SCIENCES SUP

Problèmes corrigés

Master • CAPES • Agrégation

50 PROBLÈMES D'ANALYSE

- **Corrigés détaillés**
- **Méthodes**

Jean-Michel Ghidaglia

DUNOD

50 PROBLÈMES D'ANALYSE

50 PROBLÈMES D'ANALYSE

Jean-Michel Ghidaglia
Professeur à l'École normale supérieure de Cachan

DUNOD

Une précédente version de cet ouvrage a été publiée aux éditions Springer dans la collection «Scopos» sous le titre *Petits problèmes d'analyse*

Illustration de couverture : *Gettyimage*®

ISBN 978-2-10-053810-2

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage rassemble 50 problèmes qui couvrent une large part de l'Analyse mathématique que l'on rencontre au cours de la Licence à l'Université et dans les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques. Il s'agit de l'analyse mathématique de base que doivent maîtriser les étudiants en Master ainsi que les candidats aux CAPES et à l'Agrégation de mathématiques.

À la section 1, 46 des problèmes sont énoncés de manière « économe » afin que le lecteur puisse réellement s'exercer à chercher plusieurs voies d'attaque pour la résolution de la question posée. Si ces recherches sont infructueuses, des indications (question après question) sont fournies à la section 2. La section 3 du livre étant quant à elle constituée par des corrigés détaillés où l'on insiste particulièrement sur *les méthodes classiques en Analyse*. À cet effet, un paragraphe intitulé « Commentaires » complète chaque corrigé afin d'y apporter un éclairage supplémentaire.

D'autre part 4 des problèmes de la section 1 (numérotés 10, 24, 36 et 45) sont des problèmes dont l'énoncé est extrêmement détaillé et de ce fait ils ne nécessitent pas d'indication. Ils sont tout autant corrigés en profondeur et ce corrigé est encore suivi de commentaires.

Il est à noter que les 50 problèmes sont *entièrement* indépendants tant au niveau de leur énoncé que de leur solution. Il est donc possible (et conseillé) de les aborder dans un ordre arbitraire.

Il ne s'agit pas d'un livre d'exercices, il ne s'agit pas non plus (loin s'en faut) d'un livre de cours. Il s'agit d'un manuel pour *apprendre des mathématiques* et être capable d'en comprendre certains des ressorts.

En effet, il est séduisant de croire que les mathématiques (à condition parait-il qu'elles soient « correctement » présentées) peuvent s'apprendre linéairement. On commence par les définitions, puis les théorèmes en passant par quelques lemmes et propositions, on observe quelques exemples, on fait quelques exercices et ensuite on passe à une autre leçon. Il n'en n'est rien (heureusement), les mathématiques - comme toutes les autres sciences - s'apprennent et se comprennent par des allers et retours incessants entre théorie et application, calculs sordides et réflexion.

Nous souhaitons que ceux qui travaillerons à l'aide de cet ouvrage (complété par un cours de base d'Analyse) pourrons ainsi en tirer utilement partie.

Le principe de la numérotation est le suivant. Le premier numéro se rapporte à l'énoncé, le deuxième est le numéro de la section alors que le troisième indique la question traitée.

Cet ouvrage est une version révisée et augmentée du volume « Petits problèmes d'analyse » paru en 1999 chez Springer et aujourd'hui épuisé. Je tiens à remercier Véronique Almadovar qui a assuré la réalisation technique du manuscrit et Emmanuel Lorin pour sa relecture attentive et critique de son contenu. Ce travail n'aurait certainement pas été possible sans le support intellectuel que procure l'ambiance créatrice du Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, laboratoire commun à l'École Normale Supérieure de Cachan et au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS).

Jean Michel Ghidaglia
jmg@cmla.ens.cachan.fr

1

Énoncés des 50 problèmes

Nous donnons ci-dessous les énoncés. Bien que *totalement indépendants* entre eux, ils ont été regroupés par thèmes principaux.

1.1 INÉGALITÉS FONCTIONNELLES

Un point de vue très fécond consiste à considérer les fonctions (d'une ou de plusieurs variables réelles par exemple) comme des éléments d'un espace vectoriel normé, ou parfois comme des points d'un espace affine normé. L'idée de base consiste à essayer de transposer à ces espaces, en général de dimension infinie, les résultats « habituels » dans $\mathbb{R}^n$ pour en déduire des résultats sur les fonctions auxquelles on s'était initialement intéressé. Un exemple classique est le théorème du point fixe de Picard qui permet, lorsqu'il est invoqué sur un espace vectoriel normé *complet* de fonctions, de montrer l'existence de solutions pour une équation différentielle (voir par exemple le problème 36). Ces espaces vectoriels où vivent les fonctions en question — $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}), \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \ldots$ — sont de dimension *infinie*. Deux différences essentielles apparaissent alors :

- ces espaces ne sont pas forcément complets, c'est justement cette propriété qui est cruciale pour l'application du théorème de point fixe de Picard,
- on dispose sur ces espaces de plusieurs normes qui n'ont aucune raison d'être équivalentes entre elles.

Dans cette première série de problèmes, il s'agit d'établir diverses relations entre normes sur des espaces de fonctions réelles d'une variable réelle. Le problème 5 est consacré à certaines inégalités de Sobolev pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Ces inégalités sont des outils très puissants pour l'étude des équations aux dérivées partielles, notamment celles de la physique mathématique : équation de la chaleur, équation de Schrödinger, équations de Navier-Stokes, etc. Nous renvoyons aussi aux commentaires à ce problème à la page 76.

Énoncé 1

Soit $u \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ avec $u(0) = u(1) = 0$.

1.1.1. Montrer que $\int_0^1 u^2(x)\,dx \leqslant 4 \int_0^1 u'(x)^2\,dx$.

1.1.2. Notons $\Sigma = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}), u(0) = u(1) = 0, \int_0^1 u'(x)^2 dx = 1\}$. On admet qu'il existe $v \in \Sigma$ tel que

$$\int_0^1 v^2(x)\,dx = \max_{w\in\Sigma} \int_0^1 w^2(x)\,dx. \qquad (\star)$$

Expliquer pourquoi l'existence d'un tel v n'est pas immédiate.

1.1.3. Montrer que seules *deux* fonctions $v \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap \Sigma$ peuvent vérifier $(\star)$. Calculer alors $c_0 \equiv \int_0^1 v^2(x)dx$.

1.1.4. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ avec $u(0) = u(1) = 0$ on a

$$\int_0^1 u^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 u'(x)^2\,dx.$$

1.1.5. Montrer cette inégalité sans faire l'hypothèse qu'il existe $v \in \Sigma$ vérifiant $(\star)$. En déduire alors qu'il existe $v \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap \Sigma$ vérifiant $(\star)$.

Énoncé 2

Soit u une application continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par u_k le nombre complexe $u_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)e^{-ikx}dx$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On note alors $Q(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||u_k|^2 \in [0,+\infty]$.

2.1.1. Montrer que $Q(u)$ peut être effectivement égal à $+\infty$.

2.1.2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $\varphi(t)$ le nombre $\int_0^{2\pi} |u(x+t) - u(x)|^2 dx$. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.1.3. Montrer que $\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \alpha Q(u)$ où α est une constante indépendante de u.

2.1.4. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors

$$Q^2(u) \leqslant \beta \int_0^{2\pi} u^2(x)dx \int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 (x)dx \qquad (\star)$$

où β est une constante indépendante de u.

2.1.5. Quelle est la meilleure constante dans $(\star)$?

Énoncé 3

Soit u une application continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par u_k le nombre complexe $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)e^{ikx}dx$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On note alors $|u| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2\right)^{1/2}$, $||u|| = (\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|u_k|^2)^{1/2}$ et $[u] = (\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|)|u_k|^2)^{1/2}$ (certains de ces nombres pouvant être infinis).

3.1.1. Montrer qu'il existe C_1 indépendant de u telle que $[u] \leqslant C_1|u|^{1/2}||u||^{1/2}$.

3.1.2. Montrer qu'il existe C_2 indépendant de u telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| \leqslant C_2|u|^{1/2}||u||^{1/2}.$$

3.1.3. Montrer que l'assertion suivante est fausse : il existe C_3 indépendant de u telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| \leqslant C_3[u]\,.$$

3.1.4. Montrer qu'il existe C_4 indépendant de u telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| \leqslant C_4[u]\left(\log\left(1+\frac{||u||}{[u]}\right)\right)^{1/2}.$$

Énoncé 4

À toute fonction f continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on note alors $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$), on associe la suite de ses coefficients de Fourier notés $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$. Soit alors A l'ensemble des fonctions f telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$.

4.1.1. Montrer que A, muni de la norme $||f||_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$, est complet.

4.1.2. Montrer que A est une algèbre pour la multiplication.

4.1.3. Montrer que A est dense dans $\mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et que $A \neq \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4.1.4. Soit $\alpha \in]0,1]$. On dit que $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ appartient à Lip_α si

$$[f]_\alpha = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

On munit l'espace Lip_α de la norme

$$||f||_\alpha = |\hat{f}(0)| + [f]_\alpha.$$

Montrer que pour tout $\alpha \in]\frac{1}{2},1]$, $Lip_\alpha \subset A$ et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall f \in Lip_\alpha, \quad ||f||_A \leqslant C||f||_\alpha.$$

Énoncé 5

On désigne par $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{D} = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}); \exists R > 0, \quad \forall |x| \leqslant R, f(x) = 0 \}.$$

5.1.1. Construire un élément non nul de $\mathcal{D}$.

5.1.2. On se donne deux réels $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ et on cherche à savoir si

$$(I_{p,q}) \quad \exists C_{c,q} < \infty, \forall f \in \mathcal{D}, ||f||_q \leqslant C_{p,q} ||\nabla f||_p$$

où $||g||_r = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^r dx \right)^{1/r}, \quad \forall r \geqslant 1.$

Montrer que si $(I_{p,q})$ a lieu alors $p < n$ et $q = \frac{np}{n-p}$.

5.1.3. On suppose que $n \geqslant 2$ et que $I_{1,\frac{n}{n-1}}$ a lieu. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$ avec $p < n$, $(I_{p,q})$ a lieu pour $q = \frac{np}{n-p}$.

5.1.4. Montrer $(I_{1,2})$ dans le cas $n = 2$.

5.1.5. Montrer $(I_{1,\frac{n}{n-1}})$ dans le cas $n \geqslant 3$.

5.1.6. Étudier le cas $n = 1$.

1.2 TOPOLOGIE DANS DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION INFINIE

En directe continuation du thème des problèmes précédents, nous proposons 5 problèmes illustrant les propriétés topologiques de certains espaces vectoriels normés. Dans les problèmes 6 et 7 l'accent porte sur la *compacité* alors que les problèmes 8 et 9 font appel à la *convexité* (ce dernier point n'est pas transparent à la lecture des énoncés aussi nous renvoyons aux commentaires pages 84 et 88). Une des propriétés essentielles de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ est son caractère localement compacte : tout point y possède un voisinage compact. La compacité est un outil redoutable pour montrer *l'existence* de solutions à certains problèmes. Par exemple, étant donné un compact K toute fonction continue, f, de K dans $\mathbb{R}$ y possède un minimum qui de ce fait est solution du problème d'existence :

$$\text{trouver } y \in K \text{ tel que } \forall x \in K \quad f(y) \quad \leqslant \quad f(x).$$

En dimension infinie deux voies de généralisation sont possibles. Étant donnés un espace vectoriel normé et un fermé borné dans cet espace, on peut

- soit montrer que cet ensemble est compact en mettant en évidence d'autres propriétés de cet ensemble,

- soit affaiblir la topologie, c'est-à-dire avoir plus d'ouverts. Dans ce cas cet ensemble peut devenir compact. Mais alors il faut s'assurer que l'on ne dégrade pas trop les propriétés de continuité, pour cette topologie affaiblie, des fonctions qui étaient continues pour la première topologie.

Les problèmes 6 et 7 relèvent de la première catégorie alors que les problèmes 8 et 9 relèvent de la seconde.

Finalement le problème étendu 10 est consacré à l'étude de formules d'intégration numérique.

Énoncé 6

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels strictement positifs convergeant vers 0. On désigne alors par E et F les espaces vectoriels normés suivant :

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\},$$
$$F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |u_n|^2 < \infty \right\},$$

munis de leurs normes naturelles

$$||u||_E = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2} \text{ et } ||u||_F = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |u_n|^2 \right)^{1/2}.$$

6.1.1. Montrer que $E \subset F$ et $E \neq F$.

6.1.2. L'espace E est-il fermé dans F ? Quelle est l'adhérence de E dans F ?

6.1.3. Montrer que $K = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \leqslant 1\}$ est un compact de F.

Énoncé 7

On désigne par k une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Soit alors K l'opérateur linéaire

$$f \mapsto Kf : (Kf)(x) = \int_0^{2\pi} k(x-y) f(y) dy$$

pour $f \in E = \{f \in \mathbb{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}), \quad f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

7.1.1. Montrer que K est bien défini sur E et qu'il est continu lorsque l'on munit E de la norme $||f|| = \left(\int_0^{2\pi} f^2(t)dt\right)^{1/2}$.

7.1.2. Majorer la norme de K en fonction de $||k||$.

7.1.3. Exprimer les coefficients de Fourier de Kf en fonction de ceux de k et de ceux f. Quelle analogie y voyez-vous ?

7.1.4. Soit $(f(p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que cette suite est bornée dans E : $\sup_{p\in\mathbb{N}} ||f(p)|| < \infty$. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(Kf(p))_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans E.

7.1.5. Soit L une application linéaire et continue de E dans E (muni de la norme $||.||$). On suppose que pour toute suite bornée de $E, (f(p))_{p\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite de $((Lf)(p))_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge dans E. Montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, le noyau de $L - \lambda Id$ est un espace vectoriel de dimension finie.

7.1.6. Cette dernière propriété subsiste-t-elle pour $\lambda = 0$?

Énoncé 8

On se donne sur un espace de Hilbert V réel une forme bilinéaire continue a. On désigne par $||.||$ la norme V et par $((.,.))$ le produit scalaire sur V.
8.1.1. Soit K un convexe fermé non vide inclus dans V. Montrer que pour tout $u \in V$ il existe un et un seul élément de K, noté $P_K u$, tel que

$$||u - P_K u|| \leqslant ||u - v||, \forall v \in K.$$

8.1.2. On désigne par $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ le dual topologique de V. Déduire de la question qui précède que pour tout $l \in V'$, il existe un et un seul $f \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad l(v) = ((f, v)).$$

8.1.3. On suppose que a est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geqslant \alpha||v||^2, \forall v \in V$. Soit $l \in V'$, montrer qu'il existe un et un seul $u \in K$ tel que

$$l(v - u) \leqslant a(u, v - u), \forall v \in K. \tag{$\star$}$$

Énoncé 9

Dans un espace préhilbertien H, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (F) s'il existe $u \in H$ tel que $\forall v \in H$, $\lim_{n\to\infty}((u_n, v)) = ((u, v))$.

9.1.1. Montrer que si (u_n) vérifie (F) alors u est uniquement déterminé.

9.1.2. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} ||u_n - u|| = 0$ alors (u_n) vérifie (F).

9.1.3. Donner un exemple de suite (u_n) vérifiant (F) mais telle que $||u_n - u||$ ne tend pas vers zéro.

9.1.4. Soit (u_n) vérifiant (F). Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si $\lim_{n\to\infty} ||u_n|| = ||u||$.

9.1.5. Soit (u_n) vérifiant (F) et telle que $\lim_{n\to\infty} ||u_n|| = l$. Montrer que $l \geqslant ||u||$.

9.1.6. On suppose que H vérifie la propriété suivante. Toute suite bornée possède une sous-suite vérifiant (F). Montrer que pour tout $v \in H$, la fonction $w \mapsto ||w||^2 - |((w,v))|^{3/2}$ atteint son minimum.

9.1.7. Montrer que de toute suite bornée de $l^2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum u_n^2 < \infty\}$, muni du produit scalaire $(((u_n),(v_n))) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$, on peut extraire une suite vérifiant (F).

Énoncé 10

Notations (les résultats énoncés ici seront *admis*).

On désigne par $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0([-1,1];\mathbb{R})$, l'espace vectoriel formé par les applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{E}$ de la norme $||\quad||_\infty$: pour $g \in \mathcal{E}$,

$$||g||_\infty = \sup\{|g(t)|, t \in [-1,1]\}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, P_m désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

Dans le problème, w désigne un élément de $\mathcal{E}$ vérifiant : $\forall x \in [-1,1]$, $w(x) > 0$.

Pour f et g dans $\mathcal{E}$, $((f,g))$ désigne le réel :

$$((f,g)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)dx\,, \tag{1}$$

ce qui définit une application bilinéaire symétrique de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

➤ Première partie

10.1.1. Montrer que $((.,.))$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$ (il suffira de montrer que si $((f,f)) = 0$ pour $f \in \mathcal{E}$ alors $f \equiv 0$).

On se propose de construire une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ qui vérifie :

(i) p_n est un polynôme par rapport à la variable x, de degré n et dont le coefficient de x^n est 1,

(ii) pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $q \in P_{n-1}$ on a $((p_n,q)) = 0$ (c'est-à-dire que p_n est orthogonal à P_{n-1}).

10.1.2. Montrer qu'il existe au plus une telle suite.

10.1.3. Montrer que $p_0 = 1$ et $p_1(x) = x - \frac{((p_0,x))}{((p_0,p_0))}$.

10.1.4. On suppose que $n \geqslant 2$ et que p_{n-1} et p_{n-2} sont connus. Soient alors β_n et α_n les nombres réels

$$\beta_n = \frac{((p_{n-1},p_{n-1}))}{((p_{n-2},p_{n-2}))}, \quad \alpha_n = \frac{((xp_{n-1},p_{n-1}))}{((p_{n-1},p_{n-1}))}.$$

Montrer que

$$p_n = (x - \alpha_n)p_{n-1} - \beta_n p_{n-2} \tag{2}$$

vérifie (i) et (ii) si les p_m pour $m \in \{0, ..., n-1\}$ vérifient (i) et (ii). Conclure à l'existence des (p_n).

10.1.5. Application. On suppose que $w(x) = 1$. Calculer p_0, p_1, p_2, p_3, et p_4.

On revient au *cas général* où w est quelconque.

On désire montrer que p_n possède n racines simples et réelles. *Prenons donc* $n \geqslant 1$.

10.1.6. Montrer que pour $n \geqslant 1$, p_n possède dans $]-1, 1[$ au moins une racine réelle de multiplicité impaire (on pourra remarquer que $\int_{-1}^{1} p_n(x)w(x)dx = 0$).

10.1.7. On fixe $n \geqslant 1$. Soient alors $x_1, ..., x_m$ pour $m \geqslant 1$ les racines de p_n qui appartiennent à $]-1, 1[$ et qui sont de multiplicité impaire. En considérant le polynôme $\pi : \pi(x) = (x - x_1)...(x - x_m)$ et l'intégrale $((p_n, \pi))$, montrer que $m = n$ et conclure que p_n possède n racines réelles distinctes qui appartiennent à $]-1, 1[$.

➤ Deuxième partie

Une formule d'intégration approchée sur $[-1, 1]$ est la donnée de $k+1$ éléments de $[-1, 1]$ notés $\{x_i\}_{i=0}^{k}$ et de $k+1$ nombres réels $\lambda_i : \{\lambda_i\}_{i=0}^{k}$. On écrit alors

$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i). \tag{3}$$

Dans cette définition k est un entier naturel arbitraire, on dira que (3) est une formule à $k+1$ points. On associe alors à (3) une application E de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : pour $f \in \mathcal{E}$,

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i) \tag{4}$$

(E pour erreur).

On dira que (3) est d'ordre $m \in \mathbb{N}$ si

$$\forall p \in P_m, E(p) = 0. \tag{5}$$

10.1.8. Montrer que $E : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

10.1.9. En évaluant le nombre de paramètres et de contraintes dans la définition d'une formule d'intégration approchée à $k+1$ points d'ordre m, justifier heuristiquement que $m \leqslant 2k+1$.

On se propose de montrer qu'il existe une formule d'intégration approchée (3) à $k+1$ points qui soit d'ordre $2k+1$.

On désigne par $x_0, ..., x_k$ les $k+1$ racines de p_{k+1} (voir la question 10.1.7). On note l_i pour $i \in \{0, ..., k\}$ le monôme de Lagrange :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

et on introduit les réels

$$\lambda_i = ((l_i, 1)) = \int_{-1}^{1} l_i(x) w(x) dx. \tag{6}$$

Soit alors pour $f \in \mathcal{E}$, $p(f)$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \ldots, x_k$.

10.1.10. Montrer que $p(f) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) l_i$.

10.1.11. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i) = \int_{-1}^{1} p(f)(x) w(x) dx. \tag{7}$$

10.1.12. En déduire que pour ce choix de x_i et λ_i la formule d'intégration approchée (3) est au moins d'ordre k.

10.1.13. Soit $p \in P_{2k+1}$. Montrer qu'il existe $q \in P_k$ et $r \in P_k$ tels que $p = ql + r$ où l est le polynôme $\prod_{i=0}^{k}(x - x_i)$.

10.1.14. Montrer que (avec les notations de la question 10.1.13)

$$\int_{-1}^{1} p(x) w(x) dx = \int_{-1}^{1} r(x) w(x) dx.$$

10.1.15. Conclure que si les (x_i) sont les racines de p_{k+1} et les (λ_i) sont donnés par (6) alors (3) est une formule d'intégration approchée à $k+1$ points qui est d'ordre $2k+1$.

➤ Troisième partie

Dans cette partie on suppose que $w(x) = 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$ et on choisit pour (x_i) et (λ_i) ceux obtenus à la question 10.1.15 de sorte que (3), qui s'écrit ici

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i), \tag{8}$$

soit d'ordre $2k+1$ (k est un entier naturel arbitraire).

On admet alors l'estimation d'erreur suivante. Pour $f \in \mathcal{C}^{2k+2}([-1,1];\mathbb{R})$ on a

$$|E(f)| \leqslant \frac{2^{2k+3}((k+1)!)^4}{(2k+3)((2k+2)!)^3}||f^{(2k+2)}||_\infty. \tag{9}$$

10.1.16. En utilisant que $p_3(x) = x^3 - \frac{3x}{5}$, montrer que (8) s'écrit pour $k = 2$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{1}{9}(5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})). \tag{10}$$

10.1.17. Écrire (9) dans ce cas.

10.1.18. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1} \sqrt{2+x} \quad dx$.

10.1.19. Montrer que (9), dans le cas $k = 2$, s'écrit pour $f(x) = \sqrt{2+x}$:

$$|E(f)| \leqslant \frac{3}{2^7 5^2} = 9,375 \ \ 10^{-4}.$$

10.1.20. Avec combien de chiffres significatifs faut-il évaluer le second membre de (10) ?

10.1.21. Évaluer le second membre de (10) et $E(f)$. Conclusion ?

10.1.22. On rappelle la formule d'intégration approchée de Simpson (formule à trois points) :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)). \tag{11}$$

Comparer, sur l'exemple précédant $f(x) = \sqrt{2+x}$, les valeurs approchées obtenues par (10) et (11). En étudiant l'ordre de (11), expliquer ce que vous avez constaté.

1.3 AUTOUR DES FONCTIONS IMPLICITES

Le théorème des fonctions implicites est un outil de base pour montrer l'existence de solutions à certaines équations non linéaires. Il est la généralisation naturelle du résultat classique affirmant qu'un système linéaire de n équations à n inconnues possède une et une seule solution quel que soit son second membre lorsque son déterminant est non nul. Ainsi lorsque l'on cherche à résoudre un système de n équations non linéaires par rapport à n inconnues, la première tentative à faire est de tacher d'appliquer le théorème des fonctions implicites. Deux questions se posent alors.

- Dans le cas où ce théorème s'applique est-il possible de calculer effectivement cette solution (à l'aide d'un ordinateur par exemple) ?
- Dans le cas où le théorème ne s'applique pas, que peut on dire sur l'ensemble des solutions ?

Nous commençons par le problème 11 dont l'objet est de justifier grâce au théorème des fonctions implicites une relation (voir le numéro 11.1.2.) courante en thermodynamique. Le problème 12 propose l'étude de l'algorithme de Newton qui se rapporte à la première question alors que le problème 14 propose la description d'une situation qui relève de la seconde. L'objet de le problème 13 quant à lui est de relaxer (*i.e.* remplacer par une condition moins forte) une des hypothèses du théorème des fonctions implicites. Le problème 15 envisage une situation où le théorème des fonctions implicites ne peut s'appliquer car un des ensembles où l'on cherche une des inconnues est d'intérieur vide (il s'agit de $\mathcal{O}(n)$). Finalement, le problème 16 est consacré à la construction (à l'aide du théorème d'inversion locale) d'une application vectorielle qui étend la normale unitaire sur une courbe du plan.

Énoncé 11

Une *loi d'état* est une fonction $f : (P, V, T) \mapsto f(P, V, T) \in \mathbb{R}$ où $f \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}_+^\star)^3, \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial T} \text{ ne s'annule pas.}$$

11.1.1. Étant donné R_0 constante strictement positive, montrer que

$$f_{R_0} : (P, V, T) \mapsto PV - R_0 T$$

est une loi d'état.

11.1.2. Résoudre $f_{R_0}(P, V, T) = 0$ en exprimant $P = P(V, T), V = V(T, P)$ et $T = T(P, V)$ et montrer que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1.$$

11.1.3. Généraliser à une loi d'état arbitraire.

Énoncé 12

On désigne par $||.||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m, m \geqslant 1$ et on considère une application G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^m$ vérifiant $G(0) = 0$ et les trois propriétés suivantes :

(i) $\exists \beta, \gamma, \rho > 0$ tels que $\rho\gamma\beta < 2/3$,

(ii) $\frac{\partial G}{\partial u}(0)$ est inversible et $||\frac{\partial G}{\partial u}(0)^{-1}|| \leqslant \beta$,

(iii) $||\frac{\partial G}{\partial u}(v) - \frac{\partial G}{\partial u}(w)|| \leqslant \gamma||v - w||$ pour $||u|| \leqslant \rho$ et $||v|| \leqslant \rho$.

12.1.1. Montrer que pour tout $u \in B_\rho(0) = \{v \in \mathbb{R}^m, ||v|| \leqslant \rho\}$, l'application $\frac{\partial G}{\partial u}(u)$ est inversible et que $||\frac{\partial G}{\partial u}(u)^{-1}|| \leqslant \frac{\beta}{1-\beta\gamma\rho}$.

12.1.2. Soit $u_n \in B_\rho(0)$. On désigne par u_{n+1} l'élément de $\mathbb{R}^m$:

$$u_{n+1} = u_n - \left(\frac{\partial G}{\partial u}(u_n)\right)^{-1} G(u_n).$$

Montrer que $||u_{n+1}|| \leqslant a||u_n||^2$ avec $a = \beta\gamma/(2(1 - \rho\beta\gamma))$ et en déduire que $u_{n+1} \in B_\rho(0)$.

12.1.3. Étudier le comportement de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Énoncé 13

On se donne $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et on suppose que G est de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage d'un point $(u_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et que l'application linéaire $\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, \lambda_0)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est inversible.

13.1.1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $\rho > 0$ tels que si $||G(u_0, \lambda_0)|| \leqslant \delta$, il existe une application u définie sur un voisinage de λ_0 telle que $(u(\lambda), \lambda)$ soit la seule solution dans $B_\rho(u_0, \lambda_0)$ de l'équation $G(u, \lambda) = 0$ avec $||u - u_0|| \leqslant \rho$ et $||\lambda - \lambda_0|| \leqslant \rho$.

13.1.2. Montrer que l'application $\lambda \mapsto u(\lambda)$ est continue.

Énoncé 14

Soit F une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$F(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}(0,0) = 0$ et $\det M_0 < 0$ où $M_0 = M(0,0)$ avec $M(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ matrice hessienne de F.

14.1.1. Vérifier que $F(x, y) = x^2 - (1+x)y^2$ satisfait à ces hypothèses et représenter graphiquement l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0\}$.

14.1.2. On note $A(x_1, x_2)$ la matrice

$$A(x_1, x_2) = 2\int_0^1 (M(tx_1, tx_2) - M_0)(1 - t)dt.$$

Montrer que $A(x_1, x_2)$ est symétrique et que

$$F(m) = \frac{1}{2}(M_0.m + A(m).m).m.$$

14.1.3. Montrer qu'il existe C, une fonction définie sur un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans l'ensemble des matrices 2×2 telle que

$$\begin{cases} {}^tC(m)M_0C(m) = M_0 + A(m)\,, \\ C(0) = I\,, \end{cases}$$

et C est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de m.

14.1.4. En déduire qu'au voisinage de $(0,0)$, on a

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(M_0\varphi(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2))\,,$$

où φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféormorphisme, de ce voisinage de $(0,0)$ sur un voisinage de $(0,0)$, vérifiant $\varphi(0,0) = (0,0)$ et $D\varphi(0,0) = Id$. Étudier dans cette optique l'exemple de la 1re question.

14.1.5. Quelle est la nature géométrique, au voisinage de $(0,0)$, des solutions de $F(x_1, x_2) = 0$?

Énoncé 15

On désigne par $\mathcal{S}^+(n)$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives $n \times n$ et par $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices $n \times n$, orthogonales.

Soit alors $\varphi : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^+(n) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(R, U) = RU$.

15.1.1. Montrer que φ prend ses valeurs dans $Gl_n(\mathbb{R})$.

15.1.2. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^+(n)$ sur $Gl_n(\mathbb{R})$.

15.1.3. Montrer que φ^{-1} est continue de $Gl_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^+(n)$.

Énoncé 16

Étant donné $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on désigne par Γ son graphe :

$$\Gamma = \{(\varphi(x_1), x_1), x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|.\|$.

16.1.1. Montrer que pout tout $x \in \mathbb{R}^2$, il existe $y \in \Gamma$ tel que

$$(\star) \qquad \forall z \in \Gamma, \|y - x\| \leqslant \|z - x\|.$$

16.1.2. Montrer que y n'est pas forcément unique mais que $d_\Gamma(x) = \|y - x\|$ ne dépend pas du y obtenu.

16.1.3. On suppose que $\kappa \equiv sup_{x_1 \in \mathbb{R}} \dfrac{| \varphi''(x_1) |}{(1 + \varphi'(x_1)^2)^{3/2}} < \infty$. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^2$ vérifie $\kappa\, d_\Gamma(x) < 1$ alors $(\star)$ possède une et une seule solution y.

16.1.4. Montrer que $T = \{x \in \mathbb{R}^2, \kappa\, d_\Gamma(x) < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

16.1.5. On désigne par $\Omega = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2, x_0 < \varphi(x_1)\}$. Montrer que la restriction de d_Γ à $T \cap \Omega$ peut être prolongée sur T en une application $\mathcal{C}^\infty$, notée δ, telle que $(\nabla\delta)(x)$ soit un vecteur unitaire normal à Γ lorsque $x \in \Gamma$.

1.4 CALCUL DES VARIATIONS

Le calcul des variations est une des disciplines les plus anciennes des mathématiques. Elle est toujours très active et sans cesse renouvelée. Il s'agit le plus souvent de déterminer une (ou des fonctions) qui vérifient une condition d'optimalité. Un des problèmes les plus célèbres est celui qui consiste à déterminer quelle est la courbe de longueur donnée qui entoure la plus grande surface (il s'agit du problème isopérimétrique). La réponse (le cercle) était connue des grecs dans l'antiquité. Le problème 22 présente la solution à cette question proposée par Hurwitz en 1902 (nous renvoyons à ce propos aux commentaires à ce problème à la page 121). Ainsi certains problèmes du calcul des variations sont d'origine géométrique (le problème 23 fait aussi partie de cette catégorie). D'autres sont d'origine physique, le plus souvent en relation avec le principe de moindre action (minimisation de l'énergie, du chemin, …). C'est par exemple le cas des problèmes 19 et 20 qui sont liés à un problème qui se rencontre en électrostatique alors que le problème résolu au problème 21 est en rapport (par exemple) avec la répartition de la température dans un milieu au comportement non linéaire. Du point de vue mathématique la difficulté provient du fait que l'on cherche à minimiser (ou maximiser) une quantité - l'énergie par exemple - par rapport à une fonction (c'est-à-dire un élément dans un espace de dimension infinie). Nous sommes donc confrontés aux problèmes déjà évoqués (pages 1 et 4), à savoir la difficulté de mettre en œuvre des arguments de compacité.
Nous commençons par deux problèmes (17 et 18) consacrés aux problèmes d'extrema liés dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'il s'agit de trouver des conditions nécessaires lorsque l'on minimise une fonction sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par des relations de type égalités et qui par conséquent n'est pas en général un ouvert. La section se termine par le problème étendu 24 qui a pour thème l'étude de la minimisation de certaines fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que la convergence de l'algorithme du gradient à pas optimal.

Énoncé 17

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$ et $\psi_j \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R})$ pour $j = 1, .., q \geqslant 1$. On désigne alors par E l'ensemble

$$E = \{v \in \Omega; \psi_j(v) = 0 \text{ pour } j = 1, .., q\}.$$

Pour $u \in E$, $r(u)$ désigne le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$,

$$\{\nabla\psi_1(u), \dots, \nabla\psi_q(u)\}.$$

17.1.1. Montrer que si $r(u) \geqslant n$ alors u est un point isolé de E.

17.1.2. On suppose que $\nabla\psi_1(u), ..., \nabla\psi_q(u)$ est une famille libre et que $q \leqslant n - 1$. Montrer qu'il existe une application $w \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^q)$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $p = n - q$, contenant 0, telle que pour $\varepsilon_0 > 0$, $E \cap B(u, \varepsilon_0)$ soit le graphe de w.

17.1.3. Montrer que si E est non vide et si u, avec $r(u) \leqslant n-1$, minimise une fonction $J \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R})$ sur E, c'est-à-dire que $\forall v \in E$, $J(u) \leqslant J(v)$, alors il existe q nombres réels $\lambda_1(u), ..., \lambda_q(u)$ tels que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$

$$\frac{\partial J}{\partial v_k}(u) = -\sum_{r=1}^{q} \lambda_r(u) \frac{\partial \psi_r}{\partial v_k}(u)\,.$$

Énoncé 18

On se donne q fonctions $\psi_1, ..., \psi_q$ continues sur $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ et on désigne par E l'ensemble

$$E = \{v \in \mathbb{R}^n, \psi_j(v) = 0 \text{ pour } j = 1, ..., q\}.$$

On suppose que l'ensemble E est non vide.

18.1.1. Pour $J \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, montrer que si J est minorée, la fonction f : $R \mapsto Min_{\|v\| \geqslant R} J(v)$ est croissante.

On suppose dorénavant que $\lim_{R \to +\infty} f(R) = +\infty$ (on dit que J est infinie à l'infini).

18.1.2. Montrer que J atteint son minimum sur E.

18.1.3. Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par J_m la fonction $v \mapsto J(v) + m \sum_{j=1}^{q} (\psi_j(v))^2$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, J_m atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ en un point $u_m \in \mathbb{R}^n$.

18.1.4. Montrer que la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée.

18.1.5. Montrer que si $u^\star$ est une valeur d'adhérence de cette suite, $u^\star$ minimise J sur E.

Énoncé 19

Notons $E_0 = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ et $E_1 = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap E_0$. Étant donné $f \in E_0$, on introduit la fonctionnelle I sur E_1 par

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} v'(x)^2 dx - \int_0^{2\pi} v(x) f(x) dx.$$

19.1.1. Montrer que si $u \in E_1$ vérifie $I(u) \leqslant I(v), \forall v \in E_1$ alors

$$(\star) \quad \forall w \in E_1 \quad \int_0^{2\pi} u'(x) w'(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) w(x) dx.$$

19.1.2. Montrer que si $(\star)$ a lieu alors $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, ce que l'on suppose désormais.

19.1.3. On désigne par f_n le nième coefficient de Fourier de f :

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n| < \infty$. Déterminer toutes les solutions u de $(\star)$ en fonction de f.

19.1.4. Montrer que les fonctions u ainsi déterminées sont les solutions de :

$$I(u) \leqslant I(v), \quad \forall v \in E_1.$$

Énoncé 20

On désigne par E_0 l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques par rapport à chacune des deux variables :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = f(x_1 + 2\pi, x_2) = f(x_1, x_2 + 2\pi).$$

Étant donné $f \in E_0$, on construit une application $I : E_1 \to \mathbb{R}$ où $E_1 = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cap E_0$ en posant

$$I(v) = \frac{1}{2}\iint_Q |\nabla v|^2(x)dx - \iint_Q f(x)v(x)dx,$$

où $Q = [0, 2\pi]^2$.

20.1.1. Montrer que si $u \in E_1$ vérifie

$$I(u) = \min_{v\in E_1} I(v)\,,$$

alors

$$\forall w \in E_1 \quad \iint_Q \nabla u.\nabla w dx = \iint_Q f(x)w(x)dx. \qquad (*)$$

En déduire que $\iint_Q f(x)dx = 0$, ce que l'on supposera désormais.

20.1.2. Montrer que, réciproquement, s'il existe $u \in E_1$ vérifiant $(\star)$ alors $I(u) = \min_{v\in E_1} I(v)$.

20.1.3. Soit $h \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. On note D_h l'application qui associe à $v \in E_0$ la fonction $D_h v$:

$$(D_h v)(x) = \frac{v(x+h) - v(x)}{|h|}\,,$$

où $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Montrer que $D_h \in \mathcal{L}(E_0) \cap \mathcal{L}(E_1)$ et que pour tout $v \in E_1$

$$\iint_Q |D_h v(x)|^2 dx \leqslant \iint_Q |\nabla v(x)|^2 dx.$$

20.1.4. Montrer que si $u \in E_1$ est solution de $(\star)$ alors

$$\iint_Q |\nabla D_h u(x)|^2 dx \leqslant \iint_Q |f(x)|^2 dx.$$

20.1.5. En déduire que si $u \in E_1$ est solution de $(\star)$ alors la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(k_1^2+k_2^2)^2|u_k|^2$ est convergente où l'on a noté :

$$u_k = \iint_Q u(x)e^{-ik.x}dx.$$

Énoncé 21

On se donne une fonction continue de f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sur l'espace $E = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}), v(0) = v(1) = 0\}$ nous définissons une fonctionnelle $\mathcal{E}$ par la formule $\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)^2 dx + \int_0^1 f(v(x))dx$.

21.1.1. On suppose que f est convexe. Montrer qu'il existe au plus un $u \in E$ tel que

$$(\star) \quad \forall v \in E, \mathcal{E}(u) \leqslant \mathcal{E}(v).$$

21.1.2. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1];\mathbb{R})$ vérifiant $(\star)$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (mais pas forcément convexe). Montrer que

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + f^{'}(u) = 0\,.$$

21.1.3. Toujours pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, montrer que si $u \in E$ est solution de $(\star)$ alors $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Énoncé 22

Une courbe plane fermée paramétrée par son abscisse curviligne s est la donnée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $x(.)$ et $y(.)$, qui sont périodiques (i.e. $\exists L > 0, x(s+L) = x(s)$ et $y(s+L) = y(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$) et telles que $(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = 1, \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Le périmètre de la courbe est le nombre L et l'aire qu'elle enserre est le nombre $A = \int_0^L x(s)\frac{dy}{ds}(s)ds$.

22.1.1. On désigne par x_n et y_n les coefficients de Fourier de x et y : pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$z_n = \frac{1}{L}\int_0^L z(s)e^{-i\frac{2\pi ns}{L}}ds, z \in \{x, y\}.$$

Exprimer A en fonction des x_n et y_n.

22.1.2. Montrer que $4\pi A \leqslant L^2$.

22.1.3. Étudier le cas d'égalité.

Énoncé 23

On considère les courbes dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{C} = \{(x, y(x), 0)\, , x \in [x_0\, , x_1]\}$ où $y(\cdot)$ est une fonction régulière à valeurs positives ou nulles.

23.1.1. Montrer par un raisonnement géométrique simple que l'aire de la surface que l'on obtient en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de l'axe des x dans $\mathbb{R}^3$ est :

$$2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx\, .$$

23.1.2. On se donne deux réels positifs y_0 et y_1. Quelles sont les courbes $\mathcal{C}$, vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$ qui minimisent l'aire de la surface précédente ?

Énoncé 24

Dans tout l'énoncé $||.||$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ et $(.,.)$ le produit scalaire qui lui est associé. On rappelle qu'un sous ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est convexe si pour tous $u, v \in U$ et $\theta \in [0, 1]$ on a $\theta v + (1 - \theta)u \in U$. On rappelle aussi qu'une application $\varphi\ : U \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tous $u, v \in U$ et $\theta \in [0, 1]$,

$$\varphi(\theta v + (1 - \theta)u) \leqslant \theta\varphi(v) + (1 - \theta)\varphi(u).$$

24.1.1. Étant donnée une application F de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, montrer que la relation

$$(F'(u), v) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(u + \varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon}, \quad \forall u,\ v \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

définit une application continue $F'\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$F(v) - F(u) = \int_0^1 (F'(tv + (1 - t)u),\ v - u)dt. \tag{2}$$

24.1.2. Dans tout ce qui suit on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$(F'(u) - F'(v), u - v) \geqslant \alpha||u - v||^2, \tag{3}$$

$$||F'(u) - F'(v)|| \leqslant M||u - v||. \tag{4}$$

Étant donnée A, une matrice à coefficients réels $n \times n$, et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que

$$F(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v) \tag{5}$$

vérifie (3) et (4).

24.1.3. Étant donnés $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in [0, 1]$, on pose

$$\varphi(\theta) = F(\theta v + (1 - \theta)u) + \frac{\alpha\theta(1 - \theta)}{2}||v - u||^2 - \theta F(v) - (1 - \theta)F(u).$$

Montrer que φ' est croissante et en déduire que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in [0,1]$ on a

$$F(\theta v + (1-\theta)u) + \frac{\alpha\theta(1-\theta)}{2}||v-u||^2 \leqslant \theta F(v) + (1-\theta)F(u). \tag{6}$$

24.1.4. Montrer, en utilisant (2) et (3), que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$F(v) \geqslant F(u) + (F'(u), v-u) + \frac{\alpha}{2}||v-u||^2. \tag{7}$$

24.1.5. On se donne un sous ensemble convexe, fermé et non vide $\mathbb{R}^n$, noté U, et on étudie le problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in U \text{ tel que} \\ F(u) = \min\limits_{v \in U} F(v). \end{cases} \tag{8}$$

Montrer que (8) admet au plus une solution.

24.1.6. On dit que la suite $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ de points U est minimisante si la suite $F(u^m)$ converge et

$$\lim_{m\to\infty} F(u^m) = \inf_{v\in U} F(v). \tag{9}$$

Montrer que si $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est minimisante et converge alors sa limite est solution de (8).

24.1.7. Montrer qu'il existe des suites minimisantes.

24.1.8. Montrer que si $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est minimisante alors elle est bornée (on pourra utiliser (7)).

24.1.9. Montrer que (8) admet une solution.

24.1.10. Montrer que toute suite minimisante converge vers la solution de (8).

24.1.11. On suppose que $U = \mathbb{R}^n$, montrer que la solution de (8) est caractérisée par

$$F'(u) = 0. \tag{10}$$

24.1.12. Caractériser de manière similaire la solution de (8) lorsque $U \neq \mathbb{R}^n$. Traiter le cas où U est un espace vectoriel.

24.1.13. On suppose que l'on dispose d'une fonction φ convexe et continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+ = [0,\infty]$ qui vérifie $\varphi(v) = 0$ si et seulement si $v \in U$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ F_\varepsilon(u^\varepsilon) = \min\limits_{v\in\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(v) \end{cases} \tag{11}$$

où

$$F_\varepsilon(v) = F(v) + \frac{1}{\varepsilon}\varphi(v) \tag{12}$$

possède une solution unique.

24.1.14. Montrer que u^ε est bornée indépendamment de $\varepsilon \in\ ]0,1]$ et que u^ε converge vers u, solution de (8), lorsque ε tend vers 0.

24.1.15. On suppose que U est de la forme

$$U = \{v \in \mathbb{R}^n,\ g_i(v) \leqslant 0,\ i = 1, ..., p\} \tag{13}$$

où les g_i sont des fonctions convexes et continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Donner une fonction φ qui vérifie les conditions de la question 24.1.13.

24.1.16. On revient dans les questions qui suivent au problème (8) avec $U = \mathbb{R}^n$ et on part de v^0 arbitraire dans $\mathbb{R}^n$. Supposant que v^k est connu, on pose le problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } \rho_k \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ F(v^k - \rho_k F'(v^k)) = \min\limits_{\rho\in\mathbb{R}} F(v^k - \rho F'(v^k)). \end{cases} \tag{14}$$

Montrer que si v_k n'est pas solution de (8) alors (14) possède une solution unique.

24.1.17. Si v_k est solution de (8), on prend $v_{k+1} = v_k$, sinon $v_{k+1} = v_k - \rho_k F'(v^k)$. Montrer que $(F'(v_{k+1}), F'(v_k)) = 0$.

24.1.18. En déduire que

$$F(v^k) - F(v^{k+1}) \geqslant \frac{\alpha}{2}||v^k - v^{k+1}||^2. \tag{15}$$

24.1.19. Montrer que la suite (v^k) ainsi construite converge vers la solution de (8).

24.1.20. Dans le cas où F est donné par (5), et A est symétrique, écrire explicitement la relation qui fait passer de v^k à v^{k+1}. Commenter cet algorithme.

1.5 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Sous le vocable équations différentielles, nous avons regroupé 8 problèmes (numérotés de 25 à 32) consacrés à des équations différentielles ordinaires et 3 (numéros 33 à 35) consacrés à des équations aux dérivées partielles. Le problème étendu 36 étant quant à lui consacré à l'étude géométrique du comportement pour les grands temps de systèmes différentiels de type gradients.

La théorie d'existence de solutions du problème de Cauchy (problème aux valeurs initiales) pour les équations différentielles est essentiellement résolu - théorème de Cauchy-Lipschitz et théorème de Peano (ce dernier est l'objet du problème 25) -. Pour les équations aux dérivées partielles le contexte est bien plus ouvert. C'est d'ailleurs un des domaines de recherche les plus actifs en analyse, voire en mathématiques. Les équations différentielles foisonnent et la puissance actuelle des outils de simulation numérique (seule méthode à ce jour permettant d'obtenir dans ce domaine et sur des problèmes non académiques des résultats quantitatifs) font que de plus en plus l'étude du monde qui nous entoure (météorologie, économie, technologie avancée, télécommunications, ... voire santé) produit sans arrêt de nouveaux modèles à base d'équations différentielles pour lesquels on souhaite disposer de résultats quantitatifs (comme par exemple en météorologie : quelle température fera-t -il demain ?, etc.). L'analyse mathématique préalable de ces modèles s'avère essentielle pour leur simulation. Du travail en perspective pour des générations de mathématiciens ... ! Il y a un lien très profond entre équations différentielles et géométrie. La nature géométrique de l'ensemble des solutions est souvent le problème clef lorsque l'on souhaite faire une théorie qualitative. Les problèmes 27 et 36 en sont de bons exemples.

Énoncé 25

Pour $m \in \mathbb{R}$ et $a < b$, on désigne par E l'espace affine

$$E_{a,b} = \{f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}),\, f(a) = m\}.$$

Étant donné $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ on lui associe l'application $\mathcal{T}$ de $E_{a,b}$ dans lui-même définie par : pour $f \in E_{a,b}$,

$$(\mathcal{T} f)(t) = m + \int_a^t \varphi(f(s), s)ds.$$

25.1.1. Montrer que $\mathcal{T}(E_{a,b}) \subset \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R})$ et que les deux problèmes suivants sont équivalents.

$$\text{Trouver } f \in E_{a,b} \text{ tel que } \mathcal{T} f = f. \tag{P}$$

$$\text{Trouver } f \in E_{a,b} \cap \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R}) \text{ tel que} \tag{Q}$$
$$f'(t) = \varphi(f(t), t), \quad \forall t \in [a,b].$$

25.1.2. Soit $r > 0$ arbitraire et $M = \sup\{|\varphi(y,t)|, |y-m| \leqslant r, a \leqslant t \leqslant b\}$. Montrer que si δ vérifie $0 < \delta \leqslant b-a$ et $\delta M \leqslant r$ alors $\mathcal{T}$ envoie

$$\mathcal{E} \equiv \{f \in E_{a,a+\delta}, \forall t \in [a,a+\delta] \quad |f(t)-m| \leqslant r\}$$

dans lui même. On suppose dans la suite que δ remplit cette condition.

25.1.3. Étant donné $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $[a-\frac{1}{n}, a+\delta]$ par récurrence comme suit. Sur $[a-\frac{1}{n}, a[$, $f_n(t) = m$. On suppose que f_n a été construite sur $[a+\frac{k-1}{n}, a+\frac{k}{n}[$, $k \geqslant 0$, et on prend sur $[a+\frac{k}{n}, a+\frac{k+1}{n}[$,
$f_n(t) = m + \int_a^t \varphi(s, f_n(s-\frac{1}{n}))ds$. Montrer que $f_n|_{[a,a+\delta]} \in \mathcal{E}$.

25.1.4. Montrer que pour t_1 et t_2 dans $[a,a+\delta]$, $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leqslant 2M|t_1 - t_2|$.

25.1.5. Montrer que l'on peut extraire de (f_n) une sous suite qui converge uniformément sur $[a,a+\delta]$ vers une solution de (Q) avec $b = a+\delta$.

Énoncé 26

Étant donné une fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on désigne pour chaque $C \in \mathbb{R}$ par E_C l'ensemble de niveau de H :

$$E_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, H(x, y) = C\}.$$

On étudie alors quelques propriétés du système formé par les deux équations différentielles :

$$(E) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & \dfrac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{array} \right.$$

26.1.1. Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels. À quelle condition nécessaire et suffisante, existe-t-il une fonction H telle que le système différentiel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

puisse se mettre sous la forme (E) ? Cette condition dépend-elle de la base choisie sur $\mathbb{R}^2$? Déterminer les fonctions H dans le cas où la condition nécessaire et suffisante est remplie.

26.1.2. Discuter l'existence de solutions de (E) lorsqu'on prescrit les données initiales $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ où $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

26.1.3. On dit que la fonction H vérifie (P) si pour tout $C \in \mathbb{R}$, lorsque E_C n'est pas vide, c'est un ensemble borné.

Montrer que si H vérifie (P), les solutions maximales de (E) sont définies pour $t \in \mathbb{R}$.

26.1.4. On définit les deux fonctions :

$$H_1(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4}, \quad H_2(x, y) = \frac{x^2}{2} - \cos y.$$

Les solutions maximales de (E^1) (respectivement (E^2)) sont-elles définies pour $t \in \mathbb{R}$?

Énoncé 27

On désigne par g une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$. On note alors $\omega = g'(0)$ et $G(x) = \int_0^x g(y)dy$. L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = 0,$$

que l'on écrit aussi

$$(S) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x).$$

27.1.1. Discuter brièvement l'existence de solutions de l'équation (E).

27.1.2. Montrer que toute trajectoire est incluse dans un ensemble

$$\mathcal{E}_c = \left\{ \frac{1}{2}y^2 + G(x) = c \right\},$$

$c \in \mathbb{R}$, et discuter la forme de ces ensembles au voisinage du point $(0, 0)$.

27.1.3. On désigne par Γ le graphe de la fonction G : $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = G(x)\}$ et on choisit $c \in \mathbb{R}$ tel que l'arc $\widehat{AB} \subset \Gamma$ avec $A = (a, c)$ et $B(b, c)$ soit sous $y = c$: $G(x) < c$ pour $x \in]a, b[$ (voir la Figure 1.1).

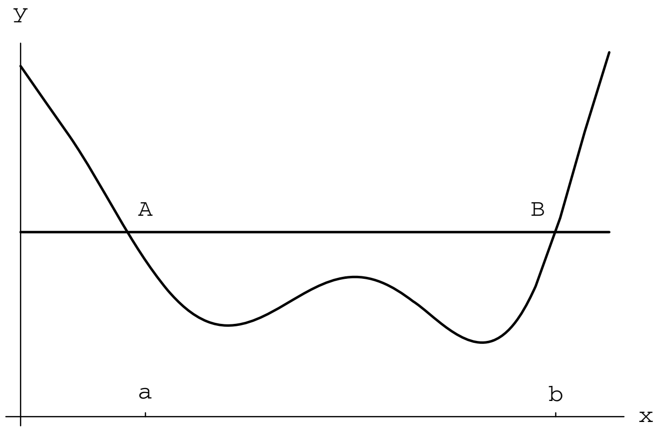


Figure 1.1 Arc $\widehat{AB}$ sous $y = c$

On suppose aussi que $g(a)$ et $g(b)$ sont non nuls. On forme alors la courbe plane $\mathcal{C} = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2; y^2 = 2(c - G(x))\}$ (voir Figure 1.2).

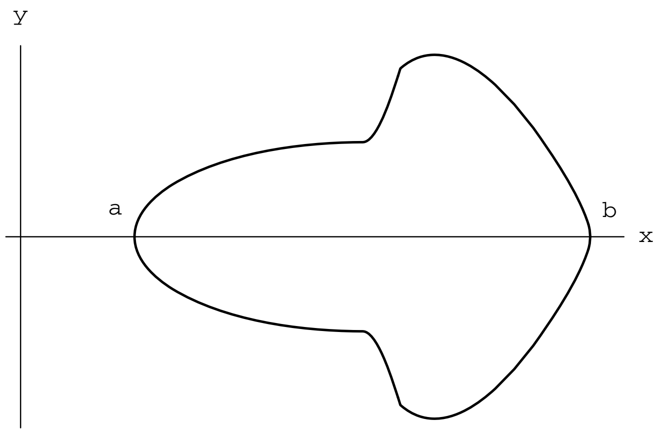


Figure 1.2 La courbe $\mathcal{C}$

Montrer que $\mathcal{C}$ est une trajectoire périodique de (S) de période

$$T = 2\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(c - G(x))}}.$$

27.1.4. On suppose désormais que g est un polynôme impair à coefficients positifs, c'est-à-dire que $G(x) = a_{2n+2}x^{2n+2} + \ldots + a_2x^2$ avec $a_{2p} > 0$. Soit alors $\xi \in \mathbb{R}_+^\star$ et $c = G(\xi)$; notant H la fonction polynôme : $H(x) = \frac{G(\xi)-G(x)}{\xi^2-x^2}$, montrer que la période d'oscillation est

$$T(\xi) = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{H(\sin\theta)}}.$$

27.1.5. Montrer que T est une fonction décroissante de $\xi > 0$ et en déduire les périodes possibles. Discuter l'unicité.

Énoncé 28

Étant donnés trois paramètres réels L, a et α, on s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + ax + \sin x = L,$$

que l'on écrit aussi

$$(S)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & y, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} & = & -\alpha y - \sin x + L - ax. \end{cases}$$

28.1.1. Montrer que les solutions maximales de (S) sont définies sur $\mathbb{R}$.

28.1.2. On suppose que $a > 0$ et $\alpha \geqslant 0$. Montrer que les solutions de (S) restent bornées lorsque $t \to +\infty$.

28.1.3. Montrer que si $a > 0$ et $\alpha > 0$, il existe une constante $M = M(\alpha, a, L)$ telle que $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists T_0$ tel que $\forall t \geqslant T_0, x^2(t) + y^2(t) \leqslant M$.

Énoncé 29

Étant donnés deux réels $a < b$ et deux fonctions $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère pour $\lambda \in \mathbb{C}$ l'ensemble des fonctions $y \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{C})$ qui vérifient

$$(F)\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p\dfrac{dy}{dx} + qy = \lambda y \text{ sur }]a, b[, \\[2ex] y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

29.1.1. En introduisant un changement d'inconnue de la forme $z(x) = y(x)e^{r(x)}$ où r est à déterminer, montrer qu'il existe $\sigma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que (F) soit équivalent à

$$(E) \begin{cases} \dfrac{d^2 z}{dx^2} + \sigma z = \lambda z \text{ sur }]a, b[, \\ z(a) = z(b) = 0. \end{cases}$$

29.1.2. Montrer que s'il existe une fonction y non identiquement nulle solution de (F) alors $\lambda \in \mathbb{R}$.

29.1.3. Montrer que les solutions de (F) forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 0 ou 1.

29.1.4. Montrer que si (y_1, λ_1) et (y_2, λ_2) vérifient (F) et $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0, \forall x \in]a, b[$ alors $\lambda_1 = \lambda_2$ et y_1 et y_2 sont proportionnelles.

29.1.5. On suppose que la fonction $x \mapsto q(x) - \frac{p^2(x)}{4} - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}(x)$ est négative ou nulle sur $[a, b]$. Montrer que s'il existe $y \not\equiv 0$ solution de (F) alors $\lambda < 0$.

Énoncé 30

Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. On souhaite connaître toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et *bornées* de l'équation différentielle

$$(E) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = P(x).$$

30.1.1. Étudier le cas où P possède une racine triple.

30.1.2. Étudier le cas où P ne possède qu'une racine réelle.

30.1.3. Étudier le cas où P possède une racine réelle simple et une racine réelle double.

30.1.4. Étudier le cas où P possède trois racines réelles distinctes.

Énoncé 31

On étudie le système différentiel suivant

$$(S) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y - x^2. \end{cases}$$

31.1.1. Montrer que les solutions maximales de (S) sont définies sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{t \to +\infty}(x(t), y(t)) = 0$.

31.1.2. Montrer que si $(x(0), y(0)) \neq 0$ alors $(x(t), y(t)) \neq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

31.1.3. On se donne $(x_0, y_0) \neq 0$ et on désigne par $(x(t), y(t))$ la solution de (S) vérifiant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Montrer que $\Lambda(t) = \dfrac{x(t)^2 + 2y(t)^2}{x(t)^2 + y(t)^2}$ tend vers une limite lorsque $t \to +\infty$.

31.1.4. Quelles sont les valeurs possibles pour cette limite ?

Énoncé 32

32.1.1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Caractériser les fonctions qui sont telles que l'espace vectoriel engendré par toutes les dérivées de f est de dimension finie (on dira que f vérifie la propriété (D)).

32.1.2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $f_\tau, \tau \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $f_\tau(x) = f(x + \tau), \forall x \in \mathbb{R}$. Caractériser les fonctions qui sont telles que l'espace vectoriel engendré par les f_τ lorsque τ décrit $\mathbb{R}$ est de dimension finie.

Énoncé 33

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geqslant \alpha.$$

33.1.1. Montrer que f' est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $b = (f')^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

33.1.2. On se donne $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ tel que $\int_{-\infty}^0 u_0(x)dx < \infty$ et on note $g(z) = \int_{f'(0)}^z b(\sigma)d\sigma$. Enfin pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on note

$$G(x, y, t) = \int_{-\infty}^y u_0(s)ds + tg\left(\frac{x - y}{t}\right).$$

Montrer qu'à x et t fixés, la fonction $y \mapsto G(x, y, t)$ atteint sa borne inférieure.

33.1.3. Montrer que si u_0 est croissante, ce minimum est atteint en un seul point $y = y(x, t)$.

33.1.4. Montrer que si u_0 est croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $y(., .)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$.

33.1.5. En déduire que si u_0 est croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ alors $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ définie par $u(x, t) = u_0(y(x, t))$ vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0.$$

33.1.6. Montrer que pour tout $R > 0, \lim_{t \to 0} \sup_{|x| \leqslant R} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

Énoncé 34

Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geqslant \alpha.$$

On se donne une fonction $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on suppose qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \tag{12}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

34.1.1. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $s \in \mathbb{R}_+$, il existe une fonction $t \mapsto \zeta(t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\frac{d}{dt}\zeta(t) = f'(u(\zeta(t), t)), \ t > 0,$$
$$\zeta(s) = x_0.$$

34.1.2. On désigne par $\zeta(t; s, x_0)$ la fonction construite à la question précédente. En utilisant la fonction $t \mapsto v(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\zeta(t; s, x_0), t)$ montrer que l'hypothèse d'existence d'une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^\star)$ solution de (12) - (13) est absurde lorsque u_0 n'est pas une fonction croissante.

Énoncé 35

Pour $n \geqslant 1$, on se donne $n + 1$ fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n$ et b avec $b(x) \geqslant b_0 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

On considère une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant $u(x) \geqslant 0$ et

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u(x) \leqslant 0,$$

pour tout $x \in \Omega$ où Ω est un ouvert non vide et borné de $\mathbb{R}^n$.

35.1.1. On désigne par $\partial\Omega$ la frontière de Ω : $\partial\Omega$ est le complémentaire de Ω dans son adhérence, $\partial\Omega = \overline{\Omega} \backslash \Omega$.

Montrer que $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leqslant \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

35.1.2. En déduire que s'il existe un ouvert non vide $\omega \subset \overline{\Omega}$ tel que $u(x) \leqslant 0$ pour $x \in \partial\omega$ alors u est nulle dans $\overline{\omega}$.

35.1.3. On se donne une famille de n^2 fonctions $\alpha_{ij} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et on considère une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u(x) \leqslant 0\,,$$

sur un ouvert Ω non vide et borné.

Généraliser le résultat de la question 35.1.1. en donnant une condition suffisante sur les fonctions α_{ij}.

Énoncé 36

Préambule, notations

On notera :

- $||.||$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ et $((.,.))$ le produit scalaire qui lui est associé,
- $\mathcal{E}_T = \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des applications continues de l'intervalle fermé borné $[0,T]$, $T > 0$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, espace que l'on munit de la norme naturelle $||\cdot||_{\infty,T}$:
- pour $f \in \mathcal{E}_T$, $||f||_{\infty,T} = \sup\{||f(t)||; t \in [0,T]\}$,
- $\mathcal{E} = \mathcal{C}([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On rappelle le résultat suivant. Soient A et B deux réels positifs ou nuls et w une application continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in [0,T],\ w(t) \leqslant A + B\int_0^t w(s)ds.$$

Alors pour tout $t \in [0,T]$, on a $w(t) \leqslant Ae^{Bt}$.

➤ Première partie

Soit F une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, on définit à l'aide de F et de u_0 une application $\mathcal{T}$ de $\mathcal{E}$ dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ par la formule :

$$(\mathcal{T}u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds,\ t \geqslant 0. \tag{1}$$

On suppose que F vérifie

$$\exists L \geqslant 0,\ \forall u,\ v \in \mathbb{R}^n \quad ||F(u) - F(v)|| \leqslant L||u - v||. \tag{2}$$

36.1.1.a. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{E}, \mathcal{T}u \in \mathcal{E}$.

36.1.1.b. Montrer que pour tout $T > 0$ et $u, v \in \mathcal{E}$
$$||\mathcal{T}u - \mathcal{T}v||_{\infty,T} \leqslant LT||u - v||_{\infty,T}.$$

36.1.1.c. En déduire par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$,
$$||\mathcal{T}^m u - \mathcal{T}^m v||_{\infty,T} \leqslant \frac{L^m T^m}{m!}||u - v||_{\infty,T}$$
($\mathcal{T}^m$ désigne la composée $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ ... \circ \mathcal{T}$ m fois).

36.1.2. On fixe $T > 0$.

36.1.2.a. Montrer qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant m_0$, l'application $\mathcal{T}^m$ admet un point fixe et un seul dans $\mathcal{E}_T$.

36.1.2.b. En déduire que $\mathcal{T}$ admet un point fixe et un seul dans $\mathcal{E}_T$. On notera u_T ce point fixe.

36.1.3. Montrer que si $T \geqslant S > 0$ alors u_T et u_S coïncident sur $[0, S]$.

36.1.4. Déduire de ce qui précède que l'équation
$$\mathcal{T}u = u \tag{3}$$
admet une solution et une seule dans $\mathcal{E}$.

36.1.5. Montrer que cette solution u est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ et qu'elle vérifie (4) et (5) ci-dessous :
$$\frac{du}{dt}(t) = F(u(t)) \ , \forall t \in \mathbb{R}_+ \, , \tag{4}$$
$$u(0) = u_0. \tag{5}$$

36.1.6. Montrer que, réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ vérifie (4) et (5) alors u est la solution de (3) dans $\mathcal{E}$.

36.1.7. Soient u_0 et $v_0 \in \mathbb{R}^n$ et F vérifiant (2). On note u la solution de (3) et v celle obtenue en prenant dans (1) v_0 au lieu de u_0, c'est-à-dire que $\frac{dv}{dt} = F(v)$ et $v(0) = v_0$. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$,
$$||u(t) - v(t)|| \leqslant e^{Lt}||u_0 - v_0||. \tag{6}$$

➤ Deuxième partie

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par ∇f l'application gradient de f qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et qui est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \;\; \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$
Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{F}_u$ l'ensemble de niveau de f :
$$\mathcal{F}_u = \{v \in \mathbb{R}^n, \;\; f(v) \leqslant f(u)\}.$$

Notant $\mathcal{B}(u,R) = \{v \in \mathbb{R}^n,\ ||v-u|| \leqslant R\}$, la boule fermée de $\mathbb{R}^n$, centrée en u et de rayon $R \geqslant 0$, on dira que la fonction f vérifie la propriété (P) si pour tout $u \in \mathbb{R}^n,\ \exists R \geqslant 0$ tel que $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{B}(u,R)$.

36.1.8.a. Montrer que f définie par $f(v) = ||v||^2$ vérifie (P).

36.1.8.b. Montrer que si f est définie par $f(v) = ((Av,v))$, où A est une matrice carrée (n,n) symétrique à coefficients réels, alors f vérifie (P) si et seulement si A est définie positive.

36.1.9. Les applications $f_1(v) = -||v||^2$, $f_2(v) = ||v||^4 - ||v||^2$ vérifient-elles (P) ?

Dans ce qui suit on fixe une fois pour toutes une application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ vérifiant (P).

36.1.10. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $R_0 > 0$ tels que $\mathcal{F}_{u_0} \subset \mathcal{B}(u_0,R_0)$. On désigne par θ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\theta(\sigma) = 1$ pour $\sigma \leqslant 2$ et $\theta(\sigma) = 0$ pour $\sigma \geqslant 3$ (on ne demande pas d'établir l'existence d'une telle fonction). Soit alors f_0 la fonction définie par

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \ f_0(v) = \theta\left(\frac{||v-u_0||^2}{R_0^2}\right) f(v).$$

36.1.10.a. Montrer que $f_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

36.1.10.b. Montrer qu'il existe L_0 (pouvant dépendre de u_0 et R_0) tel que $F = -\nabla f_0$ vérifie (2) avec $L = L_0$.

36.1.11.a. Soit alors u de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ la solution de (4)-(5) avec $F = -\nabla f_0$ obtenue au cours de la première partie.
Calculer la dérivée de l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ $\quad t \mapsto f_0(u(t))$.

36.1.11.b. En déduire que

$$\forall t \geqslant 0, \quad f_0(u(t)) \leqslant f_0(u_0) = f(u_0).$$

36.1.12. Montrer que pour tout $t \geqslant 0, u(t) \in \mathcal{B}(u_0,R_0)$.

36.1.13. En déduire que u est solution de (4)-(5) avec $F = -\nabla f$.

36.1.14. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, la limite de $f(u(t))$ lorsque $t \to \infty$ existe. On la note $l(u_0)$.

➤ Troisième partie

Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $u \in \mathcal{E}$ la solution de (3)-(4)-(5) obtenue à la question 36.1.13 (on rappelle que dans ce cas $F = -\nabla f$) et on définit une famille d'applications $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ en posant

$$S(t)u_0 = u(t),\ \ t \geqslant 0. \tag{7}$$

36.1.15. Exemples.

36.1.15.a. Montrer (vérifier) que si $f(u) = \frac{1}{2}||u||^2$ alors $S(t)u_0 = e^{-t}u_0$.

36.1.15.b. Montrer que si $f(u) = \frac{1}{4}||u||^4$, $S(t)u_0 = \frac{u_0}{\sqrt{1+2t||u_0||^2}}$.

On revient au cas général

36.1.16. Montrer que

36.1.16.a. $S(0) = Id$ (l'application identique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$),

36.1.16.b. pour tous t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}_+$,

$$S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2) = S(t_2) \circ S(t_1).$$

36.1.17. Soient $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et R_0 tels que $\mathcal{F}_{u_0} \subset \mathcal{B}(u_0, R_0)$. Montrer que $\forall t \geqslant 0$, $||S(t)u_0 - u_0|| \leqslant R_0$.

36.1.18. En déduire que pour tous u_0 et v_0 de $\mathbb{R}^n$, il existe $M_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$||S(t)u_0 - S(t)v_0|| \leqslant e^{M_0 t}||u_0 - v_0||.$$

36.1.19. Soient $s \in \mathbb{R}_+$ et $u_0 \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{O}(s, u_0)$ l'ensemble

$$\mathcal{O}(s, u_0) = \{S(t)u_0,\ t \in [s, +\infty[\}.$$

Montrer que $S(t)\mathcal{O}(s, u_0) = \mathcal{O}(s + t,\ u_0)$.

36.1.20. Montrer que l'ensemble $\omega(u_0)$ définit par $\omega(u_0) = \cap_{s>0}$ adh $(\mathcal{O}(s, u_0))$ est un compact connexe non vide de $\mathbb{R}^n$ (pour $X \subset \mathbb{R}^n$, adh (X) désigne l'adhérence de X dans $\mathbb{R}^n$ pour la topologie usuelle).

36.1.21. Montrer que pour $v \in \mathbb{R}^n$, (i) et (ii) ci-dessous sont équivalents :

i) $v \in \omega(u_0)$,

ii) il existe une suite de réels positifs $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{m\to\infty} t_m = +\infty$ et $v = \lim_{m\to\infty} S(t_m)u_0$.

36.1.22. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $S(t)\omega(u_0) = \omega(u_0)$.

36.1.23. Expliciter $\omega(u_0)$ dans les exemples de la question 36.1.15

➤ Quatrième partie

36.1.24. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \omega(u_0)$.

36.1.24.a. Montrer que $f(v) = l(u_0)$ (qui a été définie à la question 36.1.14).

36.1.24.b. Montrer que $\nabla f(v) = 0$ (on pourra considérer $v(t) = S(t)v$).

36.1.25. Cette question est indépendante de la précédente. On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des zéros de ∇f :

$$\mathcal{N} = \{v \in \mathbb{R}^n,\ \nabla f(v) = 0\}.$$

Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on notera $J(v)$ le déterminant

$$J(v) = \det_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(v) \right).$$

On suppose que

$$\forall v \in \mathcal{N},\ J(v) \neq 0. \tag{8}$$

36.1.25.a. Montrer que $\mathcal{N}$ est formé de points isolés (on pourra utiliser le théorème d'inversion locale).

36.1.25.b. En déduire que l'intersection $\mathcal{N} \cap \mathcal{B}(0, R)$ est de cardinal fini quel que soit $R > 0$.

36.1.26.a. Déduire des questions 36.1.20, 24 et 25 que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $\omega(u_0)$ est un singleton.

36.1.26.b. Que peut-on dire que $\lim_{t \to +\infty} u(t)$?

36.1.27. On prend $f(u) = (1 - ||u||^2)^2$.

36.1.27.a. Expliciter $\mathcal{N}$. Est-il fini ?

36.1.27.b. La propriété (8) a-t-elle lieu ?

36.1.27.c. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$, expliciter $\omega(u_0)$.

36.1.27.d. Que pouvez-vous conclure ?

1.6 SÉRIES DE FOURIER

La théorie des séries de Fourier est fascinante et les mathématiques et la physique s'y mêlent à souhait. La nature même des problèmes posés par la convergence des séries de Fourier[1] a conduit en 1909, A. Haar à la théorie des ondelettes[2], théorie qui s'est ensuite développée grâce à de nombreux physiciens et mathématiciens. Ainsi la découverte, par Yves Meyer, il y a 25 ans environ, des bases orthonormées d'ondelettes a été un saut qualitatif considérable (les ondelettes remplacent les fonctions Sinus et Cosinus de l'analyse de Fourier). Nous n'aborderons pas ce sujet ici et nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage d'Yves Meyer, *Ondelettes* paru chez l'éditeur Hermann.

Nous donnons ci-après 9 problèmes dont certains sont liés à la relation entre la vitesse de convergence vers zéro des coefficients de Fourier, de fonctions 2π-périodiques, et la régularité de ces fonctions : il s'agit des problèmes 38, 41, 42, 43, 44. Le problème 39 propose une inégalité optimale entre la norme sup d'un polynôme trigonométrique

1. On fait ici allusion au fait que la série de Fourier d'une fonction continue peut diverger en un point donné.

2. Les ondelettes de Haar sont encore utilisées aujourd'hui pour des applications pratiques en traitement du signal.

de degré n et la norme sup de sa dérivée (inégalité de Bernstein). Le problème 40 est quant à lui le classique théorème de Fejér. Cette section se termine par un problème étendu consacré à la transformée de Fourier discrète et à la transformée de Fourier rapide, le problème 45.

Énoncé 37

Soit N un entier supérieur ou égal à un. À tout $2N+1-u$plet de $\mathbb{C}^{2N+1}$: $(c_{-N}, ..., c_0, ..., c_N)$ on associe la fonction $\mathcal{C}^N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$\mathcal{C}^N(x) = \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{ijx} .$$

37.1.1. Montrer qu'il existe une constante $K_N > 0$ telle que

$$\forall (c_{-N}, ..., c_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}, \quad \sum_{j=N}^{N} |c_j| \leqslant K_N \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathcal{C}^N(x)| .$$

37.1.2. Peut-on majorer K_N indépendamment de N ?

Énoncé 38

On se donne une famille finie $\{\lambda_j\}_{j=-N}^{N}$ d'entiers relatifs vérifiant
$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_{-j} = \lambda_j$ et tels qu'il existe $q \geqslant 3$ tel que $\lambda_{j+1} > q \ \ \lambda_j$ pour $j = 1, \ldots, N-1$.

38.1.1 Étant donnés $\varphi_1, \cdots \varphi_N$, N nombres réels arbitraires on note

$$P(t) = \prod_{j=1}^{N} (1 + \cos(\lambda_j t + \varphi_j)).$$

Calculer $\int_0^{2\pi} P(s)ds$.

38.1.2 Calculer $\int_0^{2\pi} e^{-i\lambda_j t} P(s)ds$.

38.1.3 On considère une fonction $f(t) = \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{i\lambda_j t}$ où c_j est une famille arbitraire de nombres complexes vérifiant $c_{-j} = \bar{c_j}$. Montrer que

$$\sum_{j=-N}^{N} |c_j| \leqslant 2 \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \leqslant 2 \sum_{j=-N}^{N} |c_j|.$$

Énoncé 39

À tout $2n+1$-uplet $(A, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$ on associe le polynôme trigonométrique

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$

39.1.1. Montrer qu'il existe C_n tel que pour tous $(A, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |T'(x)| \leqslant C_n \sup_{x\in\mathbb{R}} |T(x)| .$$

39.1.2. Montrer que $C_n \geqslant n$.

39.1.3. Montrer que l'on peut prendre $C_n = n$.

Énoncé 40

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, on lui associe ses coefficients de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt,\ \ a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ptdt, b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ptdt\ ,$$

$p \geqslant 1$. On note $S_0 = a_0$ et pour $n \geqslant 1$,

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,.$$

Soit alors $\sigma_n, n \geqslant 1$, définie par

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x).$$

40.1.1. Montrer que si S_n converge uniformément vers f, il en est de même pour σ_n.

40.1.2. Montrer que σ_n converge uniformément vers f.

Énoncé 41

À toute fonction continue f sur $[0, 2\pi]$, on associe les nombres complexes $\hat{f}(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$.

On note alors

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt},$$

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,t).$$

41.1.1. Pour quelles valeurs de α a-t-on :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\lambda > 1 \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} \sum_{n<m\leqslant\lambda n} \frac{1}{m^\alpha} \leqslant \varepsilon\,?$$

41.1.2. On suppose que α est l'une de ces valeurs et que f est telle que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{\alpha}|\hat{f}(n)| < \infty.$$

Montrer qu'à t fixé, $S_n(f,t)$ et $\sigma_n(f,t)$ convergent simultanément vers la même limite.

41.1.3. Étudier sous les mêmes conditions la convergence uniforme simultanée.

Énoncé 42

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels. On étudie la série

$$(S) : \sum_{n\geqslant 1} a_n \sin nx.$$

On suppose que la suite a_n est décroissante et converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

42.1.1. Montrer que si (S) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors la suite na_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

42.1.2. Que pensez-vous de la réciproque ?

42.1.3. Soit a_n une suite décroissante de nombres réels, montrer qu'il existe une fonction, f 2π-périodique et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Énoncé 43

Étant donné une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note

$$\Delta a_n \equiv a_n - a_{n+1} \quad \text{et} \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}.$$

43.1.1. on suppose que (a_n) vérifie :

(i) a_n converge vers zéro,
(ii) $n(\Delta a_n)$ converge vers zéro,
(iii) la série de terme général $n(\Delta^2 a_n)$ est absolument convergente.

Montrer que la suite $s_n(x), s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx$, est simplement convergente pour tout $x \not\equiv 0$ modulo 2π. On note $f(x)$ sa limite.

43.1.2. Montrer que f est continue sur $]0, 2\pi[$ et que

$$a_n = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} f(x)\cos nx dx$$

43.1.3. Montrer que (ii) est superflue i.e. (i) et (iii) entraînent (ii).

Énoncé 44

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\hat{f}(k)$ le nombre complexe $\int_0^1 f(x)e^{-2i\pi kx}dx$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

44.1.1. Montrer que $\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$.

44.1.2. On suppose que $\hat{f}(0) = 0$ et on désigne par F la primitive de f qui s'annule en zéro : $F(x) = \int_0^x f(y)dy$. Montrer que F peut être étendue à $\mathbb{R}$ en une fonction continue et 1-périodique.

44.1.3. On suppose que $\frac{1}{i}\hat{f}(k) \geqslant 0$ et que $\hat{f}(-k) = -\hat{f}(k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

a. Donner des exemples de telles fonctions f.

b. Montrer que la série de terme général $\frac{\hat{f}(k)}{k}$ est convergente.

44.1.4. En déduire qu'il existe des suites (a_k) tendant vers zéro et telles qu'il n'existe pas f intégrable au sens de Riemann pour laquelle $a_k = \hat{f}(k)$.

Énoncé 45

Préambule

Ce préambule comprend divers notations et résultats que l'on pourra utiliser sans démonstration. On désigne par E l'espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ formé par les fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui sont périodiques de période 2π.
Pour $n \in \mathbb{Z},\ e_n \in E$ est l'élément $e_n(x) = e^{inx},\ x \in \mathbb{R}$. À f et g dans E, on associe le nombre complexe :

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x)g(x)dx\ ,$$

et on note $||f||_2 = \sqrt{(f, f)}$. On admettra que $(.,.)$ est un produit scalaire qui fait de E un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$.
On désigne par $||.||_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E :

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

On admettra que E muni de cette norme est complet.
Pour $N \in \mathbb{N}, E_N$ désigne l'espace vectoriel engendré par les e_n pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [-N, N]$. On désigne par D_N l'élément de E_N : $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ et on pourra utiliser que, pour $x \in]0, 2\pi[$,

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^\star$, on désigne par $\mathbb{F}_m$ l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ des classes d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ modulo m.

Étant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on dira que « la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument convergente » (en abrégé $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C.) si la série de terme général $(|u_{-n}| + |u_n|)_{n\in N}$ est convergente. On notera alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ ou $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série où :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n\geqslant 1}(u_{-n} + u_n).$$

On admettra sans démonstration que tous les résultats sur les S.A.C. indexées par $\mathbb{N}$ s'étendent aux S.A.C. indexées par $\mathbb{Z}$ et par exemple si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont telles que $(|a_n|^2 + |b_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., alors $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n\right| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

Dans tout le problème, N désignera un entier supérieur ou égal à 1 qui pourra varier.

➤ Première partie

À $f \in E$, on associe la suite de ses coefficients de Fourier $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$f_n = (e_n, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

45.1.1 Soit $f \in E$, montrer que $(|f_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et que sa somme est $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$.

45.1.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une S.A.C., on désigne par S_N l'élément de E :

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} u_n e_n.$$

Montrer que $(S_N)_{n\geqslant 1}$ converge vers un élément u de E pour la norme $||.||_\infty$.

Quels sont les coefficients de Fourier de u ?

45.1.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $u_n = 0$ pour $n \leqslant 0$, $u_1 = -1$ et $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$.

Montrer que l'élément u de E obtenu par le procédé de la question 45.1.2. n'est pas dérivable en $x = 0$ (on pourra écrire pour $N \geqslant 2$ arbitraire et $x \neq 0$,

$$\operatorname{Im}\frac{u(x) - u(0)}{x} = \operatorname{Im}\frac{S_N(x) - S_N(0)}{x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)x}$$

Im z désignant la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$ et conclure en prenant $x = \frac{1}{N}$).

45.1.4. On désigne par Σ_N l'élément de E : $\Sigma_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{e_n}{n}$.
Montrer que la suite $\left(\Sigma_N\right)_{N\geqslant 1}$ est de Cauchy dans E pour la norme $||.||_2$.

45.1.5. Montrer que si la suite $\left(\Sigma_N\right)_{N\geqslant 1}$ converge vers $\sigma \in E$ pour la norme $||.||_2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = (e^{ix} - 1)\sigma(x)$$

où u a été définie en 45.1.3.

45.1.6. Déduire des questions 45.1.3. et 45.1.4. que E muni de la norme $||.||_2$ n'est pas complet.

➤ Deuxième partie

45.1.7. Étant donné $f \in E$, montrer qu'il existe un et un seul élément g de E_N tel que $||g - f||_2$ réalise le minimum de $||h - f||_2$ lorsque h parcourt E_N.

On notera $P_N f$ au lieu de g.

45.1.8. Montrer que P_N est un projecteur de E sur E_N et que pour tout $f \in E$,

$$||P_N f||_2 \leqslant ||f||_2.$$

45.1.9.a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x - y) dy.$$

45.1.9.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) D_N(y) dy.$$

45.1.10. On désigne par α_N la borne supérieure de l'ensemble des nombres $||P_N f||_\infty$ lorsque f décrit la boule unité de $(E, ||.||_\infty)$.
Montrer que $\alpha_N \leqslant \sqrt{2N + 1}$.

45.1.11. On désigne par L_N le nombre $L_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx$,
et pour $\varepsilon > 0$, ψ_N^ε l'élément de E défini par :

$$\psi_N^\varepsilon(x) = \frac{D_N(x)}{\sqrt{\varepsilon + D_N^2(x)}}, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer, en utilisant les ψ_N^ε, que $\alpha_N \geqslant L_N$ (on pourra montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant |y| - \dfrac{y^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + y^2}} = \dfrac{\varepsilon|y|}{\sqrt{\varepsilon + y^2}(\sqrt{\varepsilon + y^2} + |y|)} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$).

45.1.12. Montrer que lorsque N tend vers l'infini, L_N est équivalent à $\frac{4}{\pi^2} \log N$.

45.1.13. Que pouvez-vous en conclure (en vous inspirant de la question 45.1.8.) ?

➤ Troisième partie

On désigne par H_1 le sous-espace de E formé par les éléments f tels que $((1+n^2)|f_n|^2)$ est une S.A.C.

On note alors pour $f \in H_1$, $||f||_1 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)|f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

45.1.14. Montrer que si $f \in E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors $f \in H_1$ et $||f||_1^2 = ||f||_2^2 + ||f'||_2^2$. Réciproquement si $f \in H_1$, f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

45.1.15. Montrer que $E_1 = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap E$ est dense dans H_1 pour la norme $||.||_1$.

45.1.16. Soit $f \in H_1$, montrer que :

$$||P_N f - f||_2 \leqslant \frac{1}{N+1}||f||_1.$$

45.1.17. En écrivant, pour $g \in E_1, x$ et y dans $\mathbb{R}$,

$$g^2(x) - g^2(y) = 2\int_y^x g(t)g'(t)dt,$$

montrer qu'il existe une constante $K_1 \in]0,+\infty[$ telle que pour tout $f \in H_1$,

$$||f||_\infty \leqslant K_1||f||_2^{\frac{1}{2}}||f||_1^{\frac{1}{2}}.$$

45.1.18. En déduire que pour tout $f \in H_1$ et $N \geqslant 1$,

$$||P_N f - f||_\infty \leqslant \frac{K}{\sqrt{N+1}}||f||_1$$

et expliquer brièvement l'intérêt de cette inégalité en terme d'approximation de fonctions et justifier l'introduction de l'espace H_1.

➤ Quatrième partie

45.1.19. Montrer que si $f \in H_1$, $||f||_2 \leqslant ||f||_1$.

45.1.20. Montrer que $||.||_1$ est une norme sur H_1 et que H_1 muni de cette norme est complet.

45.1.21. Montrer qu'il existe une constante K_2 telle que pour tout $f \in H_1$,

$$||f||_\infty \leqslant K_2||f||_1.$$

45.1.22. Soit $(g^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H_1 telle que :

$$||g^p||_1 \leqslant 1, \forall p \in \mathbb{N}.$$

45.1.22.a. Montrer qu'il existe une application strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la suite des produits scalaires $((g^{\psi(p)}, e_n))_{p\in\mathbb{N}}$ soit convergente. On note alors l_n la limite de cette suite.

45.1.22.b. Montrer que la suite de fonctions S_N, où $S_N = \sum_{n=-N}^{N} l_n e_n$, converge vers une fonction $l \in E$ pour la norme $||.||_\infty$.

45.1.22.c. Montrer que $l \in H_1$.

45.1.22.d. Montrer, par un exemple, qu'en général $||g^{\psi(p)} - l||_1$ ne tend pas vers zéro lorsque p tend vers $+\infty$.

➤ Cinquième partie

On désigne par x_j le point $\frac{2\pi}{2N+1} j$ pour $j \in \mathbb{Z}$. On observe alors que pour $f \in E$, $f(x_j)$ ne dépend que de la classe de j modulo $2N+1$, ce qui permet de parler de $f(x_j)$ pour $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$.

45.1.23. Montrer que la matrice carrée d'ordre $2N+1$: $(e^{ilx_j})_{\substack{0\leqslant l\leqslant 2N\\ 0\leqslant j\leqslant 2N}}$ a pour inverse la matrice :

$$\left(\frac{1}{2N+1} e^{-ilx_j}\right)_{\substack{0\leqslant l\leqslant 2N\\ 0\leqslant j\leqslant 2N}}.$$

45.1.24.a. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique élément de E_N (noté $C_N f$) tel que :

$$(C_N f)(x_j) = f(x_j),\ \forall j \in \mathbb{F}_{2N+1}.$$

45.1.24.b. Montrer que C_N est une application linéaire de E dans E_N.

45.1.24.c. Montrer que $C_N \neq P_N$ (on pourra remarquer que $C_N e_{2N+1} = e_0$).

45.1.25. On désigne par $\mathcal{E}_{2N+1}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_{2N+1}$ dans $\mathbb{C}$, on note $(z_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ ces applications.

45.1.25.a. À $z \in \mathcal{E}_{2N+1}$, on associe l'application $\hat{z}$: $k \mapsto \hat{z}_k$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\hat{z}_l = \frac{1}{2N+1} \sum_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}} e^{-ilx_k} z_k.$$

Montrer que $\hat{z}_l$ ne dépend que de la classe l modulo $2N+1$. Ceci nous permet de considérer $\hat{z}$ comme un élément de $\mathcal{E}_{2N+1}$.

45.1.25.b. On dit que $\hat{z}$ est la transformée de Fourier discrète (T.F.D) de z. On note $\varphi = (\varphi_k)_{k\in\mathbb{F}_{2N+1}}$ la TFD de l'application $j \mapsto f(x_j)$. Montrer que

$$C_N f = \sum_{k=-N}^{N} \varphi_{\bar{k}} e_k$$

où $\bar{k}$ est de classe k modulo $2N+1$.

45.1.26. Soit $h \in E_{2N}$, montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} h(x_j).$$

45.1.27.a. Pour f et g dans E, on note :

$$[f, g] = \frac{1}{2N+1} \sum_{j \in \mathbb{F}_{2N+1}} \overline{f(x_j)} g(x_j).$$

Montrer que si f et g sont dans E_N, $[f, g] = (f, g)$.

45.1.27.b. Montrer que pour tous f, g dans E,

$$[f - C_N f, g] = 0.$$

45.1.27.c. Calculer $[e_n, e_m]$.

45.1.28. Soit $f \in H_1$ et $l \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(f_{l+(2N+1)k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et que :

$$C_N(f) = \sum_{l \in \mathbb{F}_{2N+1}} C_{N,l}(f) e_l$$

où

$$C_{N,l}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{l+(2N+1)k}.$$

45.1.29.a. Montrer que pour tout $f \in E$, on a :

$$f - C_N f = g_N - C_N g_N \text{ avec } g_N = f - P_N f.$$

45.1.29.b. Montrer qu'il existe une constante $K_3 \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $f \in H_1$,

$$||f - C_N f||_2 \leqslant \frac{K_3}{N+1} ||f||_1.$$

45.1.30. Pour quelle raison pratique préfère-t-on C_N à P_N ?

➤ Sixième partie

On se donne un entier $M \geqslant 1$ et on désigne par ω un nombre complexe tel que $\omega^M = 1$. À tout élément z de $\mathcal{E}_M$ ($\mathcal{E}_M$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_M$ dans $\mathbb{C}$), on associe l'élément $\hat{z}$ de $\mathcal{E}_M$ défini par :

$$\hat{z}_t = \sum_{k \in \mathbb{F}_M} \omega^{kl} z_k$$

et on note $\hat{z} = $ T.F.D. $(\omega, M)(z)$.

45.1.31. En considérant que les ω^{lk} on été calculés une fois pour toutes, quel est le nombre d'opérations (additions et multiplications) nécessaires pour obtenir $\hat{z}$ en fonction de z ? On notera S_M ce nombre.

45.1.32. On suppose que M est pair : $M = 2M_1$. En remarquant que :

$$\hat{z}_l = \sum_{k_1 \in \mathbb{F}_{M_1}} \omega^{2k_1 l} z_{2k_1} + \sum_{k_2 \in \mathbb{F}_{M_1}} \omega^{(2k_2-1)l} z_{2k_2-1}$$

montrer que T.F.D. (ω, M) peut s'effectuer à l'aide de deux opérations T.F.D. (ω^2, M_1).

45.1.33. On suppose que $M = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. On désigne par Σ_n le nombre d'opérations pour effectuer T.F.D. $(\chi, 2^n)$ où $\chi \in \mathbb{C}$ vérifie $\chi^{(2^n)} = 1$. Montrer que

$$\Sigma_n \leqslant 2\Sigma_{n-1} + 2^{n+1}$$

et en déduire que :

$$\Sigma_n \leqslant 2M \log_2 M$$

(où par définition $\log_2 M = n$).

45.1.34. En supposant que les calculs sont effectués sur un ordinateur faisant 10^8 opérations par seconde, comparer le temps calcul correspondant à S_M avec $M = 2^n$ et Σ_n pour $n = 20, 25$ et 30. On représentera les résultats sous forme d'un tableau.

45.1.35. On suppose plus généralement que $M = PQ$ où P et Q sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que T.F.D. (ω, M) peut se faire en $2M(P + Q)$ opérations.

45.1.36. Appliquer ce qui précède au calcul de $C_N f$ pour $f \in H_1$.

1.7 SOMMES INFINIES

Les séries et les intégrales sont des objets mathématiques très proches que la théorie de l'intégrale de Lebesgue permet d'envisager dans le même cadre. Toutefois il ne s'agit pas de notre propos ici.
Nous proposons ci-dessous 5 problèmes. Les deux premiers (46 et 47) portent sur des séries entières, le problème 48 porte sur des propriétés de base des produits infinis, le problème 49 est consacré à la construction de l'intégrale de Stieltjes alors que le problème 50 examine, du point de vue de l'analyse de Fourier, les fonctions à variations bornées.

Énoncé 46

On se donne deux matrices à coefficients réels $n \times n$: A et B.

46.1.1. Montrer que la série de terme général $(\frac{A^k}{k!})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note alors $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

46.1.2. A-t-on en général $e^{A+B} = e^A e^B$?

46.1.3. Étudier la limite lorsque n tend vers l'infini de $(e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}})^n$.

Énoncé 47

Étant donné une suite strictement croissante de nombres réels $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, suite tendant vers l'infini, on considère la série de terme général $a_n e^{-\lambda_n z}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

47.1.1. Montrer que si z_0 est tel que la série de terme général $a_n e^{-\lambda_n z_0}$ converge, alors quel que soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge uniformément pour $|\arg(z - z_0)| \leqslant \theta_0$.

47.1.2. Appliquer ce résultat à une série entière arbitraire $\sum a_n z^n$.

47.1.3. Étudier la fonction de Riemann : $z \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

Énoncé 48

48.1.1. Montrer que pour toute suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il y a équivalence entre :

(i) la série $\sum |a_n|$ est convergente
et
(ii) quel que soit σ bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente.

Lorsque (ii) a lieu on dit que la série $\sum a_n$ est commutativement convergente.

48.1.2. Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $\sum a_n$ soit commutativement convergente alors la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ne dépend pas de la bijection σ.

48.1.3. Que pensez-vous du cas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$?

48.1.4. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dira que le produit $\prod C_n$ converge si la suite de nombres complexes $(\prod_{p=1}^{n} C_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Comme pour les séries, un produit est commutativement convergent si quel que soit σ bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, le produit $\prod C_{\sigma(n)}$ est convergent.

Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) le produit $\prod C_n$ est commutativement convergent
et
(ii) la série de terme général $(C_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente.

48.1.5. Montrer que le produit $\prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ est convergent quel que soit $z \in \mathbb{C}$ qui n'est pas de la forme $n^2\pi^2$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$.

Énoncé 49

Étant données g et h deux fonctions croissantes sur un intervalle compact $[a, b]$, on note $\alpha = g - h$.

Par ailleurs on désigne par Σ l'ensemble des subdivisions finies de $[a, b]$ et pour $\underline{x} \in \Sigma$, $\underline{x} = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b)$ on désigne par $\delta(\underline{x}) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_{i-1}|$.

Étant donné $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on dit que f est α-intégrable si :

$$\exists l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall \underline{x} \in \Sigma, \underline{x} = (x_1, ..., x_m),$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^m$ avec $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ on a

$$\left| \sum_{p=0}^{m-1} f(\xi_p)(\alpha(x_{p+1}) - \alpha(x_p)) - l \right| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $l = \int_a^b f d\alpha$.

49.1.1. On suppose que g et h sont continues et strictement croissantes. Montrer que si f est continue elle est α-intégrable.

49.1.2. On ne suppose plus que g et h sont continues. Montrer que si f est continue elle est α-intégrable.

Énoncé 50

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π. On note alors

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

lorsque n parcourt $\mathbb{Z}$.

50.1.1. On dit que f est à variation bornée sur $[0, 2\pi]$ s'il existe une constante C telle que pour toute subdivision $\underline{x}$ de $[0, 2\pi]$: $\underline{x} = (0 = x_0 < x_1 < ... < x_m = 2\pi)$, $\sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant C$.

Soit alors $V(f)$ le nombre

$$V(f) = \inf \left\{ C \in \mathbb{R}_+; \forall \underline{x}, \sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant C \right\}.$$

On admettra (ce qui ne représente aucune difficulté) que

$$V(f) = \sup_{\underline{x}} \left\{ \sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| \right\}.$$

Si f est à variation bornée est-elle continue ?

50.1.2. L'application $f \mapsto V(f)$ est-elle une norme ?

50.1.3. On suppose que f est donnée par

$$f(x) = \int_0^x g(y) dy\,,$$

où g est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est à variation bornée et que $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |n\hat{f}(n)| < \infty$.

50.1.4. On se donne f à variation bornée, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|n\hat{f}(n)| \leqslant \frac{V(f)}{2\pi}.$$

2

Indications

Voici quelques indications pour la résolution des 50 problèmes. Les énoncés étant généralement arides, ces indications sont souvent indispensables pour démarrer la solution.

Indications 1

1.2.1. Écrire que $\frac{d}{dx}(u^2) = 2u\frac{du}{dx}$.

1.2.5. Observer que Σ est une sphère unité.

1.2.3. Montrer que pour tout $w \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ avec $w(0) = w(1) = 0$,
$t \mapsto [\int_0^1 (v + tw)^2 dx / \int_0^1 (v' + tw')^2 dx]$ possède un maximum local en $t = 0$.

1.2.4. Considérer $u/\sqrt{\int_0^1 u'(x)^2 dx}$.

1.2.5. Utiliser les coefficients de Fourier.

Indications 2

2.5.1. Utiliser une suite $a_k \geqslant 0$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k < \infty$ alors que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k a_k^2 = +\infty.$$

2.2.2. Utiliser le théorème de continuité des intégrales par rapport à un paramètre.

2.2.3. Exprimer $\varphi(t)$ à l'aide de l'identité de Parseval.

2.2.4. Montrer les deux inégalités :

$$\varphi(t) \leqslant 4\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) \leqslant t^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

2.2.5. Démontrer directement l'inégalité à l'aide de celle de Cauchy-Schwarz.

Indications 3

3.2.1. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.2.2. Observer que $u^2(x) = u^2(y) - 2\int_x^y u(t)u'(t)dt$.

3.2.3. Utiliser une suite $a_k \geqslant 0$ telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = +\infty \quad \text{alors que} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}}(1+|k|)a_k^2 < \infty.$$

3.2.4. Observer que $|u(x)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| = \sum_{|k|\leqslant N} |u_k| + \sum_{|k|\geqslant N+1} |u_k|$.

Indications 4

4.2.1. Considérer à n fixé la suite de nombres complexes $(\hat{f}_k(n))_{k\in\mathbb{Z}}$ lorsque (f_k) est une suite de Cauchy dans A.

4.2.2. Montrer que $\widehat{fg}(n) = \sum_{k+l=n} \hat{f}(k)\hat{f}(l)$.

4.2.3.. Utiliser que si $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, elle peut être approchée par une suite de polynômes trigonométriques.

4.2.4. Remarquer que $f(t-h) - f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(e^{-inh}-1)\hat{f}(n)e^{int}$ puis prendre $h = 2\pi/(3.2^m)$ et déduire que $\sum_{2^m\leqslant|n|<2^{m+1}} |\hat{f}(n)|^2 \leqslant h^{2\alpha}[f]_\alpha^2$.

Indications 5

5.2.1. Commencer par le cas $n = 1$ en utilisant la fonction de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \exp(-1/(1-x^2))$.

5.2.2. Considérer f_λ : $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$.

5.2.3. Appliquer $(I_{1,\frac{n}{n-1}})$ à f^s pour s bien choisi.

5.2.4. Utiliser les deux inégalités :

$$|f(x,y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y)\right| dt\,,$$

et

$$|f(x,y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,s)\right| ds.$$

5.2.5. Généraliser la démonstration précédente.

5.2.6. Partir de la relation $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt$.

Indications 6

6.2.1. Construire un élément de F dont le terme général ne tend pas vers zéro.

6.2.2. Montrer que E est dense dans F.

6.2.3. Soit u_n^p tel que pour tout p, la suite $(u_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à K. Observer que pour tout n fixé, la suite $(u_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ appartient au compact $[-1, 1]$ de $\mathbb{R}$.

Indications 7

7.2.1. Utiliser le théorème de continuité des intégrales par rapport à un paramètre.

7.2.2. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

7.2.3. Faire un changement de variable après avoir appliqué le théorème de Fubini à l'intégrale $\int_0^{2\pi}(Kf)(x)e^{-inx}dx$.

7.2.4. Observer que pour tout n fixé la suite $(f_n(p))_{p\in\mathbb{N}}$, où $(f_n(p))_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de $(f(p))$, est bornée dans $\mathbb{C}$. Puis mettre en œuvre un procédé d'extraction diagonale.

7.2.5. Montrer que de toute suite bornée d'éléments de Ker $(L-\lambda Id)$ on peut extraire une sous suite convergente.

7.2.6. Considérer le cas $L \equiv 0$.

Indications 8

8.2.1. Montrer que si $v_n \in K$ est tel que

$$||u - v_n|| \leqslant d(u, K) + 1/(n + 1)$$

où $d(u, K) = \inf\{||u - v||, v \in K\}$ alors la suite (v_n) est de Cauchy.

8.2.2. Dans le cas où $l \neq 0$, utiliser P_M où $M = \text{Ker}\, l$.

8.2.4. Soit f tel que $l(v) = ((f, v)), \forall v \in V$ et $A \in \mathcal{L}(V, V)$ tel que $a(u, v) = ((Au, v))\ \forall u, v \in V$. Considérer une application $T\ : Tv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$ où ρ est à choisir.

Indications 9

9.2.1. Prendre $v = u^1 - u^2$.

9.2.2. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

9.2.3 Considérer une suite de fonction dans $H = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $((f, g)) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

9.2.4. Écrire $((u_n - u, u_n - u)) = ||u_n||^2 - ||u||^2 - 2((u, u_n - u))$.

9.2.5. Utiliser à nouveau cette identité.

9.2.6. Considérer une suite minimisante, c'est-à-dire une suite (w_n) telle que

$$\lim_{n\to\infty}(||w_n||^2 - |((w_n, v))|^{3/2}) = \inf_{w\in H}(||w||^2 - |((w, v))|^{3/2})$$

et montrer qu'elle est bornée.

9.2.7. Soit $(u(p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l^2 : $u(p) = (u_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ bornée : $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(p)|^2 \leqslant C$. Remarquer que pour tout n fixé, la suite $(u_n(p))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, puis utiliser un procédé d'extraction diagonale.

Indications 11

11.2.3. Supposer qu'il existe (P_0, V_0, T_0) tel que $f(P_0, V_0, T_0) = 0$ et appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de ce point. Ensuite calculer $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T (V, T)$ où P est la fonction telle que $f(P(V, T), V, T) = 0$.

Indications 12

12.2.1. Montrer que $I - \frac{\partial G}{\partial u}(0)^{-1}\frac{\partial G}{\partial u}(u)$ est de norme strictement inférieure à 1.

12.2.2. Écrire

$$u_{n+1} = -\frac{\partial G}{\partial u}((u_n)^{-1}(G(u_n) - G(0) - \frac{\partial G}{\partial u}(u_n)u_n)$$

et exprimer $G(u_n) - G(0)$ à l'aide d'une formule de Taylor.

12.2.3. Remarquer que $||u_{n+1}|| \leqslant \frac{\rho\gamma\beta}{2(1-\rho\gamma\beta)}||u_n||$ avec $\rho\gamma\beta/(2(1 - \rho\gamma\beta)) < 1$.

Indications 13

13.2.1. Écrire l'équation $G(u, \lambda) = 0$ sous la forme

$$u = \frac{\partial G}{\partial u}(u_0, \lambda_0)^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, \lambda_0)u - G(u, \lambda)\right).$$

13.2.2. Utiliser le fait que $u(\lambda)$ s'obtient par un théorème de point fixe.

Indications 14

14.2.2. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre deux en 0.

14.2.3. Chercher un développement en série entière par rapport à $M_0^{-1}A(m)$.

Indications 15

15.2.1. Calculer det $\varphi(R, U)$.

15.2.2. Observer que si $RU = F$ alors $U^2 = {}^tFF$.

15.2.3. Utiliser un argument de compacité.

Indications 16

16.2.1. Pour $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, introduire $\lambda(z_1) = (\varphi(z_1) - x_0)^2 + (z_1 - x_1)^2$ et montrer que λ atteint son minimum sur $K_0 = \{z_1 \in \mathbb{R}, \lambda(z_1) \leqslant \lambda(0)\}$.

16.2.2. Considérer un cas où le graphe de φ comprend un arc de cercle.

16.2.3. Montrer que $\varphi'(y_1)(\varphi(y_1) - x_0) + y_1 - x_1 = 0$ et en déduire que si $x \notin \Gamma$, $y_1 - x_1 = -\frac{\varepsilon(y_1)\varphi'(y_1)}{\sqrt{1+\varphi'(y_1)^2}} d_\Gamma(x)$ avec $\varepsilon(y_1) \in \{-1, 1\}$. Ensuite montrer que $\varepsilon(y_1) = \varepsilon(\tilde{y}_1)$ si y et $\tilde{y}$ sont solutions de $(\star)$ et conclure en utilisant l'inégalité

$$\left| \frac{\varphi'(y_1)}{\sqrt{1+\varphi'(y_1)^2}} - \frac{\varphi'(\tilde{y}_1)}{\sqrt{1+\varphi'(\tilde{y}_1)^2}} \right| \leqslant \kappa \mid y_1 - \tilde{y}_1 \mid .$$

16.2.4. Montrer que l'application d_Γ est 1-lipschitzienne.

16.2.5. Distinguer le cas $\kappa = 0$ du cas $\kappa \neq 0$. Dans le premier cas φ est affine et le résultat demandé s'obtient par un raisonnement géométrique simple. Dans le cas $\kappa \neq 0$ remarquer que pour $x \in \mathbb{R}^2$, si y est solution de $(\star)$,

$$x_0 = \varphi(y_1) - \frac{\varepsilon(x) d_\Gamma(x)}{\sqrt{1+\varphi'(y_1)^2}}, \qquad x_1 = y_1 + \frac{\varepsilon(x) d_\Gamma(x) \varphi'(y_1)}{\sqrt{1+\varphi'(y_1)^2}}$$

avec $\varepsilon(x) \in \{-1, 0, 1\}$. La fonction $\delta(x_0, x_1)$ s'obtient en généralisant ces relations.

Indications 17

17.2.1. Montrer que l'on peut se ramener au cas $q = n$ et appliquer le théorème d'inversion locale à l'application $v \mapsto (\psi_1(v), ..., \psi_n(v))$.

17.2.2. Compléter $(\nabla\psi_1(u), ..., \nabla\psi_q(u))$ par $\xi_1, ..., \xi_p$ en une base de $\mathbb{R}^n$ et appliquer le théorème des fonctions implicites à ϕ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$ définie par

$$\phi_k(t, w) = \psi_k \left(u + \sum_{i=1}^{p} t_i \xi_i + \sum_{j=1}^{q} w_j \nabla\psi_j(u) \right).$$

17.2.3. Introduire la fonction $K(t) = J(u + \phi(t, w(t)))$ et observer que 0 est un minimum de K sur l'ouvert 0 de $\mathbb{R}^p$.

Indications 18

18.2.2. Considérer pour $e \in E$, l'ensemble $K = \{v \in E,\ J(v) \leqslant J(e)\}$.

18.2.3. Appliquer la question qui précède à J_m sur $\mathbb{R}^n$.

18.2.4. Observer que $J_m(u_m) \leqslant J(e)$ quel que soit $e \in E$.

18.2.5. Partir des deux inégalités

$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant J(u_{m+1}) + (m+1)\sum_{j=1}^{q}(\psi_j(u_{m+1}))^2, \\ &\geqslant J(u_{m+1}) + m\sum_{j=1}^{q}(\psi_j(u_{m+1}))^2. \end{aligned}$$

Indications 19

19.2.1. Observer que pour $v \in E_1$ donné, $\forall t \in \mathbb{R}, \quad I(u+tv) \geqslant I(u)$.

19.2.2. Prendre $w(x) = 1$.

19.2.3. Prendre $w(x) = e^{-inx}$.

19.2.4. Calculer $I(u+w) - I(u)$.

Indications 20

20.2.1. Considérer $t \mapsto I(u+tw)$.

20.2.2. Calculer $I(u+w) - I(u)$.

20.2.3. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

20.2.4. Prendre $w = D_{-h}D_h u$.

20.2.5. Calculer $(\nabla D_h u)_k$.

Indications 21

21.2.1. Étudier la convexité de $\mathcal{E}$.

21.2.2. Utiliser le fait que $t \to \mathcal{E}(u+tw)$ atteint son minimum en $t = 0$.

21.2.3. Partant de $\int_0^1 u'w'dx = \int_0^1 f'(u)wdx$, pour tout $w \in E$, montrer que u' est $\mathcal{C}^1$ à l'aide de choix judicieux de fonctions w.

Indications 22

22.2.1. Utiliser la relation de Parseval.

22.2.2. Remarquer que $L = \int_0^L \{(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2\}ds$.

22.2.3. Observer que si $4\pi A = L^2$ alors x et y ont presque tous leurs coefficients de Fourier nuls.

Indications 23

23.2.1. Faire un dessin.

23.2.2. Prendre une fonction z vérifiant $z(x_0) = 0, z(x_1) = 0$ et montrer que

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(y + \varepsilon z) = 0 \text{ en } \varepsilon = 0$$

où $\mathcal{L}(y) \equiv \int_{x_0}^{x_1} L(y(x), y'(x))\,dx$ et $L(u, p) = y\sqrt{1 + p^2}$. En déduire que y vérifie l'équation différentielle $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial p}(y(x), y'(x)) = \frac{\partial L}{\partial y}(y(x), y'(x))$.

Indications 25

25.2.3. Raisonner par récurrence.

25.2.5. Utiliser que $[a, b]$ est un compact et que la famille des (f_n) est équicontinue.

Indications 26

26.2.1. Utiliser le fait que $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}$.

26.2.2. Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

26.2.3. Calculer $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t))$.

26.2.4. La fonction H_1 vérifie (P) et la fonction H_2 ne vérifie pas (P). Pour (E^2) étudier directement le système différentiel.

Indications 27

27.2.1. Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.
27.2.2. Calculer $\frac{d}{dt}(y^2 + 2G(x))$.

27.2.3. Montrer que les morceaux de solution de (E) correspondant à $y = \sqrt{2(c - G(x))}$ et $y = -\sqrt{2(c - G(x))}$ se raccordent.

27.2.4. Faire un changement de variable dans l'intégrale.

27.2.5. Observer que

$$H(x) = a_{2n+2}x^{2n} + (a_{2n+2}\xi^2 + a_{2n})x^{2n-2} + \cdots + (a_{2n+2}\xi^{2n} + a_{2n}\xi^{2n-2} + \cdots + a_2)$$

est une fonction qui augmente lorsque ξ augmente.

Indications 28

28.2.1. Majorer $\left|\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)\right|$.

28.2.2. Calculer $\frac{d}{dt}V(x, \frac{dx}{dt})$ avec $V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{ax^2}{2} + 1 - \cos x - Lx$.

28.2.3. Introduire $V_\delta(x, y) = V(x, y) + \delta xy$ et bien choisir δ pour que le résultat demandé résulte du calcul de $\frac{d}{dt}V_\delta(x, \frac{dx}{dt})$.

Indications 29

29.2.1. Prendre $r(x) = \frac{1}{2}\int_0^x p(y)dy$.

29.2.2. Observer que $\lambda \int_a^b |z|^2 dx = \int_a^b (\sigma(x)|z|^2 - \left|\frac{dz}{dx}\right|^2)dx$.

29.2.3. L'ensemble des solutions de $z'' + (\sigma - \lambda)z = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2. Pour z_1, z_2 solutions de (E) calculer $\frac{dW}{dx}$ où $W = z_1 z_2' - z_2 z_1'$.

29.2.4. Montrer que $(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b z_1(x)z_2(x)dx = 0$.

29.2.5. Utiliser à nouveau l'indication du 29.2.2.

Indications 30

30.2.1. On écrit $P(x) = A(x-\alpha)^3$. Montrer que si $x_0 \neq \alpha$, aucune solution de (E) avec $x(0) = x_0$ n'est bornée.

30.2.2. On écrit $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ avec Q ne s'annulant pas. Montrer que si $x_0 \neq \alpha$, aucune solution de (E) avec $x(0) = x_0$ n'est bornée.

30.2.3. On écrit $P(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)^2$. Trouver toutes les solutions de (E).

30.2.4. On écrit $P(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ avec $\alpha < \beta < \gamma$. Trouver toutes les solutions de (E).

Indications 31

31.2.1. Calculer $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$.

31.2.2. Observer que si $x_0 = y_0 = 0$ alors $x(t) = y(t) = 0$.

31.2.3. Calculer $\frac{d\Lambda}{dt}$.

31.2.4. Montrer, en introduisant $\frac{(x(t),y(t))}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$, qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ tel que si l est cette limite, $((l-1)\xi_1, (l-2)\xi_2) = 0$.

Indications 32

32.2.1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

32.2.2. Supposer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et montrer que f vérifie la propriété (D).

Indications 33

33.2.1. Montrer que $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \pm\infty$.

33.2.2. Montrer que G tend vers $+\infty$ lorsque y tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

33.2.3. Écrire que la dérivée $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, t)$ s'annule où le minimum de $G(x, ., t)$ est atteint.

33.2.4. Utiliser le théorème des fonctions implicites.

33.2.5. Calculer les dérivées $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $\frac{\partial y}{\partial t}$.

33.2.6. Montrer que y se prolonge par continuité en $t = 0$.

Indications 34

34.2.1. Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz puis montrer que $u(\zeta(t), t)$ est indépendant de t.

34.2.2. Calculer $\dfrac{dv}{dt}(t)$ et en déduire la valeur exacte de $v(t)$.

Indications 35

35.2.1. Observer que si $x_0 \in \Omega$ est tel que $u(x_0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$ alors $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x_0) \leqslant 0$.

35.2.3. Utiliser le fait que si A est une matrice symétrique définie positive et si H est une matrice symétrique négative alors $Tr(AH) \leqslant 0$.

Indications 37

37.2.1. Considérer $\mathcal{N}(c_{-N}, ..., c_N) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathcal{C}^N(x)|$ et montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{C}^{2N+1}$.

37.2.2. Considérer $f(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin kx}{k}$.

Indications 38

38.2.1 Observer que $P(t) = \sum_k \alpha_k e^{i\omega_k t}$ où $\omega_k = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \lambda_j$ avec $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$.

38.2.2 Ici $\varepsilon_j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

38.2.3 Considérer $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(s) f(s) ds$ avec φ_j de sorte que $c_j = |c_j| e^{i\varphi_j}$.

Indications 39

39.2.1. Utiliser que sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les applications linéaires sont continues.

39.2.2. Prendre $T(x) = \cos nx$.

39.2.3. On raisonne par l'absurde et on se donne donc T tel que

$$T'(z) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |T'(x)| \equiv nL$$

avec $L > \sup_{x\in\mathbb{R}} |T(x)|$. Étudier la fonction $S(x) = L \sin n(x - z) - T(x)$.

Indications 40

40.2.1. Il s'agit du résultat classique sur la moyenne de Césaro d'une suite.

40.2.2. On pourra observer que

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{2m\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin m\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt,$$

et que

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2m\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\frac{\sin m\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt.$$

Indications 41

41.2.1. Majorer dans le cas $0 < \alpha < 1$ la somme à l'aide d'une intégrale. Utiliser, dans le cas $\alpha = 1$, un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ en fonction de n.

41.2.2. Montrer que ($[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x) lorsque $[\lambda n] \geqslant n+1$:

$$S_n(f,t) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sigma_{[\lambda n]}(f,t) - \frac{n+1}{[\lambda n]-n}\sigma_n(f,t) - \\ - \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<|j|\leqslant\lambda n}\left(1-\frac{|j|}{1+[\lambda n]}\right)\hat{f}(j)e^{ijt}.$$

41.2.3. Le résultat est inchangé.

Indications 42

42.2.1 Considérer une somme du type $\sum_{k=n}^{2n} a_k sinkx_n$ avec x_n bien choisi.

42.2.2. Pour montrer que la réciproque est vraie, on pourra introduire la suite décroissante $b_k = sup\{na_n, n \geqslant k\}$ et majorer les sommes partielles $\sum_{k=m}^{m+p} a_k \sin kx$ en fonction de b_m et indépendamment de x.

42.2.3. Pour montrer que si a_n s'obtient en fonction de f continue, on pourra utiliser que σ_n, où $\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k(x)$ ($S_k(x) = \sum_{p=1}^{k} a_p \sin px$), converge uniformément vers f.

Indications 43

43.2.1. Soient

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Montrer l'identité ($n \geqslant 2$)

$$s_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\Delta^2 a_k F_k(x) + \frac{1}{2}n(\Delta a_{n-1})F_{n-1}(x) + \frac{1}{2}a_n D_n(x). \qquad (\star)$$

43.2.2. Utiliser la convergence uniforme de s_n vers f sur $[a,b] \subset]0,2\pi[$.

43.2.3. Montrer l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} k\Delta^2 a_{m+k} = n\Delta a_{m+n+1} + a_{m+1} - a_{m+n+1}.$$

Indications 44

44.2.1. Commencer par étudier le cas où f est la fonction caractéristique de $[a,b] \subset [0,1]$.

44.2.3.b. Soit $K_N(x) = \frac{1}{1+N}(\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x})^2$. Montrer que $K_N \star F$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F (on a noté $K_N \star F$ la fonction $x \mapsto \int_0^1 K_N(x-y)F(y)dy$).

44.2.4. Choisir a_k tel que $\sum_{k\geqslant 1} \frac{a_k}{k}$ soit divergente.

Indications 46

46.2.1. Montrer que la série est normalement convergente.

46.2.2. Donner, pour $n = 2$, un exemple où $e^A e^B$, $e^B e^A$ et e^{A+B} sont trois matrices différentes.

46.2.3. Faire un développement limité du type $e^{\frac{A}{n}} = I + \frac{A}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Indications 47

47.2.1. Se ramener au cas $z_0 = 0$ puis faire une transformation d'Abel sur l'écriture du critère de Cauchy pour $\sum_{n=1}^{p} a_n e^{-\lambda_n z}$.

47.2.2. Étudier la convergence en un point du cercle de convergence.

47.2.3. Ici $\lambda_n = \log n$, comparer les ensembles de convergence et de convergence absolue pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

Indications 48

48.2.1. Considérer la partition de $\mathbb{N}$: $I = \{n \in \mathbb{N}, a_n > 0\}$ et $J = \{n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant 0\}$ pour établir que si $\sum |a_n|$ est divergente, il existe σ tel que $\sum a_{\sigma(n)}$ soit divergente.

48.2.2. Considérer pour $m(n) = \max\{\sigma(k), 0 \leqslant k \leqslant n\}$ la différence

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{m(n)} a_k.$$

48.2.3. Passer en parties réelles et imaginaires.

48.2.4. Écrire $C_n = e^{\beta_n + i\gamma_n}$ et montrer que $\sum |C_n - 1|$ et $\sum(|\beta_n| + |\gamma_n|)$ sont simultanément convergentes.

48.2.5. Appliquer le critère précédent.

Indications 49

49.2.1. Considérer le cas où $h = 0$ et inverser g en G continue.

49.2.2. Considérer le cas où $h = 0$ et introduire $g_+(x) = \lim_{h \to 0^+} g(x + h)$ (avec $g_+(b) \equiv g(b)$).

Indications 50

50.2.1. Considérer une fonction en escalier.

50.2.2. Calculer $V(1)$.

50.2.3. Observer $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(y)| dy$.

Pour l'estimation de $n\hat{f}(n)$ commencer par considérer le cas où g est continue et appliquer par exemple le théorème de Fubini.

50.2.4. Commencer par considérer le cas où f est continue et introduire la somme $\sum_{k=1}^{m} f(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$ où $g(x) = \frac{e^{-inx}}{n}$ lorsque $n \neq 0$.

3

Solutions détaillées et méthodes

Les solutions détaillées des 50 problèmes sont rassemblées ci-après. Chaque solution est suivie de commentaires dont le but est soit de compléter un point donné, soit d'apporter un autre éclairage à un résultat évoqué, soit encore de prolonger le problème.

Corrigé 1

1.3.1. Nous avons $\frac{d}{dx}u^2(x) = 2u(x)u'(x)$, il en résulte que

$$u^2(x) = 2\int_0^x u(y)u'(y)dy.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u^2(x) &\leqslant 2\int_0^1 |u(y)u'(y)|dy\,, \\ &\leqslant 2\left(\int_0^1 u^2(y)dy\right)^{1/2}\left(\int_0^1 u'(y)^2dy\right)^{1/2}\,, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il vient après intégration par rapport à x et simplification par $\left(\int_0^1 u^2(y)dy\right)^{1/2}$:

$$\left(\int_0^1 u^2(x)dx\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\int_0^1 u'(y)^2dy\right)^{1/2}\,,$$

qui donne l'inégalité recherchée par élévation au carré.

1.3.2. Notons dorénavant $||v||_1 = \left(\int_0^1 v'(x)^2dx\right)^{1/2}$. Il s'agit d'une norme sur $\mathcal{C}_0^1 \equiv \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), v(0) = v(1) = 0\}$. Ainsi Σ est la sphère unité de $\mathcal{C}_0^1$ pour la norme $||.||_1$. Si cette sphère unité (qui est donc fermée et bornée) était *compacte*, nous aurions automatiquement l'existence de v vérifiant $(\star)$ car d'après la question précédente, l'application $v \mapsto \int_0^1 v^2(x)dx$ est continue sur $\mathcal{C}_0^1$ muni de la norme $||.||_1$.

Or $\mathcal{C}_0^1$ est de dimension infinie (par exemple $(\sin k\pi x)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ constitue une famille libre dans $\mathcal{C}_0^1$). Donc sa boule unité, Σ, n'est pas compacte d'après le théorème de Riesz, voir les commentaires à ce problème page 61. L'existence de v vérifiant $(\star)$ n'est donc pas immédiate.

1.3.3. Soit $v \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap \Sigma$ vérifiant $(\star)$ et $w \in \mathcal{C}_0^1$ arbitraire.
Puisque $||v||_1 \neq 0$, pour t assez petit, nous avons $||v+tw||_1 \neq 0$ et alors $\frac{v+tw}{||v+tw||_1} \in \Sigma$.
D'après $(\star)$,

$$\int_0^1 \frac{(v+tw)^2}{||v+tw||_1^2}dx \leqslant \int_0^1 v^2(x)dx\,,$$

c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto \frac{\int_0^1 (v+tw)^2 dx}{\int_0^1 (v'+tw')^2 dx}$ possède un maximum local en $t = 0$. S'agissant d'une fonction rationnelle par rapport à t, sa dérivée, en $t = 0$ est nulle c'est-à-dire que

$$2\left(\int_0^1 vwdx\right)||v||_1^2 = 2\left(\int_0^1 v'w'dx\right)\int_0^1 v^2dx.$$

Notons $c_0 = \int_0^1 v^2 dx$ et observons que $||v||_1 = 1$.

Il vient alors finalement

$$\forall w \in \mathcal{C}_0^1, \quad c_0\int_0^1 v'w'dx = \int_0^1 vwdx.$$

Nous n'avons pas utilisé pour l'instant que $v \in \mathcal{C}^2([0,1])$. Grâce à cette régularité supplémentaire, nous pouvons intégrer par parties et écrire que

$$\int_0^1 v'w'dx = -\int_0^1 v''wdx$$

(se souvenir que $w(0) = w(1) = 0$). Ainsi

$$\forall w \in \mathcal{C}_0^1, \quad \int_0^1 (c_0v''+v)wdx = 0.$$

La fonction $c_0v''+v$ est continue, si elle était non nulle, il existerait un point $x_0 \in]0,1[$ et deux nombres ρ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que $]x_0-\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_0[\ \subset]0,1[$ et $\forall x \in\ ]x_0-\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_0[, |c_0v''(x)+v(x)| \geqslant \rho > 0$. Le signe de $c_0v''+v$ est alors constant sur $]x_0-\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_0[$, notons le $\delta \in \{-1,1\}$. Soit alors χ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, valant 1 sur $]x_0-\varepsilon_0/2, x_0+\varepsilon_0/2[$ et 0 sur $[0,1]\backslash]x_0-\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_0[$. Prenons alors $w(x)=\delta\chi(x)$, il vient

$$0=\int_0^1 (c_0v''+v)w dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta|c_0v''+v|w dx =$$

$$= \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |c_0v''+v|\chi dx \geqslant \int_{x_0-\varepsilon_0/2}^{x_0+\varepsilon_0/2} \rho dx = \rho\varepsilon_0 > 0$$

ce qui est absurde. Ainsi $c_0v''+v=0$ sur $[0,1]$. Mais $c_0 \neq 0$ (car $||v||_1 = 1 \Rightarrow v \not\equiv 0$) et donc $v''=-v/c_0$ avec $v(0)=v(1)=0$. Il en résulte que (i) $1/c_0$ est de la forme $k^2\pi^2$ avec $k\in\mathbb{N}^\star$ et que $v(x)=\lambda\sin k\pi x$. Mais $||v||_1=1$ et donc $\lambda^2k^2\pi^2=2$ puisque $\int_0^1 v^2dx=\lambda^2/2$, v correspond forcément au plus petit λ c'est-à-dire celui pour $k=1$. Ainsi $v(x)=\lambda\sin\pi x$ avec $\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ sont les deux seules solutions possibles.

Nous avons alors $c_0=1/\pi^2$.

1.3.4. Donnons nous $u\in\mathcal{C}_0^1$ avec $u\not\equiv 0$. Alors $||u||_1\neq 0$ et la fonction $u/||u||_1$ appartient à Σ. D'après ce qui précède,

$$\int_0^1 \frac{u^2(x)}{||u||_1^2}dx \leqslant c_0 = \frac{1}{\pi^2}$$

et donc

$$\int_0^1 u^2(x)dx \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 u'(x)^2dx.$$

1.3.5. Cette dernière inégalité, meilleure que celle de la première question, a été prouvée sous l'hypothèse qu'il existait $v\in\mathcal{C}^2([0,1])\cap\Sigma$ solution de $(\star)$.

Donnons nous $u\in\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ tel que $u(0)=u(1)=0$ et désignons par f la fonction de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

pour $x\geqslant 0$: $f(x)=u(x/\pi)$, pour $x\leqslant 0$: $f(x)=-u(-x/\pi)$. Cette fonction est continue sur $[-\pi,\pi]$, périodique ($f(-\pi)=f(\pi)$) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$. Notons alors

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx, \quad n\in\mathbb{N}^\star.$$

Introduisons pour $N\geqslant 1$, le polynôme trigonométrique

$$f_N(x)=\sum_{n=1}^N b_n\sin nx.$$

Puisque $\int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(x)dx=\pi\sum_{n=1}^N b_n^2$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f_N'^2(x)dx=\pi\sum_{n=1}^N n^2b_n^2$, nous avons

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(x)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f_N'^2(x)dx$$

Étant donné que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi} f_N'^2(x)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)dx$ et donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(x)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)dx.$$

Maintenant

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(x)dx$$

car f est continue et $f(\pi) = f(-\pi)$ (en fait ici f étant $\mathcal{C}^1$, il y a même convergence uniforme de f_N vers f sur $[-\pi, \pi]$). Par conséquent

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)dx.$$

Revenons alors en u :

$$2\int_0^{\pi} u^2(\frac{x}{\pi})dx \leqslant 2\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi^2}u'(\frac{x}{\pi})^2dx,$$

et en faisant le changement de variable $x = \pi y$:

$$\int_0^1 u^2(x)dx \leqslant \pi^{-2}\int_0^1 u'^2(x)dx,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il est alors clair que $v(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin \pi x$ est de classe $\mathcal{C}^2$, appartient à Σ et vérifie $(\star)$.

Commentaires

Au numéro 1.3.2. nous avons évoqué le théorème de Riesz qui s'énonce comme suit.

Théorème. (Riesz) *Dans un espace vectoriel normé il y a équivalence entre les deux assertions :*

(i) la boule unité fermée est compacte,

(ii) la dimension de l'espace est finie.

Démonstration. Lorsque l'espace est de dimension finie, n, le choix d'une base le rend homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ où les fermés bornés non vide sont les compacts.

Supposons réciproquement que la boule unité fermée soit compacte. Si l'espace, noté E, est de dimension infinie, il existe une famille libre et dénombrable de vecteurs unitaires : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $||e_n|| = 1$. Soit alors E_n l'espace vectoriel de dimension finie engendré par $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$. Nous avons $E_n \neq E$ et il en résulte (admettons-le momentanément) qu'il existe $u_n \in E_n$ avec $||u_n|| = 1$, et $d(u_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à la boule unité fermée de E et pour $m < n$,

$$||u_n - u_m|| \geqslant d(u_n, E_m) \geqslant d(u_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne contient pas de valeur d'adhérence ce qui contredit (i) : E est forcément de dimension finie. Il nous reste donc à montrer l'existence de la suite finie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque E_{n-1} est de dimension finie, c'est un sous-espace fermé de E, différent de E. Soit alors $v \in E$ tel que $v \notin E_{n-1}$. Nous avons $d \equiv d(v, E_{n-1}) > 0$ et par conséquent, il existe $w \in E_{n-1}$ tel que $d \leqslant ||v - w|| \leqslant 2d$. Montrons que $u_n = \frac{v-w}{||v-w||}$ convient i.e. que $||u_n|| = 1$ et $d(u_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2$. Soit $\eta \in E_{n-1}$,

$$||u_n - \eta|| = \left\| \frac{v-w}{||v-w||} - \eta \right\| = \frac{||v - (w + ||v-w||\eta)||}{||v-w||} \geqslant \frac{d}{2d} = 1/2$$

(car $w + ||v - w||\eta \in E_{n-1}$). Ceci achève la preuve du théorème. ❑

Le problème $(\star)$ considéré au numéro 1.3.2. est un problème du calcul des variations au sens des commentaires au problème 22 page 121. En effet, si nous prenons $F(x, u, p) = u^2$ et $G(x, u, p) = p^2$, l'équation d'Euler (E) (voir page 121) s'écrit

$$\frac{d}{dx}(2\lambda u'(x)) = 2u(x)$$

soit $\lambda u''(x) = u(x)$ (λ est un nombre réel à déterminer). Il s'agit bien de l'équation à laquelle nous sommes arrivés au numéro 1.3.3. (λ y est noté $-c_0$).

Corrigé 2

2.3.1. Soit $a_k, k \in \mathbb{N}$, tel que $a_k \geqslant 0, \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ et $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k^2 = +\infty$ (par exemple $a_k = 1/k^{1/2}$ si k est de la forme $4^n, n \in \mathbb{N}$ et $a_k = 0$ sinon ; $k a_k^2$ ne tend pas vers zéro alors que $\sum_{k=0}^{N} a_k \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$). Posons alors $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$. La fonction u est continue puisque la série de fonctions continues de terme général $(a_k \cos kx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Nous avons aussi $u_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_p \cos pxe^{-ikx} dx$ par convergence uniforme et donc $u_k = \frac{1}{2} a_{|k|}$ pour $k \neq 0$ et $u_0 = a_0$. Puisque $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k^2 = +\infty$, $Q(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |k| a_k^2 = +\infty$.

2.3.2. La fonction $U : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $U(x,t) = (u(x+t) - u(x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de continuité des intégrales par rapport à un paramètre, le segment $[0, 2\pi]$ étant compact, la fonction $t \mapsto \int_0^{2\pi} U(x,t)dx$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.3.3. À t fixé, la fonction $v(x) = u(x+t) - u(x)$ est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Son $k$ième coefficient de Fourier v_k se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) e^{-ikx} dx = -u_k + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x+t) e^{-ikx} dx \, , \\ &= -u_k + \frac{1}{2\pi} \int_t^{2\pi+t} u(x) e^{-ik(x-t)} dx \, , \\ &= (e^{ikt} - 1) u_k \, , \end{aligned}$$

puisque $\int_t^{2\pi+t} u(x)e^{-ikx}dx$ est indépendant de t (intégrale d'une fonction périodique sur une période). Par l'identité de Parseval :

$$\int_0^{2\pi} |v(x)|^2 dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |v_k|^2 = \sum |u_k|^2 |1 - e^{ikt}|^2.$$

Mais $|1 - e^{ikt}|^2 = 4\sin^2 \frac{kt}{2}$ et donc

$$\varphi(t) = 4 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2 \sin^2 \frac{kt}{2}.$$

Observons par ailleurs que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{4}{t^2} \sin^2 \frac{kt}{2} dt$ est convergente et vaut $\alpha|k|$ avec $\alpha = 2\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ (il suffit de faire le changement de variable $s = \frac{|k|t}{2}$ lorsque $k \neq 0$). Ainsi la formule demandée revient à intervertir intégrale et somme. Tout d'abord si $Q(u) = +\infty$, observons que pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$\varphi(t) \geqslant 4\sum_{|k|\leqslant N} |u_k|^2 \sin^2 \frac{kt}{2}$ et donc

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \geqslant 4 \sum_{|k|\leqslant N} \int_0^\infty |u_k|^2 \sin^2 \frac{kt}{2}\frac{dt}{t^2} = \alpha \sum_{|k|\leqslant N} |k||u_k|^2 ,$$

et ainsi lorsque $N \to \infty$, puisque $\alpha > 0, \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = +\infty$: on a bien $\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} = \alpha Q(u)(+\infty = +\infty)$. Plaçons nous dans le cas où $Q(u) < \infty$ c'est-à-dire que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||u_k|^2 < \infty$. Sur tout compact $[\varepsilon, A]$, nous pouvons écrire

$$\int_\varepsilon^A \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2 \int_\varepsilon^A \frac{\sin^2(kt/2)}{t^2} dt ,$$

car la série de fonctions $(|u_k|^2 \sin^2 \frac{kt}{2})$ converge uniformément vers $\varphi(t)$. Mais $\int_\varepsilon^A \frac{\sin^2(ht/2)}{t^2} dt \leqslant \int_0^\infty \frac{\sin^2(ht/2)}{t^2} dt = \alpha|k|$ et donc la série de fonctions de ε et A : $(|u_k|^2 \int_\varepsilon^A \frac{\sin^2(\frac{ht}{2})}{t^2} dt)$ est dominée par la série convergente de terme général $(\alpha|k||U_k|^2)$. Puisque, à k fixé,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}} |u_k|^2 \int_\varepsilon^A \frac{\sin^2 \frac{ht}{2}}{t^2} dt = \alpha|u_k|^2|k| ,$$

nous en déduisons que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}} \int_\varepsilon^A \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||u_k|^2 = \alpha Q(u).$$

2.3.4. Puisque $|u(x+t) - u(x)|^2 \leqslant 2(|u(x+t)|^2 + |u(x)|)^2$ nous avons

$$\varphi(t) \leqslant 2\left(\int_0^{2\pi} |u(x+t)|^2 dx + \int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx\right) = 4\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx.$$

Par ailleurs, $u(x+t)-u(x) = t\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)(x+t\theta)d\theta$ qui s'obtient en considérant la fonction $\theta \mapsto u(x+t\theta)$. Ainsi à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|u(x+t)-u(x)|^2 \leqslant t^2 \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 (x+t\theta)d\theta$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} |u(x+t)-u(x)|^2 dx \leqslant t^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 (x+t\theta)d\theta\right) dx.$$

Intervertissons alors les deux intégrales en faisant appel au théorème de Fubini et en observant que

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 (x+t\theta)dx = \int_{t\theta}^{2\pi+t\theta} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 (x)dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Il vient ainsi

$$\varphi(t) \leqslant t^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Désignons par $||v||^2 = \int_0^{2\pi} v(x)^2 dx$. Nous avons donc montré que

$$\varphi(t) \leqslant 4||u||^2 \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) \leqslant t^2||u_x||^2.$$

Aucune de ces majorations ne peut-être utilisée sur $[0,+\infty[$ pour majorer $\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}dt$ car les deux intégrales divergent (l'une à l'infini, l'autre en $t=0$). Nous prenons donc $\tau > 0$ arbitraire et écrivons avec $u_x \equiv \frac{du}{dx}$,

$$\begin{aligned} \alpha Q(u) &= \int_0^\tau \frac{\varphi(t)}{t^2}dt + \int_\tau^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt, \\ &\leqslant \int_0^\tau \frac{t^2||u_x||^2 dt}{t^2} + \int_\tau^{+\infty} \frac{4||u||^2 dt}{t^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\alpha Q(u) \leqslant \tau||u_x||^2 + \frac{4}{\tau}||u||^2, \forall \tau > 0.$$

Puisque τ est arbitraire, prenons celui qui minimise le membre de droite : $\tau = \frac{2||u||}{||u_x||}$ (si $||u_x|| = 0, u$ est constante et l'inégalité est toujours vraie quel que soit β). Il vient

$$\alpha Q(u) \leqslant 4||u|| \cdot ||u_x||$$

et donc $\beta = 16/\alpha^2$ convient.

2.3.5. Puisque u est de classe $\mathcal{C}^1$, nous pouvons appliquer l'identité de Parseval à la fonction $\frac{du}{dx}$ dont les coefficients de Fourier $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{dx}e^{-ikx}dx$ valent iku_k : $||u_k||^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^2|u_k|^2$. Mais par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k||u_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|k||u_k|.|u_k| \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^2|u_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_k|^2\right)^{1/2}$$

et donc

$$Q(u)^2 \leqslant \int_0^{2\pi}u^2dx\int_0^{2\pi}u_x^2dx.$$

Si nous prenons $u = \cos x$ nous avons égalité dans cette inégalité, la meilleure constante dans l'inégalité $(\star)$ est donc 1.

Commentaires

Finalement l'inégalité $(\star)$ s'écrit

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{|u(x+t)-u(x)|^2}{t^2}dxdt \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}u^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx\right)^{1/2} \quad (**)$$

car $\alpha = 2\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \pi$. Cette dernière identité résulte d'une simple intégration par parties et du fait que $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et 2π-périodique nous avons bien évidemment l'inégalité

$$\frac{|u(x+t)-u(x)|^2}{t^2} \leqslant \sup_{0\leqslant y\leqslant 2\pi}\left(\frac{du}{dx}(y)\right)^2, \qquad \forall x, t \neq 0.$$

L'inégalité $(\star\star)$ est son analogue lorsque l'on souhaite utiliser comme majorant des normes de u et $\frac{du}{dx}$ en moyenne quadratique.

Corrigé 3

3.3.1. Si la série de terme général $(1+k^2)|u_k|^2$ est divergente, l'inégalité est évidente. Si par contre $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|u_k|^2 < \infty$, $[u] < \infty$ et $|u| < \infty$ (cette dernière série est toujours convergente d'après l'identité de Parseval). D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|)|u_k||u_k| \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|)^2|u_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|u_k|^2\right)^{1/2},$$

et puisque $(1+|k|)^2 \leqslant 2(1+k^2)$, l'inégalité demandée s'obtient avec $C_1 = 2^{1/4}$. Remarquons que l'inégalité $[u] \leqslant 2^{1/4}|u|^{1/2}||u||^{1/2}$ est optimale puisque c'est une égalité pour $u(x) = \cos x$.

3.3.2. Là encore si $||u|| = +\infty$, l'inégalité est évidente. Supposons donc que $||u|| < \infty$. Soit alors N fixé, on note $v(x) = \sum_{k=-N}^{N} u_k e^{ikx}$. La fonction v étant de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) nous avons par intégration de $\frac{d}{dt}v^2(t) = 2v(t)v'(t)$:

$$v^2(x) = v^2(y) - 2\int_x^y v(t)v'(t)dt$$

et donc quels que soient x et y entre 0 et 2π :

$$\left|v^2(x) - v^2(y)\right| \leqslant 2\int_0^{2\pi} |v(t)||v'(t)|dt.$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'intégrale :

$$|v^2(x) - v^2(y)| \leqslant 2\left(\int_0^{2\pi} |v|^2(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} |v'|^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

Mais $v^2(x) = v^2(x) - v^2(y) + v^2(y)$ et donc par intégration sur $[0, 2\pi]$ par rapport à y :

$$2\pi v^2(x) = \int_0^{2\pi} (v^2(x) - v^2(y))dy + \int_0^{2\pi} v^2(y)dy$$

ainsi à l'aide de l'inégalité précédente :

$$v^2(x) \leqslant 2\left(\int_0^{2\pi} |v|^2(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} |v'|^2(t)dt\right)^{1/2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^2(y)dy.$$

Or nous avons $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |v|^2(t)dt = \sum_{k=-N}^{N} |u_k|^2 \leqslant |u|^2$ et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |v'(t)|^2 dt = \sum_{k=-N}^{N} k^2|u_k|^2 \leqslant ||u||^2$$

d'où

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} u_k e^{-ikx}\right)^2 \leqslant 4\pi|u|||u|| + |u|^2 \leqslant (1 + 4\pi)|u|||u||.$$

Mais la série de terme général (u_k) est absolument convergente, en effet :

$$|u_k| = \frac{1}{k}.k|u_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(k^2|u_k|^2 + \frac{1}{k^2}\right) \text{ et } ||u|| < \infty.$$

Il en résulte que $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} u_k e^{ikx} = u(x)$ et donc $u^2(x) \leqslant (1 + 4\pi)|u|||u||$, ce qui établit l'inégalité demandée.

Revenons sur l'assertion $u(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} u_k e^{-ikx}$. Puisque $\sum |u_k| < \infty$, la série de fonctions $\sum u_k e^{-ikx}$ est normalement convergente vers une limite l qui est une fonction continue et 2π-périodique. Le $k$ième coefficient de Fourier de l est $l_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l(x)e^{-ikx}dx = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{u_p}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ipx}e^{-ikx}dx$ par convergence uniforme. Ainsi $l_k = u_k$ pour tout k. Il en résulte que $l = u$.

3.3.3. Soit $a_k \geqslant 0$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = +\infty$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}}(1+k)a_k^2 < \infty$ (par exemple $a_k = \frac{1}{(1+k)\log(2+k)}$ convient). Désignons par u^N la fonction

$$u^N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos kx.$$

Nous avons $u_k^N = \frac{1}{2}a_{|k|}$ pour $k \neq 0$ et $u_0^N = a_0$.

Si l'inégalité était vraie nous aurions

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} a_k = u^N(0) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |u^N(x)| &\leqslant C_3 \left(\sum_{k=0}^{N}(1+k)a_k^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant C_3 \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(1+k)a_k^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque $\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k = +\infty$.

3.3.4. De nouveau si $||u|| = +\infty$ l'inégalité demandée est évidente. Plaçons nous donc dans le cas ou $||u|| < \infty$.

Nous avons alors pour tout N :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| = \sum_{|k|\leqslant N} |u_k| + \sum_{|k|\geqslant N+1} |u_k|.$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz à chacune de ces deux sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{|k|\leqslant N} |u_k| &= \sum_{|k|\leqslant N} (1+|k|)^{-1/2}|u_k|(1+|k|)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\sum_{|k|\leqslant N} \frac{1}{1+|k|}\right)^{1/2} \left(\sum_{|k|\leqslant N} (1+|k|)|u_k|^2\right)^{1/2}, \\ \sum_{|k|\leqslant N} |u_k| &\leqslant \left(\sum_{|k|\leqslant N} \frac{1}{1+|k|}\right)^{1/2} [u].\end{aligned}$$

Et pour la seconde :

$$\sum_{|k|\geqslant N+1} |u_k| = \sum_{|k|\geqslant N+1} (1+|k|^2)^{-1/2}|u_k|(1+|k|^2)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{|k|\geqslant N+1} \frac{1}{1+k^2}\right)^{1/2} ||u||.$$

La première série numérique peut alors être majorée par comparaison avec une intégrale :

$$\sum_{|k|\leqslant N} \frac{1}{1+|k|} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{1+x} = 1 + 2\log(1+N).$$

Pour la seconde,

$$\sum_{|k|\geqslant N+1} \frac{1}{1+k^2} \leqslant 2\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{N}.$$

Ainsi

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \leqslant (1 + 2\log(1+N))^{1/2}[u] + \frac{2^{1/2}||u||}{N^{1/2}}.$$

Puisque N est arbitraire, l'idée est de choisir un N qui rende le second membre minimal. Tout d'abord si $||u|| \leqslant [u]$, pour $N = 1$ il vient

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \leqslant \left[2 + (1 + 2\log 2)^{1/2}\right][u],$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \leqslant \frac{\left[2 + (1 + 2\log 2)^{1/2}\right]}{(\log 2)^{1/2}}[u]\left[\log(1 + \frac{||u||}{[u]})\right]^{1/2}.$$

Si $||u|| \geqslant [u]$, prenons pour N la partie entière de $\frac{||u||}{[u]}$: $\frac{||u||}{[u]} \leqslant N < 1 + \frac{||u||}{[u]}$. Alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \leqslant \left[2 + (1 + 2\log(2 + \frac{||u||}{[u]}))^{1/2}\right][u].$$

La fonction $x \mapsto (2 + (1 + 2\log(2+x))^{1/2})/(\log(1+x))^{1/2}$ étant majorée sur $[1, +\infty[$ par une constante C_4, nous obtenons que pour tout $u \neq 0$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \leqslant C_4[u]\left(\log(1 + \frac{||u||}{[u]})\right)^{1/2}.$$

Étant donné que lorsque $||u|| < \infty$, $\sum u_k e^{ikx}$ converge uniformément vers u, $|u(x)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'inégalité demandée en découle.

Commentaires

L'objet de ce problème est de montrer que bien que l'inégalité du numéro 3.1.3. soit fausse, il s'en faut de très peu c'est-à-dire que cette inégalité est vraie au prix d'une correction logarithmique. Ce type d'inégalité trouve notamment son utilité dans la théorie des équations différentielles. En effet, le Lemme de Gronwall (voir par exemple le préambule du problème 36 à la page 28) fait que si nous avons une inéquation différentielle

$$\frac{dy}{dt} \leqslant By\,,$$

alors $y(t) \leqslant y(0)e^{Bt}$ pour $t \geqslant 0$. Par contre, il n'est pas possible de déduire de l'inéquation différentielle

$$\frac{dy}{dt} \leqslant B|y|^{p-1}y\,,$$

où $p \in\,]1, +\infty[$ une majoration du même type (il suffit pour s'en convaincre de résoudre l'équation différentielle correspondant au cas d'égalité). Toutefois si nous considérons $y \geqslant 1$ vérifiant

$$\frac{dy}{dt} \leqslant By \log y\,,$$

nous avons $y(t) \leqslant y(0)^{e^{Bt}}$ pour $t \geqslant 0$. Certes la croissance de y peut être très violente mais pour tout $T \geqslant 0$, la fonction y est uniformément bornée sur $[0, T]$.

Corrigé 4

4.3.1. Soit donc (f_k) une suite de Cauchy dans A : $\forall\varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall K \geqslant N$ et $\forall p \geqslant 0$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_{K+p}(n) - \hat{f}_K(n)| \leqslant \varepsilon$. À n fixé, la suite $(\hat{f}_k(n))$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet et par conséquent il existe $l_n \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{k\to+\infty} \hat{f}_k(n) = l_n$. Montrons alors (i) que $\sum |l_n| < \infty$ et (ii) que $||f_k - l||_A \to 0$ lorsque $k \to \infty$ où $l(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n e^{inx}$. Soit donc $N_0 \geqslant 0$ fixé. Nous avons

$$\sum_{|n|\leqslant N_0} |\hat{f}_{K+p}(n) - \hat{f}_K(n)| \leqslant \varepsilon.$$

Passons à la limite $p \to +\infty$ dans cette somme finie, il vient

$$\sum_{|n|\leqslant N_0} |l_n - \hat{f}_K(n)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall K \geqslant N.$$

Puisque cette estimation est indépendante de N_0, il en résulte que la série de terme général $(l_n - \hat{f}_N(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente et donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |l_n| < \infty$. De plus en faisant $N_0 \to \infty$ il vient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |l_n - \hat{f}_K(n)| \leqslant \varepsilon$. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |l_n| < \infty$, la série de fonctions, de terme général $(l_n e^{inx})$ converge uniformément vers $l \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $l(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n e^{inx}$. De plus

$$\hat{l}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} l_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}dx = l_n.$$

Ainsi $l \in A$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall K \geqslant N \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{l}(n) - \hat{f}_K(n)| \leqslant \varepsilon$.
On aurait pu aussi obtenir le résultat en observant que l'application $\varphi \ : l^1_r \rightarrow A$ ($l^1_r \equiv \{u_n \in \mathbb{C}, u_{-n} = \overline{u}_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| < \infty\}$) définie par

$$\varphi((u_n)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}$$

réalise un isomorphisme isométrique entre $(l^1_r, ||.||_{l^1})$ et $(A, ||.||_A)$, puis en utilisant le fait que l^1 est complet.

4.3.2. Soient f et g dans A. Nous avons alors

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$$

avec convergence uniforme. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(l)e^{i(k+l)x} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k+l=n} \hat{f}(k)\hat{g}(l) \right) e^{inx} \end{aligned}$$

où toutes les convergences sont absolues.

Ainsi $\widehat{fg}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k+l=n} \hat{f}(k)\hat{g}(l)\right) \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx$ d'où

$$\widehat{fg}(x) = \sum_{k+l=n} \hat{f}(k)\hat{g}(l).$$

Par suite $|\widehat{fg}(n)| \leqslant \sum_{k+l=n} |\hat{f}(k)||\hat{g}(l)|$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{|n|\leqslant N} |\widehat{fg}(n)| &\leqslant \sum_{|n|\leqslant N} \sum_{k+l=n} |\hat{f}(k)||\hat{g}(l)| \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(l)| = ||f||_A ||g||_A. \end{aligned}$$

Il en résulte que la série de terme général $(\widehat{fg}(n))$ est absolument convergente et donc $fg \in A$ avec de plus $||fg||_A \leqslant ||f||_A ||g||_A$.

4.3.3. Soit $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il existe alors une suite de polynômes trigonométriques $a_0 + \sum_{k=0}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ qui converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$ (et donc sur $\mathbb{R}$). Attention en général il ne s'agit pas de $\sum_{|n|\leqslant N} \hat{f}(n)e^{inx}$.
Pour un polynôme trigonométrique T on a $\hat{T}(n) = 0$ pour $|n|$ assez grand et donc $T \in A$.

Pour montrer que $A \neq \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il suffit d'exhiber $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|$ diverge. On peut prendre par exemple $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nx}{n \log(1+n)}$, dans ce cas $\hat{f}(0) = 0$, $\left|\hat{f}(n)\right| = \frac{1}{|n| \log(1+|n|)}$ pour $n \neq 0$. On a bien $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = \infty$ et on montre indépendamment (voir les commentaires du problème 42 à la page 187) que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4.3.4. Nous avons vu que pour $f \in A$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

avec convergence uniforme. Ainsi

$$f(t-h) - f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (e^{-inh} - 1)\hat{f}(n) e^{int}.$$

Soit $m \geqslant 0$ et n compris entre 2^m et 2^{m+1} : $2^m \leqslant n \leqslant 2^{m+1}$ alors pour $h = \frac{2\pi}{3.2^m}$ nous avons $\sqrt{3} \leqslant |e^{-inh} - 1|$ car $|e^{-inh} - 1| = 2|\sin \frac{nh}{2}|$ et $\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{nh}{2} \leqslant \frac{2\pi}{3}$. Par conséquent

$$\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)|^2 \leqslant \sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |e^{-inh} - 1|^2 |\hat{f}(n)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |e^{inh} - 1|^2 |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t-h) - f(t)|^2 dt$$

par l'identité de Parseval. Or $|f(t-h) - f(t)| \leqslant h^\alpha [f]_\alpha$ et donc

$$\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)|^2 \leqslant h^{2\alpha} ||f||_\alpha^2 = \left(\frac{2\pi}{3.2^m}\right)^{2\alpha} [f]_\alpha^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)| \leqslant \left(\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} 1\right)^{1/2} \left(\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)|^2\right)^{1/2},$$

et puisque $\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} 1 = 2^{m+1}$,

$$\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)| \leqslant 2^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{2\pi}{3.2^m}\right)^\alpha [f]_\alpha.$$

Maintenant pour évaluer $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$, on somme sur les couronnes diadiques $2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| &= |\hat{f}(0)| + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)| \\ &\leqslant |\hat{f}(0)| + \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\alpha} \sqrt{2}[f]_\alpha \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(\frac{1}{2}-\alpha)}.\end{aligned}$$

La série $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(\frac{1}{2}-\alpha)}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$ et donc si

$$C_\alpha = 1 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\alpha} \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(\frac{1}{2}-\alpha)},$$

nous avons pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $||f||_A \leqslant C_\alpha ||f||_\alpha$.

Commentaires

L'estimée précédente est en fait optimale c'est-à-dire que l'on peut avoir $f \in Lip_{1/2}$ alors que $f \notin A$. Un contre-exemple est donné par $f(t) = Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int \log n}}{n} e^{int}$. Cette fonction n'est pas dans A car pour $n \neq 0, |\hat{f}(n)| = \frac{1}{n}$. Le fait que $f \in Lip_{1/2}$ est fort délicat à montrer et nous renvoyons à la page 197 du livre de A. Zygmund, *Trigonometric series*, paru chez Cambridge University Press, où le résultat plus général qui suit est démontré.

Théorème. *Soit $c > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{icn \log n} \frac{e^{inx}}{n^{(\frac{1}{2}+\alpha)}}$ converge uniformément vers une fonction de Lip_α.*

Corrigé 5

5.3.1. Considérons la fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\rho(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}\backslash]-1, 1[$ et $\rho(x) = \exp(-1\backslash(1 - x^2))$ si $x \in]-1, 1[$. Cette fonction a pour support $[-1, 1]$. Nous prétendons qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$. Cela est bien clair sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ et par parité, il suffit de montrer que ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $x = 1$. Écrivons alors

$$e^{-\frac{1}{1-x^2}} = e^{-\frac{1}{2(1+x)}} e^{-\frac{1}{2(1-x)}}$$

de sorte que ρ sera de classe $\mathcal{C}^\infty$ si nous prouvons que la fonction ξ, définie par $\xi(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et $\xi(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ce fait est bien connu et peut être prouvé par exemple comme suit.

On montre par récurrence sur m que : ξ est de classe $\mathcal{C}^m$ et il existe un polynôme P_m tel que $\xi^{(m)}(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$, $\xi^{(m)}(t) = P_m\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t}$ pour $t > 0$.

En effet, pour $m = 0, \lim_{t\to 0^+} e^{-1/t} = 0$ montre que la propriété a bien lieu avec $P_0(X) = X$. Supposons que la propriété a lieu pour $m \geqslant 0$ et considérons le cas

$m + 1$. Nous avons pour tout $t > 0$,

$$\xi^{(m+1)}(t) = \frac{1}{t^2}\left(P_m\left(\frac{1}{t}\right) - P_m'\left(\frac{1}{t}\right)\right)e^{-1/t} = P_{m+1}\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}$$

pourvu que nous prenions $P_{m+1}(X) = X^2(P_m(X) - P_m'(X))$.
Mais pour tout polynôme $Q, \lim_{t\to 0^+} Q(\frac{1}{t})e^{-1/t} = 0$ et par conséquent

$$\lim_{t\to 0^+} \xi^{(m+1)}(t) = 0.$$

Par ailleurs pour $t < 0$, $\xi^{(m+1)}(t) = 0$. Ainsi posant $\xi^{(m+1)}(0) = 0$, nous obtenons que ξ est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ et $\xi^{(m+1)}(t) = P_{m+1}\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}$ pour $t > 0$.

Dans le cas n quelconque, étant donné une boule arbitraire $||x - x_0|| \leqslant R$, nous considérons $\varphi(x) = \rho\left(\frac{||x-x_0||}{R}\right) = 0$ pour $||x - x_0|| \geqslant R$ et $\varphi(x) = \exp\left(-\frac{R^2}{R^2-||x-x_0||^2}\right)$ pour $||x - x_0|| \geqslant R$. Bien que l'application $x \mapsto ||x - x_0||$ ne soit pas différentiable en x_0, l'application $x \mapsto ||x - x_0||^2$ elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (application polynomiale). Ainsi φ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$, son support étant $B(x_0, R)$.

5.3.2. Pour $f \in \mathcal{D}$ quelconque, considérons la fonction $f_\lambda : x \mapsto f(\lambda x)$. Nous avons $\nabla f_\lambda = \lambda(\nabla f)_\lambda$ et $||g_\lambda||_r = \lambda^{-n/r}||g||_r, \forall r \geqslant 1$ car

$$||g_\lambda||_r^r = \int_{\mathbb{R}^n} |g(\lambda x)|^r dx = \frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^r dy$$

après changement de variable $y = \lambda x$.

Ainsi si $(I_{p,q})$ a lieu alors

$$\forall\lambda > 0, \quad \lambda^{-n/q}||f||_q \leqslant C_{p,q}\lambda\lambda^{-n/p}||\nabla f||_p\,,$$

$$\text{d'où } \lambda^{-(1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p})}||f||_q \leqslant C_{p,q}||\nabla f||_p.$$

Ainsi pour $f \neq 0$, $||f||_q \neq 0$ et cette inégalité n'est possible pour tout $\lambda > 0$ que si l'exposant de λ est zéro : $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{n}$. Il en résulte ($q \geqslant 1$) que $p < n$ et $q = \frac{np}{n-p}$.

5.3.3. Commençons par rappeler l'inégalité de Hölder suivante : $\forall p \in]1, \infty[$ avec $p' = \frac{p}{p-1}$ nous avons pour toutes fonctions $g_1, g_2 \in \mathcal{D}$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} g_1 g_2 dx\right| \leqslant ||g_1||_p||g_2||_{p'}.$$

Appliquons alors $(I_{1,\frac{n}{n-1}})$ à $f^s, s \geqslant 1$. Nous avons $\nabla(f^s) = sf^{s-1}\nabla f$ et donc

$$||f^s||_{\frac{n}{n-1}} \leqslant C_{1,\frac{n}{n-1}}||sf^{s-1}\nabla f||_1.$$

Mais $||f^s||_{\frac{n}{n-1}} = ||f||^s_{\frac{sn}{n-1}}$ et donc si nous voulons faire apparaître $||f||_q$ avec $q = \frac{np}{n-p}$, il faut prendre $s = \frac{(n-1)p}{n-p}$ qui est bien supérieur à 1. Avec ce choix nous trouvons que

$$||f||_q^s \leqslant sC_{1,\frac{n}{n-1}}||f^{s-1}\nabla f||_1.$$

Mais grâce à l'inégalité de Hölder , il vient :

$$||f^{s-1}\nabla f||_1 \leqslant ||f^{s-1}||_{p'}||\nabla f||_p$$

avec $p' = \frac{p}{p-1}$. Ainsi

$$||f||_q^s \leqslant sC_{1,\frac{n}{n-1}}||f||^{s-1}_{(s-1)p'}||\nabla f||_p.$$

Mais $(s-1)p' = \left(\frac{(n-1)p}{n-p} - 1\right)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = q$. D'où

$$||f||_q \leqslant \frac{(n-1)p}{n-p}C_{1,\frac{n}{n-1}}||\nabla f||_p.$$

c'est-à-dire que $(I_{p,q})$ a lieu avec

$$C_{p,q} = \frac{(n-1)p}{n-p}C_{1,\frac{n}{n-1}}, q = \frac{np}{n-p}.$$

Cette preuve n'est pas tout à fait rigoureuse car pour s non entier, $f^s \notin \mathcal{D}$. On prend alors $f_{\varepsilon,s} \equiv (f^2+\varepsilon^2)^{s/2} - \varepsilon^s, s \geqslant 1$, qui, elle, appartient à $\mathcal{D}$. On a aussi $|f| = ((f_{\varepsilon,s}+\varepsilon^s)^{2/s} - \varepsilon^2)^{1/2}$. En reprenant la preuve avec $f_{\varepsilon,s}$ au lieu de f^s, on vérifie sans peine que l'inégalité $(I_{p,q})$ s'obtient à la limite $\varepsilon \to 0$.

5.3.4. On se place dans le cas $n = 2$ et on veut montrer $(I_{1,2})$: $||f||_2 \leqslant C_{1,2}||\nabla f||_1$. Puisque $f(x,y) = \int_{-\infty}^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt$ (cette intégrale porte sur un segment compact puisque f est à support compact) nous avons

$$|f(x,y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y)\right|dt.$$

De même

$$|f(x,y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,s)\right|ds.$$

Alors

$$f^2(x,y) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y)\right|dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,s)\right|ds,$$

et par application du théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f^2(x,y)dxdy \leqslant \int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|dxdy\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|dxdy$$

par conséquent

$$2||f||_2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \right) dxdy = ||\nabla f||_1,$$

(on a utilisé que $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$), et $(I_{1,2})$ a lieu avec $C_{1,2} = 1/2$.

5.3.5. La démonstration de $\left(I_{1,\frac{n}{n-1}}\right)$ dans le cas $n \geqslant 3$ est similaire à celle que nous venons de faire dans le cas $n = 2$. Pour cela nous notons pour $x \in \mathbb{R}^n, \check{x}_i = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ainsi pour $f_i \in \mathcal{D}_{n-1}, i = 1, ..., n$, nous définissons $\tilde{f} \in \mathcal{D}_n$ par la formule

$$\tilde{f}(x) = f_1(\check{x}_1) f_2(\check{x}_2) \dots f_n(\check{x}_n), x \in \mathbb{R}^n.$$

On montre alors à l'aide de l'inégalité de Hölder (faire un raisonnement par récurrence) que pour $n \geqslant 2$:

$$||\tilde{f}||_1 \leqslant ||f_1||_{n-1} ||f_2||_{n-1} \dots ||f_n||_{n-1}. \tag{$\star$}$$

Montrons maintenant $\left(I_{1,\frac{n}{n-1}}\right)$ pour $n \geqslant 2$.

Soit $f \in \mathcal{D}$, si nous notons :

$$f_i(\check{x}_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n) \right| dt,$$

nous avons $|f(x_1, ..., x_n)| \leqslant f_i(\check{x}_i)$ et donc

$$|f(x)|^n \leqslant f_1(\check{x}_1) \dots f_n(\check{x}_n),$$

d'où

$$\left\| f \right\|_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{n}{n-1}} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} f_j^{1/(n-1)}(\check{x}_j) dx$$

$\leqslant$(d'après $(\star)$) $\leqslant \prod_{j=1}^n \|f_j\|_1^{1/(n-1)} =$ (par le théorème de Fubini)
$= \prod_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_1^{1/(n-1)}$.

Ainsi

$$\|f\|_{\frac{n}{n-1}}^n \leqslant \prod_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_1 \leqslant \|\nabla f\|_1^n$$

et $(I_{1,\frac{n}{n-1}})$ est montrée avec $C_{1,\frac{n}{n-1}} = 1$.

5.3.6. Nous avons vu que le cas $n = 1$ était exclu par $(I_{p,q})$. Toutefois puisque

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt$$

nous voyons par exemple que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y)| \leqslant 2R||f'||_1$$

si $2R$ est la longueur du support de f. C'est-à-dire que la constante qui apparaît dans cette inégalité dépend de f. Par conséquent si l'on considère au lieu de $\mathcal{D}$, le sous ensemble $\mathcal{D}_R = \{f \in \mathcal{D}, f(x) = 0 \text{ pour } |x| \geqslant R\}$, nous avons

$$\forall f \in \mathcal{D}_R \quad \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y)| \leqslant 2R||f'||_1 .$$

Commentaires

Les inégalités $(I_{p,q})$ démontrées dans ce problème portent le nom d'inégalités de Sobolev. Leur usage est très fréquent dans la théorie des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. L'ouvrage de référence sur le sujet est le livre de R.A. Adams, *Sobolev Spaces,* paru chez Academic Press.

Donnons, à titre d'illustration, une conséquence d'une des inégalités $(I_{p,q})$.

Théorème. *On se place dans le cas $n = 3$. La fonction $f \mapsto ||\nabla f||_2^2 - ||f||_3^3$ est minorée sur l'ensemble des $f \in \mathcal{D}$ tels que $||f||_2 = 1$.*

Démonstration. D'après l'inégalité $(I_{2,6})$ nous avons

$$(1) \quad ||f||_6 \leqslant C_{2,6}||\nabla f||_2$$

où $C_{2,6}$ ne dépend pas de f.

Par ailleurs nous avons l'inégalité

$$(2) \quad ||f||_3 \leqslant ||f||_2^{1/2}||f||_6^{1/2}$$

qui se montre en appliquant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$||f||_3^3 \leqslant ||f||_2||f||_4^2 \quad (\text{écrire } f^3 = f.f^2),$$

puis

$$||f||_4^4 \leqslant ||f||_2||f||_6^3 \quad (\text{écrire } f^4 = f.f^3).$$

Puisque $||f||_2 = 1$, nous avons par (1) et (2),

$$||f||_3^3 \leqslant C_{2,6}^3||\nabla f||_2^{3/2},$$

et donc

$$||\nabla f||_2^2 - ||f||_3^3 \geqslant ||\nabla f||_2^2 - C_{2,6}^3||\nabla f||_2^{3/2}.$$

Le membre de droite de cette inégalité est minorée car il en est de même pour la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^2 - C_{2,6}^3x^{3/2}$. Ceci achève la preuve du théorème.

Corrigé 6

6.3.1. Puisque la suite (λ_n) est décroissante, $\lambda_n \leqslant \lambda_0$ pour tout n. Ainsi $\lambda_n u_n^2 \leqslant \lambda_0 u_n^2$ et si $(u_n) \in E, \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n^2 < \infty$ c'est-à-dire que $E \subset F$. Soit alors n_p le plus petit entier pour lequel $\lambda_{n_p} \leqslant 2^{-p}$. La suite $p \mapsto n_p$ est alors strictement croissante et si nous prenons $u_n = 1$ si n est l'un des n_p et 0 sinon nous avons

$$\sum_{n=0}^{\mathbb{N}} \lambda_n u_n^2 \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} = 1 < \infty$$

alors que (u_n) ne tend pas vers zéro. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin E$.

6.3.2. Montrons que E est dense dans F. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Nous avons $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n^2 < \infty$ et si nous désignons par (v^n) la suite dans E définie par $v_k^n = u_k$ si $n \leqslant k$ et $v_k^n = 0$ si $n \geqslant k+1$; nous avons bien $v^n \in E$ et

$$||u - v_n||_F^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k u_k^2 \text{ qui tend vers zéro.}$$

Ainsi E est dense dans F et puisque $E \neq F$, E n'est pas un sous-espace vectoriel fermé de F.

6.3.3. Soit $(u_n^p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ tel que $\forall p, \sum_{n=0}^{\infty}(u_n^p)^2 \leqslant 1$. Nous avons alors : $\forall n, p$
$|u_n^p| \leqslant 1$.

La suite $(u_0^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et nous pouvons en extraire une sous-suite $(u_0^{\varphi_0(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $v_0 \in [-1, 1]$. Supposons que nous ayons construit pour tout $k \leqslant n$, des applications $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et telles que $(\psi_k = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_0)$ $u_k^{\psi_k(p)}$ converge vers $v_k \in [-1, 1]$. La suite $(u_{n+1}^{\psi_k(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ étant bornée, nous pouvons en extraire une sous-suite $(u_{n+1}^{\psi_n(\varphi_{n+1}(p))})_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_{n+1}^{\psi_{n+1}(p)})$ converge vers $v_{n+1} \in [-1, 1]$. Ainsi par récurrence nous disposons de la famille infinie $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous l'utilisons pour construire la suite (dite sous-suite diagonale) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$\varphi(n) = \psi_n(n) = (\varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \ldots . \circ \varphi_\circ)(n).$$

On vérifie alors sans peine que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k^{\varphi(n)}$ converge vers v_k lorsque n tend vers l'infini et que φ est strictement croissante. Montrons tout d'abord que $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in K$. Nous avons : $\forall K \geqslant 0, \sum_{k=0}^{K} \left|u_k^{\varphi(n)}\right|^2 \leqslant 1$ et en passant à la limite dans cette *somme finie*, il vient $\sum_{k=0}^{K} |v_k|^2 \leqslant 1$. Ceci établi que $v \in E$ et $v \in K$.

Étudions alors $||u^{\varphi(n)} - v||_F$: pour tout $K \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} ||u^{\varphi(n)} - v||_F^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |u_k^{\varphi(n)} - v_k|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{K} \lambda_k |u_k^{\varphi(n)} - v_k|^2 + \sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_k |u_k^{\varphi(n)} - v_k|^2 \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{K} \lambda_k |u_k^{\varphi(n)} - v_k|^2 + 2\lambda_{K+1}. \end{aligned}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, il existe K_ε tel que $\lambda_{K_\varepsilon+1} \leqslant \varepsilon/2$. La *somme finie* $\sum_{k=0}^{K_\varepsilon} \lambda_k |u_k^{\varphi(n)} - v_k|^2$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$ et donc il existe n_ε tel que pour $n \geqslant n_\varepsilon$: $\sum_{k=0}^{K_\varepsilon} \lambda_k |u_k^{\varphi(n)} - v_k|^2 \leqslant \varepsilon/2$.
Ainsi pour $n \geqslant n_\varepsilon$, $||u^{\varphi(n)} - v||_F^2 \leqslant \varepsilon$. Ceci montre la compacité de K dans F : de toute suite de K nous avons pu extraire une sous-suite convergente dans K.

Commentaires

Comme nous l'avons largement évoqué aux pages 58 et 61, l'ensemble K bien que fermé et borné dans E n'est pas un compact de E. Ce problème montre que pour la topologie induite par F sur E c'est un compact : en affaiblissant la topologie on en fait un compact. Ainsi si une application, f, de E dans F est continue pour la topologie induite par F (ce qui est plus fort qu'être continue pour la topologie de E) nous serons assurés que f possède un maximum et un minimum sur K.

Corrigé 7

7.3.1. À x fixé, la fonction $y \mapsto k(x-y)f(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc intégrable sur le compact $[0, 2\pi]$ et $(Kf)(x)$ a bien un sens. Par ailleurs, puisque la fonction $(x, y) \mapsto k(x-y)f(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de dépendance continue des intégrales par rapport à un paramètre, étant donné que nous intégrons sur un compact fixe ($[0, 2\pi]$) de $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto (Kf)(x)$ est continue et ainsi $(Kf) \in E$. Nous pouvons aussi justifier cette continuité en faisant appel au théorème de convergence dominée de Lebesgue car $|k(x-y)f(y)| \leqslant ||k||_\infty ||f||_\infty < \infty$ et $(x, y) \mapsto k(x-y)f(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

L'opérateur K étant linéaire, pour montrer qu'il est continu sur E, il suffit de prouver qu'il existe une constante M telle que pour tout $f \in E$, $||Kf|| \leqslant M||f||$. Mais

$$|(Kf)(x)| \leqslant ||k||_\infty \int_0^{2\pi} |f(y)|dy \leqslant \sqrt{2\pi}||k||_\infty ||f||,$$

et donc $M = \sqrt{2\pi}||k||_\infty$ convient.

7.3.2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_0^{2\pi} k(x-y)f(y)dy\right| \leqslant \left(\int_0^{2\pi} k^2(x-y)dy\right)^{1/2} ||f||.$$

Or k étant 2π-périodique, $\int_0^{2\pi} k^2(x-y)dy = ||k||^2$ par conséquent

$$|(Kf)(x)| \leqslant ||k||||f||.$$

Il en résulte que $||Kf|| \leqslant \sqrt{2\pi}||k||||f||$ et ainsi $||K||_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \sqrt{2\pi}||k||$.

7.3.3. Nous avons

$$\begin{aligned}(Kf)_n \equiv \int_0^{2\pi}(Kf)(x)e^{-inx}dx &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} k(x-y)f(y)dy\right)e^{-inx}dx \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} k(x-y)e^{-inx}dx\right)f(y)dy\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini.

Faisons alors le changement de variable $x = y + z$ dans l'intégrale comportant k : $\int_0^{2\pi} k(x-y)e^{-inx}dx = \int_{-z}^{2\pi-z} k(z)e^{-in(y+z)}dz = e^{-iny}\int_{-z}^{2\pi-z} k(z)e^{-inz}dz$. Mais cette dernière intégrale vaut $k_n \equiv \int_0^{2\pi} k(z)e^{-inz}dz$ puisque la fonction intégrée est 2π-périodique. Ainsi

$$(Kf)_n = \int_0^{2\pi} k_n f(y)e^{-iny}dy = k_n f_n.$$

En dimension finie, un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ peut être représenté sur une base par une matrice A. Si nous pensons aux fonctions $x \mapsto e^{-inx}$ comme à une base de E (bien qu'il n'en soit rien) nous voyons que la « matrice » de K dans cette « base » est diagonale et a pour termes diagonaux les $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

7.3.4. Soit $f_n(p) = \int_0^{2\pi} f(p)e^{-inx}dx$. Par la relation de Bessel nous avons

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n(p)|^2 = 2\pi||f(p)||^2 \leqslant C \equiv 2\pi \sup_{p\geqslant 0} ||f(p)||^2.$$

Ainsi la suite $(f_0(p))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{C}$. Nous pouvons alors en extraire une sous-suite $(f_0(\varphi_0(p))_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathbb{C}$ vers g_0. La suite $(f_1(\varphi_0(p))_{p\in\mathbb{N}}$ est à son tour bornée dans $\mathbb{C}$, soit $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $(f_1((\varphi_0 \circ \varphi_1)(p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ vers g_1. Nous répétons ensuite cette construction par récurrence pour disposer de $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante et telle que $(f((\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ ... \circ \varphi_n)(p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ vers g_n.

Observons alors que la suite *diagonale* ψ : $\psi(p) = (\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p)(p)$ est une suite d'éléments de $\mathbb{N}$ *strictement croissante*. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\lim_{p\to+\infty} f_n(\psi(p)) = g_n$, où l'on a posé $g_{-n} = \overline{g}_n$. En effet, pour $p \geqslant n \geqslant 0$, ψ est une suite extraite de $\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n$ et par conséquent $(f_n(\psi(p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers g_n. Le cas $n \leqslant 0$ est alors immédiat par conjugaison.

Mais alors quel que soit $N \geqslant 0$,

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{|n|\leqslant N} |f_n(\psi(p))|^2 = \sum_{|n|\leqslant N} |g_n|^2$$

ce qui prouve que, $\forall N \geqslant 0, \sum_{|n|\leqslant N} |g_n|^2 \leqslant C$. Par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g_n|^2$ est convergente.

Montrons alors que

(i) $g(x) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} k_n g_n e^{inx}$ est un élément de E et que

(ii) $\lim_{p\to+\infty} ||(Kf(p)) - g|| = 0$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\sum_{|n|\leqslant N} \sup_{x\in[0,2\pi]} \left|k_n g_n e^{inx}\right| &= \sum_{|n|\leqslant N} |k_n||g_n| \leqslant \left(\sum_n |k_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_n |g_n|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sqrt{C}||k|| < \infty,\end{aligned}$$

et par conséquent la série de fonctions $\sum k_n g_n e^{inx}$ est normalement convergente dans $\mathcal{C}([0,2\pi];\mathbb{R})$ qui est complet pour la norme de la convergence uniforme. Ainsi g défini par (i) est un élément de E.

Par ailleurs d'après l'identité de Bessel :

$$||(Kf)(p) - g||^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |k_n(f_n(p) - g_n)|^2 \qquad (*)$$

(on a utilisé que $(Kf)_n(p) = k_n f_n(p)$). Soit alors $N \geqslant 0$, puisque $|f_n(p)|^2 \leqslant C$ et $|g_n|^2 \leqslant C$, il vient

$$\sum_{|n|\geqslant N+1} |k_n(f_n(p) - g_n)|^2 \leqslant 2C \sum_{|n|\geqslant N+1} |k_n|^2.$$

Donnons nous $\varepsilon > 0$, puisque $2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |k_n|^2 = ||k||^2 < \infty$, il existe N_ε tel que $2C \sum_{|n|\geqslant N_\varepsilon+1} |k_n|^2 \leqslant \varepsilon/2$. Étant donné que $f_n(\psi(p))$ converge vers g_n lorsque $p \to +\infty$, $\sum_{|n|\leqslant N_\varepsilon} |k_n(f_n(\psi(p))) - g_n|^2$ tend vers zéro lorsque $p \to +\infty$, il peut donc être rendu inférieur à $\varepsilon/2$ pour $p \geqslant p_\varepsilon$. Il en résulte alors avec $(\star)$ que pour $p \geqslant p_\varepsilon$,

$$||(Kf)(\psi(p)) - g||^2 \leqslant \varepsilon.$$

7.3.5. Soit $(f(p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de Ker $(L-\lambda Id)$: $Lf(p)=\lambda f(p)$. Soit alors $\varphi\ :\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, strictement croissante et telle que $((Lf)(\varphi(p))_{p\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Puisque $\lambda\neq 0, (f(\varphi(p)))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente. Il en résulte que la boule unité de Ker $(L-\lambda Id)$ est compacte et par conséquent d'après le théorème de Riesz, voir les commentaires du problème 1 page 61, Ker $(L-\lambda Id)$ est de dimension finie.

7.3.6. Dans le cas $L\equiv 0$ (qui vérifie automatiquement la propriété) nous avons Ker $L=E$. La suite de fonctions $(f(p)\ :x\mapsto\cos px)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie $||f(p)||^2=\pi$, elle est donc bornée. Si l'on pouvait extraire de cette suite une sous-suite convergente : $\lim_{p\to\infty}||f(\psi(p))-g||=0$, alors

$$||g||=\lim_{p\to+\infty}||f(\psi(p))||=\sqrt{\pi}\quad\text{et}\quad g_n=\lim_{p\to+\infty}\int_0^{2\pi}(\cos px)e^{-inx}=0.$$

Ceci est absurde car $||g||^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g_n|^2=0\neq\pi$.

Commentaires

L'objet de ce problème est de mettre en évidence que l'opérateur de convolution K est un opérateur compact sur E. Par définition un opérateur linéaire l, d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F, est dit compact s'il transforme tout borné de E en un ensemble d'adhérence compacte dans F. D'après le numéro 7.3.4. il en est bien ainsi.

Cette notion d'opérateur linéaire compact n'a d'intérêt que lorsque E est de dimension infinie. En effet si E est de dimension finie, $l(E)$ est un sous-espace de F de dimension finie et puisque tout opérateur linéaire sur E est continu, l'image d'un borné, B, de E est borné dans $l(E)$ qui est de dimension finie par conséquent $l(B)$ est d'adhérence compacte dans F.

Corrigé 8

8.3.1. Soit $d(u,K)=\inf\{||u-v||, v\in V\}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $v_n\in K$ tel que $||u-v_n||^2\leqslant d(u-k)^2+1/(n+1)$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans V. Le point de départ est l'identité du parallélogramme :

$$||a-b||^2+||a+b||^2=2(||a||^2+||b||^2)$$

quels que soient a et b dans V. Prenons alors $n\geqslant 0$, $\quad p\geqslant 0$ et $a=u-v_n$, $b=u-v_{n+p}$.

Il vient

$$||v_{n+p}-v_n||^2=2(||u-v_n||^2+||u-v_{n+p}||^2)-4||u-\frac{v_n+v_{n+p}}{2}||^2.$$

Mais puisque K est convexe, $\frac{v_n+v_{n+p}}{2}\in K$ par conséquent $||u-\frac{v_{n+p}+v_n}{2}||$ $\geqslant d(u,K)$.

Ainsi

$$||v_{n+p} - v_n||^2 \leqslant 2(2d(u,K)^2 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p+1}) - 4d(u,K)^2,$$

et alors

$$||v_{n+p} - v_n||^2 \leqslant 1/(n+1).$$

Cette majoration montre que la suite (v_n) est de Cauchy dans V qui est complet : elle converge donc vers un élément v de V. Mais puisque $v_n \in K$ et que K est fermé, $v \in K$. Pour que l'on puisse noter $v = P_K u$, il reste à s'assurer que $d(u,K)$ est atteint en un seul point de K. Si w_1 et w_2 sont tels que $||u - w_1|| = ||u - w_2|| = d(u,K)$ alors v_n définie par $v_{2p} = w_1$ et $v_{2p+1} = w_2$ vérifie $||u - v_n||^2 \leqslant d(u,K)^2 + 1/(n+1)$.

D'après ce qui précède (v_n) est convergente et donc $w_1 = w_2$.

8.3.2. Si $l = 0$, nous avons $l(v) = ((0,v))$ pour tout $v \in V$ par conséquent $f = 0$ convient. Si $((f,v)) = 0, \forall v \in V$ alors $((f,f)) = 0$ et donc $f = 0$.

Considérons alors le cas $l \neq 0$. Dans ce cas $M = Kerl \equiv \{x \in V, l(x) = 0\}$ est convexe (par linéarité de l) et fermé (par continuité de l). Puisque $l \neq 0$, il existe $w \in V$ tel que $w \notin M$. Nous avons alors $z = w - P_M w \neq 0$ et $\forall m \in M, ((z,m)) = 0$. En effet quel que soit $t \in \mathbb{R}, P_M w - tm \in M$ pour tout $m \in M$. Mais alors par définition de $P_M w$,

$$||w - P_M w|| \leqslant ||w - P_M w + tm||, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire que la fonction $t \mapsto ||w - P_M w + tm||^2$ atteint son minimum en $t = 0$ or $\frac{d}{dt}||w - P_M w + tm||^2_{|t=0} = 2((w - P_M w, m))$ et donc $((w - P_M w, m)) = 0$.

Ainsi $z = w - P_M w \neq 0$ et $z \in M^\perp$. Soit alors $v \in V$ arbitraire, puisque $z \neq 0, l(z) \neq 0$ car sinon on aurait $z \in M \cap M^\perp$. Nous pouvons écrire

$$v = \frac{l(v)}{l(z)}z + v - \frac{l(v)}{l(z)}z$$

et $v - \frac{l(v)}{l(z)}z \in M$. Il en résulte que $((z,v)) = \frac{l(v)}{l(z)}||z||^2$ et donc $f = \frac{l(z)}{||z||^2}z$ convient. Quant à l'unicité, si f_1 et f_2 sont tels que $l(v) = ((f_1,v)) = ((f_2,v))$ pour tous v, prenant $v = f_1 - f_2$ nous avons $||f_1 - f_2||^2 = 0$ soit $f_1 = f_2$.

8.3.3. Soit donc f telle que $l(v) = ((f,v)), \forall v \in V$ et de même puisque $\forall u \in V, a(u,.) \in V', \exists! Au \in V$ tel que $a(u,v) = ((Au,v)), \forall v \in V$. L'application a étant bilinéaire, l'unicité de Au assure que A est linéaire. Le fait que a soit continue i.e. $\sup\{a(u,v), ||u|| \leqslant 1, ||v|| \leqslant 1\} \equiv ||a|| < \infty$ assure que A est continue et que $||A||_{\mathcal{L}(V)} \leqslant ||a|| < \infty$.

Ainsi $l(v-u) \leqslant a(u, v-u)$ s'écrit

$$((f - Au, v - u)) \leqslant 0, \quad \forall v \in K.$$

par conséquent, $\forall \rho > 0$,

$$\rho((f - Au, v - u)) \leqslant 0, \quad \forall v \in K.$$

Soit alors $z \equiv u + \rho(f - Au)$, l'inégalité précédente s'écrit

$$((z - u, v - u)) \leqslant 0, \quad \forall v \in K.$$

Calculons alors $||z - u||^2$:

$$\begin{array}{rcl} ||z - u||^2 & = & ||z - v + v - u||^2 \\ & = & ||z - v||^2 + 2((z - v, v - u))^2 + ||v - u||^2 \\ & = & ||z - v||^2 + 2((z - u, v - u))^2 - ||v - u||^2 \\ & \leqslant & ||z - v||^2, \forall v \in K. \end{array}$$

Ainsi $u = P_K z$ c'est-à-dire que si u est solution de $(\star)$, $u = P_K(u + \rho(f - Au))$ ou encore u est point fixe de l'application $T : V \to V$ définie par

$$Tu = P_K(u + \rho(f - Au)).$$

Montrons que réciproquement pour tout $z \in V, u = P_K z$ vérifie

$$((z - u, v - u)) \leqslant 0, \quad \forall v \in K. \tag{1}$$

En effet $w = (1-t)u + tv$, pour $t \in]0, 1]$, appartient à K et donc $||z-u|| \leqslant ||z-w||$, soit $||z - u|| \leqslant ||z - u - t(v - u)||$. Il en résulte que

$$-2t((z - u, v - u)) + t^2||v - u||^2 \leqslant 0$$

et après division par t, on obtient (1) à la limite $t \to 0$.

Par conséquent u sera solution de $(\star)$ si et seulement si $u = Tu$ pour *une* valeur de $\rho > 0$. Nous allons donc choisir ρ de sorte que l'application T soit contractante.

Pour cela nous formons

$$Tu_1 - Tu_2 = P_K(u_1 + \rho(f - Au_1)) - P_K(u_2 + \rho(f - Au_2)).$$

Bien que P_K ne soit pas linéaire en général, P_K est $1-$Lipschitzienne :

$$||P_K(z_1) - P_K(z_2)|| \leqslant ||z_1 - z_2||. \tag{2}$$

Pour le voir, il suffit d'additionner les inégalités de type (1) :

$$\begin{array}{c} (z_1 - P_K(z_1), P_K(z_2) - P_K(z_1)) \leqslant 0, \\ (z_2 - P_K(z_2), P_K(z_1) - P_K(z_2)) \leqslant 0, \end{array}$$

pour obtenir que

$$\begin{aligned} ||P_K(z_1) - P_K(z_2)||^2 &\leqslant (z_1 - z_2, P_K(z_1) - P_K(z_2)), \\ &\leqslant ||z_1 - z_2||||P_K(z_1) - P_K(z_2)||, \end{aligned}$$

d'où (2) résulte.

Ainsi

$$||Tu_1 - Tu_2|| \leqslant ||u_1 + \rho(f - Au_1) - (u_2 + \rho(f - Au_2))||$$

soit

$$\begin{aligned} ||Tu_1 - Tu_2|| &\leqslant ||u_1 - u_2 - \rho A(u_1 - u_2)||^2 \\ &= ||u_1 - u_2||^2 - 2\rho a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + \rho^2||A(u_1 - u_2)||^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$||Tu_1 - Tu_2||^2 \leqslant k||u_1 - u_2||^2$$

avec $k = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2||a||^2$. Puisque $\alpha > 0$, pour ρ assez petit $0 < k < 1$ et avec ρ ainsi choisi, l'application T possède un unique point fixe $u \in V$ (rappelons que V est complet).

Commentaires

L'objet de ce problème est la preuve du théorème de Lax-Milgram-Stampacchia (numéro 8.3.3) dont nous allons donner une application à la théorie des équations aux dérivées partielles un peu plus bas.

Il n'est nulle part supposé dans ce problème que V est de dimension infinie toutefois le théorème en question tire son intérêt du cas de la dimension infinie, notamment lorsque l'espace V est un ensemble de fonctions.

En effet dans le cas de la dimension infinie, si K est un convexe fermé non vide inclus dans V, il n'y a aucune raison *a priori* pour que la distance de $u \in V$ à K soit atteinte (K n'est pas forcément localement compact). Toutefois si K est complet (il en sera ainsi lorsque V est complet) cette distance est forcément atteinte : c'est justement l'objet du numéro 8.3.1.

Ainsi, comme nous l'avons mentionné à la page 4, la convexité peut remplacer la compacité pour, ici, permettre de montrer l'existence d'un minimum.

Donnons maintenant une illustration de l'usage que l'on peut faire du théorème de Lax-Milgram-Stampacchia.

Dans cet exemple :

$$V = \{v : [0, 1] \to \mathbb{R}, \int_0^1 (v^2(x) + v'^2(x))dx < \infty\}$$

muni du produit scalaire

$$((v, w)) = \int_0^1 (v(x)w(x) + v'(x)w'(x))dx,$$

nous prenons

$$a(v, w) = \int_0^1 (\beta v(x)w(x) + v'(x)w'(x))dx$$

où $\beta > 0$ est donné et $l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$ avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $\int_0^1 f^2(x)dx < \infty$.
Le convexe K est

$$K = \{v \in V,\ v(0) \geqslant 0 \text{ et } v(1) \geqslant 0\}.$$

Dans ces conditions la solution u de $(\star)$ au numéro 8.1.3. vérifie :

$$\begin{gathered} -u''(x) + \beta v(x) = f(x) \text{ pour } x \in]0,1[, \\ u(0) \geqslant 0,\ u(1) \geqslant 0, \\ u'(0) \leqslant 0,\ u'(1) \geqslant 0, \\ u(0)u'(0) = u(1)u'(1) = 0, \end{gathered}$$

qui est un problème (très) simplifié qui se rencontre en élasticité avec contraintes unilatérales (problème de Signorini).

Le lecteur intéressé pourra se reporter au chapitre de l'*Encyclopedia of physics* écrit par Fichera : *Existence theorems in boundary value problems of elasticity with unilateral constraints* dont l'éditeur scientifique est Flügge et l'éditeur commercial Springer-Verlag. Il s'agit du volume VI.a/2 : *Mechanics of solids II*.

Nous n'avons pas clairement précisé la nature de l'espace V (en particulier les fonctions de v ne sont pas en général dérivable). Ceci demanderait l'usage de la théorie de l'intégration de Lebesgue et quelques rudiments de dérivation au sens des distributions. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et application* qui est paru chez Dunod.

Corrigé 9

9.3.1. Soient u^1 et u^2 tels que

$$\forall v \in H, \quad \lim_{n\to\infty} ((u_n, v)) = ((u^1, v)) = ((u^2, v)).$$

Prenons alors $v = u^1 - u^2$, il vient $||u^1 - u^2||^2 = 0$ et donc $u^1 = u^2$.

9.3.2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|((u_n - u, v))| \leqslant ||u_n - u||.||v||.$$

L'assertion en découle.

9.3.3. Munissons l'espace $H = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$((f,g)) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

qui en fait un espace préhilbertien. Considérons alors la suite de fonctions $u_n : u_n(t) = \sin nt$. Étant donné $v \in H$, nous avons (« Lemme de Lebesgue ») $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin nt v(t)dt = 0 = ((0, v))$.

Ainsi (u_n) vérifie (F) avec $u = 0$. Mais $||u_n||^2 = 1/2$ et donc $||u_n - 0||$ ne tend pas vers zéro.

9.3.4. Si (u_n) converge vers u alors d'après l'inégalité triangulaire,

$$|||u_n|| - ||u||| \leqslant ||u_n - u|| \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to\infty} ||u_n|| = ||u||.$$

Réciproquement, supposons que (u_n) vérifie (F) et que $\lim_{n\to\infty} ||u_n|| = ||u||$. Partant de l'identité

$$((u_n - u, u_n - u)) = ||u_n||^2 - ||u||^2 - 2((u_n - u, u)),$$

nous voyons que (u_n) vérifiant (F), $\lim_{n\to\infty}((u_n - u, u)) = 0$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||^2 = 0.$$

9.3.5. D'après l'identité qui précède,

$$||u_n||^2 - ||u||^2 - 2((u_n - u, u)) \geqslant 0.$$

Il en résulte donc $l^2 - ||u||^2 \geqslant 0$. Mais $l \geqslant 0$ et donc $l \geqslant ||u||$.

9.3.6. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons $|((w, v))| \leqslant ||w||.||v||$ et par ailleurs pour tous x et y positifs, $xy \leqslant \frac{3x^{4/3}}{4} + \frac{y^4}{4}$ (cette inégalité d'Young s'obtient aisément en étudiant la fonction, à y fixé, $x \mapsto xy - \frac{3x^{4/3}}{4}$). Ainsi

$$|((w, v))|^{3/2} \leqslant ||w||^{3/2}||v||^{3/2} \leqslant \frac{3||w||^2}{4} + \frac{||v||^6}{4}$$

en prenant $x = ||w||^{3/2}$ et $y = ||v||^{3/2}$. Il en résulte que

$$\varphi(w) \equiv ||w||^2 - ((w, v))^{3/2} \geqslant \frac{||w||^2}{4} - \frac{||v||^6}{4}.$$

Par conséquent $I \equiv \inf_{w\in h} \varphi(w) \geqslant -\frac{||v||^6}{4} > -\infty$. Soit alors (w_n) une suite minimisante pour φ, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \varphi(w_n) = I$ (de telles suite existent, il suffit par exemple de prendre w_n tel que $I \leqslant \varphi(w_n) \leqslant I + 1/(n + 1)$).

Montrons que (w_n) est bornée :

$$\varphi(w_n) \geqslant \frac{||w_n||^2}{4} - \frac{||v||^6}{4} \quad \text{et donc} \quad ||w_n||^2 \leqslant ||v||^6 + 4\varphi(w_n).$$

Puisque $(\varphi(w_n))$ est convergente, elle est bornée et ainsi (w_n) est bornée. Par hypothèse, il existe alors $w \in H$ et une sous-suite $w_{\psi(n)}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} ((w_{\psi(n)}, v)) = ((w, v))$$

et de plus la suite $(||w_{\psi_{(n)}}||)$ étant bornée dans $\mathbb{R}$, nous pouvons en extraire une sous-suite encore notée $(||w_{\psi_{(n)}}||)$ qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. D'après les questions précédentes, $l \geqslant ||w||$ et nous avons :

$$\varphi(w_{\psi_{(n)}}) = ||w_{\psi_{(n)}}||^2 - |((w_{\psi_{(n)}}, v))|^{3/2}$$

a pour limite :

$$l^2 - |((w, v))|^{3/2} \geqslant ||w||^2 - |((w, v))|^{3/2} = \varphi(w).$$

Mais la suite $(\varphi(w_{\psi_{(n)}}))$ étant extraite de $(\varphi(w_n))$, elle a pour limite I par conséquent $\varphi(w) = I$ et donc φ atteint son infimum.

9.3.7. Soit $(u(p))_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l^2, $u(p) = (u_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bornée : $\exists C$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(p)|^2 \leqslant C$. La suite $(u_0(p))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors en extraire une sous-suite $(u_0(\varphi_0(p)))_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite l_0. La suite $(u_1((\varphi_0 \circ \varphi_1)(p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers l_1. Nous répétons ensuite cette construction par récurrence pour disposer de $\varphi_n \ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante et telle que
$(u_n((\varphi_0 \circ ... \circ \varphi_n)(p)))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers l_n. La suite *diagonale* ψ :

$$\psi_{(p)} = (\varphi_0 \circ ... \circ \varphi_p)(p)$$

est une suite d'entiers naturels strictement croissante. Nous avons : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to+\infty} u_n(\psi(p)) = l_n$ car pour $p \geqslant n$, $(\psi(p))_{p\geqslant n}$ est une suite extraite de $((\varphi_0 \circ ... \circ \varphi_n)(p))_{p\geqslant n}$.

Il en résulte que pour tout $N \geqslant 0$,

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} |u_n(\psi(p))|^2 = \sum_{n=0}^{N} |l_n|^2,$$

ainsi $\sum_{n=0}^{N} |l_n|^2 \leqslant C$ et donc $l = (l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l^2.

Montrons que $\forall v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, nous avons

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p) v_n = \sum_{n=0}^{\infty} l_n v_n$$

qui est la propriété cherchée.

Nous observons que pout tout $N \geqslant 0$,

$$\left| \sum_{n\geqslant N+1} u_n(p) v_n \right|^2 \leqslant \left(\sum_{n\geqslant N+1} |u_n(p)|^2 \right) \left(\sum_{n\geqslant N+1} |v_n|^2 \right)$$

et par conséquent

$$\left| \sum_{n\geqslant N+1} u_n(p) v_n \right| \leqslant \sqrt{C} \left(\sum_{n\geqslant N+1} |v_n|^2 \right)^{1/2}.$$

De la même manière

$$\left|\sum_{n\geqslant N+1} l_n v_n\right| \leqslant \sqrt{C}\left(\sum_{n=N+1} |v_n|^2\right)^{1/2}.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$, puisque $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2 < \infty$, il existe N_ε tel que $\sqrt{C}$ $\left(\sum_{n\geqslant N_\varepsilon+1} |v_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon/4$.
Écrivons alors

$$(\star)\sum_{n=0}^{\infty}(u_n(p) - l_n)v_n = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon}(u_n(p) - l_n)v_n + \sum_{n\geqslant N_\varepsilon+1}(u_n(p) - l_n)v_n$$

Puisque $\lim_{p\to+\infty} u_n(\psi(p)) = l_n$, nous pouvons trouver p_ε tel que pour $p \geqslant p_\varepsilon$:

$$||v||\left(\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |u_n(\psi(p) - l_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon/3.$$

Ainsi revenant à $(\star)$ et en utilisant que

$$\left|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon}(u_n(\psi(p) - l_n)v_n\right| \leqslant ||v||\left(\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |u_n(\psi(p) - l_n|^2\right)^{1/2},$$

nous obtenons que pour $p \geqslant p_\varepsilon$:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(u_n(\psi(p)) - l_n)v_n\right| \leqslant \varepsilon\,,$$

qui est la propriété recherchée.

Commentaires

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la convergence faible dans un espace de Hilbert. Plus précisément lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (F), on dit qu'elle converge faiblement vers u.

Cette notion de convergence est plus faible que la convergence en norme comme le montre le numéro 9.3.2. et sur un espace de dimension finie ces deux notions coïncident (le vérifier). Toutefois sur un espace de dimension infinie, ces deux notions sont toujours distinctes. Il est particulier possible de montrer que dans ce cas, cette notion de convergence ne peut jamais correspondre à la convergence pour une norme quelle qu'elle soit.

Par contre - et c'est ce que l'on montre directement à la main dans un cas particulier au numéro 9.3.7.- de toute suite bornée dans un espace de Hilbert, on peut extraire une sous suite faiblement convergente. En d'autres termes si on a affaire à un espace préhilbertien *complet*, l'hypothèse de la question 9.1.6. est satisfaite. Comme cela est montré au numéro 9.3.6., ceci s'avère suffisant pour montrer que la fonction $w \mapsto ||w||^2 - |((w,v))|^{3/2}$ atteint son minimum. Là encore (comme dans le problème précédent) c'est une propriété de *convexité* qui a permis ce résultat. En effet, c'est le fait que l'application $w \mapsto ||w||$ est convexe qui a permis de montrer le résultat du numéro 9.1.5. Plus précisément on a le résultat général suivant sur un espace de Hilbert H.

Proposition. *Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une application convexe, c'est-à-dire que*

$$\varphi(\theta u + (1-\theta)v) \leqslant \theta(\varphi(u) + (1-\theta)\varphi(v), \forall u, v \in H \text{ et } \forall \theta \in [0,1].$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u \in H$ et si $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l dans $\mathbb{R}$ alors $\varphi(u) \leqslant \varphi(l)$.

Nous renvoyons au livre de L. Schwartz, *Analyse, topologie générale et analyse fonctionnelle* paru chez Hermann pour plus d'éléments sur ce sujet.

En fait l'étude du numéro 9.1.5. est à but pédagogique : il s'agit de montrer en situation sur un exemple *très simple* comment la convexité permet de passer à la limite en présence d'une fonction discontinue (l'application $w \mapsto ||w||$ n'est pas, en général, continue pour la convergence faible au vu du numéro 9.3.3.). Le cas particulier considéré *i.e.* le minimum de la fonction $w \mapsto ||w||^2 - |((w,v))|^{3/2}$ peut se traiter entièrement « à la main ». On trouve que ce minimum vaut $-\frac{81}{256}||w||^6$ et qu'il est atteint pour $w = \pm\frac{9}{16}||v||^2 v$. Pour le montrer on pourra utiliser par exemple la technique du calcul des variations exposée au cours des commentaires au problème 22 page 121 ou encore l'inégalité d'Young du numéro 9.3.6..

Corrigé 10

10.3.1. Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $((f,f)) = \int_{-1}^{1} f^2(x)w(x)dx = 0$. La fonction $x \mapsto f^2(x)w(x)$ étant à valeurs positives et continue, elle est donc nulle : $\forall x \in [-1,1],\ f^2(x)w(x) = 0$. Puisque $\forall x \in [-1,1], w(x) > 0,\ f(x) = 0$. Ainsi $f = 0$.

10.3.2. Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant (i) et (ii). Le polynôme $p_n - q_n$ est le degré au plus $n-1$: $p_n - q_n \in P_{n-1}$ grâce à (i). Mais en utilisant $q = p_n - q_n$ dans (ii), il vient $((p_n, p_n - q_n)) = 0$ et $((q_n, p_n - q_n)) = 0$ et alors

$$((p_n - q_n, p_n - q_n)) = 0 \quad \text{d'où} \quad p_n = q_n.$$

10.3.3. Nous avons $p_0 \in P_0$ et donc $p_0 \in \mathbb{R}$. Par (i) il vient $p_0 = 1$.

Puisque $p_1 \in P_1$, d'après (i), $p_1 = x + a = x + ap_0,\ a \in \mathbb{R}$.

La condition (ii) revient alors à $((p_1, p_0)) = 0$ et donc $a = -\frac{((p_0,x))}{((p_0,p_0))}$: $p_1 = x - \frac{((p_0,x))}{((p_0,p_0))}$.

10.3.4. Le coefficient de x^n dans p_n donné par (2) est 1 car $p_{n-1} = x^{n-1} + ...$, $p_{n-2} = x^{n-2} + ...$ Ainsi p_n vérifie (i). Il reste donc à prouver (ii). Donnons nous à cet effet $q \in P_{n-1}$. Dans le cas où $q \in P_{n-3}$, nous avons $xq \in P_{n-2}$ et ainsi $(((x - \alpha_n)p_{n-1}, q)) = ((p_{n-1}, (x - \alpha_n)q)) = 0$, car p_{n-1} vérifie (ii). Puisque $((p_{n-2}, q)) = 0$, nous avons donc $((p_n, q)) = 0$.

Dans le cas général où $q \in P_{n-1}$, nous écrivons $q = \delta_1 p_{n-1} + \delta_2 p_{n-2} + r$ où δ_1 est le coefficient de x^{n-1} dans q et δ_2 le coefficient de x^{n-2} dans $q - \delta_1\, p_{n-1}$. Il en résulte que $r \in P_{n-3}$ et donc puisque nous savons désormais que $((p_n, r)) = 0$, pour montrer que $((p_n, q)) = 0$ il suffit de prouver que $((p_n, p_{n-1})) = 0$ et $((p_n, p_{n-2})) = 0$. Calculons : $((p_n, p_{n-1})) =$
$(((x - \alpha_n)p_{n-1}, p_{n-1})) - \beta_n((p_{n-2}, p_{n-1})) = ((xp_{n-1}, p_{n-1})) - \alpha_n((p_{n-1}, p_{n-1}))$ car $((p_{n-2}, p_{n-1})) = 0$. Mais le choix de α_n est celui qui annule ce terme et donc $((p_n, p_{n-1})) = 0$.

D'autre part

$$\begin{aligned}((p_n, p_{n-2})) &= (((x - \alpha_n)p_{n-1}, p_{n-2})) - \beta_n((p_{n-2}, p_{n-2}))\\ &= ((xp_{n-1}, p_{n-2})) - \beta_n((p_{n-2}, p_{n-2}))\end{aligned}$$

car $((p_{n-2}, p_{n-1})) = 0$.
Mais

$$\begin{aligned}((xp_{n-1}, p_{n-2})) = ((p_{n-1}, xp_{n-2})) &= ((p_{n-1}, p_{n-1})) + ((p_{n-1}, xp_{n-2} - p_{n-1}))\\ &= ((p_{n-1}, p_{n-1}))\end{aligned}$$

car par (i), $xp_{n-2} - p_{n-1} \in P_{n-2}$ et par (ii), p_{n-1} est orthogonal à P_{n-2}. Ainsi $((p_n, p_{n-2})) = ((p_{n-1}, p_{n-1})) - \beta_n((p_{n-2}, p_{n-2}))$ et β_n a été justement choisi pour annuler ce nombre.

L'existence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ résulte alors d'un banal raisonnement par récurrence.

10.3.5. On part de la formule $((x^m, 1)) = 0$ si m est impair et $((x^m, 1)) = \frac{2}{m+1}$ si m est pair, valable pour $m \in \mathbb{N}$. En utilisant la question 10.1.1., nous avons $p_0 = 1$, $p_1 = x$. Ceci permet de calculer $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 = 1/3$ et donc $p_2 = x^2 - \frac{1}{3}$. Il en résulte que $\alpha_3 = 0$ et $\beta_3 = 4/15$ et ainsi $p_3 = x^3 - \frac{3x}{5}$. On trouve alors que $\alpha_4 = 0$ et que $\beta_4 = 9/35$ de sorte que $p_4 = x^4 - \frac{6x^2}{7} + \frac{3}{35}$.

10.3.6. Si p_n ne possède pas dans $]-1, 1[$ de racine réelle de multiplicité impaire, il ne change pas de signe. Mais pour $n \geqslant 1$, $1 \in P_{n-1}$ et donc $((p_n, 1)) = 0$ soit $\int_{-1}^{1} p_n(x)w(x)dx = 0$. Puisque w et p_n sont des fonctions continues et que $p_n w$ est de signe constant, nécessairement $p_n w \equiv 0$ soit $p_n \equiv 0$ (car $w_n(x) > 0$, $\forall x \in [-1, 1]$) ce qui est absurde car p_n est de degré n.

10.3.7. Si $m \leqslant n-1$, alors $\pi \in P_{n-1}$ et par conséquent par (ii), $((p_n, \pi)) = 0$ c'est-à-dire $\int_{-1}^{1} p_n(x)\pi(x)w(x)dx = 0$. Par construction, le polynôme $p_n\pi$ ne possède dans

$]-1,1[$ que des racines réelles de multiplicité paire : il est de signe constant et le raisonnement fait à la question précédente montre que $p_n\pi = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $m \geqslant n$. Mais p_n possède au plus n racines et donc $m \leqslant n$ d'où $m = n$ et alors $p_n = (x - x_1)...(x - x_n)$: p_n possède n racines simples dans $]-1,1[$.

10.3.8. Nous avons pour tout $f \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} |E(f)| &\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x)|w(x)dx + \sum_{i=0}^{k} |\lambda_i||f(x_i)|, \\ &\leqslant \left(\int_{-1}^{1} w(x)dx + \sum_{i=0}^{k} |\lambda_i|\right) ||f||_\infty, \end{aligned}$$

qui montre que l'application E (dont la linéarité est immédiate) est continue sur $\mathcal{E}$.

10.3.9. Le nombre de paramètres disponibles pour la formule d'intégration approchée est $2(k+1)$: les λ_i et les x_i. Le nombre de contraintes à satisfaire pour avoir (5), compte tenu de la linéarité de E, est la dimension de P_m soit $m+1$. En général (et de manière heuristique) il doit y avoir moins de contraintes que de paramètres libres et donc $m+1 \leqslant 2k+2$ est naturel, c'est-à-dire $m \leqslant 2k+1$.

10.3.10. Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, ..., x_k$ est, par définition, le seul polynôme $p(f)$ de degré k qui soit tel que $p(f)(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, ..., k$. Puisque $l_i(x_j) = \delta_{ij}$, il vient $(\sum_{i=0}^{k} f(x_i)l_i)(x_j) = f(x_j)$ pour $j = 0, ..., k$ ainsi $p(f) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i)l_i$.

10.3.11. Nous avons par (6)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) \int_{-1}^{1} l_i(x)w(x)dx &= \int_{-1}^{1} \left(\sum_{i=0}^{k} f(x_i)l_i(x)\right) w(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} p(f)(x)w(x)dx. \end{aligned}$$

10.3.12. Il s'agit de montrer que $E(q) = 0$ si $q \in P_k$. Mais si $q \in P_k$, il est son propre polynôme d'interpolation aux points $x_0, ..., x_k$: $p(q) = q$. D'après (7), $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i q(x_i) = \int_{-1}^{1} q(x)w(x)dx$ et donc $E(q) = 0$.

10.3.13. Le polynôme l est de degré $k+1$. Effectuons la division euclidienne de $p \in P_{2k+1}$ par l : $p = ql + r$ avec degré de $r \leqslant$ (degré de l) $- 1 = k$: $r \in P_k$. Ainsi $ql = p - r$ est de degré au plus $2k+1$ et puisque l est de degré $k+1, q$ est au plus de degré k : $q \in P_k$.

10.3.14. Nous avons

$$\int_{-1}^{1} p(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)l(x)w(x)dx + \int_{-1}^{1} r(x)w(x)dx.$$

Observons que l et p_{k+1} sont de même degré, ont les mêmes racines et que leur coefficient de x^{k+1} sont égaux (à 1). Nous avons donc $l = p_{k+1}$. Ainsi $\int_{-1}^{1} q(x)l(x)w(x)dx = ((l,q)) = ((p_{k+1},q)) = 0$ car $q \in P_k$ et p_{k+1} est orthogonal à P_k. Ainsi $\int_{-1}^{1} p(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} r(x)w(x)dx$.

10.3.15. Soit $p \in P_{2k+1}$, nous avons avec les notations de la question 10.1.13,

$$\begin{aligned} E(p) &= \int_{-1}^{1} p(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p(x_i), \\ &= \int_{-1}^{1} r(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p(x_i), \\ &= \int_{-1}^{1} r(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i r(x_i), \\ &= E(r). \end{aligned}$$

La première égalité résulte de la question 10.1.14 ; la seconde du fait que puisque $p = ql + r$ et $l(x_i) = 0$ pour tout i, $p(x_i) = r(x_i)$. Mais $r \in P_k$ et donc par la question 10.1.12., $E(r) = 0$. Ainsi finalement, $\forall p \in P_{2k+1}, E(p) = 0$: (3) avec pour x_i les racines de p_{k+1} et $\lambda_i = ((l_i, 1))$ où $l_i = \prod^{k}_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, est une formule d'intégration approchée à $k+1$ points qui est d'ordre $2k+1$.

10.3.16. Les zéros de $p_3 = x^3 - \frac{3x}{5}$ sont $x_0 = 0, x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ et $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$. En utilisant la formule donnant $((x^m, 1))$ lorsque $w \equiv 1$, on calcule aisément les $\lambda_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$ pour $i = 0, 1$ et 2 : $\lambda_0 = 8/9$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 5/9$. Ceci produit la formule (10).

10.3.17. Dans ce cas, pour $f \in \mathcal{C}^6([-1,1],\mathbb{R})$, nous obtenons

$$|E(f)| \leqslant \frac{||f^{(6)}||_\infty}{15750}.$$

10.3.18. Une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$ sur $[-1,1]$ est $\frac{2}{3}(2+x)^{3/2}$ ainsi

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2+x}\,dx = 2(\sqrt{3} - 1/3).$$

10.3.19. Par dérivations successives, nous avons $f^{(6)}(x) = -\frac{3\times5\times7\times9}{2^6}(2+x)^{-11/2}$. Alors $|E(f)| \leqslant \frac{3\times5\times7\times9}{2^6\times15750} = \frac{3}{2^7\times5^2} = 9,375.10^{-4}$

10.3.20. Puisque $|E(f)| \leqslant 10^{-3}$, la différence entre le second membre de (11) et $\int_{-1}^{1} \sqrt{2+x}\,dx$ est au plus de 10^{-3}. Il faut donc évaluer le second membre de (10) avec 4 décimales.

10.3.21. Le second membre de (10), noté S, vaut $S \simeq 2,79746$ avec 5 chiffres significatifs et donc

$$E(f) \simeq 2,79743 - 2,79746 = -3.10^{-5}.$$

Ainsi la formule d'intégration (10) est exacte avec 4 chiffres significatifs (l'estimation d'erreur est pessimiste dans ce cas).

10.3.22. Nous avons pour $f(x) = \sqrt{2+x}$, $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{1}{3}(1+4\sqrt{2}+\sqrt{3}) \simeq 2,7963$ avec 4 chiffres significatifs. On a donc ici une erreur de l'ordre de 10^{-3}. La formule de Simpson est moins précise que (10), tout en demandant le même nombre d'évaluations de la fonction f.

L'ordre de la formule de Simpson est 3 car on vérifie que (11) est exacte pour $f(x) = x^m$ avec $m = 0, 1, 2$ et 3 mais approchée pour $m = 4$. La formule (10) est d'ordre $2k + 1$ avec $k = 2$ soit 5 elle est donc plus précise ce qui explique le fait que (10) donne une meilleure approximation que (11).

Commentaires

La question de l'intégration numérique, qui est l'objet de ce problème, est un point fondamental pour l'approximation d'intégrales faisant intervenir des fonctions dont on ne connaît pas de primitive. Il est considéré comme étant résolu de manière satisfaisante pour les intégrales de fonctions d'une variable réelle et la méthode présentée dans ce problème (formules de Gauss) est effectivement utilisée en pratique.

La situation est beaucoup moins claire pour les intégrales multiples (qui ne se ramènent pas à des calculs d'intégrales simple). Il y a certainement encore des progrès à faire dans ce domaine.

Dans le préambule de la troisième partie, à la page 30, nous avons admis l'estimation d'erreur (9). Le lecteur qui souhaite connaître la preuve de cette majoration peut se reporter au recueil d'exercices suivant : M. Crouzeix et A. Mignot, *Exercices d'analyse numérique des équations différentielles* paru chez Dunod.

Corrigé 11

11.3.1. Dans ce cas nous avons $f \in \mathcal{C}^\infty$ car il s'agit d'un polynôme et

$$\frac{\partial f}{\partial P} = V\,, \quad \frac{\partial f}{\partial V} = P\,, \quad \frac{\partial f}{\partial T} = -R_0\,,$$

ainsi $\frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial f}{\partial T} = -R_0 V P \neq 0\,.$

11.3.2. Nous obtenons immédiatement

$$P(V,T) = \frac{R_0 T}{V}\,, \quad V(T,P) = \frac{R_0 T}{P} \quad \text{et} \quad T(P,V) = \frac{PV}{R_0}\,,$$

de sorte que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{R_0 T}{V^2}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R_0}{P} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{R_0},$$

$$\text{et ainsi} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -\frac{R_0^2 T V}{R_0 V^2 P} = -\frac{R_0 T}{P V} = -1,$$

puisque $f_{R_0}(P, V, T) = 0$ s'écrit $R_0 T = PV$.

11.3.3. Il est tout d'abord essentiel de supposer qu'il existe un triplet (P_0, V_0, T_0) tel que $f(P_0, V_0, T_0) = 0$ car ce n'est pas parce que $\frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial f}{\partial T}$ ne s'annule pas qu'un tel triplet existe dans $(\mathbb{R}_+^\star)^3$ comme le montre le cas $f(P, V, T) = PVT$. Soit donc (P_0, V_0, T_0) solution de $f(P_0, V_0, T_0) = 0$. En appliquant le théorème des fonctions implicites à l'équation $f(P, V, T) = 0$ et compte tenu du fait que $\frac{\partial f}{\partial P}(P_0, V_0, T_0) \neq 0$, nous savons qu'il existe un voisinage U_P de (V_0, T_0) et une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $P : (V, T) \mapsto P(V, T)$ telle que la solution de $f(P, V, T) = 0$ pour $(V, T) \in U_P$ et P proche de P_0 ($|P - P_0| < \varepsilon_P$) est $P = P(V, T)$. De plus

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T (V, T) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial V}(P(V, T), V, T)}{\dfrac{\partial f}{\partial P}(P(V, T), V, T)}$$

pour $(V, T) \in U_P$. Cette dernière identité pouvant, par exemple, s'obtenir en dérivant l'identité $f(P(V, T), V, T)) = 0$ en gardant T constant.

Bien entendu ce raisonnement s'étend à $V : (T, P) \mapsto V(T, P)$ dans un voisinage U_V de (T_0, P_0) et pour V proche de V_0 ainsi qu'à $T : (P, V) \mapsto T(P, T)$ dans un voisinage U_T de (P_0, V_0) et pour T proche de T_0.

Ainsi nous avons construit 3 voisinages de (P_0, V_0, T_0) :

$$\Omega_P = \{(P, V, T); |P - P_0| < \varepsilon_P, (V, T) \in U_P\},$$

Ω_V et Ω_T suivant le même principe de sorte que $\Omega = \Omega_P \cap \Omega_V \cap \Omega_T$ est un voisinage de (P_0, V_0, T_0) pour lequel l'équation $f(P, V, T) = 0$ possède une et une seule solution que l'on peut représenter par l'une des fonctions $P(V, T)$, $V(T, P)$ ou $T(P, V)$. Puisque

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial T}(P, V(T, P), T)}{\dfrac{\partial f}{\partial V}(P, V(T, P), T)}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial P}(P, V, T(P, V))}{\dfrac{\partial f}{\partial T}(P, V, T(P, V))},$$

nous obtenons que $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$.

Commentaires

Alors que dans le cas d'une fonction d'une variable définie implicitement par une relation
$$f(x, y) = 0 : x = x(y) \text{ ou } y = y(x);$$
il est usuel d'écrire $\frac{dx}{dy}.\frac{dy}{dx} = 1$. Relation qui semble provenir de la règle formelle consistant à « simplifier » les numérateurs et dénominateurs, cette même règle pour une fonction définie implicitement par une relation $f(x, y, z) = 0$ est fausse comme on vient de le voir.

La relation $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) = -1$ est abondamment utilisée en thermodynamique. En fait elle sous entend que le système considéré est divariant, c'est-à-dire que deux variables thermodynamiques indépendantes permettent de calculer toutes les autres.

Dans le cas où l'on dispose d'une fonction de n variables ($n \geqslant 2$) : $f(x_1, ..., x_n) = 0$ telle que, localement ou globalement, il est possible d'exprimer la variable x_i en fonction des autres : $x_i = X_i(\hat{x}_i)$, où l'on a noté $\hat{x}_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$ le $n - 1$ uplet obtenu en supprimant la variable x_i, la relation généralisant celle de ce problème est
$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_3}....\frac{\partial X_n}{\partial x_1} = (-1)^n.$$

Dans le cas $n = 2$, on retrouve bien que $\frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx} = 1$ lorsque $X(y)$ et $Y(x)$ sont définies implicitement par $f(x, Y(x)) = 0$ et $f(X(y), y) = 0$.

Pour revenir à la thermodynamique, lorsque l'on considère le mélange de deux gaz comme par exemple l'oxygène et l'azote, il s'agit d'un système trivariant et pour décrire ce système il faut disposer de 3 variables, par exemple la pression P, la température T et le titre massique c de l'oxygène qui est le rapport de la masse de l'oxygène à la masse totale. Dans ce cas le volume V sera donné par une relation $f(V, P, T, c) = 0$ et on aura
$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,c}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{c,V}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{V,P}\left(\frac{\partial c}{\partial V}\right)_{P,T} = 1.$$

Corrigé 12

12.3.1. Par la propriété (iii), nous avons
$$\left\|\frac{\partial G}{\partial u}(u) - \frac{\partial G}{\partial u}(0)\right\| \leqslant \gamma||u|| \leqslant \gamma\rho$$
et donc
$$\left\|I - \frac{\partial G}{\partial u}(0)^{-1}\frac{\partial G}{\partial u}(u)\right\| \leqslant \left\|\frac{\partial G}{\partial u}(0)\right\|^{-1}\left\|\frac{\partial G}{\partial u}(u) - \frac{\partial G}{\partial u}(0)\right\| \leqslant \beta\gamma\rho < 1.$$

Ainsi l'application linéaire $l = I - \frac{\partial G}{\partial u}(0)^{-1}\frac{\partial G}{\partial u}(u)$ est de norme < 1, par conséquent la série $\sum_{n=0}^{\infty} l^n$ est absolument convergente et sa somme s vérifie : $||s|| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} ||l||^n = \frac{1}{1-||l||}$ et $(Id - l)s = Id$: $Id - l$ est inversible et $||(Id - l)||^{-1} \leqslant \frac{1}{1-||l||}$. Mais $Id - l = \frac{\partial G}{\partial u}(0)^{-1}\frac{\partial G}{\partial u}(u)$ et par conséquent $\frac{\partial G}{\partial u}(u)$ est inversible et de plus $\frac{\partial G}{\partial u}(u)^{-1} = (Id - l)^{-1}\frac{\partial G}{\partial u}(0)^{-1}$ fait que

$$\left\|\frac{\partial G}{\partial u}(u)\right\|^{-1} \leqslant \left\|\frac{\partial G}{\partial u}(0)^{-1}\right\| \left\|(Id - l)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\beta}{1 - \beta\gamma\rho}.$$

12.3.2. Nous avons

$$u_{n+1} = u_n - \frac{\partial G}{\partial u}(u_n)^{-1}(G(u_n) - G(0)).$$

Or

$$\begin{aligned} G(u_n) - G(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(G(tu_n))dt, \\ &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u}(tu_n)u_n dt, \end{aligned}$$

et donc

$$u_{n+1} = \frac{\partial G}{\partial u}(u_n)^{-1}\left[\frac{\partial G}{\partial u}(u_n)u_n - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u}(tu_n)u_n dt\right],$$

$$u_{n+1} = \frac{\partial G}{\partial u}(u_n)^{-1}\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial u}(u_n) - \frac{\partial G}{\partial u}(tu_n)\right) u_n dt\right].$$

Ainsi en utilisant (iii) sous l'intégrale,

$$||u_{n+1}|| \leqslant \left\|\frac{\partial G}{\partial u}(u_n)^{-1}\right\| \int_0^1 (1 - t)\gamma||u_n||^2 dt.$$

Il en résulte que $||u_{n+1}|| \leqslant \frac{\beta\gamma}{2(1-\beta\gamma\rho)}||u_n||^2$ qui est la majoration demandée.

Mais $||u_n|| \leqslant \rho$ et donc $||u_{n+1}|| \leqslant \frac{\rho\beta\gamma}{2(1-\beta\gamma\rho)}\rho < \rho$ car $\frac{\rho\beta\gamma}{2(1-\beta\gamma\rho)} < 1$ puisque $0 < \rho\beta\gamma < 2/3$.

12.3.3. Nous avons $||u_{n+1}|| \leqslant k||u_n||$ avec $k = \frac{\rho\beta\gamma}{2(1-\beta\gamma\rho)} < 1$ par conséquent $||u_{n+1}|| \leqslant k^n||u_0||$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini de manière géométrique (gain d'une « décimale » par itération). Soit alors n_0 tel que $a||u_{n_0}|| \leqslant 10^{-q_0}$ pour $q_0 \geqslant 1$. On vérifie par récurrence que puisque $||u_{n+1}|| \leqslant a||u_n||^2$,

$$a||u_{n_0+p}|| \leqslant 10^{-2^p q_0}.$$

Ainsi la convergence de u_n vers u_0 est plus rapide que géométrique, elle est quadratique dès que $n \geqslant n_0$ tel que $a||u_{n_0}|| < 1$: doublement du nombre de décimales nulles à chaque itération.

Commentaires

Ce problème propose l'étude de *l'algorithme de Newton* qui sert très souvent en pratique dans la détermination de la solution d'un système de m équations à m inconnues (dans le cas non linéaire).

Cet algorithme est bien connu dans le cas $m = 1$, il s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

et revient à remplacer f dont on cherche un zéro x par sa tangente en x_n (approximation à l'étape n) puis à noter x_{n+1} le zéro de cette application affine. Par exemple, disposant de $A > 0$, si l'on cherche à calculer (sur ordinateur) $\sqrt{A}$ à l'aide des quatre opérations élémentaires, l'algorithme s'écrit

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

(prendre $f(x) = x^2 - A$). Comme on peut le vérifier, partant de $x_0 > 0$ l'algorithme converge vers $\sqrt{A}$, et comme nous l'avons montré au numéro 12.3.3., dès que x_n est assez proche de $\sqrt{A}$, la convergence est extrêmement rapide : doublement du nombre de décimales exactes à chaque itération. Ainsi dans ce cas, si l'on initialise « bien » l'algorithme, nous aurons une convergence en très peu d'itérations (pour mettons une dizaine de décimales).

Revenons au cas d'une application G de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$, nous pouvons écrire l'algorithme de Newton sous la forme

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u_n)u_{n+1} = u_n - G(u_n).$$

Ainsi, si l'on possède une procédure efficace de résolution de systèmes linéaires $m \times m$: $Au = r$, pour construire u_{n+1} à partir de u_n, on prendra $A = \frac{\partial G}{\partial u}(u_n)$ et $r = u_n - G(u_n)$.

Finalement, l'algorithme de Newton consiste à résoudre une succession de systèmes linéaires $m \times m$. Ce dernier problème n'est pas facile en général et par exemple si $m = 10^6$ et si tous les coefficients de A sont non nuls, aucune méthode ne permet de résoudre un tel système à ce jour. Un problème de ce type peut se rencontrer en pratique si on essaie de faire des calculs de rayonnement d'antenne électromagnétique. Ce domaine est connu sous le nom d'algèbre linéaire matricielle, c'est une thématique de recherche très active qui mêle mathématique et calcul scientifique.

Corrigé 13

13.3.1. Pour $(u, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ nous notons

$$F(u, \lambda) = \frac{\partial G}{\partial u}(u_0, \lambda_0)^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, \lambda_0)u - G(u, \lambda)\right),$$

et nous observons que $G(u, \lambda) = 0 \Leftrightarrow F(u, \lambda) = u$.

Ainsi le problème consistant à trouver u et λ tels que $G(u,\lambda) = 0$ se ramène à un problème de point fixe pour $F(.,\lambda) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Nous avons $F(u_0,\lambda) = u_0 - \frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda_0)^{-1}G(u_0,\lambda)$, et par conséquent pour $||\lambda - \lambda_0|| \leqslant \rho$,

$$||u_0 - F(u_0,\lambda)|| \leqslant ||u_0 - F(u_0,\lambda_0)|| + ||F(u_0,\lambda_0) - F(u_0,\lambda)||.$$

Ainsi si on note $M = ||\frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda_0)^{-1}||$ nous aurons pour $||G(u_0,\lambda_0)|| \leqslant \delta$,

$$||u_0 - F(u_0,\lambda)|| \leqslant M\delta + M||G(u_0,\lambda) - G(u_0,\lambda_0)||.$$

Désignons alors par $\rho_0 > 0$ un nombre tel que G soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble $||u - u_0|| + ||\lambda - \lambda_0|| < 2\rho_0$ et notons

$$Lip(G) = \sup \frac{||G(u,\lambda) - G(v,\mu)||}{||u - v|| + ||\lambda - \mu||}$$

où le supremum est pris sur l'ensemble $||u - u_0|| + ||\lambda - \lambda_0|| \leqslant \rho_0$. Nous aurons donc pourvu que $\rho \leqslant \rho_0$,

$$||u_0 - F(u_0,\lambda)|| \leqslant M(\delta + \rho Lip(G)). \qquad (1)$$

Par ailleurs,

$$F(u,\lambda) - F(v,\lambda) = \frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda_0)^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda_0)(u - v) - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial u}(tu + (1-t)v,\lambda)(u - v)dt\right),$$

car $G(u,\lambda) - G(v,\lambda) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(G(tu + (1-t)v,\lambda)dt$.

Ainsi

$$F(u,\lambda) - F(v,\lambda) = \frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda_0)^{-1}\int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda_0) - \frac{\partial G}{\partial u}(tu + (1-t)v,\lambda)\right).(u - v)dt. \qquad (2)$$

Introduisons alors les modules de continuité des fonctions $v \mapsto \frac{\partial G}{\partial u}(u,\lambda)$ et $\lambda \mapsto \frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda)$: pour $\rho \leqslant \rho_0$,

$$\omega_1(\rho) = \sup \left\|\frac{\partial G}{\partial u}(u,\lambda) - \frac{\partial G}{\partial u}(v,\lambda)\right\|,$$
$$\omega_2(\rho) = \sup \left\|\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,\lambda) - \frac{\partial G}{\partial v}(u,\mu)\right\|,$$

où $||u - u_0|| + ||\lambda - \lambda_0|| \leqslant \rho_0$ et dans le premier cas $||u - v|| \leqslant \rho_1$ alors que dans le second $||\lambda - \mu|| \leqslant \rho_2$.

Avec ces notations, pour $||u-u_0|| \leqslant \rho_1$, $||\lambda-\lambda_0|| \leqslant \rho_2$ et $||v-v_0|| \leqslant \rho_1$, $||\lambda-\lambda_0|| \leqslant \rho_2$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda_0)-\frac{\partial G}{\partial u}(tu+(1-t)v,\lambda)\right\| \\
&\qquad \leqslant \left\|\frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda_0)-\frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda)\right\|+\left\|\frac{\partial G}{\partial u}(u_0,\lambda)-\frac{\partial G}{\partial u}(tu+(1-t)v,\lambda)\right\| \\
&\qquad \leqslant \omega_1(\rho_1)+\omega_2(\rho_2).
\end{aligned}$$

Il en résulte par retour à (2) que

$$(3) \quad ||F(u-\lambda)-F(v,\lambda)|| \leqslant M(\omega_1(\rho_1)+\omega_2(\rho_2))||v-u||.$$

Prenons alors $\rho_1 \leqslant \rho_0$ et $\rho_2 \leqslant \rho_0$ de sorte que

$$(4) \quad M(\omega_1(\rho_1)+\omega_2(\rho_2)) \leqslant 1/2$$

ce qui est toujours possible car $\lim_{\rho\to 0}\omega_i(\rho)=0$. Prenons ensuite ρ_2 encore plus petit et tel que $M\rho_2 Lip(G) \leqslant \rho_1/4$ et prenons $\delta>0$ tel que $M\delta \leqslant \rho_1/4$. Nous aurons pour $||\lambda-\lambda_0|| \leqslant \rho_2$ et $||u-u_0|| \leqslant \rho_1$,

$$\begin{aligned}
||u_0-F(u,\lambda)|| &\leqslant ||u_0-F(u_0,\lambda)||+||F(u_0,\lambda)-F(u,\lambda)|| \\
&\leqslant \text{(par (1) et (3) - (4))} \\
&\leqslant M\delta+MLip(G)\rho_2+\tfrac{1}{2}\rho_1 \\
&\leqslant \frac{\rho_1}{4}+\frac{\rho_1}{4}+\frac{\rho_1}{2}=\rho_1.
\end{aligned}$$

Ainsi pour $||\lambda-\lambda_0|| \leqslant \rho_2$, l'application $u \mapsto F(u,\lambda)$ est une contraction de rapport $1/2$ sur la boule $\{v \in \mathbb{R}^n, ||v-u_0|| \leqslant \rho_1\}$. Elle possède donc un unique point fixe noté $u(\lambda)$: $F(u(\lambda),\lambda)=u(\lambda)$ sur cette boule pour $||\lambda-\lambda_0|| \leqslant \rho_2$. Ainsi $(u(\lambda),\lambda)$ est la seule solution dans $B_\rho(u_0,\lambda_0)$ avec $\rho=\min(\rho_1,\rho_2)$ de l'équation $G(u,\lambda)=0$.

13.3.2. Nous avons

$$\begin{aligned}
u(\lambda)-u(\mu) &= F(u(\lambda),\lambda)-F(u(\mu),\mu)= \\
&= F(u(\lambda),\lambda)-F(u(\mu),\lambda)+ \\
&\quad\; F(u(\mu),\lambda)-F(u(\mu),\mu),
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$||u(\lambda)-u(\mu)|| \leqslant \frac{1}{2}||u(\lambda)-u(\mu)||+||F(u(\mu),\lambda)-F(u(\mu),\mu)||.$$

Ainsi

$$||u(\lambda) - u(\mu)|| \leqslant 2 \sup_{||u_0 - v|| \leqslant \rho} ||F(v, \lambda) - F(v, \mu)||$$

et le membre de droite tend vers zéro lorsque λ tend vers μ puisque l'application F est uniformément continue sur le compact $||u_0 - u|| \leqslant \rho, ||\lambda - \lambda_0|| \leqslant \rho$.

Commentaires

Il s'agit là d'une version plus forte que celle du théorème des fonctions implicites usuel qui demanderait, avec les notations de l'énoncé, l'hypothèse supplémentaire : $G(u_0, \lambda_0) = 0$. On voit qu'il suffit que $G(u_0, \lambda_0)$ soit assez petit pour pouvoir conclure à l'existence d'une branche de solutions de l'équation $G(u, \lambda) = 0$ au voisinage de (u_0, λ_0). Ce résultat n'est pas une généralisation gratuite, il s'avère utile lorsque l'on étudie les perturbations (par une méthode numérique par exemple) d'une équation du type $G(u, \lambda) = 0$ qui est alors remplacée par $G_\varepsilon(u, \lambda) = 0$ où ε est un petit paramètre. Nous renvoyons par exemple à l'ouvrage de M. Crouzeix et J. Rappaz, *On numerical approximation in bifurcation theory* paru chez Dunod.

Corrigé 14

14.3.1. Nous avons $F(x, y) = x^2 - y^2 + O((x^2 + y^2)^{3/2})$ et donc $F(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$, $M_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$: $\det M_0 = -4 < 0$.
L'ensemble $F(x, y) = 0$ est $y = \pm \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ avec $x > -1$, voir la Figure 3.1.

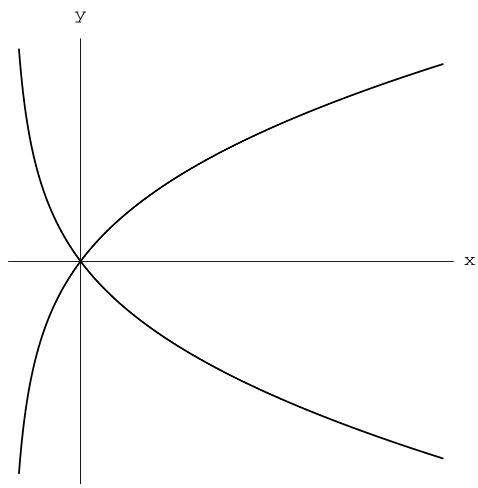


Figure 3.1 L'ensemble $F(x, y) = x^2 - (1 + x)y^2 = 0$

14.3.2. La matrice $M(m)$ étant symétrique, il en est de même pour $A(m)$. Considérons $f\ :\ f(t) = F(tm)$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre deux entre $t = 0$ et $t = 1$ s'écrit

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t) dt.$$

Mais $f(0) = F(0) = 0, f'(0) = \nabla F(0).m = 0$ et $f''(t) = (M(tm).m).m$. Ainsi $f(1) = F(m)$ s'écrit

$$\begin{aligned} F(m) &= \int_0^1 (1-t)(M(tm).m)dt.m, \\ &= \frac{1}{2}(M_0.m + A(m).m).m. \end{aligned}$$

14.3.3. Rappelons qu'il existe des nombres c_k tels que le développement en série entière $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ soit uniformément convergent pour $|x| < 1, x \in \mathbb{R}$. Posons alors

$$C(m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (M_0^{-1} A(m))^k,$$

développement uniformément convergeant pour $||M_0^{-1}A(m)|| < 1$ (on note $||B|| = \sup\{||Bm||, ||m|| = 1\}$ et $||m||$ désigne la norme euclidienne de $m \in \mathbb{R}^2$). Puisque $A(0) = 0$, par continuité il existe une boule ouverte centrée en zéro, U, telle que $||M_0^{-1}A(m)|| < 1$ sur ce voisinage. Calculons alors pour $m \in U$ la quantité ${}^tC(m)M_0C(m)$:

$$\begin{aligned} {}^tC(m)M_0C(m) &= \sum_{k,l=0}^{\infty} c_k c_l (A(m)M_0^{-1})^k M_0 (M_0^{-1}A(m))^l\,, \\ &= M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k+l=n} c_k c_l (A(m)M_0^{-1})^k M_0 (M_0^{-1}A(m))^l\,, \\ &= M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k+l=n} c_k c_l A(m) (M_0^{-1}A(m))^{n-1}. \end{aligned}$$

D'autre part $(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k+l=n} c_k c_l) x^n, \forall x \in \mathbb{R}$ et donc $\sum_{k+l=n} c_k c_l = 0$ si $n \geqslant 2$ et $\sum_{k+l=n} c_k c_l = 1$ si $n = 1$.

Ainsi ${}^tC(m)M_0C(m) = M_0 + A(m)$.

La fonction C est alors $\mathcal{C}^{\infty}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^{\infty}$: la fonction $m \to A(m)$ et la série entière $B \mapsto \sum_{h=0}^{\infty} C_h (M_0^{-1}B)^k$.

14.3.4. Il suffit de prendre $\varphi(m) = C(m).m$. Il s'agit bien d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et $(D\varphi)(m) = DC(m).m + C(m)$ ainsi $(D\varphi)(0) = I$. D'après le théorème d'inversion locale, quitte à prendre un voisinage U plus petit, φ est alors un difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$ qui est un voisinage de $(0, 0) = \varphi(0, 0)$.

14.3.5. Puisque M_0 vérifie $\det M_0 < 0$ la signature de la forme quadratique $m \mapsto (M_0 m, m)$ est $(1, 1)$. C'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P telle que ${}^tPM_0P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Notons alors $\varphi(x, y) = (X, Y)$ et $(X_1, Y_1) = P(X, Y)$. La relation $F(x, y) = 0$ devient sur U : $X_1^2 - Y_1^2 = 0$ et donc l'ensemble des solutions de $F(x, y) = 0$ est localement au voisinage de zéro difféomorphe à une croix, comme pour l'exemple de la première question.

Commentaires

Ce problème a pour objet l'étude d'un cas particulier de l'équation implicite $F(x, y) = 0$ au voisinage d'un point pour lequel le théorème des fonctions implicites ne peut s'appliquer (car $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$). En considérant le cas où le déterminant de la matrice hessienne est strictement négatif, nous avons vu que cet ensemble était difféomorphe à un morceau de croix. On aurait pu tout aussi bien considérer le cas où le déterminant est strictement positif. Dans ce cas, $(0, 0)$ est un zéro isolé.

Corrigé 15

15.3.1. Nous avons $\det \varphi(R, U) = (\det R)(\det U)$. Puisque $\det({}^tRR) = (\det R)^2 = 1$, $\det R \neq 0$. Il reste donc à prouver que $detU \neq 0$ lorsque $U \in \mathcal{S}^+(n)$. Soit alors $m_1, ..., m_n$ les valeurs propres de la matrice U. Nous avons $m_i > 0$ puisque $(U\xi, \xi) > 0, \forall \xi \neq 0$, par conséquent $det\ U = \prod_{i=1}^n m_i > 0$.

15.3.2. Soit $F \in Gl_n(\mathbb{R})$. Cherchons à résoudre l'équation $RU = F$ où $R \in \mathcal{O}(n)$ et $U \in \mathcal{S}^+(n)$. Nous avons alors ${}^t(RU) = U^tR = {}^tF$ et donc $U^tRRU = {}^tFF = U^2$. Notons $S = {}^tFF$. La matrice S appartient à $\mathcal{S}^+(n)$car ${}^tS = {}^t({}^tFF) =^t FF = S$ et $(S\xi, \xi) = ({}^tFF\xi, \xi) = ||F\xi||^2 \geqslant 0$. Si $(S\xi, \xi) = 0$ alors $F\xi = 0$ mais puisque F est inversible, $\xi = 0$.

Observons alors que les deux matrices symétriques S et U commutent : $SU = U^3 = US$ car $S = U^2$. Deux matrices symétriques qui commutent sont diagonalisables dans une base commune : $\exists P \in \mathcal{O}(n)$ telle que

$${}^tPSP = \Delta \text{ et } {}^tPUP = D,$$

où Δ et D sont diagonales. Mais alors $U^2 = S$ s'écrit $D^2 = \Delta$. Puisque nous cherchons une matrice D à coefficients diagonaux strictement positifs, l'équation $D^2 = \Delta$ possède une et une seule solution

$$D = \text{diag}\,(\sqrt{\lambda_i}) \quad \text{où } \Delta = \text{diag}\,(\lambda_i), \lambda_i > 0.$$

Ainsi la seule solution de $U^2 = {}^tFF$ est $U = {}^tP\ diag(\sqrt{\lambda_i})P$ ou les λ_i sont les valeurs propres de ${}^tFF$. Si nous prenons $R = FU^{-1}$, il vient ${}^tRR = U^{-1t}FFU^{-1} = U^{-1}U^2U^{-1} = I$. Ainsi l'équation $RU = F$ possède une et une seule solution $(R, U) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^+(n)$ prouvant la bijectivité de φ.

15.3.3. L'application φ est continue (c'est une application polynomiale). Par conséquent l'image par φ de tout compact de $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^+(n)$ est un compact de $Gl_n(\mathbb{R})$.

Considérons alors une boule fermée $B_\rho = \{F \in Gl_n(\mathbb{R}), ||F|| \leqslant \rho\}$. Observons que si $RU = F$, alors

$$\begin{aligned} ||U||^2 &= \sup_{||x||=1} ||Ux||^2 = \sup_{||x||=1} (Ux, Ux) \\ &= \sup_{||x||=1} (U^2x, x) \leqslant \sup_{||x||=1} ||U^2x|| = ||U^2||. \end{aligned}$$

Mais $||U^2|| = ||{}^tFF|| \leqslant ||{}^tF||||F|| = ||F||^2 \leqslant \rho^2$.

Par ailleurs $\forall R \in \mathcal{O}(n), ||R|| = 1$. Par conséquent l'image par φ^{-1} de la boule fermée B_ρ est bornée dans $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^+(n)$. Bien entendu φ^{-1} n'étant pas linéaire cela ne permet pas de conclure immédiatement ! Afin de montrer que φ^{-1} est continue, il suffit de montrer que si $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $Gl_n(\mathbb{R})$ de limite F, alors $\varphi^{-1}(F_m)$ converge vers $\varphi^{-1}(F)$. Puisque la suite (F_m) est convergente, $\exists\rho$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}, F_m \in B_\rho$.

Soit alors $(R_m, U_m) = \varphi^{-1}(F_m)$. D'après ce que nous avons montré, la suite (R_m, U_m) est bornée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension finie. Par conséquent nous pouvons en extraire une sous-suite $(R_{\psi(m)}, U_{\psi(m)})$ convergente : $R_{\psi(m)} \to R$, et $U_{\psi(m)} \to U$. Il en résulte que $F_{\psi(m)} = R_{\psi(m)}U_{\psi(m)} \to RU = F$. Puisque $\mathcal{O}(n)$ est fermé, $R \in \mathcal{O}(n)$. Par contre $\mathcal{S}^+(n)$ n'est pas fermé. Toutefois ${}^tU_{\psi(m)} = U_{\psi(m)}$ fait que U est symétrique et de la même manière U est positive :

$$(U\xi, \xi) = \lim_{m\to\infty} (U_{\psi(m)}\xi, \xi) \geqslant 0.$$

Puisque $F \in Gl_n(\mathbb{R})$ et que $F = RU$ nous voyons que $\det U \neq 0$ et par conséquent U est définie positive. Mais alors $(R, U) = \varphi^{-1}(F)$ par bijectivité de φ de $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}^+(n)$ sur $Gl_n(\mathbb{R})$. Ainsi toute suite extraite de (R_m, U_m) a pour limite $\varphi^{-1}(F)$ et là c'est donc toute la suite (R_m, U_m) qui converge vers $\varphi^{-1}(F)$: φ^{-1} est continue.

Commentaires

L'écriture $F = RU$ pour une matrice inversible F est appelée factorisation polaire par analogie avec l'écriture $z = e^{i\theta}\rho$ pour les nombres complexes où $e^{i\theta}$ joue le rôle de transformation orthogonale et ρ celui de matrice définie positive. Observer que l'on aurait aussi pu factoriser F sous la forme $F = VR_1$ avec $R_1 \in \mathcal{O}(n)$ et $V \in \mathcal{S}^+(n)$. Lorsque F n'est pas inversible, la factorisation $F = RU$ avec $R \in \mathcal{O}(n)$ et U symétrique positive (mais bien sûr non inversible) est possible mais il n'y a plus unicité des facteurs.

Un sous-produit de cette factorisation est le résultat géométrique suivant. L'image par une application linéaire l de la boule unité dans un espace euclidien est un ellipsoïde dont les longueurs des demi-axes sont les racines carrées des valeurs propres de l'application ${}^t ll$.

Corrigé 16

16.3.1. Donnons nous $x = (x_0, x_1)$ point arbitraire de $\mathbb{R}^2$ et considérons la fonction $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\lambda(z_1) = (\varphi(z_1) - x_0)^2 + (z_1 - x_1)^2$. Il s'agit de montrer que λ atteint son minimum sur $\mathbb{R}$. Ceci va découler de deux faits : λ est continue et $\lim_{|z_1| \to +\infty} \lambda(z_1) = +\infty$. En effet, il résulte de ces deux propriétés que $K_0 = \{z_1 \in \mathbb{R}, \lambda(z_1) \leqslant \lambda(0)\}$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$, car puisque λ est continue, K_0 est fermé, puisque $0 \in K_0$ il est non vide et puisque $\lim_{|z_1| \to +\infty} \lambda(z_1) = +\infty, K_0$ est borné. Il en résulte qu'il existe $y_1 \in K_0$ tel que $\lambda(y_1) \leqslant \lambda(z_1)$ pour tout $z_1 \in K_0$ (toute fonction continue sur un compact non vide y atteint son minimum). Prenons alors $z \in \Gamma$. Nous avons $z = (\varphi(z_1), z_1)$ pour $z_1 \in \mathbb{R}$ et soit $z_1 \in K_0$ soit $z_1 \notin K_0$. Dans le premier cas $\lambda(y_1) \leqslant \lambda(z_1)$ alors que dans le second, $\lambda(z_1) > \lambda(0) \geqslant \lambda(y_1)$ (cette dernière inégalité résultant du fait que $0 \in K_0$). Ainsi que les deux cas $\lambda(y_1) \leqslant \lambda(z_1)$: nous avons prouvé $(\star)$.

16.3.2. Prenons $\varphi(\xi_1) = \sqrt{1 - \xi_1^2}$ pour $|\xi_1| \leqslant \frac{1}{2}$ que l'on prolonge de manière $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $\xi_1 \in \mathbb{R}$. Pour $x = (0,0)$, quelque soit $z_1 \in \mathbb{R}$ nous avons $\|(\varphi(z_1), z_1)\| \geqslant 1$ et $1 = \|(\varphi(y_1), y_1)\|$ quel que soit $y_1 \in [-1/2, 1/2]$: $(\star)$ possède une infinité de solutions.

Par contre si y et $\tilde{y}$ sont solutions de $(\star)$ $\|y - x\| \leqslant \|\tilde{y} - x\|$ et $\|\tilde{y} - x\| \leqslant \|y - x\|$ par conséquent $\|y - x\| = \|\tilde{y} - x\|$ et il est loisible de noter $d_\Gamma(x) = \|y - x\|$.

16.3.3. Puisque $y = (\varphi(y_1), y_1)$ vérifie $(\star)$ si et seulement si y_1 minimise la fonction $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ introduite au 16.3.1., nous avons $\lambda'(y_1) = 0$. C'est-à-dire que (après division par 2)

$$\varphi'(y_1)(\varphi(y_1) - x_0) + y_1 - x_1 = 0. \qquad (I)$$

Par ailleurs $d_\Gamma(x)^2 = \|y - x\|^2 = (y_1 - x_1)^2 + (\varphi(y_1) - x_0)^2$ et donc

$$d_\Gamma(x)^2 = (1 + \varphi'(y_1)^2)(\varphi(y_1) - x_0)^2.$$

Si $x \in \Gamma$ alors $d_\Gamma(x) = 0$ et $y = x$ est la seule solution de $(\star)$. Si $x \notin \Gamma$, $d_\Gamma(x) \neq 0$ et donc d'après l'identité $d_\Gamma(x)^2 = (1 + \varphi'(x_1)^2)(\varphi(y_1) - x_0)^2$, $\varphi(y_1) - x_0 \neq 0$ ce qui nous permet de noter $\varepsilon(y_1) = \frac{\varphi(y_1) - x_0}{|\varphi(y_1) - x_0|} \in \{-1, 1\}$ et d'écrire grâce à (I)

$$y_1 - x_1 = -\frac{\varepsilon(y_1)\varphi'(y_1)}{\sqrt{1 + \varphi'(y_1)^2}} d_\Gamma(x)\,. \qquad (II)$$

Montrons alors que si y et $\tilde{y}$ sont solutions de $(\star)$, $y = (\varphi(y_1), y_1), \tilde{y} = (\varphi(\tilde{y}_1, \tilde{y}_1)$ alors $\varepsilon(y_1) = \varepsilon(\tilde{y}_1)$. En effet, si $\varepsilon(y_1) \neq \varepsilon(\tilde{y}_1)$ alors $\varepsilon(y_1)\varepsilon(\tilde{y}_1) < 0$ et par conséquent

$(\varphi(y_1) - x_0)(\varphi(\tilde{y}_1 - x_0) < 0$. Par continuité de φ, $\xi \mapsto \varphi(\xi) - x_0$ s'annule entre y_1 et $\tilde{y}_1$: $\exists \xi$ avec $\varphi(\xi) = x_0$ et $(\xi - x_1)^2 = \|(\varphi(\xi), \xi) - (x_0, x_1)\|^2$ est supérieur à $d_\Gamma(x)^2$ qui lui même est supérieur à la fois à $(y_1 - x_1)^2$ et $(\tilde{y}_1 - x_1)^2$. Ceci-contredit le fait que ξ est dans l'intervalle défini par y_1 et $\tilde{y}_1$ et par conséquent $\varepsilon(y_1) = \varepsilon(\tilde{y}_1)$.

Ainsi, si y et $\tilde{y}$ sont solutions de $(\star)$ et que $x \notin \Gamma$, $\varepsilon(y_1) = \varepsilon(\tilde{y}_1)$ dans (II) et

$$\left| \frac{\varphi'(y_1)}{\sqrt{1 + \varphi'(y_1)^2}} - \frac{\varphi'(\tilde{y}_1)}{\sqrt{1 + \varphi'(\tilde{y}_1)^2}} \right| d_\Gamma(x) = |y_1 - \tilde{y}_1|. \tag{III}$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction θ : $\xi \mapsto \frac{\varphi'(\xi)}{\sqrt{1+\varphi'(\xi)^2}}$ dont la dérivée est $\theta'(\xi) = \frac{\varphi''(\xi)}{(1+\varphi'(\xi)^2)^{3/2}}$, nous avons : il existe c entre y et $\tilde{y}_1$ tel que

$$\theta(y_1) - \theta(\tilde{y}_1) = (y_1 - \tilde{y}_1)\theta''(c)$$

de sorte que (III) s'écrive $|\theta''(c)|d_\Gamma(x)|y_1 - \tilde{y}_1| = |y_1 - \tilde{y}_1|$. Ceci entraîne que $y_1 = \tilde{y}_1$ puisque $|\theta''(c)|d_\Gamma(x) \leqslant \kappa d_\Gamma(x) < 1$.

16.3.4. L'application $x \mapsto d_\Gamma(x)$ est continue car nous avons

$$\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^2, \ |d_\Gamma(x) - d_\Gamma(\tilde{x})| \leqslant \|x - \tilde{x}\|.$$

En effet, si $\|y - x\| = d_\Gamma(x)$ et $\|\tilde{y} - \tilde{x}\| = d_\Gamma(\tilde{x})$ nous avons

$$\|y - x\| \leqslant \|\tilde{y} - x\| \leqslant \tilde{y} - \tilde{x}\| + \|\tilde{x} - x\|$$

qui montre que $d_\Gamma(x) \leqslant d_\Gamma(\tilde{x}) + \|\tilde{x} - x\|$, soit $d_\Gamma(x) - d_\Gamma(\tilde{x}) \leqslant \|\tilde{x} - x\|$. De même, en échangeant le rôle de x et $\tilde{x}$, $d_\Gamma(\tilde{x}) - d_\Gamma(x) \leqslant \|x - \tilde{x}\|$ et ainsi

$$|d_\Gamma(x) - d_\Gamma(\tilde{x})| \leqslant \|x - \tilde{x}\|.$$

Lorsque $\kappa = 0$, $T = \mathbb{R}^2$ est bien ouvert. Lorsque $\kappa > 0$, T est l'image réciproque par la fonction continue d_Γ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de l'ouvert de $\mathbb{R}$:$] - \frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}[$, T est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

16.3.5. Lorsque $\kappa = 0$, φ est une fonction affine, Ω est un demi-espace et $T = \mathbb{R}^2$. Écrivons $\varphi(x_1) = ax_1 + b$ et dans ce cas, pour $x = (x_0, x_1) \in \Omega$, nous avons $d_\Gamma(x) = \dfrac{ax_1 + b - x_0}{\sqrt{1 + a^2}}$, formule que l'on peut obtenir laborieusement grâce à (I) ou simplement à l'aide d'un raisonnement géométrique. La fonction $\delta(x) = \dfrac{ax_1 + b - x_0}{\sqrt{1 + a^2}}$ prolonge d_Γ à $T = \mathbb{R}^2$, est affine et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $(\nabla\delta)(x) = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{1 + a^2}}, \dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \right)$ est bien un vecteur unitaire normal à la droite $\Gamma : x_0 = ax_1 + b$.

Lorsque $\kappa \neq 0$, prenons $x \in \mathbb{R}^2$ et lorsque $x \in \Gamma$ notons $\varepsilon(x) = 0$. Lorsque $x \notin \Gamma$, notons $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ la valeur $\varepsilon(y_1)$ (qui ne dépend pas de y_1 mais seulement de x) qui apparaît dans la relation (II) du numéro 16.3.3. Nous avons

$$x_1 = y_1 + \frac{\varepsilon(x) d_\Gamma(x) \varphi'(y_1)}{\sqrt{1 + \varphi'(y_1)^2}}$$

et alors à l'aide de (I) au même numéro :

$$x_0 = \varphi(y_1) - \frac{\varepsilon(x) d_\Gamma(x)}{\sqrt{1 + \varphi'(y_1)^2}}.$$

Ceci nous conduit à introduire sur $\mathbb{R}^2$ la fonction ψ définie par

$$\psi(y_1, \rho) = \left(\varphi(y_1) + \frac{\rho}{\sqrt{1 + \varphi'(y_1)^2}}, y_1 - \frac{\rho \varphi'(y_1)}{\sqrt{1 + \varphi'(y_1)^2}} \right)$$

qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Le jacobien de ψ au point (y_1, ρ) vaut

$$\left(\frac{\rho \varphi''(y_1)}{(1 + \varphi'(y_1)^2)^{3/2}} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'(y_1)^2}}$$

et par conséquent il est non nul sur l'ouvert $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times] - \frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}[$. Ainsi au voisinage de tout point $(y_1, \rho) \in \mathcal{O}$, l'application ψ est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme nous l'avons fait au numéro 16.3.3., grâce au théorème des accroissements finis, nous obtenons que ψ est injective sur $\mathcal{O}$ par conséquent, $\psi(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et ψ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\psi(\mathcal{O})$. Désignons par Δ l'application réciproque : Δ envoie $\psi(\mathcal{O})$ sur $\mathcal{O}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et par construction, $x = (x_0, x_1), \Delta(x_0, x_1) = (\varepsilon(x) d_\Gamma(x), y_1)$ où $(y_0, y_1) \in \Gamma$ est solution de $(\star)$. Ainsi $\delta(x_0, x_1) \equiv \varepsilon(x)\, d_\Gamma(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on obtient aisément à l'aide d'un développement limité au voisinage de Γ que $\varepsilon(x) = 1$ pour $x \in \Omega$: la fonction δ prolonge d_Γ à $T = \psi(\mathcal{O})$. Lorsque $(y_1, \rho) \in \mathcal{O}$, nous calculons les dérivées partielles $\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho}, \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}$ et $\frac{\partial \psi_2}{\partial \rho}$ en un point avec $\rho = 0$ (qui correspond donc à Γ) puis nous écrivons que $\psi(y_1, \delta(x_0, x_1)) = (x_0, x_1)$ et ensuite nous prenons $x \in \Gamma$ de sorte que $\delta(x_0, x_1) = 0$. Il vient alors qu'en (x_0, x_1) :

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_0}(x_0, x_1) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'(x_1)^2}}, \frac{\partial \delta}{\partial x_1}(x_0, x_1) = \frac{\varphi'(x_1)}{\sqrt{1 + \varphi'(x_1)^2}}$$

qui montre que $(\nabla \delta)(x)$ est un vecteur unitaire normal à Γ lorsque $x \in \Gamma$ (i.e. $\delta(x) = 0$).

Commentaires

L'objet de ce problème était d'étendre le champ de vecteur normal unitaire défini sur une courbe du plan (ici un graphe) à un voisinage de cette courbe. Rappelons qu'en géométrie différentielle, la terminologie « champ de vecteurs » sur un ensemble $\mathcal{M}$ signifie que l'on parle d'une application définie sur $\mathcal{M}$ qui prend ses valeurs dans un espace vectoriel. Lorsque l'on prend pour $\mathcal{M}$ le graphe d'une fonction régulière, il n'y a aucune difficulté à définir une application normale unitaire régulière. En effet si $\mathcal{M}$ est le graphe de la fonction $\varphi : \mathcal{M} = \{(\varphi(x_1)\,, x_1)\,, x_1 \in \mathbb{R}\}$, $\tau(x_1) \equiv (\varphi'(x_1)\,, 1)$ est un vecteur tangent qui ne s'annule jamais et $\nu(x_1) \equiv \frac{(1\,, -\varphi'(x_1))}{\sqrt{1+\varphi'(x_1)^2}}$ est une application normale unitaire régulière définie sur $\mathcal{M}$.

Pour étendre cette application au voisinage de $\mathcal{M}$, le problème 16 s'appuie sur une propriété géométrique : si on désigne par $\rho(x)$ la distance d'un point x à la courbe $\mathcal{M}$ (ρ est la fonction d_Γ introduite au numéro 16.1.2.) alors le gradient de ρ en un point $x \in \mathcal{M}$ est un vecteur normal unitaire. Afin de rendre ce raisonnement rigoureux, il faut montrer qu'au voisinage de $\mathcal{M}$ la fonction ρ est bien différentiable et qu'ensuite son gradient satisfait à la propriété voulue. C'est ce qui est fait ici et en outre le voisinage trouvé est rendu explicite grâce au nombre κ qui apparaît au numéro 16.1.3., nombre qui n'est rien d'autre que le maximum de la courbure géométrique de $\mathcal{M}$. En examinant le cas où cette courbe est un arc de cercle, on observe ainsi que le voisinage T au numéro 16.1.4. est optimal.

Ce résultat se généralise aux surfaces dans $\mathbb{R}^3$ et plus généralement aux hypersurfaces dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui sont des graphes :

$$\mathcal{M} = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \quad x_0 = \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}\,,$$

comme suit. Pour $y^\sharp = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $R(y^\sharp)$ la matrice $n \times n$:

$$R_{i,j}(y^\sharp) = \frac{(1 + |\nabla\varphi|^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y_i \partial y_j} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_k \partial y_j}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}}{(1 + |\nabla\varphi|^2)^{3/2}}(y^\sharp)\,. \tag{9}$$

Puisque $R(y^\sharp)$ est symétrique, elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Désignons par $\rho(R(y^\sharp))$ la plus grande valeur absolue des valeurs propres de $R(y^\sharp)$ et supposons que

$$\kappa = \sup_{y^\sharp \in \mathbb{R}^n} \rho(R(y^\sharp)) < \infty\,. \tag{10}$$

Avec ces notations, les résultats du problème 16 s'étendent aux hypersurfaces $\mathbb{R}^{n+1}$ sans difficulté autre que la complexité des notations. En particulier, la normale unitaire peut être étendue en une application régulière définie au voisinage de cette hypersurface.

Corrigé 17

17.3.1. Puisque $r(u) \leqslant n$ car une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ a pour rang maximum la dimension de l'espace qui vaut ici n, nous en déduisons que $r(u) = n$. Par ailleurs $r(u) \leqslant q$ et donc $q \geqslant n$. Quite à permuter les indices nous pouvons supposer que $\{\nabla\psi_1(u), ..., \nabla\psi_n(u)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et l'application $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par $\phi(v) = (\psi_1(v), ..., \psi_n(v))$ vérifie $\phi(u) = 0$. La matrice jacobienne de ϕ en u étant inversible, nous avons d'après le théorème d'inversion locale que l'équation $v \in \Omega, \phi(v) = 0$ possède au voisinage de u pour seule solution $v = u$ c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $E \cap B(u, \varepsilon_0) = \{u\}$: u est un point isolé de E.

17.3.2. Soit $\xi_1, ..., \xi_p$ avec $p + q = n$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui complète $(\nabla\psi_1(u), ..., \nabla\psi_q(u))$ en une base de $\mathbb{R}^n$. On introduit l'application Φ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$ définie par

$$\Phi_k(t, w) = \psi_k\left(u + \sum_{i=1}^{p} t_i\xi_i + \sum_{j=1}^{q} w_j\nabla\psi_j(u)\right), k = 1, ..., q\ .$$

Nous avons $\phi(0, 0) = 0$ puisque $u \in E$. D'autre part

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial w_k}(0, 0) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial\psi_j}{\partial v_l}(u)\frac{\partial\psi_k}{\partial v_l}(u),\ j, k = 1, ..., q\ .$$

Il en résulte que le déterminant de $(\frac{\partial\Phi_j}{\partial w_k}(0))_{1\leqslant j,k\leqslant q}$ est non nul. En effet si cela n'était pas le cas, on trouverait une combinaison linéaire, à coefficients non nuls α_k, des vecteurs lignes de la matrice $\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial w_k}(0, 0)\right)_{1\leqslant j,k\leqslant q}$ qui serait nulle :

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_k \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial\psi_j}{\partial v_l}(u)\frac{\partial\psi_k}{\partial v_l}(u)\right) = 0, k = 1, ...q.$$

En multipliant par α_k chacune de ces relations et en sommant le tout, nous reconnaissons l'identité

$$\sum_{l=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \frac{\partial\psi_j}{\partial v_l}(u)\right|^2 = 0$$

qui est impossible puisque les $\nabla\psi_j(u)$ sont indépendants.

La matrice jacobienne $(\frac{\partial\Phi_j}{\partial w_k}(0, 0))_{1\leqslant j,k\leqslant q}$ est inversible, nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation $\phi(t, w) = 0$ au voisinage de $(0, 0)$: $\exists\varepsilon_0 > 0$ et un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 ainsi que $w \subset \mathcal{C}^1$ tel que $E \cap B(u, \varepsilon_0) = \{(t, w(t)), t \in \mathcal{O}\}$.

17.3.3. Puisque u minimise J sur E, u minimise J sur $E \cap B(u, \varepsilon_0)$ où ε_0 a été obtenu à la question précédente et quite à permuter les indices j, on peut supposer que $\nabla\psi_1(u), ..., \nabla\psi_r(u)$, avec $r = r(u)$, sont des vecteurs indépendants. Mais $E \cap B(u, \varepsilon_0) = \phi(\mathcal{O})$ et par conséquent 0 minimise sur $\mathcal{O}$ la fonction $K : t \mapsto J(u + \phi(t, w(t))$ avec $t \in \mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}$ est un ouvert contenant 0 et que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$, $\nabla K(0) = 0$.

Si nous écrivons $w_j(t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{j,i} t_i + O(t)$, nous avons

$$\frac{\partial K}{\partial t_i}(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial v_k}(u) \left(\xi_i^k + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{j,i} \frac{\partial \psi_j}{\partial v_k}(u) \right) .$$

Pour déterminer les $\alpha_{j,i}$, nous écrivons que

$$\psi_k \left(u + \sum_{i=1}^{p} t_i \xi_i + \sum_{j=1}^{q} w_j(t) \nabla\psi_j(u) \right) = 0$$

et alors

$$\sum_k \frac{\partial \psi_r}{\partial v_k}(u) \left(\xi_i^k + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{j,i} \frac{\partial \psi_j}{\partial v_k}(u) \right) = 0, \forall i.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\alpha_{j,i} = -\sum_{r,k} N_{j,r} \xi_i^k \frac{\partial \psi_r}{\partial v_k}(u)$$

où N est la matrice inverse de la matrice de coefficient $M_{j,k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial v_l}(u) \frac{\partial \psi_k}{\partial v_l}(u)$ dont nous avons montré l'inversibilité au numéro 17.3.2.

Ainsi $\frac{\partial K}{\partial t_i}(0) = 0$ entraîne que

$$(\star) \qquad \sum_k \frac{\partial J}{\partial v_k}(u) \xi_i^k = -\sum_{r,s} \lambda_r(u) \frac{\partial \psi_r}{\partial v_s}(u) \xi_s^i ,$$

où $\lambda_r(u) = -\sum_{j,k} N_{j,r} \frac{\partial \psi_j}{\partial v_k}(u) \frac{\partial J}{\partial v_k}(u)$.

La relation $(\star)$ laisse à penser que l'on a

$$\frac{\partial J}{\partial v_k}(u) = -\sum_r \lambda_r(u) \frac{\partial \psi_r}{\partial v_k}(u), \ \forall k.$$

Étant donné que $(\nabla\psi_1(u), ..., \nabla\psi_q(u))$ complète $(\xi_1, ..., \xi_p)$ en une base de $\mathbb{R}^n$, cette dernière identité sera établie si nous prouvons que

$$\sum_k \frac{\partial J}{\partial v_k}(u) \frac{\partial \psi_j}{\partial v_k}(u) = -\sum_{r,s} \lambda_r(u) \frac{\partial \psi_r}{\partial v_k}(u) \frac{\partial \psi_j}{\partial v_s}(u), \forall j.$$

Cette dernière relation résulte immédiatement de la définition des $\lambda_r(u)$ et du fait que N est l'inverse de M.

Commentaires

Il s'agissait dans ce problème d'étudier la question des extrema liés. Les q nombres réels $(\lambda_1(u), \ldots, \lambda_q(u))$ qui apparaissent dans 17.1.3. portent le nom de multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes $\psi(u_1) = \ldots = \psi(u_n) = 0$. Par ailleurs, l'équation 17.1.3. est l'équation d'Euler associée au problème de minimisation de J sur E. Il s'agit en fait de n équations scalaires faisant intervenir les $n+q$ inconnues $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$. Étant donné qu'il faut ajouter aux n équations d'Euler, les q contraintes $\psi(u_1) = \ldots = \psi(u_n) = 0$, on arrive finalement à un système de $n+q$ équations pour $n+q$ inconnues.

Il est possible de généraliser le résultat de ce problème au cas où E est à la fois défini par des contraintes égalités et des contraintes inégalités comme suit.

Considérons à nouveau une fonction J de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On cherche maintenant un minimum de J sur un sous ensemble E de Ω de la forme :

$$E = \{v \in \Omega\,; \quad \varphi_i(v) \leqslant 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, p, \quad \psi_j(v) = 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, q\},$$

où φ_i et ψ_j sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Ce type de problème intervient naturellement en physique ou en économie par exemple.

Théorème. *Avec les notations qui précèdent, si le point u est un minimum de J sur E alors il existe $p+q+1$ nombres réels non tous nuls $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ tels que :*

$$\mu_0 \frac{\partial J}{\partial v_k}(u) + \sum_{s=1}^{q} \lambda_s(u) \frac{\partial \psi_s}{\partial v_k}(u) + \sum_{r=1}^{p} \mu_r(u) \frac{\partial \varphi_r}{\partial v_k}(u) = 0\,, \forall k = 1, \ldots, n\,,$$

$$\mu_r(u) \geqslant 0, \textit{ pour } r = 0, \ldots, p\,, \quad \textit{et } \mu_r(u)\varphi_r(u) = 0, \textit{ pour } r = 1, \ldots, p\,.$$

Concernant la démonstration de ce résultat ainsi que pour d'autres résultats similaires, nous renvoyons à l'ouvrage de J.B. Hiriart-Urruty, *L'optimisation* paru dans la collection Que sais-je ?, PUF Paris, en 1996.

Corrigé 18

18.3.1. La famille d'ensemble $C_R = \{v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \geqslant R\}$ est décroissante et puisque J est minorée sur $\mathbb{R}^n$, elle est minorée sur C_R. Ainsi $m_R = \mathrm{Min}_{v \in C_R} J(v) \in \mathbb{R}$ et $m_{R_1} \geqslant m_{R_2}$ si $R_1 \geqslant R_2$ car $C_{R_1} \subset C_{R_2}$.

18.3.2. Puisque $E \neq \phi$, on peut prendre $e \in E$ et on va prouver que $K = \{v \in E, J(v) \leqslant J(e)\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Tout d'abord E est fermé puisque les applications ψ_j sont continues. Ensuite K est fermé puisque J est continue. Puisque J est infinie à l'infini, il existe R_0 tel que $f(R_0) > J(e)$ et donc $K \subset B(0, R_0)$: K est borné. Ainsi K fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble compact. Puisque $e \in K$, il est non vide et par conséquent la fonction continue J y atteint sa borne inférieure : $\exists u \in K$ tel que $\forall v \in K,\ J(v) \geqslant J(u)$.

Montrons qu'en fait $\forall v \in E, J(v) \geqslant J(u)$. Si $v \in K$ c'est fait. Si $v \notin K$, c'est que $J(v) > J(e)$. Or $J(e) \geqslant J(u)$ car $e \in K$ et donc $J(v) \geqslant J(u)$.

18.3.3. Lorsque l'on prend $\psi_j = 0$ dans E on obtient que $E = \mathbb{R}^n$. La fonction J_m est elle aussi infinie à l'infinie car elle est minorée par J. Par conséquent la question précédente appliquée à J_m sur $\mathbb{R}^n$ montre que cette dernière atteint son minimum en un point $u_m \in \mathbb{R}^n$.

18.3.4. Nous avons $J_m(u_m) \leqslant J_m(e)$ pour $e \in E$ et puisque $J_m(e) = J(e)$ nous voyons que $J(u_m) \leqslant J(e)$. Soit alors R_0 tel que $f(R_0) > J(e)$, nous avons $\|u_m\| \leqslant R_0$. Ainsi la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée.

18.3.5. Soit u un minimum de J sur E obtenu au numéro 18.3.2. Nous avons la suite d'inégalités

$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant J(u_{m+1}) + (m+1)\textstyle\sum_{j=1}^q (\psi_j(u_{m+1}))^2 = J_{m+1}(u_{m+1}),\\ &\geqslant J(u_{m+1}) + m\textstyle\sum_{j=1}^q (\psi_j(u_{m+1}))^2 = J_m(u_{m+1}),\\ &\geqslant J(u_m) + m\textstyle\sum_{j=1}^q (\psi_j(u_m))^2 = J_m(u_m).\end{aligned}$$

Il en résulte que la suite $(J_m(u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc convergente. Si $\varphi(m)$ est une application strictement croissante et telle que $u^\star = \lim_{m\to\infty} u_{\varphi(m))}$, par continuité de J, $J(u^\star) = \lim_{m\to\infty} J(u_{\varphi(m)})$ de sorte que la suite $(J_{\varphi(m)}(u_{\varphi(m)}) - J(u_{\varphi(m)}))_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente. Mais $\lim_{m\to\infty} \varphi(m) = +\infty$ par conséquent $\psi_j(u^\star) = 0$ et donc $u^\star \in E$. Puisque $J(u_{\varphi(m)}) \leqslant J(u)$, à la limite $J(u^\star) \leqslant J(u)$ et donc $u^\star$ minimise lui aussi J sur E.

Commentaires

Comme pour le problème précédent, il s'agissait d'étudier la question des extrema liés. La technique mise en œuvre ici porte le nom de méthode de pénalisation. Elle part du principe que si $\psi_j(v) \neq 0$, alors $m(\psi_j(v))^2$ est de plus en plus grand lorsque m tend vers l'infini. Ainsi u_m minimum de la « fonction pénalisée » J_m vérifiera que $mJ_m(u_m)$ reste borné. L'avantage de J_m est que maintenant, lorsque J et les ψ_j sont différentiables, on minimise cette fonction sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que par conséquent pour trouver (ou calculer) u_m il suffit d'écrire que le gradient de cette fonction est nul en u_m. On s'est débarrassé des q multiplicateurs qui apparaissaient dans le problème précédent au numéro 17.1.3. Le prix à payer par contre est que cette fois ci on dispose d'une suite qui, dans les bons cas, converge vers la solution du problème d'extrema liés.

La condition de minimalité de u_m, c'est-à-dire l'équation d'Euler, s'écrit ici :

$$\frac{\partial J}{\partial v_k}(u_m) = -\sum_{r=1}^q 2m\psi_r(u_m)\frac{\partial \psi_r}{\partial v_k}(u_m).$$

Ce système d'équation est formellement similaire à celui du numéro 17.1.3. pourvu que l'on remplace $2m\psi_r(u_m)$ par $\lambda_r^m(u_m)$. Ceci suggère que, lorsque m tend vers l'infini, à condition que u_m converge vers une limite u, $\lambda_r(u)$ sera la limite de $2m\psi_r(u_m)$. Nous renvoyons à nouveau à l'ouvrage de J.B. HIRIART-URRUTY, *L'optimisation* paru dans la collection Que sais-je ?, en 1996, pour l'étude de la méthode de pénalisation.

Corrigé 19

19.3.1. Si u vérifie $I(u) \leqslant I(v)$, $\forall v \in E$ alors pour tout $w \in E_1$, la fonction $t \mapsto I(u+tw)$ atteint son minimum en $t = 0$. Il s'agit d'une fonction polynôme (du second degré) et sa dérivée en $t = 0$ s'annule. Mais

$$I(u+tw) = I(u) + t\left(\int_0^{2\pi} u'(x)w'(x)dx - \int_0^{2\pi} f(x)w(x)dx\right) + 0(t^2) \text{ et donc}$$

$$0 = \frac{d}{dt}I(u+tv)|_{t=0} = \int_0^{2\pi} u'(x)w'(x)dx - \int_0^{2\pi} f(x)w(x)dx$$

et $(\star)$ est bien vérifiée.

19.3.2. Si $(\star)$ a lieu, en prenant $w(x) = 1$ il vient $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

19.3.3. Prenons $w(x) = e^{-inx}$ pour $|n| \geqslant 1$.
D'après $(\star)$: $-i\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'(x)e^{-inx}dx = f_n$. En intégrant par parties il vient alors $\frac{-n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)e^{-inx}dx = f_n$.

Il en résulte que u_n, le nième coefficient de Fourier de u, vaut $u_n = -\frac{f_n}{n^2}$. Étant donné que la série de terme général $(\frac{f_n}{n^2})_{n\in\mathbb{Z}^\star}$ est absolument convergente, nous en déduisons que si u est solution de $(\star)$ alors

$$u(x) = u_0 - \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \frac{f_n}{n^2}e^{inx}.$$

Donnons alors une expression plus simple de u. La fonction S somme de la série de fonctions $(\frac{f_n}{n^2})_{n\in\mathbb{Z}^\star}$ est en fait de classe $\mathcal{C}^2$. En effet, si $S_N(x) = \sum_{0<|n|\leqslant N}\frac{f_n}{n^2}e^{inx}$, nous avons $S''_N(x) = -\sum_{0<|n|\leqslant n} f_n e^{inx}$ qui est normalement convergente puisque $\sum|f_n| < \infty$. Étant donné que $S_N(x)$ converge aussi vers $S(x)$, nous en déduisons que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $S''(x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} f_n e^{-inx} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-inx} = -f(x)$. Mais alors $S(x) = -\int_0^x(\int_0^y f(z)dz)dy + S'(0)x + S(0)$, ou encore par le théorème de Fubini,

$$S(x) = -\int_0^x (x-y)f(y)dy + S'(0)x + S(0).$$

Pour déterminer $S(0)$ et $S'(0)$ il suffit de remarquer que $S(0) = S(2\pi)$ fait que

$$S'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-y)f(y)dy = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} yf(y)dy$$

car $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)dy = 0$. Puisque

$$\int_0^{2\pi} S(x)dx = 0, \quad S(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{x}(x-y)f(y)dydx - \pi S'(0)\,,$$

les solutions de $(\star)$ sont les fonctions

$$u \ : \quad u(x) = K + \frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi} yf(y)dy + \int_0^{x}(x-y)f(y)dy$$

où K est un réel arbitraire.

19.3.5. Soit u solution de $(\star)$. Calculons

$$\begin{aligned} I(u+w) \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u'(x)^2dx + \int_0^{2\pi} u'(x)w'(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} w'(x)^2dx - \\ &\quad - \int_0^{2\pi} u(x)f(x)dx - \int_0^{2\pi} w(x)f(x)dx. \end{aligned}$$

Puisque u vérifie $(\star)$,

$$I(u+w) = I(u) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} w'(x)^2dx.$$

Par conséquent, $I(u) \leqslant I(v), \quad \forall v \in E_1$. Il s'agit des seules solutions puisque d'après le calcul qui précède si $u+w$ minimise I alors w' est nulle : w est constante.

Commentaires

Dans ce problème de calcul des variations, nous exhibons la solution du problème en résolvant explicitement l'équation d'Euler $(\star)$ du numéro 19.1.1. grâce à l'utilisation de coefficients de Fourier. Cette approche n'est pas généralisable au cas non périodique. L'outil pour résoudre l'équation d'Euler $(\star)$ du numéro 19.1.1. page 15 (ou celle du numéro 20.1.1 page 16) est le théorème de Lax-Milgram-Stampacchia qui était l'objet du problème 8. Tout cela est présenté en détail dans le livre de H. Brézis : *Analyse fonctionnelle, théorie et application* paru chez Dunod.

Corrigé 20

20.3.1. La fonction $t \mapsto I(u + tw)$, pour $w \in E_1$ arbitraire, atteint son minimum en $t = 0$. Il s'agit d'un polynôme du second degré par rapport à t et

$$\frac{dI(u+tw)}{dt}|_{t=0} = \iint_Q \nabla u.\nabla w dx - \iint_Q f w dx = 0,$$

d'où la relation $(\star)$.

Prenons alors $w = 1 \in E_1$, il vient $\iint_Q f dx = 0$.

20.3.2. Nous avons, compte tenu de $(\star)$,

$$I(u+w) - I(u) = \frac{1}{2}\iint_Q |\nabla w|^2 dx \geqslant 0$$

par conséquent $I(u) = \min_{v \in E_1} I(v)$.

20.3.3. Il est clair que si $v \in E_0$ (resp. E_1), la fonction $x \mapsto v(x+h)$ appartient à E_0 (resp E_1) et donc $D_h v \in E_0$ (resp E_1).

Calculons, pour $v \in E_1$, $\frac{d}{d\theta} v(x+\theta h) = h.\nabla v(x+\theta h)$.

Ainsi $v(x+h) - v(x) = \int_0^1 h.\nabla v(x+\theta h) d\theta$ et par conséquent $(D_h v)(x) = \int_0^1 \frac{h}{|h|}.\nabla v(x+\theta h) d\theta$, puis $|D_h v(x)|^2 \leqslant \int_0^1 \left|\frac{h}{|h|}.\nabla v(x+\theta h)\right|^2 d\theta \leqslant \int_0^1 |\nabla v(x+\theta h)|^2 d\theta$.

Il en résulte alors que

$$\iint_Q |D_h v(x)|^2 dx \leqslant \iint_Q \left(\int_0^1 |\nabla v(x+\theta h)|^2 d\theta\right) dx =$$
$$= \text{(d'après le théorème de Fubini)} = \int_0^1 \left(\iint_Q |\nabla v(x+\theta h)|^2 dx\right) d\theta.$$

Mais $\iint_Q |\nabla v(x+\theta h)|^2 dx = \int\int_{Q+\theta h} |\nabla v(x)|^2 dx = \iint_Q |\nabla v(x)|^2 dx$, cette dernière égalité provenant du fait que la fonction intégrée est Q-périodique.

Ainsi, finalement, $\iint_Q |D_h v(x)|^2 dx \leqslant \iint_Q |\nabla v(x)|^2 dx$.

20.3.4. Prenons $w \in D_{-h} D_h u$ dans $(\star)$. Il vient

$$\iint_Q \nabla u \nabla (D_{-h} D_h u) dx = \iint_Q f(x) D_{-h} D_h u dx.$$

Nous observons alors que $\nabla D_{-h} D_h u = D_{-h} \nabla D_h u$, puis que si g_1 et g_2 sont dans E_0,

$$\iint_Q g_1 (D_{-h} g_2) dx = \iint_Q (D_h g_1) g_2 dx$$

(ceci s'obtient en faisant le changement de variable $x = x' + h$, et en remarquant que $\iint_{Q+h}(D_h g_1)g_2 dx = \iint_Q (D_h g_1)g_2 dx$ car la fonction intégrée est périodique).

Ainsi finalement,

$$\iint_Q |\nabla D_h u|^2 dx = \iint_Q f(x) D_{-h} D_h u dx.$$

le second membre se majore alors à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la question précédente avec $v = D_h u$

$$\begin{aligned}\iint_Q f(x) D_{-h} D_h u dx &\leqslant \left(\iint_Q f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\iint_Q \left(D_{-h}D_h u\right)^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\iint_Q f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\int\int_Q |\nabla D_h u|^2 dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\iint_Q |\nabla D_h u|^2 dx \leqslant \left(\iint_Q f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\iint_Q |\nabla D_h u|^2 dx\right)^{1/2}$$

et donc $\iint_Q |\nabla D_h u|^2 dx \leqslant \int\int_Q f^2(x)dx$.

20.3.5. Calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}(D_h u)_k &= \iint_Q \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|} e^{-ik.x} dx \\ &= \frac{e^{ik.h}-1}{|h|} \iint_Q u(x) e^{-ik.x} dx \\ &= \frac{e^{ik.h}-1}{|h|} u_k.\end{aligned}$$

Par conséquent $(\nabla D_h u)_k = ik\frac{e^{ik.h}-1}{|h|}u_k$ et par l'identité de Bessel :

$$\iint_Q |\nabla D_h u|^2 dx = 4\pi^2 \sum_k \frac{|k|^2}{|h|^2} |e^{ik.h}-1||u_k|^2.$$

Mais $|e^{ik.h}-1| = 4\sin^2\frac{k.h}{2}$ et donc

$$\iint_Q |\nabla D_h u|^2 dx = 4\pi^2 \sum_{k\neq 0} 4\frac{\sin^2\dfrac{k.h}{2}}{|k|^2|h|^2}|k|^4|u_k|^2.$$

Il en résulte alors par l'inégalité de la question précédente que pout tout $K \in \mathbb{N}$,

$$4\pi^2 \sum_{0<|k|\leqslant K} \frac{4\sin^2 \dfrac{k.h}{2}}{|k|^2|h|^2}|k|^4|u_k|^2 \leqslant \iint_Q f^2(x)dx.$$

Prenons $h = (\varepsilon, 0)$ et faisons tendre ε vers zéro, il vient

$$4\pi^2 \sum_{0<|k|\leqslant K} \frac{k_1^2}{k_1^2+k_2^2}|k|^4|u_k|^2 \leqslant \iint_Q f^2(x)dx.$$

De manière similaire, en prenant $h = (0, \varepsilon)$ puis en sommant nous déduisons que

$$4\pi^2 \sum_{0<|k|\leqslant K} |k|^4|u_k|^2 \leqslant \int\int_Q f^2(x)dx$$

et par conséquent la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^4|u_k|^2$ est convergente.

Commentaires

L'objet de ce problème est de montrer dans une situation particulière, que le simple fait d'être solution d'un problème du calcul des variations
i.e.

$$u \in E_1 \text{ vérifie } I(u) = \min_{v\in E_1} I(v)$$

est suffisant pour impliquer un résultat de régularité plus fort que $u \in E_1$. En l'occurrence ici $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(k_1^2+k_2^2)^2|u_k|^2 < \infty$.

Ce problème (régularité des solutions de problèmes du calcul des variations) est en général délicat et demande la mise en œuvre de techniques d'analyse très fine. Il y a dans le domaine des résultats positifs et des résultats négatifs (*i.e.* singularité des solutions). Le lecteur intéressé pourra se reporter aux deux ouvrages suivants. Le premier est un panorama assez complet, il est dû à M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems,* paru chez Princeton University Press. Le second est explicitement plus proche de la géométrie différentielle : F. Hélein, *Applications harmoniques, lois de conservation et repères mobiles*, paru chez Diderot.

Corrigé 21

21.3.1. Observons que $\mathcal{E}$ est convexe et plus précisément pour $\theta \in [0,1]$ et $(u,v) \in E^2$,

$$\mathcal{E}(\theta u + (1-\theta)v) + \frac{\theta(1-\theta)}{2}\int_0^1 (u'-v')^2 dx \leqslant \theta\mathcal{E}(u) + (1-\theta)\mathcal{E}(v) \qquad (1)$$

car la différence entre le membre de gauche et celui de droite vaut

$$\int_0^1 (f(\theta u + (1-\theta))v) - \theta f(u) - (1-\theta)f(v))dx,$$

intégrale d'une fonction négative lorsque f est convexe.

Si u_1 et u_2 sont tels que $\mathcal{E}(u_1) \leqslant \mathcal{E}(v)$ et $\mathcal{E}(u_2) \leqslant \mathcal{E}(v)$ pour tout $v \in E$ alors par (1) avec $u = u_1$, $v = u_2$ et $\theta = 1/2$,

$$\mathcal{E}\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) + \frac{1}{4}\int_0^1 (u_1' - u_2')^2 dx \leqslant \mathcal{E}(u_1) = \mathcal{E}(u_2) \leqslant \mathcal{E}\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)$$

et donc $\int_0^1 (u_1' - u_2')^2 dx = 0$. Par conséquent

$$u_1 - u_2 = u_1(0) - u_2(0) = 0 \text{ i.e. } u_1 = u_2.$$

21.3.2. Soit $w \in E$, nous avons $\mathcal{E}(u + tw) \geqslant \mathcal{E}(u)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent $t = 0$ est le point de $\mathbb{R}$ où $t \mapsto \mathcal{E}(u + tw)$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation des intégrales par rapport à un paramètre, nous avons

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 f(u+tw)dx = \int_0^1 f'(u+tw)w dx$$

et par conséquent

$$0 = \frac{d\mathcal{E}(u+tw)}{dt}|_{t=0} = \int_0^1 u'w'dx + \int_0^1 f'(u)w dx.$$

Puisque $u \in \mathcal{C}^2([0,1];\mathbb{R})$ et $u(0) = u(1) = 0$,

$$\int_0^1 u'w'dx = -\int_0^1 u''(x)w(x)dx$$

et par conséquent

$$\forall w \in E, \quad \int_0^1 (f'(u) - u'')w dx = 0.$$

Procédant alors comme à la question 1.3.3. du problème 1, nous obtenons que

$$-u'' + f'(u) = 0.$$

21.3.3. Nous avons d'après ce qui précède

$$\forall w \in E, \quad \int_0^1 u'(x)w'(x)dx = -\int_0^1 g(x)w(x)dx \tag{2}$$

où la fonction *continue* g est donnée par $g(x) = f'(u(x))$.

Considérons alors $x_0 \in\,]0,1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que $[x_0, x_0+\varepsilon] \subset]0,1[$ pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Désignons par H_ε la fonction valant 0 pour $x \leqslant x_0$, $1 - \frac{\varepsilon+x_0-x}{\varepsilon}$ pour $x \in [x_0, x_0+\varepsilon]$ et 1 pour $x \geqslant x_0+\varepsilon$. Cette fonction est continue et affine par morceaux mais pas de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $w_\varepsilon(x) = H_\varepsilon(x) - x$ est continue et vérifie $w_\varepsilon(0) = w_2(1) = 0$ et $w'_\varepsilon(x) = -1$ pour $0 \leqslant x < x_0$, $w'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ pour $x_0 < x < x_0+\varepsilon$, $w'_\varepsilon(x) = -1$ pour $x > x_0$.

Admettons momentanément que (2) est valable avec w_ε. Un simple calcul montre alors que

$$-\int_0^1 u'(x)dx + \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{u'(x)}{\varepsilon}dx = \\ = \int_0^1 xg(x)dx - \int_{x_0+\varepsilon}^1 g(x)dx - \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{g(x)(x-x_0)}{\varepsilon}dx. \quad (3)$$

Il en résulte que

$$\frac{u(x_0+\varepsilon) - u(x_0)}{\varepsilon} = \int_0^1 (u'(x) + xg(x))dx - \int_{x_0+\varepsilon}^1 g(x)dx - \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{g(x)(x-x_0)}{\varepsilon}dx.$$

Faisons alors tendre ε vers zéro, il vient

$$u'(x_0) = \int_0^1 (u'(x) - xg(x))dx + \int_{x_0}^1 g(x)dx$$

et puisque g est continue, u est de classe $\mathcal{C}^2$.

Il reste à prouver que bien que w_ε ne soit pas $\mathcal{C}^1$, (2) est valable avec $w = w_\varepsilon$. Pour cela, à ε fixé, on régularise H_ε au voisinage de x_0 et $x_0+\varepsilon$ afin de la rendre de classe $\mathcal{C}^1$. On prend par exemple au voisinage du point anguleux x_0, un polynôme du $3^{ème}$degré sur $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ (δ petit) tel que $P(x_0-\delta) = P'(x_0-\delta) = 0$ et $P(x_0+\delta) = \frac{\delta}{\varepsilon}$ et $P'(x_0+\delta) = \frac{1}{\varepsilon}$. La fonction régularisée $H_{\varepsilon,\delta}$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et (2) est valable avec $w_{\varepsilon,\delta}(x) = H_{\varepsilon,\delta}(x) - x$. Lorsque l'on fait tendre δ vers zéro on obtient alors (3) à la limite.

Commentaires

Faisons l'hypothèse qu'il existe C tel que $f(\xi) \geqslant -C$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Soit alors (v_n) une suite d'éléments de E telle que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(v_n) = \inf_{v\in E} \mathcal{E}(v).$$

Nous avons $\forall v \in E, \mathcal{E}(v) \geqslant \int_0^1 f(v)dx \geqslant -\int_0^1 Cdx = -C$ et par conséquent $\inf_{v\in E} \mathcal{E}(v) \geqslant -C$ et ainsi la suite $\mathcal{E}(v_n)$ est bornée : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 v'_n(x)^2dx + \int_0^1 f(v_n(x))dx \leqslant M.$$

Puisque $-\int_0^1 f(v_n(x))dx \leqslant C$, nous avons aussi

$$\int_0^1 v_n'(x)^2 dx \leqslant M_1 \equiv M + C < \infty. \tag{4}$$

Il en résulte que (v_n) forme une suite de fonctions équicontinues sur $[0, 1]$. En effet,

$$|v_n(x) - v_n(y)|^2 \leqslant \left| \int_x^y |v_n'(t)|\, dt \right|^2 \leqslant \left| \int_x^y dt \right| \left| \int_x^y |v_n'(t)|^2\, dt \right|$$

d'où

$$|v_n(x) - v_n(y)| \leqslant \sqrt{M_1}|x - y|^{1/2}.$$

Par le théorème d'Ascoli (voir le Lemme à la page 138), il est possible d'extraire de (v_n) une sous-suite $(v_{\varphi(n)})$ qui converge uniformément vers $v \in E$.

Nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(v_{\varphi_{(n)}}(x))dx = \int_0^1 f(v(x))dx.$$

En faisant appel à la théorie de l'intégrale de Lebesgue, il est alors possible de montrer que (4) entraîne l'existence d'une fonction mesurable w telle que w' soit de carré intégrable et pour toute fonction h de carré intégrable sur $[0, 1]$ on ait

$$\int_0^1 w'(x)h(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 v'_{\varphi_1(n)}(x)h(x)dx, \tag{5}$$

où $(v_{\varphi_1(n)})$ est une suite extraite de $(v_{\varphi(n)})$. Il est alors aisé de vérifier que $w = v$.

Écrivons alors que

$$\int_0^1 v'_{\varphi_1(n)}(x)^2 dx - \int_0^1 v'(x)^2 - 2\int_0^1 (v'_{\varphi,(n)}(x) - v(x))v(x)dx =$$

$$= \int_0^1 (v'_{\varphi_1(n)}(x) - v'(x))^2 dx \geqslant 0. \tag{6}$$

Étant donné que $\mathcal{E}(v_{\varphi_1(n)})$ possède une limite, ainsi que $\int_0^1 f(v_{\varphi_1(n)}(x))dx$, nous obtenons que $\int_0^1 v'_{\varphi_1(n)}(x)^2 dx$ a une limite et par (6) (en utilisant (5)), il vient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 v'_{\varphi_1(n)}(x)^2 dx \geqslant \int_0^1 v'(x)^2 dx.$$

Mais alors

$$\mathcal{E}(v) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(v_{\varphi_1(n)}) = \inf_E \mathcal{E}.$$

Procédant comme au 16.3.3., on monte qu'en fait $v \in E$, ce qui prouve l'existence d'une solution de $(\star)$.

Corrigé 22

22.3.1. Considérons deux fonctions f et g 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$. Nous avons alors l'identité de Parseval.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\overline{g}_n,$$

$$\text{où } f_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \text{ et } g_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt.$$

Appliquons cette identité lorsque $f(t) = x(\frac{tL}{2\pi})$ et $g(t) = \frac{dy}{dt}(\frac{tL}{2\pi})$. De simples calculs montrent que $f_n = x_n$ et $g_n = i\frac{2n\pi}{L}y_n$ et ainsi

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\left(\frac{tL}{2\pi}\right)\frac{dy}{dt}\left(\frac{tL}{2\pi}\right)dt = -\frac{2i\pi}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} nx_n\overline{y}_n.$$

Finalement après changement de variable, nous trouvons

$$A = -2i\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} nx_n\overline{y}_n.$$

22.3.2. Nous avons

$$L = \int_0^L \left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}ds$$

puisque $(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = 1$. Là encore en faisant usage de l'identité de Parseval, nous avons

$$\frac{1}{L}\int_0^L \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{4\pi^2n^2}{L^2}|x_n|^2,$$

et

$$\frac{1}{L}\int_0^L \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{4\pi^2n^2}{L^2}|y_n|^2.$$

Ainsi $L = \int_0^L((\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2)ds = \frac{4\pi^2}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ et donc finalement

$$L^2 = 4\pi^2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|x_n|^2 + |y_n|^2).$$

Puisque les fonctions x et y sont à valeurs réelles, nous avons $\overline{x}_n = x_{-n}$ et $\overline{y}_n = -y_n$ et ainsi en posant $x_n = a_n + ib_n$ et $y_n = c_n + id_n$, où cette fois-ci a_n, b_n, c_n et d_n sont réels, nous avons

$$A = 4\pi\sum_{n=1}^{\infty} n(a_nd_n - b_nc_n)$$

et

$$L^2 = 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

Formons alors $L^2 - 4\pi A$:

$$L^2 - 4\pi A = 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left((na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2)\right). \qquad (*)$$

Il s'agit clairement d'une quantité positive et donc $L^2 - 4\pi A \geqslant 0$.

22.3.3. Dans le cas où $4\pi A = L^2$, la relation ($\star$) montre que pour $|n| \geqslant 2, a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ et pour $n^2 = 1, d_n = na_n$ et $c_n = -nb_n$. Ainsi

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t,$$

$$y(t) = \frac{1}{2}b_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t,$$

avec $t = 2\pi s/L$.

Il s'agit de la représentation paramétrique d'un cercle. Réciproquement tout cercle peut être paramétré de la sorte et par conséquent il y a égalité si et seulement si la courbe considérée est un cercle.

Commentaires

Ce problème propose la preuve due à A. Hurwitz en 1902 de l'inégalité isopérimétrique pour une courbe fermée de périmètre L et d'aire A : $L^2 \geqslant 4\pi A$. La preuve montre que *seuls* les cercles satisfont l'égalité. Cette démonstration très élégante n'est pas généralisable au problème classique du calcul des variations qui consiste à chercher à minimiser une fonctionnelle du type $\int_a^b F(x, u(x), u'(x))\, dx$ sous une contrainte du type $\int_a^b G(x, u(x), u'(x))\, dx = c$, ($c$ donné) où l'inconnue est la fonction $x \mapsto u(x)$. Le problème isopérimétrique qui précède est de ce type, il suffit pour cela de considérer que la courbe est paramétrée par x sur l'intervalle $[a, b]$ et alors $F = \sqrt{1 + u'^2(x)}$ et $G = u$.

Dans le cas général où l'on étudie le problème : trouver u qui minimise $\int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx$ sous la contrainte $\int_a^b G(x, u(x), u'(x))dx = c$ (donné), on montre que si la condition de dégénérescence

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial p}(x, u(x), u'(x))\right) = \frac{\partial G}{\partial u}(x, u(x), u'(x))$$

n'a pas lieu pour la fonction u cherchée alors il existe une constante réelle λ telle que

$$(E) \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial(F + \lambda G)}{\partial p}((x, u(x), u'(x)) = \frac{\partial(F + \lambda G)}{\partial u}(x, u(x), u'(x)).$$

Dans ce qui précède les arguments des fonctions F et G ont été notés (x, u, p).

Dans le cas $F = \sqrt{1+p^2}, G = u$ (qui est le cas qui nous a intéressé dans ce problème) nous avons $\frac{d}{dx}(\frac{\partial G}{\partial p}) \equiv 0$ et $\frac{\partial G}{\partial p} \equiv 1$ de sorte que la condition de dégénérescence ne peut pas avoir lieu et l'équation (E) (appelée classiquement équation d'Euler) s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'^2(x)}} = \lambda.$$

D'où $(x, u(x))$ décrit un arc de cercle. Cette méthode de démonstration ne peut fournir que des candidats potentiels (condition nécessaire). Il faut ensuite au cas par cas examiner si effectivement la solution trouvée minimise $\int_a^b F dx$ sous la contrainte $\int_a^b G dx = c$. Lorsqu'il n'y a pas de contrainte, il suffit de prendre $G \equiv 0$ et $c = 0$ et alors (E) est remplacée par

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial p}(x, u(x), u'(x)) = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u(x), u'(x))$$

qui est l'équation d'Euler sans contrainte. Nous renvoyons au problème 23 à la page 18 pour une situation où cette équation d'Euler est utilisée.

À titre d'illustration supplémentaire de la relation (E), considérons le problème consistant à chercher la forme que prend un cable inextensible lorsqu'il est suspendu à ses extrémités. Dans ce cas $F = u\sqrt{1+u'^2}$ et $G = \sqrt{1+u'^2}$. On trouve que $u(x) = \alpha + \beta ch(\frac{x}{\beta} + b)$: il s'agit d'une chaînette. C'est la forme que prend (en première approximation) un fil électrique entre deux pylônes consécutifs (d'où le nom caténaire du latin *catena*, chaîne).

Nous avons aussi traité au problème 1 (de manière directe) un problème du calcul des variations où $F = u^2$ et $G = p^2$, voir les commentaires à ce problème à la page 61. On pourra consulter sur ces questions (calcul des variations et équations d'Euler) le volume 1 de l'ouvrage de R. Courant et Hilbert : *Methods of mathematical physics* paru chez Wiley.

Corrigé 23

23.3.1. La longueur approximative de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de l'abscise x est $ds = \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$. La rotation de ce segment élémentaire à la distance $y(x)$ autour de l'axe engendre donc la surface $dA = 2\pi y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$ et par conséquent l'aire de la surface recherchée est

$$\int_{x_0}^{x_1} dA \text{ soit } 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx.$$

23.3.2. Il s'agit de minimiser la fonction $\mathcal{L}(y) \equiv \int_{x_0}^{x_1} L(y(x), y'(x))\,dx$ avec $L(y, p) \equiv y\sqrt{1+p^2}$, fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, pour toutes les fonctions y qui vérifient $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$.

Donnons nous une fonction z de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_0, x_1]$ et vérifiant $z(x_0) = 0$ et $z(x_1) = 0$. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, la fonction $y + \varepsilon z$ vérifie $(y + \varepsilon z)(x_0) = y_0$ et $(y + \varepsilon z)(x_1) = y_1$ de sorte que si y minimise $\mathcal{L}(y)$ sur $\mathcal{C}$ alors $\mathcal{L}(y + \varepsilon z) \geqslant \mathcal{L}(y)$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$: $\varepsilon = 0$ est le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\varepsilon \mapsto \mathcal{L}(y + \varepsilon z)$.

Compte tenu du fait que la fonction L est $\mathcal{C}^\infty$, le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale nous assure que la fonction $\varepsilon \mapsto \int_{x_0}^{x_1} L(y(x)+\varepsilon z(x)\,, y'(x)+\varepsilon z'(x))\,dx$ est $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ et puisque cette fonction atteint son minimum en $\varepsilon = 0$, sa dérivée en ce point est nulle.

Calculons

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} L(y + \varepsilon z, y' + \varepsilon z')(x)\,dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(y + \varepsilon z, y' + \varepsilon z')z + \frac{\partial L}{\partial p}(y, \varepsilon z, y' + \varepsilon z')z'\right)(x)\,dx\,.$$

Ainsi pour tout z avec $z(x_0) = 0$ et $z(x_1) = 0$,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[z(x)\frac{\partial L}{\partial y}(y(x), y'(x)) + z'(x)\frac{\partial L}{\partial p}(y(x), y'(x))\right]\,dx = 0\,.$$

Mais par intégration par parties (utiliser que $z(x_0) = 0$ et $z(x_1) = 0$),

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y}(y(x), y'(x))z(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial p}(y(x), y'(x))\right] z(x)\,dx$$

de sorte que pour tout z avec $z(x_0) = 0, z(x_1) = 0$,

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta(x)z(x)\,dx = 0\,,$$

où

$$\delta(x) \equiv \frac{\partial L}{\partial y}(y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial p}(y(x), y'(x)).$$

S'il existe $\zeta \in \,]x_0, x_1[$ tel que $\delta(\zeta) \neq 0$, par continuité, $\exists \alpha > 0$ tel que $]\zeta - \alpha, \zeta + \alpha[\subset]x_0, x_1[$ et $|\delta(x)| \geqslant \frac{|\delta(\zeta)|}{2} > 0$ pour $x \in \,]\zeta - \alpha, \zeta + \alpha[$.

Prenons alors $z = 0$ pour $x \notin \,]\zeta - \alpha, \zeta + \alpha[$ et $z(x) = \exp\frac{1}{(x-\zeta)^2-\alpha^2}$ sinon. La fonction z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$0 = \left|\int_{x_0}^{x_1} \delta(x)z(x)\,dx\right| = \left|\int_{\zeta-\alpha}^{\zeta+\alpha} \delta(x)z(x)\,dx\right| \geqslant \alpha \mid \delta(\zeta) \mid \int_{\zeta-x}^{\zeta+\alpha} z(x)\,dx\,,$$

ce qui devrait entraîner que z est nulle en $x = \zeta$: absurde. Nous en déduisons que δ est nulle sur $[x_0, x_1]$. C'est-à-dire que y vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial p}(y(x), y'(x)) = \frac{\partial L}{\partial y}(y(x), y'(x)). \qquad (E)$$

Dans le cas présent nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{yp}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{1+p^2}$$

de sorte que (E) s'écrit

$$\frac{d}{dx}\frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = \sqrt{1+y'(x)^2}.$$

Lorsque l'on développe cette équation, il vient $yy'' = 1 + y'^2$ que l'on peut aussi écrire $\frac{2y'y''}{1+y'^2} = \frac{2y'}{y}$ c'est-à-dire $\frac{d}{dx}Log(1 + y'^2) = \frac{d}{dx}Log\ y^2$.

Ainsi $y(x) = \alpha\sqrt{1 + y'^2(x)}$ qui s'intègre immédiatement pour donner $y(x) = \alpha\ ch\frac{x-\beta}{\alpha}$. Les constantes α et β s'obtiennent alors en écrivant le système

$$\alpha\ ch\frac{x_0 - \beta}{\alpha} = y_0 \text{ et } \alpha\ ch\frac{x_1 - \beta}{\alpha} = y_1. \qquad (*)$$

La courbe recherchée est une chaînette.

Commentaires

Pour commencer, revenons à l'équation d'Euler (E) que vérifie la fonction $x \mapsto y(x)$. Nous avons le résultat général suivant qui permet d'intégrer cette équation différentielle non linéaire du premier ordre par quadrature.

Proposition. *Une fonction deux fois dérivable, y, est solution de (E), ci-dessus, dans un intervalle si et seulement si la fonction* $x \mapsto y'(x)\frac{\partial L}{\partial p}(y(x), y'(x)) - L(y(x), y'(x))$ *est constante.*

La preuve de ce résultat est immédiate une fois que l'on observe que :

$$\frac{d}{dx}\left[y'(x)\frac{\partial L}{\partial p}(y(x), y'(x)) - L(y(x), y'(x))\right] =$$
$$= y'(x)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial p}(y(x), y'(x)) - \frac{\partial L}{\partial y}(y(x), y'(x))\right).$$

Ainsi lorsque y est solution de (E) nous savons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$y'(x)\frac{\partial L}{\partial p}(y(x), y'(x)) - L(y(x), y'(x)) = c\,. \qquad (*)$$

C'est-à-dire que y vérifie une équation différentielle implicite du premier ordre :

$$p\frac{\partial L}{\partial p}(y, p) - L(y, p) = c\,.$$

Désignons alors par $p = \varphi(y, c)$ une (des) branche(s) de solution(s) de cette équation, nous obtenons les solutions de (E) par quadrature :

$$x = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\xi}{\varphi(\xi, c)}\,.$$

Si nous revenons au cas étudié dans ce problème, $L(y, p) = y\sqrt{1 + p^2}$, l'équation (*) s'écrit $\frac{y(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = -c$ dont les solutions sont bien celle trouvées au numéro 23.3.2.

Notons que nous avons raisonné par condition nécessaire : si une courbe donnée par le graphe de la fonction $x \mapsto y(x)$ est telle que sa révolution autour de l'axe des x dans $\mathbb{R}^3$ conduise à une surface minimale, alors il s'agit d'une chaînette. Par contre cela ne montre pas que le problème d'existence d'un minimum possède une solution comme nous l'avons expliqué dans une situation similaire au numéro 1.3.2. page 58. Cela provient du manque de compacité des ensembles fermés et bornés dans les espaces de dimension infinie, voir à ce propos le numéro 1.3.6. page 61. Dans le cas présent, pour effectivement construire la chaînette $y(x) = \alpha\ ch\frac{x-\beta}{\alpha}$, il faut trouver α et β solutions de l'équation (*) à la page 124. On vérifie que cela n'est possible que si $y_1 \geqslant y_0\, ch(\frac{x_1 - x_0}{y_0})$. Ainsi lorsque cette condition n'est pas vérifiée, le problème de minimisation considéré ne possède pas de solution.

Par ailleurs, pour déterminer ces solutions, nous avons utilisé que leur caractère minimal entraînait que la dérivée de la fonction $\varepsilon \mapsto \mathcal{L}(y + \varepsilon z)$ en $\varepsilon = 0$ était nulle. Lorsque cette fonction est deux fois dérivable (ce qui est le cas ici car $L(\cdot\,,\cdot)$ est $\mathcal{C}^\infty$), nous savons que la dérivée seconde de la fonction $\varepsilon \mapsto \mathcal{L}(y + \varepsilon z)$ en $\varepsilon = 0$ est positive. En procédant comme pour la dérivée première, pour tout z avec $z(x_0) = 0$ et $z(x_1) = 0$, nous obtenons que cette dérivée seconde vaut :

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[z^2\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(y, y') + 2zz'\frac{\partial^2 L}{\partial p \partial y}(y, y') + z'^2\frac{\partial^2 L}{\partial p^2}(y, y')\right](x)\, dx = 0\,. \qquad (**)$$

Donnons nous alors un point arbitraire $\xi \in]x_0\,, x_1[$ et pour $\delta > 0$ assez petit, choisissons la fonction z nulle en dehors de $]\xi - \delta\,, \xi + \delta[$ et valant $\sqrt{\delta}(1 - \frac{|x-\delta|}{\delta})$ dans cet intervalle. Étant donné que

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} z(x)^2\, dx = \delta^2\,, \quad \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} z'(x)z(x)\, dx = \delta\,, \quad \text{et} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} z'(x)^2\, dx = 2\,,$$

on montre aisément, en passant à la limite $\delta \to 0$, que la condition (**) entraîne que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial p^2}(y(x), y'(x)) \geqslant 0\,.$$

Cette condition porte le nom de condition de Legendre dans le contexte du calcul des variations. Dans le cas présent, $L(y,p) = y\sqrt{1+p^2}$ et alors $\frac{\partial^2 L}{\partial p^2} = \frac{y}{(1+p^2)^{3/2}}$ de sorte que la condition de Legendre est vérifiée pour toute fonction y à valeurs positives ou nulles.

Corrigé 24

24.3.1. Soit $DF(u)$ la différentielle de l'application F au point u. Puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$: $u \mapsto DF(u)$ est continue. Nous avons, par définition de la différentielle,

$$F(u+h) = F(u) + DF(u).h + \circ(||h||),$$

quels que soient u et h dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi

$$\frac{F(u+\varepsilon v) - F(v)}{\varepsilon} = DF(u).v + \circ(1),$$

par conséquent pour tous u et $v \in \mathbb{R}^n$, la limite $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(u+\varepsilon v)-F(v)}{\varepsilon}$ existe et vaut $DF(u).v$. Soit alors $F'(u)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ ayant pour composantes $(DF(u).e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $e_i = (0, ..., 0, 1, 0..., 0)$ est le ième vecteur de la base canonique. Nous avons la relation (1) c'est-à-dire que

$$F'(u) = \sum_{i=1}^{n} (DF(u).e_i)e_i\,.$$

L'application $u \mapsto F'(u)$ est alors continue puisque l'application $u \mapsto DF(u)$ l'est.

Par ailleurs, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto F(u + t(v-u))$, pour u et v fixés dans $\mathbb{R}^n$, est de classe $\mathcal{C}^1$ et par la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{d}{dt}F(u+t(v-u)) = (F'(u+t(v-u)), v-u).$$

Ainsi par intégration par rapport à t entre 0 et 1 il vient :

$$F(v) - F(u) = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(u+t(v-u))dt = \int_0^1 (F'(u+t(v-u), v-u)dt,$$

qui est la formule (2).

24.3.2. Commençons par calculer $F'(u)$. Nous avons :

$$F(u+\varepsilon v) = F(u) + \frac{\varepsilon}{2}(Au, v) + \frac{\varepsilon}{2}(u, Av) + \frac{\varepsilon^2}{2}(Av, v) - \varepsilon(b, v).$$

Par conséquent

$$(F'(u), v) = \frac{1}{2}(Au, v) + \frac{1}{2}(u, Av) - (b, v)$$

ou encore $(F'(u), v) = ((\frac{A+^tA}{2})u - b, v)$, ou ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A. Nous avons donc (la relation précédente ayant lieu quels que soient u et v dans $\mathbb{R}^n$) : $F'(u) = (\frac{A+^tA}{2})u - b$. La relation (4) a donc toujours lieu avec $M = ||\frac{A+^tA}{2}||$. Désignons par S la matrice symétrique $\frac{A+^tA}{2}$ et soient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses n valeurs propres (forcément réelles). Si $\lambda_1 \leqslant 0$ alors pour w_1 tel que $||w_1|| = 1$ et $Sw_1 = \lambda_1 w_1$ nous aurons $(F'(w_1) - F'(0), w_1) = (Sw_1, w_1) = \lambda_1$. Si (3) avait lieu, on aurait $0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \alpha$ ce qui est absurde donc pour que (3) ait lieu, il est nécessaire que $\lambda_1 > 0$.

Supposons donc que $\lambda_1 > 0$, puisque la matrice S est symétrique, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour S : $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $Sw_i = \lambda_i w_i$. Nous aurons alors, en calculant le produit scalaire
$(F'(u) - F'(v), u - v)$ dans cette base :

$$\begin{aligned}(F'(u) - F'(v), u - v) &= \sum_{i=1}^{n}(F'(u) - F'(v), w_i)(u - v, w_i)\,,\\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u - v, w_i)^2\,,\\ &\geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n}(u - v, w_i)^2\,,\\ &= \lambda_1 ||u - v||^2\end{aligned}$$

et donc (3) a lieu avec $\alpha = \lambda_1$.

La condition cherchée est donc $\lambda_1 > 0$. Elle est équivalente au fait que la matrice S $(= \frac{A+^tA}{2})$ soit définie positive (le vérifier). Mais $(Sv, v) = (Av, v)$ et donc la condition nécessaire et suffisante recherchée est tout simplement :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad v \neq 0 \Rightarrow (Av, v) > 0.$$

24.3.3. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée vaut (avec $w(\theta) = \theta v + (1 - \theta)u$)

$$\varphi'(\theta) = (F'(w(\theta)), v - u) - \alpha\theta||v - u||^2 + F(u) - F(v).$$

Pour $\tau > 0$ nous avons alors (on remarque que $v - u = \frac{w(\theta+\tau)-w(\theta)}{\tau}$) :

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta+\tau) - \varphi'(\theta) &= (F'(w(\theta+\tau)) - F'(w(\theta)), v-u)) - \alpha\tau||v-u||^2\\ &= \frac{1}{\tau}(F'(w(\theta+\tau) - F'(\theta), w(\theta+\tau) - w(\theta))\\ &\qquad\qquad\qquad - \alpha\tau\left|\left|\frac{w(\theta+\tau)-w(\theta)}{\tau}\right|\right|^2\\ &\geqslant \text{ (en utilisant (3))}\\ &\geqslant \frac{\alpha||w(\theta+\tau)-w(\theta)||^2}{\tau} - \alpha\tau\left|\left|\frac{w(\theta+\tau)-w(\theta)}{\tau}\right|\right|^2 = 0.\end{aligned}$$

Ainsi la fonction φ' est croissante et alors φ est une fonction convexe sur $[0,1]$. Puisque $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 0$ et qu'une fonction convexe est toujours sous sa corde, pour tout $\theta \in [0,1]$, $\varphi(\theta) \leqslant 0$; ce qui est exactement (6).

24.3.4. Toujours avec $w(t) \equiv tv + (1-t)u$, nous avons grâce à (3) et pour tout $t > 0$,

$$(F'(w(t)) - F'(u), v-u) = \frac{1}{t}(F'(w(t)) - F(u), w(t) - u),$$

$$(F'(w(t)) - F'(u), v-u) \geqslant \alpha t||v-u||^2.$$

Mais cette dernière inégalité est vraie pour $t = 0$ et il est donc possible de l'intégrer par rapport à $t \in [0,1]$. Compte tenu de (2), il vient alors

$$F(v) - F(u) - (F'(u), v-u) \geqslant \alpha||v-u||^2 \int_0^1 t dt$$

qui produit (7).

24.3.5. Supposons que u et v soient solutions de (8) :
$F(u) = F(v) = \min_{\xi\in U} F(\xi)$. Puisque U est convexe $w = \frac{u+v}{2}$ appartient à U et donc par (6) avec $\theta = \frac{1}{2}$, il vient

$$F\left(\frac{u+v}{2}\right) + \frac{\alpha}{8}||v-u||^2 \leqslant \min_{\xi\in U} F(\xi).$$

Mais $\frac{u+v}{2} \in U \Rightarrow F(\frac{u+v}{2}) \geqslant \min_{\xi\in U} F(\xi)$ et donc $\alpha||v-u||^2 \leqslant 0$ d'où $v = u$.

24.3.6. Supposons que $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ ait pour limite u. Puisque U est fermé, $u \in U$ et puisque F est continue, $\lim_{m\to\infty} F(u^m) = F(u)$. Ainsi $u \in U$ vérifie
$F(u) = \inf_{v\in U} F(v)$. Par conséquent u est solution de (8).

24.3.7. Observons tout d'abord que $\inf_{v\in U} F(v) \in \mathbb{R}$. En effet soit $u_0 \in U$ (qui est non vide), prenons $u = u_0$ dans (7), il vient

$$F(v) \geqslant F(u_0) + (F'(0), v-u_0) + \frac{\alpha}{2}||v-u_0||^2,$$

et puisque $||F'(u_0)||.||v-u_0|| \leqslant \frac{\alpha}{2}||v-u_0||^2 + \frac{2}{\alpha}||F'(u_0)||^2$ ainsi que (inégalité de Cauchy-Schwarz) $|(F'(0), v)| \leqslant ||F'(0)||.||v||$, nous obtenons que

$$\begin{aligned}\forall v \in U,\ F(v) &\geqslant F(u_0) - \frac{\alpha}{2}||v-u_0||^2 - \frac{2}{\alpha}||F'(u_0)||^2 + \frac{\alpha}{2}||v-u_0||^2\\ &= F(u_0) - \frac{2}{\alpha}||F'(u_0)||^2\end{aligned}$$

et donc $\inf_{v\in U} F(v) > -\infty$. Bien évidement $\inf_{v\in U} F(v) \leqslant F(u_0)$ et donc $\inf_{v\in U} F(v) < +\infty$.

Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, il existe $u^m \in \mathbb{R}^n$ qui soit tel que

$$\inf_{v\in U} F(v) \leqslant F(u^m) \leqslant 2^{-m} + \inf_{v\in U} F(v)$$

par définition de l'infimum. Il alors clair que $\lim_{m\to\infty} F(u^m) = \inf_{v\in U} F(v)$. Nous avons construit une suite minimisante.

24.3.8. Prenons $v = u^m$ et $u = u_0$ dans (7), il vient

$$\frac{\alpha}{2}||u^m - u_0||^2 + (F'(u_0), u^m - u_0) \leqslant F(u^m) - F(u_0).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(F'(u_0), u^m - u_0)| \leqslant ||F'(u_0)||.||u^m - u_0||,$$

et puisque $||F'(u_0)||.||u^m - u_0|| \leqslant \frac{\alpha}{4}||u^m - u_0||^2 + \frac{||F'(u_0)||^2}{\alpha}$, il vient

$$(I) \quad \frac{\alpha}{4}||u^m - u_0||^2 \leqslant F(u^m) - F(u_0) + \frac{||F'(u_0)||^2}{\alpha}.$$

Le membre de droite de cette inégalité est majoré indépendamment de m car $F(u^m)$ converge vers $\inf_{v\in U} F(v)$ qui est fini. Il en résulte que la suite $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée.

24.3.9. D'après la question 24.1.7 nous savons qu'il existe au moins une suite minimisante. D'après la question 24.1.8 nous savons qu'elle est bornée. Nous pouvons donc en extraire une sous-suite convergente. Notons $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ cette sous-suite. En tant que suite extraite d'une suite minimisante elle est elle aussi minimisante. D'après la question 24.1.6, sa limite est donc solution de (8).

24.3.10. Nous venons de voir que de toute suite minimisante nous pouvons extraire une sous-suite dont la limite est solution de (8). Mais d'après la question 24.1.5, il y a au plus une solution de (8) donc toutes les suites extraites convergentes convergent vers la même limite. Il en résulte alors classiquement que la suite est convergente vers cette limite. Prouvons le rapidement. Soit u la limite d'une suite extraite convergente. En niant la convergence de la suite minimisante $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ vers u, nous avons :

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists \varphi(n); ||u^{\varphi(n)} - u|| \geqslant \varepsilon_0,$$

avec φ application strictement croissante. La suite $(u^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il est donc possible d'en extraire une sous-suite convergente vers $v \in U$ qui sera en fait i) minimisante et ii) extraite de $(u^m)_{n\in\mathbb{N}}$. D'une part $||v-u|| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ et d'autre part $v = u$ car v résout (8) ; ce qui est absurde.

24.3.11. Soit u solution de (8), puisque $\mathbb{R}^n$ est ouvert nous avons nécessairement $DF(u) = 0$ et donc, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $(F'(u), v) = 0$, ce qui entraîne que $F'(u) = 0$.

Réciproquement, soit u tel que $F'(u) = 0$. D'après (7) :
$F(v) \geqslant F(u) + \frac{\alpha}{2}||v-u||^2 \geqslant F(u)$ par conséquent u est solution de (8).

24.3.12. Nous allons montrer que la solution de (8) est caractérisée par $u \in U$ et

$$(V) \quad (F'(u), v-u) \geqslant 0, \quad \forall v \in U.$$

En effet si $u \in U$ vérifie (V), compte tenu de (7), nous avons bien $F(v) \geqslant F(u)$, $\forall v \in U$ c'est-à-dire que u résout (8).

Réciproquement, si u est solution de (8), pour tous $t \in [0,1]$ et $v \in U$ le point $tv + (1-t)u \in U$ et donc $J(tv + (1-t)u) \geqslant J(u)$. Mais

$$J(tv + (1-t)u) = J(u + t(v-u)) = J(u) + t(J'(u), v-u) + \circ(t).$$

Si (V) n'avait pas lieu, pour t assez petit, nous aurions donc $J(tv + (1-t)u) < J(u)$ ce qui est absurde.

Dans le cas où U est un espace vectoriel, (V) est équivalent à

$$(F'(u), w) = 0, \quad \forall w \in U$$

car on peut choisir $v = u + w$ et $v = u - w$. En d'autres termes, la solution de (8) est caractérisée par $F'(u) \in U^\perp$. Lorsque $U = \mathbb{R}^n$, $U^\perp = \{0\}$ et l'on retrouve (10) comme il se doit.

24.3.13. Fixons un $\varepsilon > 0$. Puisque φ est convexe, pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in [0,1]$, nous avons

$$\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\theta u + (1-\theta)v) \leqslant \theta\frac{\varphi(u)}{\varepsilon} + (1-\theta)\frac{\varphi(v)}{\varepsilon}.$$

En additionnant cette inégalité à (6) nous voyons que F_ε vérifie elle aussi (6). C'est cette inégalité qui avait permit de montrer à la question 24.1.5 que (8) admettait au plus une solution. Ainsi (11) admet au plus une solution.

Considérons alors une suite minimisante $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$; par exemple u^m tel que

$$\inf_{v\in\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(v) \leqslant F_\varepsilon(u^m) \leqslant 2^{-m} + \inf_{v\in\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(v).$$

Puisque $\varphi \geqslant 0, \quad F(u^m) \leqslant F_\varepsilon(u^m)$ et par conséquent, comme à la question 24.1.8, nous obtenons que $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit alors $(u^{\psi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite extraite convergente avec pour limite u_ε. Puisque F et φ sont continues,

$$\lim_{m\to\infty} F_\varepsilon(u^{\psi(m)}) = F_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

et puisque $(F_\varepsilon(u^{\psi(m)}))_{m\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(F_\varepsilon(u^m))_{m\in\mathbb{N}}\lim_{m\to\infty}$,

$$F_\varepsilon(u^m) = \inf_{v\in\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(v).$$

Il en résulte que $F_\varepsilon(u^\varepsilon) = \inf_{v\in\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(v)$ et par conséquent (12) possède une et une seule solution.

24.3.14. Soit u la solution de (8). Observons que

$$F(u^\varepsilon) \leqslant F(u^\varepsilon) + \frac{\varphi(u^\varepsilon)}{\varepsilon} = F_\varepsilon(u^\varepsilon) \leqslant F_\varepsilon(u) = F(u).$$

Par conséquent $(F(u^\varepsilon))$ est majoré par $F(u)$ qui est indépendant de ε. Utilisons alors à nouveau l'inégalité (I) montrée à la question 24.1.8 :

$$\begin{aligned} \tfrac{\alpha}{4}||u^\varepsilon - u_0||^2 &\leqslant F(u^\varepsilon) - F(u_0) + \tfrac{||F'(u_0)||^2}{\alpha}, \\ &\leqslant F(u) - F(u_0) + \tfrac{||F'(u_0)||^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée indépendamment de ε.

Soit alors $(u^{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite v et telle que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Puisque $F(u^{\varepsilon_n}) \leqslant F(u)$, à la limite ($F$ est continue) nous avons

$$F(v) \leqslant F(u).$$

Reste donc à prouver que $v \in U$. Nous avons

$$0 \leqslant \varphi(u^{\varepsilon_n}) \leqslant \varepsilon_n(F(u) - F(u^{\varepsilon_n}))$$

et donc à la limite $n \to \infty$,

$$0 \leqslant \varphi(v) \leqslant 0.(F(u) - F(v)) = 0\,,$$

soit $\varphi(v) = 0$ et donc $v \in U$. Mais alors $v = u$ et la suite extraite converge vers u solution de (8). Ce problème possédant une unique solution, comme nous l'avons déjà observé, ceci entraîne que toute la famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u : $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = u$.

24.3.15. Il suffit de prendre

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{p} \text{Max}\ (g_i(v), 0),$$

avec $\text{Max}\,(x,0) = \frac{x+|x|}{2}$. Par construction φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\varphi(v) = 0$ c'est que $\forall i = 1, \dots p, g_i(v) \leqslant 0$ c'est-à-dire que $v \in U$. Puisque $x \mapsto |x|$ est continue, la continuité des g_i entraîne celle de φ. Il reste donc à vérifier que $v \mapsto \text{Max}\,(g(v),0)$ est une fonction convexe lorsque g l'est. Puisque la fonction $x \mapsto \text{Max}\,(x,0)$ est croissante, il résulte de

$$g(\theta u + (1+\theta)v) \leqslant \theta g(u) + (1-\theta)g(v)$$

que

$$\text{Max}\ (g(\theta u + (1-\theta)v, 0) \leqslant \text{Max}\ (\theta g(u) + (1-\theta)g(v), 0).$$

Mais grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|\theta g(u) + (1-\theta)g(v)| \leqslant \theta|g(u)| + (1-\theta)|g(v)|,$$

de sorte qu'en additionnant $\theta g(u) + (1-\theta)g(v)$ au deux membres de cette inégalité, il vient

$$\text{Max}\ (\theta g(u) + (1-\theta)g(v), 0) \leqslant \theta\text{Max}\ (g(u), 0) + (1-\theta)\text{Max}\ (g(v), 0)$$

prouvant finalement que $v \mapsto \text{Max}\,(g(v),0)$ est une fonction convexe.

24.3.16. Si v^k n'est pas solution de (8) alors $F'(v^k) \neq 0$. Écrivons alors (7) avec $u = v^k$ et $v = v^k - \rho F'(v^k)$:

$$F(v^k - \rho F'(v^k)) \geqslant F(v^k) - \rho||F'(v^k)||^2 + \frac{\alpha\rho^2}{2}||F'(v^k)||^2.$$

Ainsi

$$\lim_{|\rho|\to+\infty} F(v^k - \rho F'(v^k)) = +\infty$$

et par conséquent la fonction $\rho \mapsto F(v^k - \rho F'(v^k))$ atteint son minimum : le problème (14) possède une solution. Cette assertion résulte du résultat général suivant.

Lemme. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$ (on dit aussi que f est infinie à l'infini). Alors f atteint sa borne inférieure.*

Preuve du Lemme. L'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant f(0)\}$ est un compact de $\mathbb{R}$. En effet il est fermé par continuité de f et borné puisque $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Soit alors $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = \min_{x\in K} f(x)$ (un tel x_0 existe puisque toute fonction continue sur un compact atteint son minimum). Il est alors clair que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. En effet si $x \in K$ alors $f(x) \geqslant f(x_0)$ alors que si $x \notin K$, $f(x) > f(0) \geqslant f(x_0)$ la dernière inégalité ayant lieu puisque $0 \in K$. Ceci achève la preuve du Lemme.

Afin de montrer qu'il existe une seule solution de (14), nous supposons qu'il en existe deux, mettons s et r et utilisons (6) avec $\theta = \frac{1}{2}$, $u = v^k - sF'(v^k)$ et $v = v^k - rF'(v^k)$. Il vient

$$F(v^k - \frac{r+s}{2}F'(v^k)) + \frac{\alpha}{8}(r-s)^2||F'(v_k)||^2 \leqslant \inf_{\rho\in\mathbb{R}} F(v^k - \rho F'(v^k)).$$

Puisque $F(v^k - \frac{r+s}{2}F'(v^k)) \geqslant \inf_{\rho\in\mathbb{R}} F(v^k - \rho F'(v^k))$, nous obtenons $(r-s)^2 \leqslant 0$ et donc $r = s$.

24.3.17. Si v^k est solution de (8) nous avons $F'(v^k) = 0$ ce qui fait que $(F'(v^{k+1}), F'(v^k)) = 0$. Si v^k n'est pas solution de (8), (14) possède une solution et puisque la fonction $\rho \mapsto F(v^k - \rho F'(v^k))$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée s'annule en ρ_k point où elle atteint son minimum. Mais

$$\frac{d}{d\rho}F(v^k - \rho F'(v^k)) = (F'(v^k - \rho F'(v^k)), F'(v^k))$$

et donc $(F'(v^{k+1}), F'(v^k)) = 0$.

24.3.18. Utilisons donc (7) avec $v = v^k$ et $u = v^{k+1} = v^k - \rho_k F'(v^k)$. Il vient compte tenu de la question précédente que

$$F(v^k) \geqslant F(v^{k+1}) + \frac{\alpha}{2}||v^k - v^{k+1}||^2.$$

24.3.19. S'il existe k_0 tel que $F'(v^{k_0}) = 0$ alors $v^k = v^{k_0}$, $\forall k \geqslant k_0$ et la suite $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers v^{k_0} qui est la solution de (8) d'après la question 24.1.11.

Sinon, $\forall k \in \mathbb{N}$, $F(v^k) \neq 0$ et $v^{k+1} = v^k - \rho_k F'(v^k)$ où ρ_k résout (14). Ainsi $F(v^{k+1}) \leqslant F(v^k)$ et la suite $(F(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Puisque $F(v^k) \geqslant F(u)$ où u résout (8), la suite $(F(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie. Il résulte alors de (15) que $\lim_{k\to\infty} ||v^{k+1} - v^k|| = 0$. Nous avons déjà observé que compte tenu de (7), le fait que $(F(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée, entraîne que $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque l'application F' est continue, elle est uniformément continue sur tout compact et par conséquent

$$(v^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ bornée et } \lim_{k\to\infty} ||v^{k+1} - v^k|| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} ||F'(v^{k+1}) - F'(v^k)|| = 0.$$

Or $(F'(v^{k+1}),\ F'(v^k)) = 0$ fait que

$$\begin{aligned} ||F'(v^k)||^2 &= (F'(v^k),\ F'(v^k) - F'(v^{k+1})) \\ &\leqslant ||F'(v^k)||.||F'(v^k) - F'(v^{k+1})|| \end{aligned}$$

et par conséquent

$$||F'(v^k)|| \leqslant ||F'(v^{k+1}) - F'(v^k)||.$$

Il en résulte finalement que $\lim_{k\to\infty} ||F'(v^k)|| = 0$.
Écrivons alors (3) avec $v = v^k$ et u solution de (8) (et donc $F'(u) = 0$), il vient

$$\alpha\,||v^k - u||^2 \leqslant (F'(v^k), u - v^k) \leqslant ||F'(v^k)||.||v^k - u||$$

d'où $||v^k - u|| \leqslant \frac{||F'(v^k)||}{\alpha}$ et ainsi $\lim_{k\to\infty} v^k = u$.

24.3.20. Dans ce cas $F'(v) = Av - b$ et

$$v^{k+1} = v^k - \rho_k(Av^k - b)$$

où ρ_k est tel que $(F'(v^{k+1}),\ F'(v^k)) = 0$ soit

$$\rho_k(A(Av^k - b),\ Av^k - b) = ||Av^k - b||^2.$$

Si v^k est tel que $Av^k - b = 0$ alors il résout le problème (8), sinon lorsque la matrice A est définie positive, $(A(Av^k - b),\ Av^k - b) \neq 0$ et

$$\rho_k = \frac{||Av^k - b||^2}{(A(Av^k - b), Av^k - b)}.$$

Nous disposons ainsi d'un algorithme pour résoudre le système linéaire

$$Av = b. \tag{S}$$

Introduisons le vecteur $r = Av - b$ qui est le résidu. Le but est de générer une suite $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la solution de (S). Cet algorithme s'écrit donc comme suit.

i) Initialisation. Prendre v^0 et calculer $r^0 = Av^0 - b$. Si $r^0 = 0$ alors stop : v^0 est solution de (S) ; sinon passer à l'étape (ii).

ii) Calculer $v^{k+1} = v^k - \rho_k Ar^k$ avec

$$\rho_k = \frac{||r^k||^2}{(Ar^k, r^k)}.$$

Calculer $r^{k+1} = Av^{k+1} - b$. Si $r^{k+1} = 0$ alors stop : v^{k+1} est solution de (S) ; sinon faire $k \leftarrow k + 1$ et repasser à l'étape (ii).

Commentaires

L'objet de ce problème est l'étude du problème de minimisation d'une fonction, F α-convexe (propriété (6) du numéro 24.1.3. page 19) et uniformément lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. Ce type de problème se rencontre souvent en pratique (recherche opérationnelle, contrôle optimal, physique et chimie des milieux continus, biologie moléculaire,...) et une situation courante est le cas où F est quadratique comme au (5) du numéro 24.1.2 : $F(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$. Dans le cas où A est symétrique, définie positive, le minimum de F sur $\mathbb{R}^n$ est la solution u de

$$Au = b\,, \tag{1}$$

et nous avons déjà mentionné (au numéro 12.3.4. page 97) qu'il ne s'agit pas d'un problème facile.

En effet, ce qui fait la difficulté du problème

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in U \text{ tel que} \\ F(u) = \min_{v \in U} F(v), \end{cases} \tag{2}$$

lorsque $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est α-convexe et U est un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, c'est que n (le nombre d'inconnues) peut être très grand (de plusieurs centaines à un million dans certains problèmes pratiques).

Ainsi la résolution de (2) est toujours algorithmique, c'est-à-dire que l'on cherche à approcher sa solution par un processus itératif.

Dans le cas dit « sans contraintes » i.e. lorsque $U = \mathbb{R}^n$, un algorithme est proposé au numéro 24.1.16 page 20. Il porte le nom d'algorithme de descente à pas optimal et consiste à chercher, une fois que v^k $k$ième approximation est connue, à chercher à minimiser F sur la droite passant par v^k et de vecteur directeur $F'(v^k)$ (le gradient de F au point v^k). L'interprétation de cette méthode est bien connue des marcheurs en montagne : pour atteindre le bas de la vallée il faut descendre le long de la ligne de la plus grande pente.

Dans la pratique, *i.e.* pour les calculs sur ordinateur, on préfère une variante de cet algorithme qui porte le nom d'algorithme du gradient conjugué. Nous allons le présenter dans le cas d'une fonctionnelle quadratique :

$$F(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v) \tag{3}$$

où A est une matrice symétrique définie positive.

L'idée de base consiste, une fois la $k$ième approximation v^k construite, à minimiser F sur l'espace affine passant par v^k et dirigé par l'espace vectoriel de dimension inférieure à $k+1$ engendré par les vecteurs $F'(v^0), \dots, F'(v^k)$. Sans nous préoccuper pour l'instant de l'efficacité d'un tel algorithme, nous voyons que pour $k = n$, si les vecteurs $F'(v^0), \dots, F'(v^{n-1})$ sont indépendants, v^n sera la solution exacte de (1). Ainsi l'algorithme du gradient conjugué n'est pas un algorithme itératif : il converge en un nombre fini d'étape. Toutefois lorsque n est grand on se contente toujours de quelques itérations et donc d'une solution approchée.

Revenons maintenant à l'effectivité de cet algorithme.

Écrivons l'algorithme tel qu'il a été proposé par Hestense et Stieffel en 1952.

- Initialisation. Partir de v^0 et poser $d^0 = F'(v^0)(= Av^0 - b)$.
  - Si $d^0 = 0$ alors stop et v^0 est la solution de (1) et (2).
  - Si $d^0 \neq 0$, poser $r^0 = \frac{(F'(v^0),d^0)}{(Ad^0,d^0)}$ et définir $v^1 = v^0 - r^0 d^0$ puis aller au pas courant.
- Itération courante. On dispose donc de $v^1, \dots, v^{k-1}, v^k, d^1, \dots, d^{k-1}$ avec $k \geqslant 1$ et $F'(v^1) \neq 0, \dots, F'(v^{k-1}) \neq 0$.

– Si $F'(v^k) = 0$ alors stop et v^k est la solution de (1) et (2).
– Si $F'(v^k) \neq 0$, poser

$$d^k = F'(v^k) + \frac{||F'(v^k)||^2}{||F'(v^{k-1})||^2} d^{k-1},$$

$$r^k = \frac{(F'(v^k), d^k)}{(Ad^k, d^k)}, v^{k+1} = v^k - r^k d^k,$$

puis refaire l'itération courante.

On vérifie alors qu'effectivement v^k est le minimum de F sur l'espace affine passant par v^{k-1} et engendré par les vecteurs $F'(v^0), \ldots, F'(v^{k-1})$ qui en fait sont non nuls (si on est arrivé à l'étape k) et deux à deux *orthogonnaux* dans $\mathbb{R}^n$.

Finalement illustrons cet algorithme dans un cas, sans intérêt pratique, mais qui a le mérite d'expliquer son appellation et son comportement. On se place dans le cas $n = 2$ et on prend $F(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(v_1^2 + ev_2^2)$ où $0 < e < 1$ est l'exentricité de l'ellipse $F(v_1, v_2) = k, k > 0$. La solution de (1) ou (2) est bien évidemment $(0, 0)$ et étant donné v^0, avec $v_1^0 v_2^0 \neq 0$, l'algorithme du gradient à pas optimal fournit la suite :

$$v_1^{k+1} = \frac{e^2(e-1)v_1^k(v_2^k)^2}{(v_1^k)^2 + e^3(v_2^k)^2}, \qquad v_2^{k+1} = \frac{(1-e)v_2^k(v_1^k)^2}{(v_1^k)^2 + e^3(v_2^k)^2},$$

qui converge vers zéro sans jamais l'atteindre.

D'après ce qui précède l'algorithme du gradient conjugué converge en 2 étapes (au plus). Partons donc de v^0 arbitraire, v^1 est alors construit par l'algorithme du gradient à pas optimal si $v^0 \neq 0$:

$$v_1^1 = \frac{e^2(e-1)v_1^0(v_2^0)^2}{(v_1^0)^2 + e^3(v_2^0)^2}, \qquad v_2^1 = \frac{(1-e)v_2^0(v_1^0)^2}{(v_1^0) + e^3(v_2^0)^2}.$$

À moins que $v_1^0 v_2^0 = 0, \quad F'(v^1) \neq 0$ et il faut encore faire un pas. Nous savons que v^2 est la solution donc $v^2 = 0$. Ce qui nous intéresse est donc de comprendre à quoi correspond la direction de descente d^1 qui est différente du gradient $F'(v^1)$. Un calcul élémentaire montre que d^1 vérifie $(Ad^1, d^0) = 0$, c'est-à-dire que d^1 est orthogonal à d^0 pour la forme quadratique de matrice A. En géométrie des coniques cela correspond à la direction conjugué de la direction d^0.

Pour plus d'éléments concernant le domaine de l'optimisation numérique nous renvoyons au livre de J.F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal et C. Sagatizàbal : *Optimisation Numérique, aspects théoriques et pratiques* paru chez Springer. Ceux qui souhaitent disposer de programmes peuvent se reporter à l'ouvrage du W.H. Press *et al : Numerical recipes, the art of scientific computing*, paru Cambridge University Press qui existe en `FORTRAN`, Pascal et C. Ce dernier ouvrage couvre un champ bien plus large que l'optimisation bien évidemment. Il est aussi possible de télécharger de nombreux programmes sur le Web.

Corrigé 25

25.3.1. Puisque f est continue, la fonction $s \mapsto \varphi(f(s), s)$ est continue et par conséquent $t \mapsto \int_0^t \varphi(f(s), s)ds$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{d}{dt}(\mathcal{T} f)(t) = \varphi(f(t), t)$.

Soit alors $f \in E_{a,b}$ solution de (P), nous avons $f \in \mathcal{C}^1$ et

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{T} f)(t) = f'(t) = \varphi(f(t), t)$$

et donc f est solution de (Q). Réciproquement si f est solution de (Q), alors par intégration

$$f(t) - f(a) = \int_a^t \varphi(f(s), s)ds$$

or $f(a) = m$ d'où $\mathcal{T} f = f$: f est solution de (P).

25.3.2. Nous avons

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T} f)(t) - m| &= \left|\int_a^t \varphi(f(s), s)ds\right| \\ &\leqslant M|t - a| \leqslant M\delta \leqslant r, \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{T}$ envoie $\mathcal{E}$ dans lui même.

25.3.3. Il s'agit de montrer que

$$|f_n(t) - m| \leqslant r \text{ pour } t \in [a, a + \delta].$$

Procédons par récurrence sur k en montrant cette inégalité pour $t \in [a + \frac{k-1}{n}, a + \frac{k}{n}[$. Pour $k = 0$, $f_n(t) = m$ sur $[a - \frac{1}{n}, a[$ et donc nous avons bien $|f_n(t) - m| \leqslant r$. Supposons que cette inégalité a lieu pour $t \in [a + \frac{k-1}{n}, a + \frac{k}{n}[$, alors pour $t \in [a + \frac{k}{n}, a + \frac{k+1}{n}[$,

$$\begin{aligned} |f_n(t) - m| &= \left|\int_a^t \varphi(s, f_n(s - \tfrac{1}{n}))ds\right| \\ &\leqslant M|t - a| \leqslant M\delta \leqslant r. \end{aligned}$$

25.3.4. Écrivons

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |\varphi(f_n(s - \frac{1}{n}), s) - \varphi(f_n(s - \frac{1}{n}), s)|ds.$$

Par conséquent $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leqslant 2M|t_1 - t_2|$.

25.3.5. Admettons pour l'instant qu'il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $(f_{\psi(n)})$ converge uniformément vers f sur $[a, a + \delta]$ (il en résulte aussi que f est continue). Puisque cette convergence est uniforme la suite de fonction $g_n \;: g_n(t) = (f_{\psi_{(n)}})(t - \frac{1}{\psi(n)})$ converge uniformément vers f aussi sur $[a, a+\delta]$. Mais

$$(f_{\psi_{(n)}})(t) = m + \int_a^t \varphi(g_n(s), s)ds \qquad (*)$$

et puisque la suite de fonction $s \mapsto \varphi(g_n(s), s)$ converge uniformément vers $s \mapsto \varphi(f(s), s)$ (φ est continue) nous obtenons à la limite dans $(\star)$ $f(t) = m + \int_a^t \varphi(f(s), s)ds$ c'est-à-dire que f résout (P) et donc (Q).

Il nous reste donc à démontrer le résultat suivant, qui est une forme *ad hoc* du Théorème d'Ascoli.

Lemme. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions d'un compact* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1, t_2 \in [a, b], |f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leqslant M_1|t_1 - t_2|, \forall t \in [a, b], |f_n(t)| \leqslant M_2$. *Alors il existe* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que* $(f_{\psi_{(n)}})$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$.

Démonstration. Indexons l'ensemble des points rationnels de l'intervalle $[a, b]$ par $\mathbb{N}$: $[a, b] \cap Q = \{r_m, m \in \mathbb{N}\}$. La suite $(f_n(r_0))_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, nous pouvons en extraire une sous-suite $\psi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(f_{\psi_{(0)}}(r_0))$ soit convergente. Ensuite on construit ψ_1 en considérant $(f_{\psi_{(0)}}(r_1))_{n\in\mathbb{N}}$ $(f_{(\psi_{(0)}\circ\psi_1)(n)}(r_1))$ est convergente etc... Nous avons ψ_k telle que $(f_{(\psi_0\circ\psi_1\circ\ldots\circ\psi_k)(n)}(r_k))$ soit convergente. Définissons alors $\psi(n) = (\psi_0 \circ \ldots \circ \psi_n)(n)$ la suite diagonale. Il est aisé de voir que ψ est strictement croissante et que $\forall k \in \mathbb{N}(f_{\psi(n)}(r_k))$ est convergente. On note $l(r_k)$ sa limite. Puisque $|f_{\psi_{(n)}}(r_k) - f_{\psi_{(n)}}(r_{k'})| \leqslant M_1|r_k - r_{k'}|$ nous obtenons à la limite $n \to \infty$ que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad |l(r_k) - l(r_{k'})| \leqslant M_1|r_k - r_{k'}|$. Ainsi l'application $l : [a, b] \cap Q \to \mathbb{R}$ est uniformément continue nous pouvons donc la prolonger à $[a, b]$ en une application f continue sur $[a, b]$ telle que $|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant M_1|t_1 - t_2|$ pour tous $t_1, t_2 \in [a, b]$.

Montrons maintenant que $(f_{\psi_{(n)}})$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Donnons nous $\varepsilon > 0$ arbitraire. L'intervalle $[a, b]$ étant compact, nous pouvons extraire du recouvrement $[a, b] \subset \cup_{k=0}^{\infty}]r_k - \frac{\varepsilon}{2}, r_k + \frac{\varepsilon}{2}[$ un sous-recouvrement fini :

$$[a, b] \subset \cup_{p=0}^{P}]r_{k_p} - \frac{\varepsilon}{2}, r_{k_p} + \frac{\varepsilon}{2}[.$$

Soit alors $t \in [a, b]$, il existe p tel que $|r_{k_p} - t| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et alors

$$\begin{aligned}
|f_n(t) - f(t)| &\leqslant |f_n(t) - f_n(r_{k_p})| + |f_n(r_{k_p}) - f(r_{k_p})| + |f(r_{k_p}) - f(t)|, \\
&\leqslant 2M_1\frac{\varepsilon}{2} + |f_n(r_{k_p}) - f(r_{k_p})| + 2M_1\frac{\varepsilon}{2} \\
&= 2M_1\varepsilon + |f_n(r_{k_p}) - f(r_{k_p})|.
\end{aligned}$$

Soit alors $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$\forall p \in \{1, \ldots, P\}, \quad \forall n \geqslant N, |f_{\psi_{(n)}}(r_{k_p}) - f(r_{k_p})| \leqslant M_1\varepsilon$$

(un tel N existe car P est fini). Nous avons $|f_{\psi(n)}(t) - f(t)| \leqslant 3M_1\varepsilon$ pour tout $t \in [a,b]$ et pour tout $n \geqslant N$: la suite $(f_{\psi(n)})$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Le lemme est démontré. ❑

Afin d'appliquer ce lemme il reste à vérifier que pour
$f_n(t) = m + \int_a^t \varphi(f_n(s-\frac{1}{n}),s)ds$ nous avons $|f_n(t)| \leqslant M_2, \quad \forall n, \forall t \in [a, a+\delta]$.
Mais $|f_n(t)| \leqslant |m| + M\delta = M_2$ convient.

Commentaires

L'objet de ce problème était de montrer le théorème de Peano qui est l'analogue du théorème de Cauchy-Lipschitz lorsque le second membre de l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(y,t)$$

est donné par une fonction φ continue par rapport à y et t. Ceci affaibli les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz qui imposent aussi que, pour t fixé, l'application $\varphi(.,t)$ soit lipschitzienne.

Ainsi pour $(t_0, y_0) \in]a,b[\times\mathbb{R}$ donnés, nous avons montré qu'il existe une solution locale de (E), pour t proche de t_0, vérifiant $y(t_0) = y_0$. Toutefois il *n'y a pas unicité* de la solution comme le montre l'exemple suivant. Prenons $\varphi(y,t) = \sqrt{|y|}$; on vérifie directement que les deux applications y_1 et y_2 définies par $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = |t|t/4$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de (E) avec valeurs en $t = 0$ égales : $y_1(0) = y_2(0) = 0$. Cela n'est bien sûr pas surprenant dans la mesure où φ n'est pas localement lipschitzienne en $y = 0$. Dans cet exemple nous avons donc montré qu'il pouvait y avoir deux solutions, en fait la multiplicité est bien plus importante et l'ensemble des solutions de (E) vérifiant $y(0) = 0$ comprend un continuum (i.e. un ensemble homéomorphe à $\mathbb{R}$) de solutions comme on le montre maintenant. Soient $\alpha < 0 < \beta$ deux nombre réels. Notons $y_{\alpha,\beta}$ la fonction :

$y_{\alpha,\beta}(t) = -(t-\alpha)^2/4$ pour $t \leqslant \alpha$, $y_{\alpha,\beta}(t) = 0$ pour $\alpha < t < \beta$ et $y_{\alpha,\beta}(t) = (t-\beta)^2/4$ pour $t \geqslant \beta$.

On vérifie aisément que ces fonctions sont solutions de (E) avec $y(0) = 0$ (et que ce sont les seules si on autorise $\alpha = -\infty$ et/ou $\beta = +\infty$).

Corrigé 26

26.3.1. Écrivons

$$\frac{dx}{dt} = A_{11}x + A_{12}y = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y),$$
$$\frac{dy}{dt} = A_{21}x + A_{22}y = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y).$$

Puisque H est $\mathcal{C}^2$, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial H}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial H}{\partial x})$ et donc nécessairement $A_{11} = -A_{22}$ soit $A_{11} + A_{22} = 0$. La condition $trA = 0$ est donc nécessaire. Réciproquement si

$tr A = 0$, on vérifie immédiatement que

$$H_0(x, y) = \frac{1}{2}(A_{11}xy + A_{12}y^2 - A_{21}x^2 - A_{22}xy),$$

convient.

La condition cherchée, $tr A = 0$, ne dépend pas de la base choisie sur $\mathbb{R}^2$ pour expliciter le système $\frac{du}{dt} = l(u)$ où $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ car $tr l$, la trace de l'endomorphisme l, ne dépend pas de la base choisie.

Lorsque $tr A = 0$, on intègre immédiatement le système

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -A_{21}x - A_{22}y$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = A_{11}x + A_{12}y$$

pour trouver que $\nabla(H - H_0) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc que $H = H_0 + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est arbitraire.

26.3.2. La fonction $(x, y) \mapsto (\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x})$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution de (E) passant par ce point : $\exists \alpha > 0$ et $\varphi \;:\;]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ est solution de (E) et $\varphi(0) = (x_0, y_0)$. Rien ne permet d'affirmer à ce stade que $\alpha = +\infty$, c'est-à-dire que φ puisse être prolongée à $\mathbb{R}$ comme le montre l'exemple suivant.

On prend $H(x, y) = y^4 - x^2$ et $x_0 = 1, y_0 = 1$. Le système différentiel (E) s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = 4y^3, \frac{dy}{dt} = 2x$$

et on vérifie aisément que

$$x(t) = \frac{1}{(1 - 2t)^2}, \quad y(t) = \frac{1}{1 - 2t}$$

pour $t < \frac{1}{2}$ est la solution maximale de (E) qui vérifie $x(0) = 1, y(0) = 1$. Cette solution ne peut être prolongée en $t_0 = \frac{1}{2}$.

26.3.3. Soit $(x(t), y(t))$ une solution maximale de (E) définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ où $T_\pm \in \overline{\mathbb{R}}$ et $T_1 < 0 < T_+$. Nous commençons par calculer pour $t \in]T_-, T_+[$ la quantité $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t))$. Nous avons d'après la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Mais compte tenu de (E),

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

et donc, avec $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $H(x(t), y(t)) = H(x_0, y_0), \forall t \in]T_-, T_+[$.

La fonction H est donc constante le long des trajectoires de (E) ou encore chaque trajectoire de (E) est incluse dans un ensemble de niveau. Ici $(x(t), y(t)) \in E_C$ où $C = H(x_0, y_0)$.

Puisque $(x_0, y_0) \in E_C$ n'est pas vide et d'après l'hypothèse (P), E_C est borné par conséquent $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t \in]T_-, T_+[, \quad x^2(t) + y^2(t) \leqslant M^2.$$

Il en résulte qu'il existe $M_1 \in \mathbb{R}_+$ pour lequel

$$\forall t \in]T_-, T_+[, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \leqslant M_1^2$$

(en effet la fonction $(x, y) \mapsto \nabla H(x, y)$ étant continue sur $\mathbb{R}^2$, l'image de la boule $x^2 + y^2 \leqslant M^2$ par cette application est un borné de $\mathbb{R}^2$).

Supposons par exemple que $T_+ < +\infty$. D'après le critère de Cauchy, $x(t)$ (respectivement $y(t)$) possède alors une limite x_1 (resp. y_1) lorsque $t \to T_+^-$. En effet,

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt}(t)dt\right| \leqslant M_1|t_2 - t_1|.$$

Dans ces conditions, il est possible de résoudre (E) au voisinage de T_+ avec donnée initiale (x_1, y_1) et ainsi prolonger $(x(t), y(t))$ au-delà de T_+ ce qui contredit le caractère maximal de la solution. Ainsi nécessairement $T_+ = +\infty$. Le cas $T_- = -\infty$ est analogue, il suffit par exemple de remarquer que changer t en $-t$ revient à changer H en $-H$. La propriété (P) restant valable pour $-H$, le raisonnement précédent reste valide.

26.3.4. Montrons que H_1 vérifie (P). Pour $C < 0$, E_C est vide. Pour $C \geqslant 0$, E_C est non vide et $|x| \leqslant \sqrt{2C}, |y| \leqslant (4C)^{1/4}$ quel que soit $(x, y) \in E_C$: E_C est borné. Ainsi d'après la question précédente les solutions maximales de (E^1) sont définies sur $\mathbb{R}$.

Par contre H_2 ne vérifie pas (P) : $(0, 2k\pi) \in E_{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. cela n'implique pas que les solutions maximales de (E^2) ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas (E^2) s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

(qui est une équation de pendule pesant $\frac{d^2y}{dt^2} + \sin y = 0$).

Nous avons
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = x \sin y - xy \leqslant 2|x||y| \leqslant x^2 + y^2$$
et par conséquent si $T_+ < \infty$,
$$x(t)^2 + y(t)^2 \leqslant (x_0^2 + y_0^2)e^{2T_+}, \quad \forall t < T_+$$
et le raisonnement fait à la question précédente se reconduit (pour T_- on procède de manière similaire) : les solutions maximales de (E^2) sont définies sur $\mathbb{R}$. Nous établirons à nouveau ce résultat au problème 28 car (E^2) est un cas particulier du problème qui y est considéré (prendre $\alpha = 0$, $a = 0$ et $L = 0$).

Commentaires

Considérons le système différentiel sur $\mathbb{R}^{2N}$, $N \geqslant 1$, donné par
$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dp_i}{dt} & = & \dfrac{\partial H}{\partial q_i}(p,q), \quad i = 1,\ldots,N, \\[2ex] \dfrac{dq_i}{dt} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial p_i}(p,q), \quad i = 1,\ldots,N, \end{array}\right.$$
où le point courant de $\mathbb{R}^{2N}$ a été noté $(p,q) = (p_1,\ldots,p_N,q_1,\ldots q_N)$ et H est une application régulière (mettons au moins $\mathcal{C}^2$) de $\mathbb{R}^{2N}$ dans $\mathbb{R}$. De tels systèmes portent le nom de Hamilton et foisonnent en Physique. Dans ce problème nous avons étudié le cas (très) particulier où $N = 1$. Dans le cas général, la fonction H est constante sur les trajectoires de (S) :
$$\frac{d}{dt}H(p(t),q(t)) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{\partial t}\right) = 0.$$

Intuitivement les trajectoires de (S) ont donc lieu sur des hypersurfaces de $\mathbb{R}^{2N}$: $H(p,q) = H(p(0),q(0))$ quoique la géométrie de ces surfaces puisse être très complexe (en particulier elles n'ont aucune raison d'être bornées).

L'étude des systèmes hamiltonien est très riche (c'est une branche des mathématiques) et très active. C'est une des questions qui montre l'unité des mathématiques puisqu'on y rencontre beaucoup d'analyse, de géométrie différentielle mais aussi de la théorie des nombres (!). Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'ouvrage de V. Arnold : *Méthodes mathématiques de la mécanique classique,* paru aux éditions Mir (Moscou). Nous conseillons aussi l'article *Systèmes dynamiques* écrit par A. Chenciner dans *l'Encyclopédia Universalis.*

Une famille de systèmes hamiltoniens célèbres est celle du problème à n corps. On considère n particules de masses $m_1,\ldots,m_n$ se déplaçant dans l'espace physique

($\mathbb{R}^3$) et soumis aux forces gravitationnelles. Si l'on désigne par $x_i \in \mathbb{R}^3$ la position de la particule i la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$(E) \quad m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

où U, le potentiel des forces gravitationnelles, vaut

$$U = -\sum_{i<j} \frac{K}{||x_i - x_j||},$$

où K est une constante positive ($K = 6.67.10^{-11}$ en unité du système international).

Prenons alors $p_i = m_i \frac{dx_i}{dt}$ (la quantité de mouvement) et $q_i = x_i$ (la position). Si nous posons

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{||p_i||^2}{2m_i} + \sum_{i<j} \frac{K}{||q_i - q_j||},$$

l'équation (E) prend la forme équivalente (S) (ici $N = 3n$). Bien entendu H n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$, mais là c'est une autre histoire...

Lorsque $n = 2$ (problème à 2 corps) Kepler a résolu ce système et montré que les trajectoires étaient planes et avaient lieu sur des coniques (ellipses ou hyperboles). Le cas $n = 3$ (et les cas $n \geqslant 4$) n'est pas résolu -il ne le sera jamais - et la dynamique peut être chaotique (et donc imprévisible).

Corrigé 27

27.3.1. Puisque l'application $F(x, y) = (y, -g(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$, nous pouvons appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à (S). Il nous assure que pour tous $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe deux nombres T_- et T_+ avec $-\infty \leqslant T_- < t_0 < T_+ \leqslant +\infty$ et une solution maximale de (S) sur $]T_-, T_+[$. Toutefois rien ne permet d'affirmer *a priori* que $T_- = -\infty$ et $T_+ = +\infty$, comme le montre les deux exemples suivants.

Dans le cas où g est linéaire i.e. $g(x) = \omega x, \omega \in \mathbb{R}, (S)$ est un système linéaire et donc $T_- = -\infty$ et $T_+ = +\infty$ quels que soient t_0, x_0 et y_0.

Dans le cas où $g(x) = -2x^3$, lorsque $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $T_- = -\infty$ et $T_+ = +\infty$ car $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$ est la solution de (S). Mais pour $x_0 = 1, y_0 = 1$, la solution maximale pour $t_0 = 0$ est donnée par les formules $x(t) = 1/(1-t)$ et $y(t) = 1/(1-t)^2$ et donc $T_- = -\infty$ alors que $T_+ = 1$.

27.3.2. Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (S) avec $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. Nous avons $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y^2 + 2G(x)) = y\frac{dy}{dt} + g(x)\frac{dx}{dt} = -g(x)y + g(x)y = 0$.
Par conséquent $\frac{1}{2}y^2 + G(x) = \frac{1}{2}y_0^2 + G(x_0)$ et donc la trajectoire a lieu sur $\mathcal{E}_c$ avec $c = \frac{1}{2}y_0^2 + G(x_0)$.

Puisque $g(0) = 0$ et $g'(0) = \omega$, pour x petit nous avons en général (c'est-à-dire lorsque $\omega \neq 0$)

$$\frac{1}{2}y^2 + G(x) \simeq \frac{1}{2}y^2 + \frac{\omega}{2}x^2.$$

Ainsi si $\omega > 0$, les ensembles $\mathcal{E}_c$ sont au voisinage de $(0,0)$ semblables à une famille l'ellipses $y^2 + \omega x^2 = 2c$. Par contre si $\omega < 0$, il s'agit d'hyperboles. Dans le cas $\omega = 0$ et s'il existe $k \geqslant 2$ tel que $g^{(l)}(0) = 0$ pour $l \leqslant k-1$ et $g^{(k)}(0) \equiv \omega_k \neq 0$ nous avons un ensemble d'équations proches de $y^2 + \frac{2\omega_k}{(k+1)!}x^{k+1} = 2c$ et il s'agit toujours selon le signe de ω_k et la parité de k d'ensembles elliptiques ou hyperboliques.

27.3.3. Cherchons une trajectoire passant par $(a,0)$ à l'instant $t = 0$. Dans ce cas

$$\frac{1}{2}y^2 + G(x) = G(a) = c$$

et donc

$$y = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2(c - G(x))}$$

tant que $a < x < b$. Soit alors

$$f(\tau) \equiv \int_a^\tau \frac{dx}{\sqrt{2(c - G(x))}} \text{ pour } a < \tau < b.$$

Puisque $G(x) < c$ pour $x \in]a,b[$ la fonction sous la racine est bien strictement positive. Par ailleurs pour x proche de a, $G(x) = G(a) + (x-a)g(a) + O(x-a)^2$ et puisque $g(a) \neq 0$, $\quad (c - G(x)) \simeq g(a)(a-x)$ pour x proche de a. Bien entendu $g(a) < 0$ puisque $G(x) < c$ pour $x \in]a,b[$ et l'intégrale qui définit f est convergente en $x = a$ car au voisinage de ce point $\sqrt{2(c - G(x))} \sim \sqrt{2|g(a)|}(x-a)^{1/2}$. Nous avions $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2(c - G(x))}$ et donc $\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{dx}{dt}f'(x(t)) = \pm 1$. La fonction f envoie $[a,b]$ sur $[0,I]$ avec $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(c-G(x))}} > 0$ et là encore $I < \infty$ car $g(b) \neq 0$. Puisque $f' > 0$ sur $]a,b[$, f réalise une bijection de $[a,b]$ sur $[0,I]$ et nous désignons par $h = f^{-1}\ : [0,I] \to [a,b]$. Dans ce cas $x(t) = h(t)$, $y(t) = \sqrt{2(c - G(h(t))}$ est solution de (S) pour $0 \leqslant t \leqslant I$. En effet

$$\frac{dx}{dt}(t) = h'(t) = \frac{1}{f'(h(t))} = \sqrt{2(c - G(h(t)))} = y(t)$$

et

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{-2g'(h(t))}{2\sqrt{2(c - G(h(t))}}h'(t) = -g'(h(t)) = -g'(x(t)).$$

Nous avons $x(I) = b$ et $y(I) = 0$, nous prolongeons alors $(x(t), y(t))$ pour $t \in [I, 2I]$ par $x(t) = h(2I - t)$, $y(t) = -\sqrt{2(c - G(h(2I-t))}$. On vérifie de même que $\frac{dx}{dt} = y$ et $\frac{dy}{dt} = -g'(x)$. Ainsi (x,y) construit de la sorte est solution de (S) pour $t \in [0, 2I]$. Mais $x(2I) = h(0) = a$ et $y(2I) = 0$ par conséquent la trajectoire part de $(a,0)$ à l'instant $t = 0$ et s'y retrouve pour la première fois à $t = 2I$: $\mathcal{C}$ est une trajectoire périodique de période $T = 2I$.

27.3.4. Nous avons ici $a = -\xi, b = \xi$ et $c = G(-\xi) = G(\xi)$. Ainsi la période T vaut

$$T(\xi) = 2\int_{-\xi}^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{2(G(\xi) - G(x))}} \quad \text{ou encore} \quad T(\xi) = 4\int_{0}^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{2(\xi^2 - x^2)H(x)}}.$$

Faisons alors le changement de variable $x = \xi \sin\theta$, il vient

$$dx = \xi\cos\theta d\theta = \sqrt{\xi^2 - x^2}d\theta$$

pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $T(\xi) = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{H(\sin\theta)}}$.

27.3.5. Lorsque ξ croit, les coefficients des puissances de $\sin\theta$ dans $H(\sin\theta)$ croissent car $H(x) = a_{2n+2}x^{2n} + \cdots + (a_{2n+2}\xi^{2n} + \cdots a_2)$ et les a_{2p} sont positifs. Par conséquent T est une fonction strictement décroissante de ξ. Lorsque $\xi \to +\infty$ nous avons $T(\xi) \to 0$ car

$$H(\sin\theta) \geqslant a_{2n+2}\xi^{2n} + \cdots + a_2$$

fait que

$$T(\xi) \leqslant \pi\sqrt{2}(a_{2n+2}\xi^{2n} + \cdots a_2)^{-1}.$$

Lorsque $\xi \to 0$, nous avons $H(\sin\theta) \to a_2$, uniformément pour $\theta \in \mathbb{R}$ par conséquent $T(\xi) \to \pi\sqrt{2}a_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}}$ car $\omega = g'(0) = 2a_2$. Il en résulte que $T(\xi)$ prend toutes les valeurs entre 0 et $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega}}$. De plus si $T_1 \in]0, \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}}[$ est fixé, la stricte monotonie de T fait que pour chaque T_1, il existe une et une seule solution du type de celles que nous avons construites qui a cette période. En fait il est possible de montrer simplement dans ce cas que toutes les solutions périodiques sont (à un décalage en temps près) celles que nous avons construites.

Commentaires

Remarquons que (S) est un système hamiltonien, *i.e.* de la forme (E) de l'énoncé 19, avec $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$.

Par rapport au problème 26, puisque le hamiltonien est moins général (il correspond au mouvement d'une particule de masse 1 dans un champ de forces $-g(x)$), il est possible de décrire de manière presque complète la dynamique.

Le cas physique le plus classique est le pendule pesant, c'est-à-dire lorsque $g(x) = -\omega^2 \sin x$ avec $\omega > 0$. Il résulte dans ce cas du numéro 27.3.3. que la période d'oscillation de ce pendule est donnée par la formule (bien connue en physique) :

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_m}{2}\sin^2\theta}}$$

où θ_m est l'angle (entre 0 et π) d'amplitude maximale . Lorsque θ_m est petit, on retrouve bien que $T = \frac{2\pi}{\omega} + O(\theta_m^2)$ (*i.e.* jusqu'à l'ordre un la période ne dépend pas de l'amplitude). Le numéro 27.3.4. correspondrait à un développement en série entière de la fonction sinus à l'ordre $2n+1$: $\sin\theta \simeq \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

On peut aussi vérifier que l'analyse du numéro 27.3.5. se reconduit pour le pendule pesant : T est une fonction croissante de l'amplitude θ_m, elle varie entre $\frac{2\pi}{\omega}$ (pour $\theta_m = 0$) et $+\infty$. De plus pour chaque nombre $T \in]\frac{2\pi}{\omega}, +\infty[$, il existe une et une seule solution (à un décalage en temps près).

Corrigé 28

28.3.1. Nous avons $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = xy - ax^2 - y\sin x - \alpha y^2$. Mais, il existe une constante $K = K(a,\alpha)$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|xy - ax^2 - y\sin x - \alpha y^2\right| \leqslant K(x^2+y^2+1).$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}(1+x^2+y^2) \leqslant K(1+x^2+y^2)$$

et

$$\frac{d}{dt}(1+x^2+y^2) \geqslant -K(1+x^2+y^2).$$

Considérons alors une solution maximale $(x(t), y(t))$ de (S), définie sur l'intervalle $]T_-, T_+[$ avec $-\infty \leqslant T_- < T_+ \leqslant +\infty$. Nous voulons prouver que $T_\pm = \pm\infty$. La première inégalité ci-dessus montre que si $t_0 \in]T_-, T_+[$ alors

$$1 + x(t^2) + y^2(t) \leqslant (1 + x(t_0)^2 + y(t_0)^2)e^{K(t-t_0)}$$

$t_0 \leqslant t < T_+$. Si nous avions $T_+ < \infty$ alors

$$1 + x(t)^2 + y(t)^2 \leqslant (1 + x(t_0)^2 + y(t_0)^2)e^{K(T_+-t_0)} \equiv M_0 < \infty.$$

et par conséquent pour $t_1, t_2 \in [t_0, T_+[$,

$$|x(t_1) - x(t_2)| + |y(t_1) - y(t_2)| \leqslant C|t_1 - t_2|,$$

où C ne dépend que de M_0, a, α et L (on a écrit pour cela $z(t_1) - z(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dz}{dt}(t)dt$ pour $z \in \{x, y\}$ puis utilisé (S)).

D'après le critère de Cauchy, les fonctions $x(.)$ et $y(.)$ possèdent donc une limite lorsque $t \to T_+^-$: x_1 et y_1. Nous pouvons alors appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à (S) à l'instant $t = T_+$ avec $x(T_+) = x_1$ et $y(T_+) = y_1$, ce qui nous permet de prolonger $(x(t), y(t))$ $t \in]T_-, T_+[$ au-delà de T_+ et contredit son caractère maximal. Nous avons donc $T_+ = +\infty$. Pour T_- nous procédons de même en utilisant cette fois-ci l'inégalité $\frac{d}{dt}(1+x^2+y^2) \geqslant -K(1+x^2+y^2)$.

28.3.2. Dans ce qui précède, nous avons obtenu que

$$1 + x^2 + y^2 \leqslant (1 + x_0^2 + y_0^2)e^{Kt},$$

borne qui tend vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$.

Observons que lorsque $\alpha = 0$, l'équation (E) possède une intégrale première obtenue par multiplication par $\frac{dx}{dt}$ puis intégration :

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + ax\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt}\sin x = L\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{a}{2}x^2 - Lx - \cos x\right) = 0.$$

Ceci incite à considérer la fonction

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{a}{2}x^2 - Lx - \cos x.$$

Tout d'abord, et ce quel que soit α,

$$\frac{d}{dt}V(x, \frac{dx}{dt}) = -\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2;$$

de sorte que pour $\alpha \geqslant 0$,

$$V\left(x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right) \leqslant V\left(x(0), \frac{dx}{dt}(0)\right). \tag{1}$$

Par ailleurs, $\forall C \in \mathbb{R}$,

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad V(x, y) \leqslant C\right\} \text{ est borné .} \tag{2}$$

En effet nous avons, $2Lx \leqslant \frac{a}{2}x^2 + \frac{2L^2}{a}$ et donc

$$V(x, y) \geqslant \frac{y^2}{2} + \frac{a}{2}x^2 - 1 - \frac{a}{4}x^2 - \frac{L^2}{a}$$

soit

$$V(x, y) \geqslant \frac{a}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 - \frac{L^2}{a^2}.$$

Ainsi si $V(x, y) \leqslant C$,

$$\frac{a}{4}x^2 + \frac{y^2}{2} \leqslant C + 1 + \frac{L^2}{a^2}$$

ce qui prouve (2). Mais alors (1) et (2) entraînent immédiatement que $(x(t), y(t))$ est borné lorsque $t \to +\infty$.

28.3.3. Dans ce qui précède, la borne sur $(x(t), y(t))$ est obtenue par l'inégalité

$$\frac{a}{4}x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2 \leqslant 1 + \frac{L^2}{a^2} + V\left(x(0), \frac{dx}{dt}(0)\right).$$

Elle dépend donc de la donnée initiale. Cela provient du fait que dans le cas $\alpha > 0$, nous ne faisons pas usage du terme $-\alpha(\frac{dx}{dt})^2$ qui force la décroissance de $V(x(t), y(t))$. Pour δ à déterminer, nous introduisons alors la fonction modifiée $V_\delta(x, y) = V(x, y) + \delta xy$ de sorte que

$$\frac{dV_\delta}{dt} = -\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \delta x\left(L + \sin x + ax + \alpha\frac{dx}{dt}\right).$$

Ainsi ($V_\delta \equiv V_\delta(x, y)$)

$$\frac{dV_\delta}{dt} + (\alpha - \delta)y^2 + \alpha\delta xy + a\delta x^2 + \delta(L + \sin x)x = 0. \tag{3}$$

Ce que nous avons gagné par rapport au cas $\delta = 0$, c'est qu'au lieu de la forme quadratique αy^2 (qui est certes positive mais dégénérée) nous avons la forme quadratique

$$(x, y) \mapsto (\alpha - \delta)y^2 + \alpha\delta xy + a\delta x^2$$

qui peut être rendue positive (pour $\delta > 0$ et petit). En effet pour $\delta \leqslant \delta_0 \equiv \min(\frac{\alpha}{4}, \frac{a}{\alpha})$ nous avons

$$(\alpha - \delta)y^2 + \alpha xy + a\delta x^2 - \left(\frac{\alpha y^2}{4} + \frac{a\delta}{2}x^2\right) =$$

$$= \left(\frac{3\alpha}{4} - \delta\right)y^2 + \alpha\delta xy + \frac{a\delta}{2}x^2 \geqslant (\text{ car } \delta \leqslant \frac{\alpha}{4}) \geqslant$$

$$\frac{\alpha}{2}y^2 + \alpha\delta xy + \frac{a\delta}{2}x^2 = \frac{\alpha}{2}(y + \delta x)^2 + \frac{\delta}{2}(a - \alpha\delta)x^2 \geqslant 0.$$

Ainsi pour ce choix de δ,

$$(\alpha - \delta)y^2 + \alpha\delta xy + a\delta x^2 \geqslant \frac{\alpha y^2}{4} + \frac{a\delta}{2}x^2.$$

Revenons alors à (3) que nous réécrivons

$$\frac{dV_\delta}{dt} + W_\delta = 0 \tag{4}$$

avec $W_\delta \equiv (\alpha - \delta)y^2 + \alpha\delta xy + a\delta x^2 + \delta(L + \sin x)x$.

Nous avons

$$\frac{ax^2}{8} + \frac{y^2}{4} \leqslant V_\delta(x, y) + M_1 \tag{5}$$

pour $\delta \leqslant \delta_1 \equiv \min(\delta_0, \frac{\sqrt{a}}{2})$. En effet

$$\begin{aligned} V_\delta(x, y) - \frac{ax^2}{8} - \frac{y^2}{4} &\geqslant V_\delta(x, y) - \frac{ax^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{ax^2}{8} \geqslant \\ &\geqslant \frac{ax^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \delta xy + \frac{ax^2}{8} - Lx - \cos x \\ &\geqslant \frac{ax^2}{8} - Lx - \cos x \geqslant -1 - \frac{2L^2}{a} \equiv -M_1. \end{aligned}$$

Par ailleurs $W_\delta \geqslant \frac{\alpha y^2}{4} + \frac{a\delta}{4}x^2 - M_2$ avec $M_2 = \frac{\delta(1+|L|)}{a}$. Ainsi revenant à (4) nous avons

$$\frac{dV_\delta}{dt} + \theta V_\delta \leqslant M_3$$

avec $\theta > 0$ choisi de sorte que la forme quadratique

$$\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) y^2 + \left(\frac{a\delta}{2} - a\theta\right) x^2 - 2\theta\delta xy$$

soit définie positive ($\theta = \theta(a, \alpha, \delta)$).

Mais alors

$$V_\delta(x(t), y(t)) \leqslant V_\delta(x(0), y(0))e^{-\theta t} + M_3\frac{e^{-\theta t} - 1}{\theta},$$

et avec (5) nous obtenons le résultat demandé.

Commentaires

Il s'agit d'un problème relativement technique comme l'est souvent la théorie qualitative des systèmes d'équations différentielles.

Nous avons établi au numéro 28.3.3. que lorsque $\alpha > 0$ (et $a > 0$) pourvu que l'on attende suffisamment longtemps, la dynamique a lieu dans une boule *indépendante* de la donnée initiale. On dit alors que (E), ou (S), possède un borné absorbant. C'est une forme forte de dissipation (le terme $\alpha\frac{dx}{dt}$ représente un terme de frottement) ou encore d'irréversibilité de ce système dynamique. Il est intéressant de noter que la preuve de cette propriété s'est appuyée sur la structure hamiltonienne du système (E) lorsque $\alpha = 0$. En effet la fonction V, $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{a}{2}x^2 - Lx - \cos x$, qui apparaît au numéro 28.3.2. est le hamiltonien, H, qui permet d'écrire (S) de l'énoncé 21 page 24 sous la forme (E) de l'énoncé 19 page 12 dans le cas où $\alpha = 0$.

Corrigé 29

29.3.1. Substituons $y(x) = z(x)e^{-r(x)}$ dans (F), il vient

$$e^{-r}(z'' + (p - 2r')z' + (\sigma - \lambda)z) = 0$$

avec $\sigma = q - r'' - pr' + r'^2$.

Prenons alors $r(x) = \frac{1}{2}\int_a^x p(y)dy$, nous obtenons $\sigma = q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2$.

29.3.2. Multiplions la première équation de (E) par $\overline{z}(x)$ et intégrons sur $]a,b[$. Il vient

$$\lambda \int_a^b |z(x)|^2 dx = \int_a^b \sigma(x)|z(x)|^2 dx + \int_a^b \frac{d^2z}{dx^2}\overline{z}dx.$$

Mais par intégration par parties puisque $z(a) = z(b) = 0$,
$\int_a^b \frac{d^2z}{dx^2}\overline{z}dx = -\int_a^b |\frac{dz}{dx}|^2 dx$ et donc

$$\lambda \int_a^b |z(x)|^2 dx = \int_a^b \left(\sigma(x)|z(x)|^2 - \left|\frac{dz}{dx}\right|^2\right) dx.$$

S'il existe $y \not\equiv 0$ solution de (F) alors $z = ye^r$ est solution non identiquement nulle de (E) et donc $\int_a^b |z(x)|^2 dx > 0$ de sorte que

$$(1) \quad \lambda = \frac{\int_a^b (\sigma(x)|z(x)|^2 - |\frac{dz}{dx}|^2)dx}{\int_a^b |z(x)|^2 dx} \in \mathbb{R}.$$

29.3.3. L'ensemble des solutions de $z'' + (\sigma - \lambda)z = 0$ forme un espace vectoriel, $\mathcal{E}$, de dimension 2. Observons tout d'abord que si z_1 et z_2 sont deux solutions alors $W(z_1, z_2) \equiv z_1, z_2' - z_2 z_1'$ vérifie $W' = z_1 z_2'' - z_2 z_1'' = 0$.
Par conséquent W est constant.
Soit alors φ_1 (resp. φ_2) la solution de $z'' + (\sigma - \lambda)z = 0$ qui vérifie $\varphi_1(a) = 1$, $\varphi_1'(a) = 0$ (resp. $\varphi_2(a) = 0, \varphi_2'(a) = 1$). Nous avons $W(\varphi_1, \varphi_2) = 1$ de sorte que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ constitue une base de $\mathcal{E}$. Alors si z_1 et z_2 sont solutions de (E),

$$z_1 = \alpha_1\varphi + \beta_1\psi, \quad z_2 = \alpha_2\varphi + \beta_2\psi$$

et

$$W(z_1, z_2) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)W(\varphi_1, \varphi_2) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Mais $z_1(a) = z_2(a) = 0$ d'où $W(z_1, z_2) = 0$ et donc z_1 et z_2 sont liés : l'ensemble des solutions de (E) forme un espace vectoriel de dimension au plus égal à 1. Il en est de même pour (F).

29.3.5. Soient alors $z_i = y_i e^r$. Nous avons $z_i(x) > 0$ pour $x \in\ ]a,b[$. Ainsi multipliant la première équation de (E), que vérifie z_1, par z_2 et intégrant sur $]a,b[$ nous obtenons

$$\lambda_1 \int_a^b z_1 z_2 dx = \int_a^b \sigma z_1 z_2 dx + \int_a^b \frac{d^2 z_1}{dx^2} z_2 dx$$

et de manière similaire

$$\lambda_2 \int_a^b z_1 z_2 dx = \int_a^b \sigma z_1 z_2 dx + \int_a^b \frac{d^2 z_2}{dx^2} z_1 dx.$$

Mais après intégrations par parties,

$$\int_a^b \frac{d^2 z_1}{dx^2} z_2 dx = -\int_a^b \frac{dz_1}{dx}\frac{dz_2}{dx} dx = \int_a^b \frac{d^2 z_2}{dx^2} z_1 dx$$

et donc $(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b z_1 z_2 dx = 0$.

Si $z_i(x) > 0$, $\int_a^b z_1 z_2 dx \neq 0$ et alors $\lambda_1 = \lambda_2$. Mais nous avons vu que pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ l'espace vectoriel des solutions de (F) est au plus égal à 1 donc y_1 et y_2 sont proportionnelles.

29.3.5. Lorsque $\sigma \leqslant 0$, la formule (1) donnant λ montre directement que $\lambda < 0$.

Commentaires

Le problème (F) considéré ici est un des problèmes de Sturm-Liouville qui se rencontre dans divers domaines de la physique mathématique. Il s'agit d'un problème aux valeurs propres pour l'opérateur linéaire $y \mapsto \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy$. Toutefois cet opérateur n'est pas continu sur un espace du type $\mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{C})$. Il est possible de montrer que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que (F) possède une solution y non identiquement nulle est une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $-\infty$. De plus il est possible de construire des vecteurs propres associés qui permettent (dans un sens à préciser) de décomposer sous forme de série toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{C})$. Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'ouvrage de H. Reinhard : *Équations différentielles, fondements et applications* paru chez Dunod.

Corrigé 30

30.3.1. Écrivons $P(x) = A(x-\alpha)^3$, alors $(\frac{dx}{dt})^2 = A(x-\alpha)^3$. Si $A > 0$, nous avons toujours $x(t) \geqslant \alpha$ et si $A < 0$ nous avons toujours $x(t) \leqslant \alpha$. Plaçons nous dans le cas $A > 0$ et prenons $x_0 > \alpha$. Dans ce cas $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{A(x-\alpha)^3}$. En fait nous avons soit $\frac{dx}{dt} = \sqrt{A(x-\alpha)^3}$ soit $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{A(x-\alpha)^3}$ sur tout intervalle $]-\varepsilon,\varepsilon[$ où $x(t) > \alpha$. En effet, si $\frac{dx}{dt}$ prend à la fois des valeurs positives et négatives, il doit s'annuler (toute fonction dérivée possède la propriété des valeurs intermédiaires : théorème de Darboux, voir les commentaires à ce problème page 153) en $t_0 \in]-\varepsilon,\varepsilon[$.

Mais si $\frac{dx}{dt}(t_0) = 0$ alors $x(t_0) = \alpha$ ce qui contredit le fait que $x(t) > \alpha$. Supposons donc que $\frac{dx}{dt} = \sqrt{A(x-\alpha)^3}, x(0) = x_0 > \alpha$. Nous avons, tant que $x(t) > \alpha$, $\frac{dx}{\sqrt{A(x-\alpha)^3}} = dt$ et donc $x(t) = \alpha + \frac{4(x_0-\alpha)}{(2-\sqrt{A(x_0-\alpha)}t)^2}$. Cette solution ne peut alors être prolongée en une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Le cas $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{A(x-\alpha)^3}$ conduit à la même conclusion.

Le cas $A < 0, \quad x_0 < \alpha$ est identique. Ainsi seul le cas $x_0 = \alpha$ conduit à une solution (constante) bornée : $x(t) = \alpha, \quad \forall t$.

30.3.2. Écrivons $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où Q est de signe constant. Si $Q(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, nous devons prendre $x(0) = x_0 \geqslant \alpha$. Dans le cas où $x_0 > \alpha$, nous avons comme précédemment : soit $\frac{dx}{dt} = \sqrt{(x-\alpha)Q(x)}$, soit $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{(x-\alpha)Q(x)}$. Dans le premier cas, avec $q > 0$ tel que $Q(x) \geqslant q^2$, nous avons

$$\frac{d}{dt}\sqrt{x-\alpha} = \frac{\sqrt{Q(x)}}{2} \geqslant \frac{1}{2}q$$

et donc pour $t \geqslant 0$, $x - \alpha \geqslant (\frac{qt}{2} + \sqrt{x_0 - \alpha})^2$ qui ne peut être prolongée en une fonction bornée. Dans le second cas en changeant t en $-t$ nous sommes ramenés au cas précédent. Si $Q(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nous devons prendre $x_0 \leqslant \alpha$ et dans le cas $x_0 < \alpha$ on obtient comme précédemment que x ne peut être prolongée en une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Seul le cas $x(0) = \alpha$, là encore, conduit à une solution bornée $x(t) = \alpha, \forall t$.

30.3.3. Écrivons $P(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)^2$ et plaçons nous dans le cas $A > 0$ et $\alpha < \beta$ (les autres cas sont semblables). Nous avons donc $x \geqslant \alpha$, faisons le changement de variable $x = \alpha + s^2(\beta - \alpha)$ où $s = s(t) \geqslant 0$. Il vient alors $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{A(\beta-\alpha)}}{2}(1-s)^2$ et donc $\frac{d}{dt}(Argth\, s) = \frac{\sqrt{A(\beta-\alpha)}}{2}$. Ainsi

$$s(t) = th\left(\frac{\sqrt{A(\beta-\alpha)}}{2}t + \frac{\sqrt{x_0-\alpha}}{\beta-\alpha}\right)$$

qui est une fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ et comprise entre -1 et 1. Il en résulte que $x(t) = \alpha + s(t)^2(\beta - \alpha)$ est une solution définie et bornée sur $\mathbb{R}$ (comprise entre α et β).

30.3.4. Écrivons $P(x) = A(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ avec $\alpha < \beta < \gamma$. Si $A > 0$, pour avoir une solution bornée, nous devons prendre $x_0 \in [\alpha, \beta]$ alors que si $A < 0$, il faut prendre $x_0 \in [\beta, \gamma]$. Plaçons nous dans le premier cas, le second étant similaire. Dans ce cas on fait le changement variable $x = \alpha + (\beta - \alpha)\sin^2 \xi$ et alors avec $\nu = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ on trouve que

$$t = \frac{2}{\sqrt{A(\gamma-\alpha)}}\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{ds}{\sqrt{1-\nu\sin^2(s)}} \text{ où } \xi_0 = Arc\sin\sqrt{\frac{x_0-\alpha}{\beta-\alpha}},$$

qui est une représentation paramétrique de la solution de $\frac{dx}{dt} = \sqrt{P(x)}$ vérifiant $x(0) = x_0$. On vérifie alors que cette solution peut être prolongée en une fonction périodique de période $\Lambda = \frac{2}{\sqrt{A(\gamma-\alpha)}}\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1-\nu\sin^2(s)}}$. Ainsi pour $x_0 \in]\alpha, \beta[$, on a une solution périodique définie sur $\mathbb{R}$ qui est par conséquent bornée.

Commentaires

Là encore il s'agit d'une étude qualitative des solutions d'une équation différentielle : on ne cherche pas à savoir quelle est la solution issue d'une donnée initiale, mais quelles sont les solutions bornées. L'étude de la même question dans le cas où P est un polynôme de degré 2 à coefficient réels aurait conduit à la construction des fonctions Sinus et Cosinus. Au cours de ce problème, et plus précisément au numéro 30.3.4, nous voyons apparaître sous forme paramétrique, une famille de fonctions elliptiques qui « ressemble » à la famille des fonctions trigonométriques. Le lecteur intéressé pourra utilement se reporter au livre de G. Valiron : *Théorie des fonctions* récemment réédité par Masson.

Au numéro 30.3.1. nous avons fait usage du résultat, fort utile en théorie des équations différentielles, qui suit.

Théorème (Darboux). *Étant donné une fonction f dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, la fonction f' possède alors la propriété des valeurs intermédiaires sur I.*

Remarque. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, f' étant continue, elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Ce qui est remarquable c'est que cette propriété persiste lorsque f est simplement dérivable.

Démonstration. Donnons nous $\alpha = f'(x)$ et $\beta = f'(b)$ deux points de $f'(I)$. Il s'agit de montrer que pour tout λ compris entre α et β, il existe $c \in I$ tel que $\lambda = f'(c)$.

Supposons alors, ce qui ne restreint pas la généralité, que $a < b$. Soient alors g et h définies sur $[a, b]$ comme suit :

- $g(a) = f'(a)$ et pour $x > a, g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,
- $h(b) = f'(b)$ et pour $x < b, h(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

Ces deux fonctions sont continues sur $[a, b]$ (dérivabilité de f en a et b) et $g(b) = f(a)$. Ainsi les intervalles $g([a, b])$ et $h([a, b])$ ont un point commun, par conséquent leur réunion J est un intervalle. Mais α et β sont dans J par conséquent $\lambda \in J$ et soit $\lambda \in g([a, b])$, soit $\lambda \in h([a, b])$. Dans le premier cas, si $\lambda \neq f'(a)$, nous avons donc $\lambda = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour un certain $x \in]a, b]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ et alors $\lambda = f'(c)$. Le second cas est identique ce qui achève la démonstration. ❑

Corrigé 31

31.3.1. Calculons :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -x^2 - 2y^2.$$

Ainsi $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \leqslant 0$ et donc pour $t \geqslant 0$, $x(t)^2 + y(t)^2 \leqslant x_0^2 + y_0^2$. Par ailleurs, $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -2(x^2 + 2y^2) \geqslant -4(x^2 + y^2)$ et donc $\frac{d}{dt}(e^{4t}(x(t)^2 + y(t)^2) \geqslant 0$ ainsi

$$x^2(t) + y^2(t) \leqslant e^{-4t}(x_0^2 + y_0^2), \quad t \leqslant 0\,. \tag{1}$$

Soit alors $]T_-, T_+[$ l'intervalle d'existence d'une solution maximale avec $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Nous avons $-\infty \leqslant T_- < 0 < T_+ \leqslant +\infty$. Si $T_+ < \infty$ alors x et y sont bornés au voisinage gauche de T_+ et il en est de même pour $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ d'après (S). Par application du critère de Cauchy (par exemple $|x(t_1) - x(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt}(s)ds\right| \leqslant M|t_1 - t_2|$) nous en déduisons que $x(t)$ et $y(t)$ possèdent une limite x_1 et y_1 en $t = T_+$ ce qui permet de prolonger $(x(t), y(t))$ par application du théorème de Cauchy-Lipschitz en ce point et contredit par là même son caractère maximal. La situation en T_- est identique grâce à (1).

Revenons à $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -x^2 - 2y^2$, nous avons :

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \leqslant -2(x^2 + y^2),$$

et donc pour $t \geqslant 0$

$$x(t)^2 + y(t)^2 \leqslant (x_0^2 + y_0^2)e^{-2t}, \tag{2}$$

montrant que $\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = 0$.

31.3.2. Donnons nous $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(x(t), y(t))$ la solution de (S) vérifiant $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. S'il existe t_0 tel que $x(t_0) = y(t_0) = 0$ alors en t_0 nous avons deux solutions de (S) : $(x(t), y(t))$ et la solution identiquement nulle. Par unicité des solutions du problème de Cauchy, il en résulte que $x(t) = 0, y(t) = 0, \quad \forall t$ et donc $x_0 = y_0 = 0$. Nous avons donc montré que

$$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists t_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x(t_0), y(t_0)) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) = 0,$$

par contraposition nous obtenons que

$$\text{si} \quad (x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{alors} \quad \forall t \in \mathbb{R}, (x(t), y(t)) \neq 0.$$

31.3.3. Désignons par A la matrice diagonale 2×2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et par $B(u)$ avec $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice $B(u) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ -x & 0 \end{pmatrix}$.

Le système (S) s'écrit

$$\frac{du}{dt} = -Au + B(u)u. \tag{3}$$

Observons que $\forall u \in \mathbb{R}^2, ||B(u)|| \leqslant |u|$ où $|u| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, u = (x, y)$.

Nous voyons alors que $\Lambda = \frac{(Au,u)}{|u|^2}$ et d'après la question précédente puisque $u_0 \neq 0, \quad u \neq 0$ et Λ a bien un sens. Nous avons

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(Au,u) &= \left(A\frac{du}{dt}, u\right) + \left(Au, \frac{du}{dt}\right), \\ &= \left(\frac{du}{dt}, \left({}^tA + A\right)u\right), \\ &= 2\left(\frac{du}{dt}, Au\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{1}{|u|^2}\left(\frac{du}{dt}, Au\right) - \frac{(Au,u)}{|u|^4}\left(\frac{du}{dt}, u\right), \\ &= \frac{1}{|u|^2}\left(\frac{du}{dt}, Au\right) - \frac{\Lambda}{|u|^2}\left(\frac{du}{dt}, u\right), \\ &= \left(\frac{du}{dt}, \frac{Au - \Lambda u}{|u|^2}\right). \end{aligned}$$

En utilisant (3) nous obtenons donc que

$$\frac{1}{2}\frac{d\Lambda}{dt} = -\left(Au, \frac{Au-\Lambda u}{|u|^2}\right) + \left(B(u)u, \frac{Au-\Lambda u}{|u|^2}\right).$$

Mais $(Au - \Lambda u, u) = (Au, u) - \Lambda|u|^2 = 0$ et par conséquent

$$\frac{1}{2}\frac{d\Lambda}{dt} + \frac{|Au-\Lambda u|^2}{|u|^2} = \frac{(B(u)u, Au-\Lambda u)}{|u|^2}. \tag{4}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(B(u)u, Au-\Lambda u)| \leqslant |B(u)u||Au-\Lambda u|.$$

Mais puisque $||B(u)|| \leqslant |u|$,

$$\begin{aligned} |(B(u)u, Au-\Lambda u)| &\leqslant |u|^2|Au-\Lambda u|, \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(|Au-\Lambda u|^2 + |u|^4\right). \end{aligned}$$

Ainsi revenant à (4) nous obtenons

$$\frac{d\Lambda}{dt} + \frac{|Au-\Lambda u|^2}{|u|^2} \leqslant |u|^2. \tag{5}$$

Puisque $\Lambda = \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} \geqslant 1$ nous déduisons de (5) que

$$\frac{d\Lambda}{dt} \leqslant \Lambda|u|^2.$$

Mais alors

$$\frac{d}{dt}(\Lambda(t)\exp - \int_0^t |u(s)|^2 ds) = (\exp - \int_0^t |u(s)|^2 ds)(\frac{d\Lambda}{dt}(t) - \Lambda|u(t)|^2) \leqslant 0.$$

Ainsi $\Lambda(t)\exp - \int_0^t |u(s)|^2 ds$ possède une limite lorsque $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\Lambda(t)\exp - \int_0^t |u(s)|^2 ds\right) = m.$$

Nous avons vu que (voir (2)) $|u(t)|^2 \leqslant |u_0|^2 e^{-2t}$. Par conséquent

$$\int_0^\infty |u(s)|^2 ds < \infty$$

et donc $\lim_{t\to+\infty}\Lambda(t) = m.\exp\int_0^\infty |u(s)|^2 ds$.

31.3.4. Revenons à (5) que nous intégrons entre 0 et $t \geqslant 0$:

$$\Lambda(t) + \int_0^t |A\xi - \Lambda\xi|^2(s)ds \leqslant \Lambda(0) + \int_0^t |u(s)|^2 ds$$

avec $\xi(s) \equiv \frac{u(s)}{|u(s)|}$. Puisque $\int_0^\infty |u(s)|^2 ds < \infty$, il en résulte que

$$\int_0^\infty |A\xi - \Lambda\xi|^2(s)ds < \infty.$$

Nous affirmons qu'il existe une suite $t_n \to +\infty$ telle que $A\xi(t_n) - \Lambda(t_n)\xi(t_n)$ tend vers zéro. Sinon, il existerait $\varepsilon_0 > 0$ et $T_0 \geqslant 0$ tels que
$\forall t \geqslant T_0, |A\xi(t) - A(t)\xi(t)| \geqslant \varepsilon_0$ ce qui contredit le fait que

$$\int_0^\infty |A\xi - \Lambda\xi|^2(s)ds < \infty.$$

La suite $(\xi(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}^2$ puisque $|\xi(t_n)| = \left|\frac{u(t_n)}{|u(t_n)|}\right| = 1$. Nous pouvons donc en extraire une sous-suite $(\xi(t_{\varphi(n)}))$ convergente :

$$\lim_{n\to\infty}\xi(t_{\varphi(n)}) = \xi_\infty \quad \text{avec} \quad |\xi_\infty| = 1.$$

Puisque $\Lambda(t_n) \to l$ et $A\xi(t_n) - \Lambda(t_n)\xi(t_n) \to 0$ nous avons

$$A\xi(t_{\varphi(n)}) - \Lambda(t_{\varphi(n)})\xi(t_{\varphi(n)}) \to 0 \quad \text{et donc} \quad A\xi_\infty - l\xi_\infty = 0.$$

Puisque $\xi_\infty \neq 0$, il en résulte que l est valeur propre de A soit $l \in \{1, 2\}$.

Commentaires

Là encore il s'agit de théorie qualitative. Sans pouvoir intégrer explicitement (S), nous avons pu préciser la vitesse de convergence de $(x(t), y(t))$ vers zéro. En fait il est même possible de montrer, avec les notations du numéro 31.3.4., que lorsque $(x_0, y_0) \neq 0, \quad (x(t), y(t)) \sim \xi_\infty e^{-lt}$. Il faut pour cela considérer l'équation différentielle que vérifie $\xi(t) = \frac{(x(t),y(t))}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}}$.

La démonstration est laissée au lecteur.

Corrigé 32

32.3.1. Désignons par n la dimension de cet espace vectoriel. La dérivée n ème de f : $f^{(n)}$ est alors combinaison linéaire des $f^{(k)}, k = 0, ..., n-1$:

$$\exists \alpha_0, ..., \alpha_{n-1} \text{ tels que } f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{(k)}.$$

Ainsi f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, elle s'écrit donc comme somme de produits d'exponentielles complexes et de polynômes : $f(x) = \sum_{j=1}^{N} P_j(x) e^{\omega_j x}, \omega_j \in \mathbb{C}$ et $P_j \in \mathbb{C}[X]$. La démonstration de ce point classique est rappelée dans les commentaires à ce problème à la page 160.

Montrons alors la réciproque. Tout d'abord observons que si f_1 et f_2 vérifient la propriété (D) il en est de même pour $f_1 + f_2$. Ainsi il suffit de montrer que si $f(x) = P(x)e^{\omega x}, \forall x \in \mathbb{R}$ alors f vérifie la propriété (D). Soit alors n le degré du polynôme P. Nous avons $P^{(n+1)} \equiv 0$ et donc $e^{\omega x} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f(x)e^{-\omega x}) = 0$. Mais cette dernière relation s'écrit grâce à la formule de Leibnitz :

$$f^{(n+1)}(x) = -\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k \omega^k f^{(n+1-k)}(x).$$

Ainsi $f^{(n+1)}$ est combinaison linéaire des $f^{(k)}, k = 0, ..., n$. On établit alors aisément par récurrence que toutes les dérivées de f sont combinaisons linéaires de ces mêmes $f^{(k)}$.

32.3.2. Soit $(f_{\tau_1}, ..., f_{\tau_n})$ une base de l'espace vectoriel engendré par les f_τ lorsque τ décrit $\mathbb{R}$ (on suppose donc que cet espace vectoriel n'est pas réduit à zéro). Soit alors $\tau \in \mathbb{R}$, il existe donc des coefficients $\mu_1(\tau), ..., \mu_n(\tau)$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+\tau) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\tau) f(x+\tau_i). \qquad (*)$$

Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, dérivons alors cette identité k fois par rapport à x puis faisons $x = 0$, il vient :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(\tau_i)\mu_i(\tau)$$

c'est-à-dire que toutes les dérivées de f sont combinaisons linéaires des fonctions $\mu_1, .., \mu_n$ et donc f vérifie (D). D'après la question précédente, f est une somme de produits d'exponentielles complexes et de polynômes. La réciproque sera montrée si nous établissons que pour $f\ :\ f(x) = P(x)e^{\omega x}$, l'ensemble des $(f_\tau)_{\tau\in\mathbb{R}}$ engendre un espace vectoriel de dimension finie car si f et g ont cette propriété, il en est de même pour $f + g$. Mais par la formule de Taylor :

$$P(x+\tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\tau)}{k!} x^k$$

où n est le degré de P. Ainsi

$$f(x+\tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{\omega\tau} P^{(k)}(\tau)}{k!} x^k e^{\omega x}$$

et les fonctions f_τ sont donc combinaisons linéaires des fonctions $x \mapsto x^k e^{\omega x}$, $k = 0, ..., n$.

Il reste à établir que si f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \tau \in \mathbb{R} \quad f(x+\tau) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x+\tau_i)$$

alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit alors $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f est continue. Nous avons par intégration par rapport à x :

$$F(t+\tau) - F(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\tau)(F(t+\tau_i) - F(\tau_i)).$$

Ceci s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\tau) g_i(t) = F(t+\tau) - F(\tau) \qquad (**)$$

où $g_i(t) = F(t+\tau_i) - F(\tau_i)$. Observons que les fonctions (g_i) sont indépendantes. En effet si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(t) = 0, \forall t$$

alors par dérivation

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\tau_i} = 0$$

d'où $\lambda_i = 0, \forall i$ par indépendance des (f_{τ_i}). Rappelons alors le lemme suivant.

Lemme. *Soient* $\{g_1, ..., g_n\}$ *n fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Il y a équivalence entre les propriétés suivantes.*

(i) *Les* (g_i) *sont indépendantes,*

(ii) $\exists t_1, ..., t_n$ *tels que* $det_{i \leqslant i,j \leqslant n}(g_i(t_j)) \neq 0$.

D'après ce résultat (que nous démontrons plus loin) il existe $t_1, ..., t_n$ tels que $det_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(g_i(t_j)) \neq 0$.

Appliquons alors $(\star\star)$ avec $t = t_j$:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(t_j)\mu_i(\tau) = F(t_j + \tau) - F(\tau).$$

Soit alors (a_{ij}) la matrice inverse de $(g_i(t_j))$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(t_k) = \delta_{ik}$, nous avons

$$\forall \tau, \quad \mu_i(\tau) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(F(t_j + \tau) - F(\tau)). \qquad (***)$$

Puisque F est $\mathcal{C}^1$, il résulte de cette formule que les μ_i sont de classe $\mathcal{C}^1$. Prenons alors $x = 0$ dans $(\star)$, il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc F de classe $\mathcal{C}^2$ et par $(\star\star\star)$ les μ_i sont de classe $\mathcal{C}^2$ et ainsi de suite : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Reste à montrer le lemme. Le sens $(ii) \Rightarrow (i)$ est immédiat puisque si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i = 0$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(t_j) = 0, \quad \forall j = 1, ..., n$$

ce qui entraîne avec (ii) que $\lambda_i = 0, i = 1, ..., n$. La réciproque $((i) \Rightarrow (ii))$ s'établit par récurrence sur n. Pour $n = 1$, si $g_1 \neq 0$ alors $\exists t_1$ tel que $g_1(t_1) \neq 0$. Supposons que (i) $\Rightarrow$ (ii) est prouvé pour une valeur de $n \geqslant 1$. Soient $g_1, ..., g_{n+1}, n+1$ fonctions indépendantes, si la propriété (ii) n'a pas lieu, $\forall t_1, ..., t_n, t_{n+1}$ $det_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}(g_i(t_j)) = 0$.

Développons alors ce déterminant par rapport à sa $n + 1$ ème colonne :

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_i g_i(t_{n+1}) = 0, \quad \forall t_{n+1}$$

où les C_i ne dépendent que de $t_1, ..., t_n$. Puisque les $(g_i)_{i=1,...,n+1}$ sont indépendantes, $C_{n+1} = 0$ mais $C_{n+1} = \pm det_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(g_i(t_j))$ et donc il y a contradiction si nous prenons $t_1, ..., t_n$ tels que $det_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(g_i(t_j)) \neq 0$ (ce qui est loisible par hypothèse de récurrence). Ceci achève la preuve du Lemme.

Commentaires

Nous avons affirmé au numéro 32.3.1. que si f est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \frac{d^k f}{dx^k} \tag{1}$$

alors il existe $\omega_1, \ldots, \omega_N \in \mathbb{C}$ et $P_1, \ldots, P_N$ polynômes à coefficients complexes tels que $f(x) = \sum_{j=1}^{N} P_j(x) e^{\omega_j x}$ (attention en général $N \neq n$, N est le nombre de valeurs propres distinctes de la matrice A ci-dessous et donc $N \leqslant n$). Ce résultat est « bien connu » mais prouvons le simplement.

Notons $u = (f, \frac{df}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}})$ de sorte que (1) soit équivalent à

$$(2) \quad \frac{du}{dx} = Au,$$

où A est la matrice $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & & \\ . & . & . & & \\ . & . & . & & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos il existe une matrice $n \times n$ inversible P telle que $A = P^{-1}TP$ où T est une matrice $n \times n$, triangulaire. Ainsi la solution de (2) : $u(x) = e^{At}u(0)$ s'écrit aussi $u(x) = (P^{-1}e^{Tx}P)u(0)$. Mais si $D = \text{diag}\,(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ désigne la partie diagonale de T, nous avons $T = D + N$ où N est nilpotente d'ordre n : $N^n = 0$. De plus en rangeant correctement les valeurs propres ω_i nous pouvons assurer que D et N commutent.

Dans ces conditions $(D + N)^k$ peut se calculer à l'aide de la formule du binôme et finalement

$$\begin{aligned} e^{Tx} = e^{(D+N)x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l+m=k} \frac{k!}{l!m!} D^l N^m \right) \frac{x^k}{k!} = \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} D^l \right) \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{D^m}{m!} N^m \right), \\ &= \text{diag}\left(e^{\omega_1 x}, \ldots, e^{\omega_n x}\right) \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} N^m, \end{aligned}$$

d'où

$$u(x) = P^{-1}\text{diag}\,(e^{\omega_1 x}, \ldots, e^{\omega_n x}) \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} N^m \right) Pu(0).$$

Ceci prouve le résultat annoncé car f est la première composante de u.

Corrigé 33

33.3.1. Prenons $x \geqslant y$, par la formule des accroissements finis

$$f'(x) - f'(y) = f''(c)(x - y) \geqslant \alpha(x - y).$$

Il en résulte que f' est strictement croissante et que $\lim_{y\to-\infty} f'(y) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Par conséquent $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f' est bijective. La dérivée de f', f'', ne s'annule pas, il en résulte que $(f')^{-1}$ est dérivable et a pour dérivée $1/(f'' \circ (f')^{-1})$ qui est continue car f est de classe $\mathcal{C}^2$.

33.3.2. Nous avons puisque $u_0 \geqslant 0$, $G(x, y, t) \geqslant tg(\frac{x-y}{t})$. La fonction g vérifie $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$. En effet $\exists\delta_\pm$ tel que $b(\delta_+) > 0, b(\delta_-) < 0$ et donc pour $z \geqslant \delta_+, b(z) \geqslant b(\delta_+)$ d'où $g(z) \geqslant g(\delta_+)+b(\delta_+)(z-\delta_+)$ et ainsi $\lim_{z\to+\infty} g(z) = +\infty$. De même pour $z \leqslant \delta_-, g(z) \leqslant g(\delta_-) + b(\delta_-)(z - \delta_-)$ d'où $\lim_{z\to-\infty} g(z) = -\infty$.

Il en résulte donc que $\lim_{y\to\pm\infty} G(x, y, t) = +\infty$.
Soit $K = \{y \in \mathbb{R}, G(x, y, t) \leqslant G(x, 0, t)\}$. L'ensemble K est fermé puisque $G(x, ., t)$ est continue et $\inf_{y\in\mathbb{R}} G(x, y, t) = \inf_{y\in K} G(x, y, t)$ par construction de K. Puisque $\lim_{|y|\to+\infty} G(x, y, t) = +\infty$, K est borné. Ainsi K est un compact non vide $(0 \in K)$ de $\mathbb{R}$, la fonction continue $G(x, ., t)$ y atteint son minimum qui est donc la borne inférieure de $G(x, ., t)$ sur $\mathbb{R}$.

33.3.3. Si y est un point où $G(x, ., t)$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}$, nous avons $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, t) = 0$. Mais $\frac{\partial G}{\partial y} = u_0(y) - g'(\frac{x-y}{t}) = u_0(y) - b(\frac{x-y}{t})$.

La fonction $y \to -b(\frac{x-y}{t})$ est strictement croissante, si u_0 est croissante, $\frac{\partial G}{\partial y}$ est donc une fonction strictement croissante de y : elle s'annule donc au plus une fois. Puisque l'existence d'un point de minimum a été prouvé à la question précédente, il existe un et un seul $y(x, t)$ où $G(x, ., t)$ atteint son minimum et de plus

$$u_0(y(x, t)) = b\left(\frac{x - y(x, t)}{t}\right).$$

33.3.4. Nous pouvons écrire cette dernière relation : $y - x + tf'(u_0(y)) = 0$. La fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y, t) = y - xtf'(u_0(y))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + tf''(u_0(y))u_0'(y)$ ne s'annule pas ($\frac{\partial F}{\partial y} \geqslant 1$). Soit $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ et $y_0 \equiv y(x_0, t_0)$. Nous avons $F(x_0, y_0, t_0) = 0$ et d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une unique fonction $z(x, t)$ pour x et t proches de x_0 et t_0 telle que $F(x, z(x, t), t) = 0$ et $z(., .)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (x_0, t_0). Mais $F(x, y, t) = 0$ a une seule solution d'après la question précédente d'où $z(x, t) = y(x, t)$ et y est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

33.3.5. Nous avons $x - y = tf'(u_0(y))$. Puisque $y(., .)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ nous obtenons par dérivation par rapport à x et t :

$$1 - \frac{\partial y}{\partial x} = tu_0'(y)\frac{\partial y}{\partial x}f''(u_0(y)),$$
$$-\frac{\partial y}{\partial t} = f'(u_0(y)) + tu_0'(y)\frac{\partial y}{\partial t}f''(u_0(y)),$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(1 + t u_0'(y) f''(u)\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -f'(u)\left(1 + t u_0'(y) f''(u)\right)^{-1},$$

où $u = u_0(y(x,t))$. Par ailleurs

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = u_0'(y)\left(\frac{\partial y}{\partial t} + f'(u)\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

mais $\frac{\partial y}{\partial t} + f'(u)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ d'où $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$.

33.3.6. La construction de y en $t = 0$ est possible lorsqu'on résout

$$F(x, y, t) = y - x f'(u_0(y))$$

et ainsi $y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ solution de $F(x, y(x,t), t) = 0$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Ainsi y est borné sur $A = [-R, R] \times [0, 1]$ et alors f' étant continue, $f'(u_0(y))$ est bornée sur A comme fonction de x et t : $|f'(u_0(y))| \leqslant M, \forall (x,t) \in A$. Nous avons alors

$$|x - y(x,t))| \leqslant tM, \quad \forall x, |x| \leqslant R, \forall t, t \in [0, 1].$$

Il en résulte que $\lim_{t\to 0} \sup_{|x|\leqslant R} |y(x,t) - x| = 0$ et puisque u_0 est continue elle est uniformément continue sur le compact $|y| \leqslant R + M$ et ainsi

$$\lim_{t\to 0} \sup_{|x|\leqslant R} |u_0(y(x,t)) - u_0(x)| = 0.$$

Commentaires

Nous avons construit une solution régulière du problème de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{2}$$

dans le cas où u_0 est une fonction croissante et f une application strictement convexe par une méthode qui est due à P. Lax dans les années 1950.

F. John a montré à la même époque le résultat remarquable suivant : lorsque u_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et non identiquement nulle, le problème (1) - (2) ne possède pas de solution u dérivable par rapport à x et t ! Montrons cela dans le cas où $f(u) = u^2/2$ (qui vérifie bien $f''(u) = 1 > 0$) et renvoyons au problème 34 page 27 dont l'objet est d'étudier le cas général.

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'une telle fonction existe. Ici (1) s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

et alors si $x(t;x_0)$ désigne la solution locale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t), \qquad (4)$$

$$x(0) = x_0,$$

nous avons $\frac{d}{dt}u(x(t),t) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ par conséquent $u(x(t),t) = u(x_0,0) = u_0(x_0)$ et finalement la solution de (4) est définie pour tout temps et vaut $x(t) = x_0 + tu_0(x_0)$. Par ailleurs, introduisons avec F. John, la fonction v définie par $v(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t),t)$. Nous avons

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x(t),t) + u(x(t),t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x(t),t)$$

et en faisant usage de (3),

$$\frac{dv}{dt} = -v^2.$$

La solution de cette équation différentielle est $v(t) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x_0)(1 + t\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_0))^{-1}$. Lorsque $\frac{\partial u_0}{\partial x} \geqslant 0$ il n'y a aucun problème, mais si u_0 est à support compact (et non identiquement nulle), $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_0) < 0$ et le calcul qui précède conduit à une absurdité à l'instant $t_\star = |\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_0)|^{-1}$.

Étant donné que (1) se rencontre couramment en physique des milieux continus, il faut pouvoir donner un sens aux solutions de cette équation. Ceci est possible à condition de considérer des fonctions discontinues (solutions présentant des chocs dans le langage de la physique). Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage de D. Serre : *Systèmes de lois de conservation* paru chez Diderot.

Corrigé 34

34.3.1. Puisque la fonction $(x,t) \mapsto u(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ nous savons, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence de solutions des équations différentielles ordinaires, qu'il existe une solution maximale sur un intervalle I de $[0,+\infty[$ contenant s en son intérieur, et une fonction ζ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que ζ soit solution de

$$\frac{d\zeta}{dt}(t) = f'(u(\zeta(t),t)), \quad t \in I,$$

avec $\zeta(s) = x_0$. En outre si on note $I =]T^-, T^+[$ et que $T^+ < \infty$ alors $\zeta(t)$ devient infini lorsque t approche T^+ (on renvoie au numéro 26.3.3. pour la preuve). De même si $T^- \neq 0$, $\zeta(t)$ devient infini lorsque t approche T^-. Or compte tenu de (12) page 27, pour $t \in I$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(\zeta(t),t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta(t),t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\zeta(t),t)f'(u(\zeta(t),t)) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x}\right)(\zeta(t),t) = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent $u(\zeta(t), t) = u(x_0, s)$ et ainsi $\zeta(t) = x_0 + f'(u(x_0, s))(t - s)$ reste borné lorsque t approche l'une des bornes de I.

La fonction ζ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ et satisfait à l'équation différentielle recherchée.

34.3.2. Commençons par calculer $\frac{dv}{dt}(t)$. Par la règle de dérivation des fonctions composées, nous savons

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}(t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(\zeta(t), t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\zeta(t), t)\frac{d\zeta(t)}{dt} \\ &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\zeta(t), t).\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pour tous (x, t), nous obtenons par dérivation par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0\,,$$

et ainsi

$$\frac{dv}{dt}(t) = -f''(u(\zeta(t), t))v^2(t).$$

Mais nous avons vu que $u(\zeta(t), t) = u(x_0, s)$, par conséquent

$$\frac{dv}{dt}(t) = -f''(u(x_0, s))v^2(t)$$

qui s'intègre explicitement :

$$v(t) = \frac{v(s)}{1 + (t - s)f''(u(x_0, s))v(s)}.$$

Si la fonction u_0 n'est pas croissante, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u_0'(x_0) < 0$. Prenons alors $s = 0$ dans la formule ci-dessus :

$$v(t) = \frac{u_0'(x_0)}{1 + tf''(u_0(x_0))u_0'(x_0)}$$

Il résulte alors du fait que $f''(u_0(x_0)) \geqslant \alpha > 0, v(t)$ devient infini à l'instant $t = \frac{1}{f''(u_0(x_0))|u_0'(x_0)|}$ contredisant le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction u.

Commentaires

Ce problème prolonge le problème 33 qui lui traite le cas où la donnée initiale u_0 est croissante. Dans ce cas, l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \tag{1}$$

possède une unique solution régulière vérifiant $u(x, 0) = u_0(x)$.

Une des origines de l'équation (1) provient de la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0. \tag{2}$$

En fait, J.M. Burgers, un physicien hollandais, a proposé dans les années 1920 l'équation (2) avec $f(u) = \frac{u^2}{2}$ et $\varepsilon > 0$ comme modèle élémentaire pour la mécanique des fluides. Puis, dans les années 1950 et de manière indépendante, le mathématicien américain F. Cole et le mathématicien autrichien E. Hopf ont fait sensation en résolvant explicitement l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3}$$

en montrant que $u = -2\varepsilon \frac{\varphi_x}{\varphi}$ où

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon t}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \varphi_0(x)\, dx, \tag{4}$$

et $u_0 = -2\varepsilon \frac{(\varphi_0)x}{\varphi_0}$. En fait cette formule ce montre comme suit. On constate que lorsque que u vérifie (3), φ vérifie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

qui est l'équation de la chaleur en une dimension d'espace. Ensuite, l'expression (4) peut s'obtenir de diverses manières, en utilisant par exemple la transformation de Fourier.

Corrigé 35

35.3.1. Puisque Ω est borné, $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$ sont des compacts de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent u, qui est continue, atteint les maximums :

$$u(x_0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x), u(x_1) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

en $x_0 \in \overline{\Omega}$ et $x_1 \in \partial\Omega$. Si $x_0 \in \partial\Omega$ alors $u(x_0) \leqslant \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$ et on a bien

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \leqslant \max_{x\in\partial\Omega} u(x).$$

Si $x_0 \notin \partial\Omega$ alors $x_0 \in \Omega$. Soit alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon_0) \subset \Omega$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $t \in [-1, 1]$, nous avons

$$u(x_0 + \varepsilon_0 t e_i) \leqslant u(x_0), e_i = (0, ...1, 0..., 0),$$

il en résulte que la fonction $t \to u(x_0 + \varepsilon_0 t e_i)$ possède un maximum en $t = 0$. Ainsi

$$\frac{d}{dt}u(x_0 + \varepsilon_0 t e_i)|_{t=0} = 0 \text{ et } \frac{d^2}{dt^2}u(x_0 + \varepsilon_0 t e_i)|_{t=0} \leqslant 0.$$

Or $\frac{d}{dt}u(x_0 + \varepsilon_0 t e_i)|_{t=0} = \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)$ et $\frac{d^2}{dt^2}u(x_0 + \varepsilon_0 t e_i)|_{t=0} = \varepsilon_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x_0)$. Par conséquent $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x_0) \leqslant 0$ et donc

$$b(x_0)u(x_0) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x_0) - \sum_{j=1}^{n} a_j(x_0)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \leqslant 0.$$

Or $b(x_0) \geqslant b_0 > 0$ d'où $u(x_0) \leqslant 0$. Puisque $u(x) \geqslant 0$ pour $x \in \Omega, u(x_0) = 0$ et $u(x_1) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x) \geqslant 0$: là encore

$$0 = u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leqslant \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

35.3.2. Il suffit d'appliquer ce qui précède à ω au lieu de Ω et alors

$$0 \leqslant \max_{x \in \overline{\omega}} u(x) \leqslant \max_{x \in \partial\Omega} u(x) \leqslant 0$$

de sorte que $u(x) = 0$ pour $x \in \overline{\omega}$.

35.3.3. Pour reprendre la preuve qui précède nous devons donner une condition sur α_{ij} qui soit telle que si $x_0 \in \Omega$ vérifie $u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x))|_{x=x_0} \leqslant 0. \tag{1}$$

Dans ce cas, puisque $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = 0$ nous avons bien $b(x_0)u(x_0) \leqslant 0$ et donc $u(x_0) = 0$. Observons que $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = 0, \quad \forall j = 1, ..., n$ fait que (1) s'écrit aussi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \leqslant 0. \tag{2}$$

La matrice hessienne H :

$$H_{ij} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

est négative car x_0 est un point de maximum de u. En effet si $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon_0 > 0$ est tel que $B(x_0, \varepsilon_0) \subset \Omega$, la fonction $t \mapsto u(x_0 + t\xi)$ admet un maximum en $t = 0$. Il en résulte que $\frac{d^2}{dt^2}u(x_0 + t\xi)|_{t=0} \leqslant 0$ or $\frac{d^2}{dt^2}u(x_0 + t\xi)|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^{n} H_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant 0$.

Ainsi en vertu du lemme suivant, si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\exists \alpha_0 > 0 \text{ tel que } \forall x \in K, \quad \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_0|\xi|^2, \tag{3}$$

nous aurons (2). La condition cherchée est donc (3). Elle généralise bien le résultat de la première question puisque dans ce cas $\alpha_{ij}(x) = \delta_{ij}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Lemme. *Soit A une matrice symétrique définie positive et H une matrice symétrique négative. Alors $Tr(AH) \leqslant 0$.*

Démonstration. Puisque A est symétrique définie positive, $\exists P \in \mathcal{O}(n)$ telle que la matrice $PA^tP \equiv \Delta_1$ soit diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs : $\Delta_1 = \text{diag }(\omega_i^2)$ avec $\omega_i > 0$. On désigne alors par $\Delta = \text{diag }(\omega_i)$ et ainsi $A = {}^tP\Delta^2P$. La matrice PH^tP est symétrique négative, il existe donc $Q \in \mathcal{O}(n)$ telle que $\Delta_2 \equiv Q(PH^tP)^tQ$ soit diagonale à coefficients diagonaux négatifs : $\Delta_2 = \text{diag }(h_i)$ avec $h_i \leqslant 0$. En utilisant le fait que $Tr(M_1M_2) = Tr(M_2M_1)$ pour toutes matrices carrées M_1 et M_2, nous avons

$$Tr(AH) = Tr({}^tP\Delta^2PH) = Tr(\Delta^2PH^tP) = Tr(\Delta^2\,{}^tQ\Delta_2Q) = Tr(\Delta^tQ\Delta_2Q\Delta).$$

Soit $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} Tr(\Delta^tQ\Delta_2Q\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}(\Delta^tQ\Delta_2Q\Delta e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\Delta_2Q\Delta e_i, Q\Delta e_i). \end{aligned}$$

Or $\Delta_2 \leqslant 0$, par conséquent pour tout i : $(\Delta_2Q\Delta e_i, Q\Delta e_i) \leqslant 0$ et ainsi

$$Tr(AH) = Tr(\Delta^tQ\Delta_2Q\Delta) \leqslant 0.$$

Commentaires

Le résultat montré dans ce problème au numéro 35.1.1 est une version du principe du maximum fort utile dans l'étude des équations dites elliptiques (c'est-à-dire de la forme du numéro 35.1.3.).

Il en résulte en particulier le résultat fondamental suivant sur l'équation de Laplace : soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant $\Delta u = 0$ sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors u atteint son maximum et son minimum sur $\overline{\Omega}$ en des points de la frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$. Il en résulte en particulier que si u est nulle sur $\partial\Omega$ alors u est nulle dans tout $\overline{\Omega}$. L'ouvrage de référence sur ces questions est dû à D. Gilbarg et N.S. Trudinger : *Elliptic partial differential equations of second order,* paru chez Springer.

Corrigé 36

36.3.1.a. La fonction $s \mapsto F(u(s))$ est continue, par conséquent $\mathcal{T}u$ donnée par (1) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$: elle y est donc continue ; $\mathcal{T}u \in \mathcal{E}$.

36.3.1.b. Nous avons pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{T}u)(t) - (\mathcal{T}v)(t)| &= \left| \int_0^t (F(u(s)) - F(v(s)))ds \right|, \\
&\leqslant \int_0^t |F(u(s)) - F(v(s))|ds, \\
&\leqslant \quad \text{(par (2))} \ \leqslant \int_0^t L|u(s) - v(s)|ds, \\
&\leqslant LT||u - v||_{\infty,T}.
\end{aligned}$$

Ainsi en prenant la borne supérieure

$$||\mathcal{T}u - \mathcal{T}v||_{\infty,T} \leqslant LT||u - v||_{\infty,T}.$$

36.3.1.c. Introduisons l'hypothèse de récurrence indexée par $m \in \mathbb{N}^\star$ et $T > 0$:

$$(\mathcal{H}_{m,T}) \quad \forall t \in [0,T],\ ||\mathcal{T}^m u - \mathcal{T}^m v||_{\infty,T} \leqslant \frac{L^m T^m}{m!}||u - v||_{\infty,T}.$$

L'hypothèse $(\mathcal{H}_{1,T})$ a été prouvée à la question précédente pour tout $T > 0$. Supposons donc que $\forall T > 0$, $(\mathcal{H}_{m,T})$ a lieu pour un certain $m \in \mathbb{N}^\star$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\left|(\mathcal{T}^{m+1}u)(t) - (\mathcal{T}^{m+1}v)(t)\right| &= \left|\int_0^t F((\mathcal{T}^m u)(s)) - F((\mathcal{T}^m v)(s))\right| ds, \\
&\leqslant \quad \text{(par (2))} \ \leqslant L \int_0^t |(\mathcal{T}^m u)(s) - (\mathcal{T}^m v)(s)|ds.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer $(\mathcal{H}_{m,s})$ et par intégration obtenir que, pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\left|(\mathcal{T}^{m+1}u)(t) - (\mathcal{T}^{m+1}v)(t)\right| &\leqslant L \int_0^t \frac{L^m s^m}{m!}|u(s) - v(s)|ds, \\
&\leqslant \frac{L^{m+1}}{m!}||u - v||_{\infty,T} \int_0^t s^m ds, \\
&= \frac{L^{m+1} t^{m+1}}{(m+1)!}||u - v||_{\infty,T},
\end{aligned}$$

et ainsi

$$||(\mathcal{T}^{m+1}u) - (\mathcal{T}^{m+1}v)||_{\infty,T} \leqslant \frac{L^{m+1}T^{m+1}}{(m+1)!}||u - v||_{\infty,T}.$$

Nous avons établi $(\mathcal{H}_{m+1,T})$ et ce pour tout $T > 0$. Il en résulte par récurrence que $(\mathcal{H}_{m,T})$ a lieu $\forall m \in \mathbb{N}^\star$ et $\forall T > 0$.

36.3.2.a. La suite $(\frac{L^m T^m}{m!})_{m\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers zéro lorsque $m \to \infty$ (par exemple appliquer la règle de Cauchy à $a_m = \frac{L^m T^m}{m!}$ puisque $0 \leqslant \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{LT}{m+1} < 1$ pour m assez grand). Ainsi il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \geqslant m_0$, $\frac{L^m T^m}{m!} < 1$; et l'application $\mathcal{T}^m$ sera alors strictement contractante sur $\mathcal{E}_T$. L'espace $\mathcal{E}_T$, muni de la norme $||\ ||_{\infty,T}$ étant un espace vectoriel normé complet, $\mathcal{T}^m$ y possède un point fixe et un seul (théorème du point fixe de Picard).

36.3.2.b. Soit u point fixe de $\mathcal{T}^m$ (par exemple pour $m = m_0$). Nous avons $\mathcal{T}^m(\mathcal{T}u) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^m u) = \mathcal{T}u$ et donc $\mathcal{T}u$ est aussi point fixe de $\mathcal{T}^m$. Par unicité de ce point fixe, $\mathcal{T}u = u$ et u est point fixe de $\mathcal{T}$. Réciproquement si u est point fixe de $\mathcal{T}$ alors bien évidement u est point fixe de $\mathcal{T}^m$. Ainsi $\mathcal{T}$ possède un et seul point fixe u_T dans $\mathcal{E}_T$.

36.3.3. Prenons $T \geqslant S$. La fonction v, qui est la restriction de u_T à l'intervalle $[0, S]$ est un point fixe de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{E}_S$. D'après l'unicité d'un tel point fixe, $v = u_S$: u_T et u_S coïncident sur $[0, S]$.

36.3.4. Définissons $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ en prenant $u(t) = u_t(t)$. D'après la question précédente, la restriction de u à $[0, T]$ est u_T. Ainsi $\mathcal{T}u = u$ sur $[0, T]$ pour tout T et donc $\mathcal{T}u = u$ sur $[0, +\infty[$: $\mathcal{T}$ admet un point fixe u dans $\mathcal{E}$. Soit v un point fixe de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{E}$: $\mathcal{T}v = v$. Alors la restriction de v à $[0, T]$ est point fixe de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{E}_T$ et donc $v = u_T$ sur $[0, T]$ et en particulier $v(T) = u_T(T)$. Ceci étant valable quel que soit $T \geqslant 0$, $v = u$.

36.3.5. Nous avons observé à la question 36.1.1.a que
$u \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{T}u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$. Puisque $u = \mathcal{T}u, u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. En dérivant la relation $u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds$ par rapport à t nous obtenons (4) et en faisant $t = 0$ dans cette même relation, nous obtenons (5).

36.3.6. Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ vérifie (4) nous avons après intégration sur $[0, t]$:

$$u(t) - u(0) = \int_0^t F(u(s))ds\ , t \geqslant 0.$$

Compte tenu de (5), nous obtenons $u = \mathcal{T}u$.

36.3.7. Nous avons en soustrayant $u = \mathcal{T}u$ et $v = \mathcal{T}v$:

$$u(t) - v(t) = u_0 - v_0 + \int_0^t (F(u(s)) - F(v(s)))ds.$$

Soit alors $w(t) = ||u(t) - v(t)||$, il résulte de l'identité ci-dessus et de (2) que

$$w(t) \leqslant ||u_0 - v_0|| + L\int_0^t w(s)ds.$$

Par application du Lemme de Gronwall, tel qu'il est énoncé dans le préambule, nous avons avec $A = ||u_0 - v_0||$ et $B = L$:

$$w(t) \leqslant e^{Lt}||u_0 - v_0|| \quad \text{soit} \quad ||u(t) - v(t)|| \leqslant e^{Lt}||u_0 - v_0||.$$

36.3.8.a. Nous avons ici

$$\mathcal{F}_u = \{v \in \mathbb{R}^n, \quad ||v||^2 \leqslant ||u||^2\}.$$

Soit $u \in \mathbb{R}^n$, $||v - u|| \leqslant ||v|| + ||u|| \leqslant 2||u||$ si $v \in \mathcal{F}_u$. Ainsi $\mathcal{F}_u \subset B(u, R)$ avec $R = 2||u||$.

36.3.8.b. Soit A symétrique définie positive. L'application $v \mapsto \sqrt{(Av, v)}$ étant une norme sur $\mathbb{R}^n$, elle est équivalente à $||.||$ et donc

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \ \alpha||v||^2 \leqslant (Av, v) \leqslant \beta||v||^2$$

(ceci peut aussi être montré directement en prenant pour α la plus petite valeur propre de A et pour β la plus grande). Ainsi lorsque $v \in \mathcal{F}_u, (Av, v) \leqslant (Au, u)$ et alors $||v||^2 \leqslant \frac{\beta}{\alpha}||u||^2$. Il en résulte que $\mathcal{F}_u \subset B(u, R)$ avec $R = (1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}})||u||$. Si A n'est pas définie positive, il existe $w \neq 0$ tel que $(Aw, w) \leqslant 0 = f(0)$. Mais alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $tw \in \mathcal{F}_0$ car $f(tw) = t^2(Aw, w) \leqslant 0 = f(0)$. Puisque $||tw|| = |t|||w||$ peut être rendu arbitrairement grand en faisant tendre t vers $+\infty$, $\mathcal{F}_0$ n'est pas borné : f ne vérifie pas (P).

36.3.9. La fonction f_1 correspond au cas précédent avec $A = -I$ qui n'est pas définie positive donc f_1 ne vérifie pas (P) (d'ailleurs $\mathcal{F}_0 = \mathbb{R}^n$). Pour f_2, nous écrivons $f_2(v) = (||v||^2 - 1/2)^2 - 1/4$ de sorte que $f_2(v) \leqslant f_2(u)$ est équivalent à $\left|||v||^2 - 1/2\right| \leqslant \left|||u||^2 - 1/2\right|$. Par l'inégalité triangulaire, $||v||^2 \leqslant 1/2 + \left|||u||^2 - 1/2\right|$. Ainsi $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{B}(u, R)$ avec $R = ||u|| + (1 + ||u||^2)^{1/2}$. La fonction f_2 vérifie (P).

36.3.10.a. L'application $w \mapsto ||w||^2$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^\infty$ ainsi par compositions, $v \mapsto \theta(\frac{||v-v_0||^2}{R_0^2})$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Puisque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, finalement $f_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

36.3.10.b. Calculons :

$$(\nabla f)_0(v) = \theta\left(\frac{||v - u_0||^2}{R_0^2}\right)(\nabla f)(v) + f(v)\theta'\left(\frac{||v - u_0||^2}{R_0^2}\right)\frac{2(v - u_0)}{R_0^2}.$$

Ainsi pour $||v - u_0||^2 \geqslant 3R_0^2$, nous avons $(\nabla f)_0(v) = 0$. Il en est alors de même pour $\frac{\partial F}{\partial v_i}(v)$ lorsque $F = -\nabla f_0$. Ainsi, puisque $\frac{\partial F}{\partial v_i}$ est continue (f est de classe $\mathcal{C}^2$), $\frac{\partial F}{\partial v_i}$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$:

$$\exists L_0 \geqslant 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial v_i}\right)^2(v) \leqslant L_0^2.$$

Par la formule de Taylor intégrale,

$$F(u) - F(v) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial v_i}(\theta u + (1-\theta)v)(u_i - v_i)d\theta$$

et donc

$$||F(u) - F(v)|| \leqslant \int_0^1 L_0||u - v||d\theta = L_0||u - v||.$$

Ainsi F vérifie (2) avec $L = L_0$.

36.3.11.a. Par dérivation de fonctions composées,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_0(u(t)) &= \nabla f_0(u(t)).\frac{du}{dt}(t) \\ &= -||\nabla f_0(u(t))||^2. \end{aligned}$$

36.3.11.b. Puisque $\frac{d}{dt} f(u(t)) \leqslant 0$, pour $t \geqslant 0$, $f_0(u(t)) \leqslant f_0(u_0)$. Mais $f_0(u_0) = \theta(0) f(u_0)$ et comme $\theta(0) = 1$, $f_0(u(t)) \leqslant f_0(u_0) = f(u_0)$.

36.3.12. Nous venons de montrer que

$$\theta\left(\frac{||u(t) - u_0||^2}{R_0^2}\right) f(u(t)) \leqslant f(u_0).$$

Soient alors $F_1 = \mathcal{B}(u_0, R_0)$ et $F_2 = \{v \in \mathbb{R}^n,\ ||v - u_0|| \geqslant \sqrt{2}R_0\}$. Il s'agit de deux fermés disjoints et $u([0,+\infty[) \subset F_1 \cup F_2$. En effet si pour $t \geqslant 0$, $u(t) \notin F_2$ alors $||u(t) - u_0||^2 \leqslant 2R_0^2$ et donc $\theta(\frac{||u(t)-u_0||^2}{R_0^2}) = 1$ d'où $f(u(t)) \leqslant f(u_0)$. Ainsi $u(t) \in \mathcal{F}_{u_0} \subset B(u_0, R_0) = F_1$. Puisque u est continue, $u([0,+\infty[)$ est un arc connexe inclus dans $F_1 \cup F_2$ qui sont deux fermés disjoints : $u([0,+\infty[) \subset F_1$ ou $u([0,+\infty[) \subset F_2$. Mais $u(0) = u_0 \in F_1$ et donc $u([0,+\infty[) \subset F_1$: $\forall t \in [0,+\infty[$, $u(t) \in B(u_0, R_0)$.

36.3.13. Puisque f et f_0 coïncident sur $B(u_0, \sqrt{2}R_0)$, ∇f et ∇f_0 coïncident sur son intérieur et *a fortiori* sur $B(u_0, R_0)$. Mais nous venons de voir que $u(t) \in B(u_0, R_0)$ d'où $(\nabla f)(u(t)) = (\nabla f_0)(u(t))$ et ainsi $\frac{du}{dt} = -(\nabla f_0)(u(t)) = -\nabla f(u(t))$: u est solution de (4).

36.3.14. Puisque $B(u_0, R_0)$ est compact, f est minorée sur cet ensemble. Par ailleurs, $\frac{d}{dt} f(u(t)) = -||\nabla f(u(t))||^2 \leqslant 0$ et donc $t \mapsto f(u(t))$ est décroissante. Il en résulte que $l(u_0) = \lim_{t\to+\infty} f(u(t))$ existe.

36.3.15.a. La fonction $f(u) = \frac{1}{2}||u||^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie (P). Nous avons $(\nabla f)(u) = u$ et donc $\frac{du}{dt} = -u$. Ainsi $\frac{d}{dt}(u(t)e^t) = 0$, par conséquent $u(t) = u_0 e^{-t}$ et donc $S(t)u_0 = e^{-t}u_0$.

36.3.15.b. Là encore $f(u) = \frac{1}{4}||u||^4$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie (P). Nous avons $(\nabla f)(u) = ||u||^2 u$ et donc $\frac{du}{dt} = -||u||^2 u$. Ainsi $\frac{d}{dt}||u||^2 = 2u.\frac{du}{dt} = -2||u||^4$ de sorte que $\frac{d}{dt}(\frac{1}{||u||^2}) = 2$. Ainsi $||u(t)||^2 = \frac{||u_0||^2}{1+2t||u_0||^2}$. Il en résulte que $\frac{du}{dt} = -\frac{||u_0||^2}{1+2t||u_0||^2}u$ et par conséquent $\frac{d}{dt}(\sqrt{1+2t||u_0||^2}u(t)) = 0$. Ainsi $u(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1+2t||u_0||^2}}$ et donc $S(t)u_0 = \frac{u_0}{\sqrt{1+2t||u_0||^2}}$.

36.3.16.a. Cela résulte directement de (5) : $\forall u_0 \in \mathbb{R}^n$, $S(0)u_0 = u(0) = u_0$ et donc $S(0) = Id$.

36.3.16.b. Soit $u_2 = S(t_2)u_0$. Nous avons $\frac{du}{dt} = F(u)$ et $u(t_2) = u_2$. Par ailleurs la fonction v : $v(t) = u(t + t_2)$ vérifie $\frac{dv}{dt}(t) = F(u(t + t_2)) = F(v(t))$ et $v(0) = u_2$. Si $w(t) = S(t)u_2$ nous avons $\frac{dw}{dt} = F(w(t))$ et $w(0) = u_2$ d'où

$$\frac{d}{dt}(v(t) - w(t)) = F(v(t)) - F(w(t)). \qquad (*)$$

D'après la question 36.1.12., $w(t) \in B(u_2, R_2)$ où $\mathcal{F}_{u_2} \subset B(u_2, R_2)$ et $v(t) \in B(u_0, R_0)$. Sur le compact $B(u_2, R_2) \cup B(u_0, R_0)$, F est uniformément lipschitzienne et donc :

$$\exists M \geqslant 0,\ \forall t \geqslant 0,\ ||F(v(t)) - F(w(t))|| \leqslant M||v(t) - w(t)||$$

de sorte que $(\star)$ entraîne après intégration :

$$\begin{aligned} ||v(t) - w(t)|| &\leqslant \int_0^t ||F(v(s)) - F(w(s)||ds, \\ &\leqslant M\int_0^t ||v(s) - w(s)||ds. \end{aligned}$$

Par application du Lemme de Gronwall tel qu'il est énoncé dans le préambule (avec $A = 0$ et $B = M$) nous obtenons

$$||v(t) - w(t)|| \leqslant 0$$

soit $w(t) = S(t)u_2 = v(t) = S(t + t_2)u_0$: $S(t)(S(t_2)u_0) = S(t + t_2)u_0$. Ainsi $S(t_1) \circ S(t_2) = S(t_1 + t_2) = S(t_2 + t_1) = S(t_2) \circ S(t_1)$.

36.3.17. Nous avons vu que $S(t)u_0 \in \mathcal{F}_{u_0} \subset B(u_0, R_0)$.

36.3.18. Soient R_0 et ρ_0 tels que $\mathcal{F}_{u_0} \subset B(u_0, R_0)$ et $\mathcal{F}_{v_0} \subset B(v_0, \rho_0)$. Nous avons par la formule de Taylor intégrale :

$$F(u) - F(v) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial v_i}(\theta u + (1-\theta)v)(u_i - v_i)d\theta\,,$$

et si M_0 est le supremum de $(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial v_i})^2(w))^{1/2}$ sur $B(0, ||u_0|| + ||v_0|| + R_0 + \rho_0)$, $||F(u) - F(v)|| \leqslant M_0||u - v||$, car $u(t) \in B(u_0, R_0)$ et $v(t) \in B(v_0, \rho_0)$ font que $\theta u + (1 - \theta)v$ appartient à cette boule. Mais alors

$$\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)) = F(u(t)) - F(v(t))$$

conduit à

$$||u(t) - v(t)|| \leqslant ||u_0 - v_0|| + M_0 \int_0^t ||u(s) - v(s)||ds.$$

Là encore le Lemme de Gronwall permet d'affirmer que

$$||u(t) - v(t)|| \leqslant e^{M_\circ t}||u_0 - v_0||.$$

36.3.19. Ceci résulte directement du fait que $S(t + s) = S(t) \circ S(s)$.

36.3.20. Pour $s_1 \geqslant s_2$, $\mathcal{O}(s_1, u_0) \subset \mathcal{O}(s_2, u_0)$. Par conséquent $adh(\mathcal{O}(s_1, u_0)) \subset adh(\mathcal{O}(s_2, u_0))$. Il en résulte que $\omega(u_0) = \cap_{m\in\mathbb{N}} K_m$ où $K_m = adh(\mathcal{O}(m, u_0))$. Mais $\mathcal{O}(0, u_0) \subset B(u_0, R_0)$ et donc $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides. Son intersection $\omega(u_0)$ est donc un compact non vide. Si $\omega(u_0)$ n'est pas connexe, il peut être réalisé comme la réunion de deux fermés, non vides disjoints F_1 et F_2 : $\omega(u_0) = F_1 \cup F_2$. De plus F_1 et F_2 sont compact car $\omega(u_0)$ l'est. La fonction ρ : $\rho(x) = d(x, F_1) - d(x, F_2)$ s'annule sur chaque K_m car K_m est connexe (adhérence du connexe par arc $\mathcal{O}(m, u_0)$) et $F_1 \cup F_2 \subset \omega(u_0) \subset K_m$ avec $\rho < 0$ sur F_2 et $\rho > 0$ sur F_1. Ainsi $Q_m \equiv K_m \cap \rho^{-1}(\{0\})$ est un compact non vide et $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Ainsi $\cap_{m\in\mathbb{N}} Q_m = \omega(u_0) \cap \rho^{-1}(\{0\})$ est non vide. Ceci n'est pas possible car ρ ne s'annule pas sur $\omega(u_0) = F_1 \cup F_2$.

36.3.21. Soit $v \in \omega(u_0)$ alors $\forall s \geqslant 0, v \in adh(\mathcal{O}(s, u_0))$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}(m, u_0) \cap B(v, 2^{-m}) \neq 0$ et donc $\exists t_m \geqslant m$ tel que $||S(t_m)u_0 - v|| \leqslant 2^{-m}$.

Ainsi v vérifie (ii).

Réciproquement, si v vérifie (ii), quel que soit $s \geqslant 0$, $\exists N$ tel que $m \geqslant N \Rightarrow t_m \geqslant s$. Mais alors $S(t_m)u_0$ tend vers v et appartient à $\mathcal{O}(s, u_0)$ d'où $v \in adh(\mathcal{O}(s, u_0))$.

36.3.22. Soit $v \in \omega(u_0)$, par (ii) de la question précédente, $v = \lim_{m\to\infty} S(t_m)u_0$ avec $t_m \to +\infty$. Nous avons d'après la question 36.1.16.b., $S(t)(S(t_m)v_0) = S(t + t_m)v_0$. Par ailleurs $S(t_m)v_0 \in B(u_0, R_0)$ et $v \in B(v, 0)$ font que d'après la démonstration de la question 36.1.18.

$$||S(t)(S(t_m)v_0) - S(t)v|| \leqslant e^{M_0 t}||S(t_m)v_0 - v||$$

avec $M_0 = ||u_0||R_0 + ||v||$, indépendant de m. Ainsi $S(t)(S(t_m)v_0) = S(t + t_m)v_0$ converge vers $S(t)v$ et puisque $\lim_{m\to\infty}(t + t_m) = +\infty$, $S(t)v \in \omega(u_0)$. Nous avons donc prouvé que $S(t)\omega(u_0) \subset \omega(u_0)$. Prenons encore $v \in \omega(u_0)$ et $t_m \to \infty$ tel que $\lim_{m\to\infty} S(t_m)u_0 = v$. Fixons $t \geqslant 0$, pour m assez grand, $t_m - t \geqslant 0$

et par conséquent la suite $(S(t_m - t)u_0)_{m\in\mathbb{N}}$ est dans le compact $B(u_0, R_0)$. Nous pouvons donc en extraire une sous-suite $(S(t_{\varphi(m)} - t)u_0)_{m\in\mathbb{N}}$ convergente de limite w. Puisque $\lim_{m\to+\infty}(t_{\varphi(m)} - t) = +\infty$, $w \in \omega(u_0)$ et comme précédemment, $S(t)(S(t_{\varphi(m)} - t)u_0) = S(t_{\varphi(m)})u_0$ converge à la fois vers $S(t)w$ et v : $v = S(t)w$ et donc

$$\omega(u_0) \subset S(t)\omega(u_0).$$

36.3.23. Dans ces deux exemples, $\lim_{t\to+\infty} S(t)u_0 = 0$, par conséquent $\omega(u_0) = \{0\}$.

36.3.24.a. Nous avons $l(u_0) = \lim_{t\to+\infty} f(S(t)u_0)$. Si $v \in \omega(u_0)$, $\exists t_m$ tel que $\lim_{m\to\infty} t_m = +\infty$ et $\lim_{m\to\infty} S(t_m)u_0 = v$. Puisque f est continue,

$$f(v) = \lim_{m\to\infty} f(S(t_m)u_0)$$

et puisque $t_m \to \infty$,

$$\lim_{m\to\infty} f(S(t_m)u_0) = l(u_0).$$

Ainsi $f(v) = l(u_0)$.

36.3.24.b. D'après la question 36.1.22., $v \in \omega(u_0) \Rightarrow \forall t \geqslant 0$, $v(t) \in \omega(u_0)$ et donc $f(v(t)) = l(u_0)$. Ainsi $\frac{d}{dt}f(v(t)) = 0$ mais $\frac{d}{dt}f(v(t)) = -||\nabla f(v(t))||^2$ par conséquent $||(\nabla f)(v(t))|| = 0$ et *a fortiori* $(\nabla f)(v) = 0$.

36.3.25.a. Considérons la fonction $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$, définie par $G(w) = (\nabla f)(w)$. Si $v \in \mathcal{N}$ alors $G(v) = 0$ et puisque $J(v) \neq 0$, la différentielle de G au point $w = v$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe $\varepsilon > 0$ tel que G soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U = \{w \in \mathbb{R}^n, ||w - v|| < \varepsilon\}$ sur $G(U)$. Ainsi l'équation $G(w) = 0$ a pour seule solution $w = v$ dans U : v est donc un point isolé de $\mathcal{N}$.

36.3.25.b. Puisque G est continue, $\mathcal{N} = G^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Ainsi $\mathcal{N} \cap B(0, R)$ est un compact formé de points isolés, il est donc de cardinal fini.

36.3.26.a. Par la question 36.1.24.b. nous savons que $\omega(u_0) \subset \mathcal{N}$. Puisque $\omega(u_0)$ est compact, il est borné : $\exists R, \omega(u_0) \subset B(0, R)$ ainsi $\omega(u_0) \subset \mathcal{N} \cap B(0, R)$ qui est un ensemble fini. Par conséquent $\omega(u_0)$ est un ensemble fini. Puisqu'il est non vide et connexe, c'est forcément un singleton.

36.3.26.b. Notons $\omega(u_0) = \{v\}$. Nous avons $\lim_{t\to+\infty} u(t) = v$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists t_m \geqslant m$ tel que $||u(t_m) - v|| \geqslant \varepsilon_0$. La suite $(u(t_m))_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit alors $(u(t_{\varphi(m)}))_{m\in\mathbb{N}}$ une sous-suite extraite convergente de limite w. Nous avons par le (ii) de la question 36.1.21., $w \in \omega(u_0) = \{v\}$ par conséquent $w = v$ ce qui entre en contradiction avec $||u(t_{\varphi(m)}) - v|| \geqslant \varepsilon_0$.

36.3.27.a. Nous avons $(\nabla f)(v) = -4(1 - ||v||^2)v$. Il en résulte que $\mathcal{N} = \{0\} \cup S$ où $S = \{v \in \mathbb{R}^n, ||v|| = 1\}$.

36.3.27.b. Pour $n \geqslant 2$, $\mathcal{N} \cap B(0, 1) = \mathcal{N}$ est de cardinal infini. D'après la question 36.1.25, (8) ne peut avoir lieu (bien que cela n'ait en fait aucun rapport, on vérifie aisément que f satisfait (P)).

Pour $n = 1$, $f''(v) = 12v^2 - 4$ et $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}$ de sorte que $J(v) = f''(v)$ vérifie (8).

36.3.27.c. Nous avons à étudier $\frac{du}{dt} = -4(1 - ||u||^2)u$.
Puisque $\frac{d}{dt}||u||^2 = 8(1 - ||u||^2)||u||^2$,

$$\text{si } ||u_0|| = 0 \text{ alors } ||u(t)||^2 = 0,\ \forall t \geqslant 0,$$

$$\text{si } ||u_0|| = 1, \text{ alors } ||u(t)||^2 = 1,\ \forall t \geqslant 0 \text{ et donc } u(t) = u_0,$$

enfin si $||u_0|| \notin \{0, 1\}$, $||u(t)||^2 = \frac{||u_0||^2}{||u_0||^2+(1-||u_0||^2)e^{-8t}}$ (par résolution de l'équation différentielle $y' = 8(1 - y)y$). Dans ce dernier cas,

$$\frac{du}{dt} = \frac{-4(1 - ||u_0||^2)e^{-8t}u}{||u_0||^2 + (1 - ||u_0||^2)e^{-8t}} \quad \text{et alors} \quad u(t) = \frac{u_0}{\sqrt{||u_0||^2 + (1 - ||u_0||^2)e^{-8t}}}.$$

Cette dernière formule étant finalement valable pour $||u_0|| = 0$ ou $||u_0|| = 1$.

Ainsi $\omega(0) = \{0\}$ et $\forall u_0 \neq 0 \quad \omega(u_0) = \{\frac{u_0}{||u_0||}\}$.

36.3.27.d. Lorsque $n \geqslant 2$, nous avons vu que la propriété (8) n'avait pas lieu et pourtant la conclusion (question 36.1.26.b.) $\lim_{t\to+\infty} u(t)$ existe est vérifiée. La condition (8) n'est donc pas nécessaire pour que toute trajectoire soit convergente.

Commentaires

L'objet de ce problème est l'étude de systèmes d'équation différentielles de type gradient

$$\frac{du}{dt} = -(\nabla f)(u) \tag{1}$$

et plus particulièrement du comportement des trajectoires lorsque $t \to \infty$.

Lorsque (1) possède une solution pour tout $t \geqslant 0$ (le problème montrait que la propriété (P) du préambule de la deuxième partie page 29 était suffisante) on a immédiatement

$$\frac{d}{dt}f(u(t)) + ||\frac{du}{dt}||^2 = 0. \tag{2}$$

Au numéro 36.3.14, nous en avions déduit que $t \mapsto f(u(t))$ possédait une limite lorsque $t \mapsto +\infty, l(u_0)$, où $u_0 = u(0)$. Intégrons alors (2) entre 0 et t, il vient :

$$\int_0^t \left\|\frac{du}{dt}(s)\right\|^2 ds = f(u_0) - f(u(t))$$

et par conséquent l'intégrale impropre $\int_0^\infty ||\frac{du}{dt}(t)||^2 dt$ est convergente et vaut $f(u_0) - l(u_0)$. Un raisonnement naïf pourrait alors consister à dire que $\frac{du}{dt}$ tend vers zéro et donc $u(t)$ possède une limite, d'où avec les notations de la quatrième partie,

$\omega(u_0)$ est un singleton. Cette conclusion est *fausse* en général et vraie si f est une fonction analytique, c'est-à-dire que f est développable en série entière par rapport à $u_1, \ldots, u_n$ (remarquer qu'il en est bien ainsi pour la fonction du numéro 36.1.27 page 32). Dans le cas $n = 2$, il est possible de construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que la trajectoire de (1) « s'écrase » sur le cercle unité lorsque $u_0 \neq 0$ *i.e.* pour $u_0 \neq 0$, $\omega(u_0) = \{u \in \mathbb{R}^n, u_1^2 + u_2^2 = 1\}$. La preuve de card $\omega(u_0) = 1$ dans le cas analytique est non élémentaire, elle fait appel aux inégalités de Lojaciewicz . Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'ouvrage de R. Benedetti et J.J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets* paru chez Hermann.

Lorsque $\omega(u_0)$ n'est pas un singleton, observons que, bien que, $\int_0^\infty ||\frac{du}{dt}(t)||^2 dt < \infty$ on a forcément $\int_0^\infty ||\frac{du}{dt}(t)||dt = \infty$ (sinon le critère de Cauchy montrerait que $u(t)$ possède une limite lorsque $t \to +\infty$).

Le lecteur souhaitant connaître le contre-exemple évoqué plus haut peut consulter le livre de J. Palis et W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems, an introduction* paru chez Springer.

Corrigé 37

37.3.1. Notons

$$\mathcal{N}(c_{-N}, ..., c_N) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathcal{C}^N(x)|.$$

Puisque $(c_{-N}, ..., c_N) \to \mathcal{C}^N$ est une application linéaire, $\mathcal{N}$ sera une norme sur $\mathbb{C}^{2N+1}$ à condition que $\mathcal{N}(c_{-N}, ..., C_N) = 0 \Rightarrow C_{-N}, ... = C_N = 0$. Si $\mathcal{N}(c_{-N}, ..., c_N) = 0$ alors $\mathcal{C}^N(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et donc $c_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{C}^{\mathcal{N}}(x)e^{-ijx}dx = 0, \forall j$.

37.3.2. Considérons $f(x) = \sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k}$. On a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^N \cos kx = \frac{1}{2}D_N(x) - \frac{1}{2} \text{ où } D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}.$$

Ainsi puisque $f(0) = 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x D_N(y)dy - \frac{x}{2}.$$

Montrons à l'aide de cette formule que $f(x)$ est bornée indépendamment de $x \in [-\pi, \pi[$ et de $N \geqslant 1$. Si c'est le cas et si les K_N étaient bornés indépendamment de N, on aurait que $\sum_{j=-N}^N |c_j| = \sum_{j=1}^N (1/j)$ est bornée indépendamment de N, ce qui n'est pas.

Observons alors que $D_N(x) = \operatorname{cotg}(x/2)\sin(Nx) + \cos(Nx)$ de sorte que

$$\int_0^x D_N(y)dy = \frac{\sin Nx}{N} + \int_0^x \varphi(y)\sin Ny dy + 2\int_0^x \frac{\sin Ny}{y}dy \qquad (*)$$

où $\varphi(y) = (\operatorname{cotg} \frac{y}{2}) - \frac{2}{y}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2\pi, 2\pi[$ après prolongement par 0 en $y = 0$. Observons ensuite que les trois termes dans le membre de droite de $(\star)$ sont bornés indépendamment de $x \in [-\pi, \pi]$ et $N \geqslant 1$. Pour le premier c'est bien clair, pour le troisième on écrit $\int_0^x \frac{\sin Ny}{y} dy = \int_0^{Nx} \frac{\sin y}{y} dy$ et puisque $\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy$ est semi-convergente, la propriété annoncée est vérifiée. Reste le second, qui s'écrit après intégration par partie :

$$\int_0^x \varphi(y) \sin Ny dy = + \int_0^x \frac{\varphi'(y) \cos Ny}{N} dy - \frac{\varphi(x) \cos Nx}{N},$$

ce qui permet de conclure.

Commentaires

L'inégalité $\sum_{j=-N}^{N} |c_j| \leqslant K \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{C}(x)|$ avec K indépendante de N et des c_j est vraie à condition que la suite $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ soit lacunaire (i.e. ait suffisamment de zéros). Une condition suffisante est qu'il existe $q > 1$ tel que $c_j = 0$ pour $|j| \neq n_j$ où n_j est une suite d'entiers tels que $n_{j+1} > qn_j$. Le cas $q \geqslant 3$ est l'objet du problème 38, le cas $q > 1$ est quant à lui traité page 108 dans le livre de Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis* paru chez Dover.

Corrigé 38

38.3.1 Écrivons $P(t) = \sum_k \alpha_k e^{i\omega_k t}$ où la somme est finie et $\omega_k = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \lambda_j$ pour $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$. On a $\int_0^{2\pi} P(t) dt = 2\pi \sum \alpha_k$ où la somme porte sur les k tels que $\omega_k = 0$.

Lemme. $\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \lambda_j = 0 \Rightarrow \varepsilon_j = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, N.$

Démonstration. Sinon, on désigne par m le plus grand entier tel que $\varepsilon_j \neq 0$. On a alors $m \geqslant 2$ et $\lambda_m = -\sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j \lambda_j$ d'où $\lambda_m \leqslant \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \leqslant \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_m q^{j-m}$ puisque $\lambda_m \geqslant \lambda_j q^{m-j}$. Il vient donc

$$1 \leqslant \sum_{j=1}^{m-1} q^{j-m} = \frac{1}{q^{m-1}} \sum_{j=0}^{m-2} q^j = \frac{1}{q^{m-1}} \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1} < \frac{1}{q - 1}$$

ce qui est absurde puisque $q \geqslant 2$ (et même $q \geqslant 3$). Ceci achève la preuve du Lemme. ❑

Ainsi $\int_0^{2\pi} P(t) dt = 2\pi\alpha_0$. Mais le terme constant dans $P(t)$ vaut 1 et donc $\int_0^{2\pi} P(t) dt = 2\pi$.

38.3.2. On a de manière similaire $\int_0^{2\pi} e^{-i\lambda_j t} P(t) dt = 2\pi \sum \alpha_k$ où la somme porte sur les k tels que $\omega_k = \lambda_j$. Mais $\lambda_j = \sum_{p=1}^{N} \varepsilon_p \lambda_p$ s'écrit aussi $\sum_{j=1}^{N} \eta_j \lambda_j = 0$ avec $\eta_j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Cela implique comme au lemme précédant que $\eta_j = 0$ pour tout j car on trouvera $1 < \frac{2}{q-1}$ qui est absurde. Il en résulte que $\varepsilon_p = 1$ si $j = p$ et $\varepsilon_p = 0$ si $j \neq p$ c'est-à-dire que $\int_0^{2\pi} e^{-i\lambda_j t} P(t)dt = 2\pi\alpha_j$. Puisque $\alpha_j = \frac{1}{2}e^{i\varphi_j}$, il vient

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\lambda_j t} P(t)dt = \pi e^{i\varphi_j}.$$

38.3.3 L'inégalité de droite est immédiate :

$$|f(t)| = \left| \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{i\lambda_j t} \right| \leqslant \sum_{j=-N}^{N} |c_j|.$$

Considérons alors $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(s)f(s)ds$ avec $c_j = |c_j|e^{i\varphi_j}$. Par la formule de Parseval,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(s)f(s)ds = \sum_n \hat{P}(n)\overline{\hat{f}(n)}$$

où $\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} g(t)dt$ pour toute fonction g 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Puisque $\hat{f}(n) = 0$ si n n'est pas l'un des λ_j et vaut c_j pour $n = \lambda_j$, nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(s)f(s)ds = \sum_{j=-N}^{N} \hat{P}(\lambda_j)|c_j|e^{-i\varphi_j}.$$

Par l'expression de $\hat{P}(\lambda_j)$, il vient alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(s)f(s)ds = \frac{1}{2}\sum_{j=-N}^{N} |c_j|.$$

D'autre part $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(s)f(s)ds \leqslant (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(s)|ds) \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ et puisque $P(t) \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ on obtient l'inégalité $\sum_{j=-N}^{N} |c_j| \leqslant 2 \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

Commentaires

L'inégalité démontrée ne peut s'étendre au cas où $\lambda_j = j$ comme on va le montrer (voir aussi les commentaires au problème 28, page 177).
Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que pour tous c_j,

$$\sum_{j=-N}^{N} |c_j| \leqslant K \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{ijx} \right|. \qquad (*)$$

Prenons alors $f(x) = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{\sin kx}{k}$. On a $f'(x) = 2\sum_{k=1}^{N} \cos kx = D_N(x) - 2$ où $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$. Soit $\varphi(t) = \frac{2}{t} - cotg\frac{t}{2}$ (cette fonction est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-2\pi, 2\pi[$) et

$$\int_0^x D_N(t)dt - \int_0^x \frac{\sin Nt}{t}dt = -\int_0^x \varphi(t)\sin Nt + \frac{sinNx}{N}.$$

$$\text{Or } \int_0^x \varphi(t)\sin nt dt = \varphi(x)\sin nx - \frac{1}{n}\int_0^x \varphi'(t)\cos nt dt,$$

ce qui montre qu'il existe une constante C, telle que $|\int_0^x \varphi(t)\sin nt dt| \leqslant C_1$ pour $n \geqslant 1$ et $x \in]-\pi, \pi[$. Puisque l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin t dt}{t}$ est convergente, il existe une constante C_2 telle que $|\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt| = |\int_0^{nx} \frac{\sin nt}{t}dt| \leqslant C_2$ pour $n \geqslant 1$ et $x \in]-\pi, \pi[$. Finalement, $f(x) = -2x + \int_0^x D_N(t)dt$ est bornée uniformément pour $N \geqslant 1$ et $x \in [-\pi, \pi]$. Si $(\star)$ avait lieu, on obtiendrait que la série $\sum \frac{1}{k}$ est convergente, ce qui n'est pas.

Corrigé 39

39.3.1. L'ensemble des polynômes trigonométriques représentés est un espace vectoriel de dimension $2n + 1$. Si on le munit (par exemple) de la norme du sup : $||T||_{\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |T(x)|$ (qui est bien définie car ces fonctions sont continues et 2π-périodiques, donc bornées), l'application linéaire $T \to T'$ est continue. Par conséquent : $\exists C_n$ tel que $||T'||_{\infty} \leqslant C_n||T||_{\infty}$.

39.3.2. Pour $T(x) = \cos nx$, on a $||T||_{\infty} = 1$ et $||T'||_{\infty} = n$, il en résulte que $C_n \geqslant n$.

39.3.3. Si l'on ne peut pas prendre $C_n = n$, cela veut dire qu'il existe T tel que $||T'||_{\infty} > n||T||_{\infty}$. Notons alors $L = \frac{1}{n}||T'||_{\infty}$. La fonction T' étant 2π-périodique et continue, elle atteint son maximum en un point $z \in \mathbb{R}$ et quitte à changer T en $-T$ on peut supposer que $T'(z) = nL$. Nous avons alors $T''(z) = 0$. Introduisons les polynômes trigonométriques S et R :

$$S(x) = L\sin n(x-z) - T(x) \quad \text{et} \quad R(x) = S'(x) = Ln\cos n(x-z) - T'(x).$$

Nous allons étudier les changements de signe de S puis les zéros de R. Désignons alors par u_k le point $u_k = z + (2k+1)\frac{\pi}{2n}, k = 0, ..., 2n$. Puisque $|T(x)| < LS(u_0) = L - T(u_0) > 0$, $S(u_1) = -L - T(u_1) < 0, ..., S(u_{2n}) = L - T(u_{2n}) > 0$, dans chacun des $2n$ intervalles $]u_0, u_1[, ...,]u_{2n-1}, u_{2n}[$ il y a une racine $(y_0, ..., y_{2n-1})$ de S :

$$S(y_i) = 0 \text{ avec } u_i < y_i < u_{i+1}, i = 0, ..., 2n-1.$$

Observons que $y_{2n-1} < y_0 + 2\pi$ car $y_{2n-1} < u_{2n} = u_0 + 2\pi < y_0 + 2\pi$. Notons alors $y_{2n} = y_0 + 2\pi$ et $S(y_{2n}) = S(y_0) = 0$.

Par la propriété de Rolle, il y a un zéro de $R = S'$ dans chacun des $2n$ intervalles $]y_0, y_1[,]y_1, y_2[, ...,]y_{2n-1}, y_{2n}[$: $\exists x_i \in]y_i, y_{i+1}[, R(x_i) = 0$ pour $i = 0, ..., 2n-1$.

Observons que là encore $x_{2n-1} < x_0 + 2\pi$. Puisque R est un polynôme trigonométrique de degré n, il a au plus $2n$ zéros modulo 2π (nous l'établirons plus bas) et nous savons que $R(z) = Ln - T'(z) = 0$ par conséquent z est l'un des x_i modulo $2\pi, z \equiv x_{i_0}(2\pi)$. Mais $R'(z) = -Ln^2 \sin n(z-z) - T''(z) = 0$ et donc x_{i_0} est racine double de R : R possède $2n$ racines distinctes modulo 2π dont l'une est double : ceci est absurde (voir détails dans le lemme qui suit).

Il nous reste donc à établir le lemme suivant.

Lemme. *Soit T un polynôme trigonométrique de degré n i.e.* $\exists (A, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$ *tel que*

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$

Alors T a au plus $2n$ zéros comptés avec multiplicité dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

Démonstration. On peut aussi écrire

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx} = e^{-inx} P(e^{ix})$$

où

$$P(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{k-n} z^k$$

avec $C_0 = A$ et pour tout $k \neq 0$,

$$C_k = \left(a_{|k|} - i \frac{k}{|k|} b_{|k|} \right) /2.$$

Nous avons alors pour tout $m \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$: x est un zéro d'ordre m de T si et seulement si e^{ix} est un zéro d'ordre m de P. Le polynôme P étant de degré $2n$ il y a au plus $2n$ zéros comptés avec multiplicité et le résultat en découle (on a utilisé que sur $[0, 2\pi[$, l'application $x \to e^{ix}$ est injective).

Commentaires

L'inégalité montrée au numéro 39.3.3. est due à Bernstein. Elle fait partie d'une kyrielle d'inégalités que l'on rencontre en théorie des séries de Fourier (certaines pouvant s'avérer extrêmement difficiles à démontrer). Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'ouvrage de référence en la matière : A. Zygmund : *Trigonometric series* paru chez Cambridge University Press.

Corrigé 40

40.3.1. Donnons nous $\varepsilon > 0$, si S_n converge uniformément vers f, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|S_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

D'autre part
$$|S_n(x)| \leqslant |a_0| + \sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|) \leqslant (2n+1)||f||_\infty.$$
Ainsi pour $n \leqslant N_\varepsilon + M_\varepsilon$ avec $N_\varepsilon(2N_\varepsilon + 2)||f||_\infty \leqslant \varepsilon M_\varepsilon$,
$$\begin{aligned}|\sigma_n(x) - f(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \frac{|S_k(x) - f(x)|}{n} + \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n-1} \frac{|S_k(x) - f(x)|}{n}\\ &\leqslant \frac{1}{n}(2N_\varepsilon + 2)||f||_\infty + \frac{n\varepsilon}{n}\\ &\leqslant \varepsilon\frac{M_\varepsilon}{n} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$
40.3.2. Nous avons
$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\frac{1}{2} + \cos(x-t) + \ldots + \cos n(x-t))dt,$$
et donc
$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}dt$$
en utilisant que $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{p=1}^{m}\cos pu = \dfrac{\sin(m+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$.

Ainsi $\sigma_n(x) = \dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\right)dt.$

Là encore, puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u = \frac{\sin^2 n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$, on obtient que
$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt. \qquad (*)$$
D'autre part,
$$1 = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt\,, \qquad (**)$$
car si on prend $f(t) = 1, \forall t$ on a $S_k(x) = 1, \forall k$ et $\sigma_n(x) = 1, \forall n$, d'où l'identité $(\star\star)$.

Ainsi

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - f(x)| \left(\frac{\sin n \dfrac{x-t}{2}}{\sin \dfrac{x-t}{2}} \right)^2 dt.$$

Observons alors que la fonction intégrée est $2\pi -$ périodique par rapport à t de sorte que l'on ne change pas cette dernière intégrale en intégrant sur $[x - \pi, x + \pi]$ au lieu de $[0, 2\pi]$. Après changement de variable $t \to x - 2t$ il vient donc que

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - 2t) - f(x)| \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $2\pi -$ périodique, elle est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $|x_1 - x_2| \leqslant 2\eta_\varepsilon$ on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon$.

Mais alors en découpant l'intégrale précédente en $|t| \leqslant \eta_\varepsilon$ et $|t| \geqslant \eta_\varepsilon$ il vient

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n\pi} \int_{|t| \leqslant \eta_\varepsilon} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt + \frac{2}{n\pi} \int_{\substack{|t| \geqslant \eta_\varepsilon \\ t \in (-\pi, \pi)}} ||f||_\infty \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt.$$

Par $(\star\star)$ et puisque pout $|t| \geqslant \eta$, $|\sin t| \geqslant |\sin \eta|$ nous déduisons alors que

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{2||f||_\infty}{\sin^2 \eta_\varepsilon} \frac{1}{n\pi}$$

qui est inférieur à 2ε pour n assez grand et ce indépendamment de x.

Commentaires

Ce problème (Théorème de Fejér) montre de manière simple que toute fonction continue et 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques (les σ_n) tout en fournissant une expression explicite de ces polynômes :

$$\sigma_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Corrigé 41

41.3.1. Si $\alpha > 1$, $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} < \infty$ et donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n+1}^{[\lambda n]} \frac{1}{m^\alpha} = 0$ quel que soit $\lambda > 1$.

Si $\alpha \leqslant 0$, $\sum_{m=n+1}^{[\lambda n]} \frac{1}{m^\alpha} \geqslant (\lambda - 1)n$ qui tend vers l'infini : la condition n'a jamais lieu.

Si $0 < \alpha < 1$,

$$\sum_{m=n+1}^{[\lambda n]} \frac{1}{m^\alpha} \geqslant \sum_{m=n+1}^{[\lambda n]} \int_m^{m+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_{n+1}^{\alpha n-1} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$= \frac{(\lambda n-1)^{1-\alpha}-(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sim \frac{\lambda^{1-\alpha}}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

lorsque $n \to \infty$ et donc là encore la condition n'a jamais lieu. Finalement pour $\alpha = 1$, rappelons qu'il existe une constante γ telle que $\gamma - \log n + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \equiv \eta_n$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Nous avons alors $\sum_{m=n+1}^{\lambda n} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{\lambda n} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{m} \frac{1}{m} = \eta_{\lambda n} - \eta_n + \log(\lambda n) - \log n = \log \lambda + \eta_{\lambda n} - \eta_n$. Lorsque n tend vers $+\infty$ et à condition de prendre par exemple $\lambda = e^\varepsilon > 1$ nous avons bien $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n+1}^{\lambda n} \frac{1}{m^\alpha} \leqslant \varepsilon$.
En conclusion les valeurs de α qui répondent à la question sont $\alpha \in [1, +\infty[$.

41.3.2. Soit m un entier supérieur à $n+1$, puisque

$$(m+1)\sigma_m(f,t) = (n+1)\sigma_n(f,t) + \sum_{k=n+1}^{m} S_k(f,t),$$

nous avons

$$(m-n)S_n(f,t) = (m+1)\sigma_m(f,t) - (n+1)\sigma_n(f,t) - \sum_{k=n+1}^{m} (S_k(f,t) - S_n(f,t)).$$

Or $S_k(f,t) - S_n(f,t) = \sum_{n>|j|\geqslant k} \hat{f}(j)e^{ijt}$ de sorte qu'en intervertissant les signes somme :

$$\sum_{k=n+1}^{m} (S_k(f,t) - S_n(f,t)) = \sum_{n<|j|\leqslant m} \sum_{k=|j|}^{m} \hat{f}(j)e^{ijt} = \sum_{n<|j|\leqslant m} (m-|j|+1)\hat{f}(j)e^{ijt}.$$

Ainsi lorsque $m = [\lambda n] > n$ nous avons

$$S_n(f,t) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sigma_{[\lambda n]}(f,t) - \frac{n+1}{[\lambda n]-n}\sigma_n(f,t) -$$

$$- \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n} \sum_{n<|j|\leqslant \lambda n} \left(1 - \frac{|j|}{1+[\lambda n]}\right) \hat{f}(j)e^{ijt}.$$

Donnons nous alors $\varepsilon > 0$, puisque α vérifie la propriété de la question 41.3.1. et que la suite $(|n|^\alpha |\hat{f}(n)|)$ est bornée, il existe $\lambda > 1$ et n_0 tels que

$$\forall n \geqslant n_0, \sum_{n<|j|\leqslant[\lambda n]} |\hat{f}(j)| \leqslant \varepsilon/2.$$

Supposons donc que $\sigma_n(f,t)$ converge vers une limite notée $\sigma(f,t)$. Puisque $[\lambda n]$ est équivalent à λn lorsque n tend vers l'infini nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sigma_{[\lambda n]}(f,t)-\frac{n+1}{[\lambda n]-n}\sigma_n(f,t)\right)$$
$$=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\sigma(f,t)-\frac{1}{\lambda-1}\sigma(f,t)=\sigma(f,t).$$

D'autre part, pour $n \geqslant n_0$,

$$\left|\sum_{n<|j|\leqslant\lambda n}\left(1-\frac{|j|}{[\lambda n]+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijt}\right|\leqslant\sum_{n<|j|\leqslant\lambda n}|\hat{f}(j)|\leqslant\varepsilon/2$$

Soit alors $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1, [\lambda n] > n$ et

$$\left|\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n]}\sigma_{[\lambda n]}(f,t)-\frac{n+1}{[\lambda n]-n}\sigma_n(f,t)-\sigma(f,t)\right|\leqslant\varepsilon/2,$$

nous aurons donc pour $n \geqslant n_1$, $\quad |S_n(f,t)-\sigma(f,t)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $S_n(f,t)$ converge vers $\sigma(f,t)$.

La réciproque est le très classique « Lemme de Césaro ».

Lemme. *Soit (g_n) une suite de fonctions bornées de X partie d'un espace vectoriel normé dans un autre espace vectoriel normé $(E,||.||)$. On suppose que (g_n) converge uniformément vers $g : X \to E$. Alors (G_n) avec $G_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g_k$ converge uniformément vers g.*

Remarques.

(i) Lorsque X est un singleton, il s'agit d'une convergence simple.

(ii) La réciproque est en général fausse comme le montre l'exemple $g_n = (-1)^n$.

Preuve du Lemme. Pour $m \leqslant n$, on écrit

$$G_n - g = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(g_k-g) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{m}(g_k-g)+\sum_{k=m+1}^{n}(g_k-g)\right).$$

Donnons nous $\varepsilon > 0$, il existe alors m tel que

$$n \geqslant m \Rightarrow \sup_{x\in X}||g_n(x)-g(x)|| \leqslant \varepsilon/2.$$

Puisque les fonctions (g_k) sont bornées, g est bornée et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in X} ||g_k(x) - g(x)|| = 0.$$

Il existe donc $n_0 \geqslant m$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \sup_{x\in X} \frac{1}{n+1}|| \sum_{k=1}^{m}(g_k(x) - g(x))|| \leqslant \varepsilon/2$ et pour $n \geqslant n_0$ nous aurons, $\sup_{x\in X} ||G_n(x) - g(x)|| \leqslant \varepsilon$.

41.3.3. D'après le lemme que nous venons d'énoncer, si $S_n(f,.)$ converge uniformément vers $S(f,t), \sigma_n(f,.)$ converge uniformément vers $S(f,t)$. D'autre part si $\sigma_n(f,.)$ converge uniformément vers $\sigma(f,.)$ on observe que l'entier n_1 apparaissant dans la preuve de la question 41.3.2. peut être choisi indépendamment de t et ainsi $S_n(f,.)$ converge uniformément vers $\sigma(f,.)$.

Commentaires

Lorsque $\alpha > 1$, le fait que $|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{C}{n^\alpha}$ entraîne que $S_n(f,t)$ converge normalement vers f et le résultat prouvé ici n'a pas grand intérêt. Par contre dans le cas $\alpha = 1$, on ne peut rien dire *a priori* sur $\sum |\hat{f}(n)|$.

Mais puisque f est continue, nous savons (théorème de Fejér, problème 40) que $\sigma_n(f,.)$ converge uniformément vers f ; il en est donc de même pour $S_n(f,.)$. Ainsi nous obtenons le résultat suivant.

Proposition. *Soit f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} |n||\hat{f}(n)| < \infty$ alors f est limite uniforme de sa série de Fourier.*

Grâce au problème 50 nous pourrons en tirer une conséquence intéressante (voir les commentaires à ce dernier problème à la page 219).

Corrigé 42

42.3.1. Soit $n \geqslant 1$, on prend $s_n = \frac{\pi}{4n}$ de sorte que pour $k \in \mathbb{N}$ et $k \in [n, 2n]$, on a $\sin kx_n \geqslant \sin \frac{\pi}{4}$. Puisque $a_k \geqslant \inf_{k\geqslant 1} a_k = 0$, $\sum_{k=n}^{2n} a_k \sin k_x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)a_{2n}$. Par ailleurs, le critère de Cauchy uniforme montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\max_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=n}^{2n} a_k \sin kx \right) = 0\,,$$

de sorte que $(n+1)a_{2n}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Il en est donc de même pour na_{2n}. Puisque $a_{2n+1} \leqslant a_{2n}$, $(2n+1)a_{2n+1}$ tend lui aussi vers zéro lorsque n tend vers l'infini et finalement $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

42.3.2. Nous allons montrer la réciproque qui s'énonce comme suit. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante et tendant vers zéro lorsque n tend vers l'infini, si la suite na_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini alors la série de fonction $\sum_{n\geqslant 1} a_n \sin nx$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Puisque na_n tend vers zéro, la suite $b_k = \sup\{na_n, n \geqslant k\}$ est bien définie dans $\mathbb{R}$ et tend vers zéro. Soient $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ et $x \in]0, \pi]$. On note $N(= N_x)$ l'entier qui est tel que $\frac{\pi}{1+N} < x \leqslant \frac{\pi}{N}$.

(i) 1^er^ cas, $p < N$. Nous avons alors

$$(\sin nx \leqslant nx) \left|\sum_{k=m}^{m+p} a_k \sin kx\right| \leqslant x \sum_{k=m}^{m+N-1} ka_k \leqslant xNb_m \leqslant \pi b_m.$$

(ii) 2^e^ cas, $p \geqslant N$. Nous écrivons

$$\sum_{k=m}^{m+p} a_k \sin kx = R + R'$$

avec $r = \sum_{k=m}^{m+N+1} a_k \sin kx$ et $R' = \sum_{k=m+N}^{m+p} a_k \sin kx$.

Pour la majoration du 1er cas, $|R| \leqslant \pi b_m$. Pour le second terme, notons

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx \left(\frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right)$$

de sorte que par la transformation d'Abel

$$R' = \left(- \sum_{k=m+N}^{m+p} (a_{k+1} - a_k)\tilde{D}_k(x) \right) - a_{m+N}\tilde{D}_{m+N-1}(x) + a_{m+p+1}\tilde{D}_{m+p}(x).$$

Or pour les valeurs de x considérées, $|\tilde{D}_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{x}$ et par conséquent $(a_k \geqslant a_{k+1})$:

$$\begin{aligned} |R'| &\leqslant \frac{\pi}{x} \left(\sum_{k=m+N}^{m+p} (a_k - a_{k+1}) + a_{m+N} + a_{m+p+1} \right) \\ &\leqslant \frac{\pi}{x} 2a_{m+N} \leqslant 2(1 + N)a_{m+N} \leqslant 2(m + N)a_{m+N} \leqslant 2b_m. \end{aligned}$$

Ainsi dans ce cas $|\sum_{k=m}^{m+p} a_k \sin kx| \leqslant (\pi + 2)b_m$.

Cette dernière majoration étant valable dans le premier cas, nous en déduisons que, compte tenu de la périodicité et du caractère impaire de la fonction Sinus, la série de fonction $\sum a_k \sin kx$ vérifie le critère de Cauchy uniforme pour $x \in \mathbb{R}$. Elle est donc uniformément convergente.

42.3.3. Si na_n tend vers zéro, a_n tend vers zéro et d'après la question précédente la série de fonction $\sum a_n \sin nx$ converge uniformément vers une fonction (que l'on note f) qui est alors continue et 2π −périodique. Cette convergence étant uniforme, on a bien $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx$. Réciproquement, étant donné f continue et 2π −périodique, on définie a_n par cette formule et on introduit la suite de fonction σ_n, moyenne de Césaro, $\sigma_n(x) = \frac{1}{1+n}\sum_{k=1}^{n} S_k(x)$ où $S_k(x) = \sum_{p=1}^{k} a_k \sin kx$.

D'après le problème 40 (Théorème de Fejér) nous savons que σ_n converge uniformément vers f. Puisque $\sigma_n(0) = 0$, $f(0) = 0$ et donc $\sigma_n(\frac{\pi}{n})$ converge vers zéro. D'autre part nous avons $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})a_k \sin kx$ (formule classique qui s'obtient soit par un calcul direct soit par récurrence). En utilisant la minoration $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ valable pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, il vient alors

$$\sigma_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \geqslant \sum_{k\leqslant \frac{n}{2}}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k \sin\frac{k\pi}{n} \geqslant \sum_{k\leqslant \frac{n}{2}} a_k\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\frac{2}{\pi}\frac{k\pi}{n}.$$

Or $1-\frac{k}{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$ pour $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$ et donc $\sigma_n(\frac{\pi}{n}) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k\leqslant\frac{n}{2}} ka_k$. Il en résulte que la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant\frac{n}{2}} ka_k)_{n\geqslant 1}$ tend vers zéro. Prenons alors $n = 2m$, puisque $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante,

$$\frac{1}{n}\sum_{k\geqslant\frac{n}{2}} ka_k \geqslant \frac{1}{2m}a_m\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m+1}{4}a_m$$

Ainsi $(m+1)a_m$ tend vers zéro lorsque m tend vers l'infini, il est donc de même pour ma_m.

Commentaires

Il résulte du résultat démontré au numéro 42.3.2. (prendre $a_n = \frac{1}{n\log(1+n)}$) que la fonction $f(x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin nx}{n\log(1+n)}$ est continue.
Observons que le résultat montré dans ce problème est spécifique au cas d'une série de Sinus. Il serait faux pour $\sum_{n\geqslant 1} a_n\cos nx$. Ces dernières séries sont étudiées au problème suivant.

Corrigé 43

43.3.1. Pour montrer l'identité

$$s_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\Delta^2 a_k F_k(x) + \frac{1}{2}n(\Delta a_{n-1})F_{n-1}(x) + \frac{1}{2}a_n D_n(x), \qquad (*)$$

on peut procéder de deux manières différentes. Soit on commence par calculer $\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)$ où $\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\Delta^2 a_k F_k(x) + n(\Delta a_{n-1})F_{n-1}(x) + a_n D_n(x)$:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x) &= n\Delta^2 a_{n-1} F_{n-1}(x) + (n+1)(\Delta a_n)F_n(x) - \\ &- n(\Delta a_{n-1})F_{n-1}(x) + a_{n+1}D_{n+1}(x) - a_n D_n(x) = \Delta a_n(-nF_{n-1}(x) + \\ &+ (n+1)F_n(x) - D_n(x)) + (a_n - a_{n+1})D_n(x) + a_{n+1}D_n(x) - a_n D_n(x) \\ &= a_{n+1}(D_{n+1}(x) - D_n(x)) = a_{n+1}\cos(n+1)x.\end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma_n(x)$ sera égal à $2s_n(x)$ une fois que l'on aura montré que

$$\sigma_2(x) = 2s_2(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x,$$

égalité qui se vérifie immédiatement.

L'identité ($\star$) peut aussi se montrer en répétant deux transformations d'Abel. Rappelons que la transformation d'Abel pour les séries est l'analogue de l'intégration par parties pour les intégrales. Soient (d_n) et (b_n) deux suites, on vérifie aisément que

$$\sum_{k=0}^{n} d_k(\Delta b_k) = -\sum_{k=0}^{n} b_{k+1}(\Delta d_k) + d_0 b_0 - d_{n+1}b_{n+1}.$$

Appliquons la transformation en prenant $b_k = \Delta C_k$ où (C_n) est arbitraire. Il vient

$$\sum_{k=0}^{n} d_k(\Delta^2 C_k) = -\sum_{k=0}^{n}(\Delta C_{k+1})(\Delta d_k) + d_0\Delta C_0 - d_{n+1}(\Delta C_{n+1}).$$

Puis en itérant la transformation sur la somme au membre de droite, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n}(\Delta C_{k+1})(\Delta d_k) = -\sum_{k=0}^{n} C_{k+2}(\Delta^2 d_k) + \Delta C_1\Delta d_0 - \Delta C_{n+2}\Delta d_{n+1}.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} d_k(\Delta^2 C_k) = \sum_{k=0}^{n} C_{k+2}(\Delta^2 d_k) + d_0\Delta C_0 - d_{n+1}\Delta C_{n+1} + \Delta C_{n+2}\Delta d_{n+1} - \Delta C_1\Delta d_0.$$

Prenons alors $C_k = a_k, d_k = (k+1)F_k(x) = \sum_{p=0}^{k} D_p(x)$ et $n-2$ au lieu de n. La formule ($\star$) en résulte.

Maintenant que cette identité est prouvée, lorsque x n'est pas congru à zéro modulo 2π, les suites $(D_n(x))$ et $(F_n(x))$ sont bornées. Ainsi la série de terme général $(k+1)\Delta^2 a_h F_k(x)$ est absolument convergente. En utilisant (i) et (ii), il résulte donc de ($\star$) que $(s_n(x))$ converge vers $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2 a_k F_k(x)$.

43.3.2. Lorsque $x \in [a,b] \subset]0,2\pi[$, les suites $(D_n(x))$ et $(F_n(x))$ sont bornées indépendamment de x. Ainsi la convergence de s_n vers f est uniforme sur $[a,b] \subset]0,2\pi[$. Il en résulte que f est continue sur tout compact inclus dans $]0,2\pi[$ et donc f est continue sur $]0,2\pi[$. De plus,

$$\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2 a_k \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F_k(x)\cos nx dx.$$

$$\text{Mais } \left|\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F_k(x)\cos nx dx\right| \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F_k(x)dx \leqslant \int_0^{2\pi} F_k(x)dx = 1$$

et par conséquent, $\forall\varepsilon \in]0,2\pi[$,

$$\left|(k+1)\Delta^2 a_k \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F_k(x)\cos nx dx\right| \leqslant (k+1)|\Delta^2 a_k|,$$

avec $\sum(k+1)|\Delta^2 a_k| < \infty$. Puisque

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F_k(x)\cos nx dx = \int_0^{2\pi} F_k(x)\cos nx dx$$

nous déduisons par convergence dominée que

$$b_n \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2 a_k \int_0^{2\pi} F_k(x)\cos nx dx.$$

Un calcul direct montre alors que

$$(k+1)\int_0^{2\pi} F_k(x)\cos nx dx = 0 \text{ si } k \leqslant n-1 \text{ et } = 2\pi(k-n+1) \text{ si } k \geqslant n.$$

Il en résulte que $b_n = \sum_{k=n}^{\infty}(k+1-n)\Delta^2 a_k$. Mais

$$\sum_{k=n}^{\infty} k\Delta^2 a_k = \sum_{k=n}^{\infty} k\Delta a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-1)\Delta a_k = n\Delta a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta a_k = n\Delta a_n + a_{n+1}$$

$$\text{et } \sum_{k=n}^{\infty}\Delta^2 a_k = \Delta a_n = a_n - a_{n+1} \text{ d'où } b_n = a_n.$$

43.3.3. Nous allons prouver que si $a_n \to 0$ et $\sum(n+1)|\Delta^2 a_n| < \infty$ alors $n\Delta a_n \to 0$. Pour cela nous évaluons

$$\sum_{k=0}^{n} k\Delta^2 a_{m+k} = \sum_{k=0}^{n} k\,(\Delta a_{m+k} - \Delta a_{m+k+1}) = \sum_{h=0}^{n} k\Delta a_{m+k} - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)\Delta a_{m+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Delta a_{m+k} - n\Delta a_{m+n+1} = a_{m+1} - a_{m+n+1} - n\Delta a_{m+n+1}.$$

Ainsi pour tous m et n :

$$-n\Delta a_{m+n+1} = a_{m+n+1} - a_{m+1} + \sum_{k=0}^{n} k\Delta^2 a_{m+k}.$$

Prenons $m = n$, il vient

$$\begin{aligned}|n\Delta a_{2n+1}| &\leqslant |a_{2n+1}| + |a_{n+1}| + \sum_{k=0}^{n}(k+n+1)|\Delta^2 a_{n+k}|,\\ &\leqslant |a_{2n+1}| + |a_{n+1}| + \sum_{k=n}^{2n}(k+1)|\Delta^2 a_k|\end{aligned}$$

et donc $\lim_{n\to\infty} n\Delta a_{2n+1} = 0$ d'où $\lim_{n\to\infty}(2n+1)\Delta a_{2n+1} = 0$.

Par ailleurs $2n\Delta a_{2n} = 2n\Delta^2 a_{2n} + 2n\Delta a_{2n+1}$ et puisque $\lim_{n\to\infty} 2n\Delta^2 a_{2n} = 0$, il résulte que $\lim_{n\to\infty} 2n\Delta a_{2n} = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} n\Delta a_n = 0$.

Commentaires

La convergence des séries de Cosinus est plus délicate que celle des séries de Sinus (étudiées au problème précédent). L'objet de ce problème est de donner une condition suffisante sur les (a_n) pour que $\sum_{n\geqslant 1} a_n \cos nx$ soit convergente. La condition $a_n \to 0$ n'est notoirement pas suffisante et la condition $\sum |a_n| < \infty$ est trop forte (elle impliquerait la convergence uniforme). La condition (iii) (due à Zygmund) ressemble à une propriété de décroissance de la « dérivée » seconde de a_n : $(\Delta^2 a_n)$. Elle est en quelque sorte optimale, voir l'ouvrage de Zygmund déjà cité à la page 180.

Corrigé 44

44.3.1. Soit χ la fonction caractéristique de $[a, b] \subset [0, 1]$, alors

$$\int_0^1 \chi(x)e^{-2i\pi kx}dx = \int_a^b e^{-2i\pi kx}dx = \frac{e^{-2i\pi kb} - e^{-2i\pi ka}}{-2i\pi k}$$

pour $|k| \geqslant 1$. Nous avons donc $\left|\int_0^1 \chi(x)e^{-2i\pi kx}\right| \leqslant \frac{1}{\pi|k|}$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, la fonction f étant intégrable au sens de Riemann, il existe une fonction en escalier $g = \sum_{p=1}^{P} \lambda_p \chi_p$ où $\lambda_p \in \mathbb{R}$ et χ_p est la fonction caractéristique de $[a_p, b_p] \subset [0, 1]$, telle que

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons donc (indépendamment de $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\left|\int_0^1 f(x)e^{-2i\pi kx}dx\right| \leqslant \varepsilon + \left|\int_0^1 g(x)e^{-2i\pi kx}dx\right|.$$

Mais d'après la première partie :

$$\left|\int_0^1 g(x)e^{-2i\pi kx}dx\right| \leqslant \frac{1}{\pi|k|}\sum_{p=1}^{P}|\lambda_p|.$$

Prenons alors K tel que $\sum_{p=1}^{P}|\lambda_p| \leqslant \pi\varepsilon K$, pour $|k| \geqslant K$ nous aurons $|\int_0^1 f(x)e^{-2i\pi kx}dx| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui montre que $\lim_{|k|\to\infty}\int_0^1 f(x)e^{-2i\pi kx}dx = 0$.

44.3.2. Puisque $\hat{f}(0) = 0$, $F(1) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, notons $\tilde{F}(x) = F(x-[x])$ où $[x]$ est la partie entière de x. Puisque f est intégrable sur $[0, 1]$, F est continue sur $[0, 1]$ et $\tilde{F}$ sera continue si et seulement si elle est continue en $x = 1$ (puisque $\tilde{F}(x + 1) = \tilde{F}(x)$ par construction). Mais ceci est automatique puisque $F(0) = F(1)$.

44.3.3.a. Tout polynôme trigonométrique (1-périodique) et à coefficients positifs ne contenant que des Sinus convient.

b. Soit K_N le noyau de Fejér :

$$K_N(x) \equiv \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{|p|\leqslant k} e^{-2i\pi px}\right) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x}\right)^2.$$

En utilisant l'une ou l'autre des expressions, nous avons

(i) $\int_0^1 K_N(x)dx = 1$,

(ii) $\forall\alpha \in]0, 1[, \lim_{N\to+\infty}\int_\alpha^{1-\alpha} K_N(x)dx = 0$,

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad K_N(x) \geqslant 0$.

Lemme. *Soit (K_N) une suite d'applications 1-périodiques et continues vérifiant (i)-(ii)-(iii). Alors quel que soit F continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $K_N \star F$, avec $(K_N \star F)(x) = \int_0^1 K_N(x-y)F(y)dy$, converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Puisque K_N et F sont 1-périodiques on a aussi (changement de variable $y \longmapsto x - y$)

$$(K_N \star F)(x) = \int_0^1 K_N(y)F(x-y)dy$$

de sorte que

$$(K_N \star F)(x) - F(x) = \int_0^1 K_N(y)(F(x-y) - F(x))dy. \qquad (*)$$

Puisque F est continue et 1-périodique, elle est uniformément continue et bornée ainsi : $\omega(y) \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x-y) - F(x)|$ tend vers zéro lorsque y tend vers zéro et $|F(x)| \leqslant ||F||_\infty < \infty$.

Soit $\alpha \in]0,1[$, nous déduisons immédiatement de $(\star)$ que (on utilise (i) et (iii))

$$|(K_N \star F)(x) - F(x)| \leqslant 2||F||_\infty \int_\alpha^{1-\alpha} K_N(y)dy + \sup_{|y|\leqslant\alpha} \omega(y).$$

Donnons nous $\varepsilon > 0$, puisque $\omega(y) \to 0$ lorsque $y \to 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|y| \leqslant \alpha \Rightarrow \omega(y) \leqslant \varepsilon/2$. Mais alors par (ii) $2||F||_\infty \int_\alpha^{1-\alpha} K_N(y)dy$ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini. Il existe donc N_ε tel que pour $N \geqslant N_\varepsilon$, $2||F||_\infty \int_\alpha^{1-\alpha} K_N(y)dy \leqslant \varepsilon/2$. Ainsi $\forall N \geqslant N_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}\ |(K_N \star F)(x) - F(x)| \leqslant \varepsilon$. Ce qui achève la preuve du lemme.

Il résulte de ce lemme que $(K_N \star F)(0)$ converge vers $F(0)$ lorsque $N \to +\infty$. Nous avons $(K_N \star F)(0) = \int_0^1 K_N(x)F(x)dx$ (observer que K_N est paire). Mais nous avons la troisième expression pour K_N : $K_N(x) = \sum_{|k|\leqslant N}(1 - \frac{|k|}{N+1})e^{-2ikx}$ qui s'obtient en échangeant les signes de sommation sur k et p. Ainsi

$$(K_N \star F)(0) = \sum_{|k|\leqslant N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{F}(k) \to F(0).$$

où $\hat{F}(k) = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi kx}dx$.

On vérifie alors que $\hat{F}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{ik}$ pour $k \neq 0$ (on pourra raisonner par densité, comme à la première question, après avoir montré cette identité pour une fonction f en escalier). Ainsi

$$\sum_{\substack{|k|\leqslant N\\ k\neq 0}} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \frac{\hat{f}(k)}{ik} \to F(0) - \hat{F}(0) = -\hat{F}(0).$$

Mais $\frac{1}{N+1} \sum_{\substack{|k|\leqslant N\\ k\neq 0}} \frac{|k|}{k} \hat{f}(k) = \frac{2N}{N+1}\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{f}(k)$ et $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \hat{f}(k)$, moyenne de Césaro de la suite $(\hat{f}(k))_{k\geqslant 1}$, tend vers zéro puisque d'après la première question cette suite tend vers zéro. Ainsi $\sum_{k=1}^N \frac{\hat{f}(k)}{ik}$ converge vers $-\hat{F}(0)$.

44.3.4. Prenons $a_k = \frac{k}{|k|\log|k|}$ pour $k \neq 0$. S'il existait f intégrable telle que $a_k = \hat{f}(k)$, d'après ce qui précède $\sum \frac{a_k}{k}$ devrait être convergente ce qui n'est pas.

Commentaires

Ce problème est à rapprocher du problème 42 puisque finalement $\sum \hat{f}(k)\sin 2\pi kx$ est une série de Sinus. Nous voyons que si l'on essaye d'imposer un signe à $i\hat{f}(k)$ alors nécessairement $\hat{f}(k)$ doit tendre assez vite vers zéro $(\sum |\frac{\hat{f}(k)}{k}| < \infty)$.

En d'autres termes, il n'est pas possible de caractériser simplement les fonctions f, périodiques et impaires dont les coefficients de Fourier ont un signe donné après multiplication par i.

Corrigé 45

45.3.1. On développe

$$||f - \sum_{n=-N}^{N} f_n e_n||_2^2 = ||f||_2^2 - 2Re \sum_{n=-N}^{N} f_n(f, e_n) + ||\sum_{n=-N}^{N} f_n e_n||_2^2.$$

Puisque pour $n \neq m$, $(e_n, e_m) = 0$ alors que $||e_n||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1dx = 1$, il vient

$$||f - \sum_{n=-N}^{N} f_n e_n||_2^2 = ||f||_2^2 - 2\sum_{n=-N}^{N} |f_n|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |f_n|^2$$

et ainsi

$$\sum_{n=-N}^{N} |f_n|^2 = ||f||_2^2 - ||f - \sum_{n=-N}^{N} f_n e_n||^2 \leqslant ||f||_2^2.$$

Nous en déduisons que $(|f_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C.. La fonction f étant continue, un résultat du cours (identité de Bessel) assure que

$$\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|f_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

45.3.2. Calculons

$$||S_{N+M} - S_N||_\infty = ||\sum_{\substack{|n|\leqslant N+M \\ |n|\geqslant N+1}} u_n e_n||_\infty,$$

et puisque $||e_n||_\infty = 1$,

$$||S_{N+M} - S_N||_\infty \leqslant \sum_{\substack{|n|\leqslant N+M \\ |n|\geqslant N+1}} |u_n| \leqslant \sum_{|n|\geqslant N+1} |u_n|.$$

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., $\sum_{|n|\geqslant N+1} |u_n|$ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini et alors il résulte de l'inégalité qui précède que la suite $(S_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E pour la norme $||.||_\infty$. Cet espace est complet, il existe $u \in E$ tel que $\lim_{N\to\infty} ||S_N - u||_\infty = 0$.

Nous avons $|(e_n, u - S_n)| \leqslant ||e_n||_2||u - S_N||_2 \leqslant ||e_n||_\infty||u - S_N||_\infty = ||u - S_N||_\infty$ par conséquent (e_n, u) est la limite de (e_n, S_N) lorsque $N \to \infty$. Mais pour $N \geqslant |n|, (e_n, S_N) = u_n$ et donc le coefficient de Fourier (e_n, u) est u_n.

45.3.3. Nous avons $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ lorsque $n \to +\infty$ par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien une S.A.C.. Écrivons

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n e^{inx} = S_N(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)}$$

pour tout $N \geqslant 1$. Ainsi, pour $x \neq 0$,

$$Im\,\frac{u(x)-u(0)}{x} = Im\,\frac{S_N(x)-S_N(0)}{x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)x}.$$

Pour $x = 1/N$, $N \geqslant 2$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)x}\right| \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n=n+1}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{x}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{xN} = 1;$$

$$Im\ NS_N(\frac{1}{N}) = N\left(\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{\sin nx}{n(n-1)x}\right) - \frac{\sin x}{x}\right), x = 1/N.$$

Lorsque n est compris entre 2 et N et $x = 1/N$, nx est compris entre 0 et 1 par suite $\frac{\sin nx}{nx} \geqslant \alpha = \sin 1 > 0$. En utilisant le fait que $\sin x \leqslant 1$, nous obtenons que $Im\ NS_N(\frac{1}{N}) \geqslant N(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}) - 1 \geqslant \frac{N-1}{N-1}N - 1 = N-1$. Puisque $Im\ S_N(0) = 0$, il résulte de l'identité de l'énoncé et des estimations précédentes que, pour $x = 1/N$, $Im\ \frac{u(x)-u(0)}{x} \geqslant N-2$. Par conséquent $\frac{u(x)-u(0)}{x}$ n'est pas borné lorsque x tend vers zéro et *a fortiori* u n'est pas dérivable en zéro.

45.3.4. Soient N et M deux entiers,

$$||\Sigma_{N+M} - \Sigma_N||_2^2 = \sum_{n=N+1}^{N+M}\frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

cette dernière suite tendant vers zéro lorsque $N \to +\infty$, la suite $(\Sigma_N)_{N\geqslant 1}$ est de Cauchy dans E pour la norme $||.||_2$.

45.3.5. Calculons

$$\begin{aligned}(e^{ix}-1)\Sigma_N(x) &= (e^{ix}-1)\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{e^{i(n+1)x}}{n} - \frac{e^{inx}}{n}\right)\\ &= \sum_{n=2}^{N+1}\frac{e^{inx}}{n-1} - \sum_{n=1}^{N}\frac{e^{inx}}{n} = S_N(x) + \frac{e^{iNx}}{N}.\end{aligned}$$

Puisque $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers u pour la norme $||.||_\infty$, elle converge vers u pour la norme $||.||_2$. Par ailleurs $||\frac{e_N}{N}||_2 = \frac{1}{N}$ tend vers zéro. Ainsi la suite de fonction $((e_1-1)\Sigma_N)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge dans E pour la norme $||.||_2$ vers u. Si, par ailleurs, Σ_N converge dans E vers $\sigma \in E$ pour la norme $||.||_2$ $((e_1-1)\Sigma_N)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(e_1-1)\sigma$ pour la norme $||.||_2$ et ainsi $(e_1-1)\sigma = u$.

45.3.6. Si E muni de la norme $||.||_2$ était complet, puisque la suite $(\Sigma_N)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est de Cauchy dans $(E, ||.||_2)$, elle convergerait vers un élément $\sigma \in E$. Dans ce cas

$\frac{u(x)-u(0)}{x} = \frac{e^{ix}-1}{x}\sigma(x)$ et puisque $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ix}-1}{x} = i$, la continuité de σ en zéro fait que u est dérivable en zéro. Ceci-contredit le résultat de la question 45.1.3. et par conséquent, E munit de la norme $||.||_2$ n'est pas complet.

45.3.7. Soit $f \in E$, désignons par $g \in E_N$ défini par $g = \sum_{n=-N}^{N} f_n e_n$. Pour $h \in E_n$, nous avons

$$||f-h||_2^2 = ||f-g+g-h||_2^2 = ||f-g||_2^2 + ||g-h||_2^2,$$

car $f-g$ est orthogonal à tous les éléments de E_n et donc à $g-h$. Ainsi

$$||f-h||_2 \geqslant ||f-g||_2, \ \forall h \in E_n.$$

De plus si $g' \in E_N$ convient alors

$$||f-g'||_2 \leqslant ||f-g||_2$$

et puisque $||f-g'||_2^2 = ||f-g||_2^2 + ||g-g'||_2^2$, $||g-g'||_2 = 0$ et donc $g' = g$.

45.3.8. Nous devons montrer que l'application P_N est linéaire et vérifie $P_N \circ P_N = P_N$. Nous avons d'après la preuve de la question précédente,

$$P_N f = \sum_{n=-N}^{N} f_n e_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-n}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right)e_n$$

et donc pour $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, on a bien $P_N(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 P_N f_1 + \lambda_2 P_N f_2$. Lorsque $f \in E_N$, $P_N f = f$ soit en utilisant la formule qui explicite $P_N f$ soit en observant que $||f-f||_2^2 = 0$ et donc f minimise $||f-h||_2^2$ pour $h \in E_N$.

Nous avons $(P_N f, f - P_N f) = 0$ car $f - P_N f = \sum_{|n|\geqslant N+1} f_n e_n$. Ainsi par le théorème de Pythagore

$$||f||_2^2 = ||f - P_N f + P_N f||_2^2 = ||f - P_N f||_2^2 + ||P_N f||_2^2.$$

L'inégalité demandée en résulte.

45.3.9.a. Nous avons vu que

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy\right)e^{inx},$$

ainsi

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)}dy$$

ou encore
$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_N(x-y)dy.$$

45.3.9.b. Faisons le changement de variable $y = x - z$ dans l'intégrale précédente. Il vient
$$\begin{aligned}(P_N f)(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-z)D_N(z)dz,\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-z)D_N(z)dz.\end{aligned}$$

Étant donné que à x fixé, la fonction $z \mapsto f(x-z)D_N(z)$ est 2π-périodique, son intégrale sur le segment $[x-\pi, x+\pi]$ de longueur 2π (la période) est égale à son intégrale sur $[-\pi,\pi]$:
$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)D_N(z)dz.$$

45.3.10. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales et la formule de la question 45.1.9.b,
$$|(P_N f)(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|^2 dy\right)^{1/2} ||D_N||_2.$$

Mais puisque nous prenons $||f||_\infty \leqslant 1$, $|(P_N f)(x)| \leqslant ||D_N||_2$. Par ailleurs,
$$||D_N||_2^2 = ||\sum_{n=-N}^{N} e_n||_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} ||e_n||_2^2 = 2N+1,$$

ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $|(P_N f)(x)| \leqslant \sqrt{2N+1}$ et alors $\alpha_N \leqslant \sqrt{2N+1}$.

45.3.11. Nous avons $|\psi_N^\varepsilon(x)| \leqslant 1$, par conséquent $||\psi_N^\varepsilon||_\infty \leqslant 1$ de sorte que $\alpha_N \geqslant ||P_N\psi_N^\varepsilon||_\infty$. *A fortiori*, $\alpha_N \geqslant |P_N\psi_N^\varepsilon(0)|$. Mais
$$(P_N\psi_N^\varepsilon)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_N(-y)D_N(y)}{\sqrt{\varepsilon + D_N^2(y)}}dy$$

et $D_N(-y) = \overline{D_N(y)}$ fait que $D_N(-y)D_N(y) = |D_N(y)|^2 = D_N^2(y)$. Ainsi
$$\alpha_N \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_N^2(y)}{\sqrt{\varepsilon + D_N^2(y)}}dy.$$

Admettons pour l'instant que : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant |y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon^2+y^2}} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Il résulte alors de la minoration de α_N que

$$\alpha_N \geqslant \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)| dy \right) - \sqrt{\varepsilon},$$

c'est-à-dire que $\alpha_N - L_N \geqslant -\sqrt{\varepsilon}$. Faisons tendre alors ε vers zéro, il vient $\alpha_N \geqslant L_N$. Pour montrer l'encadrement admis, nous écrivons

$$\begin{aligned} |y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon^2+y^2}} &= \frac{|y|\sqrt{\varepsilon+y^2} - y^2}{\sqrt{\varepsilon+y^2}} = \frac{|y|(\sqrt{\varepsilon+y^2} - \sqrt{y^2})}{\sqrt{\varepsilon+y^2}} \\ &= \frac{|y|}{\sqrt{\varepsilon+y^2}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon+y^2}+\sqrt{y^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leqslant |y| - \frac{y^2}{\sqrt{\varepsilon^2+y^2}} \leqslant \frac{|y|}{\sqrt{\varepsilon+y^2}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \leqslant \sqrt{\varepsilon}.$$

45.3.12. Puisque $D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$ pour $x \neq 0$,

$$L_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \right| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{\sin\frac{x}{2}} dx.$$

Nous découpons alors cette dernière intégrale de sorte que la fonction $x \mapsto \sin(N+\frac{1}{2})x$ soit de signe constant :

$$L_N = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}} \frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{\sin\frac{x}{2}} dx + \int_{\frac{2N\pi}{2N+1}}^{\pi} \frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{\sin\frac{x}{2}} dx \right).$$

La seconde intégrale est majorée par $\int_{\frac{2N\pi}{2N+1}}^{\pi} \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2N+1} \frac{1}{\sin\frac{\xi_N}{2}}$ par la formule de la moyenne, où $\xi_N \in \left] \frac{2N\pi}{2N+1}, \pi \right[$. Ainsi lorsque $N \to \infty$, elle a pour limite 0. Étudions alors $I_N = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}} \frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{\sin\frac{x}{2}} dx$ que nous allons comparer avec $J_N = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}} \frac{2|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{x} dx$. Nous observons qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour $x \in]0, \pi]$, $\left| \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{2}{x} \right| \leqslant \alpha x$. Ainsi

$$\begin{aligned} |I_N - J_N| &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}} \left| \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{2\sin(N+\frac{1}{2})x}{x} \right| dx, \\ &\leqslant \frac{\alpha}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{2k\pi}{(2N+1)}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}} x dx = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\frac{2N\pi}{2N+1}} x dx \leqslant \frac{\alpha\pi}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, $\int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}} |\sin(N+\frac{1}{2})x|dx = 4/(2N+1)$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{4}{2N+1}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{2N+1}{2(k+1)\pi} &\leqslant \sum_{k=1}^{N-1}\int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}}\frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{x}dx\\ &\leqslant \frac{4}{2N+1}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{2N+1}{2k\pi},\end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{4}{\pi}\left(-1+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}}\frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{x}dx \leqslant \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}.$$

Comme $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{2N+1}}\frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{x}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}dy = \beta$ est une constante, nous déduisons de l'encadrement précédent que $\beta + \frac{4}{\pi}(-1+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}) \leqslant J_N \leqslant \beta + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}$. Mais $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$ diverge lorsque $N \to \infty$ et a pour équivalent $\log N$, il en résulte que $J_N \sim \frac{4}{\pi}\log N$ lorsque N tend vers l'infini. Puisque $|I_N - J_N| \leqslant \frac{\alpha\pi}{2}$, il vient finalement $I_N \sim \frac{4}{\pi}\log N$ et comme nous avions remarqué que $L_N - I_N$ est aussi borné, $L_N \sim \frac{4}{\pi}\log N$.

45.3.13. Les applications $(P_N)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont équicontinues sur E munit de la norme $||.||_2$: il existe une constante M (1 en l'occurrence) telle que

$$\forall N \geqslant 1,\ \forall f \in E,\ ||P_N f||_2 \leqslant M||f||_2.$$

Bien que pour tout N fixé, $\forall f \in E$, $||P_N f||_\infty \leqslant \sqrt{2N+1}||f||_\infty$ on peut se demander s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\star)\quad \forall N \geqslant 1,\ \forall f \in E,\ ||P_N f||_\infty \leqslant M||f||_\infty.$$

S'il en était ainsi, on aurait par la question 45.1.11. $M \geqslant \alpha_N \geqslant L_N$. Puisque L_N tend vers l'infini par la question précédente, il résulte que $(\star)$ n'a pas lieu.

45.3.14. Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Nous avons $f' \in E$ et $f'_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx$. Par intégration par parties, puisque la fonction $x \mapsto f(x)e^{-inx}$ est 2π-périodique, nous obtenons que $f'_n = inf_n$. D'après la question 45.1.1., la fonction f' étant dans E, nous avons $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f'_n|^2 = ||f'||_2$ soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|f_n|^2 = ||f'||_2^2$. Ainsi $f \in H_1$ et $||f||_1^2 = ||f||_2^2 + ||f'||_2^2$.

La réciproque est fausse. En effet si u est la fonction introduite à la question 45.1.3., nous avons pour $n \to \infty, u_n \sim \frac{1}{n^2}$ et donc $(1+n^2)|u_n|^2 \sim \frac{1}{n^2}$. Ainsi $u \in H_1$ alors que u n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

45.3.15. D'après la question précédente, $E_1 \subset H_1$. Soit $f \in H_1$, nous avons $P_N f \in E_1$ (c'est un polynôme trigonométrique) et $||f - P_N f||_1^2 =$

$\sum_{|n|\geqslant N+1}(1+n^2)|f_n|^2$ tend vers zéro lorsque $N \to \infty$ puisque c'est le reste d'une S.A.C..

45.3.16. Nous avons

$$||f - P_N f||_2^2 = \sum_{|n|\geqslant N+1} |f_n|^2 \leqslant \sum_{|n|\geqslant N+1} \frac{1+n^2}{(1+N)^2}|f_n|^2 \leqslant \frac{||f||_1^2}{(1+N)^2}$$

d'où l'inégalité demandée.

45.3.17. Soit $g \in E_1$, puisque la dérivée de la fonction $x \mapsto g^2(x)$ est $2g(x)g'(x)$ nous obtenons que $g^2(x) = g^2(y) + 2\int_y^x g(t)g'(t)dt$.

Il en résulte que pour tous x et y entre $-\pi$ et π nous avons

$$|g^2(x) - g^2(y)| \leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)||g'(t)|dt \leqslant 4\pi||g||_2||g'||_2$$

(application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Ainsi

$$g^2(x) \leqslant g^2(y) + 4\pi||g||_2||g'||_2\,,$$

et en intégrant cette inégalité par rapport à y entre $-\pi$ et π, il vient

$$2\pi g^2(x) \leqslant 2\pi||g||_2^2 + 8\pi^2||g||_2||g'||_2.$$

Ainsi pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$g^2(x) \leqslant ||g||_2^2 + 4\pi||g||_2||g'||_2 \leqslant 4\sqrt{2}\pi||g||_2||g_1||$$

car $||g||_2 + ||g'||_2 \leqslant \sqrt{2}||g||_1$. Finalement

$$\forall g \in E_1,\ ||g||_\infty \leqslant K_1||g||_1^{1/2}||g||_1^{1/2},$$

avec $K_1 = 2\sqrt{\sqrt{2}\pi}$ par exemple.

Soit alors $f \in H_1$. D'après la question 45.1.15. il existe une suite $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E_1 qui converge vers f pour la norme $||.||_1$. Ainsi $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $||.||_1$ et par conséquent l'inégalité précédente, qui peut être dépréciée en $||g||_\infty \leqslant K_1||g||_1$, fait que $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, ||.||_\infty)$. Soit donc $g \in E$ tel que $\lim_{m\to\infty} ||g - g_m||_\infty = 0$. Puisque $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans H_1, elle converge aussi vers f dans E pour la norme $||.||_2$. Mais $||g - g_m||_2 \leqslant ||g - g_m||_\infty$ et donc $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans E pour la norme $||.||_2$. Il en résulte que $g = f$: $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Finalement nous pouvons à la limite dans l'inégalité

$$||g_m||_\infty \leqslant K_1||g_m||_2^{1/2}||g_m||_1^{1/2}\,,$$

et ceci conduit au résultat demandé :

$$\forall f \in H_1, \quad ||f||_\infty \leqslant K_1 ||f||_2^{1/2} ||f||_1^{1/2}.$$

45.3.18. En combinant les deux questions précédentes il vient

$$||P_N f - f||_\infty \leqslant \frac{K_1}{\sqrt{N+1}} ||P_N f - f||_1^{1/2} ||f||_1^{1/2}.$$

Mais $||P_N f - f||_1 \leqslant ||f||_1$ d'où

$$\forall f \in H_1, \forall N \geqslant 1, \ ||P_N f - f||_\infty \leqslant \frac{K_1}{\sqrt{N+1}} ||f||_1.$$

Lorsque $f \in H_1$, cette inégalité montre que $(P_N f)_{N \in \mathbb{N}^\star}$ converge uniformément vers f lorsque N tend vers l'infini. Cette propriété n'est pas vraie pour $f \in E$ et nous avons vu que la famille $(||P_N f||_\infty)$ n'était pas majorée lorsque $N \in \mathbb{N}^\star$ et $||f||_\infty \leqslant 1$ (question 45.1.13.).

45.3.19. Nous avons $||f||_2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n|^2 = ||f||_1^2$.

45.3.20. Si $f \neq 0$ alors $||f||_1 \geqslant ||f||_2 > 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons $(\lambda f)_n = \lambda f_n$ et donc $||\lambda f_1||_1 = |\lambda| ||f||_1$. Reste donc à montrer l'inégalité triangulaire et $||.||_1$ sera une norme sur H_1. Pour $f, g \in H_1$ nous avons

$$\begin{aligned} ||f+g||_1^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n + g_n|^2 \\ &\leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)(|f_n| + |g_n|)^2 \\ &= ||f||_1^2 + ||g||_1^2 + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n||g_n|. \end{aligned}$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz rappelée dans le préambule avec $a_n = \sqrt{1+n^2}|f_n|$ et $b_n = \sqrt{1+n^2}|g_n|$, il vient $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)|f_n||g_n| \leqslant ||f_n||_1 ||g_n||_1$ et par conséquent

$$||f+g||_1^2 \leqslant ||f||_1^2 + ||g||_1^2 + 2||f_n||_1 ||g_n||_1 = (||f||_1 + ||g||_1)^2$$

et l'inégalité triangulaire pour $||.||_1$ en résulte.

Donnons nous alors une suite de Cauchy $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H_1. Pour chaque $p \in \mathbb{Z}$, la suite de nombres complexes $(f_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe donc $f_p \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} f_p^n = f_p$.

Puisque $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H_1, elle est bornée dans H_1 :

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p\in\mathbb{Z}}(1+p^2)|f_p^n|^2 \leqslant K^2.$$

Puisque $\forall N \in \mathbb{N}^\star$, $\sum_{p=-N}^{N}(1+p^2)|f_p|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{p=-N}^{N}(1+p^2)|f_p^n|^2$, nous avons : $\forall N \in \mathbb{N}^\star$, $\sum_{p=-N}^{N}(1+p^2)|f_p|^2 \leqslant K^2$. Ainsi $((1+p^2)|f_p|^2)_{p\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C.. Mais alors $(|f_p|)_{p\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\sum_{p=-N}^{N}|f_p| &= \sum_{p=-N}^{N}(1+p^2)^{1/2}|f_p|(1+p^2)^{-1/2}\,,\\
&\leqslant \left(\sum_{p=-N}^{N}(1+p^2)|f_p|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{p=-N}^{N}\frac{1}{1+p^2}\right)^{1/2},\\
&\leqslant 2K\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}\right)^{1/2} < \infty\,.
\end{aligned}$$

En vertu de la question 45.1.2., $(\sum_{p=-N}^{N} f_p e_p)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément f de E pour la norme $||.||_\infty$ et les coefficients de Fourier de f sont les $(f_p)_{p\in\mathbb{Z}}$. Il en résulte que $f \in H_1$ car les sommes partielles $\sum_{p=-N}^{N}(1+p^2)|f_p|^2$ sont majorées indépendamment de N (par K^2).

Nous allons maintenant prouver que $\lim_{n\to\infty}||f^n - f||_1 = 0$. À cet effet, donnons nous $\varepsilon > 0$ et observons que puisque la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H_1, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$ et tout $m \geqslant 0$ $\sum_{p\in\mathbb{Z}}(1+p^2)|f_p^{n+m} - f_p^n| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}^\star$, $\sum_{|p|\leqslant p}(1+p^2)|f_p^{n+m} - f_p^n| \leqslant \varepsilon$ et à la limite $m \to +\infty$,

$$\sum_{|p|\leqslant p}(1+p^2)|f_p - f^n| \leqslant \varepsilon, \quad \text{d'où} \quad ||f_p - f||_1 \leqslant \varepsilon.$$

45.3.21. Par la question 45.1.17., $||f||_\infty \leqslant K_1||f||_2^{1/2}||f||_1^{1/2}$ et alors avec la question 45.3.1., $||f||_\infty \leqslant K_1||f||_1$.

45.3.22.a. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(g^p, e_n)| \leqslant ||g^p||_2||e_n||_2 \leqslant ||g^p||_1||e_n||_1 = 1.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}$, la suite $((g^p, e_n))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

La suite $((g^P, e_0))_{p\in\mathbb{N}}$ étant bornée, nous pouvons en extraire une sous-suite $((g^{\psi_0(p)}, e_0))_{p\in\mathbb{N}}$ convergente. La suite $((g^{\psi_0(p)}, e_1))_{p\in\mathbb{N}}$ étant à son tour bornée, nous pouvons en extraire une sous-suite $((g^{(\psi_0\circ\psi_1)(p)}, e_1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergente. On itère ce procédé pour obtenir ψ_k telle que $((g^{(\psi_0\circ\ldots\circ\psi_k)(p)}, e_k))_{p\in\mathbb{N}}$ soit extraite de $((g^{(\psi_0\ldots\circ\psi_{k-1})(p)}, e_k))_{p\in\mathbb{N}}$ et convergente. Considérons alors $\psi\ :\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $\psi(p) = (\psi_0\circ\ldots\circ\psi_p)(p)$. On vérifie sans peine ψ est strictement croissante et que pour $p \geqslant k$, $\psi(p+\ .)$ est extraite de $\psi_0\circ\ldots\circ\psi_k$ de sorte que $((g^{\psi(p)}, e_k))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente quel que soit $k\in\mathbb{N}$. Nous avons fait comme si les (e_n) étaient indexés par $\mathbb{N}$ et non $\mathbb{Z}$ mais cela revient au même.

45.3.22.b. Nous avons pour tous $p\in\mathbb{N}$ et $N\in\mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}\sum_{|n|\leqslant N} |(g^p, e_n)| &\leqslant \sum_{n=-N}^{N} (1+n^2)^{1/2}|g_n^p|(1+n^2)^{-1/2}\\ &\leqslant ||g^p||_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{1+n^2}\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < \infty \equiv K_3\,.\end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{|n|\leqslant N}|(g^{\psi(p)}, e_n)| \leqslant K_3$ et à la limite $p\to\infty$: $\sum_{|n|\leqslant N}|l_n| \leqslant K_3 < \infty$. Il en résulte que $(l_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C. et d'après la question 45.1.2., $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = \sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n e_n \in E$ pour la norme $||.||_\infty$.

45.3.22.c. Pour tous $p\in\mathbb{N}$ et $N\in\mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{|n|\leqslant N}(1+n^2)|(g^{\psi(p)}, e_n)|^2 = \sum_{|n|\leqslant N}(1+n^2)|g_n^{\psi(p)}|^2 \leqslant ||g^{\psi(p)}||_1^2 \leqslant 1.$$

Ainsi à la limite $p\to\infty$, $\sum_{|n|\leqslant N}(1+n^2)|l_n|^2 \leqslant 1$ et donc $l\in H_1$ et $||l||_1 \leqslant 1$.

45.3.22.d. Considérons la suite $g^p = \frac{e_p}{\sqrt{1+p^2}}$. Nous avons

$$||g^p||_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty}(g^p, e_n) = 0$$

d'où $l = 0$. Ainsi pour toute suite extraite $||g^{\psi(p)} - l||_1 = ||g^{\psi(p)}||_1$ ne converge pas vers zéro.

45.3.23. Le terme d'indice (l, k) de la matrice produit est $\sum_{j=0}^{2N} e^{ilx_j}e^{-ilx_k}$ divisé par $2N+1$. Mais $\sum_{j=0}^{2N} e^{il(x_j-x_k)} = \sum_{j=0}^{2N}(e^{i\frac{(l-k)2\pi}{2N+1}})^j$ vaut $2N+1$ lorsque $l=k$ et $\frac{\omega^{2N+1}-1}{\omega-1}$ avec $\omega = e^{i\frac{(l-k)2\pi}{2N+1}}$ lorsque $l\neq k$ (dans ce cas $\omega\neq 1$). Mais $\omega^{2N+1} = 1$ et donc finalement $\sum_{j=0}^{2N} e^{ilx_j}e^{-ilx_k} = (2N+1)\delta_{lk}$.

45.3.24.a. Cherchons $C_N f$ sous la forme $C_N f = \sum_{j=-N}^{N}\xi_j e_j$, où les ξ_j sont à déterminer. Nous devons donc satisfaire à $\sum_{l=-N}^{N}\xi_l e^{ilx_j} = f(x_j)$ pour tous

$j \in \{0, ..., 2N\}$. Ce système linéaire pour les ξ_j a pour matrice la matrice inversible de la question précédente et donc il possède une et une seule solution (donnée par $\xi_l = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=0}^{2N} e^{-ilx_j} f(x_j)$).

45.3.24.b. Ceci résulte immédiatement de l'unicité dans la question précédente.

45.3.24.c. Calculons $e_{2N+1}(x_j) = e^{\frac{i2\pi j(2N+1)}{2N+1}} = 1$, alors que $e_0 \equiv 1$. Ainsi $e_0(x_j) = e_{2N+1}(x_j)$ pour tout $j \in \mathbb{F}_{2N+1}$ et donc par l'unicité de la question 45.1.24.a., $C_N e_{2N+1} = e_0$. Il en résulte que $C_N \neq P_N$ car $P_N e_{2N+1} = 0$.

45.3.25.a. Puisque $e^{i(2N+1)x_k} = 1, \forall k \in F_{2N+1}$, $\hat{z}_{l+2N+1} = \hat{z}_l$ et donc $\hat{z}_l$ ne dépend que de la classe l modulo $2N + 1$.

45.3.25.b. Nous avons vu que $C_N f = \sum_{l=-N}^{N} \xi_l e_l$ avec
$\xi_l = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=0}^{2N} e^{-ilx_j}\ f(x_j)$. La formule demandée en résulte.

45.3.26. Par linéarité, il suffit de le montrer pour $h = e_j,\ j \in \{-2N, ..., 2N\}$. D'une part

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_j(x)dx = (e_j, e_0) = \delta_{j0}$$

et d'autre part

$$\sum_{k=-N}^{N} e_j(x_k) = \sum_{k=-N}^{N} (e^{\frac{2i\pi j}{2N+1}})^k = (2N+1)\delta_{j0}.$$

45.3.27.a. Si f et g sont dans E_N alors $\overline{f}g \in E_{2N}$ et par la question précédente avec $h = \overline{f}g$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)g(x)dx = \frac{1}{2N+1}\sum_{j=-N}^{N} \overline{f(x_j)}g(x_j).$$

45.3.27.b. Puisque $(C_N f)(x_j) - f(x_j) = 0$, la formule définissant $[f, g]$ montre immédiatement que $[C_N f - f, g] = 0$.

45.3.27.c. Nous avons

$$\begin{aligned}[e_n, e_m] &= \frac{1}{2N+1}\sum_{j=0}^{2N} e^{-\frac{2i\pi jn}{2N+1}} e^{\frac{2i\pi jm}{2N+1}},\\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{j=0}^{2N} \omega^j,\end{aligned}$$

avec $\omega = e^{\frac{2i\pi(m-n)}{2N+1}}$ vérifiant $\omega^{2N+1} = 1$.

Nous avons $\omega = 1$ si et seulement si m et n sont congrus modulo $2N + 1$, il en résulte que

$$[e_n, e_m] = \begin{cases} 1 \text{ si } m \equiv n \text{ modulo } 2N+1,\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

45.3.28. Soit $f \in H_1$, nous avons vu qu'alors $(|f_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., il en est donc de même pour $(f_{l+(2N+1)k})_{k\in\mathbb{Z}}$. Ainsi $C_{N,l}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{l+(2n+1)k}$ est bien défini.

Écrivons $C_N(f) = \sum_{l=-N}^{N} \eta_l e_l$ avec les η_l *a priori* inconnus. Nous avons alors par la question 45.1.27.a. $[C_N(f), e_l] = \eta_l$ pour $l \in \{-N, ..., N\}$. Or $[C_N(f), e_l] = [f, e_l]$ par la question 45.1.27.b et donc $\eta_l = [\sum_{k\in\mathbb{Z}} fe_k, e_l]$. Mais puisque $(|f_m|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une S.A.C., par convergence uniforme on peut intervertir sommation et $[.,.]$: $\eta_l = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k[e_k, e_l]$. D'après le résultat de la question 45.1.27.c., $\eta_l = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{l+(2N+1)k} = C_{N,l}(f)$.

45.3.29.a. Nous avons

$$\begin{aligned} g_N - C_N g_N &= f - P_N f - C_N(f - P_N f) \\ &= f - C_N f - (P_N f - C_N P_N f). \end{aligned}$$

Lorsque $g \in E_N, C_N g = g$ par unicité ainsi

$$C_N P_N f = P_N f \quad \text{et} \quad g_N - C_N g_N = f - C_N f.$$

45.3.29.b. D'après ce qui précède, $||f - C_N f||_2 = ||g_N - C_N g_N||_2$ et donc

$$||f - C_N f||_2 \leqslant ||g_N||_2 + ||C_N g||_2.$$

Ainsi avec la question 45.1.16., $||f - C_N f||_2 \leqslant \frac{1}{N+1}||f||_1 + ||C_N g||_2$.

Nous avons $g = \sum_{|k|\geqslant N+1} f_n e_n$ et par la question 45.1.28.,

$$||C_N g||_2^2 = \sum_{l\in\mathbb{F}_{2n+1}} |C_{N,l}(g)|^2 \text{ et } |C_{N,l}(g)|^2 = |\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_{l+(2N+1)k}|^2.$$

Pour $l \in \{-N, ..., N\}$, désignons par $K(l)$ l'ensemble

$$K(l) = \{k \in \mathbb{Z}, |l + (2N + 1)k| \geqslant N + 1\}.$$

Il résulte de ce qui précède que

$$||C_N g||_2^2 = \sum_{l\in\mathbb{F}_{2N+1}} |\sum_{k\in K(l)} g_{l+(2N+1)k}|^2.$$

Mais $K(l) = \{l + (2n + 1)k, k \in \mathbb{Z}^\star\}$ et donc

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k\in K(l)} f_{l+(2N+1)k}\right|^2 &\leqslant \left(\sum_{k\in K(l)} \frac{1}{(1+k^2)^{1/2}}(1+k^2)^{1/2}|f_k|\right)^2 \\ &\leqslant \sum_{k\in K(l)} \frac{1}{(1+k^2)} \sum_{k\in K(l)} (1+k^2)|f_k|^2. \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{k\in K(l)} \frac{1}{1+k^2} = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{1+(l(2N+1)k)^2} \leqslant \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^\star} \frac{1}{k^2}$, nous en déduisons que $||C_N g||_2^2 \leqslant \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^\star}\frac{1}{k^2}||f||_1^2$ et ainsi $\exists K_3$ tel que

$$\frac{1}{N+1}||f||_1 + ||C_N g||_2 \leqslant \frac{K_3}{N+1}||f||_1.$$

45.3.30. Le calcul de $C_N f$ ne demande que des évaluations de f en des points fixés $x_0, ...x_{2N}$ alors que le calcul de $P_N f$ demande le calcul de $2N+1$ intégrales $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, n = -N, ...N$. Celui-ci est forcément plus coûteux. Puisque C_N vérifie comme P_N : $C_N f \in E_N$ et pour $f \in H_1, f - C_N f$ converge vers zéro dans $(E, ||.||_2)$ en $1/N$, on préfère C_N.

45.3.31. Pour chaque l, il faut faire M multiplications : ω^{kl} fois z_k puis $M-1$ additions ; d'où $S_M = M \times (M + M - 1) = 2M^2 - M$.

45.3.32. En sommant sur k pair et k impair on obtient l'identité demandée et le premier terme s'obtient par une TFD (ω^2, M_1) et le second, écrit sous la forme $\omega^{-l}\sum_{k_2\in F_{M_1}} \omega^{2k_2 l} z_{2k_2-1}$, s'obtient aussi par une TFD (ω^2, M_1).

45.3.33. D'après la question précédente, pour effectuer TFD $(\chi, 2^n)$, on effectue deux TFD d'ordre 2^{n-1} puis 2^n multiplication par ω^{-l} et 2^n additions d'où

$$\Sigma_n \leqslant 2\Sigma_{n-1} + 2^n + 2^n = 2\Sigma_{n-1} + 2^{n+1}.$$

Pour $n = 0, M = 1$ et $\Sigma_0 = 0 \leqslant 2Mn = 0$. Supposons que $\Sigma_n \leqslant 2Mn$ lorsque $M = 2^n$. Nous avons alors pour $M = 2^{n+1}, \Sigma_{n+1} \leqslant 2(22^n n) + 2^{n+2} = (n+1)2^{n+2}$.

45.3.34. Nous avons $S_{2^n} = 2^{2n+1} - 2^n$ et $\Sigma_n \leqslant n2^{n+1}$.

n	20	25	30
S_{2^n}	6 heures	260 jours	731 ans
Σ_n	0,4 secondes	17 secondes	644 secondes
$\frac{S_{2^n}}{\Sigma_n}$	5.10^4	10^6	3.10^7

45.3.35. Écrivons $\hat{z} = \sum_{j\in\mathbb{F}_Q} \omega^{lj} x_l^j$ où $x_l^j = \sum_{k\in\mathbb{F}_p}(\omega^Q)^{kl} z_{kQ+j}$. Ainsi les (x_l^j) s'obtiennent par TFD (ω^Q, p) et les $\hat{z}_l$ par TFD (ω^P, Q). Pour effectuer TFD (ω, M) on fait donc Q TFD (ω^Q, P), $PQ = M$ multiplications et P TFD (ω^P, Q). Soit σ_M le nombre d'opérations nécessaire pour TFD (ω, M), nous avons

$$\sigma_M \leqslant Q\sigma_P + M + P\sigma_Q.$$

Or par la question 45.1.31., $\sigma_P \leqslant 2P^2 - P$ d'où

$$\sigma_M \leqslant 2P^2Q + 2PQ^2 + M - 2M \leqslant 2PQ(P+Q) = 2M(P+Q).$$

45.3.36. Nous avons deux possibilités. Soit garder la construction de C_N telle qu'elle est faite dans la cinquième partie et dans ce cas $M = 2N+1$ est impair. Prenons alors $M = 3^n, n \in \mathbb{N}$, et dans ce cas on montre comme à la question 45.1.33 qu'il faut de l'ordre de $M \log_3 M = nM$ opérations. Il s'agit donc d'un algorithme tout à fait raisonnable en terme de temps calcul. L'autre possibilité consiste à prendre au lieu de E_N, l'espace engendré par $e_{-N+1}, ...e_N$ qui est de dimension $2N$ et au lieu des x_j, les $y_j = \frac{\pi j}{N}$ pour $j \in \mathbb{F}_{2N}$. Dans ce cas en prenant $N = 2^{n-1}, n \geqslant 1$ nous aurons à effectuer des TFD $(\omega, 2^n)$ avec $\omega = e^{\frac{i\pi}{N}}$ vérifiant $\omega^N = 1$. Ainsi pour f donné, le calcul de $C_N f$ ne demandera que $4N(1 + \log_2 N)$ opérations ce qui est raisonnable même pour $N = 2^{20} \simeq 10^6$.

Commentaires

Ce problème est consacré à l'approximation des fonctions par des séries de Fourier. Nous avons mis en évidence le fait que pour approcher une fonction, il était tout aussi précis d'utiliser la méthode de collocation (c'est-à-dire approcher f par $C_N f$ donné par la formule du numéro 45.1.25.b. page 40) que d'utiliser la série de Fourier tronquée $P_N f$. Comme nous l'avons remarqué, le calcul de $C_N f$ ne demande que des évaluations de fonctions (et pas de calculs d'intégrales). Qui plus est, grâce à la transformée de Fourier rapide de la sixième partie, ces calculs peuvent être d'un coût informatique très raisonnable. Ainsi dans les appareils modernes de mesure (du type oscilloscope) qui calculent en temps réel la transformée de Fourier d'un signal, c'est la transformée de Fourier rapide qui est utilisée (voire gravée sous forme de circuit imprimé).

Une autre application est la régularisation (ou le lissage) de signaux. Supposons que l'on échantillonne un signal à N instants équidistants :

$$t_k = \frac{k\Delta t}{N}; k = 0, \ldots, N-1.$$

Pour reconstituer un signal lisse on pourra effectuer une T.F.D. des valeurs $f_0, \ldots, f_{N-1}$ du signal, ce qui fournit des nombres complexes $\hat{f}_0, \ldots, \hat{f}_{N-1}$. Ensuite calculer par $T.F.D.$ inverse (i.e. changer i en $-i$ dans la formule du numéro 45.1.25.a. page 40) le signal transformé de $\hat{f}_k/(1+\varepsilon k^2)$ où $\varepsilon > 0$ est un paramètre « utilisateur ». Ceci sera d'un coût faible : $O(NLog_2N)$, lorsque l'on utilise la transformée de Fourier rapide.

Corrigé 46

46.3.1. Soit $||.||$ une norme matricielle c'est-à-dire une norme telle que

$$||M_1M_2|| \leqslant ||M_1||||M_2||.$$

Par exemple $||M|| = \sup\{||Mx||, x \in \mathbb{R}^n, ||x|| \leqslant 1\}$. Pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N} ||\frac{A^k}{k!}|| \leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{||A||^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} = e^{||A||}.$$

Ainsi la série de terme général $(\frac{A^k}{k!})$ est normalement convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est complet (espace vectoriel de dimension finie), elle est donc convergente.

46.3.2. Pour $n = 1$ nous avons bien $e^{A+B} = e^A e^B$ car $A = aI, \quad B = bI, \quad e^A = e^a I$ et dans $\mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a e^b$.

Par contre pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifient $A^2 = B^2 = 0$ nous avons $e^A = I + A, e^B = I + B$ et ainsi

$$e^A e^B = I + A + B + AB$$

alors que

$$e^B e^A = I + A + B + BA$$

et puisque $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nous avons $e^A e^B \neq e^{BA}$. Si l'on avait $\forall A, B \quad e^{A+B} = e^A e^B$, on aurait (puisque $e^{A+B} = e^{B+A}$) $\forall A, B \quad e^A e^B = e^B e^A$ qui n'a pas lieu. Observons qu'en fait $e^{A+B}, \quad e^A e^B$ et $e^B e^A$ peuvent être deux à deux distincts. En effet, dans l'exemple précédent, $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $(A + B)^2 = I$. Alors

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^{2k}}{(2k!)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$e^{A+B} = \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\right) I + \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\right)(A+B),$$

$$= \begin{pmatrix} ch1 & sh1 \\ sh1 & ch1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de e^{A+B} étant irrationnels cette matrice est différente de $e^A e^B$ et $e^B e^A$ dont les coefficients sont entiers.

Observons par contre que si A et B commutent nous avons

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

En effet, $e^{A+B} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = (\text{si} AB = BA),$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{(k-p)!p!} A^p B^{k-p},$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{A^p}{p!} \frac{B^{k-p}}{(k-p)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p+q=k} \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!}$$

Puisqu'il s'agit de convergence absolue, nous pouvons intervertir les sommations :

$$e^{A+B} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}\right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!}\right) = e^A e^B.$$

46.3.3. Dans le cas où $AB = BA$, $\frac{A}{n}\frac{B}{n} = \frac{B}{n}\frac{A}{n}$ et donc $e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} = e^{\frac{A+B}{n}}$ et puisque $\frac{A+B}{n}$ commute avec lui même, $(e^{\frac{A+B}{n}})^n = e^{A+B}$: lorsque A et B commutent, la suite est constante et vaut e^{A+B}.

Dans le cas général soient A_n et B_n définies par

$$A_n = n^2 \left(e^{\frac{A}{n}} - I - \frac{A}{n}\right),$$

$$B_n = n^2 \left(e^{\frac{B}{n}} - I - \frac{B}{n}\right).$$

Nous avons alors $||A_n|| = n^2 || \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{n^k k!}|| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} \leqslant e^{||A||}$ et de même $||B_n|| \leqslant e^{||B||}$. Ainsi $e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} = I + \frac{A+B}{n} + \frac{C_n}{n^2}$ où $C_n = A_n + B_n + AB + \frac{AB_n + A_n B}{n} + \frac{A_n B_n}{n^2}$ est bornée indépendamment de n : $||C_n|| \leqslant M < \infty$, $\forall n$.

Soit alors pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad ||C|| < 1$, la série $\log(I + C) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C^k$. Cette série est normalement convergente et on vérifie aisément que $e^{\log(I+C)} = I + C$. Par ailleurs pour $||C|| \leqslant 1/2$, nous avons
$|| \log(I + C) - C|| \leqslant || \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} C^k|| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} ||C||^k = \frac{||C||^2}{1 - ||C||} \leqslant 2||C||^2$.

Prenons alors n assez grand pour que $D_n = \frac{A+B}{n} + \frac{C_n}{n^2}$ vérifie $||D_n|| \leqslant 1/2$. Nous avons alors $|| \log(I + D_n) - D_n|| \leqslant 2||D_n||^2$ et donc
$||n \log(I + D_n) - nD_n|| \leqslant 2n||D_n||^2$. Puisque $||D_n|| \leqslant \frac{||A|| + ||B||}{n} + \frac{M}{n^2}$, nous avons $\lim_{n\to\infty}(n \log(I + D_n) - nD_n) = 0$ et par conséquent $\lim_{n\to\infty} e^{n \log(I+D_n) - nD_n} = I$.

Puisque $\log(I + D_n)$ et D_n commutent,

$$\begin{aligned} e^{n \log(I+D_n) - nD_n} &= e^{n \log(I+D_n)} e^{-nD_n} \\ &= \left(e^{\log(I+D_n)}\right)^n e^{-nD_n} \\ &= (I + D_n)^n e^{-nD_n} \to I \end{aligned}$$

Or $(I + D_n)^n = (e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}})^n$ et $nD_n = A + B + \frac{C_n}{n}$ tend vers $A + B$. Il en résulte que $\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}})^n = e^{A+B}$.

Commentaires

La formule $\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{B}{n}})^n = e^{A+B}$ porte le nom de formule de Trotter. Elle permet notamment de montrer que pour résoudre le système d'équations différentielles

$$\frac{du}{dt} = (A+B)u, \tag{1}$$

on peut procéder par étape.

Tout d'abord on résout entre t_n et $t_n + \Delta t$

$$\frac{dv}{dt} = Av,\ \ v(t_n) = u_n \tag{2}$$

puis on résout

$$\frac{dw}{dt} = Bw,\ \ w(t_n) = v(t_n + \Delta t) \tag{3}$$

et enfin on prend $u_{n+1} = w(t_n+\Delta t)$. Si l'on cherche $u(T)$ en fonction de $u(0)$, il suffit alors de prendre $t_n = n\Delta t$ où $\Delta t = \frac{T}{N}$ et u_N converge vers $u(T)$ lorsque N tend vers l'infini.

L'intérêt de ce qui précède est que (2) ou (3) peuvent être, pour des raisons pratiques, plus faciles à résoudre que ne l'est (1) par exemple on peut connaître une base de trigonalisation pour A et une base de trigonalisation pour B.

En fait ce résultat est de portée bien plus générale : il subsiste si au lieu de matrices B et C on a des applications non linéaires :

$$\frac{du}{dt} = f(u)+g(u), \tag{1'}$$

$$\frac{dv}{dt} = f(v), \tag{2'}$$

$$\frac{dw}{dt} = g(w). \tag{3'}$$

Corrigé 47

47.3.1. Posons $\tilde{a}_n = a_n e^{-\lambda_n z_0}$. L'hypothèse devient $\sum \tilde{a}_n$ converge et il s'agit d'étudier la convergence uniforme de $\sum \tilde{a}_n e^{-\lambda_n z}$ pour $|Arg(z)| \leqslant \theta_0$ i.e. on est ramené au cas $z_0 = 0$. Plaçons nous donc dans ce cas : $\sum a_n$ est convergente. Il s'agit donc de montrer, d'après le critère de Cauchy uniforme, que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \text{ tel que } \forall m' \geqslant m \geqslant N_\varepsilon, \forall z, |Arg(z)| \leqslant \theta_0$$

on a $|\sum_{n=m}^{m'} a_n e^{-\lambda_n z}| \leqslant \varepsilon$.

Notons alors $A_{m,p} = \sum_{n=m}^{p} a_n$ et par la transformation d'Abel :

$$\sum_{n=m}^{m'} a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}\left(e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}\right) + A_{m,m'}e^{-\lambda_{m'} z}. \tag{1}$$

Donnons nous $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum a_n$ est convergente, $\exists N_\varepsilon$ tel que $\forall p \geqslant m \geqslant N_\varepsilon, \quad |A_{m,p}| \leqslant \varepsilon$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, quitte à accroître N_ε nous pouvons imposer que $\lambda_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant N_\varepsilon$ et alors $\left|e^{-\lambda_{m'} z}\right| = e^{-\lambda_{m'} x} \leqslant 1$ $(z = x + iy)$. Revenant à (1) nous déduisons que pour $m' \geqslant m \geqslant N_\varepsilon$,

$$\left|\sum_{n=m}^{m'} a_n e^{-\lambda_n z}\right| \leqslant \varepsilon \left(1 + \sum_{n=m}^{m'-1} \left|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}\right|\right). \tag{2}$$

Mais $e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z} = -z \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-tz} dt$ et donc $|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}|$ $\leqslant |z| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-tx} dt$. Mais $|Arg(z)| \leqslant \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ et donc $|z| \leqslant \frac{x}{1+\cos\theta_0}$ de sorte que

$$|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| \leqslant \frac{(e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x})}{1+\cos\theta_0}.$$

Ainsi

$$\sum_{n=m}^{m'-1} |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| \leqslant \frac{(e^{-\lambda_m x} - e^{-\lambda_{m'} x})}{1+\cos\theta_0},$$

et finalement revenant à (2)

$$\left|\sum_{n=m}^{m'} a_n e^{-\lambda_n z}\right| \leqslant \frac{2+\cos\theta_0}{1+\cos\theta_0}\varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer.

47.3.2. Considérons une série entière $\sum a_n z^n$ convergent pour $z = z_0 \in \mathbb{C}^\star$. Il est alors classique de montrer que la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur tout disque $|z| \leqslant \rho$ avec $\rho < |z_0|$. Écrivons alors pour $|z - z_0| < |z_0|, z = z_0 e^{-Z} (Z = -\log \frac{z}{z_0} = -\log(1 + \frac{z-z_0}{z_0})$ et $\log(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}$ pour $|u| < 1)$. Ainsi $\sum a_n z^n = \sum (a_n z_0^n) e^{-nZ}$ et nous avons établi que la convergence de $\sum a_n z_0^n$ entraîne la convergence uniforme de $\sum a_n z^n$ pour $|Arg(Z)| \leqslant \theta_0 < \frac{\pi}{2}$. Mais $Arg Z = -Arg(z/z_0)$ et donc *il y a convergence uniforme de* $\sum a_n z^n$ *pour* $|Arg z - Arg z_0| \leqslant \theta_0 < \frac{\pi}{2}$. Il en résulte par exemple que si $\sum a_n z_0^n$ converge, la fonction $f(z) = \sum a_n z^n$ est continue dans tout secteur $|Arg z - Arg z_0| \leqslant \theta_0$ pourvu que $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Par exemple la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ converge en $x = 1$ et pour $|x| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \log(1+x)$. Ainsi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ est continue sur $]-1, 1[$. Mais $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \log 2$ et donc $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et il y a convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ au voisinage à gauche de 1 bien que 1 soit sur le disque de convergence.

47.3.3. Écrivons $z = x + iy$. La série $\sum \frac{1}{n^z}$ converge absolument si et seulement si $x > 1$ puisque $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^x}$. Par contre la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge dès que

$x > 0$ (cela correspond au cas $z = x + i\pi$). Lorsque nous prenons $\lambda_n = \log n$ nous voyons que $\sum a_n e^{-\lambda_n z} = \sum \frac{1}{n^z}$ et donc par cet exemple, contrairement au cas des séries entières, pour une série du type $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$, il est possible d'avoir convergence simple sur un demi-plan $Rez > \delta$ sans qu'il y ait aussi convergence absolue sur le même demi-plan.

Commentaires

Nous allons donner une autre expression de la fonction de Riemann $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ lorsque $Rez > 1$.

Soit p un nombre premier ($p \geqslant 2$). Pour $x \geqslant 1$, nous avons avec $z = x + iy$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{p^{qz}} \tag{1}$$

avec convergence absolue de cette série car $|1/p^z| = 1/p^x \leqslant 1/2$. Multiplions alors terme à terme les identités (1) pour tous les nombres premiers $\leqslant N$, où $N \geqslant 2$ est un entier arbitraire. Puisque il y a convergence absolue de chacune des séries, il vient

$$\left[\prod_{p \leqslant N} (1 - \frac{1}{p^z})\right]^{-1} = \sum \frac{1}{m^z} \tag{2}$$

où la somme au second membre est formée par les $1/m^z$ où m décrit l'ensemble des entiers dont tous les facteurs premiers sont inférieurs à N. Un premier corollaire de la formule (2) est que l'ensemble des nombres premiers est infini. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait prendre $z = 1$ et obtenir que les sommes partielles $\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{n}$ sont majorées indépendamment de M, ce qui n'est pas.

Prenons désormais $x > 1$. La série $\sum \frac{1}{m^z}$ est absolument convergente et le produit infini $\prod(1 - \frac{1}{p^z})$ converge lui aussi (voir si besoin le numéro 48.1.4. page 43). Ainsi

$$u_N \equiv \left[\prod_{p \leqslant N} (1 - \frac{1}{p^z})\right]^{-1} - \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^z}$$

est une somme de termes de la forme $\frac{1}{q^z}$ avec q entier supérieur à N : u_N tend donc vers zéro lorsque N tend vers l'infini ($0 \leqslant u_N \leqslant \sum_{q \geqslant N}^{\infty} \frac{1}{q^z}$). Il en résulte que

$$\zeta(z) = \left[\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p^z})\right]^{-1} \tag{3}$$

où $\mathcal{P}$ désigne la suite infinie formée par les nombres premiers ($\geqslant 2$).

Cette identité magique est due à Euler. Elle est d'usage récurrent en théorie analytique des nombres.

Corrigé 48

48.3.1. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$ et supposons que (i) a lieu, alors

$$\sum_{n=0}^{\mathbb{N}} |a_{\sigma(n)}| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

La série de terme général $(a_{\sigma(n)})$ est donc absolument convergente et donc convergente. Réciproquement supposons que pour toute permutation de $\mathbb{N}$, σ, la série de terme général $(a_{\sigma(n)})$ soit convergente. Alors ($\sigma = Id$) la série ($\sum a_n$) est convergente. Supposons alors que la série $\sum |a_n|$ soit divergente, et soient $I = \{n \in \mathbb{N}, a_n > 0\}$ et $J = \{n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant 0\}$. Nous avons $I \cup J = \mathbb{N}, I \cap J = \varnothing$ et I et J sont de cardinal infini (sinon on aurait $\sum |a_n| < \infty$). De plus si l'on désigne par $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite ordonnée, selon leur indice, des éléments de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $n \in I$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ celle qui correspond à J nous avons $\sum b_n = +\infty$ et $\sum c_n = -\infty$.

Nous allons construire σ comme suit. Tout d'abord nous choisissons n_0 de sorte $\sum_{n=0}^{n_0} b_n \geqslant -c_0$. Puis nous prenons n_1 de sorte que $\sum_{n=0}^{n_1} b_n \geqslant -c_0 - c_1 + 1$, et en règle générale n_p est le plus petit entier tel que

$$\sum_{n=0}^{n_p} b_n + \sum_{n=0}^{p} c_n \geqslant p.$$

Pour $n \leqslant n_p + p$, $\sigma(n)$ est l'entier qui correspond à l'écriture

$$\sum_{n=0}^{n_p+p} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{n_p} b_n + \sum_{n=0}^{p} c_n.$$

Cette application σ est surjective puisque $n_p + p$ tend vers $+\infty$ lorsque p tend vers l'infini, elle est injective car $I \cap J = \varnothing$. Mais bien évidemment la série de terme général $(a_{\sigma(n)})$ est divergente puisque ses sommes partielles ne sont pas majorées. Il en résulte que la série $\sum |a_n|$ est forcément convergente.

48.3.2. Pour n fixé, notons $m(n) = \max\{\sigma(k), 0 \leqslant k \leqslant n\}$. Si $\sum a_n$ est commutativement convergente, elle est absolument convergente et alors

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{m(n)} a_k\right| \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} |a_k|$$

qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Puisque $m(n) \to +\infty$, $\sum_{k=0}^{m(n)} a_k \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et ainsi $\sum a_{\sigma(n)}$ a pour somme $\sum a_n$.

48.3.3. Le cas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est identique, il suffit pour cela de remarquer, par exemple, que $\sum |a_n|$ est convergente que si et seulement si $\sum |Re(a_n)|$ et $\sum |Im(a_n)|$ sont convergentes.

48.3.4. Si le produit $\prod C_n$ est convergent, alors $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n C_k = C \neq 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} C_n = 1$. Il s'en suit que pour n assez grand, mettons $n \geqslant n_0$, nous pouvons écrire $C_n = e^{\beta_n + i\gamma_n}$ avec $\gamma_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nous avons alors

$$\prod_{k=1}^n C_k = \exp\left(\sum_{k=1}^n (\beta_k + i\gamma_k)\right).$$

Ainsi le produit $\prod C_n$ sera convergent si et seulement si la série de terme général $(\beta_n + i\gamma_n)$ est convergente.

Il résulte alors de ce qui précède que le produit $\prod C_n$ sera commutativement convergent si et seulement si la série de terme général $(\beta_n + i\gamma_n)$ est commutativement convergente et nous avons montré dans une question précédente que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\sum|\beta_n + i\gamma_n|$ soit convergente.

Nous allons montrer que les séries $\sum|C_n - 1|$ et $\sum(|\beta_n| + |\gamma_n|)$ convergent simultanément ce qui achèvera la preuve de l'équivalence entre (i) et (ii).

Notons $u_n = C_n - 1$ et $u_n = r_n e^{i\varphi_n}$ sous forme module-argument.

Puisque $\lim_{n\to\infty} C_n = 1, \lim_{n\to\infty} r_n = 0$ et nous pouvons raisonner pour n assez grand de sorte que $r_n < \frac{1}{2}$. Nous avons $e^{-2r_n} \leqslant \frac{1}{1+2r_n} \leqslant 1 - r_n \leqslant 1 + r_n \leqslant e^{r_n}$, et donc $-2r_n \leqslant \log|1 + u_n| \leqslant r_n$.

Par ailleurs $|\gamma_n| \leqslant \arcsin r_n \leqslant 2(\arcsin\frac{1}{2})r_n = \frac{\pi r_n}{3}$ d'où $|\beta_n| + |\gamma_n| \leqslant (2 + \frac{\pi}{3})r_n$. On montre de manière similaire que $|\beta_n| + |\gamma_n| \geqslant \frac{r_n}{2\sqrt{2}}$.

Finalement $\sum r_n$ et $\sum(|\beta_n| + |\gamma_n|)$ convergent simultanément.

48.3.5. Puisque $C_n - 1 = \frac{z^2}{n^2\pi^2}$, $\sum|C_n - 1| < \infty$ et d'après la question précédente le produit $\prod_{n\geqslant 1}(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2})$ est commutativement convergent.

Commentaires

Montrons que

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

formule qui s'apparente à une factorisation de $\sin z$. pour cela nous allons montrer d'abord que :

$$\sin z = z\lim_{p\to\infty} \Pi_{k=1}^{p-1}\left(1 - \frac{z^2}{4p^2 tg^2\frac{k\pi}{2p}}\right). \qquad (*)$$

Puisque $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et que $e^{iz} = \lim_{m\to+\infty}(1 + \frac{iz}{m})^m$, nous avons

$$\sin z = \lim_{m\to\infty} Q_m(z)$$

où $Q_m(z) = \frac{1}{2i}((1 + \frac{iz}{m})^m - (1 - \frac{iz}{m})^m)$.

Choisissons m pair, $m = 2p$. Les racines de Q_{2p} sont alors 0 et $\pm 2ptg\frac{k\pi}{2p}$, $k = 1, ..., p-1$. Ainsi $Q_{2p}(z) = z\Pi_{k=1}^{p-1}(1 - \frac{z^2}{4p^2tg^2\frac{k\pi}{2p}})$ (nous avons utilisé que le terme de plus bas degré de Q_{2p} et z).

Ainsi ($\star$) est prouvée. Notons alors $u_k(p) = 0$ si $k \geqslant p$ et $u_k(p) = -\frac{z^2}{4p^2tg^2\frac{k\pi}{2p}}$ si $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Nous avons $\lim_{p\to\infty} u_k(p) = -\frac{z^2}{k^2\pi^2}$ et $|u_k(p)| \leqslant \frac{|z|^2}{k^2\pi^2}$.

Puisque $\sum_{k\geqslant 1}\frac{|z|^2}{k^2\pi^2} < \infty$, il est alors aisé de voir (par un argument classique de convergence dominée) que $\lim_{p\to+\infty}\Pi_{k=1}^{\infty}(1+u_k(p)) = \Pi_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2})$.

Ainsi avec ($\star$) nous obtenons bien la formule annoncée.

Corrigé 49

Observons une fois pour toutes qu'il suffit de considérer le cas $h = 0$ i.e. le cas où α est une fonction strictement croissante. En effet si $l_g = \int_a^b f dg$ et $l_h = \int_a^b f dh$ sont définies alors $l = \int_a^b f dg = l_g - l_h$ convient.

49.3.1. Lorsque g est continue et strictement croissante, elle est bijective de $[a, b]$ sur $[A, B]$ avec $g(a) = A$ et $g(b) = B$ et son inverse $G\ : [A, B] \to [a, b]$ est continue. Notons $y_i = g(x_i), \quad \eta_i = g(\xi_i)$ et $F = f \circ G$. Nous avons alors

$$\sum_{p=0}^{m-1} f(\xi_p)(g(\xi_{p+1}) - g(\xi_p)) = \sum_{p=0}^{m-1} F(\eta_p)(y_{p+1} - y_p)$$

qui est une somme de Riemann pour F continue sur $[A, B]$. Lorsque $\delta(\underline{x}) \to 0$, le pas de la subdivision $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ de $[A, B]$ tend vers zéro et F étant continue, $\sum_{p=0}^{m-1} F(\eta_p)(y_{p+1} - y_p)$ tend vers $\int_{g(a)}^{g(b)}(f \circ g^{-1})(y)dy$ que l'on peut prendre pour l dans la définition de l'α-intégrabilité de f.

49.3.2. Soit alors g_+ définie par $g_+(b) = g(b)$ et pour $x < b$,
$g_+(x) = \lim_{h\to 0^+} g(x + h)$ (cette limite existe car g est croissante). Écrivons alors

$$\sum_{p=0}^{m} f(\xi_p)(g(x_{p+1}) - g(x_p)) - \sum_{p=0}^{m} f(\xi_p)(g_+(x_{p+1}) - g_+(x_p)) =$$

$$= f(\xi_0)(g_+(a) - g(a)) + \sum_{p=0}^{m-1}(f(\xi_{p+1}) - f(\xi_p))(g_+(x_{p+1}) - g(x_{p+1})). \quad (*)$$

Puisque f est uniformément continue,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_0 \text{ tel que pour } \delta(\underline{x}) \leqslant \delta_0, \quad |f(\xi_{p+1}) - f(\xi_p)| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$\left|\sum_{p=0}^{m-1}(f(\xi_{p+1})-f(\xi_p))(g_+(x_{p+1})-g(x_{p+1})\right| \leqslant \varepsilon\sum_{p=0}^{m-1}(g_+(x_{p+1})-g(x_{p+1})).$$

Mais

$$\sum_{p=0}^{m-1}(g_+(x_{p+1})-g(x_{p+1}))=g(b)-g(a)+\sum_{p=1}^{m-1}(g_+(x_p)-g(x_{p+1}))$$

or $g_+(x_p)\leqslant g(x_{p+1})$ et donc finalement

$$\left|\sum_{p=0}^{m-1}(f(\xi_{p+1})-f(\xi_p))(g_+(x_{p+1})-g(x_{p+1}))\right| \leqslant \varepsilon(g(b)-g(a)).$$

Par ailleurs $f(\xi_0)(g_+(a)-g(a))$ tend vers $f(a)(g_+(a)-g(a))$ lorsque $\delta(\underline{x})$ tend vers zéro. Finalement, par l'identité $(\star)$, pour montrer que f est α-intégrable il suffit de montrer que $\sum_{p=0}^{m} f(\xi_p)(g_+(x_{p+1})-\delta_+(x_p))$ possède une limite lorsque $\delta(\underline{x})$ tend vers zéro, c'est-à-dire que l'on a substitué à g la fonction g_+ qui est croissante *et* continue à gauche.

Introduisons alors la fonction de saut associée à g croissante. On commence par désigner par σ la fonction : $\sigma(y)=\lim_{x\to y^+} g(x)-\lim_{x\to y^-} g(x)$.

Lemme. *Il y a au plus un ensemble dénombrable de* $y\in[a,b]$ *tels que* $\sigma(y)\neq 0$.

Démonstration. En effet pour tout ensemble $y_1,\ldots,y_p$ avec $y_1<y_2<\ldots<y_p$, nous avons $\sum_{k=1}^{p}\sigma(y_k)\leqslant g(b)-g(a)$ et donc $\forall n\in\mathbb{N}, E_n=\{y\in[a,b];\sigma(y)\geqslant \frac{1}{n+1}\}$ est un ensemble de cardinal fini. Ce dernier point résulte du fait que si $y_1<\ldots<y_p$ sont dans E_n, alors $\frac{p}{n+1}\leqslant g(b)-g(a)$ et donc $Card\quad E_n\leqslant(g(b)-g(a))(1+n)$. Par conséquent $E=\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ est dénombrable, or $E=\{y\in[a,b],\sigma(y)\neq 0\}$ et donc le lemme est prouvé. ❑

Étant donné $x\in[a,b]$, on note alors $S(x)$ la somme des sauts de g sur $[a,x]$:

$$S(x)=\sum_{i=0}^{n_x}\sigma(y_i)$$

où $\{y_i\}$ désignent les $y\in[a,b]$ tels que $\sigma(y)\neq 0$, et $n_x=+\infty$ s'il y a un nombre infini de sauts de g dans l'intervalle $[a,x]$. Dans ce dernier cas, $S(x)$ est somme d'une série à termes positifs qui est bien convergente puisque $\sum_{i=1}^{N}\sigma(y_i)\leqslant\delta(b)-\delta(a)$ comme nous l'avons déjà remarqué.

L'intérêt de S réside dans le fait que k, définie par $k(x) = g_+(x) - S(x)$, est une fonction continue et croissante. Mais alors $k(x) + x$ est continue et strictement croissante, de sorte que

$$g_+(x) = S(x) + (k(x) + x) - x$$

et par conséquent pour montrer que $\sum_{p=0}^{m} f(\xi_p)(g_+(x_{p+1}) - g_+(x_p))$ possède une limite lorsque $\delta(\underline{x})$ tend vers zéro, il suffit, après application de la question précédente, de montrer que $\sum_{p=0}^{m} f(\xi_p)(S(x_{p+1}) - S(x_p))$ possède une limite lorsque $\delta(\underline{x})$ tend vers zéro.

Soient $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots$ la suite des sauts de g et τ_k tel que $\sigma(\tau_k) = s_k$. Puisque $[x_p, x_{p+1}[$ réalise une partition de $[a, b[$, nous avons

$$S(x_{p+1}) - S(x_p) = \sum s_k$$

où la sommation (finie ou infinie) porte sur les k tels que $\tau_k \in [x_p, x_{p+1}[$. Ainsi

$$\sum_{p=0}^{m} f(\xi_p)(S(x_{p+1}) - S(x_p)) = \sum_{q=1}^{\infty} f(\xi_q)s_q$$

où ξ_q est égal à ξ_p lorsque $\tau_q \in [x_p, x_{p+1}[$ et puisque $\tau_p \in [x_p, x_{p+1}[$ nous avons $|\tau_p - \xi_p| \leqslant \delta(\underline{x})$ de sorte que lorsque $\delta(\underline{x})$ tend vers zéro, ξ_q tend vers τ_q et puisque f est continue $f(\xi_q)$ tend vers $f(\xi_q)$. Par ailleurs $\sum_{q=1}^{\infty} s_q \leqslant g(b) - g(a) < \infty$, il en résulte alors que lorsque $\delta(\underline{x}) \to 0$,

$$\sum_{p=0}^{m} f(\xi_p)(S(x_{p+1}) - S(x_p)) \to \sum_{q=1}^{\infty} f(\tau_q)s_q.$$

Commentaires

Ce problème propose la construction de l'intégrale de Stieltjes qui est une généralisation de l'intégrale de Riemann (qui, elle, s'obtient en prenant $\alpha(x) = x$ soit $g(x) = x$ et $h(x) = 0$). Cette notion d'intégrale a son utilité dans divers domaines de l'analyse (deuxième formule de la moyenne, analyse fonctionnelle,…) le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage de G. Valiron : *Théorie des fonctions* paru chez Masson et le livre de F. Riesz et B. Nagy : *Leçons d'analyse fonctionnelle* paru chez Gauthier-Villars.

Corrigé 50

50.3.1. Soit $f\ : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = 0$ pour $x \neq \pi$ et $f(\pi) = 1$. On a $V(f) = 1 < \infty$ alors que f est discontinue.

50.3.2. Nous avons $V(f + g) \leqslant V(f) + V(g)$ et $V(\lambda f) = |\lambda| V(f)$ mais $V(1) = 0$ et donc V n'est pas une norme.

50.3.3. Nous avons

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| = \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(y)dy \right| \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(y)|dy$$

et donc pour toute subdivision $\underline{\mathrm{x}}$,

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \sum_{h=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(y)|dy = \int_0^{2\pi} |g(y)|dy.$$

Ainsi $C = \int_0^{2\pi} |g(y)|dy$ convient.

Afin de majorer $|n\hat{f}(n)|$ considérons le cas $n \neq 0$ et supposons pour commencer que g est continue. Nous avons alors

$$2\pi\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x g(y)dy \right) e^{-inx}dx = \int_0^{2\pi} \left(\int_y^{2\pi} e^{-inx}dx \right) g(y)dy$$

où l'inversion des intégrales est licite d'après le théorème de Fubini (on aurait pu aussi bien faire une intégration par parties).

Ainsi

$$2\pi\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-iny} - 1}{in} g(y)dy,$$

et donc

$$\left|n\hat{f}(n)\right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |g(y)|dy.$$

Dans le cas où g est uniquement localement intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe g_ε continue et telle que $\int_0^{2\pi} |g(x) - g_\varepsilon(x)|dx \leqslant \varepsilon$. Nous avons

$$2\pi\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x g_\varepsilon(y)dy \right) e^{-inx}dx + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x (g(y) - g_\varepsilon(y))dy \right) e^{-inx}dx.$$

Le premier terme a été majoré par $\frac{2}{|n|} \int_0^{2\pi} |g_\varepsilon(y)|dy$ alors que le second se majore en module par $2\varepsilon\pi$. Ainsi

$$2\pi \left|n\hat{f}(n)\right| \leqslant 2 \int_0^{2\pi} |g(y)|dy + 2\varepsilon + 2n\varepsilon\pi.$$

Puisque ε est arbitraire, il vient donc

$$\pi \left|n\hat{f}(n)\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |g(y)|dy,$$

et ainsi $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |n\hat{f}(n)| < \infty$.

50.3.4. Supposons tout d'abord que f est continue. Dorénavant $n \neq 0$, l'inégalité étant triviale pour $n = 0$. Soit alors $g(x) = \frac{e^{-inx}}{-in}$($n \neq 0$ est fixé). Nous avons alors le résultat suivant.

Lemme. *Sous les hypothèses qui précèdent,* $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ *tel que pour* $\underline{x}$ *avec* $\max_k |x_k - x_{k-1}| \leqslant \alpha$ *nous avons*

$$\left| \hat{f}(n) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} f(x_k)(g(x_k) - f(x_{k-1})) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Nous écrivons

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) e^{-inx} dx. \end{aligned}$$

Le premier terme vaut justement $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} f(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$ alors que le second se majore en module par $\frac{1}{2\pi} V(f) \max |x_k - x_{k-1}| \leqslant \frac{\alpha}{2\pi} V(f) \leqslant \varepsilon$ pour α assez petit. Ce qui achève la preuve du Lemme. ❑

Écrivons alors

$$\sum_{k=1}^{m} f(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = (f(2\pi) - f(x_1))g(0) - \sum_{k=1}^{m-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k))g(x_k).$$

de sorte que le module du membre de gauche est majoré par $\frac{1}{|n|}|f(2\pi) - f(x_1)| + \frac{1}{|n|} V(f)$. Puisque f est continue, $|f(2\pi) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon$ pour $\max_k |x_h - x_{h-1}|$ assez petit et donc grâce au Lemme,

$$|n \hat{f}(n)| \leqslant (1 + |n|)\varepsilon + \frac{V(f)}{2\pi}$$

pour $\max_k |x_h - x_{h-1}|$ assez petit. Le membre de gauche de cette dernière inégalité étant indépendant de ε nous obtenons l'inégalité demandée lorsque f est continue.

Considérons maintenant le cas où f est simplement localement intégrable et $V(f) < \infty$. Soit alors pour $r > 0$, f_r définie par

$$f_r(x) = r \int_{x}^{x+\frac{1}{r}} f(t) dt = r \int_{0}^{1/r} f(x + t) dt.$$

Estimons alors $V(f_r)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}|f_r(x_k)-f_r(x_{k-1})| &= r\sum_{k=1}^{m}\left|\int_0^{1/r}(f(x_k+t)-f(x_{k-1}+t))dt\right| \\ &\leqslant r\int_0^{1/r}\sum_{k=1}^{m}|(f(x_k+t)-f(x_{k-1}+t))|\,dt.\end{aligned}$$

Mais $\sum_{h=1}^{m}|(f(x_k+t)-f(x_{k-1}+t))|\leqslant V(f)$ et donc

$$\sum_{k=1}^{m}|f_r(x_h)-f_r(x_{h-1})|\leqslant r\int_0^{1/r}V(f)dt=V(f),$$

soit $V(f_r)\leqslant V(f), \quad \forall r>0$.

Il en résulte donc que (là f_r est continue) que

$$\left|n\hat{f}_r(n)\right|\leqslant\frac{V(f)}{2\pi},\quad \forall r>0.$$

Mais un calcul direct montre que $\hat{f}_r(n)=e^{\frac{in}{2r}}\hat{f}(n)\frac{\sin\frac{n}{2r}}{n/2r}$, par conséquent

$$\frac{\sin\frac{n}{2r}}{n/2r}|\hat{f}(n)|\leqslant\frac{V(f)}{2\pi},\forall n\neq 0,\forall r>0,$$

En faisant tendre r vers zéro, nous obtenons l'inégalité demandée.

Commentaires

Compte tenu de la proposition page 185, nous déduisons de l'estimée

$$|n\hat{f}(n)|\leqslant\frac{V(f)}{2\pi},$$

que si f, continue et 2π-périodique, est à variation bornée alors elle est limite uniforme de sa série de Fourier.

Il est classique de caractériser les fonctions à variation bornée définies au numéro 50.1.1 page 44 de la manière suivante.

Proposition. *Soit f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ à variation bornée. Il existe deux fonctions croissantes g et h de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f=g-h$. Réciproquement si $f=g-h$ avec g et h croissantes, alors f est à variation bornée.*

Démonstration. Si $f = g$ avec g croissante nous avons avec les notations du numéro 50.1.1. page 44

$$\sum_{h=1}^{m} |f(x_h) - f(x_{h-1})| = \sum_{h=1}^{m} f(x_h) - f(x_{h-1}) = f(x_m) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

et donc f est à variation bornée. Puisque l'ensemble des fonctions à variation bornée est un espace vectoriel, si $f = g - h$ avec g et h croissantes alors f est à variation bornée.

Réciproquement, si f est à variation bornée, pour tout $x \in [a, b]$, elle est à variation bornée sur l'intervalle $[a, x]$. Soit alors $g(x)$ la variation de $f_{|[a,x]}$. On vérifie aisément que g est croissante sur $[a, b]$. Il s'agit donc de vérifier que h, définie par $h(x) = g(x) - f(x)$, est une fonction croissante. Pour $x_1 > x_2$,

$$h(x_1) - h(x_2) = g(x_1) - g(x_2) - (f(x_1) - f(x_2)).$$

Mais $g(x_1) - g(x_2)$ est supérieur à la variation de $f_{|[x_2,x_1]}$ qui à son tour supérieure à $|f(x_1) - f(x_2)|$. Ainsi $h(x_1) - h(x_2) \geqslant |f(x_1) - f(x_2)| - (f(x_1) - f(x_2)) \geqslant 0$. Ceci achève la preuve de la Proposition.

Index

S

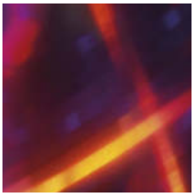
T

V

Y

Z

SCIENCES SUP



Jean-Michel Ghidaglia

50 PROBLÈMES D'ANALYSE

Corrigés détaillés, méthodes

Ce livre, véritable outil de travail, constitue le socle de connaissances en analyse que les étudiants en Master et les candidats au Capes et à l'Agrégation de mathématiques se doivent de maîtriser.

Les 50 problèmes sont énoncés de manière « économe » afin que le lecteur puisse s'exercer à chercher plusieurs angles d'attaque pour la résolution de la question posée. Des indications sont fournies pour guider l'étudiant dans sa réflexion.

Chaque problème est corrigé de façon détaillée. L'accent est particulièrement mis sur les méthodes classiques en analyse. Des commentaires complètent chaque corrigé afin d'y apporter un éclairage supplémentaire.

Les problèmes sont entièrement indépendants. Il est donc possible de les aborder dans un ordre arbitraire.

JEAN-MICHEL GHIDAGLIA

est professeur à l'École normale supérieure de Cachan et enseigne aussi à l'École nationale supérieure des techniques avancées. Il effectue des recherches dans le domaine de la mécanique des fluides numériques. Il a publié plusieurs ouvrages et une centaine d'articles dans des revues scientifiques spécialisées. Il est directeur scientifique du mensuel *La Recherche*.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

LICENCE | MASTER | DOCTORAT

1 2 3 4 5 6 7 8

DUNOD

ISBN 978-2-10-053810-2

www.dunod.com