}\, \sin(t+\pi/4)/\cos t$, et :

$$I = \pi/8.\mathrm{Log}\, 2 + J - K$$

où : $\quad J = \int_0^{\pi/4} \mathrm{Log}\big(\sin(t+\pi/4)\big)dt,\ K = \int_0^{\pi/4} \mathrm{Log}(\cos t)dt$

Le changement de variable $t = \pi/4 - u$ donne $K = J$. D'où $I = \pi/8.\mathrm{Log}\, 2$.

$\boxed{4.2.11}$ Primitives de $f : t \longmapsto 2^{-t}.\mathrm{th}(2^{1-t})$

La fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, y admet des primitives. On calcule

$$F(t) = \int 2^{-t}.\mathrm{th}(2^{1-t})dt$$

par le changement de variable : $x = 2^{1-t}$ $\left(\text{i.e. : } t = 1 - \frac{\mathrm{Log}\, x}{\mathrm{Log}\, 2}\right)$.

On a : $\quad dx = -2^{1-t}.\mathrm{Log}\, 2\, .dt$

et : $\quad F(t) = -\frac{1}{2\,\mathrm{Log}\, 2} \int \mathrm{th}\, x\, dx = -\frac{1}{2\,\mathrm{Log}\, 2}\, \mathrm{Log}(\mathrm{ch}\, x) + k$

En conclusion les primitives de f sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$$F_k : t \longmapsto -\frac{1}{2\,\mathrm{Log}\, 2}\, \mathrm{Log}(\mathrm{ch}\, 2^{1-t}) + k$$

$\boxed{4.2.12}$ Existence et calcul de l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{0} f(t)dt, \quad \text{où} \quad f(t) = \frac{(3t^2-1)\mathrm{Arc}\sin\frac{t+1}{t-1}}{\sqrt{t(t^2-1)}}$$

— On constate que quand t croît de -1 à 0, $\mathrm{Arc}\sin\frac{t+1}{t-1}$ décroît de 0 à $-\pi/2$. On en déduit que f est continue (donc localement intégrable) sur $]-1,0[$.

— Au voisinage de 0 (et pour $t<0$) : $f(t) \sim \pi/(2\sqrt{-t})$

D'autre part : $\quad \lim\limits_{t\to 1,\, t>-1} f(t) = 0$.

D'où l'existence de I.

— Une intégration par parties, avec :

$$u = 2\,\mathrm{Arc}\sin\frac{t+1}{t-1}\ , \quad v = \sqrt{t(t^2-1)}$$

(de classe C^1 sur $]-1,0[$) conduit à :

$$\int_{-1+\alpha}^{-\beta} f(t)dt = \left[2 \,\text{Arc sin}\, \frac{t+1}{t-1} \cdot \sqrt{t(t^2-1)}\right]_{-1+\alpha}^{-\beta} + 2\int_{-1+\alpha}^{-\beta} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\, dt$$

pour tout $(\alpha,\beta) \in (]0,1[)^2$.

Le terme "tout intégré" admettant la limite 0 lorsque $(\alpha,\beta) \to (0,0)$ et l'intégrale I étant convergente, on en déduit la convergence de :

$$J = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\, dt \quad \text{et :} \quad I = J.$$

Pour le calcul de J, effectuons le changement de variable $t = -\cos\varphi$, avec $\varphi \in [0,\pi/2]$. Il vient :

$$J = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\varphi/2}{\cos\varphi/2} \cdot \sin\varphi d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} (1-\cos\varphi)d\varphi = \pi - 2.$$

4.3. INTÉGRALES IMPROPRES

$\boxed{4.3.1}$ Soit $f : R_+ \to R$ une application uniformément continue, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)$ converge. Vérifier : $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

— Soit $\varepsilon \in R_+^*$. D'après la continuité uniforme de f, on peut lui associer $\alpha \in R_+^*$ tel que :

$$\forall (x,y) \in R_+^2 \quad (|x-y| \leqslant \alpha) \Rightarrow (|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon/2) \qquad (1)$$

La convergence de l'intégrale fournit (critère de Cauchy) :

$$\exists A \in R_+ \quad \forall x \geqslant A \quad \left|\int_x^{x+\alpha} f(t)dt\right| \leqslant \varepsilon\alpha/2$$

et, f étant continue, pour tout $x \geqslant A$, il existe $\xi \in [x,x+\alpha]$ tel que :

$$f(\xi) = \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f(t)dt, \text{ et donc } |f(\xi)| \leqslant \varepsilon/2.$$

On en déduit, en utilisant $|\xi-x| \leqslant \alpha$ et (1), que :

$$|f(x)| \leqslant |f(x)-f(\xi)| + |f(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

— En conclusion :

$$\forall \varepsilon \in R_+^* \quad \exists A \in R_+ \quad \forall x \geqslant A \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

> **4.3.2** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, de classe C^2.
>
> 1° On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} f''(t)dt$ convergent.
>
> Montrer : $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f'(t) = 0$.
>
> Montrer que $\int_0^{+\infty} f'(t)dt$ converge.
>
> 2° On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} |f''(t)|dt$ convergent.
>
> Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f(t)\cos nt\, dt$ converge.
>
> Ce résultat est-il vrai avec les hypothèses de 1° ?

1° f, f' et f'' sont des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$; elles sont donc localement intégrables et, en outre, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$(1) \quad f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt \quad ; \quad f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)dt \quad (2)$$

— Puisque $\int_0^{+\infty} f''(t)dt$ converge, par (2) on dispose de :

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell \, , \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

— Comme $f' : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$, elle est bornée. Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que f est lipschitzienne, et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge (cf. exercice 4.3.1), on conclut :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0. \qquad \square$$

— Par (1) on dispose alors de la convergence $\int_0^{+\infty} f'(t)dt$ et comme on sait l'existence de $\ell = \lim_{t\to+\infty} f'(t)$, nécessairement $\ell = 0$. $\square$

2° Pour $n = 0$, le résultat est évident. Supposons donc $n \geq 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Comme f est C^2, $\int_0^x f(t)\cos nt\, dt$ s'écrit, par deux intégrations par parties :

$$\frac{f(x)\sin nx}{n} + \frac{f'(x)\cos nx}{n^2} - \frac{f'(0)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\int_0^x f''(t)\cos nt\, dt.$$

La convergence de $\int_0^{+\infty} |f''(t)|dt$ entraînant celle de $\int_0^{+\infty} f''(t)dt$, les hypothèses du 1° sont remplies et : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

D'où :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f'(x)\sin nx}{n} + \frac{f'(x)\cos nx}{n^2}\right) = 0.$$

De $|f''(t)\cos nt| \leqslant |f''(t)|$ pour tout $t \in R_+$, on déduit la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} f''(t)\cos nt\,dt$, et l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\cos nt\,dt$. □

— En prenant $f(t) = \frac{\cos t}{1+t}$, le lecteur vérifiera que $\int_0^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ diverge alors que les hypothèses du 1° sont vérifiées.

4.3.3 Soit $f : R_+ \to R$ de classe C^2. On suppose que les intégrales $\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} f''^2(t)dt$ sont convergentes. Montrer que $\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt$ converge.

La fonction f étant de classe C^2, on peut écrire, en intégrant par parties :

$$\forall x \in R_+ \qquad \int_0^x f'^2(t)dt = \Big[f(t)f'(t)\Big]_0^x - \int_0^x f(t)f''(t)dt \qquad (1)$$

Or :

$$\forall t \in R_+ \qquad |f(t)f''(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2(t) + f''^2(t)\right)$$

Il en résulte que $\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)dt$ est absolument convergente, et donc convergente.

D'autre part ff' étant la dérivée continue de $\frac{1}{2}f^2$, nous pouvons écrire :

$$\forall x \in R_+ \qquad f^2(x) = f^2(0) + 2\int_0^x f(t)f'(t)dt \qquad (2)$$

Mais, d'après (1) et la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)dt$, si $\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt$ était divergente, nous aurions $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$, et donc, d'après (2) :

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty,$$

ce qui contredirait la convergence de $\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$. □

4.3.4 Soit f une application de classe C^1 de R_+ dans R telle que $f(0) = 0$ et que l'intégrale de $\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt$ converge.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}dt$ converge.

a) On dispose de l'application $\varphi : t \mapsto f(t)/t$ de classe C^1 de R_+^* dans R. Comme $f(0) = 0$, il existe $\lim\limits_{t\to 0,\, t>0} \varphi(t) = f'(0)$; φ^2 est donc une application de classe C^1 de R_+^* dans R_+ qui est prolongeable par continuité en 0, ce qui assure que l'application ainsi prolongée, qui est notée ψ, est localement intégrable sur R_+.

b) Pour montrer que $\int_0^{+\infty}\psi(t)$ converge, où ψ est positive, il suffit de montrer que $X \mapsto \int_0^X \psi(t)dt$ est majorée sur R_+.

Soit $X>0$ donné. Pour tout $\varepsilon \in]0,X[$, ψ est sur $[\varepsilon,X]$ le produit des fonctions f^2 et $t \mapsto 1/t^2$ de classe C^1, ce qui justifie l'intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^X \psi(t)dt = \frac{f^2(\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{f^2(X)}{X} + 2\int_\varepsilon^X \frac{f(t)f'(t)}{t}dt.$$

D'où :

$$\int_\varepsilon^X \psi(t)dt \leqslant \frac{f^2(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2\int_\varepsilon^X \varphi(t)f'(t)dt \tag{1}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, on déduit de (1) :

$$\int_\varepsilon^X \psi(t)dt \leqslant \frac{f^2(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2I(X,\varepsilon) \tag{2}$$

où :

$$I(X,\varepsilon) = \left(\int_\varepsilon^X \psi(t)dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_\varepsilon^X f'^2(t)dt\right)^{1/2}$$

On a : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} f(\varepsilon) = 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = f'(0)$. D'autre part toutes les fonctions envisagées sont localement intégrables sur R_+. Un passage à la limite dans (2) est légitime ; il donne :

$$\int_0^X \psi(t)dt \leqslant 2\left(\int_0^X \psi(t)dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^X f'^2(t)dt\right)^{1/2}$$

D'où, pour tout $X>0$, la majoration (triviale si $\int_0^X \psi(t)dt = 0$) :

$$\int_0^X \psi(t)dt \leqslant 4\int_0^X f'^2(t)dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt.$$

La proposition en résulte, et on a même l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt.$$

$\boxed{4.3.4'}$ Soient a un réel strictement positif, et $f : R \to R$ une application continue et α-périodique, $\alpha>0$. Existe-t-il un réel λ tel que l'intégrale

$$I_\lambda = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$$

soit convergente ?

a) Le problème a au maximum une solution, car si I_λ et $I_{\lambda'}$ convergeaint, avec $\lambda \neq \lambda'$, alors $\int_a^{+\infty} \frac{\lambda-\lambda'}{t}dt$ convergerait, ce qui est impossible.

b) A tout $\lambda \in R$, associons l'application $g_\lambda : R \to R$, de classe C^1, telle que :

$$g_\lambda(x) = \int_a^x \big(\lambda - f(t)\big)dt$$

Une intégration par parties donne, pour tout $x \geqslant a$:

$$\int_a^x \frac{\lambda - f(t)}{t}\,dt = \frac{g_\lambda(x)}{x} + \int_a^x \frac{g_\lambda(t)}{t^2}\,dt$$

ce qui montre que, pour que I_λ existe, il suffit que g_λ soit bornée.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_\lambda(a+n\alpha)$ s'écrit :

$$n\lambda\alpha - \int_a^{a+n\alpha} f(t)dt = n\left(\lambda\alpha - \int_0^\alpha f(t)dt\right)$$

et g_λ n'est pas bornée si $\lambda \neq \lambda_0$, où λ_0 désigne $\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)dt$.

On vérifie qu'en revanche g_{λ_0} est α-périodique, et donc bornée.

c) Compte tenu de a) et de b), λ_0 est l'unique valeur de λ pour laquelle l'intégrale I_λ converge.

4.3.5 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue.

1) On suppose ici que l'intégrale impropre $I = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

a) Prouver l'existence, pour tout $x \geqslant 0$, de $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)dt$.

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0,\, x\geqslant 0} I(x) = I$.

2) En déduire que, s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} e^{-tx_0} f(t)dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)dt$ converge pour $x \geqslant x_0$.

3) On suppose ici qu'au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$.

a) Montrer l'existence, pour tout $x > 0$, de $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)dt$.

b) On suppose en outre l'existence de $I = \lim\limits_{x\to 0,\, x>0} I(x)$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

c) Que pensez-vous si l'hypothèse $f(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ n'est pas réalisée ?

1° a) La convergence de I fait qu'il existe une unique primitive F de f sur $\mathbb{R}_+$ qui admette 0 pour limite en $+\infty$. Elle est de classe C^1, et donnée par : $u \mapsto -\int_u^{+\infty} f(t)dt$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall u \geqslant A \quad |F(u)| \leqslant \varepsilon$.

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+$ et $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $A \leqslant \alpha < \beta$, nous avons, par une intégration par parties :

$$\int_\alpha^\beta e^{-tx} f(t)dt = \Big[e^{-tx}F(t)\Big]_\alpha^\beta + x\int_\alpha^\beta e^{-tx} F(t)dt.$$

On a : $\left[e^{-tx}F(t)\right]_{\alpha}^{\beta} \leqslant |F(\beta)| + |F(\alpha)| \leqslant 2\varepsilon.$

En outre, en majorant $|e^{-tx}F(t)|$ par εe^{-tx} pour $t \in [\alpha,\beta]$:

$$\left|x\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx}F(t)dt\right| \leqslant \varepsilon x\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx}dt \leqslant \varepsilon.$$

Au total :

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx}f(t)dt\right| \leqslant 3\varepsilon. \tag{1}$$

Ainsi $t \longmapsto e^{-tx} f(t)$ qui est localement intégrable sur R_+, vérifie pour tout $x \in R_+$ le critère de Cauchy d'existence des intégrales impropres. D'où l'existence de $I(x)$ pour tout $x \in R_+$.

b) Pour tout $x \in R_+$, $I(x) - I = \int_0^{+\infty} (e^{-tx}-1)f(t)dt$ s'écrit, avec les notations du 1° a) :

$$\int_0^A (e^{-tx}-1)f(t)dt + \int_A^{+\infty} e^{-tx}f(t)dt - \int_A^{+\infty} f(t)dt.$$

— D'après le choix de A : $\left|\int_A^{+\infty} f(t)dt\right| \leqslant \varepsilon.$

— En faisant $\alpha = A$ dans (1), et en faisant tendre β vers $+\infty$:

$$\forall x \in R_+ \qquad \left|\int_A^{+\infty} e^{-tx}f(t)dt\right| \leqslant 3\varepsilon$$

— En désignant par M un majorant de $|f|$ sur le compact $[0,A]$:

$$\left|\int_0^A (e^{-tx}-1)f(t)dt\right| \leqslant M.A.(1-e^{-Ax})$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0}(1-e^{-Ax}) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,\eta] \quad M.A.(1-e^{-Ax}) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi : $\forall x \in [0,\eta] \quad |I(x)-I| \leqslant 5\varepsilon.$ □

Remarque. Le lecteur ayant étudié les intégrales impropres dépendant d'un paramètre pourra même constater que le critère de Cauchy uniforme est vérifié sur R_+ (cf. notre IV.2.3.1, 2°) : l'intégrale $I(x)$ converge uniformément sur R_+, et l'application $x \longmapsto I(x)$ est continue sur R_+.

2° Supposons qu'il existe $x_0 \in R$ tel que $\int_0^{+\infty} e^{-tx_0}f(t)dt$ converge, et considérons l'application $g : t \longmapsto e^{-tx_0}f(t)$ de R_+ dans R ; g est continue et $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge; d'après 1° a), $\int_0^{+\infty} e^{-ty}g(t)$ converge pour tout $y \geqslant 0$, et donc $\int_0^{+\infty} e^{-tx}f(t)dt$ converge pour tout $x \geqslant x_0$. □

3° a) Pour cette question 3° a), il suffit de supposer que f est bornée sur R_+, ce qui est le cas lorsque $f(t) = o(1/t)$ au voisinage de $+\infty$.

Notons M un majorant de $|f|$ sur R_+.

Soit $x>0$ (ici strictement). L'application $t \mapsto e^{-tx}f(t)$ est continue, et donc localement intégrable sur R_+ ; on dispose de la majoration :

$$\forall t \in R_+ \quad |e^{-tx}f(t)| \leqslant M\, e^{-tx}$$

La convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt$ entraîne l'absolue convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-tx}f(t)dt$.

b) Soit $\varepsilon>0$ donné. D'après $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,f(t) = 0$, on peut fixer $A \in R_+$ tel que :

$$\forall t \geqslant A \quad |t\,f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, il existe $\eta>0$ tel que :

$$\forall x \in]0,\eta] \quad |I(x)-I| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $X \geqslant \max(A,1/\eta)$, écrivons $\int_0^X f(t)dt - I$ sous la forme :

$$I(1/X) - I + u(X) + v(X) + w(X)$$

avec : $u(X) = \int_0^A (1-e^{-t/X})f(t)dt,$

$$v(X) = \int_A^X (1-e^{-t/X})f(t)dt \quad ; \quad w(X) = \int_X^{+\infty} -e^{-t/X}f(t)dt$$

— On a : $|I(1/X)-I| \leqslant \varepsilon.$

— En utilisant $1-e^{-\theta} \leqslant \theta$ pour tout $\theta \geqslant 0$, on obtient :

$$|v(X)| \leqslant \varepsilon \int_A^X \frac{1-e^{-t/X}}{t}\,dt \leqslant \varepsilon \int_A^X \frac{1}{X}dt \leqslant \varepsilon.$$

— On a :

$$|w(X)| \leqslant \varepsilon \int_X^{+\infty} \frac{e^{-t/X}}{t}\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{X} \int_X^{+\infty} e^{-t/X}dt \leqslant \varepsilon.$$

— On a :

$$|u(X)| \leqslant (1-e^{-A/X}) \int_0^A |f(t)|dt.$$

Comme A est fixé, on a : $\lim\limits_{X\to+\infty} (1-e^{-A/X}) = 0$; il existe donc $B>0$ tel que, pour tout $X \geqslant \max(A,1/\eta,B)$, on ait $|u(X)| \leqslant \varepsilon$ et, finalement :

$$\left| \int_0^X f(t)dt - I \right| \leqslant 4\varepsilon.$$

D'où l'existence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X f(t)dt = I.$ □

c) Etudions le cas où f est la restriction à R_+ de la fonction sinus ; f est continue et bornée. Le 3° a) s'applique : pour tout $x>0$ l'intégrale $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t\, dt$ converge. Mais $\int_0^{+\infty} \sin t\, dt$ diverge.

Ici la condition $f(t) = o(1/t)$ n'est pas remplie.

$\boxed{4.3.6}$ Soit $f : R \to R$ une application localement intégrable vérifiant :

$\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \ell \in R$; $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ convergente.

a) Soit $(a,b) \in R^2$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(a+t) - f(b+t)]dt$ converge et calculer sa valeur.

b) Application : Calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{ch(t+a)ch(t+b)}$.

a) Soit $x \in R$. Alors : $\int_x^{+\infty} f(a+t)dt$ converge et $\int_x^{+\infty} f(a+t)dt = \int_{a+x}^{+\infty} f(t)dt$.

On en déduit aisément :

$$\int_x^{+\infty} [f(a+t) - f(b+t)]dt = \int_{a+x}^{b+x} f(t)dt \qquad (1)$$

Nous avons le droit de supposer $a < b$, ce qui simplifie l'écriture .

Intégrable sur $[a+x,b+x]$, f est bornée sur cet intervalle, et, d'après la formule de la moyenne appliquée au second membre de (1) :

$$\mu(x) = \frac{1}{b-a} \int_x^{+\infty} [f(a+t) - f(b+t)]dt$$

est compris entre les bornes de f sur $[a+x,b+x]$.

On constate $\lim\limits_{x\to-\infty} \mu(x) = \ell$. D'où l'existence de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(a+b) - f(b+t)]dt = \ell(b-a).$$

□

b) Nous supposons d'abord : $a \neq b$. Ecrivons :

$$\frac{1}{ch(t+a)ch(t+b)} = \frac{1}{sh(a-b)}\,\frac{sh[(t+a)-(t+b)]}{ch(t+a)ch(t+b)} = \frac{1}{sh(a-b)}[th(t+a)-th(t+b)]$$

Appliquons le a) avec $f(t) = tht - 1$: $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = -2$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -2e^{-2t}$; donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Il vient :

$$I = \frac{2(a-b)}{sh(a-b)}$$

— Pour $a = b$, un calcul direct donne : $I = [th(t+a)]_{-\infty}^{+\infty} = 2$.

$\boxed{4.3.7}$ Soit $f : R \to R^*$ une application continue, paire, décroissante sur R_+, telle qu'existent les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \sigma^2$.

1) Soient F et G les applications à valeurs dans R_+^* définies sur R_+ par :

$$F(x) = 2\int_x^{+\infty} f(t)dt \quad ; \quad G(x) = F(\sqrt{x}).$$

Montrer qu'elles sont convexes. Calculer $\int_0^{+\infty} G(t)dt$.

2) Montrer que, pour $x \in R_+^*$ donné, $2xG(x)$ est majoré par l'aire du triangle de R^2 euclidien dont les côtés sont les axes de coordonnées et la tan-

gente à la représentation graphique (G) de G au point d'abscisse x.

En déduire : $\forall k \in \mathbb{R}_+^\star \quad F(k\sigma) \leqslant 1/(2k^2)$ (1)

3) Montrer que l'on peut améliorer (1) par :

$F(k\sigma) \leqslant 1 - (2/3)^{3/2}k$ si $k \leqslant \sqrt{3/2}$; $F(k\sigma) \leqslant 1/(2k^2)$ si $k \geqslant \sqrt{3/2}$ (2)

L'hypothèse implique $f \geqslant 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. En outre $f(t) > 0$ et $\sigma^2 > 0$.

1° a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $F'(x) = -2f(x)$ et $G'(x) = -f(\sqrt{x})/\sqrt{x}$.

Continues sur $\mathbb{R}_+$ et à dérivée croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, F et G sont convexes sur $\mathbb{R}_+$. G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$. D'où :

b) Par parties : $\int_\varepsilon^x G(t)dt = xG(x) + \int_\varepsilon^x \sqrt{t}\ f(\sqrt{t})dt - \varepsilon G(\varepsilon)$, $\varepsilon \in]0,x[$.

On a :

$$0 \leqslant xG(x) = 2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} x\ f(t)dt \leqslant 2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} t^2\ f(t)dt$$

et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,G(x) = 0$. On en déduit : $\int_0^{+\infty} G(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} 2u^2 f(u)du = \sigma^2$.

2° Les sommets du triangle considéré étant notés (0,0), (p,0), (0,q), avec $p>0$ et $q>0$, on a : $\frac{x}{p} + \frac{G(x)}{q} = 1$, et, après élévation au carré :

$$\frac{4x\,G(x)}{pq} = 1 - \left(\frac{x}{p} - \frac{G(x)}{q}\right)^2 \quad ; \quad \text{d'où} \quad 2x\,G(x) \leqslant pq/2. \qquad \square$$

G étant convexe, on peut majorer l'aire pq/2 du triangle par celle de la partie du plan $\mathbb{R}^2$ qui est limitée par (G) et par les axes de coordonnées, i.e. par σ^2. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \quad F(x) \leqslant \Phi(x), \quad \text{où} \quad \Phi(x) = \sigma^2/(2x^2) \qquad (3)$$

Compte tenu de $\sigma \neq 0$, il s'agit de (1).

3° La majoration (1) n'est pas bonne pour k "petit". Pour l'améliorer, considérons les représentations graphiques dans $\mathbb{R}^2$, (F) et (Φ), des fonctions F et Φ, convexes sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^\star$ respectivement, et liées par (3) ; le lecteur fera une figure.

Il existe une unique tangente à (Φ) passant par le point (0,1), qui appartient à (F). Un calcul simple montre que l'abscisse de son point de contact est $\sigma\sqrt{3/2}$, et qu'une équation en est :

$$y = \tau(x), \quad \text{où} \quad \tau(x) = 1 - (2/3)^{3/2}x/\sigma.$$

La convexité fournit :

$$\forall x \in]0,\sigma\sqrt{3/2}] \quad F(x) \leqslant \tau(x) \leqslant \Phi(x) \qquad \square$$

**Remarque*. Comme $|t|\, f(t) \leqslant t^2 f(t)$ pour $t \geqslant 1$, l'intégrale sur $]-\infty,+\infty[$ de de $t \mapsto |t|\, f(t)$ converge, et il en est de même de celle de $t \mapsto t\, f(t)$, qui est d'ailleurs nulle. Il en résulte qu'en calcul des probabilités, on peut considérer f comme la densité d'une variable aléatoire réelle continue, d'espérance nulle, d'écart-type σ. On a :

$$F(k\sigma) = \mathrm{Prob}(|X| \geqslant k\sigma).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev dit que $F(k\sigma) \leqslant 1/k^2$. Les inégalités (1) et (2) en sont des améliorations (valables dans le cas considéré).*

$\boxed{4.3.8}$ Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1° $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,dt$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$; 2° $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{1+t^2}\,dt$

1° L'application $f : t^\alpha/(1+t^\beta)$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est continue et donc localement intégrable. Distinguons :

1er *Cas :* $\beta > 0$. Alors $f(t) \sim t^\alpha$ au voisinage de 0, et $f(t) \sim t^{\alpha-\beta}$ au voisinage de $+\infty$. L'intégrale converge si, et seulement si :

$$(\alpha > -1) \wedge (\beta > 1+\alpha)$$

2ème *Cas :* $\beta = 0$. Ici $f(t) = t^\alpha/2$; l'intégrale ne converge jamais.

3ème *Cas :* $\beta < 0$. Alors $f(t) \sim t^{\alpha-\beta}$ au voisinage de 0, et $f(t) \sim t^\alpha$ au voisinage de $+\infty$. L'intégrale converge si, et seulement si :

$$(\beta < 1+\alpha) \wedge (\alpha < -1)$$

- En conclusion l'intégrale impropre converge si et seulement si :

$$(0 < 1+\alpha < \beta) \vee (\beta < 1+\alpha < 0)$$

2° L'application $f : t \sin t/(1+t^2)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ est continue et donc localement intégrable.

Au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim \dfrac{\sin t}{t}$ et $|f(t)| \sim \dfrac{|\sin t|}{t}$. Il est classique que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ diverge. L'intégrale étudiée n'est donc pas absolument convergente.

Au voisinage de $+\infty$, $f(t) - \dfrac{\sin t}{t} = O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f(t) - \frac{\sin t}{t}\right) dt$ est donc absolument convergente. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge on en déduit que l'intégrale étudiée est semi-convergente.

★ $\boxed{4.3.9}$ Pour tout $x \in [0,1]$, on désigne par $\varphi(x)$ la plus grande racine réelle de l'équation $f_x(y) = 0$, où $f_x(y) = y^3 - 2xy + x^3$.

1° Montrer que l'application $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue. Est-elle dérivable ?

2° Existence et calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x+\varphi(x)}{x^2+\varphi^2(x)}\,dx$.

1° a) L'équation $f_x(y) = 0$ admet au moins une, et au plus trois racines réelles ; d'où l'existence de l'application φ.

Pour $x = 0$, l'équation admet 0 pour racine triple, et donc $\varphi(0) = 0$.

Pour $x = 1$, elle s'écrit $(y-1)(y^2+y-1) = 0$; elle admet trois racines réelles dont la plus grande est 1, donc $\varphi(1) = 1$.

Pour $x \in]0,1[$, nous constatons :

y	$-2\sqrt{x}$	$-\sqrt{x}$	0	x	$\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$
$f_x(y)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

ce qui nous apprend que l'équation admet trois racines :

$$\varphi_1(x) \in]-2\sqrt{x}, -\sqrt{x}[\quad ; \quad \varphi_2(x) \in]0, x[\quad ; \quad \varphi(x) \in]\sqrt{x}, 2\sqrt{x}[$$

La plus grande est la dernière (ce qui justifie la notation adoptée).

b) Considérons l'application $F : (x,y) \mapsto x^3 - 2xy + y^3$, de classe C^∞, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; nous avons :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2x + 3y^2 \ , \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y.$$

Pour tout $x_0 \in]0,1]$, nous avons :

$$F\big(x_0, \varphi(x_0)\big) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}\big(x_0, \varphi(x_0)\big) = \frac{1}{\varphi(x_0)}\big(2\varphi^3(x_0) - x_0^3\big) > 0 \ .$$

D'après l'étude des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert de x_0 sur lequel φ est de classe C^1 (cela vaut même pour $x_0 = 1$, la fonction φ pouvant être prolongée à droite de 1).

De $\sqrt{x} \leqslant \varphi(x) \leqslant 2\sqrt{x}$ et de $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ on déduit la continuité de φ en 0. De

De $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}/x) = +\infty$, on déduit $\lim\limits_{x\to 0}\big(\varphi(x)/x\big) = +\infty$; d'où la non dérivabilité de φ en 0, et la tangente Oy, en O, à la représentation graphique de φ.

2° Soit $\varepsilon \in]0,1[$. De la continuité de φ, et de $x^2+\varphi^2(x) > 0$ pour $x \neq 0$, on déduit l'existence de l'intégrale :

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{x+\varphi(x)}{x^2+\varphi^2(x)}\,dx.$$

On a :

$$\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 1, \quad \text{et} : \quad \forall x \in [\varepsilon, 1] \quad x = \frac{2\varphi(x)/x}{1 + [\varphi(x)/x]^3} \tag{1}$$

(1) conduit au changement de variable $x = \psi(t)$, où $\psi(t) = 2t/(1+t^3)$. C'est justifié par le fait que de $\psi'(t) = 2(1-2t^3)/(1+t^3)^2 < 0$ pour $t \geqslant 1$ on déduit que ψ induit un C^1-difféomorphisme de $[1, \varphi(\varepsilon)/\varepsilon]$ sur $[\varepsilon, 1]$; l'application réciproque est (d'après (1)) $\psi^{-1} : x \mapsto \varphi(x)/x$.

En utilisant $\varphi(x) = tx = 2t^2/(1+t^3)$, on trouve :

$$I(\varepsilon) = \int_1^{\varphi(\varepsilon)/\varepsilon} R(t)dt, \quad \text{où} \quad R(t) = \frac{2t^3 - 1}{t(t^2+1)(t^2-t+1)}$$

On calcule la décomposition en éléments simples de R. D'où :

$$R(t) = -\frac{1}{t} - \frac{2t+1}{t^2+1} + \frac{3t}{t^2-t+1} .$$

On en déduit : $I(\varepsilon) = \Phi(\varphi(\varepsilon)/\varepsilon) - \Phi(1)$, avec :

$$\Phi(t) = \mathrm{Log}\,\frac{(t^2-t+1)^{3/2}}{t(t^2+1)} - \mathrm{Arc\,tg}\,t + \sqrt{3}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

On a : $\quad \Phi(1) = -\mathrm{Log}\,2 - \frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t) = (\sqrt{3}-1)\frac{\pi}{2}$.

En utilisant $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} (\varphi(\varepsilon)/\varepsilon) = +\infty$, on en déduit l'existence de :

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \mathrm{Log}\,2$$

Remarque. Nous avons ici un exemple de calcul d'une intégrale abélienne. Le graphe Γ de φ est en effet inclus dans la courbe algébrique C (folium de Descartes) d'équation $x^3+y^3-2xy = 0$, qui admet la représentation paramétrique unicursale :

$$x = 2t/(1+t^3) \quad , \quad y = 2t^2/(1+t^3).$$

Nous laissons au lecteur le soin de construire C à partir de cette représentation (symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$; point double en O, avec pour tangentes les axes de coordonnées ; asymptote d'équation $y = -x - 2/3$).

4.3.10 Définition, continuité et expression de : $F : x \mapsto \int_0^1 \mathrm{Log}(1+xt^2)dt$.

1° La fonction $f : (t,x) \mapsto \mathrm{Log}(1+xt^2)$ étant définie et continue sur $[0,1]\times]-1,+\infty[$, la fonction F est définie et continue sur $]-1,+\infty[$. On a en évidence $F(0) = 0$, et, par intégration par parties :

$$F(x) = \mathrm{Log}(1+x) - 2 + 2\,\frac{\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad \text{si } x > 0,$$

$$F(x) = \mathrm{Log}(1+x) - 2 + 2\,\frac{\mathrm{Arg\,th}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} \quad \text{si } -1 < x < 0,$$

ce qui permet de retrouver directement la continuité de F sur $]-1,+\infty[$.

2° Par ailleurs, l'intégrale généralisée $F(-1)=\int_0^1 \mathrm{Log}(1-t^2)dt$ converge, ce qui résulte de : $\mathrm{Log}(1-t^2)=o(1/\sqrt{1-t})$ au voisinage de 1 (et pour $t<1$).

On a :

$$F(-1)=\lim_{\lambda\to 1,\lambda<1} I(\lambda),\ \text{où}\quad I(\lambda)=\int_0^\lambda \mathrm{Log}(1-t^2)dt.$$

Une intégration par parties donne :

$$I(\lambda)=\lambda\ \mathrm{Log}\,(1-\lambda^2)-2\lambda+\mathrm{Log}\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

ou : $\qquad I(\lambda)=-2\lambda+(\lambda+1)\ \mathrm{Log}\,(1+\lambda)+(\lambda-1)\ \mathrm{Log}\,(1-\lambda),$

dont on déduit : $\qquad F(-1)=-2+2\,\mathrm{Log}\,2.$

La fonction F est ainsi définie sur $[-1,+\infty[$. Nous allons montrer qu'elle est continue sur cet intervalle. Il suffit pour cela de prouver :

$$\lim_{x\to -1,x>-1} F(x)=-2+2\,\mathrm{Log}\,2$$

ce qui résulte de l'expression, valable sur $]-1,0[$:

$$F(x)=-2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\mathrm{Log}\,(1+\sqrt{-x})+\left(1-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\mathrm{Log}\,(1-\sqrt{-x}).$$

4.3.11 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application localement intégrable ; on suppose que l'intégrale impropre $I=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ converge.

1) Prouver l'existence, pour tout $x\in\mathbb{R}$, de l'intégrale impropre

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)-f(t)|dt.$$

2) Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

1) • Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé ; $t\mapsto f(x+t)$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, on a :

$$\int_a^b|f(x+t)|dt=\int_{a+x}^{b+x}|f(t)|dt \tag{1}$$

Le second membre de (1) tendant vers I lorsque (a,b) tend vers $(-\infty,+\infty)$, il en est de même du premier membre. D'où l'existence et la valeur de l'intégrale impropre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)|dt=I.$$

• $t\mapsto f(x+t)-f(t)$, différence de deux applications admettant des intégrales impropres absolument convergentes sur $\mathbb{R}$, possède la même propriété. □

2) • Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t)|\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = 2I \qquad (2)$$

• Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$. D'après l'existence de I, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$, tel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha \leqslant a) \Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{\alpha} |f(t)|\,dt\right) \leqslant \varepsilon$$

$$\forall \beta \in \mathbb{R} \quad (\beta \geqslant b) \Rightarrow \left(\int_{\beta}^{+\infty} |f(t)|\,dt\right) \leqslant \varepsilon$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant b-a$, i.e $a+x \geqslant b$, on a (cf. 1°) :

$$\int_{-\infty}^{a} |f(x+t)|\,dt = \int_{-\infty}^{a+x} |f(t)|\,dt \geqslant I - \varepsilon \ ;$$

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x+t)|\,dt = \int_{a+x}^{+\infty} |f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$$

En utilisant en outre :

$$\int_{-\infty}^{a} |f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon \quad ; \quad \int_{a}^{+\infty} |f(t)|\,dt \geqslant I - \varepsilon$$

et en remarquant que F(x) majore la somme :

$$\int_{-\infty}^{a} \big(|f(x+t)| - |f(t)|\big)dt + \int_{a}^{+\infty} \big(|f(t)| - |f(x+t)|\big)dt$$

on a, compte tenu de (2) :

$$\forall x \geqslant b-a \quad 2I - 4\varepsilon \leqslant F(x) \leqslant 2I$$

• En conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2I$.

$\boxed{4.3.12}$ On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$.
Trouver $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

• Rappelons le résultat classique : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ $(a \in \mathbb{R}_+^\star)$ convergent.

• Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t+x}$ est continue, donc localement intégrable, sur $\mathbb{R}_+$ (y compris si $x=0$).

Soient ε et A dans $\mathbb{R}_+^\star$; par changement de variable :

$$\int_{\varepsilon}^{A} \frac{\sin t}{x+t}\,dt = \int_{x+\varepsilon}^{x+A} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du = \cos x \int_{x+\varepsilon}^{x+A} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_{x+\varepsilon}^{x+A} \frac{\cos u}{u}\,du$$

d'où, par passage à la limite, la convergence et la valeur de l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du, \quad x > 0. \tag{1}$$

(On notera que (1) n'a pas de sens pour $x=0$ car $\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ diverge).

D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = 0$ (intégrales convergentes)

Les fonctions sinus et cosinus étant bornées, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

Remarque. L'intégrale proposée n'étant pas absolument convergente, il n'était pas possible de travailler par majoration comme on le fait dans la plupart des cas.

$\boxed{4.3.13}$ Soit $\varphi : R \to R$ définie par $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$.

1° Montrer que φ est continue sur R et dérivable sur R^*.

2° Montrer que φ n'est pas dérivable en 0.

1° Cette question est classique ; nous la laissons au lecteur, qui pourra en trouver une solution dans notre cours (IV.2.3.4,2°).

On trouve : $\varphi'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{it\, e^{itx}}{1+t^2} dt, \quad x \neq 0$.

2° Il suffit de montrer que la partie imaginaire ψ de φ n'est pas dérivable en 0. Pour tout $x \in]0,\pi/2[$, posons :

$$m(x) = \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+t^2} dt .$$

Le changement de variable $u = tx$ permet d'écrire $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$,

avec : $\quad m_1(x) = \int_x^{\pi/2} \frac{\sin u}{x^2+u^2} du, \quad m_2(x) = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin u}{x^2+u^2} du.$

— La fonction sin étant concave sur $[0,\pi/2]$, on a $\sin u \geqslant 2u/\pi$ pour tout $u \in [x,\pi/2]$, ce qui donne :

$$m_1(x) \geqslant \frac{1}{\pi} \int_x^{\pi/2} \frac{2u\, du}{x^2+u^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \frac{x^2+\pi^2/4}{2x^2}$$

et : $\quad \lim\limits_{x\to 0,\, x>0} m_1(x) = +\infty.$

— D'autre part :

$$|m_2(x)| \leqslant \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{2}{\pi} .$$

En conclusion : $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} m(x) = +\infty.$ □

4.3.14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tg}(x+t)}{t^2+1}\,dt$.

1° Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2° Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ (sans symbole d'intégration).

3° Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x)$ (sans symbole d'intégration).

La solution de cet exercice fait intervenir les suites de fonctions.

1° De : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\frac{\operatorname{Arc\,tg}(x+t)}{t^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{2(t^2+1)}$, on déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$.

a) D'après la définition d'une intégrale généralisée, f est la limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telles que :

$$f_n(x) = \int_{-n}^{n} \frac{\operatorname{Arc\,tg}(x+t)}{t^2+1}\,dt$$

b) La continuité de $(t,x) \mapsto \operatorname{Arc\,tg}(x+t)/t^2+1$, l'existence et la continuité de sa dérivée partielle par rapport à x, et les théorèmes du cours, nous permettent d'affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$f_n'(x) = \int_{-n}^{+n} \frac{dt}{(t^2+1)\left[(x+t)^2+1\right]}$$

On dispose de

$$g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)\left[(x+t)^2+1\right]}$$

On constate que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$0 < g(x) - f_n'(x) \leqslant \int_{-\infty}^{-n} \frac{dt}{t^2+1} + \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}\,.$$

On en déduit que la suite de fonctions continues $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers g, qui est ainsi continue.

c) De a) et b), il résulte que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f' = g$. □

2° Le changement de variable $t = \operatorname{tg}\theta$ fournit $f'(0) = \pi/2$.

Soit $x \neq 0$; $f'(x)$ est l'intégrale sur $]-\infty,+\infty[$ de la fonction attachée à la fraction rationnelle $F = 1/(X^2+1)\left[(X+x)^2+1\right]$, de degré -4, sans pôle réel. Un calcul direct est possible, mais il est plus rapide d'utiliser la formule des résidus (cf. exercice 4.2.5).

Les pôles simples à partie imaginaire positive sont ici : $a_1 = i$ et $a_2 = i-x$.

Pour $F = P/Q$, le résidu au pôle simple a_p est $\gamma_{a_p} = P(a_p)/Q'(a_p)$.
Ici : $\gamma_{a_1} = 1/\left[2ix(x+2i)\right]$, $\gamma_{a_2} = 1/\left[2ix(x-2i)\right]$.
D'.

$+\gamma_{a_2}) = 2\pi/(x^2+4)$, $x \neq 0$.

Par continuité de f', on constate que $f'(x) = 2\pi/(x^2+4)$ vaut pour tout $x \in R$ (ce qui nous dispensait du calcul direct de $f'(0)$). On en déduit, compte tenu de $f(0) = 0$:

$$\forall x \in R \quad f(x) = \pi \operatorname{Arc\,tg}(x/2).$$

SÉRIES NUMÉRIQUES

5.1. SERIES A TERMES POSITIFS

$\boxed{5.1.1}$ Soit $\sum a_n$ une série réelle, positive, divergente. Etudier la série :

1° $\sum a_n^2$; 2° $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$; 3° $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$; 4° $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$

Il s'agit de séries positives.

1° On ne peut pas conclure. C'est ainsi que $\sum a_n^2$ diverge lorsque $a_n = 1/\sqrt{n}$, mais converge lorsque $a_n = 1/n$.

2° Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, on a $\frac{a_n}{1+a_n} \sim a_n$ au voisinage de $+\infty$. S'agissant de séries positives, on en déduit que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ est divergente.

— Supposons maintenant que a_n ne tende pas vers 0 avec $1/n$. Il existe un réel $\alpha > 0$, et une suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de (a_n), avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$a_{\varphi(n)} \geqslant \alpha \ , \quad \text{et donc } \frac{a_{\varphi(n)}}{1+a_{\varphi(n)}} \geqslant \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

(on a utilisé la croissance de $t \mapsto t/(1+t)$ sur $\mathbb{R}_+$).

On ne peut donc avoir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$.

En conclusion, $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge dans tous les cas.

3° On ne peut pas conclure. En effet :

a) $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$ diverge lorsque $a_n = 1$ pour tout n.

b) Nous allons montrer que $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$ converge lorsque a_n est donné par $a_n = 1$ si $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $a_n = 0$ dans les autres cas.

La suite (a_n), dont on peut extraire une suite constante de valeur 1, n'admet pas 0 pour limite ; la série $\sum a_n$ diverge. D'autre part, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{1+na_n} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant \sqrt{N}} \frac{1}{1+k^2}$$

Les sommes partielles de la série considérée sont majorées (par la somme de la série $\sum \frac{1}{1+k^2}$) ; s'agissant d'une série positive, elle est convergente. □

4° On constate : $\frac{a_n}{1+n^2 a_n} \leqslant \frac{1}{n^2}$ si $n \geqslant 1$. D'où la convergence.

$\boxed{5.1.2}$ Soit $\sum a_n$ une série réelle, positive, convergente. Etudier les séries :

1° $\sum a_n^2$; 2° $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$; 3° $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$; 4° $\sum \frac{1}{1+n^2 a_n}$.

— La convergence de $\sum a_n$ entraîne : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

— Les quatre séries considérées sont positives ; dans les trois premières, le terme général tend vers 0 avec $1/n$.

1° De $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ on déduit l'existence de $N\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geqslant N$, $a_n \leqslant 1$ et donc $a_n^2 \leqslant a_n$. La convergence de $\sum a_n^2$ en résulte. □

2° Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$

La convergence des séries $\sum a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ entraînent celle de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$. □

3° On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+a_n) = 1$, et $a_n \sim \frac{a_n}{1+a_n}$ au voisinage de $+\infty$.

S'agissant de séries positives, on en déduit que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ est de même nature que $\sum a_n$, c'est-à-dire convergente.

4° La condition nécessaire de convergence $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n^2 a_n} = 0$, qui s'écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 a_n) = +\infty$, n'est pas toujours remplie.

a) Si $n^2 a_n$ ne tend pas vers $+\infty$ avec n, la série étudiée diverge.

b) Supposons maintenant : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 a_n) = +\infty$, ce qui implique :

— Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $a_n > 0$ pour tout $n \geqslant N_0$;

— Au voisinage de $+\infty$: $\frac{1}{1+n^2 a_n} \sim \frac{1}{n^2 a_n}$.

Les séries positives $\sum \frac{1}{1+n^2 a_n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant N_0} \frac{1}{n^2 a_n}$ sont donc de même nature, ce qui nous conduit à remplacer l'étude de la première par celle de la seconde.

Pour tout $N \geqslant N_0$ nous avons (Cauchy-Schwarz) :

$$\sum_{n=N_0}^{N} \frac{\sqrt{a_n}}{n\sqrt{a_n}} \leqslant \sqrt{\sum_{n=N_0}^{N} \frac{1}{n^2 a_n}}\ \sqrt{\sum_{n=N_0}^{N} a_n} .$$

Les sommes $\sum\limits_{n=N_0}^{N} a_n$ sont majorées par $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant N_0} \frac{1}{n^2 a_n}$ convergeait, les sommes $\sum\limits_{n=N_0}^{N} \frac{1}{n^2 a_n}$ et donc les sommes $\sum\limits_{n=N_0}^{N} \frac{\sqrt{a_n}}{n\sqrt{a_n}} = \sum\limits_{n=N_0}^{N} \frac{1}{n}$ seraient elles aussi majorées, ce qui est absurde.

En conclusion $\sum \frac{1}{1+n^2 a_n}$ diverge dans tous les cas.

5.1.3 Soit E l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifiant à la fois :

i) $x_0 = 1$; ii) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0 < x_{k+1} \leqslant x_k$;

iii) La série $\sum u_n$, où $u_n = x_n^2/x_{n+1}$ est convergente.

1° Montrer que, pour toute suite $(x_n)\in E$, la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ vérifie $S\geqslant 4$.

2° Peut-on avoir $S = 4$?

1° Soit $(x_n)\in E$. Notons que $u_0 \geqslant 1$ entraîne $S > 1$.

Nous pouvons écrire : $S = x_1^{-1} + x_1 S_1$, où $S_1 = \sum_{n=o}^{+\infty} u'_n$ avec :

$$u'_n = x'^2_n/x'_{n+1} \quad , \quad \text{et} \quad x'_n = x_{n+1}/x_1 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Nous constatons : $(x'_n)\in E$. Nous avons :

$$S - 2\sqrt{S_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1}\,\sqrt{S_1}\right)^2, \text{ et donc } S \geqslant 2\sqrt{S_1}.$$

En raisonnant par récurrence, nous obtenons, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$S \geqslant 2^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{p-1}}}\,(S_p)^{\frac{1}{2^p}}$$

où S_p est la somme d'une série associée à un élément de E.

Comme $S_p > 1$, nous pouvons retenir :

$$\forall p\in\mathbb{N}^* \quad S \geqslant 2^{2(1-1/2^p)}$$

ce qui entraîne : $S \geqslant \lim\limits_{p\to+\infty} 2^{2(1-1/2^p)}$, et $S\geqslant 4$.

2° En adoptant $x_n = 1/2^n$, on obtient $S = 4$.

5.1.4 Etudier la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, où $a_n = \dfrac{1}{1+2^\alpha+\dots+n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

1er *Cas :* $\alpha\leqslant 0$. Pour tout $n\geqslant 1$, on a :

$$1 + 2^\alpha + \dots + n^\alpha \leqslant n, \text{ et donc } a_n \geqslant 1/n$$

La série étudiée diverge.

Remarque. Si $\alpha < -1$ la divergence peut se prouver en remarquant qu'alors $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha$ converge et que a_n ne tend pas vers 0 avec $1/n$.

2ème *Cas :* $\alpha > 0$. L'application $t\mapsto t^\alpha$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est croissante, continue et donc localement intégrable ; pour tout entier $k\geqslant 1$:

$$\int_{k-1}^{k} t^{\alpha}dt \leqslant k^{\alpha} \leqslant \int_{k}^{k+1} t^{\alpha}dt$$

D'où :

$$\int_{0}^{n} t^{\alpha}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \leqslant \int_{1}^{n+1} t^{\alpha}dt$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ au vosinage de } +\infty,$$

et donc : $a_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ au voisinage de $+\infty$.

Comme $1+\alpha > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

En conclusion $\sum\limits_{n\geqslant 1}$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$.

$\boxed{5.1.5}$ 1° Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation

(E_n) $\quad \operatorname{Log} t = \operatorname{Arc\,tg} t + n\pi$

admet une solution unique $x_n \in \mathbb{R}_+^{\star}$.

2° Etudier la série $\sum u_n$, où $u_n = 1/x_n$.

1° En dérivant on constate que l'application $\varphi_n : t \mapsto \operatorname{Log} t - \operatorname{Arc\,tg} t - n\pi$ de $\mathbb{R}_+^{\star}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone. En outre :

$$\lim_{t\to 0,\, t>0} \varphi_n(t) = -\infty \quad ; \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi_n(t) = +\infty. \qquad \square$$

2° Nous avons : $\operatorname{Log} u_n = -n\pi - \pi/2 + \operatorname{Arc\,tg} u_n$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\operatorname{Log} u_n) = -\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

En outre :

$$\operatorname{Log} \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\pi + \operatorname{Arc\,tg}(u_{n+1}) - \operatorname{Arc\,tg}(u_n).$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1}/u_n) = e^{-\pi} < 1$.

La série à termes positifs $\sum u_n$ converge d'après la règle de Cauchy.

$\boxed{5.1.6}$ Soit la série $\sum u_n$, où $u_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)dt$.

1° a) Calculer u_0 et u_1 et trouver une relation permettant de calculer les u_n par récurrence.

b) Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

2° Exprimer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ sous la forme d'une intégrale.

1° a) Sans difficulté : $u_0 = 2/\pi$, $u_1 = 1/\pi$, et (intégration par parties) :

$$u_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}(1 - \pi u_{n+2}) \qquad (1)$$

b) On a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \text{ D'où } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Compte tenu de (1), il en résulte $u_n \sim \pi/n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'où la convergence de la série à termes positifs $\sum u_n$.

2° Retrouvons directement cette convergence. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$:

$$(1+t+\dots+t^{n-1}) \sin(\pi t) = (1-t^n)\,\varphi(t)$$

où φ est l'application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(t) = \sin(\pi t)/(1-t) \text{ si } t \neq 1 \; ; \; \varphi(1) = \pi.$$

D'où : $$\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \int_0^1 \varphi(t)\,dt = -\int_0^1 t^n \varphi(t)\,dt. \qquad (2)$$

La valeur absolue du second membre de (2) est majorée par :

$$M\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1}, \quad \text{où } M = \sup_{t\in[0,1]} \varphi(t).$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,du .$$

$\boxed{5.1.7}$ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie par la donnée de $x_0 > 0$, et par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2$$

Nature et somme éventuelle de la série $\sum u_n$, où $u_n = 1/(1+x_n)$.

— De $x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geqslant 0$, on déduit que la suite est croissante. Elle ne peut converger car si elle admettait une limite ℓ, on aurait $\ell = \ell + \ell^2$, i.e. $\ell = 0$, ce qui constituerait une contradiction avec $x_n \geqslant x_0 > 0$ pour tout n. Il en résulte $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

— Ecrivons, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k(1+x_k)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{1+x_k}$$

D'où, en sommant de $k=0$ à $k=n$:

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_0} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+x_k}$$

Il en résulte : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{x_0}$.

La série $\sum u_n$ est convergente, de somme $1/x_0$.

$\boxed{5.1.8}$ Soient a et b des réels strictement positifs. Etudier, et éventuellement sommer la série $\sum u_n$, où $u_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)}$.

Commençons par remarquer que si $b = a+1$, alors $u_n = a/(a+1+n)$ et la série diverge.

Il en résulte que si $b \leqslant a+1$, alors $u_n \geqslant a/(a+1+n)$ et la série diverge.

Reste à étudier le cas où $b > a+1$. Nous avons alors :

$$0 < u_n < a/(a+1+n) \tag{1}$$

Ecrivons pour $p \geqslant 1$:

$$(b+p)u_p = (a+p)u_{p-1}$$

i.e. $pu_p - (p-1)u_{p-1} = -bu_p + (a+1)u_{p-1}$.

D'où, en sommant de $p = 1$ à $p = n$:

$$(b-a-1)S_n = bu_0 - (a+1+n)u_n, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \; . \tag{2}$$

D'après (1), le second membre de (2) est borné, ce qui entraîne que S_n est majoré et que $\sum u_n$ converge ; soit S sa somme.

Compte tenu de $bu_0 = a$ et de $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, nous avons :

$$(b-a-1)S = a - \ell \;, \quad \text{où} \quad \ell = \lim_{n\to+\infty} (n\,u_n).$$

Mais $\ell = 0$, sans quoi $\sum u_n$ divergerait.

En conclusion, la série converge si, et seulement si $b > a+1$; elle admet alors pour somme $S = a/(b-a-1)$.

Remarque. On a : $u_{n+1}/u_n = 1 - \frac{b-a}{n} + O(1/n^2)$. On peut en déduire (cf. le 1.2.3, 3° de notre tome IV) : $u_n \sim k/n^{b-a}$ $(k \in \mathbb{R}_+^\star)$

On retrouve la convergence de $\sum u_n$ si et seulement si $b-a > 1$.

$\boxed{5.1.9}$ Calculer : $S = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$.

La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 3} u_n$ tient à ce que, au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n \sim 4/n^2$.

En utilisant la décomposition en éléments simples :

$$\frac{4X-3}{(X-2)X(X+2)} = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{X-2} + \frac{6}{X} - \frac{11}{X+2}\right)$$

on obtient : $8u_n = \left(\frac{5}{n-2} + \frac{11}{n}\right) - \left(\frac{5}{n} + \frac{11}{n+2}\right)$

et : $u_n = f(n) - f(n+2)$, où $f(n) = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{n-2} + \frac{11}{n}\right)$

D'où : $\sum\limits_{k=3}^{n} u_k = f(3) + f(4) - f(n+1) - f(n+2)$

et : $S = f(3) + f(4) = \frac{1}{8}\left(5 + \frac{11}{3} + \frac{5}{2} + \frac{11}{4}\right) = \frac{167}{96}$

5.1.10 Calculer $\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{+\infty} 1/(n^2-p^2)$, ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé).

— On constate aisément la convergence de la série considérée.

— On remarque, pour tout $n \neq p$: $\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$

Donnons-nous alors un entier $N > p$, et calculons $2p\, S_N = 2p \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{n=N} \frac{1}{n^2-p^2}$.

$$2p\, S_N = \sum_{n=1}^{p-1}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) + \sum_{n=p+1}^{N}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$$

qui devient, par changement d'indices :

$$2p\, S_N = \sum_{n=1-p}^{-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=p+1}^{2p-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-p} \frac{1}{n} - \sum_{2p+1}^{N+p} \frac{1}{n}$$

En remarquant que :

$$\sum_{n=1-p}^{-1} \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n}\ , \quad \text{il vient :}$$

$$2p\, S_N = \sum_{n=1}^{N-p} \frac{1}{n} - \left(\sum_{n=1}^{N+p} \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{p} + \frac{1}{2p}\ .$$

soit finalement :

$$2p\, S_N = \frac{3}{2p} - \sum_{n=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{n}\ .$$

En remarquant que $\sum\limits_{n=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{n}$ est la somme de $2p$ termes, on constate

$$0 \leqslant \sum_{n=N-p+1}^{N+p} \frac{1}{n} \leqslant 2p \times \frac{1}{N-p+1}$$

d'où : $\lim S_N = 3/(4p^2)$.

5.2. SÉRIES NUMÉRIQUES QUELCONQUES

$\boxed{5.2.1}$ Etudier la série dont le terme général a_n est donné par :

1° $\dfrac{1}{n^\alpha}\sum_{p=2}^{n}(\text{Log } p)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$; 2° $\dfrac{1}{n^\alpha}\int_0^n \dfrac{\text{Arc tg } t}{1+t}dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$

3° $(-1)^n\left((1+n^\alpha)^{1/\alpha}-n\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$; 4° $\sin \pi \sqrt[3]{n^3+n^\alpha}$, $\alpha < 2$.

1° Ici $a_n > 0$. En raisonnant comme à l'exercice 3.3.1, le lecteur vérifiera :

$$a_n \sim \frac{(\text{Log } n)^2}{n^{\alpha-1}} \text{ au voisinage de } +\infty.$$

$\sum_{n\geqslant 2} a_n$ a la même nature que la série de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{(\text{Log } n)^2}{n^{\alpha-1}}$ qui converge si, et seulement si $\alpha > 2$. □

2° Ici $a_n > 0$. L'application $t \longmapsto \text{Arc tg } t/(1+t)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est continue et donc localement intégrable. Au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{\text{Arc tg } t}{1+t} \sim \dfrac{\pi}{2(1+t)}$.
On en déduit que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\dfrac{\text{Arc tg } t}{1+t}dt$ diverge et que (comparaison d'intégrales d'applications positives) :

$$\int_0^n \frac{\text{Arc tg } t}{1+t}dt \sim \int_0^n \frac{\pi}{2(1+t)}dt = \frac{\pi}{2}\text{Log}(1+n)$$

et : $$a_n \sim \frac{\pi \text{Log } n}{2n^\alpha} \text{ au voisinage de } +\infty.$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$. □

3° Si $\alpha < 0$, $\lim_{n\to+\infty}(1+n^\alpha) = 1$, et $|a_n| \sim n$ au voisinage de $+\infty$; le terme général n'ayant pas pour limite 0, la série diverge.

- On suppose dorénavant $\alpha > 0$. Au voisinage de $+\infty$:

$$|a_n| = n[(1+n^{-\alpha})^{1/\alpha}-1] = \frac{1}{\alpha n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right).$$

– Si $\alpha > 2$, la série converge absolument.

– Si $0 < \alpha \leqslant 1$, elle diverge (le terme général ne tend pas vers 0).

– Si $1 < \alpha \leqslant 2$, elle ne converge pas absolument. On écrit :

$$a_n = b_n + c_n \text{ , où } b_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n^{\alpha-1}} \text{ et } c_n = O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right).$$

Comme $2\alpha-1>1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ converge absolument ; la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge d'après le théorème des séries alternées ; $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge donc. □

4° Au voisinage de $+\infty$: $\sqrt[3]{n^3+n^\alpha} = n + \dfrac{1}{3n^{2-\alpha}} + O\left(\dfrac{1}{n^{5-2\alpha}}\right)$

D'où : $a_n = (-1)^n \sin\alpha_n$, avec $\alpha_n = \dfrac{\pi}{3n^{2-\alpha}} + O\left(\dfrac{1}{n^{5-2\alpha}}\right)$.

Comme $\alpha<2$, on a : $\alpha_n \sim \dfrac{\pi}{3n^{2-\alpha}}$ et $|a_n| \sim \dfrac{\pi}{3n^{2-\alpha}}$ au voisinage de $+\infty$.

• Si $\alpha<1$, la série est absolument convergente.

Si $1\leqslant\alpha<2$, la série n'est pas absolument convergente. De $\alpha_n \sim \dfrac{\pi}{3n^{2-\alpha}}$ on déduit l'existence de n_0 tel que $\alpha_n \in]0,\pi/2[$ pour $n\geqslant n_0$. La fonction sinus étant positive et croissante sur $]0,\pi/2[$, $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est alternée. Comme $\sin\alpha_n>0$ et $\lim_{n\to+\infty}\sin\alpha_n = 0$, il suffit pour prouver la convergence de $\sum a_n$ de montrer que $n\mapsto\sin\alpha_n$ décroit sur $[n_1,+\infty[$, n_1 assez grand. Or :

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{3n^{2-\alpha}} - \frac{\pi}{3(n+1)^{2-\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{5-2\alpha}}\right)$$

Comme $1\leqslant\alpha<2$, on a : $3-\alpha<5-2\alpha\leqslant 4-\alpha$.

On en déduit :

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} \sim \frac{(2-\alpha)\pi}{3n^{3-\alpha}} \quad \text{et} \quad \sin\alpha_n \geqslant \sin\alpha_{n+1} \quad \text{pour n assez grand.}$$ □

5.2.2 Soient $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$, et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle décroissante. On suppose en outre que la série $\sum_{n\geqslant 1}\varepsilon_n\alpha_n$ converge.

1° Montrer : $\lim_{n\to+\infty}(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n)\alpha_n = 0$.

2° Etudier le cas où $\varepsilon_n = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1° La convergence de la série entraîne $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$; la suite décroissante (α_n) est donc positive. S'il existe n_0 tel que $\alpha_{n_0} = 0$, la propriété est triviale. Etudions maintenant le cas où $\alpha_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\varepsilon_k\alpha_k$, l'existence de R_n étant assurée par l'hypothèse.

Pour tout $k\geqslant 1$, nous avons $\varepsilon_k = (R_{k-1}-R_k)/\alpha_k$. D'où, en posant $\mu_k = 1/\alpha_k$ pour $k\geqslant 1$, et $\mu_0 = 0$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right)\alpha_n = \frac{1}{\mu_n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mu_{k+1}-\mu_k)R_k - R_n .$$

Nous avons : $\mu_{k+1}-\mu_k \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{n-1}(\mu_{k+1}-\mu_k)=\mu_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n=+\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=0$.

D'après la limite de Cesaro (cf. exercice 1.2.4).

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\mu_n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mu_{k+1}-\mu_k)R_k = 0. \qquad \square$$

2° On trouve un résultat classique : si (α_n) est une suite réelle décroissante telle que la série $\sum\alpha_n$ converge, alors $\alpha_n = o(1/n)$ au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{5.2.3}$ 1° Pour $t\in\mathbb{R}$ donné, étudier la suite réelle $\left(f_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, où

$$f_n(t) = \frac{n!\ n^t}{(t+1)\ldots(t+n)}$$

Lorsque la suite converge, sa limite est notée $\varphi(t)$.

2° Vérifier : $\forall t\in\mathbb{N}\quad \varphi(t)=t!$.

3° Vérifier : $\forall t>-1\quad \varphi(t)=\Gamma(t+1)$.

où Γ est l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{x-1}\,du$.

On admettra ici : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^t\,du = \Gamma(t+1)$, cf. ex. 5.2.15.

1° Pour t donné, la suite étudiée est définie si, et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\quad (t+1)\ldots(t+n)\neq 0$$

i.e. si et seulement si $t\in E$, où $E=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-^\star=\bigcup_{p\in\mathbb{N}}I_p$, avec :

$$I_p =]-(p+1),-p[\text{ si } p\geqslant 1\ ;\ I_0=]-1,+\infty[\ .$$

– Soient $p\in\mathbb{N}$ et $t\in I_p$. Etudier la suite $\left(f_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ équivaut à étudier la suite $\left((-1)^p f_n(t)\right)_{n\geqslant p}$ dont les termes sont strictement positifs.

Pour tout $n\geqslant p$, on a :

$$\frac{(-1)^p f_{n+1}(t)}{(-1)^p f_n(t)} = \frac{(1+1/n)^{t+1}}{1+(t+1)/n}$$

En posant : $u_n(t)=\mathrm{Log}\left((-1)^p f_{n+1}(t)\right)-\mathrm{Log}\left((-1)^p f_n(t)\right)$

il vient : $u_n(t)=(t+1)\,\mathrm{Log}\,(1+1/n)-\mathrm{Log}\left(1+(t+1)/n\right)$.

On en déduit le développement limité :

$$u_n(t)=t(t+1)\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

qui montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant p}u_n(t)$ est convergente, et donc que la suite

$\left(\mathrm{Log}\left((-1)^p f_n(t)\right)\right)_{n\geqslant p}$ est convergente. D'où la convergence de la suite étudiée, et, en outre, la non nullité de sa limite $\varphi(t)$.

Remarque. E est l'intersection des ensembles de définition des fonctions f_n, et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers φ sur E.

2° On constate : $f_n(0)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'où : $\varphi(0)=1$.

D'autre part $t\in E$ entraîne $t+1\in E$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f_n(t+1)=\frac{n(t+1)}{t+n+1}\,f_n(t)$$

D'où (passage à la limite) : $\varphi(t+1)=(t+1)\varphi(t)$

Il en résulte par récurrence : $\varphi(t)=t!$ pour tout $t\in\mathbb{N}$.

3° Reprenant l'exercice 4.2.1 le lecteur constatera que le calcul de

$$I_{p,q}=\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^p(t-\beta)^q\,dt$$

exposé dans le cas $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ s'étend à $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, avec $q>-1$.

On obtient ainsi, pour $t>-1$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 (1-u)^n u^t\,dt=\frac{n!}{(t+1)\dots(t+n)(t+n+1)}$$

On en déduit :

$$f_n(t)=\frac{t+n+1}{n}\int_0^n\left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^t\,dt. \qquad \square$$

$\boxed{5.2.4}$ Soient $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, une application de classe C^2.

Etudier la série $\sum u_n$ où $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\,f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

En fait nous étudierons la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$, où $n_0\in\mathbb{N}$ est fixé, tel que $n_0\geqslant 1/a$, ce qui garantit que, pour tous $n\geqslant n_0$ et $k\in\mathbb{N}_n$, on a $k/n^2\in[0,a]$, et la possibilité d'écrire, grâce à la formule de Taylor-Lagrange :

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)-\frac{k}{n^2}f'(0)\right|\leqslant M\,\frac{k^2}{2n^4}$$

avec : $M=\sup\limits_{t\in[0,a]}|f''(t)|$.

D'où, par combinaison linéaire, en notant $S_\alpha(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\frac{S_1(n)}{n^2}\,f(0)+\frac{S_2(n)}{n^4}\,f'(0)+v_n$$

avec : $|v_n|\leqslant M\,\frac{S_3(n)}{2n^6}$.

On connaît :

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad S_3(n) = \left(S_1(n)\right)^2 .$$

D'où : $S_3(n)/2n^6 \sim 1/8n^2$, qui entraîne la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$; $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est de même nature que $\sum\limits_{n\geqslant n_0} x_n$, où $x_n = \frac{S_1(n)}{n^2} f(0) + \frac{S_2(n)}{n^4} f'(0)$.

— Si $f(0) \neq 0$, on a $x_n \sim f(0)/2$; la série étudiée diverge ;

— Si $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, on a $x_n \sim f'(0)/(3n)$; la série diverge ;

— Si $f(0) = f'(0) = 0$, on a $x_n = 0$ pour tout $n \geqslant n_0$; la série converge.

5.2.5 On donne $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$. Trouver la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$, où a_n est égal à $\frac{\alpha_k}{n}$ lorsque n est congru à k modulo p.

La suite (a_n) admettant 0 pour limite, la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ est la même que celle de la série $\sum b_n$, où $b_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{np+k}$, qui s'en déduit par groupement de p termes consécutifs.

Nous avons $b_n = P(n)/Q(n)$, où $P(X)$ et $Q(X)$ sont les polynômes

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{p} (pX+k) \quad ; \quad P(X) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left(\prod_{j\in \mathbb{N}_p \setminus \{k\}} (pX+j) \right)$$

qui s'ordonnent suivant les puissances décroissantes sous la forme :

$$Q(X) = p^p X^p + \lambda_{p-1} X^{p-1} + \dots + \lambda_0$$

$$P(X) = A p^{p-1} X^{p-1} + \mu_{p-2} X^{p-2} + \dots + \mu_0 \ ; \ A = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k .$$

— Si $A \neq 0$, alors $b_n \sim \frac{A}{pn}$; la série diverge.

— Si $A = 0$, alors $b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$; la série converge.

5.2.6 Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ une série réelle convergente.

1° Etablir : $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+2a_2+\dots+n\,a_n}{n} = 0 \qquad (1)$$

2° Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$, où $b_n = \frac{a_1+2a_2+\dots+n\,a_n}{n(n+1)}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad (2)$$

1° Du fait de la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dispose de la série convergente $\sum\limits_{k\geqslant n+1} a_k$, dont la somme est notée R_n, et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Pour tout $k \geq 1$, on a : $a_k = R_{k-1} - R_k$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \dots + n\,a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k(R_{k-1} - R_k)$$
$$= \left(\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} R_{\ell-1}\right) - R_n$$

On en déduit (1) en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ et la limite de Cesaro (cf. Exercice 1.2.4). □

2° Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n$ s'écrit :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (a_1 + 2a_2 + \dots + n\,a_n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

et aussi : $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n - \dfrac{a_1 + 2a_2 + \dots + N\,a_N}{N+1}$. (3)

La convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ et l'égalité (2) résultent de (3), compte tenu de la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ et de ce que (d'après (1)) :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + N\,a_N}{N+1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + N\,a_N}{N} = 0$$

□

5.2.7 Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, dans lesquelles :
$u_n = \sin(n!\ 2\pi/e)$; $v_n = \sin(n!\ \pi/e)$.

On a : $1/e = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n/n!$; il s'agit de la somme d'une série alternée vérifiant le théorème des séries alternées.

Cela permet d'écrire : $1/e = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k/k! + (-1)^{n+1} R_n$

où $R_n = 1/(n+1)! - 1/(n+2)! + \dots$ vérifie :

$$1/(n+1)! - 1/(n+2)! \leq R_n \leq 1/(n+1)!$$

On en tire : $n!/e = a_n + (-1)^{n+1} \alpha_n$,

où : $a_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \in \mathbb{N}$ et $\alpha_n \in \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]$.

Il en résulte : (α_n) est une suite décroissante, $\lim \alpha_n = 0$ et $\alpha_n \sim 1/n$.

a) Il vient : $u_n = (-1)^{n+1} \sin(2\pi\alpha_n)$.

D'où : $|u_n| = \sin(2\pi\alpha_n)$ (pour $n \geq 1$) et $|u_n| \sim 2\pi/n$. La série $\sum |u_n|$ diverge.

D'autre part la suite $(|u_n|)$ est décroissante $(n \geqslant 1)$, de limite 0. La série $\sum u_n$ converge (théorème des séries alternées).

b) On constate : $a_n \equiv (-1)^{n-1}(n-1)$ et $a_n \equiv n-1 \pmod 2$. D'où :

$$v_n = (-1)^{n-1} \sin\left((-1)^{n+1} \pi\alpha_n\right) = \sin(\pi\alpha_n)$$

On a $(n \geqslant 1)$: $v_n \geqslant 0$ et $v_n \sim \pi/n$. La série $\sum v_n$ diverge.

$\boxed{5.2.8}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et de $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver la nature des séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$, où $v_n = u_n^2$ et $w_n = u_n^3$.

A partir de u_1, tous les u_n appartiennent à $[-1,+1]$. Quitte à opérer un changement d'indexation, on peut donc supposer : $u_0 \in [-1,+1]$.

On élimine $u_0 = 0$, auquel cas $u_n = v_n = w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: les deux séries sont convergentes.

Quitte à remplacer tous les u_n, qui sont de même signe, par les nombres opposés (ce qui ne change pas la nature de $\sum v_n$ et de $\sum w_n$) on peut se limiter à $u_0 \in]0,1]$.

Dans ce cas la suite (u_n), décroissante et minorée par 0, admet une limite ℓ telle que $\ell = \sin \ell$, donc égale à 0.

a) De $w_n > 0$ et $w_n \sim 6(u_n - u_{n+1})$ on déduit que la nature de la série $\sum w_n$ est celle de la série $\sum(u_n - u_{n+1})$, qui converge d'après :

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}\,, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\,.$$

b) De $v_n > 0$ et $v_n \sim 6\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim 6 \operatorname{Log} \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$, on déduit que la nature de de la série $\sum v_n$ est celle de la série $\sum \operatorname{Log} \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$, qui diverge d'après :

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Log} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \operatorname{Log} \frac{u_0}{u_{n+1}}\,, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_0/u_{n+1} = +\infty.$$

Autre solution.- A titre d'application de la moyenne de Cesaro (Ex. 1.2.4) nous avons obtenu $u_n \sim \sqrt{3/n}$. D'où $v_n \sim 3/n$ et $w_n \sim 3\sqrt{3}/n^{3/2}$.

$\boxed{5.2.9}$ Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = 1 + a_0 + \ldots + a_n$ et $b_n = a_{n+1}/s_n$. Etudier la série $\sum b_n$.

Nous avons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $s_n\in\mathbb{R}_+^*$ et :

$$b_n=\frac{s_{n+1}-s_n}{s_n}=-1+\exp\left(\operatorname{Log} s_{n+1}-\operatorname{Log} s_n\right).$$

En utilisant $e^x\geqslant 1+x$ pour tout $x\geqslant 0$, il vient :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad b_n\geqslant \operatorname{Log} s_{n+1}-\operatorname{Log} s_n.$$

On en déduit : $\sum_{k=0}^{n} b_k\geqslant \operatorname{Log} s_{n+1}-\operatorname{Log} s_0$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} s_n=+\infty$ entraîne $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{Log} s_n=+\infty$, la série $\sum b_n$ diverge.

5.2.10 Les suites et séries qui interviennent sont à termes complexes.

1° Soient $\sum x_n$ une série convergente, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que la série $\sum|u_n-u_{n+1}|$ converge. Montrer que la série $\sum u_nx_n$ converge.

2° Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour toute série convergente $\sum x_n$, la série $\sum u_nx_n$ converge. Montrer que la série $\sum|u_n-u_{n+1}|$ converge (on pourra raisonner par l'absurde).

1° La série absolument convergente $\sum(u_n-u_{n+1})$ est convergente ; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une limite, que nous notons ℓ. En posant $u_n=\ell+\alpha_n$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n}u_kx_k=\ell\sum_{k=0}^{n}x_k+\sum_{k=0}^{n}\alpha_kx_k.$$

$\sum x_n$ étant convergente, il reste à montrer que $\sum\alpha_nx_n$ est convergente. Ceci résulte de la règle d'Abel qui s'applique puisque :

i) La suite $n\mapsto\sum_{k=0}^{n}x_k$ est bornée (en effet $\sum x_n$ converge) ;

ii) La suite $n\mapsto\alpha_n$ admet 0 pour limite ;

iii) La série $\sum|\alpha_n-\alpha_{n+1}|$, qui est aussi $\sum|u_n-u_{n+1}|$, est convergente.

2° Faisons l'hypothèse (H) : $\sum a_n$, où $a_n=|u_n-u_{n+1}|$, diverge.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, θ_n désigne l'argument de u_n-u_{n+1} qui appartient à $[0,2\pi[$, avec $\theta_n=0$ si $u_n=u_{n+1}$. Nous posons :

$$v_n=\frac{\exp(-i\,\theta_n)}{1+a_0+\ldots+a_{n-1}}\quad\text{si } n\geqslant 1,$$

et : $\quad x_0=x_1=0\ ;\ x_n=v_n-v_{n-1}\quad$ si $\ n\geqslant 2$.

Montrons que l'hypothèse (H) entraîne la convergence de $\sum x_n$ et la divergence de $\sum u_n x_n$, et conduit donc à une contradiction.

• De la divergence de $\sum a_n$ on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+a_0+\ldots+a_n) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; la convergence de $\sum x_n$ en résulte.

• Pour tout $n \geqslant 2$, nous pouvons écrire

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x_k = u_n v_n - u_2 v_1 + \sigma_n, \quad \sigma_n = \sum_{k=2}^{n-1}(u_k - u_{k+1})v_k = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{|u_k - u_{k+1}|}{1+a_0+\ldots+a_{k-1}}$$

σ_n s'écrit $\sum\limits_{k=1}^{n-2} \dfrac{a_{k+1}}{1+a_0+\ldots+a_k}$; d'après l'exercice précédent, la divergence de $\sum a_n$ entraîne : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$.

De : $\quad u_0 - u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_k - u_{k+1})$, qui entraîne $|u_0 - u_n| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$ on déduit :

$$|u_n v_n| \leqslant \frac{|u_0| + a_0 + \ldots + a_{n-1}}{1+a_0+\ldots+a_{n-1}} = 1 + \frac{|u_0|-1}{1+a_0+\ldots+a_{n-1}}$$

ce qui montre que la suite $n \mapsto (u_n v_n - u_2 v_1)$ est bornée.

En conclusion : $n \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} u_k x_k$ n'est pas bornée, et la série $\sum u_n x_n$ diverge. □

$\boxed{5.2.11}$ Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs, divergentes, telles que $a_n \sim b_n$ au voisinage de $+\infty$. On note $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

Montrer que $A_n \sim B_n$ au voisinage de $+\infty$.

Il s'agit d'un cas particulier du IV.1.6.1 2° de notre cours. Voici une démonstration directe.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = +\infty$ et, en particulier, $B_n > 0$ pour n assez grand.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. L'hypothèse permet de fixer $p \in \mathbb{N}$ tel que $B_p > 0$ et

$$\forall k \geqslant p \qquad |a_k - b_k| \leqslant \varepsilon/2 \cdot b_k$$

Pour $n \geqslant p$ on a : $A_n - B_n = A_p - B_p + \sum\limits_{k=p+1}^{n} (a_k - b_k)$

et donc : $|A_n - B_n| \leqslant |A_p - B_p| + \dfrac{\varepsilon}{2} \sum\limits_{k=p+1}^{n} b_k \leqslant |A_p - B_p| + \dfrac{\varepsilon}{2} B_n$

et, comme $B_n > 0$: $\dfrac{|A_n - B_n|}{B_n} \leqslant \dfrac{|A_p - B_p|}{B_n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Il existe $N \geqslant p$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:

$$B_n \geqslant 2\,\frac{|A_p - B_p|}{\varepsilon}, \quad \text{et donc } \left|\frac{A_n}{B_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Les deux exercices qui suivent constituent un même problème. Ils portent essentiellement sur les suites numériques, mais 5.2.12 suppose connu le résultat sur les séries obtenu au 5.2.11, et fait appel aux suites de fonctions.

5.2.12 On étudie la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminée par :

$u_0 \in \mathbb{R}$ est donné ; $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1° Montrer que l'on peut se limiter aux cas $-1 < u_0 < 0$ et $u_0 > 0$.

2° Dans cette question, on suppose $-1 < u_0 < 0$.

En utilisant l'exercice précédent successivement avec $a_n = u_n^{-1} - u_{n+1}^{-1}$, $a_n = u_n^{-1} - u_{n+1}^{-1} - 1$, montrer que $u_n \sim -1/n$ au voisinage de $+\infty$, et trouver un équivalent de $u_n + 1/n$.

3° Dans cette question, on suppose $u_0 > 0$. On pose $v_n = 1/2^n \cdot \mathrm{Log}\, u_n$

a) Montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Montrer qu'il existe $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer : $\mathrm{Log}\, u_n < \lambda 2^n \leqslant \mathrm{Log}(1+u_n)$. (1)

Trouver un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

b) On suppose ici que u_0 parcourt $]0,+\infty[$; on note $u_n(u_0)$, $v_n(u_0)$, $\lambda(u_0)$ au lieu de u_n, v_n, λ. Montrer que les fonctions $u_0 \mapsto u_n(u_0)$ où n est fixé, et $u_0 \mapsto \lambda(u_0)$ sont croissantes et continues.

Notons que, dans tous les cas, la suite (u_n) est croissante.

1° Si $u_0 = 0$ (resp. $u_0 = -1$), on a $u_n = 0$ pour tout n (resp. pour tout $n \geqslant 1$). Si $u_0 < -1$, on a $u_1 > 0$. $\square$

2° De $-1 < u_0 < 0$ et $u_n = u_{n-1}(1+u_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit par récurrence : $-1 < u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Croissante et majorée par 0, la suite (u_n) est convergente. Sa limite ℓ vérifiant $\ell = \ell + \ell^2$, on a $\ell = 0$. Retenons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

a) $a_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{1+u_n}$. D'où $a_n \sim b_n$, avec $b_n = 1$.

D'après l'exercice précédent (en sommant ici de 0 à $n-1$) :

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} \sim n \text{ , dont on déduit } u_n \sim -\frac{1}{n} \ . \qquad \square$$

b) $a_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = \dfrac{-u_n}{1+u_n}$. D'où $a_n \sim b_n$, avec $b_n = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

D'après l'exercice précédent (en sommant ici de 1 à n-1) :

$$\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_n}-(n-1) \sim \operatorname{Log} n, \quad \text{dont on déduit } \frac{1}{u_n}+n \sim -\operatorname{Log} n$$

et (après multiplication par u_n/n qui tend vers -1) :

$$\frac{1}{n}+u_n \sim -\frac{u_n}{n}\operatorname{Log} n, \quad \text{et } u_n+\frac{1}{n} \sim \frac{\operatorname{Log} n}{n^2}. \qquad \square$$

3° a) La suite (u_n) est strictement croissante. Si elle était majorée, elle admettrait une limite ℓ telle que $\ell = \ell + \ell^2$, i.e. $\ell = 0$, ce qui est impossible $(u_0 > 0)$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on vérifie : $u_{k+1} = u_k^2(1+1/u_k)$ et

$$v_{k+1} = v_k + 1/2^{k+1} \cdot \operatorname{Log}(1+1/u_k). \tag{2}$$

La suite (v_n) est donc strictement croissante. Par ailleurs on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en sommant (2) de $k=0$ à $k=n-1$ et en utilisant $u_k^{-1} \leqslant u_0^{-1}$:

$$v_n < v_0 + (2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-n}) \operatorname{Log}(1+1/u_0)$$

et *a fortiori* : $v_n < v_0 + \operatorname{Log}(1+1/u_0) = \operatorname{Log}(1+u_0)$.

La suite (v_n), strictement croissante et majorée admet une limite $\lambda \leqslant \operatorname{Log}(1+u_0)$, et on a $v_n < \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n > 1$, et donc $v_n > 0$ pour n assez grand, on a $\lambda > 0$.

— Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a, en sommant (2) de $k=n$ à $k=n+m$ et en utilisant $u_k^{-1} \leqslant u_n^{-1}$:

$$v_{n+m+1} < v_n + \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^m}\right)\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$

D'où, en faisant tendre m vers $+\infty$:

$$v_n < \lambda \leqslant v_n + \frac{1}{2^n}\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{u_n}\right), \text{ qui s'écrit (1).}$$

De (1) on déduit : $u_n < \exp(\lambda 2^n) \leqslant 1 + u_n$

et : $\qquad u_n \sim \exp(\lambda 2^n)$ au voisinage de $+\infty$ (on rappelle $\lambda > 0$).

Notons que (1) entraîne : $0 < \lambda - v_n \leqslant (2^n u_n)^{-1}$. (2)

b) Ici les symboles u_n (n fixé), v_n (n fixé), λ désignent les applications de $]0,+\infty[$ dans qui a u_0 associent respectivement $u_n(u_0)$, $v_n(u_0)$, $\lambda(u_0)$.

— Fonction polynôme non nulle, à coefficients positifs, u_n (n fixé) est continue et strictement croissante.

— En utilisant la continuité et la croissance stricte de Log, on en déduit que $\operatorname{Log} \circ u_n$, et donc v_n (n fixé) est continue et strictement croissante.

— Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Nous allons montrer que la suite de fonctions continues $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction λ sur $[a,+\infty[$, ce qui permettra d'affirmer que λ est continue sur tout $[a,+\infty[$, $a\in \mathbb{R}_+^*$, et donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tous $\varepsilon\in \mathbb{R}_+^*$ et $u_0\in [a,+\infty[$, l'inégalité $|\lambda(u_0)-v_n(u_0)|<\varepsilon$ est (d'après (2)) une conséquence de $2^n u_n(u_0)>\varepsilon^{-1}$, et donc (puisque l'application u_n est croissante) une conséquence de $2^n u_n(a)>\varepsilon^{-1}$, et donc (puisque la suite $(u_n(a))$ est croissante et que $u_0(a)=a$) une conséquence de $2^n a>\varepsilon^{-1}$. □

— La croissance de λ résulte, par passage à la limite, de celle des v_n. En effet :

$$0<u_0'<u_0 \text{ entraîne } \lambda(u_0)-\lambda(u_0')=\lim_{n\to+\infty}\left(v_n(u_0)-v_n(u_0')\right)\geqslant 0.$$

5.2.13 On étudie la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par :

$$u_0\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \text{ est donné ; } \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=u_n+u_n^2.$$

1° On suppose $|u_0|\geqslant 2$. Montrer que $|u_n|>2$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et que $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=+\infty$.

2° On pose $u_n=x_n+iy_n$, $(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$, et on suppose :

$$(-1<x_0<0)\wedge(-\sqrt{3}/2<y_0<\sqrt{3}/2).$$

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, vérifier l'assertion :

$$(-1<x_n<0)\wedge(-\sqrt{3}/2<y_n<\sqrt{3}/2) \qquad (\mathcal{R}_n)$$

Montrer qu'il existe $\lim_{n\to+\infty}|y_n|=\ell$ et que $0\leqslant\ell<\sqrt{3}/2$.

Montrer que l'hypothèse $\ell\neq 0$ conduirait à une contradiction.

b) On introduit la suite auxiliaire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par :

$$X_0=-1/4 \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}\quad X_{n+1}=X_n+X_n^2.$$

Soit $\varepsilon\in]0,1/2[$. Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$ il existe $N_p\in\mathbb{N}$ tel que $n>N_p$ entraîne $x_n>X_p-\varepsilon$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

1° $|u_0|\geqslant 2$ entraîne $|u_0+1|\geqslant|u_0|-1$. Il n'y a pas égalité à cause de $u_0\notin\mathbb{R}$. On a donc $|u_0+1|>1$, et $|u_1|=|u_0||u_0+1|>2$, ce qui permet de poser $|u_1|=2+\alpha$, avec $\alpha>0$. D'où, par récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad |u_n|\geqslant 2+\alpha \quad\text{et}\quad |u_n+1|\geqslant 1+\alpha$$

et, encore par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad |u_n|\geqslant|u_1|(1+\alpha)^{n-1}$. □

2° a) On raisonne par récurrence. $(\mathcal{R}_0)$ est vraie par hypothèse. On utilise :

$$x_{n+1} = (x_n+1/2)^2 - 1/4 - y_n^2 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n(1+2x_n).$$

On constate que si l'on a : $-1 < x_n < 0$, alors on a :

$$(x_n+1/2)^2 < 1/4 \quad \text{et} \quad |1+2x_n| < 1.$$

Si l'on a en outre $|y_n| < \sqrt{3}/2$, alors on a :

$$-1 < x_{n+1} < 0 \quad \text{et} \quad |y_{n+1}| < |y_n| < \sqrt{3}/2.$$

Il est ainsi établi que si $(\mathcal{R}_n)$ est vraie alors $(\mathcal{R}_{n+1})$ est vraie. □

— En outre la suite $(|y_n|)$ est décroissante (d'ailleurs strictement). Comme elle est minorée par 0 et majorée par $\sqrt{3}/2$, elle admet une limite ℓ, telle que $0 \leqslant \ell < \sqrt{3}/2$.

A partir de $y_{n+1} = y_n(1+2x_n)$, et par passage à la limite, l'hypothèse $\ell > 0$ entraînerait : $\lim(1+2x_n)^2 = 1$, i.e. $\lim(x_n+x_n^2) = 0$.

Compte tenu de $x_{n+1} = x_n + x_n^2 - y_n^2$, il en résulterait $\lim x_n = -\ell^2$, et donc $-\ell^2(1-\ell^2) = 0$, et enfin $\ell = 1$, ce qui serait en contradiction avec $\ell < \sqrt{3}/2$.

L'hypothèse $\ell > 0$ est donc absurde, et, ainsi : $\lim y_n = 0$.

b) D'après l'exercice précédent, la suite (X_n) est croissante, de limite 0.

$\varepsilon \in]0,1/2[$ étant donné, il s'agit de montrer qu'une assertion (P_p) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

— L'inégalité $x_{n+1} > X_0 - \varepsilon$ s'écrit $(x_n+1/2)^2 - y_n^2 > -\varepsilon$, ce qui est une conséquence de $y_n^2 < \varepsilon$. Comme $\lim y_n = 0$, on en déduit que $(\mathcal{R}_0)$ est vraie.

— Soit $p \in \mathbb{N}$ pour lequel P_p est vraie. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - X_{p+1} = (x_n - X_p)(1+x_n+X_p) - y_n^2.$$

Imposons $n > N_p$. Il en résulte $x_n - X_p > -\varepsilon$, et :

$$1+x_n+X_p > 1+2X_p-\varepsilon > 0 \quad (\text{en effet } X_p \geqslant -1/4 \text{ et } \varepsilon < 1/2),$$

et donc : $x_{n+1} - X_{p+1} > -\varepsilon(1+x_n+X_p) - y_n^2$

et *a fortiori* : $x_{n+1} - X_{p+1} > -\varepsilon(1+X_p) - y_n^2$ (en effet $x_n < 0$).

Pour avoir $x_{n+1} > X_{p+1} - \varepsilon$, il suffit donc d'avoir :

$$n > N_p \quad \text{et} \quad y_n^2 < \varepsilon(-X_p).$$

De $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n^2 = 0$, on déduit que l'assertion (P_{p+1}) est vraie. □

c) Sur $\varepsilon \in]0,1/2[$. Nous pouvons lui associer $q \in \mathbb{N}$ tel que $-\varepsilon < X_q < 0$
Soit $N_q \in \mathbb{N}$, associé à ε et à q, comme il a été dit au 2° b). Pour tout $n > N_q$ on a :

$$X_q - \varepsilon < x_n < 0, \quad \text{et donc} \quad -2\varepsilon < x_n < 0.$$

On en déduit $\lim x_n = 0$, et (cf. 2° a) $\lim u_n = 0$.

$\boxed{5.2.14}$ 1° a) Trouver l'ensemble de définition D de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ déterminée par :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(x+p)p!}$$

Vérifier : $\forall x \in D \quad f(x+1) = xf(x) - 1/e.$ (1)

b) Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est strictement décroissante.

— Etablir : $f(x) \sim 1/(ex)$ au voisinage de $+\infty$. (2)

2° On se propose de calculer une valeur approchée de f(16).

a) Peut-on employer la méthode suivante : ayant vérifié que la suite $(u_n = f(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée par u_0 et par une relation de récurrence, on cherche de proche en proche, au moyen d'une calculatrice, des valeurs approchées de $u_0, u_1, \dots, u_{15}$?

b) Montrer que (u_n) est une combinaison linéaire des suites (x_n) et (y_n) déterminées par $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (x_{n+1} = (n+1)x_n + 1) \wedge (y_{n+1} = (n+1)y_n)$$

Calculer x_n et y_n en fonction de n. Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, chercher la limite éventuelle de la suite $(\alpha x_n + \beta y_n)$; expliquer le résultat de a).

3° Calculer une valeur approchée de f(16) à 10^{-6} près.

1° a) Pour $x \in \mathbb{Z}_-$, f(x) n'est pas défini. En revanche pour $x \notin \mathbb{Z}_-$, f(x) est défini comme somme d'une série numérique absolument convergente : on a : $D = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$.

— Soit $x \in D$, ce qui entraîne $x+1 \in D$. Un changement d'indexation fournit:

$$f(x+1) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{(x+p)(p-1)!} = x\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(x+p)p!} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!}$$

i.e. $\quad f(x+1) = x\left(f(x) - 1/x\right) - (e^{-1}-1)$ (1)

b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $x \neq y$; $\left(f(y)-f(x)\right)/(y-x)$ se présente comme la somme de la série $\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^{p+1}}{(x+p)(y+p)p!}$, qui vérifie le théorème de convergence des séries alternées ; le premier terme de la série étant $-1/xy$, la somme est strictement négative. □

On vérifie de la même manière : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \quad f(x) > 0$.

Sur $\mathbb{R}_+^\star$, f est décroissante et minorée par 0 ; d'où (théorème de la limite monotone) l'existence de $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, avec $\ell \geqslant 0$. L'hypothèse $\ell > 0$ entraînerait $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$, en contradiction avec (1). D'où $\ell = 0$, et, d'après (1) :

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 1/e. \tag{2}$$

2° a) On a : $u_0 = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{(p+1)!} = 1 - 1/e$, et, d'après (1) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (n+1)u_n - 1/e,$$

Si on calcule de proche en proche des valeurs approchées $\overline{u}_0, \overline{u}_1, \dots$ de $u_0, u_1, \dots$, on obtient des résultats aberrants, en général au voisinage de $n = 11$ ou $n = 12$ (cela dépend de la calculatrice utilisée) : $|\overline{u}_n|$ devient rapidement très grand.

b) On constate : $u_n = -(1/e)x_n + (1-1/e)y_n$.

On a immédiatement : $y_n = n!$ Pour calculer x_n, on pose $z_n = x_n/n!$; il vient :

$$z_{n+1} = z_n + 1/(n+1)!, \text{ avec } z_0 = 0.$$

D'où : $\quad z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1/k!$ Ainsi, pour tous $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha x_n + \beta y_n = (\beta + \alpha \sum_{k=1}^{n} 1/k!)n! = \gamma n! - \alpha v_n,$$

où $\quad \gamma = \beta + \alpha(e-1)$, et $v_n = n! \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} 1/k!$

On a : $\quad \dfrac{n!}{(n+1)!} < v_n < \dfrac{n!}{(n+1)!} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)^k}$, et : $\dfrac{1}{n+1} < v_n < \dfrac{1}{n}$.

— Si $\gamma \neq 0$, alors $\alpha x_n + \beta y_n \sim \gamma n!$; $|\alpha x_n + \beta y_n|$ tend "très vite" vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

— Si $\gamma = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = 0$.

En particulier, dans le cas de u_n on a $\alpha = -1/e$ et $\beta = (e-1)/e$, et donc $\gamma = 0$.

On retrouve : $u_n \sim 1/(ne)$, conséquence de (2), et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Mais, dans ce cas, la calculatrice remplace γ par une valeur approchée $\overline{\gamma}$ qui n'est pas nulle, ce qui explique que la suite $(\overline{u}_n)$ diverge rapidement (même en prenant soin de choisir exactement $\overline{\gamma} = 0$, les incertitudes sur le calcul à chaque pas conduiraient à la même difficulté).

c) Revenons à $f(16) = \sum_{p=o}^{+\infty} a_p$, où $a_p = \frac{(-1)^p}{(p+16)p!}$, et utilisons le calcul approché de la somme d'une série alternée.

Une évaluation rapide fournit : $|a_9| \leqslant 12.10^{-8}$.

Dans le tableau suivant, chaque terme, sauf a_0 qui est exact, est indiqué avec une erreur inférieure à 5.10^{-10}

n	a_p	$-a_p$
0	0,062 500 000	
1		0,058 823 529
2	0,027 777 778	
3		0,008 771 930
4	0,002 083 333	
5		0,000 396 825
6	0,000 063 131	
7		0,000 008 627
8	0,000 001 033	
$\sum$	0,092 425 275	0,068 000 911

On en tire : $A_8 = \sum_{p=o}^{8} a_p = 0{,}024\ 424\ 364 \pm 4.10^{-9}$

Comme : $A_8 + a_9 < f(16) < A_8$, on peut affirmer :

$f(16) = 0{,}024\ 424\ 3 \pm 10^{-7}$.

Un calcul plus fin conduit à : $0{,}024\ 424\ 264 \pm 0{,}5.10^{-9}$.

Remarque. A titre de complément, le lecteur pourra vérifier que f est de classe C^∞ sur D. A tout $n \in \mathbb{N}$ il associera :

$$f_n : x \to \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+n}\, n!}{(x+p)^{1+n}\, p!}$$

Il montrera que f_n est la somme d'une série de fonctions qui converge sur D, et que la convergence est uniforme sur tout segement [a,b] inclus dans D. Il en déduira que f admet $f_n(x_0)$ pour dérivée d'ordre n en tout $x_0 \in D$.

$\boxed{5.2.15}$ Cet exercice est destiné à montrer, pour $t>-1$ donné,

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} h = \lim_{n\to+\infty,\, n\in\mathbb{N}^*} \int_0^n g_n \tag{1}$$

avec : $\quad h(u) = e^{-u}u^t \quad$ et $\quad g_n(u) = \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^t, \quad (u>0).$

Cette formule a servi au 5.2.3 pour justifier :

$$\Gamma(t+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^t}{(t+1)\dots(t+n)} \tag{2}$$

1° Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

a) Montrer qu'il existe $(a,A)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$(0<a<A) \wedge \left(\int_0^a h \leqslant \varepsilon\right) \wedge \left(\int_A^{+\infty} h \leqslant \varepsilon\right) \tag{3}$$

b) Vérifier : $\quad \forall n \geqslant A \quad \left(\int_0^a g_n \leqslant \varepsilon\right) \wedge \left(\int_A^n g_n \leqslant \varepsilon\right) \qquad (4)$

c) Pour $n\geqslant 2A$ et $u\in[0,A]$, vérifier :

$$-u - n\,\mathrm{Log}(1-u/n) \leqslant A^2/n \tag{5}$$

En déduire qu'il existe un entier $N\geqslant 2A$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \int_a^A (h-g_n) \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

2° Conclure, et montrer que (2) équivaut à la formule suivante (définition d'Euler de la fonction Γ) :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}, \quad x>0. \tag{7}$$

Toutes les intégrales qui interviennent concernent des fonctions positives et sont positives, la positivité de $h-g_n$ sur $]0,n]$ résultant de :

$$\forall u \in]0,n[\quad \mathrm{Log}\, h(u)/g_n(u) = n\left[-\frac{u}{n} - \mathrm{Log}\left(1-\frac{u}{n}\right)\right] \geqslant 0$$

et de $(h-g_n)(n) = h(n)$.

1° a) Simple conséquence de la convergence de $\int_0^{+\infty} h$.

b) Résulte de (3) et de : $g_n \leqslant h$ sur $]0,n]$.

c) On constate que $x \mapsto -\mathrm{Log}\,(1-x) - x - x^2$ est à dérivée négative sur $[0,1/2]$, et est donc négative puisqu'elle prend la valeur 0 au point 0. D'où :

$$\forall x \in [0,1/2] \qquad -\mathrm{Log}(1-x) - x \leqslant x^2.$$

En utilisant $0\leqslant u/n \leqslant 1/2$ et $u^2\leqslant A^2$, on obtient (5).

— De : $(h-g_n)(u) = h(u)\ [1-\exp(u+n\,\mathrm{Log}\,(1-u/n))]$

on en déduit, pour tout $n \geqslant 2A$:

$$\int_a^A (h-g_n) \leqslant (1-e^{-A^2/n}) \int_a^A h \leqslant (1-e^{-A^2/n})\Gamma(t+1).$$

2° La notation étant celle du 1°, pour tout $n \geqslant N$, on écrit la différence $\Gamma(t+1) - \int_0^n g_n$ sous la forme :

$$\int_0^a h - \int_0^a g_n + \int_a^A (h-g_n) + \int_A^{+\infty} h - \int_A^n g_n$$

D'où :

$$\left|\Gamma(t+1) - \int_0^n g_n\right| \leqslant 5\varepsilon. \qquad \square$$

— L'équivalence de (2) et (7) est triviale.

Remarques. a) L'introduction de a est inutile si $t \geqslant 0$.

* b) Pour résoudre 1° c), il suffit de montrer que la suite $(g_n)_{n>A}$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,A]$ vers h ; comme $u \mapsto u^t$ est borné sur $[a,A]$, il suffit donc de montrer que la suite $(\varphi_n)_{n>A}$, où $\varphi_n(u) = (1-u/n)^n$, converge uniformément sur $[a,A]$ vers $u \mapsto e^{-u}$. La convergence simple est triviale. Les φ_n étant continues et décroissantes, et $u \mapsto e^{-u}$ étant continue, la convergence uniforme s'en déduit par le second théorème de Dini (cf. notre tome II d'exercices d'analyse).

MASSON, Éditeur
120, boulevard Saint-Germain
75280 PARIS CEDEX 06
Dépot légal : Février 1991

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Avenue d'Embrun, 05002 Gap
Dépôt légal 3 — Janvier 1991

ISBN : 2-225-800 98-7