Exercices de calcul intégral

Avec rappels de cours

Joël Benoist

Maître de conférences
et responsable de la licence de mathématiques
de la faculté des sciences de Limoges

Alain Salinier

Maître de conférences
et directeur de l'Institut de recherche
pour l'enseignement des mathématiques (IREM) de Limoges

DUNOD

Illustration de couverture : *Lionel Auvergne*

ISBN 2 10 005741 3

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Ce livre s'adresse aux étudiants de licence de mathématiques, de certains seconds cycles des universités, aux agrégatifs, aux élèves des grandes écoles, aux élèves des écoles d'ingénieurs s'initiant à l'intégrale de Lebesgue et enfin à leurs enseignants.

Ce recueil se place à un niveau accessible au maximum d'étudiants ayant suivi l'enseignement des premiers cycles universitaires ou des classes préparatoires. Il nous a semblé intéressant de mettre à leur disposition un ouvrage couvrant l'ensemble de l'initiation aux théories de l'intégrale et de la mesure, tout en restant élémentaire et sans multiplier les compléments de cours ou les exercices trop sophistiqués qui ne sont pas adaptés à leurs besoins.

En particulier, nous avons voulu faciliter le passage du premier cycle au second cycle, soit en introduisant un certain nombre d'exercices traitant les connaissances de base indispensables au développement de la théorie (par exemple la dénombrabilité ou le calcul ensembliste), soit en évitant de recourir à des notions qui ne sont souvent plus abordées dans l'enseignement actuel (telles les sommes de Darboux) ou qui ne feraient qu'alourdir le cours (tels les clans ou la complétée d'une mesure).

De même, nous nous sommes efforcés de proposer à la fois des exercices d'application immédiate du cours et d'autres, plus élaborés, nécessitant davantage de réflexion. Nous avons également voulu aider au maximum l'étudiant en lui fournissant une rédaction détaillée des corrigés.

Si la plupart des exercices fait partie d'un fonds commun tombé pour ainsi dire dans le domaine public, certains sont originaux et pourront compléter la palette des exercices à la disposition des enseignants.

Un grand merci à nos collègues qui ont collaboré à notre enseignement ainsi qu'aux étudiants qui nous ont permis de tester la quasi-totalité des exercices proposés.

CONSEILS D'UTILISATION

1. Bien connaître son cours

Le lecteur doit tout d'abord bien étudier le cours qui lui est enseigné. Pour faciliter le lien entre ce cours et nos énoncés, il aura intérêt à parcourir le résumé du cours que nous avons introduit à la tête de chaque chapitre, en portant une attention particulière aux notations.

2. Comment choisir ses exercices ?

Chaque exercice est repéré à l'aide d'un code.

- Le sigle $(\star)$ désigne une application immédiate du cours dont la résolution nécessite uniquement la compréhension des définitions et des résultats cités.
- Le sigle $(\star\star)$ désigne un exercice que l'étudiant moyen doit savoir résoudre à la fin de l'enseignement.
- Le sigle $(\star\star\star)$ désigne un exercice plus technique ou plus astucieux nécessitant une idée extérieure aux connaissances de base.

Il est bien sûr recommandé au lecteur de commencer par les exercices $(\star)$, qu'il doit savoir traiter avant de passer aux autres exercices. Puis l'étudiant se concentrera sur les exercices $(\star\star)$; les exercices $(\star\star\star)$ sont réservés aux plus curieux.

3. Chercher longuement avant de regarder les solutions

Les corrigés sont séparés des énoncés pour que l'étudiant ne soit pas tenté de regarder trop rapidement les corrections. Il est infiniment plus utile de chercher à fond quelques exercices que d'apprendre par cœur les corrigés d'un grand nombre. En effet une réflexion approfondie sur un exercice permet à l'étudiant de développer son imagination en essayant plusieurs pistes de résolution et ainsi de

mieux comprendre l'ensemble du cours et de se familiariser avec l'agencement de toutes les notions qu'il doit maîtriser.

4. Se tester pour l'examen

Dans le dernier chapitre, le lecteur trouvera des problèmes non corrigés issus des examens de la licence de mathématiques à Limoges posés entre 1991 et 1995. De plus, le lecteur trouvera dans la bibliographie quelques ouvrages qui complètent le présent livre.

NOTATIONS GÉNÉRALES

On utilisera les notations uselles suivantes :

$\mathbb{N}$:	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$:	ensemble des entiers naturels non nuls
$2\mathbb{N}$:	ensemble des entiers naturels pairs
$\mathbb{Z}$:	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$:	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}_+^*$:	ensemble des rationnels strictement positifs
$\mathbb{R}$:	ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^*$:	ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}_+$ ou $[0,+\infty[$:	ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$ ou $]0,+\infty[$:	ensemble des réels strictement positifs

On note les intervalles de $\mathbb{R}$ sous la forme $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$, $]-\infty,a]$, $]-\infty,a[$, $[b,+\infty[$ et enfin $]b,+\infty[$, où le réel a est plus petit que le réel b.

Soit f une application de X dans Y (ce que l'on écrira $f:\ X\to Y$); si A est une partie de X, la restriction de l'application f à la partie A sera notée $f_{|A}$. Si B est une partie de Y,

$$f^{-1}(B)=\{x\in X:\ f(x)\in B\}$$

représente l'image réciproque de B par l'application f. Dans le cas où la fonction f est à valeurs réelles ($f: X\to\mathbb{R}$) et si B est une partie de $\mathbb{R}$, on utilisera l'écriture simplifiée

$$\{f\in B\}$$

pour $\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)\in B\}=f^{-1}(B)$. Par exemple, si b est un réel, on écrira

$$\{f<b\}\quad(\text{ou bien }\ \{f\in\,]-\infty,b[\})$$

comme écriture simplifiée de $\{x\in X:\ f(x)<b\}$.

Si A est une partie de X, la fonction indicatrice de A, notée 1_A, est définie, pour $x\in X$, par

$$1_A(x)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad x\in A;\\ 0 & \text{si}\quad x\notin A.\end{cases}$$

Enfin, si A et C sont deux parties de X, la différence $C\setminus A$ désigne la partie constituée des éléments qui appartiennent à C mais pas à A.

1 GÉNÉRALITÉS

1.1 Parties et familles de parties

Nous allons nous placer sur un ensemble X quelconque. Une attention particulière sera donnée à cette section afin de ne pas confondre une partie de X et une famille de parties de X et les différentes relations qui existent entre ces deux notions. Pour les distinguer, les parties de X seront notées par des lettres capitales comme Y, Z, A, ... tandis que les familles de parties seront notées à l'aide de lettres en cursive comme $\mathcal{M}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{A}$, ... Remarquons qu'une partie A de X se met sous la forme

$$A=\{a_i:\ i\in I\},$$

où, pour tout i, a_i est un élément de A et qu'une famille de parties se met sous la forme

$$\mathcal{A}=\{A_i:\ i\in I\},$$

où, pour tout i, A_i est une partie de X.

Inclusion. Pour deux parties A,B de X, la relation $A\subset B$ signifie que l'appartenance à A entraîne l'appartenance à B. En général, pour démontrer une inclusion du type $A\subset B$, on suit le schéma suivant :

$$\text{Soit } x\in A\,;\cdots\quad\cdots.\ \text{Donc } x\in B.$$

Pour deux familles de parties $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ signifie que toutes les parties constituant l'ensemble $\mathcal{A}$ sont aussi dans $\mathcal{B}$, ce que l'on peut écrire :

$$\forall A\in\mathcal{A}, A\in\mathcal{B}.$$

Union et intersection. Si $(A_i)_{i\in I}$ représente des parties de X, alors la partie $\bigcup_{i\in I}A_i$ (resp. $\bigcap_{i\in I}A_i$) est définie par :

$$x\in\bigcup_{i\in I}A_i \text{ si et seulement si, il existe } i\in I, x\in A_i.$$

$$(\text{resp. } x\in\bigcap_{i\in I}A_i \text{ si et seulement si, pour tout } i\in I, x\in A_i).$$

Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ représente des familles de parties de X alors la famille de parties $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ (resp. $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$) est constituée de parties qui appartiennent à au moins un des $\mathcal{A}_i$) (resp. à tous les $\mathcal{A}_i$).

Par exemple, si $X = \mathbb{N}$ et si l'on choisit

$$\mathcal{A} = \{\{1,\cdots,10\}, 2\mathbb{N}, \emptyset\} \text{ et } \mathcal{B} = \{\{1,\cdots,11\}, 2\mathbb{N}, \emptyset\},$$

nous avons $\{1,\cdots,10\} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{2\mathbb{N}, \emptyset\}$.

1.2 La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On définit la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ comme étant la réunion de $\mathbb{R}$ et de deux autres points notés $+\infty$ et $-\infty$.

Prolongement de l'addition. On pose pour $+\infty$: $(+\infty) + (-\infty)$ n'a pas de sens à priori, $(+\infty) + x = +\infty$ (si $x \in \mathbb{R}$) et $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$. On procède de la même manière avec $-\infty$.

Prolongement de la multiplication. On pose pour $+\infty$:

$$(+\infty)(-\infty) = -\infty,\ (+\infty)x = -\infty \text{ (si } x < 0) \ (+\infty)0 = 0,$$

$$(+\infty)x = +\infty \text{ (si } x > 0) \text{ et } (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

On procède de la même manière avec $-\infty$.

Attention, il faut être prudent dans les calculs car nous n'avons ni une structure de groupe, ni une structure d'anneau. En général, lorsque tout est bien défini une égalité vraie sur $\mathbb{R}$ devient vraie dans $\overline{\mathbb{R}}$. En particulier si l'on se place sur $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, l'addition et la multiplication sont associatives et la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

1.3 Ensembles ordonnés

On rappelle qu'une relation binaire $\leq$ est une relation d'ordre sur un ensemble X arbitraire si elle vérifie les trois conditions suivantes :

(i) pour tout $x \in X$, $x \leq x$ (réflexivité) ;

(ii) pour tout $(x, y) \in X^2$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (antisymétrie) ;

(iii) pour tout $(x, y, z) \in X^3$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (transitivité).

On dit que l'ordre est total si deux éléments quelconques de X peuvent être comparés et que l'ordre est partiel sinon. Une suite (x_n) d'éléments de X sera croissante (resp. décroissante) si :

$$x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \ \text{(resp. } x_0 \geq x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots\text{)} \ ;$$

la suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 1.1

(1) La relation usuelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$.

(2) En complétant la relation usuelle $\leq$ de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ par :

$$-\infty \leq x, x \leq +\infty \ (x \in \mathbb{R}) \text{ et } -\infty \leq +\infty,$$

$(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ est encore un ensemble totalement ordonnée.

(3) Si E est un ensemble quelconque et si $X = \mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E, la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre (l'ordre est partiel dès que E a au moins deux éléments).

(4) Si E désigne un ensemble quelconque et si $X = \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ (resp. $X = \mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$) désigne l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$, la relation $\leq$ définie par :

$$f \leq g \iff \text{pour tout } x \in E,\ f(x) \leq g(x)$$

est une relation d'ordre (l'ordre est partiel dès que E a au moins deux éléments).

Dans les trois définitions suivantes, on considère une partie A de X et m un élément de X.

Définition 1.2 *(plus grand élément-plus petit élément). On dit que m est un plus grand élément (resp. plus petit élément) de A si*

(i) *$m \in A$;*

(ii) *pour tout $a \in A$, $a \leq m$ (resp. $m \leq a$).*

On montre que si cet élément existe alors il est unique.

Définition 1.3 *(majorant-minorant). On dit qu'un élément m de X est un majorant (resp. minorant) de A si*

$$\textit{pour tout } a \in A,\ a \leq m \ \ (\textit{resp. } m \leq a).$$

Définition 1.4 *(borne supérieure-borne inférieure d'une partie). On dit que m est la borne supérieure (resp. inférieure) de A si l'ensemble des majorants (resp. minorants) admet m pour plus petit (resp. grand) élément. Dans ce cas, on notera $m = \sup A$ et on dira que m est le plus petit des majorants (resp. minorants) de A.*

Si l'on choisit comme ensemble ordonné $X = \mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel et comme partie $A = [0, 1[$, alors :

- A n'a pas de plus grand élément tandis que 0 est le plus petit élément ;
- l'ensemble des majorants de A est la partie $[1, +\infty[$ et donc, sa borne supérieure est 1 : $\sup A = 1$.

A partir de cette définition, on définit la borne supérieure (resp. borne inférieure) d'une suite (a_n), notée $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (resp. $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$), comme étant la borne supérieure (resp. borne inférieure), si elle existe, de la partie $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Nous pouvons alors définir :

Définition 1.5 *(limite supérieure-limite inférieure d'une suite). Soit (a_n) une suite d'éléments de X. La limite supérieure (resp. limite inférieure) de la suite (a_n) notée $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (resp. $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$) est définie par la formule (dans le cas où cela est possible) :*

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}}[\sup_{n\geq m} a_n] \ \textit{(resp.} \ \liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}}[\inf_{n\geq m} a_n]\textit{)}.$$

Nous pouvons appliquer ces définitions aux différents espaces ordonnés déjà rencontrés dans l'exemple 1.1 (2), (3), (4) et où les bornes supérieures et inférieures d'une partie existent toujours.

- $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$. En particulier nous avons $\sup\emptyset = -\infty$, $\inf\emptyset = +\infty$.
- $(\mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}}), \leq)$. En particulier si (f_n) est une suite de fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ on a, pour tout $x \in E$,

$$(\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) = \liminf_{n\in\mathbb{N}}[(f_n)(x)]$$

et

$$(\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n)(x) = \limsup_{n\in\mathbb{N}}[(f_n)(x)].$$

- $(\mathcal{P}(E), \subset)$. En particulier si (A_n) est une suite de parties de E on a :

$$\begin{aligned}\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}}[\bigcap_{n\geq m} A_n] \\ &= \{x \in E : x \in A_n \text{ à partir d'un certain rang}\} ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n &= \bigcap_{m\in\mathbb{N}}[\bigcup_{n\geq m} A_n] \\ &= \{x \in E : x \in A_n \text{ pour une infinité d'indices } n\}.\end{aligned}$$

1.4 Séries dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

La définition suivante sera utile lorsque l'on définira les mesures (voir chapitre 3). Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dont les valeurs sont prises dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on pose

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

(la limite existe car une suite croissante dans $\overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$). Alors les propriétés algébriques sur les séries à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sont encore valables ici ; par exemple, on a

- $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$;
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\alpha.a_k) = \alpha.\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$.

1.5 Dénombrabilité

Définition 1.6 *On dit qu'un ensemble est dénombrable s'il existe une injection de A vers $\mathbb{N}$.*

En d'autres termes, on montre qu'un ensemble est dénombrable s'il est soit de cardinal fini soit en bijection avec $\mathbb{N}$. L'énoncé suivant est fondamental dans la théorie de l'intégration

Proposition 1.7 *Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.*

Nous avons aussi :

Proposition 1.8 *Nous avons :*

(a) *Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable ;*

(b) *l'image d'un ensemble dénombrable par une application est un ensemble dénombrable.*

Par exemple, $\mathbb{N}^2$ est un ensemble dénombrable tandis que nous avons :

Proposition 1.9 *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

1.6 Énoncés des exercices

Exercice 1.1 ($\star$)
Les inclusions suivantes sont-elles vraies ?

(i) $\{[0,1],[0,4],\{0\}\} \subset \{[0,2],[0,5],\{0\}\}$;

(ii) $\{[a,b[:\ a,b \in \mathbb{Q}\} \subset \{[a,b[:\ a,b \in \mathbb{R}\}$;

(iii) $\{[a,b[:\ a,b \in \mathbb{R}\} \subset \{[a,b]:\ a,b \in \mathbb{R}\}$;

(iv) $[0,1] \subset [0,4]$.

Exercice 1.2 ($\star$)
Prouver la formule :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$$

Exercice 1.3 ($\star$)
Soit X un ensemble non vide et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=0}^{n} A_k.$$

(i) Montrer que la suite B_n est croissante.

(ii) Prouver que
$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$$

(iii) Enoncer un résultat similaire portant sur l'intersection.

Exercice 1.4 ($\star\star$)
Soit X un ensemble non vide et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de parties de X telles que, pour tout n, $\{A_n, B_n\}$ forme une partition de X. On suppose de plus que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Prouver alors que

$$\{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n, \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\}$$

forme aussi une partition de X.

Exercice 1.5 ($\star$)
Si a et b appartiennent à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, résoudre sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ l'équation :

$$a + x = b.$$

Exercice 1.6 ($\star$)
Montrer que pour tous choix de a et de b dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a les assertions suivantes :

(i) $((\forall\, \alpha \in \mathbb{R}) \quad (\alpha < a \Longrightarrow \alpha \leq b)) \Longrightarrow (a \leq b)$;

(ii) $((\forall\, \alpha \in \mathbb{R}) \quad (\forall\, \beta \in \mathbb{R})\ (\alpha < a \text{ et } b < \beta \Longrightarrow \alpha \leq \beta)) \Longrightarrow (a \leq b)$.

Exercice 1.7 ($\star$)
Soit X un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\leq$.

(i) Si A est une partie de X, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(A1) $\sup A$ existe et appartient à A ;

(A2) A admet un plus grand élément.

(ii) Montrer que toute partie réduite à un point admet une borne supérieure et inférieure.

Exercice 1.8 ($\star\star\star$)
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par
$$f \leq g \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq g(x).$$

Montrer que la partie

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F} :\ f \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \text{ et } f(x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{Z}\}$$

admet un plus grand élément que l'on explicitera.

Exercice 1.9 ($\star\star$)
On munit l'espace $\mathbb{R}^2$ de l'ordre lexicographique, noté $\leq_\ell$, par la relation :

$$(a,b) \leq_\ell (c,d) \iff (a < c) \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leq d).$$

(i) Montrer que $\leq_\ell$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

(ii) Donner un exemple de partie bornée de $\mathbb{R}^2$ n'ayant ni borne supérieure, ni borne inférieure.

Exercice 1.10 $(\star\star)$
On munit l'espace $\mathbb{R}^2$ de la relation $\leq$, définie par :

$$(a,b) \leq (c,d) \iff a \leq c \text{ et } b \leq d.$$

(i) Comment peut-on représenter géométriquement les bornes supérieures et inférieure d'une paire $\{(a,b),(c,d)\}$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$?

(ii) Pour cette relation d'ordre, justifier l'existence et calculer :

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}}(\cos n\frac{\pi}{4},\ \sin n\frac{\pi}{4}).$$

Exercice 1.11 $(\star)$
Calculer $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ lorsque les parties A_m décrivent successivement les arêtes d'un triangle.

Exercice 1.12 $(\star\star)$
Décrire $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone de parties.

Exercice 1.13 $(\star)$
Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de parties d'un même ensemble X, alors on a

(i) $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap \limsup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \limsup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cap B_n) \subset \limsup_{n\in\mathbb{N}} B_n$;

(ii) $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \liminf_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cup B_n) \subset \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \liminf_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Exercice 1.14 $(\star\star)$
Quelles sont les limites inférieures et supérieures de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X lorsqu'elle est définie par

$$\begin{cases} A_n &= \left[-1, 2+\frac{1}{n}\right] \text{ si } n \text{ est pair non nul ;} \\ A_n &= \left[-2-\frac{1}{n}, 1\right] \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 1.15 $(\star)$
Si A est une partie quelconque de $\overline{\mathbb{R}}$, α un élément quelconque de $\overline{\mathbb{R}}$ et si tout élément a de A vérifie $\alpha < a$, avons-nous $\alpha \leq \inf(A)$? Peut-on dans cette dernière inégalité prendre une inégalité stricte ?

Exercice 1.16 $(\star)$
Si A est une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ et α est un élément quelconque de $\mathbb{R}$, on a alors l'implication

$$(\alpha < \sup A) \Longrightarrow (\text{ il existe } a \in A \text{ tel que } \alpha < a).$$

Exercice 1.17 $(\star\star)$

(i) Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, montrer la formule

$$\sup(A.B) = \sup A \ \sup B,$$

où $A.B \stackrel{\text{def}}{=} \{ab : \ a\in A \text{ et } b \in B\}$.

(ii) Etant données deux familles de réels strictement positifs $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ indexées par le même ensemble I, non vide, montrer la relation

$$\sup(a_i b_i) \leq \sup_{i\in I} a_i \cdot \sup_{i\in I} b_i.$$

A-t-on toujours égalité ?

(iii) Expliquer pourquoi les résultats des deux questions précédentes sont compatibles.

Exercice 1.18 $(\star\star)$
Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$, établir l'inégalité

$$\liminf_{n\to+\infty}\ a_n \leq \liminf_{n\to+\infty}\ a_n.$$

Indication : on pourra utiliser l'exercice 1.6.

Exercice 1.19 $(\star\star\star)$
On rappelle qu'une suite (a_n) d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ converge vers un élément de $\mathbb{R}$, noté a, si et seulement si :

- pour $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) :

$$\forall\ M > 0, \exists\ n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq n \quad a_p \geq M \text{ (resp. } a_p \leq -M) \text{ ;}$$

- pour $a \in \mathbb{R}$: $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ p \geq n \quad |\ a_p - a\ | \leq \epsilon$.

Montrer que, pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(A1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $\overline{\mathbb{R}}$;

(A2) $\liminf_{n\to+\infty}\ a_n = \limsup_{n\to+\infty}\ a_n$.

Exercice 1.20 $(\star)$
Calculer les limites inférieures et supérieures des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

(a) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

(b) $b_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1} + (-1)^n\right)$.

Exercice 1.21 $(\star\star)$
Sans utiliser les rappels de cours, montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. En déduire que $\mathbb{Q}$ est aussi dénombrable.

Exercice 1.22 $(\star\star)$

(i) Si $m \in \mathbb{N}$, montrer que l'ensemble des parties à m éléments de $\mathbb{N}$ est dénombrable;

(ii) en déduire que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 1.23 $(\star\star\star)$
En utilisant la représentation décimale d'un réel de $[0,1[$, prouver que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.24 $(\star\star)$

(i) Calculer $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ lorsque

$$\begin{cases} f_n &= 1_{[0,\frac{1}{2}]} \text{ si } n \text{ est pair ;} \\ f_n &= 1_{[\frac{1}{2},1]} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(ii) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X ; montrer que :

$$1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n}.$$

1.7 Corrigés des exercices

Corrigé 1.1 L'inclusion (i) est fausse car $[0,1]$ ne fait pas partie des trois éléments $[0,2], [0,5]$ et $\{0\}$; l'inclusion (ii) est vraie ; l'inclusion (iii) est fausse car $[0,1[\in \{[a,b[:\ a,b \in \mathbb{R}\}$ mais $[0,1[\notin \{[a,b]:\ a,b\in\mathbb{R}\}$; l'inclusion (iv) est évidemment vraie.

Corrigé 1.2 Le résultat est une conséquence immédiate des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in (\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) &\iff (x \in \textstyle\bigcup_{i\in I} A_i) \text{ et } (x \in \bigcup_{j\in J} B_j) \\ &\iff (\exists i \in I, x \in A_i) \text{ et } (\exists j \in J, x \in B_j) \\ &\iff \exists (i,j) \in I \times J, x \in A_i \cap B_j \\ &\iff x \in \textstyle\bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j). \end{aligned}$$

Corrigé 1.3 (i) Nous avons $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k \subset \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1} = B_{n+1}$, donc, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(ii) De l'inclusion $A_n \subset B_n$ on tire $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$. Réciproquement, soit $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$; par définition de l'union, il existe un entier n tel que $x \in B_n$. Par définition de B_n, il existe un autre entier k $(k \le n)$ tel que $x \in A_k$. En particulier, on conclut $x \in \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.

(iii) Considérons la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $C_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k$. Alors on montre de même que cette suite est décroissante et que

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n.$$

Corrigé 1.4 Posons $A = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $B = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$; il faut démontrer que

$$A \cap B = \emptyset \ \text{ et } \ A \cup B = X.$$

Suposons que $A \cap B \neq \emptyset$; il existe $x \in A \cap B$ et donc, deux entiers n et m tels que $x \in A_n$ et $x \in B_m$. Supposons que $n \ge m$; comme la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante $x \in B_n$, ce qui contredit le fait que $\{A_n, B_n\}$ forme une partition de X. On aboutit aussi à une contradiction en supposant que $m \ge n$ (utiliser le fait que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante).
Montrons maintenant que $A \cup B = X$. Soit $x \in X$; pour montrer que $x \in A \cup B$, il suffit de vérifier que si $x \notin A$ alors $x \in B$. Supposons donc que $x \notin A$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin A_n$ et, puisque $\{A_n, B_n\}$ forme une partition de X, $x \in B_n$. Ainsi $x \in B$ et le résultat est démontré.

Corrigé 1.5 Discutons suivant les valeurs de a et b.
Cas 1 : $a, b \in \mathbb{R}$. Comme $+\infty$ n'est pas solution de l'équation, on se ramène

à une équation sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble des solutions est $S = \{b - a\}$.
Cas 2 : $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$. Dans ce cas, on voit que $S = \{+\infty\}$.
Cas 3 : $b \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a + x = +\infty$, l'ensemble S des solutions est vide.
Cas 4 : $a = +\infty$ et $b = +\infty$. Dans ce cas , il est clair que $S = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Remarquons que l'existence et l'unicité d'une solution ne sont pas toujours satisfaites puisque $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, +)$ n'est pas un groupe.

Corrigé 1.6 Nous allons démontrer ces deux implications par contraposition.

(i) Supposons que $b < a$; il faut alors trouver un réel α tel que $b < \alpha < a$. Pour cela, nous allons envisager quatre cas.
Cas 1 : a et b sont réels. Alors $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$ convient.
Cas 2 : $a = +\infty$ et b est réel. Alors $\alpha = b + 1$ convient.
Cas 3 : a est réel et $b = -\infty$. Alors $\alpha = a - 1$ convient.
Cas 4 : $a = +\infty$ et $b = -\infty$. Alors $\alpha = 0$ convient.

(ii) Supposons que $b < a$; il faut alors trouver deux réels α et β tels que $b < \beta < \alpha < a$. Pour cela, nous allons envisager à nouveau ces quatre cas.
Cas 1 : a et b sont réels. Alors $\beta = \dfrac{a+2b}{3}$ et $\alpha = \dfrac{2a+b}{3}$ conviennent.
Cas 2 : $a = +\infty$ et b est réel. Alors $\beta = b + 1$ et $\alpha = b + 2$ conviennent.
Cas 3 : a est réel et $b = -\infty$. Alors $\beta = a - 2$ et $\alpha = a - 1$ conviennent.
Cas 4 : $a = +\infty$ et $b = -\infty$. Alors $\beta = -1$ et $\alpha = 0$ conviennent.

Corrigé 1.7 (i) (A1) $\Rightarrow$ (A2). Posons $m = \sup A$; par hypothèse $m \in A$ et, par définition de la borne supérieure, $m \geq a$ pour tout $a \in A$. Donc, m est le plus grand élément de A.
(A2) $\Rightarrow$ (A1). Si m est le plus grand élément de A, m est un majorant de A. D'autre part, soit x un autre majorant de A ; en particulier comme $m \in A$, $m \leq x$. L'élément m est donc le plus petit des majorants.

(ii) Si $A = \{a\}$, il est clair que a est à la fois le plus grand et le plus petit élément de A. D'après la question (i), A admet une borne supérieure (qui n'est autre que a) et, par raison de symétrie, une borne inférieure.

Corrigé 1.8 Si E désigne la fonction partie entière (rappelons que $E(x) = k$ si $k \leq x < k+1$), montrons que la fonction f_0 définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f_0(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}\,; \\ E(x)+1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Z}\,; \end{cases}$$

est le plus grand élément de $\mathcal{C}$. Pour cela, vérifions les conditions (i) et (ii) que l'on trouve dans la définition du plus grand élément.
(i) Il faut vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $f_0(x) = x$ et que f_0 est croissante sur $\mathbb{R}$. La première propriété est une conséquence immédiate de la définition de f_0 ($E(x) = x$ si $x \in \mathbb{Z}$). Pour démontrer la deuxième propriété, considérons deux réels x et y tels que $x \leq y$. Puisque la fonction partie entière E est une fonction croissante, on a l'inégalité

$$E(x) \leq E(y). \tag{1}$$

Nous allons maintenant envisager les quatre possiblités suivantes.
Cas 1 : $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$. Alors, grâce à l'inégalité (1), on a $f_0(x) = E(x) \leq E(y) = f_0(y)$.
Cas 2 : $x \notin \mathbb{Z}$ et $y \notin \mathbb{Z}$. Là aussi, grâce à l'inégalité (1), on a $f_0(x) = E(x) + 1 \leq E(y) + 1 = f_0(y)$.
Cas 3 : $x \in \mathbb{Z}$ et $y \notin \mathbb{Z}$. Encore une fois, en utilisant l'inégalité (1), on a $f_0(x) = E(x) \leq E(y) \leq E(y) + 1 = f_0(y)$.
Cas 4 : $x \notin \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$. Sous cette hypothèse, nous avons en particulier $E(x) \leq x < y$ et donc $E(x) < y$. Comme $E(x)$ et y sont des entiers relatifs, on a aussi $E(x) + 1 \leq y$, ce qui s'écrit $f_0(x) = E(x) + 1 \leq y = f_0(y)$.
Dans tous les cas, la conclusion est la même : $f_0(x) \leq f_0(y)$. Donc, la fonction f_0 est croissante.
Remarque: on aurait pu aussi représenter le graphe de f_0 pour se convaincre que $f_0 \in \mathcal{C}$.

(ii) Soit f un élément de $\mathcal{F}$ et $x \in \mathbb{R}$; il existe un unique entier relatif k ($= E(x)$) tel que

$$k \leq x < k + 1.$$

Comme f est croissante, $f(x) \leq f(k+1) = k + 1$ et donc, en remarquant que $k = E(x)$,

$$f(x) \leq E(x) + 1. \tag{2}$$

Nous allons conclure $f \leq f_0$ en discutant suivant les valeurs de x.
Cas 1 : $x \in \mathbb{Z}$; alors $f(x) = x = E(x) = f_0(x)$; en particulier $f(x) \leq f_0(x)$.
Cas 2 : $x \notin \mathbb{Z}$; alors, la relation (2) entraîne

$$f(x) \leq f(E(x) + 1) = E(x) + 1 = f_0(x).$$

Corrigé 1.9 (i) Cette question ne présente pas de difficultés et est laissée au soin du lecteur.

(ii) Prenons la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par l'égalité $P =]-1, 1[\times \{0\}$. Montrons que l'ensemble des majorants est égal à l'ensemble $M = \{(x, y) : x \geq 1\}$. Soit (x, y) un majorant de P ; nous avons $(a, 0) \leq_\ell (x, y)$ dès que $a \in]-1, 1[$, ce qui s'écrit $a < x$ ou ($a = x$ et $0 \leq y$) dès que $a \in]-1, 1[$. Si $x < 1$ on aura une contradiction en choisissant un élément a de $]-1, 1[$ tel que $x < a < 1$; donc $x \geq 1$. Réciproquement, il est clair que tout élément de M est un majorant de P. Montrer maintenant que P n'admet pas de borne supérieure revient

à prouver que M n'a pas de plus petit élément. Supposons que (x, y) soit un plus petit élément de M ; alors comme $(x, y-1)$ est un élement de M, $(x, y) \leq_\ell (x, y-1)$, ce qui implique $y \leq y-1$. On obtient une contradiction ; donc, M n'admet pas de plus petit élément et P n'a pas de borne supérieure. De la même façon, on démontre que P n'a pas de borne inférieure.
Remarquons que le résultat devient vrai si l'on suppose de plus la partie fermée.

Corrigé 1.10 (i) (x, y) est un majorant de la partie $P = \{(a, b), (c, d)\}$ si et seulement si $x \geq a$, $y \geq b$, $x \geq c$ et $y \geq d$, ce qui peut aussi s'écrire $x \geq \max\{a, c\}$ et $y \geq \max\{b, d\}$. Ainsi l'ensemble des majorants de la partie P est

$$M = \{(\max\{a, c\}, \max\{b, d\})\} + \mathbb{R}_+^2.$$

M a de façon évidente un plus petit élément qui est $(\max\{a, c\}, \max\{b, d\})$. La borne supérieure de la partie P est donc

$$(\max\{a, c\}, \max\{b, d\}).$$

On montre aussi que la borne inférieure de la partie P est

$$(\min\{a, c\}, \max\{b, d\}).$$

En général, ces quatre points forment un carré non aplati dont les diagonales sont $[(a, b), (c, d)]$ et $[\inf P, \sup P]$.

(ii) Fixons tout d'abord un entier m ; l'ensemble $\{(\cos n\frac{\pi}{4}, \sin n\frac{\pi}{4}) : n \geq m\}$ ne dépend pas de m et est toujours contituée de huit points. En généralisant le résultat du (i), il n'est pas difficile de voir que nous avons

$$\inf_{n \geq m} (\cos n\frac{\pi}{4}, \sin n\frac{\pi}{4}) = (-1, -1).$$

Maintenant en faisant varier m sur $\mathbb{N}$, nous concluons

$$\liminf\, (\cos n\frac{\pi}{4}, \sin n\frac{\pi}{4}) = \sup_m [\inf_{n \geq m} (\cos n\frac{\pi}{4}, \sin n\frac{\pi}{4})] = (-1, -1).$$

Corrigé 1.11 Soit (P, Q, R) un triangle non aplati du plan. Par hypothèse, nous avons par exemple

$$A_n = \begin{cases} [\mathrm{P}, \mathrm{Q}] & \text{si} \quad n \equiv 0(3)\ ; \\ [\mathrm{Q}, \mathrm{R}] & \text{si} \quad n \equiv 1(3)\ ; \\ [\mathrm{R}, \mathrm{P}] & \text{si} \quad n \equiv 2(3). \end{cases}$$

De façon évidente, l'ensemble des points qui appartiennent à une infinité de A_n est la réunion des trois segments, soit

$$\limsup A_n = [\mathrm{P}, \mathrm{Q}] \cup [\mathrm{Q}, \mathrm{R}] \cup [\mathrm{R}, \mathrm{P}],$$

tandis qu'il n'existe pas de points qui appartiennent à tous les A_n, pour n assez grand, soit

$$\liminf A_n = \emptyset.$$

Corrigé 1.12 Supposons que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante. Conformément aux généralités rappelées en début de chapitre,

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m,$$

où $B_m = \bigcap_{n\geq m} A_n$. En utilisant la croissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $B_m = A_m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Donc, on obtient :

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m.$$

Par définition de la limite supérieure d'ensembles

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m,$$

où $C_m = \bigcup_{n\geq m} A_n$. En utilisant la croissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, C_m est une suite constante. Donc, on obtient à nouveau la même limite :

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m.$$

Par un procédé analogue, si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, nous avons les égalités :

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m.$$

Corrigé 1.13 (i) Soit $x \in \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap \limsup_{n\in\mathbb{N}} B_n$; il existe un entier n_0 tel que x appartient à A_n, pour tout $n \geq n_0$, et de plus x appartient à une infinité de B_n. Alors x appartient à une infinité de $A_n \cap B_n$. La deuxième inclusion est immédiate puisque $A_n \cap B_n \subset B_n$.

(ii) La première inclusion est immédiate puisque $A_n \subset A_n \cup B_n$.
Soit $x \in \liminf_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n)$; il existe un entier n_0 tel que

$$x \text{ appartient à } A_n \cup B_n, \text{ pour tout } \ n \geq n_0. \tag{3}$$

Supposons que $x \notin \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$; x n'appartient qu'à un nombre fini de A_n et donc, il existe un autre entier n_1 tel que

$$x \text{ n'appartient à aucun des } \ B_n, \text{ pour tout } \ n \geq n_1. \tag{4}$$

Des relations (3) et (4), on déduit que, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, $x \in A_n$, ce qui exprime que $x \in \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Ainsi la deuxième inclusion est démontrée.

Corrigé 1.14 Montrons que $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = [-1,1]$. Comme $[-1,1] \subset A_n$ pour tout n, nous obtenons une première inclusion $[-1,1] \subset \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Supposons maintenant que $x \notin [-1,1]$. Si $x < -1$, x n'appartient à aucune partie de la forme A_{2p} ; et si $x > 1$, x n'appartient à aucune partie de la forme A_{2p+1}. Dans ces deux cas, on arrive à la même conclusion $x \notin \liminf A_n$, et ainsi la deuxième inclusion est démontrée.
Montrons que $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [-2,2]$. Soit $x \in [-2,2]$; si $x \in [-2,0]$, x appartient à toutes les parties de la forme A_{2p+1} et, si $x \in [0,2]$, x appartient à toutes les parties de la forme A_{2p}. Dans ces deux cas, on arrive à la même conclusion $x \in \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $[-2,2] \subset \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Supposons maintenant que $x \notin [-2,2]$. Si $x < -2$, x n'appartient à aucune partie de la forme A_{2p} et appartient seulement à un nombre fini de parties de la forme A_{2p+1} ; donc, x n'appartient qu'à un nombre fini de parties A_n, ce qui exprime que $x \notin \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Un même raisonnement peut être fait si $x > 2$, et ainsi la deuxième inclusion est démontrée.

Corrigé 1.15 Par hypothèse α est un minorant de A et, comme $\inf A$ est le plus grand des minorants, $\alpha \leq \inf A$. En prenant $A =]0,1]$ et $\alpha = 0$, on constate que l'on ne peut pas prendre une inégalité stricte.

Corrigé 1.16 Démontrons cette implication par contraposée ; supposons donc que, pour tout $a \in A$, $a \leq \alpha$. L'élément α est donc un majorant de A et, comme $\sup A$ est le plus petit des majorants, $\sup A \leq \alpha$.

Corrigé 1.17 (i) Supposons tout d'abord que A ne soit pas bornée supérieurement, c'est-à-dire, pour tout $M > 0$, il existe un élément a de A tel que $a > M$; alors $\sup A = +\infty$. Comme B est une partie non vide de $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, il existe un élément $b > 0$ de B ; nous avons $\sup B \geq b > 0$, ce qui implique $\sup A \sup B = +\infty$. D'autre part, du fait que la partie $\{b\}.A$ soit non bornée supérieurement et que $\{b\}.A \subset A.B$, on déduit que $A.B$ est non bornée supérieurement et donc $\sup A.B = +\infty$. L'égalité est donc vérifiée dans ce cas. Le résultat subsiste bien sûr encore si c'est B qui n'est pas bornée supérieurement.
Nous pouvons donc nous ramener au cas où A et B sont tous les deux bornées supérieurement et, dans ce cas, $A.B$ l'est aussi et nous avons $\sup A < +\infty$, $\sup B < +\infty$ et $\sup A.B < +\infty$.
Soient a un élément de A et b un élément de B. Des inégalités $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$, on tire $ab \leq \sup A \sup B$; l'élément $\sup A \sup B$ est donc un majorant de la partie $A.B$, ce qui implique $\sup(A.B) \leq \sup A \sup B$.
Réciproquement, soient a un élément de A et b un élément de B ; ab étant un élément de $A.B$, on a

$$ab \leq \sup(A.B),$$

ce qui entraîne, puisque a est un réel strictement positif,

$$b \leq \frac{\sup(A.B)}{a}.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout élément b de B, $\frac{\sup(A.B)}{a}$ est un majorant de B et donc

$$\sup B \leq \frac{\sup(A.B)}{a}.$$

De manière équivalente, nous avons

$$a \leq \frac{\sup(A.B)}{\sup B}$$

et $\frac{\sup(A.B)}{\sup B}$ devient un majorant de A et donc l'inégalité inverse

$$\sup A \ \sup B \ \leq \ \sup \ (A.B)$$

est vérifiée.

(ii) Soit $j \in I$; en multipliant entre elles les deux inégalités $a_j \leq \sup_{i\in I} a_i$ et $b_j \leq \sup_{i\in I} b_i$, on tire

$$a_j b_j \leq \sup_{i\in I} a_i . \sup_{i\in I} b_i.$$

Donc, $\sup_{i\in I} a_i . \sup_{i\in I} b_i$ est un majorant de la partie $\{a_j b_j : j \in J\}$, ce qui entraîne $\sup_{i\in I} a_i b_i \leq \sup_{i\in I} a_i . \sup_{i\in I} b_i$.
En général il n'y a pas égalité ; pour le constater il suffit de prendre $I = \{1,2\}$, $a_1 = b_2 = 1$ et $a_2 = b_1 = 2$.

(iii) Si dans la deuxième question de l'exercice, on pose $A = \{a_i : i \in I\}$ et $B = \{b_i : i \in I\}$, nous avons $A.B = \{a_i b_j : i \in I \text{ et } j \in J\}$, mais l'égalité $A.B = \{a_i b_i : i \in I\}$ est fausse en général.

Corrigé 1.18 Soit α un réel tel que

$$\alpha < \liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_m [\inf_{n\geq m} a_n].$$

D'après l'exercice 1.16, il existe un entier m_0 tel que $\alpha < \inf_{n\geq m_0} a_n$; en particulier, $\alpha < a_n$, pour tout $n \geq m_0$. Cela entraîne $\sup_{n\geq m} a_n \geq \alpha$, pour tout entier m, et donc, d'après l'exercice 1.15, $\inf_{m\in\mathbb{N}} [\sup_{n\geq m} a_n] \geq \alpha$. On conclut alors grâce à l'exercice 1.6.

Corrigé 1.19 (A1) $\Longrightarrow$ (A2). On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$. Choisissons dans un premier temps le cas où a est réel. Soit $\epsilon > 0$; il existe un entier n tel que, pour tout $\ell \geq n$,

$$a_\ell - \epsilon \leq a \leq a_\ell + \epsilon.$$

Donc, en passant à la borne supérieure et inférieure de chaque côté des inégalités :

$$\sup_{k\geq p} a_k - \epsilon \leq a \leq \inf_{k\geq p} a_k + \epsilon,$$

pour tout $p \geq n$. Et en réitérant ce procédé :

$$\inf_{p\geq n}\sup_{k\geq p} a_k - \epsilon \leq a \leq \sup_{p\geq n}\inf_{k\geq p} a_k + \epsilon.$$

Compte tenu du fait que les suites $\left(\sup_{k\geq p} a_k\right)_p$ et $\left(\inf_{k\geq p} a_k\right)_p$ sont respectivement décroissante et croissante, les inégalités précédentes s'écrivent :

$$\inf_{p\geq 0}\sup_{k\geq p} a_k - \epsilon \leq a \leq \sup_{p\geq 0}\inf_{k\geq p} a_k + \epsilon$$

ou par une écriture condensée

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} a_k - \epsilon \leq a \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} a_k + \epsilon.$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, en faisant tendre ϵ vers 0, on conclut

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} a_k \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} a_k.$$

L'égalité entre limite supérieure et inférieure découle alors de l'exercice 1.18. Le cas où a n'est pas réel se traite exactement de la même façon.

(A2) $\Longrightarrow$ (A1). Nous supposons maintenant $\limsup a_k = \liminf a_k = a$. Choisissons dans un premier temps le cas où $a = +\infty$; nous avons donc $\liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{p\geq 0}[\inf_{n\geq p} a_n] = +\infty$. Soit $M > 0$; d'après l'exercice 1.16, il existe un entier p tel que $\inf_{n\geq p} a_n > M$ et donc

$$\forall n \geq p,\ a_n \geq M.$$

Cela exprime que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
Nous laissons le soin au lecteur d'appliquer ce type de raisonnement dans les autres cas.

Corrigé 1.20 La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc, d'après l'exercice 1.19,

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0.$$

Comme $\lim_{p\to\infty} b_{2p+1} = -\infty$, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée inférieurement et donc $\liminf_{n\in\mathbb{N}} b_n = -\infty$. Montrons maintenant que $\limsup_{n\in\mathbb{N}} b_n = \ln 2$. Pour cela, fixons tout d'abord un entier m ; on a

$$\sup_{n\geq m} b_n = \begin{cases} \ln(2+\frac{1}{m+1}) & \text{si} \quad m \text{ est pair ;} \\ \ln(2+\frac{1}{m+2}) & \text{si} \quad m \text{ est impair.}\end{cases}$$

Maintenant, en faisant varier m, on conclut $\limsup_{n\in\mathbb{N}} b_n = \inf_{m\in\mathbb{N}}\sup_{n\geq m} b_n = \ln 2$.

Corrigé 1.21 (i) Il suffit de construire une injection de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$. A un couple (n,m) de $\mathbb{N}^2$ associons l'entier naturel $2^n 3^m$. Par l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, cette application est injective et donc $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

(ii) Bien sûr il suffit de vérifier que $\mathbb{Q}_+^\star$ est dénombrable. D'après le (i), il suffit de construire une injection de $\mathbb{Q}_+^\star$ vers $\mathbb{N}^2$. A un rationnel x positif non nul, nous pouvons lui associer l'unique paire (p,q) de $\mathbb{N}^2$ telle que $x = \dfrac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux. Cette application est trivialement injective, donc, $\mathbb{Q}_+^\star$ est dénombrable.

Corrigé 1.22 (i) Notons $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ à m éléments. Nous pouvons supposer que $m \geq 1$, sinon le résultat est immédiat. Pour prouver que $\mathcal{P}_m$ est dénombrable, il suffit de construire une injection de $\mathcal{P}_m$ vers $\mathbb{N}$. Notons $p_1, \cdots, p_m$ les m premiers nombres premiers de $\mathbb{N}$; à une partie A constituée des éléments $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ associons l'entier naturel $p_1^{a_1}.\cdots.p_m^{a_m}$. Par l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, cette application est injective et donc $\mathcal{P}_m$ est dénombrable.

(ii) L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est égale à $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_m$. D'après le (i), chaque $\mathcal{P}_m$ est dénombrable et comme nous avons affaire à une réunion dénombrable, la proposition 1.7 permet de conclure.

Corrigé 1.23 Nous rappelons au lecteur que, si

$$E = \{(x_i)_{i\geq 1} \subset \{0,1,\cdots,9\} :\ x_i \neq 9, \ \text{ pour une infinité d'indices } i\},$$

alors l'application représentation décimale $\delta :\ E \to [0,1[$ définie, pour tout $(x_i) \in E$, par :

$$\delta((x_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i} = \overline{0, x_1 \cdots x_i \cdots}$$

est une bijection.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $[0,1[$ soit dénombrable ; nous pouvons donc écrire

$$[0,1[= \{x^1, \cdots, x^n, \cdots\}.$$

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta^{-1}((x^n)) = (x_i^n)_{i\geq 1}$ et considérons la suite $(y_i)_{i\geq 1}$ de E définie, pour tout $i \geq 1$, par

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_i^i = 0\,; \\ 0 & \text{si} \quad x_i^i \neq 0. \end{cases}$$

Comme la i-ème valeur de la suite $(y_i)_{i\geq 1}$ est différente de x_i^i, la suite $(y_i)_{i\geq 1}$ ne fait pas partie de l'ensemble $\{(x_i^1), (x_i^2), \cdots, (x_i^n), \cdots\}$ et donc, $\delta^{-1}((y_i))$ n'est pas élément de $\{x^1, \cdots, x^n, \cdots\} = [0, 1[$. On obtient une contradiction, ce qui permet de conclure que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Corrigé 1.24 (i) Si $x \in]-\infty, 0[\cup\{\frac{1}{2}\}\cup]1, +\infty[$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ; donc, $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}\setminus[0,1]$ et $= 1$ si $x = \dfrac{1}{2}$.
Supposons maintenant que $x \in [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1]$; alors la suite $(f_n(x))$ prend alternativement les valeurs 1 et 0. Nous avons donc, à m fixé, $\sup_{n\geq m} f_n(x) = 1$ et par conséquent $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \inf_m[\sup_{n\geq m} f_n(x)] = 1$; de même, on montre que $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 0$.

(ii) Soit $x \in X$; nous allons envisager deux cas :
Cas 1 : $x \in \liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n$. D'une part, nous avons $1_{\liminf a_n}(x) = 1$. D'autre part, comme la suite $(1_{A_n}(x))$ est constante et égale à 1 à partir d'un certain rang, nous avons aussi $\liminf_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x) = 1$.
Cas 2 : $x \notin \liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n$. D'une part, nous avons $1_{\liminf a_n}(x) = 0$. D'autre part, comme la suite $(1_{A_n}(x))$ prend une infinité de fois la valeur 0, nous avons, à m fixé, $\inf_{n\geq m} 1_{A_n}(x) = 0$ et par conséquent

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x) = \sup_m[\inf_{n\geq m} 1_{A_n}(x)] = 0.$$

2 ESPACES MESURABLES

Dans ce chapitre X, Y sont des ensembles non vides.

2.1 Tribus

Définition 2.1 *(tribu). Une famille (non vide) $\mathcal{T}$ de parties de X est une tribu lorsqu'elle possède simultanément les trois propriétés suivantes :*

(i) $X \in \mathcal{T}$;

(ii) $\forall T \in \mathcal{T}$, $X\setminus T \in \mathcal{T}$ *(stabilité par passage au complémentaire) ;*

(iii) $(\forall n \in \mathbb{N}, T_n \in \mathcal{T}) \Longrightarrow \bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n \in \mathcal{T}$ *(stabilité par union dénombrable).*

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont dits parties $\mathcal{T}$-mesurables (ou mesurables) et $(X, \mathcal{T})$ est appelé espace mesurable.

On déduit facilement de la définition d'une tribu les propriétés suivantes :

Proposition 2.2 *Une tribu est stable par union finie, intersection dénombrable et différence.*

Exemple 2.3 *Les familles de parties suivantes sont des tribus :*

(1) la famille $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ des parties de X est appelée la tribu discrète ;

(2) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ est appelée la tribu grossière ;

(3) $X = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$.

Définition 2.4 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et Y une partie quelconque de X ; alors $\mathcal{T}_{|Y} = \{T \cap Y : T \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur Y appelée tribu trace de $\mathcal{T}$ sur Y.*

Comme une intersection de tribus sur X est encore une tribu, nous pouvons poser :

Définition 2.5 *(tribu engendrée par une famille de parties). Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de X; l'ensemble des tribus de parties de X qui contiennent $\mathcal{C}$, muni de la relation d'ordre $\subset$, admet un plus petit élément noté $t(\mathcal{C})$ qui est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ et qui est appelé la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.*

Exemple 2.6

(1) Si $X = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{b, c, d\}\}$ alors

$$t(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, X\} \ ;$$

(2) si $\mathcal{C} = \emptyset$ alors $t(\mathcal{C})$ est la tribu grossière.

Définition 2.7 *(tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$). Si $X = \mathbb{R}^d$, la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$, noté $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, est la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$. Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sont appelés les boréliens de $\mathbb{R}^d$.*

Définition 2.8 *(tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$). Si $X = \overline{\mathbb{R}}$, la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ engendrée par les parties de $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $A = \{+\infty\}$ ou $A = \{-\infty\}$ ou A est un ouvert de $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sont appelés les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$.*

Définition 2.9 *(tribu produit). Si $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ et si $\mathcal{T}_i$ est une tribu sur X_i, la tribu produit des tribus $\mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$ est la tribu $\mathcal{T}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_n$ sur X engendrée par les pavés $T_1 \times \cdots \times T_n$ où $T_i \in \mathcal{T}_i$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

Proposition 2.10

(i) *La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les demi-droites $]-\infty, a[$ où a décrit $\mathbb{R}$;*

(ii) *la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par les demi-droites achevées $[-\infty, a[$ où a décrit $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.11 *Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de X et Y une partie quelconque de X ; alors la tribu trace de $t(\mathcal{C})$ sur Y est engendrée par*

$$\mathcal{C}_{|Y} = \{C \cap Y : C \in \mathcal{C}\}.$$

Corollaire 2.12 *En particulier, nous avons :*

(i) *$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu trace de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur $\mathbb{R}$;*

(ii) *la tribu borélienne de $[\alpha, \beta]$ définie par $\mathcal{B}([\alpha, \beta]) = \mathcal{B}(\mathbb{R})_{|[\alpha,\beta]}$ est la tribu engendrée par les parties A de $[\alpha, \beta]$ qui sont les traces des ouverts de $\mathbb{R}$ sur $[\alpha, \beta]$.*

2.2 Fonctions mesurables

Définition 2.13 *(fonction mesurable). Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{V})$ deux espaces mesurables et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{V})$- mesurable (ou mesurable) si*

$$\forall V \in \mathcal{V}, f^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$

Définition 2.14 *Une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ qui est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^p), \mathcal{B}(\mathbb{R}^q))$-mesurable sera dite borélienne.*

Proposition 2.15

(i) *Une composée d'applications mesurables est mesurable.*

(ii) *Si $f : X \to Y$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{V})$- mesurable et $X_0 \subset X$, alors $f_{|X_0}$ est $(\mathcal{T}_{|X_0}, \mathcal{V})$-mesurable.*

(iii) *(principe de recollement). Soit $(T_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de X en éléments mesurables. Une application $f : X \to Y$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{V})$-mesurable si et seulement si chaque restriction $f_{|T_i}$ est $(\mathcal{T}_{|T_i}, \mathcal{V})$-mesurable.*

Théorème 2.16 *(critère de mesurabilité). Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{V})$ deux espaces mesurables et $\mathcal{C}$ une famille de parties telle que $t(\mathcal{C}) = \mathcal{V}$. Alors une application $f : X \to Y$ est mesurable si et seulement si pour toute partie $\mathcal{C}$-mesurable C, $f^{-1}(C)$ est $\mathcal{T}$-mesurable.*

Corollaire 2.17

(i) *Une application $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f < a\}$ est $\mathcal{T}$-mesurable.*

(ii) *Une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est borélienne si f est continue.*

(iii) *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y_i, \mathcal{V}_i)$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, des espaces mesurables et $f_i : X \to Y_i$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, n applications. Alors*

$$f = (f_1, \cdots, f_n) : X \to \prod_{i=1}^{n} Y_i$$

est $(\mathcal{T}, \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i)$-mesurable si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, f_i est $(\mathcal{T}, \mathcal{V}_i)$-mesurable.

Nous obtenons aussi comme corollaire de ce théorème la proposition suivante.

Corollaire 2.18

(i) *Si* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sont* $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$*-mesurable, il en sera de même pour* λf $(\lambda \in \overline{\mathbb{R}})$, fg, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, f^+, f^- *et pour* $\frac{1}{f}$ *et* $f+g$ *si ces deux dernières fonctions sont bien définies partout.*

(ii) *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions de* X *vers* $\overline{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$*-mesurables , il en sera de même pour* $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *et* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

2.3 Énoncés des exercices

Exercice 2.1 $(\star)$
Etant donné un ensemble X, vérifier que l'ensemble $\mathcal{T}$ des parties de X qui sont dénombrables ou dont le complémentaire est dénombrable est une tribu. Comparer cette tribu à la tribu engendrée par les singletons $\{x\}$ où x décrit X.

Exercice 2.2 $(\star\star\star)$
Plaçons-nous sur l'ensemble $\mathbb{N}$; comment caractériser la tribu engendrée par les parties à trois éléments de la forme $\{n, n+1, n+2\}$ où n décrit $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Exercice 2.3 $(\star\star)$
Soit X un ensemble quelconque. Si $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de tribus d'un ensemble X telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$, est-ce que $\mathcal{T} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n$ est aussi une tribu ?

Exercice 2.4 $(\star\star\star)$
Plaçons-nous sur l'ensemble $X = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; considérons $\mathcal{T} = \{A \subset X :\ \text{si } f \in A \text{ alors, pour tout } t \in \mathbb{R},\ f_t \in A\}$, où la fonction f_t est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par la relation $f_t(x) = f(x+t)$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu et donner les éléments de $\mathcal{T}$ de cardinal fini.

Exercice 2.5 $(\star\star)$
Soient $I = [0,1]$, $\Omega = I \times I$ et $\mathcal{T}$ la tribu des parties de I dénombrables ou dont le complémentaire est dénombrable (voir exercice 2.1). Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties Γ de Ω qui sont de la forme $\Gamma = (D_1 \times I) \cup (I \times D_2)$, où D_1 et D_2 sont deux parties dénombrables de I. Soit encore $\mathcal{U}$ l'ensemble des parties de Ω qui soit sont éléments de $\mathcal{A}$, soit dont le complémentaire est élément de $\mathcal{A}$.

(i) Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ est contenu dans la tribu $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$.

(ii) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par passage au complémentaire. Montrer aussi que $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.

(iii) Soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dont chacun s'écrit

$$\Gamma_n = (D_n \times I) \cup (I \times E_n).$$

On pose $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ ainsi que $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, puis $\Gamma = (D \times I) \cup (I \times E)$. Montrer que l'on a la relation :

$$\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n\Big) \setminus \Gamma \subset \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\Big) \times \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big).$$

En déduire que toute intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est réunion d'un élément de $\mathcal{A}$ et d'une partie dénombrable de Ω.

(iv) Soit $\Gamma = (D \times I) \cup (I \times E)$ et $\Gamma' = (D' \times I) \cup (I \times E')$ deux éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$. Montrer qu'alors on a la formule :

$$\Gamma \setminus \Gamma' = ((D \setminus D') \times I \cup I \times (E \setminus E')) \setminus ((D \setminus D') \times E' \cup D' \times (E \setminus E')).$$

En déduire que la différence ensembliste de deux éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$ privé d'une partie dénombrable de Ω.

(v) On définit $\mathcal{V}$ comme étant l'ensemble des parties Φ de Ω qui diffèrent des éléments de $\mathcal{U}$ d'un ensemble dénombrable, ce qu'on écrit plus précisément

$$\Phi \in \mathcal{V} \iff (\exists \Gamma \in \mathcal{U})(\exists D \text{ partie dénombrable de } \Omega)(\Gamma \setminus D \subset \Phi \subset \Gamma \cup D).$$

Montrer que $\mathcal{V}$ est une tribu de parties de Ω qui contient l'ensemble $\mathcal{U}$.

(vi) Montrer que, si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des singletons de Ω, la tribu $\mathcal{V}$ est engendrée par $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$.

(vii) Comparer les deux tribus $\mathcal{V}$ et $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$.

(viii) Montrer que la diagonale $\Delta_0 = \{(x,y) \in \Omega :\ x = y\}$ n'appartient pas à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$.

(ix) En déduire que l'application f de Ω dans I définie par

$$f(x,y) = \mid x - y \mid$$

n'est pas $(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.

Exercice 2.6 $(\star\star)$
Une partie A de $\mathbb{R}$ est appelé un F_σ (resp. G_δ) lorsqu'elle est réunion (resp. intersection) dénombrable de fermés (resp. d'ouverts).

(i) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des F_σ est stable par réunion dénombrable et par intersection finie.

(ii) Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des G_δ est stable par intersection dénombrable et par réunion finie.

(iii) Donner un exemple de G_δ qui n'est ni ouvert ni fermé.

(iv) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un F_σ et que tout fermé de $\mathbb{R}$ est un G_δ.

(v) Comparer la tribu engendrée par les F_σ à celle engendrée par les G_δ. Comparer ces deux tribus à la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.7
En utilisant éventuellement $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = t(\{]-\infty, a[: \ a \in \mathbb{R}\})$ prouver la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}) &= t(\{]a,b[: \ a<b\}) = t(\{[a,b] : \ a \le b\})\\ &= t(\{[a,b[: \ a<b\}) = t(\{]-\infty,a] : \ a \in \mathbb{Q}\}).\end{aligned}$$

Exercice 2.8 $(\star\star)$
En revenant à la définition de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, prouver l'égalité :

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = t(\{]a,+\infty] : \ a \in \mathbb{Q}\})$$

(on n'utilisera pas la proposition 2.10(ii)).

Exercice 2.9 $(\star\star)$
On se propose de démontrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient strictement la tribu engendrée par la famille de parties $\mathcal{C} = \{[a,b] : \ 0 \le a \le b\}$, notée $t(\mathcal{C})$. Pour cela, on pose

$$\mathcal{T} = \{T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ T \subset \mathbb{R}_+ \text{ ou } \mathbb{R}_-^* \subset T\}.$$

(i) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$. En déduire $t(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}$.

(ii) A l'aide d'une partie convenablement choisie dans $\mathbb{R}$, prouver que $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R})$; conclure.

(iii) Par un argument similaire, montrer que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ contient strictement $t(\{]a,+\infty[: \ a \in \mathbb{R}\})$.

Exercice 2.10 $(\star\star)$
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que $\inf\{g(t) : t \in \mathbb{R}\} = -\infty$, $\sup\{f(x) : \ t \in \mathbb{R}\} = +\infty$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) < g(t)$. Montrer que la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{[f(t), g(t)] : \ t \in \mathbb{R}\}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.11 $(\star\star)$
L'objectif de cet exercice est de comparer la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ à la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(i) Pour un couple (r,s) de rationnels et un entier $m \ge 1$, on définit

$$U(r,s,m) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \max(|\, x_1 - r \,|, |\, x_2 - s \,|) < \frac{1}{m}\}.$$

Montrer que, pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et pour tout élément x de U, il y a un $U(r,s,m)$ tel que $x \in U(r,s,m) \subset U$. En déduire que tout ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable des ouverts $U(r,s,m)$ qui sont contenus dans U.

(ii) En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, puis que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(iii) Si O est un ouvert de $\mathbb{R}$, montrer que

$$\mathcal{T}_O^1 = \{T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ O \times T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$$

est une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{T}_O = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(iv) Si B est un borélien de $\mathbb{R}$, montrer que

$$\mathcal{T}_B^2 = \{T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ T \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$$

est une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{T}_B^2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, puis que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2.12 $(\star\star)$
Soit f une application définie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable si et seulement si f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Exercice 2.13 $(\star)$
Vérifier que les applications E, f, g, h de l'ensemble $\mathbb{R}$ dans lui-même définies comme suit sont boréliennes :

- $E(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} : \ m \ge x\}$ (c'est la partie entière de x) ;
- $f(x) = e^x$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \notin \mathbb{Q}$;
- $g(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \sin(e^n x)$;
- $h(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} \arctan[E(x^n) - nx^2]$.

Exercice 2.14 $(\star\star)$
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f, g deux applications $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. Que peut-on dire des ensembles suivants :

$$A = \{x \in X : \ f(x) < g(x)\} \ ;$$

$$B = \{x \in X : \ f(x) \leq g(x)\} \ ;$$

$$C = \{x \in X : \ f(x) = g(x)\}.$$

Exercice 2.15 $(\star\star)$
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable si et seulement si l'ensemble $\{x \in X : \ f(x) > a\}$ est $\mathcal{T}$-mesurable, pour tout $a \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2.16 $(\star)$
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : \ X \to \mathbb{R}$ une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Que peut-on dire des ensembles suivants :

$$G(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : \ f(x) = t\} \ ;$$

$$\mathrm{Epi}(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : \ f(x) \leq t\}.$$

Exercice 2.17 $(\star)$
Montrer que si f est une fonction réelle et mesurable définie sur un espace mesurable quelconque et que si a est une constante réelle strictement positive, alors la fonction tronquée f_a définie par les formules :

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \mid f(x) \mid \leq a \ ; \\ a & \text{si } f(x) > a \ ; \\ -a & \text{si } f(x) < -a. \end{cases}$$

est une application mesurable.

Exercice 2.18 $(\star)$
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que l'ensemble de convergence ponctuelle de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à savoir $\{x \in X : \ (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}\}$ est mesurable.

Exercice 2.19 $(\star\star)$
Pour trois réels a, b, c, on désigne par $\mathrm{mil}\{a, b, c\}$ le réel situé en deuxième position si on les ordonne par ordre croissant. Si f, g, h sont trois applications mesurables de $(X, \mathcal{T})$ dans l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, montrer que l'application m de X dans $\mathbb{R}$ définie par la formule $m(x) = \mathrm{mil}\{f(x), g(x), h(x)\}$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Exercice 2.20 $(\star\star\star)$

(i) Soit $(f_x)_{x \in [0,1]}$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; on suppose que l'application $(x, t) \mapsto f_x(t)$ est continue. Montrer alors que l'application $f = \sup_{x \in [0,1]} f_x$ est borélienne.

(ii) Plus généralement, la borne supérieure de fonctions numériques mesurables est-elle encore mesurable ?

2.4 Corrigés des exercices

Corrigé 2.1 Evidemment $X \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire (par définition même de $\mathcal{T}$). Montrons que $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Si tous les ensembles T_n sont dénombrables alors $T \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$ est aussi dénombrable et $T \in \mathcal{T}$. Sinon, il existe un entier n_0 tel que T_{n_0} n'est pas dénombrable. Comme $T_{n_0} \in \mathcal{T}$, $X \setminus T_{n_0}$ est dénombrable et, puisque $X \setminus T \subset X \setminus T_{n_0}$, $X \setminus T$ est aussi dénombrable. Dans ce cas encore, on conclut $T \in \mathcal{T}$. Ainsi $\mathcal{T}$ est une tribu.
Montrons que $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{\{x\} : \ x \in X\}$. Soit $T \in \mathcal{T}$; si T est dénombrable, il est clairement réunion dénombrable de tous les singletons qui sont contenus dans T. Comme $t(\mathcal{C})$ est stable par union dénombrable, $T \in t(\mathcal{C})$. Si T n'est pas dénombrable, comme $T \in \mathcal{F}$, $X \setminus T$ est dénombrable et, par ce qui précède, $X \setminus T \in t(\mathcal{C})$. Comme $t(\mathcal{C})$ est stable par passage au complémentaire, encore $T \in t(\mathcal{C})$. Réciproquement, il est clair que $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ et comme $\mathcal{T}$ est une tribu $t(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}$.

Corrigé 2.2 Montrons que la tribu $\mathcal{T}$ engendrée par les parties

$$S_n \overset{\text{def}}{=} \{n, n+1, n+2\} \text{ pour } \ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

coïncide avec la famille $\mathcal{A}$ des parties A de $\mathbb{N}$ telles que $0 \in A \iff 1 \in A$. Comme $\{\ \{\ n, n+1, n+2\ \} : \ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \subset \mathcal{A}$ et comme $\mathcal{A}$ est une tribu (à vérifier par le lecteur), $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$. Réciproquement, comme $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie, $S_0 \cap S_2 = \{2\} \in \mathcal{T}$ et, pour $n \geq 4$, $\{n\} = S_{n-2} \cap S_{n-1} \cap S_n$ est élément de $\mathcal{T}$. Alors, comme $\mathcal{T}$ est stable par différence et par réunion finie, on a aussi $S_0 \setminus \{2\} = \{0, 1\} \in \mathcal{T}$ et $S_3 \setminus (\{4\} \cup \{5\}) = \{3\} \in \mathcal{T}$. La stabilité de $\mathcal{T}$ par réunion dénombrable permet alors de conclure que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$.

Corrigé 2.3 Non, pas nécessairement. En effet, plaçons-nous sur $X = \mathbb{N}$ et prenons $\mathcal{T}_n = t(\mathcal{C}_n)$, où $\mathcal{C}_n = \{\{0\}, \{2\}, \cdots, \{2n\}, \mathbb{N} \setminus \{0, 2, \cdots, 2n\}\}$. On montre aisément que la suite $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que les éléments de $\mathcal{T}_n$ sont les réunions d'éléments de $\mathcal{C}_n$; en particulier $2\mathbb{N} \notin \mathcal{T}_n$ et donc $2\mathbb{N} \notin \mathcal{T}$. Comme $T_n \overset{\text{def}}{=} \{2n\} \in \mathcal{T}_n$, on a aussi $T_n \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ ne peut pas être stable par

réunion dénombrable.
Remarque : on peut quand même démontrer, en toute généralité, que $\mathcal{T}$ est stable par réunion finie et par passage au complémentaire.

Corrigé 2.4 Evidemment $X \in \mathcal{T}$. Montrons que $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire. Soit $A \in \mathcal{F}$ et soient $f \in X \setminus A$ et $t \in \mathbb{R}$; alors $f_t \in X \setminus A$ car sinon $(f_t)_{-t} = f$ serait dans A. Montrons que $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ et soient $f \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ et $t \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $f \in A_{n_0}$ et donc $f_t \in A_{n_0}$, soit en particulier $f \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.
Montrons que les éléments de $\mathcal{T}$ de cardinal fini sont composés de fonctions constantes. Pour cela, il suffit de vérifier qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que la famille $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ est finie, est constante. Soit f une telle fonction ; nous avons donc $\{f_t : t \in \mathbb{R}\} = \{f^0, f^1, \cdots, f^{n-1}\}$, où $f^0, f^1, \cdots, f^{n-1}$ sont n fonctions distinctes. En toute généralité, nous pouvons supposer que l'on a $f^0 = f = f_0$. Considérons alors la partition $(E_i)_{i\in\{0,\cdots,n-1\}}$ de $\mathbb{R}$:

$$E_i = \{t \in \mathbb{R} : f_t = f^i\}, \text{ pour } i = 0, \cdots, n-1.$$

Comme $0 \in E_0$, on montre aisément que $(E_0, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. D'autre part, on vérifie aisément que, pour tout $t \in E_i$, $E_i = \{t\} + E_0$. Alors l'ensemble $\{E_0, \cdots, E_{n-1}\}$ peut être muni d'une structure de groupe à l'aide de la loi $\star$ définie par $E_i \star E_j = \{x + y : x \in E_i \text{ et } y \in E_j\}$. Ainsi $(\{E_0, \cdots, E_{n-1}\}, \star)$ est un groupe fini d'ordre n ; comme l'ordre de tout élément divise celui du groupe, on obtient $nE_i = E_0$, pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$. Puisque $(E_i)_{i\in\{0,\cdots,n-1\}}$ forme une partition de $\mathbb{R}$, cela entraîne que $n\mathbb{R} = E_0$, ce qui s'écrit $E_0 = \mathbb{R}$. Ainsi f est une fonction constante.

Corrigé 2.5 (i) Soit $\Gamma \in \mathcal{U}$. Si $\Gamma \in \mathcal{A}$, il existe deux parties dénombrables D_1 et D_2 de l'intervalle I telles que $\Gamma = (D_1 \times I) \cup (I \times D_2)$; comme $D_1 \times I$ et $I \times D_2$ sont éléments de la tribu $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ qui est stable par réunion, on obtient $\Gamma \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Si $\Gamma \notin \mathcal{A}$, alors $\Omega \setminus \Gamma \in \mathcal{A}$ et, d'après ce qui précède, $\Omega \setminus \Gamma \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Dans ce cas là encore, puisque $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ est stable par passage au complémentair, $\Gamma \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$.

(ii) La définition même de $\mathcal{U}$ permet de dire que $\mathcal{U}$ est stable par passage au complémentaire. Montrons que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable. Soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$; il existe deux parties dénombrables D_n et E_n de I telles que $\Gamma_n = D_n \times I \cup I \times E_n$. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = D \times I \cup I \times E$, où $D \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ et $E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ sont aussi des parties dénombrables. Il en résulte que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \in \mathcal{A}$.

(iii) Soit $(x, y) \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n\right) \setminus \Gamma$; si x n'appartient à aucun des D_n, il est nécessaire que y appartienne à tous les E_n. Alors $(x, y) \in \Gamma$, ce qui est impossible ; donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. De même, on montre $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Et ainsi $(x, y) \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right) \times \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$.
Montrons que toute intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est réunion d'un élément de $\mathcal{A}$ et d'une partie dénombrable de Ω. Soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$; il existe deux parties dénombrables D_n et E_n de I telles que $\Gamma_n = D_n \times I \cup I \times E_n$. Posons $D \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$, $E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} (D \times I) \cup (I \times E)$. On observe, comme D et E sont dénombrables, que $\Gamma \in \mathcal{A}$. On observe également que Γ est inclus dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ et que $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n\right) \setminus \Gamma$ est dénombrable, d'après l'inclusion démontrée ci dessus. D'où $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \Gamma \cup \left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n\right) \setminus \Gamma\right)$ est réunion d'un élément de $\mathcal{A}$ et d'une partie dénombrable de Ω.

(iv) Un élément (x, y) de Ω appartient à $\Gamma \setminus \Gamma'$ si l'assertion $\mathbf{p}$:

$$(x \in D \text{ ou } y \in E) \text{ et } (x \notin D' \text{ et } y \notin E')$$

est vraie. Un élément (x, y) de Ω appartient à

$$((D \setminus D') \times I \cup I \times (E \setminus E')) \setminus ((D \setminus D') \times E' \cup D' \times (E \setminus E'))$$

si l'assertion $\mathbf{q}$:

$$(x \in D \setminus D' \text{ ou } y \in E \setminus E') \text{ et } (x \notin D \setminus D'$$

$$\text{ou } y \notin E') \text{ et } (x \notin D' \text{ ou } y \notin E \setminus E')$$

est vraie. Il suffit donc de vérifier que $\mathbf{p}$ est vraie si et seulement $\mathbf{q}$ est vraie. Clairement $\mathbf{p}$ vraie entraîne $\mathbf{q}$ vraie. Supposons que $\mathbf{q}$ soit vraie ; alors si $x \in D'$, comme $(x \in D \setminus D' \text{ ou } y \in E \setminus E')$ est vraie, on déduit que $y \in E \setminus E'$. Mais alors comme $(x \notin D' \text{ ou } y \notin E \setminus E')$ est vraie, on aboutit à la contradiction $x \notin D'$. Ainsi $x \notin D'$. On montre de même que $y \notin E'$ et il est clair que $\mathbf{p}$ est vraie.
De cette égalité on déduit facilement le résultat énoncé.

(v) $\emptyset = (I \times \emptyset) \cup (\emptyset \times I)$ est dans $\mathcal{A}$, donc, Ω est dans $\mathcal{U}$ et en particulier dans $\mathcal{V}$. Montrons que $\mathcal{V}$ est stable par passage au complémentaire. Soit $V \in \mathcal{V}$; il existe $\Gamma \in \mathcal{U}$ et une partie dénombrable D de Ω tels que $\Gamma \setminus D \subset V \subset \Gamma \cup D$. En passant au complémentaire, on obtient $(\Omega \setminus \Gamma) \setminus D \subset \Omega \setminus V \subset (\Omega \setminus \Gamma) \cup D$. D'après (ii) $(\Omega \setminus \Gamma) \in \mathcal{U}$, donc $(\Omega \setminus V) \in \mathcal{V}$.
Montrons que $\mathcal{V}$ est stable par union dénombrable. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite

d'éléments de $\mathcal{V}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\Gamma_n \in \mathcal{U}$ et une partie dénombrable D_n de Ω tels que

$$\Gamma_n \setminus D_n \subset V_n \subset \Gamma_n \cup D_n. \tag{5}$$

Notons $P = \{n \in \mathbb{N} : \Gamma_n \in \mathcal{A}\}$ et donc $Q = \mathbb{N} \setminus P = \{n \in \mathbb{N} : \Omega \setminus \Gamma_n \in \mathcal{A}\}$.

- D'une part, d'après l'équation (5),

$$\bigcup_{n\in P}(\Gamma_n \setminus D_n) \subset \left(\bigcup_{n\in P}\Gamma_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in P} D_n\right) \subset \bigcup_{n\in P} V_n \subset \left(\bigcup_{n\in P}\Gamma_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in P} D_n\right)$$

et donc, $\bigcup_{n\in P} V_n$ diffère d'un élément de $\mathcal{A}$ par un ensemble dénombrable.

- D'autre part, d'après l'équation (5), pour $n \in Q$,

$$\Gamma'_n \setminus D_n \subset \Omega \setminus V_n \subset \Gamma'_n \cup D_n,$$

où $\Gamma'_n = \Omega \setminus \Gamma_n \in \mathcal{A}$. En passant à l'intersection, on obtient la suite d'inclusions :

$$\left(\bigcap_{n\in Q}\Gamma'_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in Q} D_n\right) = \bigcap_{n\in Q}(\Gamma'_n \setminus D_n) \subset \Omega \setminus \bigcup_{n\in Q} V_n$$

$$\subset \bigcap_{n\in Q}(\Gamma'_n \cup D_n) \subset \left(\bigcap_{n\in Q}\Gamma'_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in Q} D_n\right).$$

D'après (iii), $\bigcap_{n\in Q}\Gamma'_n$ est la réunion d'un élément de $\mathcal{A}$ et d'une partie dénombrable ; alors $\Omega \setminus \bigcup_{n\in Q} V_n$ diffère d'un élément de $\mathcal{A}$ par un ensemble dénombrable.

Il en résulte que $\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = \left(\Omega \setminus \bigcup_{n\in Q} V_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in P} V_n\right)$ diffère par un ensemble dénombrable de la différence de deux éléments de $\mathcal{A}$, qui d'après la question (iv) diffère elle-même d'un élément de $\mathcal{A}$ par un ensemble dénombrable. Par conséquent $\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \mathcal{V}$; comme il a déjà été établi que $\mathcal{V}$ est stable par passage au complémentaire, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \mathcal{V}$.

(vi) Clairement $\mathcal{A} \cup \mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ et, comme $\mathcal{V}$ est une tribu, $t(\mathcal{A} \cup \mathcal{S}) \subset \mathcal{V}$. Réciproquement, un élément quelconque de $\mathcal{V}$ est de la forme $(\Gamma \setminus D_1) \cup D_2$, où $\Gamma \in \mathcal{U}$ et D_1, D_2 sont dénombrables. On voit que les trois ensembles Γ, D_1 et D_2 sont dans la tribu $t(\mathcal{A} \cup \mathcal{S})$ et donc, que notre élément quelconque de $\mathcal{V}$ est bien élément de $t(\mathcal{A} \cup \mathcal{S})$.

(vii) Pour montrer que $\mathcal{V} \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$, d'après la question précédente, il suffit de vérifier que $\mathcal{A} \cup \mathcal{S} \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Soit $\Gamma \in \mathcal{A} \cup \mathcal{S}$; si $\Gamma \in \mathcal{A}$ alors nous avons $\Gamma = (I \times D_1) \cup (D_2 \times I)$, où D_1 et D_2 sont deux parties dénombrables de I.

Comme I, D_1 et D_2 appartiennent à $\mathcal{T}$, on déduit dans ce cas que $\Gamma \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Sinon $\Gamma \in \mathcal{S}$ et alors on peut écrire $\Gamma = \{(a,b)\} = (I \times \{b\}) \cap (\{a\} \times I)$. Cela entraîne à nouveau que $\Gamma \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$.
Réciproquement pour montrer que $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \subset \mathcal{V}$, il suffit de vérifier que $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ est inclus dans $\mathcal{V}$. Soit $A \times B$ un élément quelconque de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$. Si A et B sont tous deux dénombrables alors $A \times B$ est réunion dénombrable de singletons et appartient donc à $\mathcal{V}$, d'après la question précédente. Si un seul d'entre eux est dénombrable, par exemple A (et $I \setminus B$ est dénombrable), on peut écrire que $A \times B = (A \times I) \setminus (A \times (I \setminus B))$. On observe alors que $A \times B$ est la différence de $A \times I$ élément de $\mathcal{A}$ avec $A \times (I \setminus B)$ élément de $\mathcal{V}$, d'après le premier cas. $A \times B$ est donc élément de la tribu $\mathcal{V}$ comme différence de deux éléments de $\mathcal{V}$. Enfin, si A et B ne sont pas dénombrables, alors $I \setminus A$ et $I \setminus B$ le sont ; la formule $\Omega \setminus (A \times B) = ((I \setminus A) \times I) \cup (I \times (I \setminus B))$ entraîne que $\Omega \setminus (A \times B)$ est dans $\mathcal{A}$ et donc que $(A \times B)$ est dans $\mathcal{V}$.

(viii) Il suffit de vérifier que Δ_0 n'est pas dans la tribu $\mathcal{V}$. Supposons le contraire ; il existe alors $\Gamma \in \mathcal{U}$ et une partie dénombrable D de Ω telles que $\Gamma \setminus D \subset \Delta_0 \subset \Gamma \cup D$. Notons qu' il existe deux parties D_1 et D_2 dénombrables de I telles que $D \subset (D_1 \times I) \cup (I \times D_2)$. Deux situations sont alors possibles.

- $\Gamma \in \mathcal{A}$. Il existe donc D'_1 et D'_2 deux parties dénombrables de I telles que $\Gamma = (D'_1 \times I) \cup (I \times D'_2)$. De l'inclusion $\Delta_0 \subset \Gamma \cup D$, on déduit

$$\Delta_0 \subset ((D_1 \cup D'_1) \times I) \cup (I \times (D_2 \cup D'_2)).$$

Prenons alors un élément x dans l'ensemble non dénombrable $I \setminus (D_1 \cup D'_1 \cup D_2 \cup D'_2)$; le couple $(x,x) \in \Delta_0$ mais

$$(x,x) \notin ((D_1 \cup D'_1) \times I) \cup (I \times (D_2 \cup D'_2)),$$

ce qui contredit l'inclusion précédente.

- $\Omega \setminus \Gamma \in \mathcal{A}$; comme précédemment, on peut écrire

$$\Omega \setminus \Gamma = (D'_1 \times I) \cup (I \times D'_2).$$

En passant au complémentaire dans l'inclusion $\Gamma \setminus D \subset \Delta_0$, on déduit :

$$\Omega \setminus \Delta_0 \subset (\Omega \setminus \Gamma) \cup D \subset ((D_1 \cup D'_1) \times I) \cup (I \times (D_2 \cup D'_2)).$$

Prenons deux éléments distincts x et y dans l'ensemble non dénombrable $I \setminus (D_1 \cup D'_1 \cup D_2 \cup D'_2)$; le couple $(x,y) \in \Omega \setminus \Delta_0$ mais

$$(x,y) \notin (I \times (D_1 \cup D'_1)) \cup ((D_2 \cup D'_2) \times I),$$

ce qui contredit l'inclusion précédente.

(ix) Nous avons $f^{-1}(\{0\}) = \Delta_0$; or le singleton $\{0\}$ est $\mathcal{T}$-mesurable alors que l'on vient de démontrer que la diagonale Δ_0 n'est pas $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$-mesurable. Il en résulte que f n'est pas mesurable.

Corrigé 2.6 (i) Montrons que $\mathcal{S}$ est stable par réunion dénombrable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d' éléments de $\mathcal{S}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire $A_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p}$, où $F_{n,p}$ est un fermé ; et donc $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} F_{n,p}$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, A est un F_σ. Montrons que $\mathcal{S}$ est stable par intersection finie ; il est facile de voir qu'il suffit de le vérifier pour une intersection de deux éléments. Soient A_1 et A_2 deux éléments de $\mathcal{S}$. Avec des notations évidentes, nous avons

$$A \stackrel{\text{def}}{=} A_1 \cap A_2 = (\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{1,p}) \cap (\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{2,p}) = \bigcup_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (F_{1,p} \cap F_{2,p}).$$

Comme une intersection finie de fermés est un fermé et que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, A est bien un F_σ.

(ii) Comme le complémentaire d'un G_δ est un F_σ et vice versa, le résultat est une conséquence du (i).

(iii) $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé. Par contre $[0,1[$ est un G_δ, d'après l'égalité $[0,1[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n+1}, 1[$.

(iv) Montrons que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un F_σ. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$; posons $\mathcal{F} = \{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] : x \in \mathbb{Q} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*\}$. Comme $\mathcal{F}$ est dénombrable, il suffit de montrer l'égalité :

$$O = \bigcup_{F\in\mathcal{F}, F\subset O} F.$$

Soit donc $a \in O$; comme O est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset O$. Il est clair qu'un tel voisinage contient un élément F de $\mathcal{F}$ tel que $a \in F$; donc $x \in \bigcup_{F\in\mathcal{F}, F\subset O} F$. L'inclusion en sens contraire est immédiate. En passant au complémentaire, on montre que tout fermé de $\mathbb{R}$ est un G_δ.

(v) Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par $\mathcal{S}$. Soit $A \in \mathcal{S}$; on peut écrire $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Comme les fermés F_n appartiennent à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par réunion dénombrable $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et par conséquent $t(\mathcal{S}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement, d'après (iv), la famille des ouverts de $\mathbb{R}$ est incluse dans $\mathcal{S}$; alors il en est de même pour les tribus associées, soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset t(\mathcal{S})$.
On montre de la même manière que la tribu engendrée par les G_δ est la tribu borélienne.

Corrigé 2.7 Notons $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$ respectivement les familles de parties $\{]-\infty, a[: a \in \mathbb{R}\}$, $\{]a, b[: a < b\}$, $\{[a, b] : a \leq b\}$, $\{[a, b[: a < b\}$ et $\{]-\infty, a] : a \in \mathbb{Q}\}$; il suffit de montrer la suite d'inclusions

$$t(\mathcal{C}_1) \subset t(\mathcal{C}_2) \subset t(\mathcal{C}_3) \subset t(\mathcal{C}_4) \subset t(\mathcal{C}_5) \subset t(\mathcal{C}_1).$$

Soit $I \in \mathcal{C}_1$; il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $I =]-\infty, a[$. Comme $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, a[$ et comme $t(\mathcal{C}_2)$ est stable par réunion dénombrable, on a $I \in t(\mathcal{C}_2)$. Ainsi $\mathcal{C}_1 \subset t(\mathcal{C}_2)$, ce qui implique $t(\mathcal{C}_1) \subset t(\mathcal{C}_2)$. Les autres inclusions se démontrent de la même manière en utilisant successivement les égalités :

- $]a, b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a + \frac{1}{n+1}, b - \frac{1}{n+1}]$;
- $[a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a, b + \frac{1}{n+1}[$;
- $[a, b[=]-\infty, b[\cap(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}\backslash]-\infty, a_n]))$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels strictement croissante convergeant vers a ;
- $]-\infty, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, a + \frac{1}{n+1}[$.

Corrigé 2.8 Soit $a \in \mathbb{Q}$; la demi-droite $]a, +\infty[$ est élément de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ en tant qu'ouvert de $\mathbb{R}$ et $\{+\infty\}$ est élément de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, donc, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ étant stable par réunion finie, on en tire $]a, +\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. On en déduit l'inclusion

$$t(\{]a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}).$$

Pour la réciproque, il suffit de vérifier que

$$\{A \subset \mathbb{R} : A = \{+\infty\} \text{ ou } A = \{+\infty\} \text{ ou } A \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}$$
$$\subset t(\{]a, +\infty] : a \in \mathbb{Q}\}).$$

On reprend le même argument que dans l'exercice précédent en utilisant ici les égalités suivantes :

- Tout d'abord $\{+\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]n, +\infty]$;
- puis $\{-\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}\backslash]-n, +\infty[)$;
- et enfin si A est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe deux suites de rationnels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ (voir exercice 2.6) avec, pour n fixé,
$$[a_n, b_n] = (\bigcap_{p\in\mathbb{N}}]a_n - \frac{1}{p+1}, +\infty]) \cap (\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus (]b_n + \frac{1}{p+1}, +\infty])).$$

Corrigé 2.9 (i) Evidemment $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Montrons que $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire. Soit $T \in \mathcal{T}$; si $T \subset \mathbb{R}_+$ alors en passant au complémentaire $\mathbb{R}_-^* \subset \mathbb{R}\setminus T$ et donc $\mathbb{R}\setminus T \in \mathcal{T}$; si $\mathbb{R}_-^* \subset T$ alors $\mathbb{R}\setminus T \subset \mathbb{R}_+$ et encore $\mathbb{R} \setminus T \in \mathcal{T}$. Montrons que $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite déléments de $\mathcal{T}$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \subset \mathbb{R}_+$ alors $T \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n \subset \mathbb{R}_+$ et donc $T \in \mathcal{T}$. Sinon, il existe un entier n_0 tel que $\mathbb{R}_-^* \subset T_{n_0}$; puisque $T_{n_0} \subset T$, on obtient $\mathbb{R}_-^* \subset T$ et à nouveau $T \in \mathcal{T}$.

(ii) Il suffit de prendre par exemple $T =]-1,1[$. Comme $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ et comme $\mathcal{T}$ est une tribu, on obtient $t(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}$. Grâce à (ii), on conclut que $t(\mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(iii) Reprendre un argument similaire avec la nouvelle tribu

$$\mathcal{T}' = \{T \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) : \{-\infty, +\infty\} \subset T \text{ ou } \{-\infty, +\infty\} \cap T = \emptyset\}.$$

Corrigé 2.10 Comme tout segment de $\mathbb{R}$ est fermé donc borélien, on a $t(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement, soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Considérons la famille dénombrable de parties $\mathcal{J} = \{[f(t), g(t)] \cap [f(t'), g(t')] : (t,t') \in \mathbb{Q}^2\}$ et montrons que

$$O = \bigcup_{J\in\mathcal{J}, J\subset O} J.$$

Soit $a \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\epsilon > 0$, $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset O$. D'après les hypothèses, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(\alpha) < a$ et $g(\beta) > a$. Si $\alpha \leq \beta$ (resp. $\alpha \geq \beta$), considérons

$$t_1 = \sup\{t \in [\alpha,\beta] : g(t) = a\} \text{ (resp. } t_1 = \inf\{t \in [\beta,\alpha] : g(t) = a\}) ;$$

t_1 est bien réel, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Alors on a $f(t_1) < a = g(t_1)$ et, par un argument de continuité, on déduit qu'il existe un rationnel q_1 tel que $q_1 > t_1$ (resp. $q_1 < t_1$) et $f(q_1) < a < g(q_1) < a + \epsilon$. Par raison de symétrie, il existe un rationnel q_2 tel que $a - \epsilon < f(q_2) < a < g(q_2)$. Alors $a \in J$, où $J \overset{\text{def}}{=} [f(q_1), g(q_1)] \cap [f(q_2), g(q_2)]$ vérifie $J \subset]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset O$; donc $a \in \bigcup_{J\in\mathcal{J}, J\subset O} J$. La réciproque étant évidente, l'égalité est prouvée. La tribu $t(\mathcal{C})$ étant stable par union dénombrable, on obtient $O \in t(\mathcal{C})$. Ainsi la définition de la tribu borélienne conduit à $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset t(\mathcal{C})$. D'où l'égalité.

Corrigé 2.11 (i) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $x = (x_1, x_2)$ un élément de U. Par définition d'un ouvert, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $U(x_1, x_2, m) \subset U$. Par densité de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$, nous pouvons choisir deux rationnels q_1 et q_2 tels que $x_1 - \frac{1}{2m} < q_1 < x_1$ et $x_2 - \frac{1}{2m} < q_2 < x_2$. Cela entraîne que $x \in U(q_1, q_2, 2m)$. D'autre part, si $(y_1, y_2) \in U(q_1, q_2, 2m)$, par l'inégalité triangulaire

$$| y_1 - x_1 | \leq | y_1 - q_1 | + | q_1 - x_1 | < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} ;$$

de même, on a $| y_2 - x_2 | < \frac{1}{m}$. Ces deux inégalités strictes expriment que $(y_1, y_2) \in U(x_1, x_2, m)$ et donc $U(q_1, q_2, 2m) \subset U(x_1, x_2, m) \subset U$. Nous avons donc prouvé que

$$U = \bigcup_{\{(q_1,q_2,m)\in\mathbb{Q}^2\times\mathbb{N}^\star : U(q_1,q_2,m)\subset U\}} U(q_1, q_2, m). \tag{6}$$

(ii) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$; montrons que $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ en utilisant l'égalité (6). Pour cela, remarquons que

$$U(q_1, q_2, m) =]q_1 - \frac{1}{m}, q_1 + \frac{1}{m}[\times]q_2 - \frac{1}{m}, q_2 + \frac{1}{m}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

et $\{(q_1, q_2, m) \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{N}^\star : U(q_1, q_2, m) \subset U\}$ est dénombrable car $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{N}^\star$ l'est. Puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par union dénombrable, l'égalité (6) entraîne que $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$, on conclut que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(iii) Comme un produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}_O^1$ contient les ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{T}_O^1$. La stabilité par passage au complémentaire et par réunion dénombrable est une conséquence des deux relations :

$$O \times (\mathbb{R} \setminus T) = (O \times \mathbb{R}) \setminus (O \times T) \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (O \times T_n) = O \times \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right).$$

Comme $\mathcal{T}_O$ est une tribu qui contient les ouverts de $\mathbb{R}$, on déduit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_O$. La réciproque étant évidente, on a l'égalité $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_O$.

(iv) Pour montrer que $\mathcal{T}_B^2$ est une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, il suffit de reprendre les arguments du (iii) en utilisant cette question. On en déduit que $\mathcal{T}_B^2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc, que tout pavé $A \times B$, où A et B sont des boréliens, est un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Comme la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les élément de cette forme, on conclut $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé 2.12 Il suffit d'appliquer les propositions 2.15(iii) et 2.12(i).

Corrigé 2.13 (i) Pour $k \in \mathbb{Z}$, l'intervalle semi-ouvert $T_k = [k, k+1[$ est un borélien. En utilisant le principe de recollement (voir proposition 2.15 (iii)) avec la partition $(T_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, la fonction $E_n = \sum_{k=-n}^{n} k 1_{[k,k+1[}$ est borélienne pour tout entier n. On conclut grâce à la proposition 2.18 (ii), en remarquant que $E = \lim_{n\to\infty} E_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

(ii) Nous notons f_1 la fonction exponentielle et f_2 la fonction identité définies sur $\mathbb{R}$. f_1 et f_2 sont continues donc boréliennes. D'après la proposition 2.15 (ii), les applications $f_{1|\mathbb{Q}}$ et $f_{2|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ sont alors mesurables. On a $f_{|\mathbb{Q}} = f_{1|\mathbb{Q}}$

qui est donc mesurable. De plus, d'après le corollaire 2.18, $f_{|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \dfrac{1}{f_{2|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}$ est mesurable. Ainsi, par le principe du recollement ($\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$ est une réunion dénombrable de singletons donc est un borélien), on conclut que f est borélienne.

(iii) Considérons, pour tout entier n, la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \sin(e^n x)$; on a $g(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Comme la fonction g_n est continue, elle est en particulier borélienne et, grâce à la proposition 2.18 (ii), g est aussi borélienne.

(iv) Considérons, pour tout entier n, la fonction $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = \arctan[E(x^n) - nx^2]$; on a $h(x) = \limsup_{n\to\infty} h_n$. Grâce à la proposition 2.18 (ii), il suffit de vérifier que, pour tout entier n, h_n est borélienne. D'une part, pour n entier fixé, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue donc borélienne et d'autre part, on a vu à la question (i) que la fonction E est mesurable ; par conséquent, par composition, la fonction $x \mapsto E(x^n)$ est aussi borélienne. De même, la fonction $x \mapsto nx^2$ est borélienne, donc, en faisant la différence, $x \mapsto E(x^n) - nx^2$ est borélienne. Enfin, comme la fonction arctan est continue, donc borélienne, on conclut que h_n est borélienne par composition.

Corrigé 2.14 Posons

$$Z = \{x \in X : \ f(x) = g(x) = +\infty \text{ ou } f(x) = g(x) = -\infty\}$$

et considérons les deux nouvelles applications $f' = f1_{X\setminus Z}$ et $g' = g1_{X\setminus Z}$ qui sont mesurables. Remarquons que $f' - g'$ est définie partout et donc, d'après la proposition 2.18 (i), est mesurable. Avec ces notations, nous avons

$$A = (f' - g')^{-1}([-\infty, 0[) \ ;$$

$$B = (f' - g')^{-1}([-\infty, 0]) \ ;$$

$$C = (f' - g')^{-1}(\{0\}).$$

A, B et C sont donc les images réciproques d'éléments de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ par l'application mesurable $f' - g'$. Donc, A, B et C sont $\mathcal{T}$-mesurables.

Corrigé 2.15 D'après l'exercice 2.8, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = t(\{]a, +\infty] : \ a \in \mathbb{Q}\})$. Alors, d'après le critère de mesurabilité, f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable si et seulement si, pour tout $V =]a, +\infty]$ ($a \in \mathbb{Q}$), $f^{-1}(V)$ est $\mathcal{T}$-mesurable. On conclut facilement en remarquant que $f^{-1}(]a, +\infty]) = \{x \in X : \ f(x) > a\}$, pour tout $a \in \mathbb{Q}$.

Corrigé 2.16 Pour alléger les écritures, nous noterons $\mathcal{V}$ la tribu produit $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathrm{G}(f)$ et $\mathrm{Epi}(f)$ sont $\mathcal{V}$-mesurables. Pour cela, notons $\phi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$, par $\phi(x,t) = f(x) - t$. Alors, nous avons

$$\mathrm{G}(f) = \phi^{-1}(\{0\}) \ \text{ et } \ \mathrm{Epi}(f) = \phi^{-1}(]-\infty, 0]).$$

Comme $\{0\}$ et $]-\infty, 0]$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$, pour conclure il suffit de vérifier que l'application ϕ est $(\mathcal{V}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Il est clair que l'application identité i de $X \times \mathbb{R}$ dans lui-même est $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$-mesurable. Donc, d'après la proposition 2.17 (iii), la première composante i_1 est $(\mathcal{V}, \mathcal{T})$-mesurable et la deuxième composante i_2 est $(\mathcal{V}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable ; en particulier la composée $f \circ i_1$ est $(\mathcal{V}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, d'après la proposition 2.15(i). Avec ces notations, $\phi = f \circ i_1 - i_2$ est la différence de deux fonctions $(\mathcal{V}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables, donc est elle-même mesurable, d'après la proposition 2.18 (i).

Corrigé 2.17 Considérons la partition suivante de X : $T_1 = \{-a \leq f \leq a\}$, $T_2 = \{f < -a\}$ et $T_3 = \{f > a\}$. Comme $[-a, a]$ est un borélien et comme f est mesurable, $f^{-1}([-a, a]) = T_1$ est une partie mesurable ; de même, on montre que les parties T_2 et T_3 sont mesurables. D'après la proposition 2.15 (ii), $f_{a|T_1}$ est mesurable ; de manière évidente, $f_{a|T_2}$ et $f_{a|T_3}$ le sont aussi. Par le principe de recollement, on conclut que f_a est mesurable.

Corrigé 2.18 Dans l'exercice 1.19, nous avons vu que

$$\begin{aligned}&\{x \in X : \ (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}}\}\\ &\quad = \{x \in X : \ \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\}.\end{aligned}$$

On utilise alors l'exercice 2.14 en remarquant, d'après la proposition 2.18 (ii), que les applications $\liminf_{n\to\infty} f_n$ et $\limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ sont mesurables.

Corrigé 2.19 Il suffit d'appliquer la formule

$$\mathrm{mil}\{a, b, c\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}, \max\{b, c\}\}$$

et d'utiliser la proposition 2.18 (i).

Corrigé 2.20 (i) Soit $t \in \mathbb{R}$; puisque $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{Q}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} f_x(t) \leq \sup_{x\in[0,1]} f_x(t).$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse. Soit $x' \in [0,1]$; puisque $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels de $[0,1]$ convergeant vers x'. Alors comme l'application $x \mapsto f_x(t)$ est continue,

$$f_{x'}(t) = \lim_{n\to\infty} f_{x_n}(t) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{x_n}(t) \leq \sup_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} f_x(t).$$

En passant à la borne supérieure sur les x' de $[0,1]$, on obtient

$$\sup_{x\in[0,1]} f_x(t) \leq \sup_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} f_x(t).$$

Donc, $f = \sup_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} f_x$, où $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est un ensemble dénombrable et f_x est une fonction continue, donc borélienne. La borne supérieure d'une famille dénombrable de fonctions boréliennes étant borélienne d'après la proposition 2.18 (ii), on conclut que f est aussi une application borélienne.

(ii) Non, bien sûr. Il suffit de prendre la famille de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: $(1_{\{x\}})_{x\in[0,1]}$; on munit l'ensemble de départ $\mathbb{R}$ de la tribu $\mathcal{T}$ de l'exercice 2.1 et l'ensemble d'arrivée de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\{x\}$ est $\mathcal{T}$-mesurable, f_x est $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Mais par contre, comme $[0,1]$ n'est pas $\mathcal{T}$-mesurable, $\sup_{x\in[0,1]} f_x = 1_{[0,1]}$ n'est pas $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

3 MESURES

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 3.1 *(mesure). Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable. Une mesure μ sur $(X,\mathcal{T})$ est une application*

$$\begin{array}{rccl} \mu: & \mathcal{T} & \to & \mathbb{R}_+\cup\{+\infty\} \\ & T & \mapsto & \mu(T) \end{array}$$

qui vérifie les deux propriétés suivantes

(i) $\mu(\emptyset)=0$ *;*

(ii) *si $T_0, T_1, \cdots, T_n, \cdots$ sont des parties mesurables deux à deux disjointes, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n) \qquad (\sigma\text{-additivité}).$$

On dit alors que $(X,\mathcal{T},\mu)$ est un espace mesuré.

Remarquons que la formule est vraie aussi pour un nombre fini de parties mesurables et on dit dans ce cas que la mesure μ est additive.
On dit que la mesure μ est finie si $\mu(X) < +\infty$ et que la mesure μ est σ-finie s'il existe des parties mesurables $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ telles que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n = X$ et $\mu(X_n) < +\infty$, pour tout n.
Donnons quelques exemples de mesures.

Exemple 3.2 Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable.

(1) Si $x \in X$, la mesure de Dirac au point x, notée δ_x, est définie par

$$\delta_x(T) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin T\,; \\ 1 & \text{si} \quad x \in T. \end{cases}$$

(2) La mesure de dénombrement, notée μ_d, est définie par la formule

$$\mu_d(T) = \text{card}\, T.$$

(3) Si $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré et si Y est une partie mesurable de X, alors la mesure induite par μ sur Y, notée $\mu_{|Y}$, est définie, pour $T \in \mathcal{T}_{|Y}$, par

$$\mu_{|Y}(T) = \mu(T).$$

(4) Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{S})$ un espace mesurable et $f : X \to Y$ une application mesurable. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mu_T : \mathcal{S} & \to & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ S & \mapsto & \mu(f^{-1}(S)) \end{array}$$

est une mesure sur $(Y, \mathcal{S})$ dite mesure image de μ par f (voir le chapitre 4 pour les propriétés de la mesure image).

Proposition 3.3 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré ; alors la mesure μ vérifie les propriétés suivantes.*

(i) *Si T_1, T_2 sont mesurables et $T_1 \subset T_2$ alors*

$$\mu(T_1) \leq \mu(T_2) \qquad [\textit{croissance}].$$

(ii) *Si $T_0, \cdots, T_n, \cdots$ sont des parties mesurables, alors :*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n) \qquad [\sigma\textit{sous-additivité}].$$

(iii) *Si $T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_n \subset \cdots$ sont des parties mesurables, alors la suite $(\mu(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et :*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(T_n) \qquad [\textit{stabilité par limite croissante}].$$

(iv) *Si $T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_n \supset \cdots$ sont des parties mesurables et si $\mu(T_0) < +\infty$, alors la suite $(\mu(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et :*

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(T_n) \qquad [\textit{stabilité par limite décroissante}].$$

(v) *Si T_1, T_2 sont des parties mesurables alors*

$$\mu(T_1 \cup T_2) + \mu(T_1 \cap T_2) = \mu(T_1) + \mu(T_2).$$

Dans la pratique, pour montrer qu'une application μ est une mesure, il est parfois commode d'utiliser la caractérisation suivante.

Proposition 3.4 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et μ une application de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A1) *μ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$;*

(A2) *μ vérifie les deux propriétés suivantes :*

(i) *si T_1 et T_2 sont des parties mesurables disjointes, alors*

$$\mu(T_1 \cup T_2) = \mu(T_1) + \mu(T_2) ;$$

(ii) *si $T_0 \subset T_1 \subset \cdots \subset T_n \subset \cdots$ sont des parties mesurables, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(T_n).$$

3.2 Théorèmes fondamentaux

Les deux théorèmes qui suivent sont des théorèmes difficiles qui jouent un rôle principal dans la théorie de la mesure.

Théorème 3.5 *(théorème d'existence des mesures). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $\mathcal{U}$ une famille de parties de X telles que :*

(a) *$t(\mathcal{U}) = \mathcal{T}$;*

(b) *si U_1 et U_2 sont éléments de $\mathcal{U}$ alors $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$;*

(c) *si U et V sont éléments de $\mathcal{U}$ avec $U \subset V$, alors $V \setminus U$ peut s'écrire comme réunion finie d'éléments disjoints de $\mathcal{U}$;*

(d) *il existe des éléments $U_1, \cdots, U_n, \cdots$ de $\mathcal{U}$ tels que $X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n$.*

Si une application

$$m : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

est σ-additive, i.e., $m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(U_n)$ dès que $U_0, \cdots, U_n, \cdots$ sont des éléments de $\mathcal{U}$ disjoints deux à deux avec $\bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n \in \mathcal{U}$, on peut prolonger m en une mesure sur $(X, \mathcal{T})$.

Théorème 3.6 *(théorème d'unicité des mesures). Soient μ_1, μ_2 deux mesures sur $(X, \mathcal{T})$ telles que*

$$\mu_1(C) = \mu_2(C) < +\infty \qquad \text{pour tout } C \in \mathcal{C},$$

où $\mathcal{C}$ est une famille de parties stables par intersection finie et vérifiant l'égalité $t(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$. Si de plus il existe des éléments $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ de $\mathcal{C}$ tels que $X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n$ alors :

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Ces théorèmes permettent de définir les mesures suivantes.

• La mesure de Borel sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est définie grâce au corollaire suivant.

Corollaire 3.7 *Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée dans ce livre λ, vérifiant :*

$$\lambda([a, b[) = b - a, \quad \text{pour } a \leq b.$$

On l'appelle la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$.

• La mesure produit est définie grâce au corollaire suivant.

Corollaire 3.8 *Soient $(X_i, \mathcal{C}_i, \mu_i)(i = 1, 2)$ deux espaces mesurés tels que les mesures μ_1 et μ_2 soient σ-finies. Il existe une unique mesure sur l'espace mesurable produit $(X_1 \times X_2,\ \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$, notée $\mu_1 \otimes \mu_2$, vérifiant la condition*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(T_1 \times T_2) = \mu_1(T_1).\mu_2(T_2), \text{ pour tout } T_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ et } T_2 \in \mathcal{C}_2.$$

On l'appelle la mesure produit des mesures μ_1 et μ_2.

• La mesure associée à une fonction de répartion est définie grâce au corollaire suivant.

Corollaire 3.9 *Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; les assertions suivantes sont équivalentes.*

(A1) *F est croissante, continue à droite, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ et*

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) < +\infty ;$$

(A2) *il existe une mesure finie μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que*

$$F(x) = \mu(]-\infty, x[), \quad \text{pour tout réel } x.$$

Dans ce cas, la fonction F s'appelle fonction de répartition de μ et la mesure μ associée à la fonction F est unique. On a aussi, pour tous réels $a \leq b$,

$$F(b) - F(a) = \mu([a, b[).$$

3.3 Ensembles négligeables

Définition 3.10 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'un élément T de $\mathcal{T}$ est μ-négligeable (ou négligeable) si*

$$\mu(T) = 0.$$

Remarquons que, d'après la proposition 1.7, une réunion dénombrable de parties négligeables est un ensemble négligeable.

Définition 3.11 *Une propriété $\{\mathcal{P}(x)\ :\ x \in X\}$ sera dite vraie μ-presque partout (ou presque partout), et on écrira $\mathcal{P}$ est vraie μ-p.p. (ou p.p.), s'il existe un ensemble négligeable N tel que, pour tout $x \in X \setminus N$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.*

3.4 Énoncés des exercices

Exercice 3.1 ($\star$)
Soit X un ensemble infini non dénombrable, $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties de X qui sont, soit dénombrables, soit de complémentaires dénombrables et μ l'application de $\mathcal{T}$ dans $[0, +\infty]$ définie par :

$$\begin{cases} \mu(T) = 0 & \text{pour } T \text{ dénombrable ;} \\ \mu(T) = 1 & \text{pour } T \text{ non dénombrable.} \end{cases}$$

Vérifier que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré.

Exercice 3.2 ($\star$)
Soient $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, n mesures définies sur une même tribu $\mathcal{T}$. Soient également $a_1, a_2, \cdots, a_n$, n réels positifs. On définit alors une application ν de $\mathcal{T}$ dans $[0, +\infty]$ en posant, pour tout $T \in \mathcal{T}$,

$$\nu(T) = \sum_{k=1}^{n} a_k.\mu_k(T).$$

Cette application ν est-elle une mesure sur la tribu $\mathcal{T}$?

Exercice 3.3 ($\star\star$)
Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures définies sur une même tribu $\mathcal{T}$ de parties d'un ensemble X. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mu_n(X) = 1$. On définit une application ν de $\mathcal{T}$ dans $[0, +\infty]$ par la formule :

$$\nu(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mu_n(T)}{2^{n+1}}.$$

Vérifier que cette application ν est une mesure sur $\mathcal{T}$ telle que $\nu(X) = 1$.

Exercice 3.4 $(\star\star)$
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(A1) la mesure μ est σ-finie ;

(A2) il existe une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables telle que la famille $\{Y_0, Y_1, \cdots, Y_n, \cdots\}$ forme une partition de X avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(Y_n) < +\infty$.

Exercice 3.5 $(\star\star)$
Montrer qu'il n'existe pas de mesure non nulle sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$, finie et invariante par translation.

Exercice 3.6 $(\star\star)$
Donner un exemple d'espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et de suite décroissante de parties $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tels que :

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n\right) \neq \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(T_n).$$

Indication : considérer une situation où $\mu(T_0) = +\infty$; sinon il y aura égalité, d'après la propriété de stabilité de la mesure μ par passage à la limite décroissante.

Exercice 3.7 $(\star\star)$
Etant donnés un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties $\mathcal{T}$-mesurables de X, montrer qu'on a l'inégalité :

$$\mu(\liminf_{n\in\mathbb{N}} T_n) \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \mu(T_n).$$

Indication : on remarquera que, pour tout entier $k \geq n$, on a l'inclusion

$$\bigcap_{m\geq n} T_n \subset T_k.$$

Exercice 3.8 $(\star\star)$
Soit E un ensemble donné.

(i) On suppose dans cette question que E est fini. Soit une application $\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, pour toutes parties disjointes A et B de E,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{7}$$

Prouver l'existence d'une partie F de E telle que, pour tout $A \subset E$,

$$\mu(A) = 0 \Longleftrightarrow A \subset F. \tag{8}$$

(ii) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{N}$. On considère l'application

$$\begin{array}{llll} \mu_1 : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lcl} \mu_1(A) & = & 0 \text{ si } \mathrm{card}(A) < +\infty \text{ ;} \\ \mu_1(A) & = & +\infty \text{ sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

(a) Montrer que μ_1 vérifie la relation (7) mais qu'il n'existe pas de partie F de $\mathbb{N}$ vérifiant la relation (8).

(b) Montrer que la conclusion de la question (i) est satisfaite si l'on remplace la condition (7) par la condition :

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n), \tag{9}$$

pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties disjointes deux à deux.

(iii) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$.

(a) On considère l'application $\mu_2 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$A \mapsto \left\{ \begin{array}{lcl} \mu_2(A) & = & 0 \text{ si } 0 \notin A \text{ ;} \\ \mu_2(A) & = & 1 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

Trouver une partie F vérifiant la relation (8).

(b) Montrer que si μ vérifie la condition (9), alors il n'existe pas nécessairement de partie F vérifiant (8).

Exercice 3.9 $(\star\star)$
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathcal{A}$ une famille de parties de X incluse dans $\mathcal{T}$ telle que

$$\text{si } \ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \text{ et } \ A \neq B \text{ alors } \ A \cap B = \emptyset. \tag{10}$$

Si $n \geq 1$, on pose

$$\mathcal{C}_n = \{A \in \mathcal{A} :\ \mu(A \cap E) \geq \frac{\mu(E)}{n}\},$$

où E est un élément de $\mathcal{T}$ tel que $0 < \mu(E) < +\infty$, et on pose aussi

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} :\ \mu(A \cap E) \neq 0\}.$$

(i) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{C}_n$ est fini.

(ii) Montrer que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{C}_n$ et en déduire que $\mathcal{C}$ est dénombrable.

On considère dorénavant une fonction positive f sur $X = [0,1]$ à valeurs finies et $\mathcal{T}$ est la tribu des parties de $[0,1]$. Pour $T \in \mathcal{T}$, on pose

$$\mu(T) = \sup\left\{\sum_{t\in A} f(t) : \ A \text{ fini et } A \subset T\right\},$$

avec la convention $\sum_{\emptyset} = 0$.

(iii) Montrer que la famille $\mathcal{A}$ des singletons vérifie l'hypothèse (10).

(iv) Calculer $\mu(\{x\})$, pour $x \in X$.

(v) Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{T}$.

(vi) Montrer que si $\mu([0,1]) < +\infty$, alors $f(t) = 0$ sauf sur un ensemble dénombrable.

Exercice 3.10 $(\star\star)$
Soit a_n le terme général d'une série convergente à termes réels et positifs. Pour A partie finie de l'ensemble $\mathbb{N}$, on pose :

$$\phi(A) = \sum_{n\in A} a_n,$$

avec la convention $\sum_{\emptyset} = 0$. Pour une partie T quelconque de $\mathbb{N}$, on pose :

$$\mu(T) = \sup\{\phi(A) : \ A \ \text{ finie et } A \subset T\},$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des parties finies A de l'ensemble T.

(i) Quelle est la valeur de $\mu(\mathbb{N})$?

(ii) Montrer que $\mu(T)$ est fini, quelle que soit la partie T de l'ensemble $\mathbb{N}$.

(iii) Pour une partie finie A de l'ensemble $\mathbb{N}$, comparer les valeurs de $\phi(A)$ et de $\mu(A)$.

(iv) L'application μ est-elle une mesure sur la tribu des parties de $\mathbb{N}$?

(v) On s'intéresse maintenant au cas particulier $a_n = (n+1)^{-s}$, où s est un paramètre réel.

(a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge si et seulement si $s > 1$.

Si $s > 1$, on notera $\mu(A) = \zeta(s, A)$. On admet que $\lim_{s\to 1} (s-1)\zeta(s,\mathbb{N}) = 1$. On pose alors pour toute partie A de l'ensemble $\mathbb{N}$,

$$\nu(A) = \limsup_{s\to 1} (s-1)\zeta(s, A).$$

(b) Calculer, pour un entier n dans $\mathbb{N}$, la quantité $\nu(\{n\})$.

(c) L'application ν est-elle une mesure sur la tribu des parties de $\mathbb{N}$?

Exercice 3.11 $(\star)$
Soient $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espace mesurés et N_1, B_2 deux parties respectivement $\mathcal{T}_1$-mesurable et $\mathcal{T}_2$-mesurable telles que $\mu_1(N_1) = 0$. Montrer alors que $N_1 \times B_2$ est une partie $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-négligeable de $X_1 \times X_2$.

Exercice 3.12 $(\star)$
Soit λ la mesure de Borel définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que si A est une partie de $\mathbb{R}$ qui est réduite à un singleton, alors A est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable et λ-négligeable. En déduire que si A est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, alors A est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable et λ-négligeable. Montrer par ailleurs que l'intervalle ouvert $]a,b[$, l'intervalle fermé $[a,b]$ et les intervalles semi-ouverts $[a,b[$ et $]a,b]$ ont chacun pour λ-mesure le réel $b-a$.

Exercice 3.13 $(\star)$
Soit λ la mesure de Borel définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que tout ouvert non vide U de $\mathbb{R}$ a une λ-mesure strictement positive. Montrer par ailleurs qu'une partie compacte K de $\mathbb{R}$ a une λ-mesure finie.

Exercice 3.14 $(\star\star)$
Soient $A_1, \cdots A_p \subset [0,1]$ des parties $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables telles que

$$\bigcup_{i\in\{1,\cdots,p\}} A_i = [0,1].$$

Montrer alors qu'il existe un indice $i \in \{1,\cdots,p\}$ tel que $\lambda(A_i) \geq \dfrac{1}{p}$, où λ désigne la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.15 $(\star\star)$
Soit λ la mesure de Borel sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(i) Montrer que la mesure λ est invariante par translation, i.e., pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, $\lambda(A + \{t\}) = \lambda(A)$.

(ii) Soit $k > 0$; montrer que, si A est un borélien, $\lambda(kA) = k\lambda(A)$. Que dire si $k < 0$?

Exercice 3.16 $(\star\star)$
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On appelle μ-atome toute partie A mesurable de μ-mesure non nulle telle que les seules parties mesurables contenues dans A soient A lui-même et l'ensemble vide.
Dans cet exercice, on fait l'hypothèse que n'importe quel singleton $\{x\}$ est mesurable.

(i) Montrer qu'un μ-atome est nécessairement un singleton.

(ii) La mesure μ est dite diffuse s'il n'existe pas de μ-atome. Montrer que si μ est diffuse, alors tout singleton est négligeable. Etablir même que toute partie dénombrable est alors mesurable et négligeable.

(iii) Démontrer réciproquement que si μ est une mesure telle que toute partie dénombrable est mesurable et μ-négligeable, alors la mesure μ est diffuse.

(iv) Les mesures de Dirac, de dénombrement et de Borel sur $\mathbb{R}$ sont-elles diffuses ? Sinon, préciser les atomes.

(v) Etablir que l'ensemble des atomes d'une mesure σ-finie est dénombrable.

Exercice 3.17 $(\star\star)$
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les conditions

(C1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$ (μ est dite diffuse) ;

(C2) $\mu(K) < +\infty$, pour tout compact K de $\mathbb{R}$.

(i) Parmi les mesures ci-dessous, lesquelles vérifient ces conditions

(a) $\mu = \lambda$, où λ est la mesure de Borel ;
(b) μ est une mesure de Dirac ;
(c) μ est la mesure de dénombrement sur $\mathbb{R}$.

(ii) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)$.

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on définit la fonction $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ par

$$f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]), \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Montrer que f_A est bien définie, puis que f_A est paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(iv) Dessiner la fonction f_A dans les trois cas suivants

(a) $A = \mathbb{Q}$;
(b) $\mu = \lambda$ et $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
(c) $\mu = \lambda$ et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [n, n + \frac{1}{2}]$.

(v) Donner une condition portant sur A pour que :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_A(x) = +\infty$
ou bien
(b) la fonction f_A soit constante, pour x assez grand.

(vi) On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$.

(a) Montrer que, si $0 \leq x \leq y$, $f_A(y) - f_A(x) \leq 2(y - x)$.
(b) En déduire que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f_A(y) - f_A(x)| \leq 2|y - x|,$$

puis que f_A est continue.
(c) Conclure que si $t \in [0, \lambda(A)]$, il existe un borélien B , inclus dans A, tel que $\lambda(B) = t$.

Exercice 3.18 $(\star\star)$
Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}^2$, que l'on admettra être la tribu engendrée par les intervalles de la forme $[a, b[\times[c, d[$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Le corollaire 3.8 montre l'existence sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ d'une mesure μ, appelée mesure de Borel, vérifiant :

$$\mu([a, b[\times[c, d[) = (b - a)(d - c), \quad \text{pour} \quad b \geq a \quad \text{et} \quad d \geq c.$$

Montrer que les ensembles suivants sont mesurables et calculer les mesures de ces ensembles :

(i) un rectangle fermé de la forme $[a, b] \times [c, d]$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;

(ii) un segment borné parallèle aux axes puis une droite parallèle aux axes ;

(iii) un segment borné quelconque puis une droite quelconque ;

(iv) l'intérieur d'un triangle dont les côtés opposés à l'hypothénuse sont parallèles aux axes ;

(v) un carré quelconque.

Exercice 3.19 ($\star\star$)
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que la mesure μ soit finie. Soit aussi f une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable de X dans $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de f l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$F(t) = \mu(\{f < t\}).$$

Montrer que F est croissante, continue à gauche, tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$ et vers $\mu(X)$ quand t tend vers $+\infty$. Montrer que F est continue en un point t si et seulement si $\mu(\{f = t\}) = 0$.

Exercice 3.20 ($\star\star\star$)
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{T}$, stable par réunion dénombrable. Si $T \in \mathcal{T}$, on pose :

$$\mu'(T) = \sup\{\mu(A \cap T) : \ A \in \mathcal{A}\}.$$

(i) Montrer que, pour tout $T \in \mathcal{T}$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu'(T) = \mu(A \cap T).$$

(ii) Montrer que μ' est une mesure sur $\mathcal{T}$ vérifiant $\mu' \leq \mu$ et que $\mu' = \mu$ sur $\mathcal{A}$.

(iii) On suppose que la mesure μ est finie. Montrer alors que les assertions suivantes sont équivalentes :

(A1) $\mu = \mu'$ sur $\mathcal{T}$;

(A2) il existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(X \setminus A_0) = 0$.

(iv) On suppose dans cette question que $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que μ est la mesure définie à partir de la fonction de répartition suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -1 \, ; \\ \dfrac{x+5}{8} & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \, ; \\ 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Enfin on prend pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}_+$ au plus dénombrable. Expliciter sur cet exemple la mesure μ'.

Exercice 3.21 ($\star\star$)
Existe-t-il une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f = 1_{[0,1]}$ λ-p.p., λ désignant la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$?

3.5 Corrigés des exercices

Corrigé 3.1 D'après l'exercice 2.1, nous savons que $\mathcal{T}$ est une tribu. Comme $\emptyset$ est une partie dénombrable, $\mu(\emptyset) = 0$. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables disjointes deux à deux. Nous allons envisager deux cas.
Cas 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est dénombrable.
Alors, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n) = 0$. Comme $\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n$ est aussi une partie dénombrable, nous avons $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = 0$, ce qui entraîne $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n)$.
Cas 2 : Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que T_{n_0} n'est pas dénombrable.
Alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n$ n'est pas dénombrable et $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = 1$. D'autre part, comme $T_{n_0} \in \mathcal{T}$, nous savons que $X \setminus T_{n_0}$ est dénombrable. Du fait que les parties T_n sont disjointes deux à deux, pour $n \neq n_0$, $T_n \subset X \setminus T_{n_0}$ et par conséquent T_n est dénombrable et $\mu(T_n) = 0$. Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n) = \mu(T_{n_0}) = 1$. Nous obtenons à nouveau l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right)$.

Corrigé 3.2 Nous avons $\nu(\emptyset) = \sum_{k=1}^{n} a_k.\mu_k(\emptyset) = \sum_{k=1}^{n} a_k.0 = 0$, grâce à la convention $+\infty.0 = 0$, prise au chapitre 1.
Maintenant, soit $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables deux à deux disjointes. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} T_i\right) &= \sum_{k=1}^{n} a_k.\mu_k\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} T_i\right) && [\text{définition de } \nu] \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \mu_k(T_i)\right] && [\text{car } \mu_k \text{ est une mesure}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N} \mu_k(T_i)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N} a_k.\mu_k(T_i)\right] \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=0}^{N} a_k.\mu_k(T_i)\right] \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k.\mu_k(T_i)\right] \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N} \nu(T_i) && [\text{définition de } \nu] \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \nu(T_i).
\end{aligned}$$

Ainsi ν est une mesure.

Corrigé 3.3 Pour montrer que ν est une mesure, nous allons utiliser la caractérisation des mesures que l'on trouve dans la proposition 3.4.
Nous avons tout d'abord $\nu(\emptyset) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mu_n(\emptyset)}{2^{n+1}} = 0$ et $\nu(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$, en appliquant une formule classique sur les séries géométriques.
Soient T_1 et T_2 deux parties mesurables disjointes. Puisque ν_n est une mesure, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mu_n(T_1 \cup T_2)}{2^{n+1}} = \frac{\mu_n(T_1)}{2^{n+1}} + \frac{\mu_n(T_2)}{2^{n+1}}.$$

En sommant ces inégalités sur les diverses valeurs de l'indice n compris entre 0 et $+\infty$, on voit que

$$\nu(T_1 \cup T_2) = \nu(T_1) + \nu(T_2).$$

Soit enfin $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de X. Posons $T = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$ et montrons, par double inégalité, que

$$\nu(T) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \nu(T_i).$$

Comme $T_i \subset T$, on montre, grâce à ce qui précède, l'inégalité $\nu(T_i) \leq \nu(T)$. Ainsi $\nu(T)$ est un majorant de la partie $\{\nu(T_i) : i \in \mathbb{N}\}$ et

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \nu(T_i) \leq \nu(T).$$

Inversement, soit $\alpha < \nu(T)$. Il existe un entier N tel que

$$\alpha < \sum_{n=0}^{N} \frac{\mu_n(T)}{2^{n+1}}. \tag{11}$$

Fixons dans un premier temps un $\epsilon > 0$; pour $n = 0, \cdots N$, puisque

$$\mu_n(T) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu_n(T_i),$$

il existe un entier i_n tel que $\mu_n(T) - \epsilon < \mu_n(T_{i_n})$ (voir exercice 1.16). En notant $j = \max\{i_0, \cdots, i_N\}$, puisque la suite $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a aussi $\mu_n(T) < \mu_n(T_j) + \epsilon$. La relation (11) devient alors

$$\alpha < \sum_{n=0}^{N} \frac{\mu_n(T_j)}{2^{n+1}} + \epsilon \leq \nu(T_j) + \epsilon \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \nu(T_i) + \epsilon.$$

En faisant $\epsilon \to 0^+$, il vient $\alpha \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \nu(T_i)$. On conclut alors, grâce à l'exercice 6.1 (a).

Corrigé 3.4 (A1) $\Longrightarrow$ (A2). Comme la mesure μ est σ-finie, il existe des parties mesurables $X_0 \subset X_1 \subset \cdots X_n \subset \cdots$ telles que

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n = X \tag{12}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(X_n) < +\infty$. Considérons alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables définie par $Y_0 = X_0$ et, pour $n \geq 1$, $Y_n = X_n \setminus X_{n-1}$. Comme $Y_n \subset X_n$, $\mu(Y_n) \leq \mu(X_n) < +\infty$. Il suffit donc de montrer que la famille $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ forme une partition de X. Soit $x \in X$; d'après la relation (12), l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x \in X_n\}$ est non vide et donc admet un plus petit élément n_0. Si $n_0 = 0$, $x \in Y_0$, et si $n_0 > 0$, $x \in X_{n_0} \setminus X_{n_0-1} = Y_{n_0}$. Dans tous les cas on a $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} Y_n$, ce qui entraîne : $X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} Y_n$.
Montrons maintenant que les parties Y_n sont disjointes deux à deux ; soient donc n et m deux entiers tels que $n < m$. Comme $Y_m = X_m \setminus X_{m-1}$, on a $Y_m \cap X_{m-1} = \emptyset$; la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on a $X_n \subset X_{m-1}$ et donc $Y_m \cap X_n = \emptyset$. En particulier, puisque $Y_n \subset X_n$, nous avons aussi $Y_m \cap Y_n = \emptyset$ ce qui permet de conclure.

(A2) $\Longrightarrow$ (A1). Considérons la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $X_n = \bigcup_{k=0}^{n} Y_k$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante et, pour tout n, puisque μ est sous-additive,

$$\mu(X_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(Y_k) < +\infty.$$

Pour conclure, il reste à vérifier que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n = X$. Soit $x \in X$; par hypothèse il existe un entier n tel que $x \in Y_n$ et, par définition de la partie X_n, on a aussi $x \in X_n$; en particulier $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n$. Le résultat est donc démontré.

Corrigé 3.5 Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une mesure μ non nulle sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ qui est finie et qui est invariante par translation, i.e., pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $T \subset \mathbb{Z}$, $\mu(\{p\} + T) = \mu(T)$.
Montrons tout d'abord qu'il existe un entier n tel que $\mu(\{n\}) \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, on aurait

$$\mu(\mathbb{Z}) = \mu(\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-^\star) = \mu(\mathbb{Z}_+) + \mu(\mathbb{Z}_-^\star) =$$
$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\{n\}\right) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{-n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\{n\}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{-n\}) = 0.$$

Cela entraîne, pour toute partie $T \subset \mathbb{Z}$, $0 \leq \mu(T) \leq \mu(\mathbb{Z}) = 0$ et $\mu(T) = 0$. Donc, μ serait la mesure nulle, ce qui est contraire aux hypothèses.

Ainsi, il existe un entier n_0 tel que $\mu(\{n_0\}) = a > 0$. Grâce à l'invariance par translation, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mu(\{n\}) = \mu(\{n - n_0\} + \{n_0\}) = \mu(\{n_0\}) = a > 0.$$

Alors $\mu(\mathbb{N}) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a = +\infty$, ce qui contredit le fait que la mesure μ soit finie.

Corrigé 3.6 Considérons l'espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$, où μ_d désigne la mesure de dénombrement sur les parties de $\mathbb{N}$, et considérons la suite décroissante de parties $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout n, par la relation

$$T_n = [n, +\infty[.$$

D'une part $\bigcap_{n=0}^{+\infty} T_n = \emptyset$, donc $\mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = 0$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(T_n) = +\infty$ et donc $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(T_n) = +\infty$. On constate qu'il n'y a pas égalité sur cet exemple.

Corrigé 3.7 En posant, pour tout entier n, $A_n = \bigcap_{m\geq n} T_m$, nous avons

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} T_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, nous obtenons

$$\mu(\liminf_{n\in\mathbb{N}} T_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n). \tag{13}$$

D'autre part, pour tout entier $k \geq n$, de l'inclusion $A_n \subset T_k$, on tire l'inégalité $\mu(A_n) \leq \mu(T_k)$, et donc

$$\mu(A_n) \leq \inf_{k\geq n} \mu(T_k).$$

En passant à la borne supérieure sur tous les entiers n de chaque côté de cette inégalité, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \mu(T_k) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \mu(T_n). \tag{14}$$

On conclut en combinant les relations (13) et (14).

Corrigé 3.8 (i) Soit F la partie de E définie par :

$$F = \{x : \ \mu(\{x\}) = 0\}.$$

Si $F = \emptyset$ alors $\mu(F) = 0$; sinon F se met sous la forme $F = \{a_1, \cdots, a_p\}$ avec $p \geq 1$ et $a_1, \cdots, a_p$ des éléments de E. Alors, par additivité de μ :

$$\mu(F) = \mu(\{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_p\}) = \sum_{i=1}^{p} \mu(\{a_i\}) = 0.$$

Montrons maintenant que F vérifie la relation (8). Soit A une partie de E. Si $A \subset F$, on a $F = A \cup (F \backslash A)$; donc, $\mu(F) = \mu(A) + \mu(F\backslash A)$, car $A \cap (F\backslash A) = \emptyset$. Cela entraîne que $\mu(A) \leq \mu(F) = 0$ et $\mu(A) = 0$. Réciproquement, supposons que $\mu(A) = 0$. Si $A = \emptyset$, on a bien $\emptyset \subset F$. Sinon, $A \neq \emptyset$ et A peut se mettre sous la forme $A = \{b_1, \cdots b_q\}$ avec $q \geq 1$ et $b_1, \cdots, b_q$ des éléments de E. Comme

$$\sum_{i=1}^{q} \mu(\{b_i\}) = \mu(A) = 0$$

et comme $\mu \geq 0$, on déduit, pour tout $i \in \{1, \cdots, q\}$, $\mu(\{b_i\}) = 0$; et, par définition de l'ensemble F, $b_i \in F$. Ainsi $A \subset F$.

(ii)(a) Montrons que μ_1 vérifie la relation (7). Puisque $\text{card}(\emptyset) = 0$, $\mu_1(\emptyset) = 0$. Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A \cap B = \emptyset$.
- Si card $(A \cup B) = +\infty$ alors card $A = +\infty$ ou card $B = +\infty$. Par conséquent $\mu_1(A \cup B) = +\infty = \mu_1(A) + \mu_2(B)$.
- Si card $(A \cup B) < +\infty$ alors card $A < +\infty$ et card $B < +\infty$. Par conséquent $\mu_1(A \cup B) = 0 = \mu_1(A) + \mu_2(B)$.

Montrons maintenant que μ_1 ne vérifie pas la relation (8) en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe une telle partie F. Soit $n \in \mathbb{N}$; le cardinal de la partie $\{n\}$ est fini, donc, $\mu_1(\{n\}) = 0$, ce qui entraîne, grâce à la relation (8), $\{n\} \subset F$. Ainsi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N} \subset F$ et par conséquent $F = \mathbb{N}$. Mais alors $\mu_1(F) = +\infty$, ce qui contredit la relation (8).
(b) Il suffit de reprendre la preuve de la question (i) avec toujours

$$F = \{x : \ \mu(\{x\}) = 0\}.$$

(iii)(a) Remarquons que $\mu_2 = \delta_{\{0\}}$ où $\delta_{\{0\}}$ est la mesure de Dirac en 0. Prenons $\mathbb{R}^*$ comme partie F et vérifions la condition (8). On a

$$\mu_2(A) = 0 \Longleftrightarrow 0 \notin A \Longleftrightarrow A \subset F.$$

Donc, la condition (8) est satisfaite.
(b) Il suffit de prendre l'application μ_3 définie par :

$$\begin{array}{llll} \mu_3 & : & \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ & & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lcl} \mu_3(A) & = & 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable ;} \\ \mu_3(A) & = & +\infty \text{ sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

et de reprendre l'argument de la question (ii)(a).

Corrigé 3.9 (i) On suppose que $0 < \mu(E) < +\infty$. Si $\mathcal{C}_n$ contient $n+1$ éléments distincts $A_1, \cdots, A_{n+1}$, comme ils sont dans $\mathcal{A}$, ils sont disjoints deux à deux. Et il en est de même pour $A_1 \cap E, \cdots, A_{n+1} \cap E$. D'où

$$\begin{aligned} \mu(E) &\geq \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} (E \cap A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu(E \cap A_i) \\ &\geq \frac{n+1}{n}\mu(E) \end{aligned}$$

et donc, comme $\mu(E) \in]0, +\infty[$, $n \geq n+1$, ce qui est impossible. $\mathcal{C}_n$ est donc un ensemble fini.

(ii) Soit $A \in \mathcal{C}$; on a $\mu(A \cap E) > 0$. Il existe donc un entier n_0 tel que $\mu(A \cap E) > \dfrac{\mu(E)}{n_0}$ car la suite $\left(\dfrac{\mu(E)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Et donc, A appartient à $\mathcal{C}_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{C}_n$. Nous obtenons donc l'inclusion $\mathcal{C} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{C}_n$ est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis. $\mathcal{C}$ qui est inclus dans un ensemble dénombrable est lui aussi dénombrable.

(iii) Le résultat est clair.

(iv) on a $\mu(\{x\}) = \sup\left\{\sum_{t \in A} f(t) : A \text{ finie et } A \subset \{x\}\right\}$. Or les parties A incluses dans $\{x\}$ sont $\emptyset$ et $\{x\}$, d'où $\mu(\{x\}) = \sup\{f(x), 0\} = f(x)$ et donc $\mu(\{x\}) = f(x)$.

(v) Clairement $\mu(\emptyset) = \sup\left\{\sum_{t \in A} f(t) : A \subset \emptyset\right\} = \sup\{0\} = 0$.

Soit maintenant $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties disjointes deux à deux. Nous allons démontrer l'égalité

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n)$$

par double inégalité.

Soit A une partie finie telle que $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. On a

$$A = A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap T_n)$$

et, comme A est finie, il existe un sous-ensemble $I \subset \mathbb{N}$ de cardinal fini tel que $A = \bigcup_{n \in I} (A \cap T_n)$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{t \in A} f(t) &= \sum_{n \in I} \sum_{t \in A \cap T_n} f(t) \quad [(A \cap T_n)_{n \in I} \text{ sont disjoints 2 à 2}] \\ &\leq \sum_{n \in I} \mu(T_n) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai, pour toute partie finie $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$, on conclut :

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n).$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n)$; il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha < \sum_{n=0}^{N} \mu(T_n)$ et il existe alors, pour $n \in \{0, \cdots, N\}$, une partie A_n finie de T_n telle que :

$$\alpha < \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{t \in A_n} f(t)\right).$$

Posons $A = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$; A est fini et inclus dans $\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n$. Comme les parties A_n sont disjoints deux à deux, $\alpha < \sum_{t \in A} f(t)$ et par conséquent $\alpha < \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right)$. D'après l'exercice 1.6 (i), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right).$$

Ainsi μ est une mesure.

(vi) On choisit pour ensemble $\mathcal{A}$, la famille des singletons, et on applique alors les résultats de la question (ii) pour conclure que

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A \cap E) > 0\} \quad \text{est dénombrable.}$$

En remarquant que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont de la forme $A = \{x\}$ et que $\mu(\{x\}) = f(x)$, on peut écrire $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in [0,1] \text{ et } f(x) > 0\}$. Le résultat est donc démontré.

Corrigé 3.10 (i) Montrons que $\mu(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Pour cela, soit une partie A incluse dans $\mathbb{N}$; on a

$$\phi(A) = \sum_{n \in A} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

car la série est à termes positifs. En passant à la borne supérieure, on obtient

$$\mu(\mathbb{N}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Inversement, considérons la partie $A_N = \{0, \cdots, N\}$, où N est un entier naturel. Par définition de $\mu(\mathbb{N})$, on a $\phi(A_N) \leq \mu(\mathbb{N})$; ce qui s'écrit $\sum_{n=0}^{N} a_k \leq \mu(\mathbb{N})$.

En faisant $N \to +\infty$, on conclut $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \mu(\mathbb{N})$.

(ii) Soit A une partie finie incluse dans T ; on a :

$$\phi(A) = \sum_{n \in A} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

En passant à la borne supérieure, $\mu(T) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente, on conclut $\mu(T) < +\infty$.

(iii) Supposons que A soit fini et montrons que $\mu(A) = \phi(A)$, ou en d'autres termes,

$$\sup\{\phi(A') : \ A' \text{ fini et } A' \subset A\} = \phi(A).$$

Si $A' \subset A$ et A' fini, on a

$$\phi(A') = \sum_{n \in A'} a_n \leq \sum_{n \in A} a_n \leq \phi(A).$$

En passant à la borne supérieure, on obtient $\mu(A) \leq \phi(A)$. Inversement, nous savons que, pour toute partie finie $A' \subset A$, $\phi(A') \leq \mu(A)$. En particulier en choisissant $A' = A$, on conclut $\phi(A) \leq \mu(A)$.

(iv) Pour montrer que μ est une mesure, nous allons utiliser la caractérisation des mesures que l'on trouve dans la proposition 3.4.
Comme par convention $\sum_{n \in \emptyset} a_n = 0$, on a $\phi(\emptyset) = 0$ et donc $\mu(\emptyset) = 0$.
Soient T_1, T_2 deux parties disjointes de $\mathbb{N}$. Soit α_1 un réel tel que $\alpha_1 < \mu(T_1)$; grâce à l'exercice 1.16, il existe une partie finie $A_1 \subset T_1$ tel que $\alpha_1 < \phi(A_1)$. De même, si α_2 est un réel tel que $\alpha_2 < \mu(T_2)$, il existe une partie finie $A_2 \subset T_2$ telle que $\alpha_2 < \phi(A_2)$. Puisque les parties T_1 et T_2 sont disjointes, les parties A_1 et A_2 sont disjointes et donc

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \phi(A_1) + \phi(A_2) = \phi(A_1 \cup A_2) \leq \mu(T_1 \cup T_2).$$

En particulier $\alpha_1 \leq \mu(T_1 \cup T_2) - \alpha_2$ et, d'après l'exercice 1.6 (i), nous avons

$$\mu(T_1) \leq \mu(T_1 \cup T_2) - \alpha_2.$$

Nous pouvons écrire aussi cette inégalité sous la forme $\alpha_2 \leq \mu(T_1 \cup T_2) - \mu(T_1)$ [$\mu(T_1) < +\infty$, d'après (ii)] ; et encore une fois, d'après l'exercice 1.6 (i),

$$\mu(T_2) \leq \mu(T_1 \cup T_2) - \mu(T_1)$$

soit $\mu(T_1) + \mu(T_2) \leq \mu(T_1 \cup T_2)$.
Inversement, soit $\alpha < \mu(T_1 \cup T_2)$; il existe une partie finie $A \subset T_1 \cup T_2$ telle que $\alpha < \phi(A)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \phi(A \cap (T_1 \cup T_2)) \\ &= \phi((A \cap T_1) \cup (A \cap T_2)) \\ &= \phi(A \cap T_1) + \phi(A \cap T_2) \\ &\leq \mu(T_1) + \mu(T_2), \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\alpha \leq \mu(T_1) + \mu(T_2)$. Grâce à l'exercice 1.6 (i), nous concluons alors $\mu(T_1 \cup T_2) \leq \mu(T_1) + \mu(T_2)$.
Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de $\mathbb{N}$. Posons $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ et montrons, par double inégalité, que

$$\mu(T) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(T_n).$$

Comme $T_n \subset T$, on montre, grâce à ce qui précède, l'inégalité $\mu(T_n) \leq \mu(T)$. Ainsi $\mu(T)$ est un majorant de la partie $\{\mu(T_n) : \ n \in \mathbb{N}\}$ et

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(T_n) \leq \mu(T).$$

Inversement, soit $\alpha < \mu(T)$; il existe une partie $A \subset T$ finie telle que $\alpha < \phi(A)$. Ecrivons A sous la forme $A = \{a_1, \cdots, a_p\}$; pour chaque $i \in \{1, \cdots, p\}$, il existe un entier $n(i)$ tel que $a_i \in X_{n(i)}$. Alors si $N = \max\{n(1), \cdots, n(p)\}$, du fait que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit croissante, $a_i \in T_{n(i)} \subset T_N$. Ainsi $A \subset T_N$, ce qui implique

$$\alpha < \phi(A) \leq \mu(T_N) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(T_n).$$

L'exercice 1.6 (i) permet de conclure.

(v)(a) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}} = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-s} = 1$; ce qui peut s'écrire, au voisinage de l'infini $\frac{1}{(n+1)^s} \sim \frac{1}{n^s}$. Comme nous avons affaire à des séries à termes positifs et comme $\frac{1}{n^s}$ est le terme général d'une série de Riemann,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge si et seulement si } s > 1.$$

(b) On a $\zeta(s, \{n\}) = \mu(\{n\})$ et, d'après la question (iii),

$$\mu(\{n\}) = \phi(\{n\}) = \frac{1}{(n+1)^s}.$$

Ainsi, on obtient $\nu(\{n\}) = \limsup_{s\to 1} \frac{s-1}{(n+1)^s} = 0.$
(c) La réponse est négative car :

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}\right) = \nu(\mathbb{N}) = 1 \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(\{n\}).$$

Corrigé 3.11 On a, par définition de la mesure produit $\mu_1\otimes\mu_2$,

$$\mu_1\otimes\mu_2(N_1\times N_2) = \mu_1(N_1).\mu_2(N_2) = 0.\mu_2(N_2).$$

Grâce à la convention $0.+\infty = 0$, on conclut que, dans tous les cas,

$$\mu_1\otimes\mu_2\ (N_1\times N_2) = 0.$$

Corrigé 3.12 • Soit A une partie réduite à un point ; A est le complémentaire d'un ouvert, donc, A est mesurable. Il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $A=\{a\}$; on peut écrire $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n = [a, a+\frac{1}{n+1}[$. On peut écrire $A_n = \{a\}\cup]a, a+\frac{1}{n+1}[$; chacune de ces deux parties étant mesurable, A_n est mesurable. Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et comme

$$\lambda(A_0) = \lambda([a, a+1[) = 1 < +\infty,$$

nous pouvons utiliser la stabilité de la mesure λ par passage à la limite décroissante. Donc,

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \lim_{n\to+\infty}\lambda([a, a+\frac{1}{n+1}[)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} \qquad \text{[définition de la mesure de Borel]}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Si A est dénombrable, on peut écrire $A=\{a_i : i\in I\}$, où I est dénombrable et où les a_i sont distincts deux à deux. D'autre part, en écrivant $A = \bigcup_{i\in I}\{a_i\}$, la σ-additivité de λ permet de conclure

$$\lambda(A) = \sum_{i\in I}\lambda(\{a_i\}) = 0.$$

• Soit $a<b$; on peut écrire $]a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[a+\frac{1}{n+1}, b\right[$ et, comme la mesure λ est stable par passage à la limite croissante, on a

$$\begin{aligned}\lambda(]a,b[) &= \lim_{n\to+\infty}\lambda([a+\frac{1}{n+1}, b[)\\ &= \lim_{n\to+\infty} b-a-\frac{1}{n+1}\\ &= b-a.\end{aligned}$$

• On a $[a,b] = [a,b[\cup\{b\}$, donc, $\lambda([a,b]) = \lambda([a,b[)+\lambda(\{b\}) = b-a$ par définition de λ et du fait qu'un singleton est λ-négligeable ; $\lambda([a,b[) = b-a$ par définition de λ ; enfin $\lambda(]a,b]) = \lambda(]a,b[\cup\{b\}) = \lambda(]a,b[)+\lambda(\{b\}) = b-a$, d'après un résultat démontré précédemment et le fait qu'un singleton est λ négligeable.

Corrigé 3.13 (a) Comme U est non vide, il existe un élément x dans U ; par définition d'un ouvert, il existe $\epsilon>0$ tel que

$$[x-\epsilon, x+\epsilon[\subset U.$$

Alors par croissance de la mesure λ, $\lambda([x-\epsilon, x+\epsilon[)\le\lambda(U)$ et donc $\lambda(U)\ge 2\epsilon$. En particulier, on a $\lambda(U)>0$.
(b) Comme un compact est borné, il existe $M>0$ tel que

$$K\subset[-M, M[.$$

Alors, par croissance de la mesure λ,

$$\lambda(K)\le\lambda([-M,M[) = 2M.$$

La λ-mesure de K est donc finie.

Corrigé 3.14 Raisonnons par l'absurde en supposant que,

$$\forall\, i\in\{1,\cdots,p\},\quad \lambda(A_i)<\frac{1}{p}.$$

Alors, puisqu'une mesure vérifie la propriété de sous-additivité :

$$\lambda([0,1]) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right)\le\sum_{i=1}^p\lambda(A_i)<\sum_{i=1}^p\frac{1}{p} = 1,$$

ce qui contredit le fait que la mesure de Borel du segment $[0,1]$ est 1.

Corrigé 3.15 (i) Considérons l'application $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ définie, pour $T\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, par

$$\mu(T) = \lambda(T+\{t\}).$$

Comme $\mu(\emptyset) = \lambda(\emptyset+\{t\}) = \lambda(\emptyset) = 0$ et comme

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}T_n\right) &= \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}T_n+\{t\}\right) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(T_n+\{t\})\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(T_n+\{t\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(T_n),\end{aligned}$$

si les boréliens $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont disjoints deux à deux, μ est une mesure. Pour montrer que $\mu=\lambda$, il suffit donc d'utiliser le théorème d'unicité des mesures.

Soit $\mathcal{C} = \{[a,b[: \ a \leq b\}$; $\mathcal{C}$ est stable par intersertion finie et, d'après le chapitre 2, $t(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$. D'autre part, si $C = [a,b[\in \mathcal{C}$, on a :

$$\mu([a,b[) = \lambda([a+t,b+t[) = (b+t)-(a+t) = b-a = \lambda([a,b[) < +\infty.$$

Enfin, $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,n[$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[-n,n[\in \mathcal{C}$. Les hypothèses du théorème d'unicité des mesures sont satisfaites, donc $\mu = \lambda$.

(ii) Considérons l'application $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, par :

$$\mu(A) = \frac{\lambda(kA)}{k}.$$

On montre aisément que μ est une mesure. Il suffit alors de prouver que $\mu = \lambda$ ce qui se démontre comme pour le résultat de la question (i). Pour $k < 0$, on montre que $\lambda(kA) = |k|\lambda(A)$.

Corrigé 3.16 (i) Soit A un μ-atome. A est non vide car sinon sa mesure serait nulle. Supposons que A ne soit pas réduit à un singleton ; il existe a et b deux éléments de A distincts. A contient les deux parties différentes $\{a\}$ et $\{b\}$ qui sont par hypothèses mesurables. Cela contredit le fait que A est un μ-atome. Ainsi A est un singleton.

(ii) Soit A un singleton ; comme les seules parties contenues dans A sont A lui-même et l'ensemble vide qui sont mesurables, $\mu(A) = 0$ puisque A n'est pas un μ-atome.
Toute partie dénombrable A est réunion dénombrable des singletons contenus dans A ; une tribu étant stable par réunion dénombrable, A est par conséquent mesurable. Si l'on écrit $A = \{a_i : \ i \in I\}$ où I est dénombrable, on a

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i\in I}\{a_i\}\right) = \sum_{i\in I} \mu(\{a_i\}) = 0.$$

Ainsi A est négligeable.

(iii) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un μ-atome noté A. Alors A est nécessairement un singleton, d'après la question (i). A étant dénombrable, on conclut, par hypothèse, que $\mu(A) = 0$. Cela contredit le fait que A est un μ-atome.

(iv) • Soit δ_x la mesure de Dirac en x. La partie $A = \{x\}$ est un μ-atome car $\delta_x(\{x\}) = 1 > 0$; donc, δ_x n'est pas une mesure diffuse. Montrons que $\{x\}$ est le seul μ-atome ; d'après la question (i), A peut s'écrire sous la forme $A = \{a\}$ et si $a \neq x$, on a $\delta_x(A) = 0$ et A ne serait être un μ-atome.
• Soit μ_d la mesure de dénombrement. Si A est un singleton $\mu_d(A) = 1$ et A est un μ-atome. Inversement, d'après la question (i), les μ-atomes sont des singletons. En particulier, μ_d n'est pas diffuse.
• Nous avons vu dans l'exercice 3.12 que la mesure de Borel d'un singleton est nulle, donc, d'après la question (i), il n'existe pas de μ-atome.

(v) Comme la mesure μ est σ-finie, X est la réunion d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de μ-mesure finie. Soit $C(n,p)$ l'ensemble des μ-atomes de X_n dont la μ-mesure est supérieure ou égale à $\frac{1}{p+1}$. Si $A_1, \cdots, A_k$ sont de tels atomes deux à deux distincts, nous avons :

$$\frac{k}{p+1} \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \mu(X_n).$$

Cela entraîne $k \leq \mu(X_n).(p+1)$ et donc, $C(n,p)$ est un ensemble fini. Soit maintenant A un μ-atome ; A est un singleton, d'après la question (i), et donc, A est inclus dans une partie X_n. De plus, comme $\mu(A) > 0$, il existe un entier p tel que $\mu(A) \geq \frac{1}{p}$. Alors $A \in \bigcup_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} C(n,p)$. Ainsi $\bigcup_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} C(n,p)$ représente l'ensemble de tous les μ-atomes. Une réunion dénombrable d'ensembles finis étant dénombrable, l'ensemble des μ-atomes est dénombrable.

Corrigé 3.17 (i)(a) Soit $x \in \mathbb{R}$; nous avons l'égalité

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[x, x+\frac{1}{n}\right[.$$

Comme la suite de parties $(\left[x, x+\frac{1}{n}\right[)_{n\geq 1}$ est décroissante et que

$$\lambda([x,x+1[) = 1 < +\infty,$$

d'après la propriété de stabilité par passage à la limite décroissante :

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda\left(\left[x, x+\frac{1}{n}\right[\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

La mesure λ vérifie donc la condition (C1). Si maintenant K est un compact de $\mathbb{R}$, il existe $M > 0$ tel que $K \subset [-M, M[$; alors

$$\lambda(K) \leq \lambda([-M,M[) = 2M < +\infty.$$

La mesure λ vérifie donc aussi la condition (C2).
(b) Si μ est la mesure de Dirac au point x_0, notée $\delta_{\{x_0\}}$, alors

$$\delta_{\{x_0\}}(\{x_0\}) = 1$$

et la condition (C1) n'est pas satisfaite. La condition (C2) est trivialement satisfaite puisque, pour tout borélien K, $\delta_{\{x_0\}}(K) \leq 1$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu_d(\{x\}) = 1$ et la condition (C1) n'est pas satisfaite. Comme $\mu_d([0,1]) = +\infty$, la condition (C2) n'est pas non plus satisfaite.

(ii) Posons, pour $n \geq 1$, $A_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$; la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et comme $A_1 =]-1,1[\subset [-1,1]$, $\mu(A_1) \leq \mu([-1,1]) < +\infty$, car $[-1,1]$ est un campact de $\mathbb{R}$ et la mesure μ vérifie la condition (C2). Alors, par la propriété de stabilité par passage à la limite décroissante,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\right) = \mu(\{0\}) = 0.$$

(iii) L'intervalle $[-|x|, |x|]$ est fermé, il est donc le complémentaire d'un ouvert et $[-|x|, |x|] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. D'autre part, par hypothèse, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ étant stable par intersection finie,

$$A \cap [-|x|, |x|] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

et $\mu(A \cap [-|x|, |x|])$ a un sens et appartient à $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Le fait que la fonction f_A soit paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$ est évident.

(iv)(a) Remarquons que

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{Q}) &= \mu\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}\Big) \\ &= \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu(\{q\}) \quad \text{[car } \mathbb{Q} \text{ est dénombrable]} \\ &= 0 \qquad\qquad\quad \text{[car } \mu \text{ vérifie la condition (C1)]}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q} \cap [-|x|, |x|] \subset \mathbb{Q}$, on a :

$$f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]) \leq \mu(A) = \mu(\mathbb{Q}) = 0.$$

D'où $f_{\mathbb{Q}} = 0$.
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$; alors on a :

$$\begin{aligned} \lambda([-|x|, |x|]) &= \lambda([-|x|, |x|] \cap \mathbb{Q}) + \lambda([-|x|, |x|] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ &= 0 + \lambda([-|x|, |x|] \cap A) \\ &= f_A(x). \end{aligned}$$

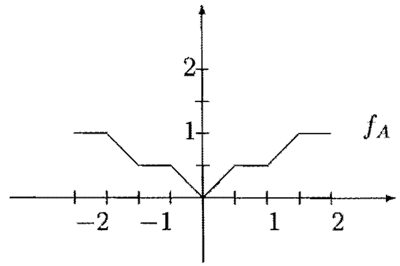
D'où $f_A(x) = 2|x|$.
Cas 1 : Comme la fonction f_A est paire, on peut supposer que $x \geq 0$. Alors on a :

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+\tfrac{1}{2}]\Big) \cap [-x, x] = \begin{cases} \Big(\bigcup_{n=0}^{E(x)-1} [n, n+\frac{1}{2}]\Big) \cup [E(x), x] & \text{si} \quad x \in A \,; \\ \bigcup_{n=0}^{E(x)} [n, n+\frac{1}{2}] & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

$$\text{D'où : } f_A(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{E(x)-1} \lambda([n, n+\frac{1}{2}]) + \lambda([E(x), x]) & \text{si} \quad x \in A \,; \\ \sum_{n=0}^{E(x)} \lambda([n, n+\frac{1}{2}]) & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Et en conclusion $f_A(x) = \begin{cases} x - \frac{E(x)}{2} & \text{si} \quad E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} \,; \\ \frac{E(x)+1}{2} & \text{si} \quad E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1. \end{cases}$

On obtient alors pour f_A le graphe ci-dessous.



(v)(a) Comme la fonction f_A est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f_A(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty\ (n\in\mathbb{N})} f_A(n) = +\infty.$$

Or, par stabilité de la mesure μ par passage à la limite croissante, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} f_A(n) &= \lim_{n\to+\infty} \mu(A \cap [-n, n]) \\ &= \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap [-n, n])\Big) \\ &= \mu(A). \end{aligned}$$

D'où $\lim_{x\to+\infty} f_A(x) = +\infty$ si et seulement si $\mu(A) = +\infty$.
(b) Montrons que, pour $x_0 \geq 0$ fixé,

$$f_A \text{ est constante sur } [x_0, +\infty[\Longleftrightarrow \mu(A \cap (\mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0])) = 0.$$

Supposons dans un premier temps que f_A soit constante sur $[x_0, +\infty[$. Alors, pour n entier naturel supérieur à x_0,

$$\mu(A \cap [-n, n]) = \mu(A \cap [-x_0, x_0]),$$

ce qui entraîne, grâce à la condition (C2),

$$\mu(A \cap ([-n, n] \setminus [-x_0, x_0])) = 0.$$

En faisant $n \to +\infty$, par stabilité de la mesure μ par passage à la limite croissante, on obtient :

$$\mu(A \cap (\mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0])) = 0.$$

Supposons dans un second temps qu'inversement $\mu(A \cap (\mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0])) = 0$. Alors, pour $x \geq x_0$,

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \mu(A \cap [-x, x]) \\ &= \mu(A \cap ([-x, x] \setminus [-x_0, x_0])) + f_A(x_0). \end{aligned}$$

Puisque

$$\mu(A \cap ([-x, x] \setminus [-x_0, x_0])) \leq \mu(A \cap (\mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0])) = 0,$$

on conclut $f_A(x) = f_A(x_0)$. Ainsi la fonction f_A est constante sur $[x_0, +\infty[$.
(vi)(a) Soit $0 \leq x \leq y$; on a la suite d'égalités et d'inégalités :

$$\begin{aligned} f_A(y) &= \mu(A \cap [-y, y]) \\ &= \mu(A \cap ([-x, x] \cup [-y, -x[\cup]x, y])) \\ &= \mu((A \cap [-x, x]) \cup (A \cap ([-y, -x[\cup]x, y]))) \\ &= \mu(A \cap [-x, x]) + \mu(A \cap ([-y, -x[\cup]x, y])) \\ &\leq f_A(x) + \lambda([-y, x]\cup]x, y]) \\ &= f_A(x) + 2(y - x) \ ; \end{aligned}$$

d'où $f_A(y) - f_A(x) \leq 2(y - x)$.
(b) Nous allons envisager trois cas.
cas 1 : $x \geq 0$, $y \geq 0$. Supposons d'abord que $0 \leq x \leq y$; alors, grâce à la question (vi)(a), $f_A(y) - f_A(x) \leq 2(y-x)$. Comme la fonction f_A est croissante, $f_A(y) - f_A(x) \geq 0$. Donc, $|f_A(y) - f_A(x)| \leq 2|y - x|$. Si par contre $0 \leq y \leq x$, il suffit d'échanger les rôles de x et y.
cas 2 : $x \leq 0$, $y \leq 0$. En utilisant la parité de la fonction f_A, on se ramène au cas 1 grâce à la manipulation suivante :

$$|f_A(y) - f_A(x)| = |f_A(-y) - f_A(-x)| \leq 2| - y - (-x)|.$$

Et encore, on a $|f_A(y) - f_A(x)| \leq 2|y - x|$.
cas 3 : $(x \leq 0$ et $y \geq 0)$ ou $(x \geq 0$ et $y \leq 0)$. Prenons par exemple le cas où $x \leq 0$ et $y \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} |f_A(y) - f_A(x)| &= |f_A(y) - f_A(-x)| \\ &\leq 2|y + x| \qquad \text{[d'après le cas 1]} \\ &\leq 2|y - x|. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons démontré le résultat dans les trois cas. La fonction f_A prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$, elle est Lipschitzienne de rapport 2 et en particulier f_A est continue sur $\mathbb{R}$.
(c) On a obtenu lors des questions précédentes les résultats suivants :

$$\begin{cases} f_A(0) = 0 \ ; \\ \lim_{x \to +\infty} f_A(x) = \lambda(A) \quad \text{[voir la preuve du (v)(a)] ;} \\ f_A \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit :
• pour $t \in [0, \lambda(A)[$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_A(x) = t$, soit $\lambda(A \cap [-x, x]) = t$. Posons $B = A \cap [-x, x]$; il est clair que B est un borélien de $\mathbb{R}$ inclus dans A et que $\lambda(B) = t$.
• Pour $t = \lambda(A)$, il suffit de prendre $B = A$.

Corrigé 3.18 (i) La partie $[a, b] \times [c, d]$ est mesurable comme complémentaire d'un ouvert. On a :

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} T_n,$$

où $T_n = [a, b + \frac{1}{n}[\times[c, d + \frac{1}{n}[$. Remarquons que la suite $(T_n)_{n\geq1}$ est décroissante et que $\mu(T_1) = (b + 1 - a)(d + 1 - c) < +\infty$; donc, grâce à la propriété de stabilité de la mesure μ par passage à la limite décroissante :

$$\begin{aligned} \mu([a, b] \times [c, d]) &= \lim_{n \to +\infty} \mu(T_n) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left(b + \frac{1}{n} - a\right)\left(d + \frac{1}{n} - c\right) \\ &= (b - a)(d - c). \end{aligned}$$

(ii) Soit S un segment borné parallèle à l'axe $x'Ox$; S peut s'écrire :

$$S = [a, b] \times \{c\}.$$

En utilisant (i), on a donc $\mu(S) = 0$. Il en sera de même pour un segment borné parallèle à $y'0y$.
Soit maintenant D une droite parallèle à l'axe $x'Ox$ par exemple ; D peut s'écrire

$$D = \mathbb{R} \times \{c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n,$$

où $S_n = [-n, n] \times \{c\}$. Grâce à ce qui précède, $\mu(S_n) = 0$ et comme la mesure μ est stable par passage à la limite croissante :

$$\mu(D) = \lim_{n \to +\infty} \mu(S_n) = 0.$$

Il en est de même pour une droite parallèle à l'axe $y'Oy$.

(iii) Soit S un segment de $\mathbb{R}^2$. Si S est parallèle à l'axe $y'Oy$, on se réfère à la question (ii) pour conclure ; sinon S peut s'écrire sous la forme ($\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$)

$$S = \{(x, \alpha x + \beta) : \ a \leq x \leq b\}.$$

Supposons dans un premier temps que $\alpha \geq 0$ et considérons l'application affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \alpha x + \beta$. On a, pour $n \geq 2$ fixé,

$$S \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} [a_k, a_{k+1}] \times [f(a_k), f(a_{k+1})],$$

où, pour $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Et donc, d'après la question (i),

$$\mu(S) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right) \alpha \left(\frac{b-a}{n}\right) = \alpha \frac{(b-a)^2}{n}.$$

En faisant $n \to +\infty$, on conclut $\mu(S) = 0$.
Le cas $\alpha < 0$ se traite de la même manière. Pour une droite quelconque, on reprend l'argument donné à la question (ii).

(iv) Soit T l'intérieur (au sens géométrique) d'un triangle dont les côtés opposés à l'hypothénuse sont parallèles aux axes. Nous avons quatre situations possibles suivant que la droite qui contient l'hypothénuse à une pente positive ou non et suivant que le triangle se trouve au-dessus ou en dessous de l'hypothénuse. De toute façon, on traite ces quatre cas de la même manière ; nous pouvons donc nous restreindre au cas où

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b \;\text{ et }\; f(a) \leq y \leq f(x)\},$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application affine de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$ avec $\alpha > 0$ (c'est le cas où la pente de la droite contenant l'hypothénuse est positive et où le triangle est en dessous de l'hypothénuse). On a, pour $n \geq 2$ fixé, l'encadrement suivant

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [a_k, a_{k+1}[\times [f(a), f(a_k)[\subset T \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} [a_k, a_{k+1}] \times [f(a), f(a_{k+1})],$$

où, pour $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Et en prenant la mesure de chacun de ces ensembles (utiliser l'additivité pour la partie à gauche de l'inclusion et la sous-additivité pour la partie à droite de l'inclusion) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right) \left(\alpha k \frac{b-a}{n}\right) \leq \mu(T) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right) \left(\alpha (k+1) \frac{b-a}{n}\right),$$

ce qui s'écrit

$$\alpha \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-1} k \leq \mu(T) \leq \alpha \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)$$

soit

$$\alpha \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{(n-1)n}{2} \leq \mu(T) \leq \alpha \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2}.$$

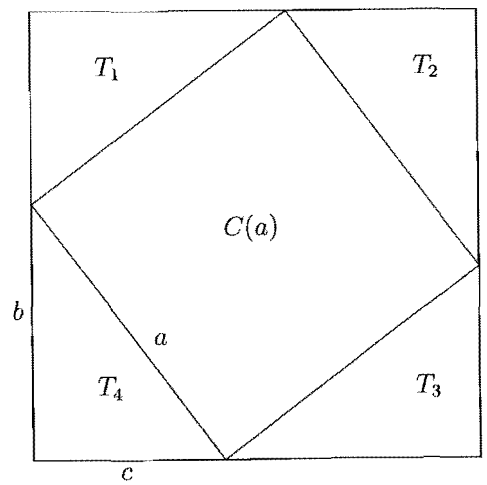
Le terme $\mu(T)$ est encadré par le terme général de deux suites qui convergent vers une limite commune $\alpha\dfrac{(b-a)^2}{2}$, donc,

$$\mu(T) = \frac{\alpha(b-a)^2}{2},$$

qui n'est autre que la formule bien connue

$$\frac{\text{base} \;\times\; \text{hauteur}}{2} = \text{aire du triangle} .$$

(v) Soit $C(a)$ un carré de $\mathbb{R}^2$ de côté de longueur a. Nous pouvons construire autour du carré des triangles rectangles T_1, T_2, T_3 et T_4 comme indiqués sur la figure ci-dessous.



La réunion des triangles et du carré est un carré $C(b+c)$ dont le côté est de longueur $b+c$. D'après les questions précédentes, nous avons (remarquer que les arêtes des triangles et des carrés sont de mesure nulle, d'après la question (iii))

$$\mu(C(a)) + \sum_{i=1}^{4} \mu(T_i) = \mu(C(b+c))$$

soit

$$\mu(C(a)) = (b+c)^2 - 4\left(\frac{bc}{2}\right) = b^2 + c^2 = a^2.$$

On retombe sur un résultat bien connu de tous !

Corrigé 3.19 • Montrons que F est croissante. Soient t_1 et t_2 deux réels tels que $t_1 < t_2$; alors $\{f < t_1\} \subset \{f < t_2\}$ et par croissance de la mesure μ, on obtient $F(t_1) \leq F(t_2)$.
• Montrons que F est continue à gauche. Soit $t \in \mathbb{R}$; il suffit de démontrer que, pour toute suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers t, la suite $(F(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(t)$. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante convergeant vers t ; comme la suite de parties mesurables $(\{f < t_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est

croissante, la stabilité de la mesure μ par passage à la limite croissante donne

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f < t_n\}) = \mu(\{f < t\}) = F(t),$$

car la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Le résultat est donc démontré.
• Montrons que F tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$; il suffit de démontrer que, pour toute suite décroissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $-\infty$, la suite $(F(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante convergeant vers $-\infty$; comme la suite de parties mesurables $(\{f < t_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\mu(\{f < t_0\}) \le \mu(X) < +\infty$, la stabilité de la mesure μ par passage à la limite décroissante donne

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f < t_n\}) = \mu(\emptyset) = 0,$$

car f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Le résultat est donc démontré.
• Montrons que F tend vers $\mu(X)$ quand t tend vers $+\infty$; il suffit de démontrer que, pour toute suite croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $+\infty$, $(F(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mu(X)$. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante convergeant vers $+\infty$; comme la suite de parties mesurables $(\{f < t_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la stabilité de la mesure μ par passage à la limite croissante donne

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f < t_n\}) = \mu(X),$$

car f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Le résultat est donc démontré.
• Supposons que F soit continue en t. Comme la suite de parties mesurables $(\{f < t + \frac{1}{n+1}\})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\mu(\{f < t+1\}) \le \mu(X) < +\infty$, la stabilité de la mesure μ par passage à la limite décroissante donne

$$\begin{aligned} F(t) &= \lim_{n\to+\infty} F(t + \frac{1}{n+1}) \\ &= \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{f < t + \frac{1}{n+1}\right\}\right) \\ &= \mu(\{f \le t\}). \end{aligned}$$

Donc, $\mu(\{f < t\}) = \mu(\{f \le t\})$, ce qui s'écrit

$$\mu(\{f < t\}) = \mu(\{f = t\}) + \mu(\{f < t\}).$$

Comme $\mu(X) < +\infty$, les éléments qui interviennent dans cette dernière égalité sont réels ; ainsi nous obtenons $\mu(\{f = t\}) = 0$.
• Supposons que $\mu(\{f = t\}) = 0$. Pour montrer que F est continue en t, il suffit de démontrer que, pour toute suite strictement décroissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers t, la suite $(F(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(t)$ (puisque l'on sait déjà que F est continue à gauche). Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante

convergeant vers t ; comme la suite de parties mesurables $(\{f < t_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\mu(\{f < t_0\}) \le \mu(X) < +\infty$, la stabilité de la mesure μ par passage à la limite décroissante donne

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f < t_n\}) = \mu(\{f \le t\}),$$

car la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Le résultat est alors démontré en remarquant que

$$\mu(\{f \le t\}) = \mu(\{f < t\}) + \mu(\{f = t\}) = F(t).$$

Corrigé 3.20 (i) Soit $T \in \mathcal{T}$; comme l'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide et comme μ est une mesure positive,

$$\{\mu(A \cap T) : A \in \mathcal{A}\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Donc, on a $\mu'(T) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Nous allons maintenant distinguer deux cas.
Cas 1 : $\mu'(T) = +\infty$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une partie mesurable A_n telle que $n < \mu(A_n \cap T)$ (remarquer que $n < +\infty$ et appliquer l'exercice 1.16).
Cas 2 : $\mu'(T) < +\infty$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une partie mesurable A_n telle que $\mu'(T) - \frac{1}{n+1} < \mu(A_n \cap T)$ (remarquer que $\mu'(T) - \frac{1}{n+1} < \mu'(T)$ et appliquer l'exercice 1.16).
Considérons alors la partie $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$; comme $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable, $A \in \mathcal{A}$ et donc,

$$\mu(A_n \cap T) \le \mu(A \cap T) \le \mu'(T).$$

En faisant $n \to +\infty$, on conclut $\mu'(T) = \mu(A \cap T)$.

(ii) • Montrons que μ' est une mesure. D'après la question (i), μ' prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Ensuite, nous avons

$$\mu'(\emptyset) = \sup\{\mu(\emptyset \cap A) : A \in \mathcal{A}\} = \sup\{0 : A \in \mathcal{A}\} = 0,$$

car l'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide. Soit maintenant une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables deux à deux disjointes. Soit A fixé dans $\mathcal{A}$; en remarquant que les éléments de la suite $(A \cap T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints, nous avons :

$$\begin{aligned} \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right)\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap T_n)\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap T_n) \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'(T_n). \end{aligned}$$

Et, en passant à la borne supérieure sur les éléments de $\mathcal{A}$, on obtient :

$$\mu'\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'(T_n).$$

Inversement, d'après la question (i), il existe un élément $A_n \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu'(T_n) = \mu(A_n \cap T_n).$$

En remarquant que les éléments de la suite $(A_n \cap T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont eux aussi deux à deux disjoints, nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'(T_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap T_n)\\ &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap T_n)\right).\end{aligned}$$

Or l'inclusion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap T_n) \subset \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right)$ entraîne l'inégalité

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap T_n)\right) \leq \mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right)\right).$$

Donc, on déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'(T_n) &\leq \mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right)\right)\\ &\leq \mu'\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right),\end{aligned}$$

car $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Ainsi, nous avons démontré l'égalité

$$\mu'\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'(T_n)$$

et μ' est une mesure.

• Montrons que $\mu' \leq \mu$ et $\mu' = \mu$ sur $\mathcal{A}$. Soit $T \in \mathcal{T}$; pour A fixé dans $\mathcal{A}$, on a $\mu(A \cap T) \leq \mu(T)$; en passant à la borne supérieure sur les éléments de $\mathcal{A}$, on obtient $\mu'(T) \leq \mu(T)$. Ainsi, nous obtenons l'inégalité $\mu' \leq \mu$.
Soit $A_0 \in \mathcal{A}$; d'après ce qui précède $\mu'(A_0) \leq \mu(A_0)$. Inversement

$$\mu(A_0) = \mu(A_0 \cap A_0) \leq \sup\{\mu(A \cap A_0) :\ A \in \mathcal{A}\} = \mu'(A_0).$$

Ainsi, nous avons $\mu = \mu'$ sur $\mathcal{A}$.

(iii) (A1) $\Longrightarrow$ (A2). Comme $X \in \mathcal{T}$, $\mu'(X) = \mu(X)$. D'après la question (i), il existe une partie mesurable $A_0 \in \mathcal{A}$ telle que $\mu(X \cap A_0) = \mu(X)$, ce qui s'écrit

$$\mu(X) = \mu(A_0).$$

Or, nous avons $\mu(X) = \mu(X \setminus A_0) + \mu(A_0)$ et donc, $\mu(X \setminus A_0) + \mu(A_0) = \mu(A_0)$. Comme $\mu(X) < +\infty$, les termes intervenant dans cette égalité sont réels et donc, $\mu(X \setminus A_0) = 0$.
(A2) $\Longrightarrow$ (A1). Soit $T \in \mathcal{T}$; par définition de la mesure μ',

$$\begin{aligned}\mu'(T) &\geq \mu(A_0 \cap T)\\ &= \mu(A_0 \cap T) + \mu((X \setminus A_0) \cap T)\\ &= \mu(T).\end{aligned}$$

Comme d'autre part, grâce à la question (iii), $\mu'(T) \leq \mu(T)$, on conclut que $\mu'(T) = \mu(T)$.

(iv) Notons $\lambda_{|[-1,1]}$ la mesure induite par la mesure de Borel sur $[-1, 1]$. La mesure $\frac{1}{8}\lambda_{|[-1,1]} + \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{4}\delta_1$ a pour fonction de répartition F (la vérification est laissée au soin du lecteur !). Par unicité de la mesure associée à la fonction de répartition F, on déduit

$$\mu = \frac{1}{8}\lambda_{|[-1,1]} + \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{4}\delta_1.$$

Montrons maintenant que $\mu' = \frac{1}{4}\delta_1$. Soit $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et vérifions par double inégalité que

$$\mu'(T) = \frac{1}{4}\delta_1(T).$$

D'après la question (i), il existe une partie A dénombrable de $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\begin{aligned}\mu'(T) &= \mu(A \cap T)\\ &= \frac{1}{8}\lambda_{|[-1,1]}(A \cap T) + \frac{1}{2}\delta_{-1}(A \cap T) + \frac{1}{4}\delta_1(A \cap T)\\ &= \frac{1}{4}\delta_1(A \cap T)\\ &\leq \frac{1}{4}\delta_1(T).\end{aligned}$$

Inversement, en prenant la partie $A = \{1\}$, on a

$$\mu'(T) \geq \mu(\{1\} \cap T) = \frac{1}{4}\delta_1(\{1\} \cap T) = \frac{1}{4}\delta_1(T).$$

Corrigé 3.21 Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une fonction continue f et un borélien négligeable N tels que

$$f = 1_{[0,1]} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus N. \tag{15}$$

Si $[0,1] \subset N$, on a $\lambda([0,1]) \le \lambda(N) = 0$, ce qui est impossible ; donc, $[0,1] \not\subset N$, ce qui revient à dire que $[0,1] \setminus N$ est non vide. Or, d'après la relation (15), la fonction f est constante égale à 1 sur cet ensemble. Donc, la fonction f prend la valeur 1. De même, on montre que la fonction f prend aussi la valeur 0. Considérons alors l'ouvert de $\mathbb{R}$:

$$A = f^{-1}(]0,1[).$$

D'une part, par le théorème des valeurs intermédiaires, A est non vide, et l'exercice 3.13 permet d'affirmer que $\lambda(A) > 0$. D'autre part, par la relation (15), $A \subset N$ et donc A est négligeable ; cela contredit la remarque précédente.

4 INTÉGRATION

Dans ce chapitre $(X, \mathcal{T}, \mu)$ désigne un espace mesuré quelconque. L'intégrale que nous allons construire dans ce chapitre est connue sous le nom d'intégrale de Lebesgue.

4.1 Fonctions étagées

Les fonctions étagées jouent un rôle important dans la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 4.1 *Soit φ une application de X dans $\mathbb{R}$; les assertions suivantes sont équivalentes :*

(A1) *φ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et prend un nombre fini de valeurs ;*

(A2) *il existe des parties $\mathcal{T}$-mesurables $A_1, \cdots, A_n$ et des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$.*

Dans ce cas, on dit que φ est une fonction $\mathcal{T}$-étagée (ou plus simplement étagée).

Définition 4.2 *(intégrale d'une fonction étagée positive). Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée positive. Si $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ sont les valeurs distinctes prises par φ sur les parties $A_i = \{\varphi = \alpha_i\}$, on pose :*

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Le théorème suivant va permettre de relier l'intégrale d'une fonction mesurable positive (à définir) aux intégrales des fonctions étagées qui l'approximent.

Théorème 4.3 *(théorème d'approximation). Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable positive. Il existe alors une suite croissante $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives convergeant simplement vers f.*

4.2 Intégrale de fonctions mesurables positives

Dans la suite, on notera $\mathcal{L}^+(X, \mathcal{T}, \mu)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^+$) l'ensemble des fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurables et positives. L'intégrale d'une fonction mesurable positive est définie de la manière suivante.

Définition 4.4 *Si $f \in \mathcal{L}^+$, on pose*

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \varphi \text{ étagée telle que } \varphi \leq f \right\}.$$

De plus, si $A \in \mathcal{T}$, on notera : $\int_A f \, d\mu = \int_X f.1_A \, d\mu$.

Remarque 4.5 On montre que cette notion coïncide avec celle vue dans le cas des fonctions étagées (voir définition 4.2). De plus on a $\int_X f \, d\mu \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Proposition 4.6 *Si $f, g \in \mathcal{L}^+$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a :*

(i) $\int_X (\lambda f + \mu g) \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu + \mu \int_X g \, d\mu$ *(linéarité de l'intégrale) ;*

(ii) *si $f \leq g$ alors $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$ (croissance de l'intégrale) ;*

(iii) $\int_X f \, d\mu < +\infty$ *si et seulement si f est finie p.p. ;*

(iv) $\int_X f \, d\mu = 0$ *si et seulement si $f = 0$ p.p.*

Les théorèmes suivants sont les trois théorèmes clés de l'intégration des fonctions positives.

Théorème 4.7 *(convergence monotone croissante). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{L}^+$ de limite f. Alors $f \in \mathcal{L}^+$ et*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Théorème 4.8 *(permutation des signes $\sum$ et $\int$). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^+$; alors :*

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Théorème 4.9 *(lemme de Fatou). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^+$; alors :*

$$\int_X \left(\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

4.3 Intégrale de fonctions de signe quelconque

Dans la suite, on notera $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^1$) l'ensemble des fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurables, de signe quelconque telles que $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$, ce qui est équivalent à $\int_X f^+ \, d\mu < +\infty$ et $\int_X f^- \, d\mu < +\infty$, où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(0, -f)$. Une fonction de $\mathcal{L}^1$ sera dite μ-intégrable (ou plus simplement intégrable).

Définition 4.10 *Si $f \in \mathcal{L}^1$, on pose*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

De plus, si $A \in \mathcal{T}$, on notera : $\int_A f \, d\mu = \int_X f.1_A \, d\mu$.

Remarque 4.11 On écrira aussi $\int_X f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x)$ lorsque l'on veut faire apparaître explicitement une variable muette (ici x).

Remarque 4.12 Si $f \in \mathcal{L}^+ \cap \mathcal{L}^1$, on montre facilement que cette définition coïncide avec celle vu dans la section précédente (voir définition 4.4). De plus, on a $\int_X f \, d\mu \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.13 *Si $f, g \in \mathcal{L}^1$ alors*

(i) *si f et g sont à valeurs réelles et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:*
$\int_X (\lambda f + \mu g) \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu + \mu \int_X g \, d\mu$ *(linéarité) ;*

(ii) *si $f \leq g$ alors $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$ (croissance) ;*

(iii) $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$;

(iv) *si $f = 0$ p.p. alors $\int_X f \, d\mu = 0$; la réciproque est vraie si $f \geq 0$;*

(v) *si $f = g$ p.p. alors $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.*

Soit maintenant $(Y, \mathcal{S})$ un autre espace mesurable et $T : X \to Y$ une application $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$-mesurable.

Définition-proposition 4.14 *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \mu_T : & \mathcal{S} & \to & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ & S & \mapsto & \mu(T^{-1}(S)) \end{array}$$

est une mesure sur $(Y, \mathcal{S})$ dite mesure image de μ par T.

La mesure image joue un rôle fondamental en probabilité pour définir la loi d'une variable aléatoire continue. Le théorème suivant est connu sous le nom de théorème de transfert.

Théorème 4.15 *Soit $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable ;*

(i) *si f est positive, alors $f \circ T$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable positive et*

$$\int_Y f\, d\mu_T = \int_X f \circ T\, d\mu\ ; \tag{16}$$

(ii) *si f est de signe quelconque, f est μ_T-intégrable si et seulement si $f \circ T$ et μ-intégrable et dans ce cas, l'égalité (16) est à nouveau satisfaite.*

4.4 Intégrale de fonctions définies μ-presque partout

Définition-proposition 4.16 *Soit f une fonction définie μ-presque partout sur X. S'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ telle que $f = g$ p.p., on pose :*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Remarquons que cette définition ne dépend pas du représentant g choisi. Nous avons alors les deux théorèmes fondamentaux suivants de l'intégration des fonctions de signe quelconque. Ils sont connus sous les noms respectifs du théorème de la convergence dominée (ou théorème de Lebesgue) et du théorème de permutation des signes $\sum$ et $\int$.

Théorème 4.17 *(théorème de la convergence dominée). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$; on suppose qu' il existe une partie mesurable N de mesure nulle telle que :*

(H1) *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $X \setminus N$;*

(H2) *il existe une application $h \in \mathcal{L}^1$ vérifiant,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \le h \ \text{ sur }\ X \setminus N.$$

Alors, on a : $\displaystyle\int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu.$

Théorème 4.18 *(permutation des signes $\sum$ et $\int$). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty.$$

Alors, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est définie μ- presque partout et égale μ- presque partout à une fonction de $\mathcal{L}^1$, et on a l'égalité :

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\, d\mu.$$

4.5 Intégrale dépendant d'un paramètre

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de $X \times I$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que, pour tout $y \in I$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est dans $\mathcal{L}^1$ et donc, que l'on peut définir une application $F : I \to \mathbb{R}$ par la relation, vraie pour $y \in I$,

$$F(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \in \mathbb{R}.$$

Le but de cette section est d'étudier le transfert de la continuité (resp. de la dérivabilité) de f sur F.

Théorème 4.19 *(continuité sous le signe $\int$). On suppose que les trois hypothèses suivantes sont satisfaites*

(H'1) *pour tout $y \in I$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ appartient à $\mathcal{L}^1$;*

(H'2) *pour μ-presque tout $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est continue sur I ;*

(H'3) *il existe une fonction h appartenant à $\mathcal{L}^1$ telle que, pour tout $y \in I$,*

$$|f(x,y)| \le h(x) \text{ p.p.}$$

Alors l'application F est continue sur I.

Théorème 4.20 *(dérivabilité sous le signe $\int$). On suppose que l'intervalle I est ouvert et que les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(H''1) *pour tout $y \in I$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ appartient à $\mathcal{L}^1$;*

(H''2) *pour μ-presque tout $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur I ;*

(H''3) *il existe une fonction h appartenant à $\mathcal{L}^1$ telle que, pour μ-presque tout x,*

$$\forall y \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le h(x).$$

Alors, F est dérivable sur I et $\displaystyle F'(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, d\mu(x).$

4.6 Énoncés des exercices

Exercice 4.1 ($\star$)
Donner un exemple de fonction étagée ayant deux écritures différentes sous la forme $\sum_i \alpha_i 1_{A_i}$.

Exercice 4.2 ($\star$)
Etablir que si f et g sont deux fonctions $\mathcal{T}$-étagées, alors $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont également $\mathcal{T}$-étagées.

Exercice 4.3 ($\star$)
Expliciter la définition de l'intégrale dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ où le symbole $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ représente l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et le symbole μ_d la mesure de dénombrememt sur l'ensemble $\mathbb{N}$. On montrera que, pour une fonction $f: \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ satisfaisant certaines hypothèses,

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_d = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

Exercice 4.4 ($\star$)
Expliciter la définition de l'intégrale dans un espace mesuré par une mesure de Dirac (commencer par estimer l'intégrale d'une fonction étagée). On montrera que l'intégrale d'une fonction est simplement la valeur qu'elle prend au point qui porte la mesure de Dirac.

Exercice 4.5 ($\star$)
Soit $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une application $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable. On suppose que f est positive ou que f est λ-intégrable. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+a) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\lambda(x).$$

Remarque : ce résultat sera par la suite une conséquence du théorème de changement de variables dans les intégrales (voir chapitre 8).

Exercice 4.6 ($\star$)
Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{T})$.

(i) Si f est une fonction mesurable positive à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, montrer que :

$$\int_X f \, d(\mu_1 + \mu_2) = \int_X f \, d\mu_1 + \int_X f \, d\mu_2.$$

(ii) Que dire pour une fonction mesurable de signe quelconque ?

Exercice 4.7 ($\star\star$)
Soit f une application mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ et Y une partie mesurable de X.

(i) Montrer que si $f \geq 0$ alors

$$\int_X f.1_Y \, d\mu = \int_Y f_{|Y} \, d\mu_{|Y}. \tag{17}$$

(ii) Montrer que si f est μ-intégrable alors $f_{|Y}$ est $\mu_{|Y}$-intégrable et l'égalité (17) persiste.

Exercice 4.8 ($\star\star$)
(i) Montrer que si A est un borélien de $\mathbb{R}$ alors

$$-A \stackrel{\text{def}}{=} \{-x : \; x \in A\}$$

est aussi un borélien ;
(ii) Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive et paire. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 2 \int_{\mathbb{R}} f.1_{[0,+\infty[} \, d\mu,$$

où μ est une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant $\mu(\{0\}) = 0$ et $\mu(-A) = \mu(A)$, pour tout borélien A.

Exercice 4.9 ($\star\star$)
On suppose que la mesure μ est finie sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(A1) Pour tout $\epsilon > 0$, la μ-mesure de l'ensemble $\{|f_n| > \epsilon\}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$;

(A2) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_X \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} \, d\mu = 0.$

Exercice 4.10 ($\star\star\star$)
Soit f une fonction à valeurs réelles positive sur X ; on suppose que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto f(x)^n$ est intégrable sur X. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(A1) $\mu(\{f \geq 1\}) = 0$;

(A2) la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f^n \, d\mu$ converge ;

(A3) la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f^n \, d\mu$ converge vers $\int_X \frac{f}{1+f} \, d\mu$.

Exercice 4.11 $(\star\star)$
Soit f une application mesurable réelle positive définie sur X telle que l'intégrale de f sur X soit finie. On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X définie par l'identité $A_n = f^{-1}([n, +\infty[)$.

(i) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n est de μ-mesure finie. Montrer que $\lim_{n\to\infty} n\mu(A_n) = 0$.
Indication : appliquer le théorème de convergence monotone croissante à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'égalité $f_n = f.1_{X\setminus A_n}$; en déduire que l'intégrale de f sur A_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

(ii) Montrer par contre, par un contre-exemple, que la réciproque est fausse : l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} n\mu(A_n) = 0$ n'implique pas que l'intégrale de f sur X soit finie.

Exercice 4.12 $(\star\star\star)$
Cette exercice utilise le résultat obtenu dans l'exercice 4.11. On suppose que X est de μ-mesure finie. Soit f une application mesurable à valeurs réelles positives. Pour tout entier naturel n, la notation a_n désigne la μ-mesure de l'ensemble $A_n = f^{-1}([n, +\infty[)$. Montrer alors que l'intégrale de f est finie si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente.
Indication : posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $B_k \overset{\text{def}}{=} \{k \le f < k+1\}$; l'intégrale sur X de f est finie si et seulement si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mu(B_k)$ est convergente, comme on le montrera en décomposant l'intégrale sur X en somme des intégrales sur chaque B_k.

Exercice 4.13 $(\star\star\star)$
On suppose que f est une fonction mesurable à valeurs positives vérifiant $\int_X fg \, d\mu < +\infty$, pour toute fonction g mesurable à valeurs positives vérifiant $\int_X g \, d\mu < +\infty$.

(i) On suppose que μ est une mesure finie ; montrer alors qu'il existe une constante réelle $M \ge 0$ telle que $f \le M$ p.p.

(ii) Montrer que le résultat subsiste encore si μ est une mesure σ-finie.

(iii) A l'aide d'un contre-exemple, montrer que le résultat n'est plus valable si μ n'est pas une mesure σ-finie.

Exercice 4.14 $(\star)$
On se donne f et g deux applications définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec f μ-intégrable et g $\mathcal{T}$-mesurable et bornée sur X. Montrer que le produit fg est μ-intégrable.

Exercice 4.15 $(\star\star)$
On suppose que la mesure μ est finie sur l'espace $(X, \mathcal{T})$.

(i) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles finies positives et $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables définies sur X et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur X, alors la suite $\left(\int_X f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_X f \, d\mu$.

(ii) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions à valeurs réelles μ-intégrables qui converge uniformément sur X vers une fonction f, alors on a l'égalité :

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

(iii) Cette conclusion subsiste-t-elle si l'espace X n'est plus supposé de μ-mesure finie ?

Exercice 4.16 $(\star)$
On note μ_d la mesure de dénombrement qui est définie sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de toutes les parties de $\mathbb{N}$. On considère une suite double $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de réels. On peut en déduire une suite $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par la formule :

$$g_m(n) = u_{m,n}.$$

On demande alors de montrer, par application du théorème de permutation des signes $\int$ et $\sum$ que, si la série $\sum_m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}|\right)$ est convergente, alors :

(i) Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$ sont convergentes pour toutes valeurs de m et de n ;

(ii) Les séries $\sum_m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ et $\sum_n \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ sont convergentes ;

(iii) On a l'égalité $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$.

Exercice 4.17 $(\star\star)$
Soit f une application $\mathcal{T}$-mesurable de X dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, on définit la troncature f_n de f au niveau n par la formule :

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad f(x) > n\,; \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq n\,; \\ -n & \text{si} \quad f(x) < -n. \end{cases}$$

(i) Montrer que si f est μ-intégrable, alors on a l'égalité :

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

(ii) Réciproquement, si l'on a l'inégalité :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty,$$

montrer que f est μ-intégrable.

Exercice 4.18 $(\star\star\star)$
Soient f_1 et f_2 deux fonctions à valeurs réelles μ-intégrables et, pour toute partie A $\mathcal{T}$-mesurable, on pose $\nu_1(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f_1 \, d\mu$ ainsi que $\nu_2(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f_2 \, d\mu$. Montrer que l'égalité $\nu_1(A) = \nu_2(A)$ est vraie pour tout élément de $\mathcal{T}$ si et seulement si les deux fonctions f_1 et f_2 sont μ-presque partout égales.

Exercice 4.19 $(\star\star\star)$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application borélienne λ-intégrable, où λ désigne la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$.

(i) Montrer que l'application

$$\phi : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)| \, d\lambda(t)$$

est bien définie et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) \leq 2N_1(f)$.

(ii) On suppose dans cette question que f est nulle à l'extérieur d'un intervalle compact de la forme $[-M, M]$, où $M > 0$; montrer que, sous ces hypothèses, $\phi(x) = 2N_1(f)$, si $x \geq 2M$.

(iii) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 2N_1(f)$.

4.7 Corrigés des exercices

Corrigé 4.1 Il suffit de considérer l'application borélienne

$$1_{[0,1[} + 2.1_{[1,2]}.$$

que l'on peut écrire aussi $1_{[0,2]} + 1_{[1,2]}$.
Remarque : dans le cas où f est non nulle, on montre que la décomposition en $\sum_i \alpha_i 1_{A_i}$ est unique si les $(A_i)_i$ sont disjoints deux à deux et si les $(\alpha_i)_i$ sont distincts deux à deux et non nuls.

Corrigé 4.2 On suppose que les fonctions f et g sont mesurables et prennent un nombre fini de valeurs notées respectivement $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_m$. Alors les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont mesurables, d'après la proposition 2.18 (i). D'autre part, ces fonctions prennent leurs valeurs dans l'ensemble

$$\{a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m\},$$

qui est fini. Donc, les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont $\mathcal{T}$-étagées.

Corrigé 4.3 Remarquons tout d'abord, que toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\overline{\mathbb{R}}$ est $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable.

(i) Traitons tout d'abord le cas d'une fonction positive f. Grâce à l'égalité

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) 1_{\{n\}},$$

et par application du théorème de permutation des symboles $\sum$ et $\int$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_d &= \int_{\mathbb{N}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) 1_{\{n\}} \right) d\mu_d \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{N}} f(n) 1_{\{n\}} \, d\mu_d \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \mu_d(\{n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(n). \end{aligned}$$

(ii) Traitons maintenant le cas d'une fonction de signe quelconque. Une fonction f est μ_d-intégrable si $\int_{\mathbb{N}} |f| \, d\mu_d < +\infty$, ce que l'on peut écrire, grâce au (i) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f(n)| < +\infty.$$

En d'autres termes, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ est absolument convergente. Si f est une telle fonction, alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu_d &= \int_{\mathbb{N}} f^+ d\mu_d - \int_{\mathbb{N}} f^-\, d\mu_d \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f^+(n) - \sum_{n=0}^{+\infty} f^-(n) \quad \text{[d'après (i)]} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).\end{aligned}$$

Corrigé 4.4 Soit $x \in X$ et notons δ_x la mesure de Dirac en x.

(i) Traitons tout d'abord le cas d'une fonction mesurable positive f et montrons que

$$\int_X f\, d\delta_x = f(x). \tag{18}$$

• Si f est une fonction indicatrice de la forme $f = 1_A$ $(A \in \mathcal{T})$,

$$\int_X f\, d\delta_x = \int_X 1_A\, d\delta_x = \delta_x(A) = 1_A(x) = f(x)$$

et la relation (18) est vraie pour les fonction indicatrices.

• Si f est une fonction étagée, on peut écrire f sous la forme $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ (où $\alpha_i \geq 0$ et $A_i \in \mathcal{T}$, $i = 1, \cdots, n$). Alors

$$\int_X f\, d\delta_x = \int_X \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}\right) d\delta_x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X 1_{A_i}\, d\delta_x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x),$$

la dernière égalité se déduisant de ce qui précède. Et donc, $_X f\, d\delta_x = f(x)$.

• Si f est mesurable positive, alors, d'après le théorème d'approximation, f est limite croissante d'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives. D'après le théorème de la convergence monotone croissante, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_X f\, d\delta_x &= \int_X \lim_{n\to+\infty} \varphi_n\, d\delta_x \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n\, d\delta_x \\ &= \lim \varphi_n(x) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

(ii) Traitons maintenant le cas d'une fonction mesurable de signe quelconque, notée f. $f \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si $\int_X |f|\, d\delta_x < +\infty$, ce qui s'écrit $|f(x)| < +\infty$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\int_X f\, d\delta_x &= \int_X f^+\, d\delta_x - \int f^-\, d\delta_x \\ &= f^+(x) - f^-(x) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Corrigé 4.5 • Si f est une fonction indicatrice de la forme $f = 1_A$ où A est un borélien de $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A(x+a)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{A-\{a\}}(x)\, d\lambda(x) = \lambda(A - \{a\}).$$

Or d'après l'exercice 3.15, la mesure de Borel λ est stable par translation, donc, $\lambda(A - \{a\}) = \lambda(A) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x)\, d\lambda(x)$. D'où le résultat dans ce cas.

• Traitons maintenant le cas d'une fonction étagée f positive de la forme $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x+a)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x+a)\, d\lambda(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}} 1_{A_i}(x+a)\, d\lambda(x) \quad \text{[linéarité de l'intégrale]} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}} 1_{A_i}(x)\, d\lambda(x) \quad \text{[d'après l'étape 1]} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x). \quad \text{[linéarité de l'intégrale].}\end{aligned}$$

Le résultat est donc vrai pour les fonctions étagées.

• Supposons que f est mesurable positive ; d'après le théorème d'approximation, on peut écrire $f = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n$, où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives ; alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+.) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x+.)$, où $(\varphi_n(x+.))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives. Le théorème de la convergence monotone ainsi que l'étape précédente permettent d'affirmer

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x+a)\, d\lambda(x) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x+a)\, d\lambda(x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x).\end{aligned}$$

• Enfin, soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x+a)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x+a)\, d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x+a)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\, d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x).\end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré.

Corrigé 4.6 On rappelle que l'application $\mu_1+\mu_2 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ définie, pour $T \in \mathcal{T}$, par

$$(\mu_1+\mu_2)(T) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1(T)+\mu_2(T),$$

est une mesure (voir exercice 2.3).

(i) Nous allons démontrer le résultat en trois étapes successives.

• Supposons tout d'abord que f soit une fonction indicatrice de la forme $f = 1_T$ avec $T \in \mathcal{T}$. On a

$$\int_X 1_T \, d(\mu_1+\mu_2) = (\mu_1+\mu_2)(T) = \mu_1(T)+\mu_2(T) = \int_X 1_T \, d\mu_1 + \int_X 1_T \, d\mu_2.$$

Donc, le résultat est vrai pour les fonctions indicatrices.

• Traitons maintenant le cas d'une fonction étagée positive f de la forme $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{T_i}$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_X \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{T_i}\Big) \, d(\mu_1+\mu_2) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X 1_{T_i} \, d(\mu_1+\mu_2) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\int_X 1_{T_i} \, d\mu_1 + \int_X 1_{T_i} \, d\mu_2\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X 1_{T_i} \, d\mu_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X 1_{T_i} \, d\mu_2 \\
&= \int_X \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{T_i}\right) d\mu_1 + \int_X \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{T_i}\right) d\mu_2.
\end{aligned}$$

Le résultat subsiste donc pour les fonctions étagées.

• Supposons ensuite que f soit mesurable positive. D'après le théorème d'approximation, on peut écrire f sous la forme $f = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n$, où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives. Le théorème de la convergence monotone ainsi que l'étape précédente permettent d'affirmer :

$$\begin{aligned}
\int_X f \, d(\mu_1+\mu_2) &= \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n \, d(\mu_1+\mu_2) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\int_X \varphi_n \, d\mu_1 + \int_X \varphi_n \, d\mu_2\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n \, d\mu_1 + \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n \, d\mu_2 \\
&= \int_X f \, d\mu_1 + \int_X f \, d\mu_2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat est démontré pour toute fonction mesurable positive.

(ii) Nous avons, d'après la question (i), les équivalences suivantes pour une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable :

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{L}^1(\mu_1+\mu_2) &\iff \int_X |f| \, d(\mu_1+\mu_2) < +\infty \\
&\iff \int_X |f| \, d\mu_1 + \int_X |f| \, d\mu_2 < +\infty \\
&\iff \begin{cases} \displaystyle\int_X |f| \, d\mu_1 < +\infty \ \text{ et} \\ \displaystyle\int_X |f| \, d\mu_2 < +\infty \end{cases} \\
&\iff f \in \mathcal{L}^1(\mu_1) \cap \mathcal{L}^1(\mu_2).
\end{aligned}$$

Pour une telle fonction, on a alors :

$$\begin{aligned}
\int_X f \, d(\mu_1+\mu_2) &= \int_X f^+ \, d(\mu_1+\mu_2) - \int_X f^- \, d(\mu_1+\mu_2) \\
&= \left(\int_X f^+ \, d\mu_1 + \int_X f^+ \, d\mu_2\right) - \left(\int_X f^- \, d\mu_1 + \int_X f^- \, d\mu_2\right) \\
&= \left(\int_X f^+ \, d\mu_1 - \int_X f^- \, d\mu_1\right) + \left(\int_X f^+ \, d\mu_2 - \int_X f^- \, d\mu_2\right) \\
&= \int_X f \, d\mu_1 + \int_X f \, d\mu_2.
\end{aligned}$$

Corrigé 4.7 (i) D'après le chapitre 2, $f_{|Y}$ est aussi mesurable. Si $f = 1_A$, nous avons

$$\int_X 1_A.1_Y \, d\mu = \mu(A\cap Y) \quad \text{et} \quad \int_T (1_A)_{|Y} \, d\mu_{|Y} = \int_Y 1_{A\cap Y} \, d\mu_{|Y} = \mu(A\cap Y).$$

Donc, on obtient l'égalité : $\int_X 1_A.1_Y \, d\mu = \int_T (1_A)_{|Y} \, d\mu_{|Y}$.

Par linéarité puis par le théorème de la convergence monotone, on conclut de manière classique que cette égalité s'étend aux fonctions mesurables positives (voir la correction des exercices 4.4, 4.5 et 4.6).

(ii) Supposons que f soit μ-intégrable. Alors, par (i),

$$\int_Y |f_{|Y}| \, d\mu_{|Y} = \int_Y |f|_{|Y} \, d\mu_{|Y} = \int_X |f|.1_Y \, d\mu < +\infty,$$

et $f_{|Y}$ est $\mu_{|Y}$-intégrable. L'égalité (17) se démontre alors de manière classique (voir exercices 4.4, 4.5 et 4.6).

Corrigé 4.8 (i) L'application $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $s(x) = -x$ est continue donc mesurable. Ainsi, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $-A = s^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive et paire. Posons

$$g = f.1_{]0,+\infty[}.$$

D'après le théorème d'approximation, il existe une suite croissante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives convergeant simplement vers g. Considérons alors la suite croissante de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si} \quad x > 0 \,; \\ g_n(-x) & \text{si} \quad x < 0 \,; \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons faire les deux remarques suivantes.

- Comme la fonction f est paire, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f.1_{\mathbb{R}^\star}$.
- La fonction g_n peut se mettre sous la forme $g_n = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n 1_{A_i^n}$, où $\alpha_i^n \geq 0$ et $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^\star$. Il est clair alors que

$$f_n = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n (1_{A_i^n} + 1_{-A_i^n}).$$

De ces remarques, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n (\mu(A_i^n) + \mu(-A_i^n)) \\ &= 2\sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n \mu(A_i^n) \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} g_n \, d\mu.\end{aligned}$$

Ainsi, nous déduisons la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}2\int_{\mathbb{R}} f 1_{[0,+\infty[} \, d\mu &= 2\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu && [\text{car } \mu(\{0\}) = 0] \\ &= 2\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\mu && [\text{th. de la convergence monotone}] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} f \, 1_{\mathbb{R}^\star} \, d\mu && [\text{th. de la convergence monotone}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu. && [\text{car } \mu(\{0\}) = 0]\end{aligned}$$

Corrigé 4.9 (A1) $\Rightarrow$ (A2). Soit $\epsilon > 0$; puisque $\mu(X) < +\infty$, il suffit de trouver un entier N tel que, pour $n \geq N$,

$$\int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu \leq (\mu(X)+1)\,\epsilon.$$

Pour cela, on écrit tout d'abord

$$\int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu = \int_{\{|f_n|>\epsilon\}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu + \int_{\{|f_n|\leq\epsilon\}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu.$$

Comme $\dfrac{|f_n|}{1+|f_n|} \leq 1$ (en particulier sur $\{|f_n| > \epsilon\}$) et comme

$$\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \leq \epsilon$$

sur $\{|f_n| \leq \epsilon\}$ (utiliser la croissante de l'application $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$), on déduit

$$\begin{aligned}\int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu &\leq \int_{\{|f_n|>\epsilon\}} 1 \, d\mu + \int_{\{|f_n|\leq\epsilon\}} \epsilon \, d\mu \\ &= \mu(\{|f_n| > \epsilon\}) + \epsilon\mu(\{|f_n| \leq \epsilon\}) \\ &\leq \mu(\{|f_n| > \epsilon\}) + \epsilon\mu(X).\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse, il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$,

$$\mu(\{|f_n| > \epsilon\}) \leq \epsilon$$

et donc,

$$\int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu \leq (\mu(X)+1)\,\epsilon.$$

(A2) $\Rightarrow$ (A1). Soit $\epsilon > 0$; nous avons

$$\int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu \geq \int_{\{|f_n|>\epsilon\}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu.$$

La croissante de l'application $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$ se traduit par

$$\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

sur $\{|f_n| > \epsilon\}$ et donc,

$$\int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} \, d\mu \geq \int_{\{|f_n|>\epsilon\}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \, d\mu = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\mu(\{|f_n| > \epsilon\}).$$

Cette dernière inégalité permet de conclure.

Corrigé 4.10 (A1) $\Rightarrow$(A3). Considérons la suite de fonctions $(\delta_k)_{k\geq 1}$ définie, pour tout $x \in X$, par

$$\delta_k(x) = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} f(x)^n = f(x).\frac{1-f(x)^{2k}}{1+f(x)}.$$

Par hypothèse, la suite de fonctions $(\delta_k)_{k\geq 1}$ converge simplement μ-presque partout vers $\dfrac{f}{1+f}$. Mais d'autre part :

$$\begin{aligned}\delta_{k+1}(x)-\delta_k(x) &= (-1)^{2k+3}f(x)^{2k+2}+(-1)^{2k+2}f(x)^{2k+1}\\ &= f(x)^{2k+1}(-f(x)+1).\end{aligned}$$

Si l'on pose $A \stackrel{\text{def}}{=} \{f\geq 1\}$, la suite de fonctions $(\delta_k)_{k\geq 1}$ est donc, croissante sur $X\setminus A$. D'après le théorème de la convergence monotone, on a donc

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{X\setminus A}\delta_k\,d\mu=\int_{X\setminus A}\frac{f}{1+f}\,d\mu.$$

Or, puisque A est de mesure nulle,

$$\int_{X\setminus A}\frac{f}{1+f}\,d\mu=\int_X\frac{f}{1+f}\,d\mu$$

et

$$\int_{X\setminus A}\delta_k\,d\mu=\int_X\delta_k\,d\mu=\sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n+1}\int_X f^n\,d\mu.$$

Donc,

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n+1}\int_X f^n\,d\mu=\int_X\frac{f}{1+f}\,d\mu \tag{19}$$

Par ailleurs, sur la partie négligable $X\setminus A$, $0\leq f^n\leq f<1$; donc, sur $X\setminus A$, la suite de fonctions $(f^n)_{n\geq 1}$ converge vers la fonction nulle tout en étant dominée par la fonction intégrable f. Ainsi, d'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f^n\,d\mu=0. \tag{20}$$

On a donc démontré que les sommes partielles de rang pair de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\int_{\mathbb{R}} f^n\,d\mu$$

tendent vers $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{f}{1+f}\,d\mu$ (d'après la relation (19)).Mais comme elles ne diffèrent des sommes partielles de rang impair que par une quantité qui tend vers 0 (d'après la relation (20)), on est en droit d'affirmer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\int_{\mathbb{R}} f^n\,d\mu$$

converge vers $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{f}{1+f}\,d\mu$.

(A3) $\Rightarrow$(A2). Evident.

(A2) $\Rightarrow$(A1). Comme nous avons affaire à une série convergente, le terme général tend vers zéro ; donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f^n\,d\mu=0.$$

Or nous avons :

$$\int_X f^n\,d\mu\geq\int_{\{f\geq 1\}}f^n\,d\mu,$$

et comme $f^n\geq 1$ sur $\{f\geq 1\}$, nous obtenons

$$\int_X f^n\,d\mu\geq\mu(\{f\geq 1\}).$$

En faisant $n\to+\infty$ dans cette inégalité, nous concluons : $\mu(\{f\geq 1\})=0$.

Corrigé 4.11 (i) Montrons que la suite de fonctions positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'égalité $f_n=f.1_{X\setminus A_n}$ est croissante, c'est-à-dire,

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad f_n\leq f_{n+1}.$$

En effet si $x\in A_n$ alors $f_n(x)=f(x)1_{X\setminus A_n}(x)=0\leq f_{n+1}(x)$. Sinon si $x\notin A_n$ on a $f_n(x)=f(x)$ et, comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $x\notin A_{n+1}$ et $f_{n+1}(x)=f(x)$; à nouveau $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$.
Montrons aussi que cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f. Soit $x\in X$; il existe un entier n_0 tel que $f(x)<n_0$ et alors, pour $n\geq n_0$, $x\in A_n$, ce qui implique $f_n(x)=f(x)$. Donc, nous avons $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$.
Par application du théorème de la convergence monotone, on obtient :

$$\int_X f\,d\mu=\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu. \tag{21}$$

Or l'égalité $f=f.1_X=f.(1_{A_n}+1_{X\setminus A_n})=f.1_{A_n}+f_n$ entraîne

$$\int_X f1_{A_n}\,d\mu+\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu<+\infty. \tag{22}$$

En combinant les relations (21) et (22), on déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f1_{A_n}\,d\mu=0. \tag{23}$$

En intégrant chaque coté de l'inégalité $n1_{A_n}\leq f.1_{A_n}$, on obtient

$$n\mu(A_n)\leq\int_X f.1_{A_n}\,d\mu<+\infty$$

qui permet de conclure d'une part, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mu(A_n)<+\infty$ et, d'autre part, grâce à la relation (23) :

$$\lim_{n\to+\infty}n\mu(A_n)=0.$$

(ii) Considérons la fonction constante f égale à 1 de $\mathbb{N}$ dans lui-même, où $\mathbb{N}$ est muni de la tribu discrète et de la mesure de dénombrement μ_d. Pour $n \geq 2$, $A_n \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}([n, +\infty[) = \emptyset$ et donc, $\mu_d(A_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n\mu_d(A_n) = 0$. Par contre $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_d = \mu_d(\mathbb{N}) = +\infty$.

Corrigé 4.12 Soit $k \in \mathbb{N}$; en intégrant l' inégalité $k1_{B_k} \leq f1_{B_k} \leq (k+1)1_{B_k}$, on a

$$k\mu(B_k) \leq \int_{B_k} f\, d\mu \leq (k+1)\mu(B_k).$$

En sommant alors ces inégalités de 0 à $+\infty$, on obtient l'encadrement suivant de $\int_X f\, d\mu$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mu(B_k) \leq \int_X f\, d\mu \leq \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\mu(B_k). \tag{24}$$

Si $\int_X f\, d\mu < +\infty$, alors il est clair que $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mu(B_k)$. Inversement, si

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mu(B_k) < +\infty,$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\mu(B_k) &= \mu(B_0) + \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\mu(B_k)\\ &\leq \mu(B_0) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} k\mu(B_k) < +\infty,\end{aligned}$$

puisque $\mu(B_0) \leq \mu(X) < +\infty$. A nouveau, grâce à la relation (24), nous obtenons $\int_X f\, d\mu < +\infty$.

Pour conclure il suffit de vérifier que les séries $\sum_{k=0}^{\infty} k\mu(B_k)$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sont de même nature. De l'égalité $a_k - a_{k+1} = \mu(B_k)$, vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, on tire :

$$\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} k\mu(B_k).$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n} ka_k - \sum_{k=0}^{n} ka_{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1},\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} k\mu(B_k).$$

La suite de terme général $na_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - a_{n+1}$ tendant vers zéro grâce à l'exercice 4.11, on conclut que les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mu(B_k)$ sont de même nature.

Corrigé 4.13 (i) Nous allons démontrer la contraposée. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{f \geq n\} ;$$

alors, par les hypothèses, $0 < \mu(A_n) < +\infty$. Considérons alors la fonction mesurable

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\mu(A_n)} 1_{A_n}.$$

D'une part, par application du théorème de permutation des signes $\sum$ et $\int$, on a

$$\int_X g\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\mu(A_n)} \int_X 1_{A_n}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty ;$$

d'autre part, toujours grâce au théorème de permutation des signes $\sum$ et $\int$,

$$\int_X fg\, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\mu(A_n)} \int_{A_n} f\, d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Ainsi nous avons trouvé une fonction g mesurable positive telle que les intégrales $\int_X g\, d\mu$ et $\int_X fg\, d\mu$ soient respectivement finie et infinie.

(ii) Comme la mesure μ est σ-finie, il existe une suite croissante $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X telle que $\bigcup_{p=0}^{+\infty} X_p = X$ et telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mu(X_p) < +\infty$. On pose comme dans la question (i), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{f \geq n\}.$$

Nous allons démontrer la contraposée : supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) > 0$. A n fixé, comme la suite $(A_n \cap X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante

$$\lim_{p\to+\infty} \mu(A_n \cap X_p) = \mu\Big(\bigcup_{p=0}^{+\infty}[A_n \cap X_p]\Big) = \mu(A_n) > 0 ;$$

et donc, il existe un entier p_n tel que $\mu(A_n \cap X_{p_n}) > 0$. Posons alors

$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} A_n \cap X_{p_n} ;$$

en utilisant la fonction $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\mu(B_n)} 1_{B_n}$, on conclut de la même manière qu'au (i).

(iii) Si la mesure μ n'est pas σ-finie, la conclusion n'est plus valable. Pour s'en convaincre, prenons $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure définie par $\mu(A) = 0$, si A est un borélien dénombrable et $\mu(A) = +\infty$, si A est un borélien non dénombrable. Dans cette situation, une fonction g est μ-intégrable si $g = 0$ p.p., et alors $fg = 0$ p.p., ce qui entraîne $\int_X fg \, d\mu = 0 < +\infty$. L'hypothèse est donc satisfaite pour toute fonction f. En prenant par exemple la fonction valeur absolue, la conclusion n'est pas satisfaite.

Corrigé 4.14 Par hypothèse, il existe une constante $M \geq 0$ telle que $|g| \leq M$. Alors $|f.g| \leq Mf$ et, par croissance de l'intégrale,

$$\int_X |f.g| \, d\mu \leq \int_X M.f \, d\mu = M \int_X |f| \, d\mu < +\infty.$$

Corrigé 4.15 (i) Soit $\epsilon > 0$; il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|f_n - f|(x) : x \in X\} \leq \epsilon \, ;$$

cela peut s'écrire $f \leq f_n + \epsilon$ et $f_n \leq f + \epsilon$. En intégrant chaque membre de ces inégalités on obtient, pour $n \geq n_0$,

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu + \epsilon\mu(X) \ \text{ et } \ \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu + \epsilon\mu(X).$$

Si $\int_X f \, d\mu = +\infty$, alors, pour $n \geq n_0$, $\int_X f_n \, d\mu = +\infty$ puisque $\mu(X) < +\infty$. Dans ce cas, on a bien $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.
Si $\int_X f \, d\mu < +\infty$ alors, pour $n \geq n_0$,

$$\int_X f_n \, d\mu < +\infty \text{ et } \left|\int_X f \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu\right| \leq \epsilon\mu(X).$$

Cela exprime que $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

(ii) On a pour $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_X \leq 1$, ce qui entraîne (a) $|f| \leq |f_n| + 1$ et (b) $|f_n| \leq |f| + 1$. La relation (a) permet de dire que

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \int_X |f_n| \, d\mu + \mu(X) < +\infty,$$

soit $f \in \mathcal{L}^1$, tandis que la relation (b) exprime que la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ est dominée en valeur absolue par une fonction intégrable. Le théorème de la convergence

dominée, par exemple, permet de conclure.
Remarque : on aurait pu conclure par un raisonnement analogue à celui fait à la question (i).

(iii) Prenons $(X, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ et la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $f_n = \left(\frac{1}{n+1} 1_{\{0,\cdots,n\}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui bien sûr converge uniformément vers la fonction nulle. Comme, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = 1$ (voir exercice 4.3), la conclusion de la question (i) ne subsiste pas.

Corrigé 4.16 D'après l'exercice 4.3, l'hypothèse s'écrit :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{N}} |g_m| \, d\mu_d < +\infty.$$

Grâce au théorème de permutation des signes $\int$ de $\sum$, $\sum_{m=0}^{+\infty} g_m$ est (a) définie μ_d-presque partout, est (b) égale μ_d-presque partout à une fonction de l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ et (c) on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{+\infty} g_m \, d\mu_d = \sum_{m=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{N}} g_m \, d\mu_d. \tag{25}$$

Comme le seul ensemble de mesure nulle dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ est l'ensemble vide, on déduit que :
(a) $\sum_{m=0}^{+\infty} g_m(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est clair d'autre part que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$ est convergente pour tout m, d'après l'hypothèse de l'énoncé, car cette série est absolument convergente.
(b) $\sum_{m=0}^{+\infty} g_m \in \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$, ce qui s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right| < +\infty$; en particulier $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ est converge. Il est clair que $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ est convergente puisque égale à $\sum_{m=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{N}} g_m \, d\mu_d$ qui est une série absolument convergente ($\left|\int_{\mathbb{N}} g_m \, d\mu_d\right| \leq \int_{\mathbb{N}} |g_m| \, d\mu_d$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{N}} |g_m| \, d\mu_d < +\infty$).
(c) La relation (25) s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right).$$

Corrigé 4.17 (i) Remarquons que, d'après l'exercice 2.17, f_n est bien mesurable. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. En effet, si $|f(x)| < +\infty$, alors la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et égale à $f(x)$ à partir d'un certain rang ; si $f(x) = +\infty$ alors $f_n(x) = n$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$; si $f(x) = -\infty$ alors $f_n(x) = -n$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$. De plus, de manière évidente, on a $|f_n| \leq f$. Le théorème de la convergence dominée permet alors de conclure

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

(ii) D'après une remarque faite dans la question (i), la suite $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $|f|$; en particulier $\liminf_{n\in\mathbb{N}} |f_n| = |f|$. Le lemme de Fatou permet alors de conclure

$$\int_X |f|\, d\mu = \int_X \liminf_{n\in\mathbb{N}} |f_n|\, d\mu \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty.$$

Remarque : dans cette question, on aurait pu montrer que la suite $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ était croissante et ensuite appliquer le théorème de la convergence monotone croissante.

Corrigé 4.18 Par le cours, il est clair que si $f_1 = f_2$ p.p., alors $f_1.1_A = f_2.1_A$ p.p. et donc, $\nu_1(A) = \nu_2(A)$.
Réciproquement, supposons que, pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\nu_1(A) = \nu_2(A)$. Choisissons alors la partie de X :

$$B = \{f_1 > f_2\}.$$

En remarquant que $B = (f_1 - f_2)^{-1}(]0, +\infty[)$, on constate que $B \in \mathcal{T}$ puisque $f_1 - f_2$ est mesurable et que $]0, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc,

$$\int_B f_1\, d\mu = \int_B f_2\, d\mu,$$

et, puisque les fonctions sont μ-intégrables, $\int_X (f_1 - f_2).1_B\, d\mu = 0$. Comme $(f_1 - f_2).1_B \geq 0$ et que son intégrale est nulle, on obtient

$$(f_1 - f_2).1_B = 0 \text{ p.p.}$$

Par définition, il existe donc une partie $N \in \mathcal{T}$ telle que $\mu(N) = 0$ et, pour tout $x \in X \setminus N$,

$$[(f_1 - f_2).1_B](x) = 0.$$

Montrons que $B \subset N$; si $x \in B$ alors $[(f_1 - f_2).1_B](x) = f_1(x) - f_2(x) > 0$ et donc $x \in N$. Ainsi $\mu(B) \leq \mu(N) = 0$.
De la même manière, on prouve que $\mu(\{f_2 > f_1\}) = 0$. Par conséquent

$$\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = \mu(\{f_1 > f_2\} \cup \{f_2 > f_1\}) = \mu(\{f_1 > f_2\}) + \mu(\{f_2 > f_1\}) = 0,$$

et donc, $f_1 = f_2$ p.p.

Corrigé 4.19 (i) Pour montrer que ϕ est bien définie, il suffit de démontrer que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|\, d\lambda(t)$$

a un sens et est réel. Il est clair que la fonction $t \mapsto |f(x+t) - f(t)|$ est mesurable positive et donc, $\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|\, d\lambda(t)$ a un sens. De l'inégalité

$$|f(x+t) - f(t)| \leq |f(x+t)| + |f(t)|,$$

on tire

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|\, d\lambda(t) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|\, d\lambda(t) + \int_{\mathbb{R}} |f(t)\, d\lambda(t).$$

Or, en faisant le changement de variable $u = x + t$, on a (voir exercice 4.5)

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\, d\lambda(u)$$

et, par conséquent, $\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|\, d\lambda(t) \leq 2N_1(f) < +\infty$. La fonction ϕ est donc bien définie et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\phi(x)| \leq 2N_1(f).$$

(ii) Supposons que la fonction f soit à support compact, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $t \notin [-M, M]$, $f(t) = 0$. Pour $x \geq 2M$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int_{]-\infty,-M]} |f(x+t) - f(t)|\, d\lambda(t) + \int_{]-M,+\infty[} |f(x+t) - f(t)|\, d\lambda(t) \\
&= \int_{]-\infty,-M]} |f(x+t)|\, d\lambda(t) + \int_{]-M,+\infty[} |f(t)|\, d\lambda(t) \\
&= \int_{]-\infty,-M+x]} |f(u)|\, d\lambda(u) + \int_{]-M,+\infty]} |f(t)|\, d\lambda(t) \\
&= 2N_1(f).
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \geq 2M$, $\phi(x) = 2N_1(f)$.

(iii) Supposons maintenant que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = f.1_{[-n,n]}.$$

La suite de fonctions $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n - f| \leq 2|f|,$$

par application du théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} N_1(f_n - f) = 0. \tag{26}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$, on a :

$$|\phi(x) - 2N_1(f)| = |N_1(f(x+.) - f(.)) - 2N_1(f)| \leq d_1 + d_2 + d_3$$

où

$$\begin{cases} d_1 &= |N_1(f(x+.) - f(.)) - N_1(f_n(x+.) - f_n(.))| \,; \\ d_2 &= |N_1(f_n(x+.) - f(.)) - 2N_1(f_n)| \,; \\ d_3 &= |2N_1(f_n) - 2N_1(f)|. \end{cases}$$

Or

$$d_1 \leq \int_{\mathbb{R}} |\,|f(x+t) - f(x)| - |f_n(x+t) - f_n(t)|\,|\, d\lambda$$

et, en utilisant l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ sous la forme $|\,|u| - |v|\,| \leq |u-v|$,

$$d_1 \leq \int_{\mathbb{R}} |\,[f(x+t) - f_n(x+t)] - [f(x) - f_n(t)]\,|\; d\lambda(t)$$

puis, en utilisant l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ sous la forme $|u-v| \leq |u| + |v|$,

$$d_1 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f_n(x+t)|\, d\lambda(t) + N_1(f - f_n).$$

En faisant le changement de variable $u = x + t$ dans la première intégrale, on déduit $d_1 \leq 2N_1(f - f_n)$.
Grâce à la question (ii), pour $x \geq 2n$, nous avons $d_2 = 0$.
Quant à d_3, nous avons

$$d_3 = 2\left|\int_{\mathbb{R}} |f_n|\, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda\right| \leq 2\int_{\mathbb{R}} |\,|f_n| - |f|\,|\; d\lambda \leq 2N_1(f_n - f).$$

En conclusion nous avons, pour $x \geq 2n$,

$$|\phi(x) - 2N_1(f)| \leq 4N_1(f_n - f). \tag{27}$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$; d'après la relation (26), il existe un entier n_ϵ tel que $N_1(f_n - f) \leq \frac{\epsilon}{4}$. Alors, d'après la relation (27), pour $x \geq 2n_\epsilon$,

$$|\phi(x) - 2N_1(f)| \leq \epsilon.$$

Ainsi, nous avons démontré que $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = 2N_1(f)$.

5 COMPARAISON DES INTÉGRALES DE LEBESGUE ET DE RIEMANN

Dans ce chapitre, $\mathbb{R}$ est muni de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Borel λ.

5.1 Cas d'une intégrale non généralisée

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle $I = [a, b]$ $(a \leq b)$ et nulle à l'extérieur de I. Le théorème suivant permet de comparer l'intégrale de Lebesgue de f sur $\mathbb{R}$, étudiée dans le chapitre 4 et notée $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$, avec l'intégrale de f utilisée en premier cycle, notée $\int_a^b f(t)\, dt$, et dite intégrale de Riemann de f sur I. On rappelle que $\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$, en notant F une primitive de f sur $[a, b]$.

Théorème 5.1 *La fonction f appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et*

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \int_a^b f(t)\, dt.$$

5.2 Cas d'une intégrale généralisée

Regardons maintenant le cas des intégrales impropres. Considérons une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle $J = [a, b[$, où $-\infty < a < b \leq +\infty$ et nulle à l'extérieur de J. Les intervalles de la forme $]a, b]$, où $-\infty \leq a < b < +\infty$ se traitent de la même façon. Le théorème suivant permet de relier l'intégrale de Lebesgue de g sur $\mathbb{R}$, notée $\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda$, avec l'intégrale généralisée de g utilisée en premier cycle, notée $\int_a^b g(t)\, dt$, et dite intégrale de Riemann généralisée de g sur J. On rappelle que $\int_a^b g(t)\, dt$ a un sens si $\lim\limits_{t \to b^-} G(t) - G(a)$ existe, en notant G une primitive de g sur J ; dans ce cas, on dit que l'intégrale est convergente et on pose $\int_a^b g(t)\, dt = \lim\limits_{t \to b^-} G(t) - G(a)$. On utilisera bien sûr les techniques classiques étudiées en premier cycle pour prouver la convergence ou la non-convergence des intégrales.

Théorème 5.2 *Nous avons les deux situations suivantes.*

(i) *Si $g \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$ a toujours un sens et*

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \begin{cases} \int_a^b g(t) \, dt & \text{si } \int_a^b g(t)\, dt \text{ est une intégrale convergente ;} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Si g est de signe quelconque, $\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$ a un sens si et seulement si $\int_a^b g(t) \, dt$ est absolument convergente et dans ce cas*

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \int_a^b g(t) \, dt.$$

Remarque 5.3 Dans les exercices, les fonctions seront parfois définies et continues sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ au lieu d'être définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Dans ce cas, si f est une telle fonction, il faut se placer sur l'espace mesuré $(J, \mathcal{B}(J), \lambda_{|J})$ pour intégrer la fonction f et on écrira $\int_J f \, d\lambda$ au lieu de $\int_J f \, d\lambda_{|J}$. Cette notation peut-être justifiée par le fait que cette intégrale est égale à $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f} \, d\lambda$, où $\tilde{f}$ coïncide avec f sur J et s'annule sur $\mathbb{R} \setminus J$ (voir exercice 4.7). On peut alors appliquer de manière évidente les théorèmes de comparaison dans ce cas.

5.3 Énoncés des exercices

Exercice 5.1 $(\star\star\star)$
Démontrer le théorème de comparaison de l'intégrale de Riemann et de Lebesgue dans le cas des fonctions continues sur un intervalle compact et nulles à l'extérieur.

Exercice 5.2 $(\star\star)$
En utilisant seulement le théorème 5.1 (et pas le théorème 5.2!), calculer $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda(t)$, où $f(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}$, si $t \geq 1$, et $f(t) = 0$, sinon.

Exercice 5.3 $(\star\star)$
L'objet de cet exercice est de démontrer la remarquable identité :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}.$$

(i) Développer $\dfrac{1}{x^x}$ en série, pour $x > 0$; puis appliquer le théorème de la convergence monotone à ce développement.

(ii) Pour p et q entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (\ln x)^q \, dx$; justifier la convergence de cette intégrale.

(iii) Calculer $I(m, 0)$, pour tout entier naturel m.

(iv) Evaluer $I(p,q)$ grâce à une intégration par parties.

(v) Conclure.

Exercice 5.4 $(\star)$
(i) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ ;} \\ -n^2(x - \frac{2}{n}) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \text{ ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les quatre nombres :

$$A = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda, \quad A' = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\lambda,$$
$$B = \limsup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda, \quad B' = \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\lambda.$$

(ii) Reprendre la question (i) avec la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n = 1_{[0,1/4]}$, si n est pair, et $g_n = 1_{[1/4,1]}$, si n est impair.

(iii) Si maintenant $(h_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables positives définies sur $\mathbb{R}$, montrer que

$$\begin{cases} A' \leq A \leq B \text{ ;} \\ A' \leq B'. \end{cases}$$

Exercice 5.5 $(\star\star)$
Les fonctions suivantes sont-elles λ-intégrables :

(i) $f : \,]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ $(t \in]1, +\infty[)$;

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \dfrac{\sin t}{1+t^2}$ $(t \in \mathbb{R})$?

Exercice 5.6 $(\star\star)$
A l'aide de l'inégalité $(1-y)^{1/y} < e^{-1}$ pour $0 < y < 1$ et en justifiant de manière précise votre réponse, calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n (\cos x)^n (1-\frac{x}{n})^n \, dx = 0.$$

Exercice 5.7 $(\star\star)$
Si f est une fonction λ-intégrable sur l'intervalle $[a,b]$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} \ln(e+\frac{|x|}{n}) f(x) \, d\lambda(x).$$

Exercice 5.8 $(\star\star)$
On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications à valeurs réelles définies sur $[0,1]$ par l'égalité $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

(i) Trouver la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Y a-t-il convergence uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ pour cette suite?

(ii) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par une application constante. Autrement dit, trouver une constante réelle positive K telle que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x élément de l'intervalle $[0,1]$, on ait $|f_n(x)| \leq K$.

(iii) Quel sens attribuer au symbole $\int_{[0,1]} f_n(x) \, d\lambda(x)$? Par application du théorème de la convergence dominée, obtenir la limite de la suite $\left(\int_{[0,1]} f_n(x) \, d\lambda(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.9 $(\star\star)$
Pour tout $x \geq 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{[0,1]} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \, d\lambda(t)$.

(i) Montrer que f est bien définie ; calculer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(ii) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, calculer f' en fonction d'une intégrale et donner un équivalent de f' au voisinage de l'infini (on rapelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 5.10 $(\star\star)$
On se propose de calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f(a) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(ax) \, d\lambda(x).$$

(i) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(a)$ sous une forme intégrale.

(ii) Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

(iii) La résoudre et en déduire, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la valeur de $f(a)$.

Exercice 5.11 $(\star\star)$
Le but de cet exercice est de prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On considère, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = (\int_0^x e^{-t^2} \, dt)^2 \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, dt.$$

(i) Montrer que F et G sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur des dérivées au point x.

(ii) En déduire la valeur de la fonction $F+G$ au point x.

(iii) Par des majorations simples, montrer que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

(iv) Conclure.

Exercice 5.12 $(\star\star)$
On définit une application F de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par la formule, vraie pour $t > 0$,

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \, dx.$$

(i) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

(ii) En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout $t > 0$, $F(t) = C - \arctan t$.

(iii) En considérant la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $C = \dfrac{\pi}{2}$.

(iv) Conclure sur la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$.

Exercice 5.13 $(\star\star\star)$
L'objet de cet exercice est l'étude de la dérivabilité de l'intégrale de Riemann $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\, dt$. Remarquons que cette intégrale ne peut se calculer directement, car on ne connaît pas de formule explicite de l'intégrande.

(i) Montrer que $F(x)$ est définie pour $x > -1$.

(ii) Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée par rapport à x, lorsqu'elle existe, de la fonction f définie par la formule :

$$f(x,t) = \ln(1 + x\sin^2 t).$$

(iii) Montrer que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est bornée sur l'ensemble $]-1-\epsilon, +\infty[\times[0, \frac{\pi}{2}]$, où ϵ est arbitrairement choisi dans l'intervalle $]0,1[$.

(iv) En déduire, par application du théorème de dérivation sous le signe somme, que F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et exprimer sa dérivée par une intégrale de Riemann que l'on calculera en cherchant une primitive de l'intégrande (on sera conduit à traiter à part le calcul de $F'(0)$).

(v) Trouver une primitive de F' et en déduire une expression pour $F(x)$.

Exercice 5.14 $(\star\star\star)$
L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling, à savoir que, lorsque l'entier n tend vers l'infini, on a

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

et, plus généralement, que lorsque le réel x tend vers l'infini, on a

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}.$$

Pour cela, on admettra que si a est un réel non nul, alors la fonction qui à t réel associe e^{-at^2} est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale est $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\, d\lambda(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.
On pose, pour $x > 0$,

$$F(x) = \int_{]0,2x[} e^{-t} t^x \, d\lambda(t) \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{[2x,+\infty[} e^{-t} t^x \, d\lambda(t).$$

(i) Justifier qu'étant donné $x > 0$, la fonction f qui à $t > 0$ associe le réel $f(t) = e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Son intégrale est notée $\Gamma(x)$ de sorte que l'on a l'égalité :

$$\Gamma(x) = \int_{]0,+\infty[} e^{-t} t^{x-1} \, d\lambda(t).$$

La fonction qui à $x > 0$ associe $\Gamma(x)$ est appelée fonction Gamma d'Euler. Vérifier la formule $\Gamma(x+1) = F(x) + G(x)$.

(ii) A l'aide d'un changement de variables, montrer qu'on a, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}\, du.$$

(iii) Montrer que la quantité $\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}$ est définie pour $u > -\sqrt{x}$ et tend vers la limite $e^{-\frac{u^2}{2}}$ quand x tend vers $+\infty$.

(iv) Soit la fonction ϕ de $]-\sqrt{x}, +\sqrt{x}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par l'identité $\phi(u) = x\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) - u\sqrt{x} + \frac{u^2}{8}$. Montrer que la fonction ϕ est concave. En déduire que, pour tout u de $]-\sqrt{x}, +\sqrt{x}]$, la quantité $\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}$ est majorée par $e^{-\frac{u^2}{8}}$.

(v) A l'aide d'un théorème de convergence convenable, en déduire, lorsque x tend vers $+\infty$, $F(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$.

(vi) Etablir l'identité $G(x) = x^{x+1} \int_2^{+\infty} u^x e^{-ux}\, du$.

(vii) Montrer que la fonction ψ définie sur l'intervalle $[2,+\infty[$ par l'identité $\psi(u) = ue^{-\frac{u}{2}}$ est majorée par $\psi(2) < 1$.

(viii) En déduire que $G(x)$ est négligeable devant $x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$, lorsque x tend vers l'infini.

(ix) Déduire des résultats précédents l'équivalent annoncé pour la fonction $\Gamma(x)$.

(x) Calculer $\Gamma(1)$; à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$; en déduire, pour tout entier $n \geq 1$, $\Gamma(n)$. Grâce à l'équivalent précédemment obtenu pour $\Gamma(x)$, démontrer la formule de Stirling.

5.4 Corrigés des exercices

Corrigé 5.1 Quitte à remplacer la fonction f par $f + f(b)1_{[b,+\infty[} + f(a)1_{]-\infty,a]}$, nous pouvons supposer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$, noté F. Il nous faut alors prouver que

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = F(b) - F(a).$$

Considérons alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$f_n(.) = \frac{F(. + \frac{1}{n}) - F(.)}{\frac{1}{n}} 1_{[a,b]}.$$

Cette suite de fonctions converge simplement vers $f.1_{[a,b]}$. D'après le théorème des accroissements finis, pour $x \in [a,b]$ et pour tout $n \geq 1$, il existe $\theta \in [0,1]$ tel que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \left|F'(x+\tfrac{\theta}{n})\right| \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} \overset{\text{def}}{=} M. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, $|f_n| \leq M.1_{[a,b]}$ avec $\int_{\mathbb{R}} M.1_{[a,b]}\, d\lambda = M(b-a) < +\infty$ et, par application du théorème de la convergence dominée,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f\, d\lambda &= \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} n\left[F\left(x+\tfrac{1}{n}\right) - F(x)\right]\, d\lambda(x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(n\int_{[a,b]} F\left(x+\tfrac{1}{n}\right)\, d\lambda(x) - n\int_{[a,b]} F(x)\, d\lambda(x)\right). \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = x + \dfrac{1}{n}$ (voir exercice 4.5), on déduit :

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \left(n\int_{]b,b+\frac{1}{n}]} F\, d\lambda - n\int_{[a,a+\frac{1}{n}[} F\, d\lambda\right). \tag{28}$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$; par continuité de l'application F, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in]b-\eta, b+\eta[$,

$$F(b) - \epsilon \leq F(t) \leq F(b) + \epsilon.$$

Remarquons qu'il existe un entier n_ϵ tel que, pour $n \geq n_\epsilon$,

$$]b, b+\frac{1}{n}[\subset]b-\eta, b+\eta[$$

et donc en intégrant chaque membre des inégalités ci-dessus sur $]b, b+\dfrac{1}{n}]$, on obtient

$$F(b) - \epsilon \leq n\int_{]b,b+\frac{1}{n}]} F\, d\lambda \leq F(b) + \epsilon,$$

ce qui exprime que $\lim_{n\to+\infty} n\int_{]b,b+\frac{1}{n}]} F\, d\lambda = F(b)$.

De même, nous avons $\lim_{n\to+\infty} n\int_{[a,a+\frac{1}{n}[} F\, d\lambda = F(a)$. Ainsi, en faisant $n \to +\infty$ dans la relation (28), on conclut

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = F(b) - F(a).$$

Corrigé 5.2 Considérons la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $f_n = f.1_{[1,n]}$. Il est classique de montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers f. Alors, par le théorème de la convergence monotone :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{dt}{t\sqrt{1+t}} \quad \text{[d'après le théorème 5.1]} \end{aligned}$$

Or en faisant le changement de variable $u = \sqrt{1+t}$, soit $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{1+t}}$, on a

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{dt}{t\sqrt{1+t}} &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+n}} \frac{2du}{u^2-1} \\ &= \left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+n}} \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1}\right| - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right). \end{aligned}$$

En faisant $n \to +\infty$, on conclut :

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 2\ln(1+\sqrt{2}).$$

Corrigé 5.3 Du développement en série de $e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n!}$ $(u \in \mathbb{R})$, on tire

$$\frac{1}{x^x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!} \quad (0 < x \leq 1).$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$ étant positive sur $]0,1]$, nous en déduisons par application du théorème de la convergence monotone croissante

$$\int_{]0,1]} \frac{1}{x^x}\, d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_{]0,1]} (-x\ln x)^n\, d\lambda(x). \tag{29}$$

(ii) Le problème de convergence de l'intégrale se pose en $x = 0$. Comme la limite en zéro de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}(x^p(\ln x)^q)$ est zéro, on a, pour x assez petit,

$$|x^p(\ln x)^q| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

L'intégrale $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ étant convergente, on conclut que $\int_0^1 x^p(\ln x)^q\, dx$ est aussi convergente. En particulier, grâce au théorème 5.2 de comparaison des intégrales de Lebesgue et de Riemann :

$$\int_{]0,1]} x^p(\ln x)^q\, d\lambda(x) = \int_0^1 x^p(\ln x)^q\, dx.$$

(iii) $I(m,0)=\displaystyle\int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1}$.

(iv) Soit $0<\epsilon<1$; on a, par intégration par parties,

$$\int_\epsilon^1 x^p(\ln x)^q\,dx=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(\ln x)^q\right]_\epsilon^1-\frac{q}{p+1}\int_\epsilon^1 x^p(\ln x)^{q-1}\,dx.$$

Grâce à la question (ii) et en faisant $\epsilon\to+\infty$, on déduit :

$$I(p,q)=-\frac{q}{p+1}I(p,q-1).$$

Par récurrence, on obtient alors

$$I(p,q)=\frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q}I(p,0)=(-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

(v) Grâce à la relation (29) et aux questions (ii) et (iv), on a

$$\int_{]0,1]}\frac{1}{x^x}\,d\lambda(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-1)^n I(n,n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

En faisant le changement d'indice $m=n+1$, on conclut

$$\int_{]0,1]}\frac{1}{x^x}\ d\lambda(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^m}.$$

Pour $m\geq 2$, $\dfrac{1}{m^m}\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^m$; la série qui apparaît dans l'égalité ci-dessus est donc convergente, et $\displaystyle\int_{]0,1]}\frac{1}{x^x}\,d\lambda(x)<+\infty$. Par le théorème 5.2 de comparaison de l'intégrale de Lebesgue et de Riemann, cette intégrale coïncide avec l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^x}$, d'où :

$$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^m}.$$

Corrigé 5.4 (i) Pour $x\leq 0$, $f_n(x)=0$; donc

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)=\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)=0.$$

Soit maintenant $x>0$; pour n assez grand, $\dfrac{2}{n}<x$ et donc $f_n(x)=0$. Dans ce cas, encore $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)=\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)=0$. Ainsi

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n=\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n=0$$

et $A'=B'=0$. La fonction f_n est affine par morceaux et on a l'égalité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda=\int_0^{\frac{2}{n}} f_n(t)\,dt$; l'intégrale correspondant à l'aire d'un triangle, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda=\frac{1}{2}.\frac{2}{n}.\frac{1}{n}=1$$

et donc $A=B=1$.

(ii) On montre aisément les résultats suivants

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n\,d\lambda=\frac{1}{4}$, si n est pair, et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n\,d\lambda=\frac{3}{4}$, si n est impair ; donc $A=\dfrac{1}{4}$ et $B=\dfrac{3}{4}$.
- $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n=1_{[0,1]}$, donc $B'=1$; $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n=1_{\{1/4\}}$, donc $A'=0$.

(iii) La seule inégalité non triviale est $A'\leq A$ qui découle du lemme de Fatou. Grâce aux exemples (i) et (ii) aucune autre relation n'est possible.

Corrigé 5.5 (i) L'application $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$ étant continue sur $[1,+\infty[$, par le théorème 5.2, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est une intégrable absolument convergente. On a, pour $k\geq 1$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt\geq\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt.$$

La fonction sinus gardant un signe constant sur l'intervalle $[k\pi,(k+1)\pi]$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt=\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\,dt\right|=2$$

et donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt\geq\frac{2}{\pi}.\frac{1}{(k+1)}.$$

En sommant ces inégalités de l'entier k égal 1 à $n-1$, on obtient :

$$\int_\pi^{n\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt\geq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}.$$

La série harmonique $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ étant divergente, on conclut que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ n'est pas absolument convergente.

(ii) Remarquons que la fonction g est continue, donc mesurable. En remarquant que $|g(t)|\leq\dfrac{1}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt<+\infty$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,dt$ est absolument convergente et par conséquent le théorème 5.2 montre que la fonction g est λ-intégrable.

Corrigé 5.6 Nous allons utiliser le théorème de la convergence dominée ; vérifions donc que les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites.
Pour $n \geq 1$, posons :

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos^n x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 < x < n \,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $x > 0$; il existe un entier n_0 $(= E(x)+1)$ tel que, pour $n \geq n_0$, $0 < x < n$ et donc $f_n(x) = \cos^n x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. Nous avons alors dans ce cas $|f_n(x)| \leq |\cos x|^n$ (car $0 < 1 - \frac{x}{n} < 1$) et si, $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\right\}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Par contre, si $x \leq 0$, il est clair que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Ainsi la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers la fonction nulle presque partout et l'hypothèse (H1) est satisfaite.
Si $0 < x < n$ alors $0 < \frac{x}{n} < 1$ et, d'après l'indication, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} < e^{-1}$ ou encore $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < e^{-x}$ et donc $f_n(x) \leq e^{-x}$. Si $x \notin]0, n[$, nous avons encore $f_n(x) = 0 \leq e^{-x}$. Posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^{-x}1_{[0,+\infty[}(x)$; bien sûr $h \in \mathcal{L}^1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq h(x).$$

Ainsi l'hypothèse (H2) est satisfaite.
Par application du théorème de la convergence dominée, on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \; d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\lambda = 0,$$

ce qui s'écrit aussi, grâce au théorème 5.1 de comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (\cos x)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \; dx = 0.$$

Corrigé 5.7 Définissons, pour $n \geq 1$, la fonction mesurable $f_n : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f_n(x) = \ln(e + \frac{|x|}{n}) f(x), \qquad \text{si } x \in [a,b].$$

Il est clair que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$. D'autre part nous avons la majoration, pour $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \ln(e + \frac{|x|}{n})|f(x)| \\ &\leq \ln(e + \max(|a|,|b|))|f(x)|, \end{aligned}$$

avec $\int_{[a,b]} \ln(e + \max(|a|,|b|)|f(x)| \, d\lambda(x) < +\infty$, puisque $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$. Donc, par application du théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

Corrigé 5.8 (i) Pour $0 < x < 1$, nous avons, pour n au voisinage de $+\infty$, $\frac{nx}{1+n^2x^2} \sim \frac{1}{nx}$, donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$; si $x = 0$, évidemment $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Comme $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$,

$$\|f_n\|_{[0,1]} \overset{\text{def}}{=} \sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1]\} \geq \frac{1}{2}$$

et il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle.

(ii) De l'inégalité $(1 - nx)^2 \geq 0$, on tire $\frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2}$ soit $|f_n| \leq \frac{1}{2}$. Il suffit alors de prendre $K = \frac{1}{2}$.

(iii) Par application du théorème 5.1 de comparaison (voir aussi la remarque 5.3), l'intégrale $\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda$ est égale à l'intégrale $\int_0^1 f_n(t) \, dt$.
D'après les questions (i) et (ii), les hypothèses du théorème de la convergence dominée sont satisfaites, donc, par application de ce théorème,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\lambda = 0.$$

Corrigé 5.9 (i) Posons, pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} 1_{[0,1]}(t).$$

A x fixé, la fonction $f(x,.)$ est continue sur $[0,1]$ nulle à l'extérieur de $[0,1]$, donc la valeur

$$f(x) = \int_{[0,1]} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \, d\lambda(t) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \, dt$$

est bien définie.
On a $f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Puisque $e^{-xt^2} \leq 1$, nous avons l'inégalité

$$f(x,t) \leq \frac{e^{-x}}{1+t^2},$$

ce qui entraîne, après avoir intégré chaque terme de l'inégalité,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}.$$

En faisant alors $x \to +\infty$, on conclut :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(ii) Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Seule l'hypothèse (H″3) n'est pas immédiate. Nous avons, pour $(x,t)\in[0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-x(1+t^2)} \leq 1_{[0,1]}(t),$$

où $1_{[0,1]}$ est une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. C'est pourquoi, grâce à ce théorème, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = -\int_{[0,1]} e^{-x(1+t^2)}\, d\lambda(t) = -e^{-x}\int_0^1 e^{-xt^2}\, dt.$$

En posant $u=\sqrt{x}t$, on conclut :

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\, du.$$

Comme, pour x au voisinage de $+\infty$, $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\, du \sim \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient :

$$f'(x) \sim -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

Corrigé 5.10 (i) Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme. Posons, pour $(a,x)\in\mathbb{R}^2$, $f(a,x)=e^{-x^2}\cos(ax)$. Comme

$$|e^{-x^2}\cos ax| \leq e^{-x^2}$$

et que, d'après les rappels, $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, d\lambda(x) = \sqrt{\pi} < +\infty$, la fonction $f(a,.)$ appartient à $\mathcal{L}^1$ et l'hypothèse (H″1) est satisfaite. L'hypothèse (H″2) est immédiate puisque la fonction $f(a,.)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| = |-xe^{-x^2}\sin(ax)| \leq |x|e^{-x^2}.$$

En remarquant que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$ est convergente (pour $X>0$, $\int_0^X xe^{-x^2}\, dx = \left[\frac{e^{-x^2}}{-2}\right]_0^X = \frac{1-e^{-x^2}}{2}$ et donc $\lim_{X\to+\infty}\int_0^X xe^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}$), $\int_{\mathbb{R}} |x|e^{-x^2}\, dx < +\infty$ et l'hypothèse (H″3) est satisfaite.
Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$f'(a) = -\int_{\mathbb{R}} xe^{-x^2}\sin(ax)\, d\lambda(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\sin(ax)\, dx.$$

(ii) En intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \left[\frac{e^{-x^2}}{2}\sin(ax)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin(ax)\, dx \\ &= -\frac{a}{2}f(a) \end{aligned}$$

Ainsi la fonction f est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$f'(a) + \frac{a}{2}f(a) = 0 \qquad (a\in\mathbb{R}).$$

(iii) En multipliant l'équation différentielle par la fonction strictement positive $p:\ a\mapsto e^{\frac{a^2}{4}}$, il vient :

$$(fp)' = 0.$$

Et en intégrant cette égalité, il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $fp=C$, ce qui s'écrit, pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$f(a) = Ce^{-\frac{a^2}{4}}.$$

En remarquant que $f(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, on conclut que $C=\sqrt{\pi}$ et $f(a)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}$.

Corrigé 5.11 (i) La fonction $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ est dérivable de fonction dérivée $x\mapsto e^{-x^2}$, donc F est dérivable et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F'(x) = 2\left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)e^{-x^2}.$$

Pour montrer que G est dérivable, nous allons utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme sur l'intervalle $]-M,M[$ ($M>0$ fixé). Posons, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$,

$$g(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ ;$$

Seule l'hypothèse (H″3) de ce théorème n'est pas immédiate à prouver. On a, pour $-M<x<M$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |-2xe^{-x^2(1+t^2)}| \leq 2|x| \leq 2M,$$

avec $\int_{[0,1]} 2M\, dt < +\infty$. Donc, par application de ce théorème, la fonction G est dérivable sur $]-M,M[$ et, pour tout $x\in]-M,M[$,

$$G'(x) = -\int_0^1 2xe^{-x^2(1+t^2)}\, dt.$$

En simplifiant cette expression, nous obtenons :

$$G'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du. \tag{30}$$

En faisant $M \to +\infty$, on conclut que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la relation (30) reste valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(ii) D'après la question précédente, $F' = -G'$ et donc, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$F + G = C.$$

Pour la valeur particulière $x = 0$, nous obtenons $F(0) + G(0) = C$ soit $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = C$ et $C = \frac{\pi}{4}$. D'où $F + G = \frac{\pi}{4}$.

(iii) Comme $e^{-x^2(1+t^2)} \le e^{-x^2}$, on a

$$|G(x)| \le \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}e^{-x^2} ;$$

ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

(iv) Nous avons

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2 ; \\ \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) &= 0 ; \end{cases}$$

donc, grâce aux questions précédentes,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \lim_{x\to+\infty}[F(x) + G(x)] \\ &= \lim_{x\to+\infty} F(x) + \lim_{x\to+\infty} G(x) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2. \end{aligned}$$

On conclut $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Corrigé 5.12 (i) Posons, pour $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$f(x,t) = \frac{\sin x}{x}\,e^{-tx}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Fixons $t > 0$; la fonction $f(.,t)$ admet une limite à droite en 0 car, pour x au voisinage de 0^+, $\frac{\sin x}{x}\,e^{-tx} \sim 1$; donc, le problème de convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x,t)|\,dx$ ne se pose qu'en $+\infty$. On a

$$|f(x,t)| \le e^{-tx}$$

et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx$ est convergente (égale à $\frac{1}{t}$), il en est de même pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x,t)|\,dt$. Ainsi, grâce au théorème 5.2 de comparaison (voir aussi la remarque 5.3),

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,dx = \int_{]0,+\infty[} f(x,t)\,d\lambda(x).$$

Appliquons maintenant le théorème de dérivation sous le signe somme sur l'intervalle $]\epsilon,+\infty[$, où $\epsilon > 0$ est fixé. Seule l'hypothèse (H″3) de ce théorème n'est pas immédiate. Pour $t > \epsilon$ et $x > 0$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = |-\sin xe^{-tx}| \le e^{-\epsilon x},$$

où $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\epsilon x}\,d\lambda(x) < +\infty$. Ainsi la fonction F est dérivable sur $]\epsilon,+\infty[$ et, pour $t > \epsilon$,

$$F'(t) = -\int_{\mathbb{R}_+} \sin xe^{-tx}\,d\lambda(x) = -\int_0^{+\infty} \sin xe^{-tx}\,dx. \tag{31}$$

En faisant $\epsilon \to 0^+$, on conclut que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la relation (31) reste valable, pour tout $t > 0$.

(ii) Effectuons le calcul de l'intégrale intervenant dans la dérivée de F :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin xe^{-tx}\,dx &= \mathrm{Im}\left[\int_0^{+\infty} e^{(i-t)x}\,dx\right] \\ &= \mathrm{Im}\left[\frac{-1}{i-t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Donc $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ et en intégrant chaque terme de l'égalité sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on déduit l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 0$,

$$F(t) = C - \arctan(t).$$

(iii) Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $]0,+\infty[$ par la relation

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{x}e^{-nx}.$$

Cette suite converge simplement vers la fonction nulle et, pour $n \ge 1$, nous avons l'inégalité $|f_n(x)| \le e^{-x}$ avec $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx < +\infty$. Par application du théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} F(n) &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0. \end{aligned}$$

En reportant dans l'égalité obtenue au (ii), on conclut :

$$0 = C - \lim_{n\to+\infty} \arctan(n) = C - \frac{\pi}{2},$$

soit $C = \dfrac{\pi}{2}$.

(iv) Considérons la suite $\left(F(\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$; on a

$$\lim_{n\to+\infty} F(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2}.$$

Il suffit alors de démontrer que $\lim_{n\to+\infty} F(\frac{1}{n}) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, pour conclure

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
|F(\frac{1}{n}) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}(e^{-\frac{x}{n}} - 1)\, dx\right| \\
&= \Big| \left[\frac{1-\cos x}{x}(e^{-\frac{x}{n}} - 1)\right]_0^{+\infty} \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\left[1 - e^{-\frac{x}{n}}(1+\frac{x}{n})\right]\, dx \Big| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \frac{|1-\cos x|}{x^2}\left|1 - e^{-\frac{x}{n}}(1+\frac{x}{n})\right|\, dx.
\end{aligned}$$

Appliquons le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $x > 0$, par :

$$g_n(x) = \frac{|1-\cos x|}{x^2}\left|1 - e^{-\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right|.$$

Il est clair que cette suite converge simplement vers la fonction nulle. Comme, pour $u > 0$, $(1+u) < e^u$, on a aussi $0 < 1 - e^{-u}(1+u) \leq 1$ et donc :

$$|g_n(x)| \leq \frac{|1-\cos x|}{x^2},$$

avec $\int_0^{+\infty} \frac{|1-\cos x|}{x^2}\, dx < +\infty$ (la fonction $x \mapsto \frac{|1-\cos x|}{x^2}$ est prolongeable par continuité en zéro et, au voisinage de l'infini, $\frac{|1-\cos x|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$). Par application de ce théorème, on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|F\left(\frac{1}{n}\right) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| = 0,$$

soit $\lim_{n\to+\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

Corrigé 5.13 (i) Soit $x > -1$; si $x \geq 0$, $1 + x\sin^2 t \geq 1$ et l'application $x \mapsto \ln(1 + x\sin^2 t)$ est continu sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $F(x)$ existe. Si $-1 < x < 0$, alors $x\sin^2 t \geq x > -1$ et $1 + x\sin^2 t \geq x + 1 > 0$. Dans ce dernier cas, l'application $x \mapsto \ln(1 + x\sin^2 t)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $F(x)$ existe à nouveau. Ainsi $F(x)$ est définie pour $x > -1$.

(ii) A t fixé, pour x vérifiant $1 + x\sin^2 t > 0$ (par exemple $x > -1$ convient), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin^2 t}{1 + x\sin^2 t}.$$

(iii) Si $x > -1 + \epsilon$, on a $x\sin^2 t \geq (-1+\epsilon)\sin^2 t \geq -1 + \epsilon$ puisque $-1 + \epsilon < 0$; donc $1 + x\sin^2 t \geq \epsilon$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{\epsilon}$. Posons, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $h(t) = \frac{1}{\epsilon}$; alors $h \in \mathcal{L}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et, pour tout $(x,t) \in]-1+\epsilon, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq h(t).$$

(iv) Par application du théorème de dérivation sous le signe somme, on déduit que F est dérivable sur $]-1+\epsilon, +\infty[$ et, pour tout $x \in]-1+\epsilon, +\infty[$,

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1 + x\sin^2 t}\, dt. \tag{32}$$

En faisant $\epsilon \to 0^+$, on déduit que F est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et que la relation (32) reste valable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. En divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle par $\cos^2 t$ et en utilisant la relation $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$, on obtient, pour tout $x > -1$,

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2 t}{1 + (x+1)\tan^2 t}\, dt.$$

Nous avons

$$F'(0) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Supposons dorénavant que $x \neq 0$ et effectuons le changement de variable $\tan t = u$ ($\frac{du}{1+u^2} = dt$). On obtient :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+(x+1)u^2)(1+u^2)}\, du.$$

Or, par décomposition en éléments simples,

$$\frac{X}{(1+(x+1)X)(1+X)} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1+X} - \frac{1}{1+(x+1)X}\right],$$

donc l'intégrale devient :

$$F'(x) = \frac{1}{x}\left[\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} - \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(x+1)u^2}\right],$$

soit après calculs, pour $x \neq 0$,

$$F'(x) = \frac{\pi}{2x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right).$$

Remarque : Par le théorème de continuité sous le signe somme, il est clair que la fonction F' est continue sur $]-1,+\infty[$. On vérifie facilement que sur la formule obtenue $\lim_{x\to 0} F'(x) = \frac{\pi}{4} = F'(0)$.

(v) Trouver une primitive de F' revient essentiellement à trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$. Posons pour cela, $u = \sqrt{x+1}$ $(2udu = dx)$; on a

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int \frac{2du}{(u^2-1)} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|.$$

Ainsi $F(x) = \frac{\pi}{2}\left[\ln|x| - \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|\right] + C(x)$, où C est une fonction constante sur chaque intervalle $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Après simplification (multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle par la valeur conjuguée $\sqrt{x+1}-1$), on obtient, pour $x \neq 0$,

$$F(x) = \pi\ln(1+\sqrt{x+1}) + C(x).$$

En faisant $x \to 0$, on obtient, puisque la fonction F est continue en 0,

$$\lim_{x\to 0}\left[F(x) - \pi\ln|1+\sqrt{x+1}|\right] = F(0) - 0 = 0$$

et donc $C(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Ainsi $F(x) = \pi\ln(1+\sqrt{x+1})$.

Corrigé 5.14 (i) Il faut vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ est convergente. L'application $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ étant continue sur $]0,+\infty[$, les problèmes de convergence se posent en 0^+ et en $+\infty$.

Au voisinage de 0^+, nous avons $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$. L'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ étant convergente, il en est de même pour $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

Au voisinage de $+\infty$, nous avons $\lim_{t\to+\infty} t^2(e^{-t}t^{x-1}) = 0$ et donc, pour t assez grand, $e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ étant convergente il en est de même pour l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

La formule donnée est alors claire.

(ii) Faisons le changement de variable affine $t = x+\sqrt{x}u$ ($dt = \sqrt{x}du$) ; quand t croît de 0 à $2x$, alors $u = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$ croît de $-\sqrt{x}$ à $\sqrt{x}$. Donc,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sqrt{x}\int_{-x}^{x} e^{-(x+u\sqrt{x})}(x+u\sqrt{x})^x\,du \\ &= e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}\int_{-x}^{x} e^{-u\sqrt{x}}\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x du. \end{aligned}$$

(iii) On a, pour u fixé et x au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} \left(1+\tfrac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} &= e^{x\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)-u\sqrt{x}} \\ &= e^{x\left[\frac{u}{\sqrt{x}}-\frac{u^2}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]-u\sqrt{x}}. \\ &= e^{-\frac{u^2}{2}+o(1)} \end{aligned}$$

Donc, on obtient $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} = e^{-\frac{u^2}{2}}$.

(iv) La fonction ϕ est de classe C^2 sur $]-\sqrt{x},\sqrt{x}]$ et on a, pour $-\sqrt{x} < u \leq \sqrt{x}$

$$\begin{cases} \phi'(u) &= \dfrac{x}{\sqrt{x}+u} - \sqrt{x} + \dfrac{u}{4}\,; \\ \phi''(u) &= \dfrac{1}{4} - \dfrac{x}{(\sqrt{x}+u)^2}. \end{cases}$$

Comme $0 < \sqrt{x}+u \leq 2\sqrt{x}$, on a $\frac{x}{(\sqrt{x}+u)^2} \geq \frac{1}{4}$ et $\phi''(u) \leq 0$. Cela caractérise le fait que ϕ soit concave.

En particulier ϕ est en dessous de la tangente en 0, ce qui s'écrit

$$\forall u \in]-\sqrt{x},\sqrt{x}],\quad \phi(u) \leq \phi'(0)u + \phi(0)$$

ou de manière équivalente, puisque $\phi(0) = \phi'(0) = 0$:

$$\phi(u) \leq 0.$$

En remarquant que $\phi(u) = \ln\left[\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}e^{\frac{u^2}{8}}\right]$, on conclut

$$\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \leq e^{-\frac{u^2}{8}}.$$

(v) Il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}} = \sqrt{2\pi}$, ou de manière équivalente, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F(x_n)}{x_n^{x_n+\frac{1}{2}}e^{-x_n}} = \sqrt{2\pi}$.
Grâce à la question (ii), cela revient à démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(u)\, du = \sqrt{2\pi},$$

où $g_n(u) = \left(1+\dfrac{u}{\sqrt{x_n}}\right)^{x_n} e^{-u\sqrt{x_n}}$ si $u \in]-\sqrt{x_n}, \sqrt{x_n}]$ et $g_n(u) = 0$ sinon.
Montrons que les hypothèses du théorème de la convergence dominée sont satisfaites. Soit $u \in \mathbb{R}$; comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $u \in]-\sqrt{x_n}, \sqrt{x_n}]$ et alors, d'après la question (iii), $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = e^{-u^2/2}$. L'hypothèse (H1) est donc vérifiée.
D'après la question (iv), la suite de fonctions $(|g_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la fonction $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{8}}$ qui ne dépend pas de n. Donc, l'hypothèse (H2) est satisfaite. Par application du théorème de la convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(u)\, du = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{2\pi}.$$

(vi) Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{2x}^{+\infty} e^{-t}t^x\, dt$ est convergente, on a

$$G(x) = \int_{2x}^{+\infty} e^{-t}t^x\, dt.$$

En faisant le changement de variable $t = xu$, on obtient :

$$G(x) = x^{x+1}\int_2^{+\infty} e^{-xu}u^x\, du.$$

(vii) L'application ψ est de classe C^1 sur $[2, +\infty[$ et, pour $u \in [2, +\infty[$, on a $\psi'(u) = \left(1-\dfrac{u}{2}\right)e^{-u/2} \leq 0$. Donc, la fonction ψ est décroissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$, ce qui entraîne, pour $u \in [2, +\infty[$,

$$\psi(u) \leq \psi(2) = \frac{2}{e} < 1.$$

(viii) Par application des questions (vi) et (vii), on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= x^{x+1}\int_2^{+\infty} (ue^{-\frac{u}{2}})^x\, e^{-\frac{u}{2}x}\, du \\ &\leq x^{x+1}\int_2^{+\infty} e^{-\frac{u}{2}x}\, du \\ &= x^{x+1}\left[-\tfrac{2}{x}e^{-\frac{u}{2}x}\right]_2^{+\infty} \\ &= 2x^x e^{-x}. \end{aligned}$$

Cela entraîne que $G(x)$ est négligeable devant $x^x\sqrt{x}e^{-x}$, quand x tend vers $+\infty$.

(ix) D'après les questions précédentes, quand x tend vers $+\infty$,

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}} = \frac{F(x)}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}} + \frac{G(x)}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}} \to \sqrt{2\pi} + 0 = \sqrt{2\pi}.$$

D'où, pour x au voisinage de $+\infty$, $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$.

(x) Il est clair que $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$. D'autre part, par intégration par parties, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\, dt \\ &= [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\, dt \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

Donc, on obtient:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$$

Grâce à l'équivalent obtenu pour $\Gamma(x+1)$, on conclut, pour n au voisinage de l'infini,

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}.$$

6 DÉCOMPOSITION DES MESURES

6.1 Résultats généraux

Définition 6.1 *(mesures absolument continues ; mesures étrangères).*
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et considérons deux mesures μ et ν définies sur la tribu $\mathcal{T}$.

(i) *On dit que μ est absolument continue par rapport à ν lorsque toute partie $\mathcal{T}$-mesurable qui est ν-négligeable est nécessairement μ-négligeable, en symboles :*

$$(\forall A \in \mathcal{T}) \quad (\nu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0).$$

(ii) *On dit que μ est étrangère à ν s'il existe une partie $\mathcal{T}$-mesurable N qui est μ-négligeable et dont le complémentaire est ν-négligeable, en symboles :*

$$(\exists N \in \mathcal{T}) \quad (\mu(N) = 0 \text{ et } \nu(X \setminus N) = 0).$$

On écrit $\mu \ll \nu$ pour signifier « μ est absolument continue par rapport à ν ».
On écrit $\mu \perp \nu$ pour signifier « μ est étrangère à ν ».

Remarque 6.2 Sur l'ensemble des mesures définies sur $\mathcal{T}$, il est immédiat de voir que la relation binaire $\ll$ est réflexive et transitive, alors que la relation binaire $\perp$ est symétrique.

Remarque 6.3 Soient trois mesures μ, ν et ρ définies sur la tribu $\mathcal{T}$. Si on a $\mu \ll \nu$ et $\nu \perp \rho$, alors μ est étrangère à ρ.

Proposition 6.4 *Soit $(X, \mathcal{T}, \nu)$ un espace mesuré et μ une mesure finie, définie sur $\mathcal{T}$. Alors $\mu \ll \nu$ si et seulement si*

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad (\forall A \in \mathcal{T}\ \nu(A) < \delta \Longrightarrow \mu(A) < \epsilon).$$

Le théorème de décomposition de Lebesgue ainsi que le théorème de Radon Nikodym, que l'on énoncera plus loin, sont les deux théorèmes clefs de la décomposition des mesures.

Théorème 6.5 *(théorème de décomposition de Lebesgue). Soit $(X, \mathcal{T}, \nu)$ un espace mesuré et μ une mesure σ-finie, définie sur la tribu $\mathcal{T}$. Alors μ se décompose de façon unique en somme de deux mesures μ_1 et μ_2 telles que $\mu_1 \ll \nu$ et $\mu_2 \perp \nu$. Les deux mesures sont alors étrangères.*

Exemple 6.6 Soit $\mathcal{T}$ une tribu de parties d'un ensemble X telle que tout singleton (et donc aussi toute partie dénombrable de X) est $\mathcal{T}$-mesurable. Considérons sur $\mathcal{T}$ la mesure ν telle que

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable ;} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\mu \ll \nu$ signifie que toute partie dénombrable de X est μ-négligeable : une telle mesure est appelée mesure diffuse. D'autre part $\mu \perp \nu$ signifie que μ est portée par une partie dénombrable D de X (c'est-à -dire que $\mu(X \setminus D) = 0$). Le théorème de Lebesgue montre donc la proposition suivante.

Proposition 6.7 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable tel que tout singleton est $\mathcal{T}$-mesurable. Alors toute mesure μ, σ-finie sur $\mathcal{T}$, est de façon unique la somme de deux mesures μ_1 et μ_2 telles que μ_1 est portée par un ensemble dénombrable et μ_2 est diffuse.*

Exemple 6.8 Soit $(X, \mathcal{T}, \nu)$ un espace mesuré et f une fonction $\mathcal{T}$-mesurable , positive sur X. Alors l'application μ définie sur $\mathcal{T}$ par

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \mu(A) = \int_A f\, d\nu = \int_X f.1_A\, d\nu$$

est une mesure sur $\mathcal{T}$ telle que $\mu \ll \nu$, dite mesure de densité f par rapport à ν, et noté $f.\nu$. De plus , si g est une fonction $\mathcal{T}$-mesurable et positive sur X,

$$\int_X g\, d\mu = \int_X g.f\, d\nu.$$

Réciproquement, le théorème de Radon-Nikodym exprime, sous des hypothèses additionnelles, toute mesure absolument continue par rapport à ν comme une mesure admettant une densité par rapport à ν.

Théorème 6.9 *(théorème de Radon-Nikodym). Soit $(X, \mathcal{T}, \nu)$ un espace mesuré σ-finie et μ une mesure finie, définie sur $\mathcal{T}$ et absolument continue par rapport à ν. Alors il existe une fonction f, positive sur X, $\mathcal{T}$-mesurable et ν-intégrable telle que*

$$\mu = f.\nu.$$

De plus, f est unique en ce sens que, si $\mu = g.\nu$, alors g est ν-presque partout égale à f.

Définition 6.10 *Sous les hypothèses du théorème de Radon-Nikodym, la fonction f est appelée la densité de μ par rapport à ν, parfois notée $\dfrac{d\mu}{d\nu}$.*

6.2 Application à la mesure de Borel : fonctions absolument continues

Considérons la mesure de Borel, noté λ, définie sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$.

Définition 6.11 *Soit μ une mesure définie sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On appelle fonction de répartition de μ la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par*

$$F(x) = \mu(]-\infty, x[).$$

Remarque 6.12 Une fonction de répartition est nécessairement croissante.

Proposition 6.13 *Soit F une fonction croissante définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors F est dérivable λ-presque partout et la fonction dérivée F' est mesurable et positive.*

Définition 6.14 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F une fonction de I dans $\mathbb{R}$. La fonction F est dite absolument continue sur I lorsque, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute suite $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n$ d'éléments de I, on ait l'implication*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon.$$

Théorème 6.15 *(caractérisation des mesures absolument continues). Soit μ une mesure finie, définie sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$; on note F la fonction de répartition de μ.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) *μ est absolument continue par rapport à la mesure de Borel ;*

(ii) *la fonction F est absolument continue sur $\mathbb{R}$;*

(iii) *il existe une fonction f, positive, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable et λ-intégrable telle que $\mu = f.\lambda$;*

(iv) *pour tout choix de deux réels a et b tels que $a \leq b$:*

$$F(b) - F(a) = \int_{[a,b]} F'\, d\lambda.$$

Théorème 6.16 *(caractérisation des mesures étrangère à λ). Soit μ une mesure finie, définie sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$; on note F la fonction de répartition de μ.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) *μ est étrangère à la mesure de Borel ;*

(ii) *la fonction F est à dérivée presque partout nulle.*

Une fonction croissante à dérivée presque partout nulle est dite singulière.

6.3 Énoncés des exercices

Exercice 6.1 $(\star\star)$
Soit λ la mesure de Borel sur $[0,1]$ et ν la somme $\lambda + \delta_0$ de la mesure λ avec la mesure de Dirac en 0 (restreinte à la tribu des ensembles mesurables).

(i) La mesure λ est-elle absolument continue par rappport à ν ?

(ii) La mesure λ admet-elle une densité par rappport à ν ? Si oui, la préciser.

Exercice 6.2 $(\star)$
Soit λ la mesure de Borel sur $[0,1]$ et $\nu = 2\lambda$.

(i) La mesure λ est-elle absolument continue par rappport à ν ?

(ii) La mesure λ admet-elle une densité par rappport à ν ? Si oui, la préciser.

Exercice 6.3 $(\star)$
Soit λ la mesure de Borel sur $[0,1]$ et $\nu = \lambda + \mu_d$ la somme de λ avec la mesure de dénombrement μ_d (restreinte à la tribu des ensembles mesurables).

(i) La mesure λ est-elle absolument continue par rappport à ν ?

(ii) La mesure λ admet-elle une densité par rappport à ν ? Si oui, la préciser.

Exercice 6.4 $(\star)$
Soit X un ensemble quelconque, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ la tribu des parties de X et μ_d la mesure de dénombrement définie sur $\mathcal{T}$. Montrer que toute mesure définie sur $\mathcal{T}$ est absolument continue par rapport à μ_d. Quelles sont les mesures définies sur $\mathcal{T}$ qui sont étrangères à μ_d ?

Exercice 6.5 $(\star\star)$
Soit f une fonction positive, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$. Soit λ la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$ et $\nu = f.\lambda$ la mesure définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, de densité f par rapport à λ.
Caractériser les fonctions positives g telles que la mesure $g.\lambda$ est étrangère à ν.

Exercice 6.6 $(\star)$
Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, considérée comme définie sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction de répartition F. Calculer sa dérivée et vérifier que son intégrale sur $[a,b]$ n'est pas $F(b) - F(a)$. Expliquer ce phénomène.

Exercice 6.7 $(\star\star)$
Soit, sur la tribu des parties de $\mathbb{R}$, les deux mesures

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{x_i} \text{ et } \nu = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_{y_j},$$

où les $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n$ sont des points réels et les δ_{x_i} , δ_{y_j} les mesures de Dirac en ces points, et où les α_i et β_j sont des réels strictement positifs. Pour simplifier, on suppose que les $x_1, \cdots, x_m$ d'une part, et les $y_1, \cdots, y_n$ d'autre part sont deux à deux distincts. Vérifier que μ et ν sont deux mesures finies et déterminer la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à ν.

Exercice 6.8 $(\star\star\star)$
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si} \quad x < 1\,; \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 1\,; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0\,; \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Soient $\mu = f.\lambda$ et $\nu = g.\lambda$ les deux mesures, définies sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, de densités respectives f et g par rapport à la mesure de Borel λ. Déterminer la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à ν, ainsi que la densité par rapport à ν de la partie absolument continue de μ.

Exercice 6.9 $(\star\star)$
On se propose d'étudier quelques propriétés simples des fonctions absolument continues.

(i) Montrer qu'une fonction constante sur un intervalle I est absolument continue sur I.

(ii) Montrer que si f est absolument continue sur l'intervalle I et si J est un intervalle contenu dans I, alors f est absolument continue sur J.

(iii) Montrer qu'une fonction absolument continue sur un intervalle I y est uniformément continue. En déduire qu'une fonction absolument continue sur un intervalle borné I est bornée sur I.

(iv) Toute fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée est bornée sur I est absolument continue.

(v) Les fonctions suivantes sont-elles absolument continues ?

(a) $I = \mathbb{R}_+$ et $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$;

(b) $I =]0,1]$ et $f(x) = x \cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$ $(x \in]0,1])$.

Exercice 6.10 $(\star\star)$
Soit λ la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas de partie A mesurable de $[0,1]$ telle que, pour tout intervalle I de $[0,1]$, on ait

$$\lambda(A\cap I)=\frac{\lambda(I)}{2}.$$

Indication : considérer la mesure μ dont la densité par rapport à la mesure de Borel est donnée par la fonction indicatrice 1_A de l'ensemble A.

6.4 Corrigés des exercices

Corrigé 6.1 (i) Soit A un ensemble mesurable (au sens de Borel) contenu dans $[0,1]$. Si $\nu(A)=0$, alors $\lambda(A)+\delta_0(A)=0$. λ et δ_0 ne prenant que des valeurs positives implique que $\lambda(A)=\delta_0(A)=0$. En particulier, λ (et aussi δ_0) est absolument continue par rapport à ν.

(ii) Puisque $\lambda([0,1])=1$ et $\nu([0,1])=2$, on voit que λ et ν sont des mesures finies. On est donc en mesure d'appliquer le théorème de Radon-Nikodym, ce qui montre qu'il existe une fonction mesurable f qui est la densité de λ par rapport à ν. Reste à déterminer cette fonction. On doit avoir, pour tout ensemble mesurable A,

$$\lambda(A)=\int_{[0,1]}1_A.f\,d\nu=\int_A f\,d\lambda+f(0).$$

En considérant le cas où $A=\{0\}$, on voit donc $f(0)=0$. D'autre part $f=1$ λ-presque partout convient. Un choix possible de la densité f est donc la fonction indicatrice de $]0,1]$.

Corrigé 6.2 (i) Soit A un ensemble mesurable de $[0,1]$. Si $\nu(A)=0$, alors $2\lambda(A)=0$ et donc $\lambda(A)=0$. Cela signifie que λ est absolument continue par rapport à 2λ.

(ii) Puisque λ et ν sont finies, il existe une densité f de λ par rapport à ν (théorème de Radon-Nikodym). On doit avoir, pour tout ensemble mesurable A,

$$\lambda(A)=\int_{[0,1]}1_A.f\,d\nu=\int_{[0,1]}1_A.(2f)\,d\lambda.$$

Donc, la fonction constante f de valeur $\dfrac{1}{2}$ convient.

Corrigé 6.3 (i) Soit A un ensemble mesurable de $[0,1]$. Si $\nu(A)=0$, alors $\lambda(A)+\mu_d(A)=0$. Comme λ et μ_d ne prennent que des valeurs positives ceci implique que $\lambda(A)=\mu_d(A)=0$. En particulier, λ est absolument continue par rapport à ν.

(ii) Puisque $[0,1]$ n'est pas dénombrable, la mesure ν n'est pas σ-finie et le théorème de Radon-Nikodym ne s'applique pas. En fait, s'il y avait une densité f de λ par rapport à ν, on devrait avoir, pour tout ensemble mesurable A de $[0,1]$, l'égalité

$$\lambda(A)=\int_{[0,1]}1_A.f\,d\nu=\int_A f\,d\lambda+\int_{[0,1]}1_A.f\,d\mu_d.$$

Prenant $A=\{x\}$ pour un élément x quelconque de $[0,1]$, on aurait donc

$$0=f(x).$$

La fonction f serait donc identiquement nulle, d'où

$$\lambda(A)=0,\ \text{pour tout}\ \ A,$$

ce qui est absurde.

Corrigé 6.4 Soit μ une mesure définie sur la tribu $\mathcal{T}$. Si $A\in\mathcal{T}$ et si $\mu_d(A)=0$ alors A est vide et donc $\mu(A)=0$. Par conséquent μ est absolument continue par rapport à μ_d. Soit μ une mesure étrangère à μ_d. Il doit exister $N\in\mathcal{T}$ tel que $\mu_d(N)=0$ et $\mu(X\setminus N)=0$. Cela implique $N=\emptyset$ et donc $\mu(X)=0$, c'est-à-dire μ est la mesure nulle. On voit donc que la mesure nulle est l'unique mesure étrangère à la mesure de dénombrement μ_d.

Corrigé 6.5 Si $g.\lambda$ est étrangère à $\nu=f.\lambda$, il existe un ensemble mesurable N tel que $(g.\lambda)\,(\mathbb{R}\setminus N)=0$ et $(f.\lambda)\,(N)=0$, c'est-à-dire tel que

$$\int_{\mathbb{R}\setminus N}g\,d\lambda=0\ \text{et}\ \ \int_N f\,d\lambda=0.$$

Puisque f est positive, l'égalité $\int_N f\,d\lambda=0$ entraîne que f est nulle λ-presque partout sur N donc, compte tenu de l'hypothèse $f(x)\neq 0$ pour $x>0$, que $N\cap\mathbb{R}_+$ est λ-négligeable. Par conséquent

$$0\le\int_{\mathbb{R}_+}g\,d\lambda=\int_{\mathbb{R}_+\cap N}g\,d\lambda+\int_{\mathbb{R}_+\setminus N}g\,d\lambda=\int_{\mathbb{R}_+\setminus N}g\,d\lambda\le\int_{\mathbb{R}\setminus N}g\,d\lambda=0.$$

On en déduit que $\int_{\mathbb{R}_+}g\,d\lambda=0$ et, puisque que g est positive, que $g=0$ λ-presque partout sur $\mathbb{R}_+$.
Réciproquement, si $g=0$ λ-presque partout sur $\mathbb{R}_+$, on a $\int_{\mathbb{R}_+}g\,d\lambda=0$ et $\int_{\mathbb{R}_-^*}f\,d\lambda=0$, puisque l'hypothèse faite sur f est que $f(x)=0$ si et seulement si $x\le 0$. Finalement, on voit que $g.\lambda$ est étrangère à ν si et seulement si $g=0$ λ-presque partout sur $\mathbb{R}_+$.

Corrigé 6.6 Rappelons que dans cet exercice δ_0 est définie sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$ par

$$\delta_0(B) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \notin B\,; \\ 1 & \text{si} \quad 0 \in B. \end{cases}$$

On en déduit que $F(x) = \delta_0(]-\infty, x[)$ est égal à

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0\,; \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Comme toute fonction croissante, F est dérivable λ-presque partout sur $\mathbb{R}$ (ici sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). On remarque que, pour $x \neq 0$, $F'(x) = 0$. Par conséquent, la fonction F' est presque partout définie (et nulle) sur tout intervalle $[a, b]$, d'où $\int_a^b F'(t)\,dt = 0$. Si $a \leq 0$ et $b > 0$, on a cependant $F(b) - F(a) = 1$, d'où $F(b) - F(a) \neq \int_a^b F'(t)\,dt$. L'égalité $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt$ caractérise parmi les fonctions de répartition, celles des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Borel. On en déduit que δ_0 n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Borel, ce qu'il était facile de voir directement : en effet, le singleton $\{0\}$ est négligeable au sens de la mesure de Borel, alors que $\delta_0(\{0\}) = 1$.

Corrigé 6.7 On a $\mu\,(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ et $\nu\,(\mathbb{R}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$, donc μ et ν sont deux mesures finies. Par le théorème de décomposition de Lebesgue, on peut donc écrire $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où $\mu_1 \ll \nu$ et $\mu_1 \perp \nu$. La condition $\mu_1 \ll \nu$ signifie que tout ensemble ν-négligeable est μ_1- négligeable. Introduisons les ensembles finis $X = \{x_1, \cdots, x_m\}$ et $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$. Il est immédiat que A est ν-négligeable si et seulement si $A \cap Y = \emptyset$. Donc, la condition $\mu_1 \ll \nu$ signifie qu'on a l'implication

$$A \cap Y = \emptyset \Longrightarrow \mu_1(A) = 0.$$

On en déduit, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, que

$$\mu_1(A) = \mu_1(A \cap Y) + \mu_1(A \setminus Y) = \mu_1(A \cap Y).$$

D'autre part, la condition $\mu_2 \perp \nu$ signifie qu'il existe un ensemble N qui est ν-négligeable et dont le complémentaire est μ_2-négligeable, c'est-à-dire que $N \cap Y = \emptyset$ et $\mu_2\,(\mathbb{R} \setminus N) = 0$, ce qui implique $Y \subset \mathbb{R} \setminus N$ et donc $\mu_2(Y) = 0$, et même $\mu_2(B) = 0$, pour tout $B \subset Y$. On en déduit, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, que

$$\mu_2(A) = \mu_2(A \cap Y) + \mu_2(A \setminus Y) = \mu_2(A \setminus Y).$$

Revenant à $\mu_1(A)$, on a

$$\mu_1(A) = \mu_1(A \cap Y) = \mu(A \cap Y) - \mu_2(A \cap Y) = \mu(A \cap Y),$$

et d'autre part

$$\mu_2(A) = \mu_2(A \setminus Y) = \mu(A \setminus Y) - \mu_1(A \setminus Y) = \mu(A \setminus Y),$$

ce qui exprime μ_1 et μ_2. Cette décomposition est d'ailleurs valable pour toute mesure μ σ-finie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. De façon plus explicite, on voit, dans le cas particulier considéré, que

$$\mu_1(A) = \mu(A \cap Y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{x_i}(A \cap Y) = \sum_{x_i \in A \cap X \cap Y} \alpha_i,$$

donc que $\mu_1 = \sum_{x_i \in Y} \alpha_i \delta_{x_i}$ et $\mu_2 = \sum_{x_i \notin Y} \alpha_i \delta_{x_i}$.

Corrigé 6.8 Puisque $\mu([-n, +\infty[) = \int_{-n}^{1} \sqrt{1-t}\,dt$ est finie pour tout entier $n \geq 0$, on voit que μ est une mesure σ-finie. On peut donc appliquer le théorème de décomposition de Lebesgue qui assure l'existence de deux mesures μ_1 et μ_2 définies sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telles que $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 \ll \nu$ et $\mu_2 \perp \nu$.

Observons alors que μ_1 et μ_2 sont absolument continues par rapport à la mesure de Borel λ. En effet si $\lambda(N) = 0$ on a $\mu(N) = 0$, c'est-à-dire $\mu_1(N) + \mu_2(N) = 0$, ce qui entraîne $\mu_1(N) = \mu_2(N) = 0$ puisque les réels $\mu_1(N)$ et $\mu_2(N)$ sont positifs. Les restrictions $\mu_{1,n}$ et $\mu_{2,n}$ de μ_1 et μ_2 à la tribu des ensembles mesurables contenus dans $[-n, +\infty[$ sont alors des mesures finies. Par le théorème de Radon-Nikodym, il existe donc des fonctions positives sur $[-n, +\infty[$ $f_{1,n}$ et $f_{2,n}$, mesurables et positives, telles que $\mu_{1,n} = f_{1,n}.\lambda$ et $\mu_{2,n} = f_{2,n}.\lambda$. On sait que les restrictions de $\mu_{1,n+1}$ et $\mu_{2,n+1}$ à la tribu des ensembles mesurables contenus dans $[-n, +\infty[$ sont respectivement $\mu_{1,n}$ et $\mu_{2,n}$. Par unicité de $f_{1,n}$ et $f_{2,n}$, on voit que les restrictions des densités $f_{1,n+1}$ et $f_{2,n+1}$ à l'intervalle $[-n, +\infty[$ sont respectivement égales λ-presque partout à $f_{1,n}$ et $f_{2,n}$. On peut donc, sans rien changer aux mesures $f_{1,n}.\lambda$ et $f_{2,n}.\lambda$, supposer que ces restrictions sont exactement $f_{1,n}$ et $f_{2,n}$. Posons alors, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f_1(x) = f_{1,n}(x)$ pour $-n \leq x$ et $f_2(x) = f_{2,n}(x)$ pour $-n \leq x$. Les valeurs ainsi définies sont indépendantes de n. Les fonctions f_1 et f_2 sont mesurables puisque $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, +\infty[$ et que les restrictions de f_1 et f_2 à chaque intervalle $[-n, +\infty[$ sont mesurables. D'autre part, pour $i \in \{1, 2\}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \mu_i(A) &= \mu_i\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap [-n-1, -n[) \cup (A \cap \mathbb{R}_+)\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_i(A \cap [-n-1, -n[) + \mu_i(A \cap \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

D'où $\mu_i(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A \cap [-n-1, -n[} f_{i,n+1}\,d\lambda + \int_{A \cap \mathbb{R}_+} f_{i,0}\,d\lambda$, soit

$$\mu_i(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A \cap [-n-1, -n[} f_i\,d\lambda + \int_{A \cap \mathbb{R}_+} f_i\,d\lambda = \int_A f_i\,d\lambda.$$

D'où finalement $\mu_i = f_i.\lambda$ est la mesure de densité f_i par rapport à λ. On voit donc que μ_i est la mesure de densité f_i par rapport à λ.
Reste à déterminer explicitement ces densités. Puisque $\mu_1 \ll \nu$, toute partie ν-négligeable est μ_1-négligeable Un mesurable N est ν-négligeable lorsque $\int_N g\, d\lambda = 0$, c'est-à-dire $g = 0$ λ-presque partout sur N. Comme g ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, on en déduit qu'un mesurable N est ν-négligeable si et seulement si $N \cap]0,+\infty[$ est λ-négligeable. Par conséquent $\int_N f_1\, d\lambda = 0$ dès que $N \cap]0,+\infty[$ est λ-négligeable. Prenant en particulier $N = \mathbb{R}_-$, on voit que f_1 est nulle presque partout sur $\mathbb{R}_-$.
D'autre part, puisque $\mu_2 \perp \nu$, il existe un ensemble N mesurable tel que $\nu(N) = 0$ et $\mu_2\ (\mathbb{R} \setminus N) = 0$, c'est-à-dire que $N \cap]0,+\infty[$ est λ-négligeable et $\int_{\mathbb{R}\setminus N} f_2\, d\lambda = 0$, c'est-à-dire tel que $N \cap]0,+\infty[$ est λ-négligeable et $f_2 = 0$ λ-presque partout sur $\mathbb{R} \setminus N$, donc aussi sur $]0,+\infty[$.
On remarque que par unicité de la densité f de μ par rapport à λ, on doit avoir aussi $f = f_1 + f_2$ λ-presque partout. Mais puisque $f_1 = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}_-$, on a $f = f_2$ presque partout sur $\mathbb{R}_-$ et, puisque $f_2 = 0$ presque partout sur $]0,+\infty[$, on a $f = f_1$ presque partout sur $]0,+\infty[$. On peut donc choisir comme densités

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si} \quad x \le 0\,; \\ 0 & \text{si} \quad x > 0\,; \end{cases} \qquad f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0\,; \\ \sqrt{1-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1\,; \\ 0 & \text{si} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

La densité par rapport à $\nu = g.\lambda$ de la partie absolument continue $\mu_1 = f_1.\lambda$ est donnée par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f_1(x)}{g(x)} & \text{si} \qquad g(x) \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, pour tout ensemble mesurable A, on a, en posant

$$A_0 = \{x \in A :\ g(x) \neq 0\},$$

et en utilisant les propriétés données dans l'exemple 6.8,

$$\begin{aligned} (h.\nu)(A) &= \int_A h\, d\nu = \int_{A_0} h\, d\nu + \int_{A \setminus A_0} h(x) g(x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{A_0} h\, d\nu = \int_{A_0} \frac{f_1}{g}.g\, d\lambda = \mu_1(A_0) \end{aligned}$$

et de plus $\mu_1(A_0) = \mu_1(A)$ car $A \setminus A_0$ est ν-négligeable et $\mu_1 \ll \nu$. On a, dans le cas particulier envisagé :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0\,; \\ \dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2} & \text{si} \quad 0 < x < 1\,; \\ 0 & \text{si} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Corrigé 6.9 On se rappelle qu'une fonction F de I dans $\mathbb{R}$ est absolument continue signifie que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute choix de $a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_n < b_n$ d'éléments de I, on ait l'implication

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon. \tag{33}$$

(i) Si F est constante sur I, alors $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = 0 < \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$, et donc, on peut choisir δ arbitrairement de sorte que l'implication (33) soit vraie.

(ii) Si l'implication (33) est vraie pour des éléments

$$a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_n < b_n$$

de I, elle l'est a fortiori pour des éléments de J.

(iii) L'implication (33) contient en particulier le fait (pour $n = 1$) que

$$\forall \epsilon, \forall b \in I,\ 0 < b - a < \delta \Longrightarrow |F(b) - F(a)| < \epsilon.$$

On en déduit que, pour tout $(a, b) \in I \times I$,

$$|b - a| < \delta \Longrightarrow |F(b) - F(a)| < \epsilon.$$

Cette implication vraie pour un certain δ à ϵ arbitraire, signifie que F est uniformément continue sur I.
Si I est borné, on peut alors le recouvrir par un nombre fini de sous-intervalles de longueur inférieure à δ, c'est-à-dire que $I \subset \bigcup_{k=1}^{N} [a_k - \eta, a_k + \eta]$ où $a_k \in I$ et $0 < \eta < \delta$. Donc, pour tout x de I, il existe un indice k tel que

$$|x - a_k| < \eta < \delta,$$

d'où $|F(x) - F(a_k)| < \epsilon$ et donc,

$$|F(x)| \le \max_{1 \le k \le N} |F(a_k)| + \epsilon,$$

ce qui prouve que F est bornée.

(iv) Supposons maintenant F dérivable à dérivée bornée : il existe un $A > 0$ tel que

$$|F'(x)| \le A,$$

pour tout x de I. Alors, pour tout choix de

$$a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_n < b_n,$$

on a $F(b_k) - F(a_k) = (b_k - a_k)F'(c_k)$ (théorème des accroissements finis), donc
$$|F(b_k) - F(a_k)| \le A(b_k - a_k).$$
En sommant ces inégalités sur les diverses valeurs de l'indices k entier compris entre 1 et n, on voit que :
$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \le A \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$
Par conséquent, pour assurer que $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$, il suffit d'avoir $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ en posant $\delta = \frac{\epsilon}{A}$.

(v) (a) Considérons sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$ la mesure μ dont la densité par rapport à la mesure de Borel λ est donnée par
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \ne 0\,; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$
Sa fonction de répartition est la fonction F telle que
$$F(x) = \int_0^x h(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0\,; \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \ge 0. \end{cases}$$
D'après le théorème de caractérisation des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Borel, cette fonction F est absolument continue sur $\mathbb{R}$. Sa restriction à $\mathbb{R}_+$ l'est aussi, d'après la question (ii). On voit donc que la fonction f est absolument continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Supposons f absolument continue sur $]0,1]$. Alors il existe $\delta > 0$ telle que, pour tout choix $0 < a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_n < b_n \le 1$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < 1. \tag{34}$$
Prenons en particulier $a_k = \frac{1}{4n-2k+2}$, $b_k = \frac{1}{4n-2k}$ $(1 \le k \le n)$. On a
$$\begin{cases} f(b_k) = \dfrac{1}{4n-2k} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}(4n-2k)\right) = \dfrac{1}{4n-2k}(-1)^k\,; \\ f(a_k) = \dfrac{1}{4n-2k+2} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}(4n-2k+2)\right) = \dfrac{1}{4n-2k+2}(-1)^{k+1}\,; \end{cases}$$
d'où $|f(b_k) - f(a_k)| = \frac{1}{4n-2k} + \frac{1}{4n-2k+2}$ et
$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-2}\right) + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n}\right).$$

D'où $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \ge \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) = 1$, ce qui contredit l'implication (34), dès que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$. Pour cela, il suffit (car $a_{i+1} = b_i$) que $b_n - a_1 < \delta$ soit $\frac{1}{4n} < \delta$ ou $n > \frac{1}{4\delta}$. Pour un tel choix de n, l'implication (34) se trouve contredite et donc, la fonction f n'est pas absolument continue sur $]0,1]$.

On remarquera que notre démonstration de ce fait utilise de façon cruciale les oscillations de la fonction f dues aux variations du cosinus entre -1 et 1, les points a_k et b_k étant ceux où ce cosinus atteint ses valeurs extrêmes.

Corrigé 6.10 La mesure μ définie sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ admet pour fonction de répartition la fonction F donnée par $F(x) = 0$ pour $x \le 0$ (en effet $A \subset [0,1]$) et, pour $x \in]0,1]$,
$$F(x) = \int_{[0,x[} 1_A \, d\lambda = \lambda(A \cap [0,x[) = \frac{x}{2},$$
par hypothèse, et enfin $F(x) = F(1) = \frac{1}{2}$, pour $x > 1$.
Mais cette fonction F ainsi définie est aussi la fonction de répartition de la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Borel dont la densité est donnée par
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in]0,1[\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
En effet, cette densité est la dérivée de F, sauf en un ensemble négligeable de points, et $\int_{-\infty}^{x} h(t)\, dt = F(x)$. Deux mesures qui ont même fonction de répartition sont égales sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc, par unicité de la densité d'une mesure, on aurait $1_A(x) = \frac{1}{2}$ pour presque tout $x \in]0,1[$, ce qui est absurde.

7 THÉORÈME DE FUBINI

7.1 Rappel de cours

Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés. Nous avons vu au chapitre 3 qu'il existe une unique mesure sur l'espace mesurable produit $(X \times Y,\ \mathcal{T} \otimes \mathcal{S})$, notée $\mu \otimes \nu$ et appelée mesure produit des mesures μ et ν, vérifiant la condition

$$\mu \otimes \nu(T \times S) = \mu(T).\nu(S), \text{ pour tout } T \in \mathcal{T} \text{ et } S \in \mathcal{S}.$$

Il existe deux énoncés du fameux théorème de Fubini qui permet de calculer les intégrales sur l'espace produit $X \times Y$:

• l'un pour les fonctions positives, connu aussi sous le nom de théorème de Fubini-Tonelli ;

• l'autre pour les fonctions de signe quelconque.

Le premier énoncé est simple d'application puisque les hypothèses à vérifier sont quasi inexistantes. Par contre, le deuxième énoncé demande de vérifier que l'intégrande est $\mu \otimes \nu$- intégrable ; cette vérification se fera en général en calculant $\int_{X \times Y} |f|\ d(\mu \otimes \nu)$ à l'aide du premier énoncé, puisque $|f|$ est une fonction positive.

Théorème 7.1 *(théorème de Fubini-Tonelli). Soit $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $(\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable. Alors les fonctions*

$$\begin{cases} x & \mapsto & \int_Y f(x,y)\ d\nu(y) \ ; \\ y & \mapsto & \int_X f(x,y)\ d\mu(x) \ ; \end{cases}$$

sont positives et mesurables et on a les égalités :

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f\ d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\ d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\ d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned} \tag{35}$$

Théorème 7.2 *(théorème de Fubini). Soit $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\mu \otimes \nu$-intégrable. Alors les fonctions*

$$\begin{cases} x & \mapsto \displaystyle\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\ ; \\ y & \mapsto \displaystyle\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\ ; \end{cases}$$

sont définies p.p. et égales p.p. à des fonctions $\mathcal{L}^1$ et à nouveau les égalités (35) sont vraies.

7.2 Énoncés des exercices

La mesure de Borel sur $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}(\mathbb{R}^h))$ $(h \geq 1)$ sera notée λ_h ; si $h = 1$, on notera plus simplement cette mesure λ.

Exercice 7.1 *($\star$)*
En utilisant le théorème de Fubini (et sans utiliser de changement de variables en dimension deux), calculer l'aire du disque de rayon r centré à l'origine, noté D_r.

Exercice 7.2 ($\star$)
Soient $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés ; Si, pour $i = 1, 2$, f_i est une fonction μ_i-intégrable, montrer que la fonction $f :\ X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ définie, pour $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, par

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$$

est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable.

Exercice 7.3 ($\star\star$)
Soit μ la mesure produit de la mesure de Borel par la mesure $\delta = \delta_1 + 2\delta_2$. Calculer l'intégrale par rapport à cette mesure de

(a) la fonction caractéristique du disque fermée de rayon 2 centrée en $(0, 0)$;

(b) la fonction $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1}$.

Exercice 7.4 ($\star\star$)

Calculer les intégrales suivantes :

(i) $\alpha = \displaystyle\int_D \frac{1}{x^2 y}\, d\lambda_2(x, y)$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 1 \text{ et } \dfrac{1}{x} \leq y \leq x\}$;

(ii) $\beta = \displaystyle\int_{D_a} e^{2x+y}\, d\lambda_2(x, y)$, où $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a \text{ et } x + y \leq a\}$;

(iii) $\gamma = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2)}\, d\lambda_2(x, y)$.

Exercice 7.5 ($\star\star\star$)
Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour évaluer l'intégrale

$$\int_V x^3 y z^2\, d\lambda_3(x, y, z),$$

où V est le volume délimité par les surfaces qui ont pour équations $x = yz$, $z = y$, $y = 1$ et $x = 0$.

Exercice 7.6 ($\star$)
Montrer que le graphe G d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ borélienne positive défini par la relation

$$G = \{(x, y) :\ y = f(x)\}$$

est mesurable et de mesure nulle.

Exercice 7.7 ($\star\star$)
En calculant de deux façons l'intégrale

$$\alpha = \int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{1}{(1 + x)(1 + xy^2)}\, d\lambda_2(x, y),$$

trouver la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1}\, dt$.

Exercice 7.8 ($\star\star\star$)
En intégrant sur le domaine $[1, +\infty[\times [0, +\infty[$ la fonction $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par $f(x, y) = e^{-xy} \sin(2y)$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y} \sin(2y)}{y}\, dy = \arctan 2.$$

Exercice 7.9 ($\star\star$)
Cet exercice consiste en l'étude d'un exemple où la fonction f n'est pas intégrable sur un espace produit. Le théorème de Fubini n'est plus vrai dans cette situation. On considère l'espace mesuré produit de $(I, \mathcal{B}(I), \lambda_{|I})$ par lui-même, où I est l'intervalle $[0, 1]$, $\mathcal{B}(I)$ la tribu de Borel induite sur I et $\lambda_{|I}$ la mesure de Borel induite sur I. On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $I \times I$ par les formules :

(a) $\quad f_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0)\ ; \\ \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)\ ; \end{cases}$

(b) $\quad f_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0)\ ; \\ \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \mathrm{Re} \dfrac{1}{(x + iy)^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$

(i) Les fonctions f_1 et f_2 sont-elles mesurables ? intégrables sur $I \times I$?

(ii) Pour $i \in \{1,2\}$, comparer si elles existent les intégrales suivantes

$$\int_I \left(\int_I f_i(x,y)d\lambda(y)\right)\, d\lambda(x) \quad \text{et} \quad \int_I \left(\int_I f_i(x,y)d\lambda(x)\right)\, d\lambda(y). \quad (36)$$

(iii) Posons $J = [-1,1]$. En considérant la fonction f_3 définie sur $J \times J$ par la formule :

$$f_3(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\ ; \\ \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\ ; \end{cases}$$

dire si la condition « f est intégrable sur $J \times J$ » est nécessaire à l'égalité des deux intégrales associées à la relation (36).

Exercice 7.10 $(\star\star)$
Soient $a > 0$ et $f : [0,a] \to \overline{R}$ une fonction λ-intégrable (on note λ la mesure de Borel sur $[0,a]$).

(i) Montrer que l'on définit bien une fonction en posant, pour $x \in]0,a]$,

$$g(x) = \int_{[x,a[} \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t).$$

(ii) Vérifier que g est λ-intégrable sur $]0,a]$ et que

$$\int_{]0,a]} g(x) d\lambda(x) = \int_{[0,a]} f(x)\, d\lambda(x).$$

Exercice 7.11 $(\star\star\star)$
On considère dans cette exercice l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$. Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

(C1) $f \geq 0$;

(C2) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$.

On définit alors, pour $r > 0$,

$$g(r) = \frac{1}{r^2} \int_{D_r} f(x_1,x_2)\, d\lambda_2(x_1,x_2),$$

où D_r désigne le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon r.

(i) On suppose dans cette question que f est positive. Montrer alors que g est positive mesurable et que

$$\int_{]0,+\infty[} g(r)\, d\lambda(r) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{f(x)}{\|x\|}\, d\lambda_2(x).$$

(ii) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$, montrer que g est continue sur $]0,+\infty[$.
Indication : le lecteur pourra utiliser le théorème de la convergence dominée.

(iii) On suppose maintenant que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ et que f est bornée sur un voisinage de $(0,0)$. Déduire de la question (i), que g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donner la valeur de

$$\int_{]0,+\infty[} g(r)\, d\lambda(r).$$

Exercice 7.12 $(\star\star\star)$
Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ μ-intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ muni de la tribu borélienne et d'une mesure μ. On suppose que la mesure μ est diffuse, c'est-à-dire que tout singleton est μ-négligeable. Montrer que

$$\int_{[a,b]} f(x_1) \left(\int_{[a,x_1]} f(x_2) \cdots \left(\int_{[a,x_{n-1}]} f(x_n)\, d\mu(x_n)\right) \cdots\, d\mu(x_2)\right) d\mu(x_1) = \frac{1}{n!}\left(\int_{[a,b]} f(x)\, d\mu(x)\right)^n.$$

Exercice 7.13 $(\star\star)$
Soient f et g deux fonctions croissantes de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'on a la relation

$$\int_I fg\, d\lambda \geq (\int_I f\, d\lambda)\, (\int_I g\, d\lambda).$$

Indication. Après en avoir prouvé l'existence, on pourra utiliser l'intégrale double $\int_{I^2} (f(x)-f(y))\, (g(x)-g(y))\, d\lambda_2(x,y)$.

Exercice 7.14 $(\star\star\star)$
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Utiliser le théorème de Fubini pour montrer le résultat :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

connu sous le nom de théorème de Schwarz.

Exercice 7.15 ($\star\star\star$)
Soit D_n une suite de disques fermés de rayon $r_n > 0$, deux à deux disjoints et contenus dans le disque unité D.

(i) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n^2$ est convergente.

(ii) Si l'on suppose de plus que $\lambda_2(D \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} D_n) = 0$, montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ est divergente.

7.3 Corrigés des exercices

Corrigé 7.1 Par définition, l'aire du disque D_r est donnée par la formule

$$\lambda_2(D_r) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_{D_r}(x,y)\, d\lambda_2(x,y).$$

Par application du théorème de Fubini-Tonelli, nous avons

$$\lambda_2(D_r) = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\, d\lambda(y),$$

où $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} 1_{D_r}(x,y)\, d\lambda(x)$. Par comparaison avec l'intégrale de Riemann, nous avons pour $|y| \leq r$

$$\psi(y) = \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx = 2\sqrt{r^2-y^2}$$

et $\psi(y) = 0$ sinon. Ainsi

$$\lambda_2(D_r) = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-y^2}\, dy.$$

En effectuant le changement de variables $y = r\sin\theta$, soit $dy = r\cos\theta d\theta$, on obtient

$$\lambda_2(D_r) = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta.$$

On conclut en linéarisant $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$, car alors

$$\lambda_2(D_r) = 2r^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2.$$

Corrigé 7.2 Remarquons tout d'abord que, par composition, l'application $(x_1,x_2) \mapsto f_1(x_1)$ est mesurable ; il en est de même aussi de l'application $(x_1,x_2) \mapsto f_2(x_2)$. Par stabilité de la mesurabilité par produit, on déduit que l'application f est aussi mesurable. Par application du théorème de Fubini-Tonelli, nous avons :

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{X_1\times X_2} |f(x_1,x_2)| d(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2) \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f_1(x_1)f_2(x_2)| d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_1} |f_1(x_1)| \left(\int_{X_2} |f_2(x_2)|\, d\mu_2(x_2)\right)\, d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} |f_2(x_2)|\, d\mu_2(x_2)\,.\int_{X_1} |f_1(x_1)|\, d\mu_1(x_1) < +\infty. \end{aligned}$$

Corrigé 7.3 (a) Notons D_2 le disque fermé de rayon 2 centré en l'origine ; par application du théorème de Fubini-Tonelli, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_{D_2}(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{D_2}(x,y)\, d\lambda(x)\right) d\delta(y).$$

En utilisant les résultats obtenus dans les exercices 4.3 et 4.6, on déduit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} 1_D(x,y)\, d\mu(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} 1_D(x,1)\, d\lambda(x) + 2\int_{\mathbb{R}} 1_{D_2}(x,2)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Le lecteur pourra retrouver ce résultat en inversant l'ordre d'intégration.
(b) Par application du théorème de Fubini-Tonelli, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{x^2+y^2+1}\, d\delta(y)\right)\, d\lambda(x).$$

En utilisant les résultats obtenus dans les exercices 4.3 et 4.6, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{x^2+y^2+1}\, d\delta(y) = \frac{1}{x^2+2} + \frac{2}{x^2+5}.$$

Donc,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{2}{x^2+5}\right)\, dx = \pi(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}}).$$

Ici encore, le lecteur pourra retrouver ce résultat en inversant l'ordre d'intégration.

Corrigé 7.4 Dans les trois exercices, nous avons affaire à des fonctions positives, nous pouvons donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli.

(i) Nous avons

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_{[1,+\infty[} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{x^2 y}\, dy \right) d\lambda(x)\\ &= 2\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx\\ &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1.\end{aligned}$$

(ii) Nous avons

$$\begin{aligned}\beta &= \int_{]-\infty,a]} \left(\int_{-\infty}^{a-x} e^{2x+y}\, dy \right) d\lambda(x)\\ &= \int_{]-\infty,a]} e^{2x}(e^{a-x})\, d\lambda(x)\\ &= \int_{-\infty}^{a} e^{a+x}\, dx = e^{2a}.\end{aligned}$$

Remarque. Pour obtenir les bornes des intégrales intervenant dans le calcul de α et β, il est conseillé au lecteur de représenter les domaines D et D_a dans le plan.

(iii) Nous avons

$$\begin{aligned}\gamma &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{y}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2(x^2+y^2)} d(x^2/2) \right) d\lambda(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{y}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(u+1+y^2)^2(u+y^2)} du \right) d\lambda(y).\end{aligned}$$

Or, on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(u+1+y^2)^2(u+y^2)} = \frac{-1}{(u+1+y^2)^2} + \frac{-1}{(u+1+y^2)} + \frac{1}{(u+y^2)}$$

et donc,

$$\int \frac{1}{(u+1+y^2)^2(u+y^2)}\, du = \frac{1}{u+1+y^2} + \ln(\frac{u+y^2}{u+1+y^2}).$$

L'intégrale devient alors :

$$\gamma = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{y}{2} \left(\frac{-1}{1+y^2} - \ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right) \right) d\lambda(y).$$

Puisque nous sommes partis d'une fonction positive, la fonction sous cette dernière intégrale est positive et, d'après le théorème de la convergence monotone,

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{y}{2}[\frac{-1}{1+y^2} - \ln(\frac{y^2}{1+y^2})]\, dy.$$

A n fixé, nous avons

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{y}{2} \left(\frac{-1}{1+y^2} - \ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right) \right) dy\\ &= -\frac{1}{4} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{1+y^2}\, d(y^2) + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right) d(y^2) \right)\\ &= -\frac{1}{4} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{n^2} \frac{1}{1+u}\, du + \int_{\frac{1}{n}}^{n^2} \ln\left(\frac{u}{1+u}\right) du \right)\\ &= -\frac{1}{4} [\ln(1+u) + (u\ln u - u) - (1+u)\ln(1+u) + (1+u)]_{\frac{1}{n}}^{n^2}\\ &= \frac{1}{4} \left(n^2 \ln(1+\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n^2}\ln(1+n^2) \right).\end{aligned}$$

En faisant $n \to +\infty$, on conclut $\gamma = \frac{1}{4}$.

Corrigé 7.5 En se représentant les quatres surfaces dans l'espace (regarder les sections à x constant), on constate que

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 1, z \le y \le 1 \text{ et } yz \ge x\}.$$

Par application du théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\begin{aligned}\int_V x^3yz^2\, d\lambda_3(x,y,z) &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \left(\int_{\frac{x}{y}}^{y} x^3yz^2\, dz \right) dy \right) dx\\ &= \int_0^1 x^3 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 y \left(\int_{\frac{x}{y}}^{y} z^2\, dz \right) dy \right) dx\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \left(y^4 - \frac{x^3}{y^2} \right) dy \right) dx\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 \left(x^3 - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{5} \right) dx\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{12}{65}x^6\sqrt{x} + \frac{x^4}{20} \right]_0^1\\ &= \frac{4}{1365}\end{aligned}$$

Corrigé 7.6 (i) Notons $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$\phi(x,y) = y - f(x).$$

Par des arguments de composition et de différences de fonctions mesurables, ϕ est clairement une fonction mesurable. Comme $G = \phi^{-1}(\{0\})$ et qu'un singleton est un borélien, G est aussi mesurable.

(ii) En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_2(G) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_G \, d\lambda_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_G(x,y) \, d\lambda(y) \right) \, d\lambda(x) \end{aligned}$$

Or, à x fixé, la fonction $y \to 1_G(x,y)$ s'annule partout sauf au point $y = f(x)$; donc,

$$\int_{\mathbb{R}} 1_G(x,y) \, d\lambda(y) = \lambda(\{f(x)\}) = 0.$$

Ainsi $\lambda_2(G) = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\lambda(x) = 0$ et G est de mesure nulle.

Corrigé 7.7 Comme la fonction sous le signe intégral est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^2$, nous pouvons utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.
D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} \, d\lambda(y) \right) \, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+x} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+xy^2} dy \right) \, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{x}y)^2} d(\sqrt{x}y) \right) \, d\lambda(x) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \, d\lambda(x) \\ &= \pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \, d(\sqrt{x}) \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples (en la variable x),

$$\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} = \frac{1}{1-y^2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1+xy^2} \right),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1-y^2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1+xy^2} \right) \, d\lambda(x) \right) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1-y^2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1+xy^2} \, d\lambda(x) \right) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1-y^2} \left[\ln(\frac{1+x}{1+xy^2}) \right]_0^{+\infty} \, d\lambda(y) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\ln y}{y^2-1} \, d\lambda(y) \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln y}{y^2-1} \, dy, \end{aligned}$$

puisque cette dernière intégrale est convergente (utiliser le fait qu'au voisinage de zéro $\frac{\ln y}{y^2-1} \sim -\ln y$ et qu'au voisinage de l'infini $\frac{\ln y}{y^2-1} \leq \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$). Ainsi, la valeur de l'intégrale est :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln y}{y^2-1} \, dy = \frac{\pi^2}{4}.$$

Corrigé 7.8 Remarquons que l'application $(x,y) \mapsto \frac{e^{-y}\sin(2y)}{y}$ est continue sur $[1,+\infty[\times[0,+\infty[$, donc mesurable. Nous avons, par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} &\int_{[1,+\infty[\times[0,+\infty[} |e^{-xy} \sin\,(2y)| \, d\lambda_2(x,y) \\ &= \int_{[0,+\infty[} \left(\int_{[1,+\infty[} |e^{-xy} \sin\,(2y)| \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,+\infty[} |\sin\,(2y)| \left(\int_1^{+\infty} |e^{-xy}| \, dx \right) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,+\infty[} |\sin\,(2y)| \left[\frac{e^{-xy}}{-y} \right]_{x=1}^{x=+\infty} \, d\lambda(y) \\ &= 2 \int_{[0,+\infty[} e^{-y} \frac{|\sin\,(2y)|}{2y} \, d\lambda(y) \\ &\leq 2 \int_{[0,+\infty[} e^{-y} \, d\lambda(y) < +\infty, \end{aligned}$$

l'inégalité large étant vraie compte tenu de la relation $|\sin u| \leq u$ si $u > 0$. Ainsi l'intégrale $\alpha = \int_{[1,+\infty[\times[0,+\infty[} e^{-xy} \sin\,(2y) \;\; d\lambda_2(x,y)$ est bien définie et, par le théorème de Fubini, nous avons :

• d'une part :

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{[0,+\infty[} \left(\int_{[1,+\infty[} e^{-xy} \sin\,(2y) \, d\lambda(x) \right) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,+\infty[} \sin\,(2y) \left(\int_1^{+\infty} |e^{-xy}| dx \right) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,+\infty[} \sin\,(2y) \left[\frac{e^{-xy}}{-y} \right]_{x=1}^{x=+\infty} \, d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,+\infty[} e^{-y} \frac{|\sin\,(2y)|}{y} \, d\lambda(y) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y} \sin\,(2y)}{y} \, dy, \end{aligned}$$

car cette dernière intégrale est absolument convergente.

• D'autre part :

$$\alpha = \int_{[1,+\infty[} \left(\int_{[0,+\infty[} e^{-xy} \sin\,(2y) \, d\lambda(y) \right) \, d\lambda(x). \tag{37}$$

Or, pour pour $x \geq 1$ et $Y > 0$ fixés,

$$\begin{aligned}\int_0^Y e^{-xy}\sin(2y)\,d\lambda(y) &= \operatorname{Im}\left[\frac{e^{(-x+2i)y}}{-x+2i}\right]_{y=0}^{y=Y}\\ &= \operatorname{Im}\frac{e^{(-x+2i)Y}-1}{-x+2i}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{Y\to+\infty}|e^{(-x+2i)Y}| = \lim_{Y\to+\infty} e^{-xY} = 0$, en faisant $Y \to +\infty$ dans les égalités précédentes,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-xy}\sin(2y)\,dy &= \operatorname{Im}\frac{-1}{-x+2i}\\ &= \frac{2}{x^2+4}.\end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^\infty e^{-xy}\sin(2y)\,dy$ étant absolument convergente (majorer la valeur absolue de sinus par 1), nous avons aussi

$$\int_{[0,+\infty[} e^{-xy}\sin(2y)\,d\lambda(y) = \frac{2}{x^2+4}.$$

D'où, l'égalité (37) devient :

$$\alpha = 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}\,dx = \left[\arctan(\frac{x}{2})\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2}.$$

En utilisant la relation vraie, pour tout $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

(pour la démontrer, dériver de chaque coté de l'égalité) on obtient

$$\alpha = \arctan 2.$$

Il suffit alors de comparer les résultats du (i) et du (ii) pour conclure.

Corrigé 7.9

(i) L'application $(x,y) \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ restreinte à $[0,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$ est continue donc mesurable et il en sera de même pour f_1, grâce au principe de recollement (voir théorème 2.15 (iii)). Il en est de même pour la fonction f_2. Par application du théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int_{I^2}|f_1(x,y)|\,d\lambda_2(x,y) = \int_I\left(\int_I\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\lambda(y)\right)d\lambda(x).$$

Or, pour $x > 0$ fixé,

$$\begin{aligned}\int_I\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\lambda(y) &= x\int_0^1\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy\\ &= x\left[-(x^2+y^2)^{-1/2}\right]_0^1 = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

Ainsi $\alpha = \int_0^1\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\,dx < +\infty$ et f_1 est bien intégrable. Remarquons que f_2 est positive sur le domaine $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < y < x < 1\}$. Alors par application du théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\begin{aligned}\beta \stackrel{\text{def}}{=} \int_{I^2}|f_2|\,d\lambda_2 &\geq \int_\Delta |f_2|\,d\lambda_2\\ &= \int_{]0,1[}\left(\int_{]0,x[}\operatorname{Re}\frac{1}{(x+iy)^2}\,d\lambda(y)\right)\,d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,1[}\operatorname{Re}\left(\int_0^x\frac{1}{(x+iy)^2}\,dy\right)\,d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,1[}\operatorname{Re}\left[\frac{i}{x+iy}\right]_{y=0}^{y=x}\,d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,1[}\left(\frac{i}{1+i}-i\right)\frac{1}{x}\,d\lambda(x)\end{aligned}$$

Comme l'intégrale généralisée $\int_0^1\frac{1}{x}\,dx$ est divergente, on obtient $\beta = +\infty$ et f_2 n'est pas intégrable.

(ii) Pour $i = 1$, f_i est en particulier une fonction positive ; donc, par application du théorème de Fubini-Tonelli, les deux intégrales sont bien définies et sont égales.
Par contre, pour $i = 2$, la fonction n'est pas positive ; nous avons en reprenant des calculs similaires à ceux effectués au (i) :

$$\begin{aligned}\int_I\left(\int_I f_2(x,y)\,d\lambda(y)\right)\,d\lambda(x) &= \int_{]0,1[}\left(\int_{]0,1[}\operatorname{Re}\frac{1}{(x+iy)^2}\,d\lambda(y)\right)\,d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,1[}\operatorname{Re}\left[\frac{i}{x+iy}\right]_{y=0}^{y=1}\,d\lambda(x)\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Pour des raisons d'antisymétrie, nous avons

$$\int_I\left(\int_I f_2(x,y)\,d\lambda(x)\right)\,d\lambda(y) = -\frac{\pi}{4}.$$

Les deux intégrales sont bien définies mais ne sont pas égales dans ce cas.

(iii) Pour les mêmes raisons que celles invoquées au (i), f_3 est une application mesurable. Montrons que f_3 n'est pas intégrable sur $]0,1[^2$, ce qui prouvera que

f_3 n'est pas intégrable sur J^2. Par application du théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \int_{]0,1[^2} |f_3|\, d\lambda_2 &= \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,1[} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, d\lambda(y)\right) d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,1[} x\left(\int_0^1 \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\, dy\right) d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,1[} x\left[-\frac{1}{2(x^2+y^2)}\right]_0^1 d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,1[} \frac{1}{2x(2x^2+1)}\, d\lambda(x).\end{aligned}$$

Comme au voisinage de zéro, $\dfrac{1}{2x(2x^2+1)} \sim \dfrac{1}{2x}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x(2x^2+1)}\, dx$ est divergente et donc, $\gamma = \displaystyle\int_{]0,1[} \frac{1}{2x(2x^2+1)}\, d\lambda(x) = +\infty$. Par contre, pour des raisons d'imparité, les deux intégrales associées à la relation (36) sont nulles. C'est pourquoi la condition « f est intégrable sur $J \times J$ lg n'est pas nécessaire à l'égalité des deux intégrales associées à la relation (36).
Remarque : pour montrer que α est fini et que β et γ sont infinis, on aurait pu utiliser le changement de variables en coordonnées polaires (voir l'exercice 8.6).

Corrigé 7.10 (i) Soit $x > 0$ fixé ; de la majoration

$$\frac{|f(t)|}{t}.1_{[x,a[}(t) \leq \frac{|f(t)|}{x},$$

vraie pour tout $t \in]0,a]$, on tire que l'application $t \mapsto \left|\dfrac{f(t)}{t}\right| 1_{[x,a[}(t)|$ est intégrable et donc, $\displaystyle\int_{[x,a[} \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t)$ a un sens.

(ii) Par application du théorème de Fubini-Tonelli, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{]0,a]} |g(x)|\, d\lambda(x) &\leq \int_{]0,a]} \left(\int_{]0,a]} \frac{|f(t)|}{t} 1_{[x,a[}(t)\, d\lambda(t)\right) d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,a]} \left(\int_{]0,a]} \frac{|f(t)|}{t} 1_{[x,a[}(t)\, d\lambda(x)\right) d\lambda(t)\\ &= \int_{]0,a]} \frac{|f(t)|}{t} \left(\int_{]0,a]} 1_{[0,t[}(x)\, d\lambda(x)\right) d\lambda(t)\\ &= \int_{]0,a]} |f(t)|\, d\lambda(t) < +\infty\end{aligned}$$

et g est λ-intégrable sur $]0,a]$. D'après ce qui précède, les hypothèses du théorème de Fubini sont satisfaites, donc :

$$\begin{aligned}\int_{]0,a]} g(x)\, d\lambda(x) &= \int_{]0,a]} \left(\int_{]0,a]} \frac{f(t)}{t} 1_{[x,a[}(t)\, d\lambda(t)\right) d\lambda(x)\\ &= \int_{]0,a]} \left(\int_{]0,a]} \frac{f(t)}{t} 1_{[x,a[}(t)\, d\lambda(x)\right) d\lambda(t)\\ &= \int_{]0,a]} \frac{f(t)}{t} \left(\int_{]0,a]} 1_{[0,t[}(x)\, d\lambda(x)\right) d\lambda(t)\\ &= \int_{[0,a]} f(t)\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Le résultat souhaité est démontré.

Corrigé 7.11 (i) Considérons la fonction $h : \mathbb{R}^2\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie pour $(x,r) \in \mathbb{R}^2\times]0,+\infty[$ par

$$h(x,r) = \frac{1}{r^2} f(x) 1_\Delta(x,r),$$

où $\Delta = \{(x,r) \in \mathbb{R}^2\times]0,+\infty[:\ \|x\| \leq r\}$ est une partie mesurable. La fonction h est mesurable comme produit de fonctions mesurables et, par application du théorème de Fubini-Tonelli, l'application

$$r \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} h(x,r)\, d\lambda_2(x) = \frac{1}{r^2}\int_{D_r} f(x)\, d\lambda_2(x) = g(r)$$

est mesurable et

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[} g(r)\, d\lambda(r) &= \int_{]0,+\infty[} \left(\int_{\mathbb{R}^2} h(x,r) d\lambda_2(x)\right) d\lambda(r)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{]0,+\infty[} h(x,r) d\lambda(r)\right) d\lambda_2(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \left(\int_{[\|x\|,+\infty[} \frac{1}{r^2} d\lambda(r)\right) d\lambda_2(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{f(x)}{\|x\|}\, d\lambda_2(x) + \int_{\{(0,0)\}} f(x)(+\infty)\, d\lambda_2(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{f(x)}{\|x\|}\, d\lambda_2(x).\end{aligned}$$

(ii) Pour montrer la continuité de g, il suffit de démontrer la continuité de l'application $r \mapsto \displaystyle\int_{D_r} f(x)\, d\lambda(x)$. Soit $r > 0$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers r. Considérons alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par la relation

$$f_n = f.1_{D_{r_n}}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement presque partout (sauf peut-être sur le cercle de rayon r centré en l'origine) vers la fonction $f.1_{D_r}$ et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq f$ où, par hypothèse, la fonction f est intégrable. Ainsi, par application du théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} g(r_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n \, d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f.1_{D_r} \, d\lambda_2 = g(r).$$

La continuité de g est alors prouvée.

(iii) Par définition de g, nous avons

$$|g| \leq \frac{1}{r^2} \int_{D_r} |f| \, d\lambda_2.$$

En appliquant alors la question (i) à la fonction $|f|$,

$$\int_{]0,+\infty[} |g(r)| \, d\lambda(r) = \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \, d\lambda_2(x).$$

La fonction g est donc λ-intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \, d\lambda_2(x) < +\infty.$$

Par hypothèse, il existe des constantes ϵ et M strictement positives telles que $|f| \leq M$ sur $[-\epsilon, \epsilon]^2$. Nous obtenons alors les majorations :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_{[-\epsilon,\epsilon]^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \, d\lambda_2(x) + \int_{\mathbb{R}^2\setminus[-\epsilon,\epsilon]^2} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \, d\lambda_2(x) \\
&\leq M \int_{]0,\epsilon]^2} \frac{1}{\|x\|} \, d\lambda_2(x) + \frac{1}{|\epsilon|} \int_{\mathbb{R}^2\setminus[-\epsilon,\epsilon]^2} |f(x)| \, d\lambda_2(x) \\
&= M \int_{]0,\epsilon]} \left(\int_0^\epsilon \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{x_2}{x_1})^2}} \, d(\frac{x_2}{x_1}) \right) d\lambda(x_1) + \frac{1}{|\epsilon|} N_1(f) \\
&= M \int_{]0,\epsilon]} \operatorname{argsh}\left(\frac{\epsilon}{x_1}\right) d\lambda(x_1) + \frac{1}{|\epsilon|} N_1(f).
\end{aligned}$$

En posant $u = \dfrac{\epsilon}{x_1}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^\epsilon \operatorname{argsh}\left(\frac{\epsilon}{x_1}\right) \, dx_1$ est de même nature que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{argsh} u}{u^2} \, du.$$

Puisque $\operatorname{argsh} u = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \leq \sqrt{u}$ au voisinage de l'infini, cette dernière intégrale est convergente et par conséquent $\alpha < +\infty$ et g est intégrable sur $]0, +\infty[$.
En appliquant ce qui précède, on constate que la fonction h définie au (i) est intégrable sur $\mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[$ et par application du théorème de Fubini (reprendre les égalités de la question (i)),

$$\int_{]0,+\infty[} g(r) \, d\lambda(r) = \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{f(x)}{\|x\|} \, d\lambda_2(x).$$

Remarque : le calcul de l'intégrale double $\displaystyle\int_{[-\epsilon,\epsilon]^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{\|x\|} \, d\lambda_2(x)$ aurait pu se faire à l'aide du changement de variables en coordonnées polaires (utiliser les mêmes techniques que celles utilisées dans l'exercice 8.6).

Corrigé 7.12 Nous utilisons dans cet exercice le théorème de Fubini pour les fonctions à n variables ; son énoncé n'est qu'une généralisation immédiate de celui donné dans les rappels de cours pour $n = 2$.
Notons S_n l'ensemble des permutations sur la partie $\{1, \cdots, n\}$ et, pour $\sigma \in S_n$, posons :

$$\Delta_\sigma = \{(x_1, \cdots, x_n) \in [a,b]^n : \ x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)}\}.$$

Alors les ensembles $(\Delta_\sigma)_{\sigma\in S_n}$ sont disjoints deux à deux. Montrons que la $(\mu \otimes \cdots \otimes \mu)$-mesure de l'ensemble

$$[a,b]^n \setminus \bigcup_{\sigma\in S_n} \Delta_\sigma = \bigcup_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}, i\neq j} \{(x_1, \cdots, x_n) \in [a,b]^n : \ x_i = x_j\}$$

est nulle. Pour cela, comme la réunion porte sur un nombre fini de couple (i,j), il suffit de démontrer que chaque partie

$$\{(x_1, \cdots, x_n) \in [a,b]^n : \ x_i = x_j\} \quad (i \neq j)$$

est de $(\mu \otimes \cdots \otimes \mu)$-mesure nulle. Pour des raisons de symétrie, il suffit de démontrer le résultat sur la partie $N \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \cdots, x_n) \in [a,b]^n : \ x_1 = x_2\}$. Par le théorème de Fubini, nous avons

$$\begin{aligned}
(\mu \otimes \cdots \otimes \mu) \ (N) &= \int_{[a,b]^n} 1_N \, d(\mu \otimes \cdots \otimes \mu) \\
&= \int_{[a,b]^{n-2}} \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{\{x_2\}} 1 \, d\mu(x_1) \right) d\mu(x_2) \right) d(\mu \otimes \cdots \otimes \mu) \ (x_3, \cdots, x_{n-2}).
\end{aligned}$$

Puisque la mesure μ est diffuse, pour tout $x_2 \in [a,b]$, $\displaystyle\int_{\{x_2\}} 1 \, d\mu(x_1) = 0$, ce qui entraîne que N est de mesure nulle.
Posons $g(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1). \cdots .f(x_2)$; g est $(\mu\otimes\cdots\otimes\mu)$-intégrable puisque, par application du théorème de Fubini-Tonelli (pour le cas n = 2, voir exercice 6.2),

$$\int_{[a,b]^n} |g| \, d(\mu \otimes \cdots \otimes \mu) = \left(\int_{[a,b]} |f| \, d\mu \right)^n < +\infty.$$

Donc, par application du théorème de Fubini, on obtient :

- d'une part (voir exercice 6.2 pour le cas n = 2)

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[a,b]^n} g \, d(\mu \otimes \cdots \otimes \mu) = \left(\int_{[a,b]} f \, d\mu \right)^n ;$$

- d'autre part

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{\sigma\in S_n}\int_{\Delta_\sigma} g\,d\lambda_n\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\int_{[a,b]} f(x_{\sigma(1)})\left(\int_{[a,x_{\sigma(1)}]} f(x_{\sigma(2)})\cdots\right.\\ &\quad \left.\cdots\left(\int_{[a,x_{\sigma(n-1)}]} f(x_{\sigma(n)})\,d\mu(x_{\sigma(n)})\right)\cdots\,d\mu(x_{\sigma(2)})\right)\,d\mu(x_{\sigma(1)}).\end{aligned}$$

Dans cette dernière intégrale multiple, les variables étant muettes, on a

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{\sigma\in S_n}\int_{[a,b]} f(x_1)\left(\int_{[a,x_1]} f(x_2)\cdots\right.\\ &\quad\left.\cdots\left(\int_{[a,x_{n-1}]} f(x_n)\,d\mu(x_n)\right)\cdots\,d\mu(x_2)\right)\,d\mu(x_1)\\ &= n!\int_{[a,b]} f(x_1)\left(\int_{[a,x_1]} f(x_2)\cdots\right.\\ &\quad\left.\cdots\left(\int_{[a,x_{n-1}]} f(x_n)\,d\mu(x_n)\right)\cdots\,d\mu(x_2)\right)\,d\mu(x_1).\end{aligned}$$

En comparant les deux valeurs de α obtenues, on aboutit à l'égalité souhaitée.

Corrigé 7.13 Comme f est croissante, pour tout $a\in\mathbb{R}$, l'ensemble $\{f<a\}$ est un intervalle contenu dans I et donc un borélien de I. Par le critère de mesurabilité, f est donc mesurable. Par composition, on obtient par exemple que l'application $(x,y)\mapsto f(x)$ est une application mesurable ; il en sera bien sûr de même pour g. La mesurabilité des autres applications intervenant dans cet exercice se déduit alors en utilisant la stabilité des applicatons mesurables par les opérations classiques. Notons $F:\ I^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $(x,y)\in I^2$, par

$$P(x,y)=(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))=(fg)(x)+(fg)(y)-f(x)g(y)-f(y)g(x)\ ;$$

Comme nous savons que les fonctions $|f|$ et $|g|$ sont bornées (respectivement par $\max(|f(0)|,|f(1)|)$ et $\max(|g(0)|,|g(1)|)$) et comme I^2 est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ les fonctions intervenant dans la définition de P sont toutes λ-intégrables. Il en est donc de même pour P.
De plus, comme f et g sont croissantes, le produit

$$P(x,y)=(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$$

est toujours positif et donc

$$\int_{I^2} P(x,y)\,d\lambda_2(x,y)\geq 0.$$

En utilisant la linéarité et le théorème de Fubini (nous avons affaire à des fonctions intégrables), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_I\left(\int_I f(x)g(x)\,d\lambda(y)\right)\,d\lambda(x)+\int_I\left(\int_I f(y)g(y)\,d\lambda(x)\right)\,d\lambda(y)\\ &-\int_I\left(\int_I f(x)g(y)\,d\lambda(x)\right)\,d\lambda(y)-\int_I\left(\int_I f(y)g(x)\,d\lambda(x)\right)\,d\lambda(y)\geq 0,\end{aligned}$$

soit, en sortant les constantes des intégrales :

$$\begin{aligned}&\int_I f(x)g(x)\,d\lambda(x)+\int_I f(y)g(y)\,d\lambda(y)\\ &-\int_I g(y)\left(\int_I f(x)\,d\lambda(x)\right)\,d\lambda(y)-\int_I f(y)\left(\int_I g(x)\,d\lambda(x)\right)\,d\lambda(y)\geq 0.\end{aligned}$$

$\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\int_I f(x)\,d\lambda(x)$ et $\beta\stackrel{\text{def}}{=}\int_I g(x)\,d\lambda(x)$ sont des constantes que l'on peut aussi sortir des intégrales, donc :

$$2\int_I fg(x)\,d\lambda(x)-2\alpha\beta\geq 0$$

et le résultat est démontré.

Corrigé 7.14 Notons $h=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $k=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ les deux fonctions dérivées partielles croisées ; comme f est de classe C^2, les fonctions h et k sont continues. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe un point $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$h(x_0,y_0)\neq k(x_0,y_0).$$

Par exemple, nous pouvons supposer que $h(x_0,y_0)>k(x_0,y_0)$; alors, par la continuité, il existe un voisinage de (x_0,y_0) de la forme $V=[a,b]\times[c,d]$ (avec $a<b$ et $c<d$) tel que $h-k>0$ sur V.
En particulier, grâce à la proposition 4.6 (iv),

$$\int_V(h-k)\,d\lambda_2>0. \tag{38}$$

Calculons maintenant $\int_V h\,d\lambda_2$. Grâce au théorème de Fubini (on remarquera que h est intégrable sur V puisque h est bornée et V est bornée), on a

$$\begin{aligned}\int_V h\,d\lambda_2 &= \int_c^d\left(\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\,dx\right)\,dy\\ &= \int_c^d\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]_a^b\,dy\\ &= \int_c^d\left(\frac{\partial f}{\partial y}(b,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,y)\right)\,dy\\ &= [f(b,y)-f(a,y)]_c^d\\ &= (f(b,d)-f(a,d))-(f(b,c)-f(a,c)).\end{aligned}$$

En calculant de même $\int_V k\, d\lambda_2$ (penser à inverser l'ordre d'intégration), on obtient la même valeur ; ainsi $\int_V (h-k)\, d\lambda_2 = 0$, ce qui contredit la relation (38).

Corrigé 7.15
(i) Comme λ_2 est une mesure et que les disques sont deux à deux disjoints, nous avons par définition :

$$\lambda_2(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(D_n).$$

Grâce à l'exercice 7.1, nous déduisons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi r_n^2 = \lambda_2\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n\right) \le \lambda_2(D) = \pi.$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n^2$ est donc convergente.

(ii) Raisonnons par l'absurde en supposant que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ est convergente. Notons par I_n le segment fermé qui est la projection orthogonale de D_n sur la droite $\{y=0\}$. Par le théorème de permutation des signes $\sum$ et $\int$ pour les fonctions positives, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{I_n}\right) d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{I_n}\, d\lambda = 2\sum_{n=0}^{+\infty} r_n < +\infty.$$

Grâce au théorème 4.6 (iii), la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{I_n}$ est finie p.p., ce qui signifie que, pour presque tout x dans $]-1,1[$, la droite $\{x\}\times\mathbb{R}$ ne rencontre qu'un nombre fini de disques D_n.
Montrons que, pour un tel x dans $]-1,1[$,

$$\lambda(S_x) > 0, \tag{39}$$

où $S_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in D \setminus (\cup D_n)\}$. Si aucun disque ne rencontre la droite $\{x\}\times\mathbb{R}$, alors $S_x = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$ et la relation (39) est claire. Si maintenant un seul disque, noté D_{n_1}, rencontre la droite $\{x\}\times\mathbb{R}$, la condition $\lambda(S_x) = 0$ est équivalente à $\{x\}\times[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] = D_{n_1} \cap \{x\}\times\mathbb{R}$ ce que l'on peut écrire (par une propriété des cercles)

$$D_{n_1} = D.$$

On aboutit à une contradiction, puique les disques ne pourront être disjoints deux à deux ; donc, la relation (39) est satisfaite dans ce cas. Enfin, supposons qu'au moins deux disques rencontrent la droite $\{x\}\times\mathbb{R}$ et notons les $D_{n_1}, \cdots, D_{n_p}$. Quitte à réindexer ces disques, nous pouvons supposer en toute généralité que les segments $(D_{n_k} \cap \{x\}\times\mathbb{R})_k$ sont rangés par ordre croissant par rapport à la deuxième composante. Comme ces segments sont compacts et disjoints deux à deux, la distance entre les deux premiers, c'est-à-dire D_{n_1} et D_{n_2}, est strictement positive et donc à nouveau la relation (39) est satisfaite. Considérons alors l'intégrale

$$\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} 1_{D\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n}\, d\lambda_2.$$

D'une part $\alpha = \lambda_2(D \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n) = 0$, par hypothèse. D'autre part, par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{D\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n}(x,y)\, d\lambda(y)\right) d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda(S_x)\, d\lambda(x),\end{aligned}$$

et donc, par la relation (39) et la proposition 4.6 (iv), $\alpha > 0$. Nous obtenons ainsi une contradiction sur la valeur de α.

8 CHANGEMENT DE VARIABLES

Dans tout ce chapitre, l'espace $\mathbb{R}^h$ ($h \geq 1$) sera muni de sa tribu borélienne ainsi que de la mesure de Borel, notée $\lambda_h = \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$. Maintenant que nous sommes familiarisés avec les intégrales multiples, nous prendrons la notation

$$\int_{\mathbb{R}^h} f(x)\, d\lambda_h(x) = \int_{\mathbb{R}^h} f(x_1, \cdots, x_h)\, dx_1 \cdots dx_h,$$

pour une fonction f positive ou intégrable. Cette notation nous permettra d'effectuer plus facilement les changements de variables (voir remarque 8.4). Remarquons que cette écriture est aussi plus naturelle pour appliquer le théorème de Fubini.

8.1 Rappel de cours

Le changement de variables est un outil très puissant de l'intégration ; il est surtout utilisé pour faire des calculs. On se donne U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^h$ et $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_h) : U \to V$ une application dont la i-ème composante est notée ϕ_i. Nous avons les deux définitions suivantes.

Définition 8.1 *(jacobien). Si ϕ est de classe C^1 sur U, i.e. les dérivées partielles existent et sont continues sur U, on appelle jacobien de ϕ au point $x \in U$, et on note $J\phi(x)$, le déterminant de la matrice $(\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x))_{i,j\in\{1,\cdots,h\}}$, appelée matrice jacobienne de ϕ au point x.*

Définition 8.2 *(difféomorphisme). On dit que ϕ est un difféomorphisme de U sur V si*

(i) *ϕ est bijective (d'inverse ϕ^{-1}) ;*

(ii) *ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^1 .*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de changement de variables.

Théorème 8.3 *(formule de changement de variables). Si ϕ est un difféomorphisme de U sur V et si $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction $(\mathcal{B}(U), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable, on a :*

(i) *si f est positive , alors*

$$\int_V f(v)\, d\lambda_h(v) = \int_U f(\phi(u)) \mid J\phi(u) \mid \, d\lambda_h(u), \tag{40}$$

où $\mid J\phi(u) \mid$ désigne la valeur absolue du jacobien de ϕ en u ;

(ii) *si f est de signe quelconque, alors $f \in \mathcal{L}^1(V)$ si et seulement si $f \circ \phi. \mid J\phi \mid \in \mathcal{L}^1(U)$ et la relation (40) est encore satisfaite dans ce cas.*

Remarque 8.4 Il n'est pas toujours facile, ou un peu fastidieux, d'appliquer directement la formule (40) dans les applications numériques. On pourra, après avoir vérifié que ϕ est bien bijective (le caractère C^1 de l'application ϕ ne posant en général pas de problème), utiliser le moyen mémotechnique suivant. La relation

$$v = \phi(u) \tag{41}$$

devient formellement en dérivant

$$dv = dv_1 \cdots dv_h = \mid J\phi(u) \mid du_1 \cdots du_h = \mid J\phi(u) \mid du, \tag{42}$$

où l'on a remplacé le terme naturel $\phi'(u)$ qui n'aurait pas de sens ici par le terme $\mid J\phi(u) \mid$. Il suffit alors , dans l'intégrale $\int_V f(v)\, dv$ de remplacer v en fonction de u à l'aide des relations (41) et (42) pour obtenir l'égalité (40).

Remarque 8.5 Le changement de variables le plus utilisé en dimension deux est le changement de variables en coordonnées polaires. Si V est un ouvert du plan, ne coupant pas une certaine demi-droite issue de l'origine, on peut alors poser

$$\phi(r, \theta) = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

ce qui définit un difféomorphisme de $\phi^{-1}(V)$ sur V. Il est facile de vérifier que $dx\, dy = r dr\, d\theta$, et la formule (40) devient

$$\int_V f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\phi^{-1}(V)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta,$$

si f est positive ou intégrable sur V.

Remarque 8.6 Il arrive souvent que les parties U et V ne soient pas des ouverts (mais soient seulement mesurables !). Dans ce cas, on peut découper l'intégrale $\int_V f(v)\, dv$ sous la forme

$$\int_V f(v)\, dv = \int_{\text{int}(V)} f(v)\, dv + \int_{V \setminus \text{int}(V)} f(v)\, dv,$$

où int (V) désigne l'intérieur de V. En général, on peut alors appliquer la formule de changement de variables à la première intégrale et la deuxième intégrale est nulle (si $V \setminus$ int (V) est de mesure nulle).

8.2 Énoncés des exercices

Exercice 8.1 ($\star$)
Soit ϕ un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $a < b$, justifier la formule de changement de variables pour les intégrales des fonctions continues

$$\int_a^b f(\phi(u))\phi'(u)\, du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(v)\, dv, \tag{43}$$

en appliquant le théorème 8.3 du cours.

Exercice 8.2 ($\star\star$)
Soit $f \in \mathcal{L}^1([-1,1])$; calculer $\int_{[0,2\pi]} f(\sin x)\, d\lambda(x)$ en fonction de l'intégrale $\int_{]-1,1[} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, d\lambda(t)$.

Exercice 8.3 ($\star$)
Calculer l'aire du disque de rayon r centré en l'origine.
Remarque : on s'assurera que le changement de variables se fait bien sur des ouverts.

Exercice 8.4 ($\star$)
Calcul de l'aire du domaine du plan circonscrit par l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Exercice 8.5 ($\star\star$)
On se donne quatre constantes $a > 0$, $b > 0$, $\alpha \geq 0$ et $\beta > \alpha$. Soit alors, la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée des points dont les coordonnées (x, y) satisfont aux inégalités :

$$\begin{cases} x > 0; \\ y > 0; \\ \frac{1}{4} < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1; \\ \alpha < \frac{y}{x} < \beta. \end{cases}$$

Calculer l'intégrale $I = \int_D \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2}\, dx\, dy$ (justifier l'existence de cette intégrale).

Exercice 8.6 ($\star$)
On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$I_\alpha = \int_{]0,1[^2} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}\, d\lambda_2(x,y) \text{ (resp. } J_\alpha = \int_{]0,1[^2} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^\alpha}\, d\lambda_2(x,y)).$$

Montrer que $I_\alpha < +\infty$ (resp. $J_\alpha < +\infty$) si et seulement si $\alpha < 2$.

Exercice 8.7 $(\star\star\star)$
Calculer l'intégrale $I = \int_{B(0,1)} (x^2 + y^2 + z^2)\ d\lambda_3(x, y, z)$ étendue à la boule euclidienne ouverte centrée en l'origine et de rayon 1.
Indication : on pourra utiliser le changement de variables en coordonnées sphériques.

Exercice 8.8 $(\star\star)$
Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application mesurable ; si f est positive ou intégrable, par un changement de variables judicieusement choisi, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x-y)e^{-(x+y)}\ dx\ dy = \int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-|v|}\ dv.$$

Exercice 8.9 $(\star\star)$
Soient d une direction non nulle de $\mathbb{R}^2$ et A un borélien de $\mathbb{R}^2$ qui satisfont la condition

$$\forall a \in A, \exists t > 0, [a - td, a + td] \cap A = \{a\}. \tag{44}$$

On se propose de démontrer que A est négligeable.

(i) Montrer le résultat si $d = (0,1)$ et si, dans la relation (44), le réel t ne dépend pas du point a.

(ii) En déduire le résultat lorsque $d = (0, 1)$.

(iii) En effectuant un changement de variables, conclure.

(iv) (question non corrigée) Le résultat subsiste-t-il si le vecteur d dépend maintenant du point a ?

Exercice 8.10 $(\star\star\star)$
On se propose de calculer les valeurs des deux intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \cos\ (x^2)\ dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin\ (x^2)\ dx.$$

(i) Justifier que I et J sont bien définies en tant qu'intégrales généralisées de fonctions continues.

(ii) Montrer que $J > 0$.

(iii) On pose, pour tout $t > 0$, $\psi(t) = \int_{D_t} \sin\ (x^2 + y^2)\ dx\ dy$, où D_t est le domaine plan défini à partir des coordonnées polaires :

$$D_t = \{(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) :\ 0 < \rho < tf(\theta) \text{ et } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\},$$

avec $f :\ [0, \pi] \to]0, +\infty[$ une fonction C^1 par morceaux strictement positive.
Montrer que l'application ψ est continue sur $]0, +\infty[$ et calculer

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t)\ dt.$$

(iv) On se place dans le cas où $D_t = [0, t] \times [0, t]$. Montrer que

$$\lim_{T\to+\infty} \psi(t) = 2I.J.$$

(v) En déduire la valeur du produit $I.J$.

(vi) Reprendre les calculs avec l'intégrale $\chi(t) = \int_{D_t} \cos\ (x^2 + y^2)\ dx\ dy$ pour obtenir la valeur de $I^2 - J^2$.

(vii) Conclure.

Exercice 8.11 $(\star\star)$
On pose, pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\ dx$$

et

$$B(a, b) = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\ dy.$$

Les fonctions Γ et B s'appellent respectivement fonction Gamma et fonction Béta d'Euler.

(i) Justifier que $\Gamma(a)$ et $B(a, b)$ sont bien définies en tant qu'intégrales généralisées de fonctions continues.

(ii) Montrer que, pour toute fonction mesurable $f :\ \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ positive,

$$\int_{]0,+\infty[^2} f(u+v)u^{a-1}v^{b-1}\ d\lambda_2(u, v) = B(a, b) \int_0^{\infty} x^{a+b-1} f(x)\ d\lambda(x).$$

Indication : on effectuera le changement de variables

$$(x, y) = \phi(u, v)\ = (u + v, \frac{u}{u+v}).$$

(iii) En déduire l'identité

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b).B(a, b).$$

8.3 Corrigés des exercices

Corrigé 8.1 Notons $[c,d]$ l'intervalle image de $[a,b]$ par ϕ. Nous avons par la formule de changement de variables du cours

$$\int_{[a,b]} f(\phi(u))|\phi'(u)|\, d\lambda(u) = \int_{[c,d]} f(v)\, d\lambda(v)$$

et, par le théorème de comparaison de l'intégrale de Riemann et de l'intégrale de Lebesgue,

$$\int_a^b f(\phi(u))|\phi'(u)|\, du = \int_c^d f(v)\, dv.$$

Si ϕ est strictement croissante, $|\phi'(u)| = \phi'(u)$, $c = \phi(a)$ et $d = \phi(b)$; la formule (43) est correct dans ce cas.
Si ϕ est strictement décroissante, $|\phi'(u)| = -\phi'(u)$, $d = \phi(a)$ et $c = \phi(b)$; la formule (43) est à nouveau correct.

Corrigé 8.2 Nous avons

$$\int_{[0,2\pi]} f(\sin x)\, d\lambda(x) = \int_{]0,\frac{\pi}{2}[} f(\sin x)\, d\lambda(x) + \int_{]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[} f(\sin u)\, d\lambda(u) + \int_{]\frac{3\pi}{2},2\pi[} f(\sin v)\, d\lambda(v).$$

En effectuant dans la deuxième (resp. troisième) intégrale du membre de droite, le changement de variables $u = \pi - x$ (resp. $v = 2\pi + x$), on obtient

$$\int_{[0,2\pi]} f(\sin x)\, d\lambda(x) = 2\int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} f(\sin x)\, d\lambda(x).$$

Nous rappelons que la fonction sin est un difféomorphisme de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $]-1,1[$, d'inverse arcsin ; alors, le changement de variables $\sin x = t$ $(dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}})$ donne

$$\int_{[0,2\pi]} f(\sin x)\, d\lambda(x) = 2.\int_{]-1,1[} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Corrigé 8.3 Notons $\overline{B}(0,r)$ (resp. $B(0,r)$) la boule euclidienne fermée (resp. ouverte) de $\mathbb{R}^2$ de rayon r et centrée en l'origine. On a

$$\lambda_2(\overline{B}(0,r)) = \int_{\overline{B}(0,r)} d\lambda_2 = \int_{B(0,r)\setminus[-r,0]\times\{0\}} dx\, dy.$$

Le changement de variables en coordonnées polaires $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est en particulier un difféomorphisme de l'ouvert $]0,r[\times]-\pi,\pi[$ sur l'ouvert $B(0,r)\setminus[-r,0]\times\{0\}$, donc

$$\lambda_2(\overline{B}(0,r)) = \int_{]0,r[\times]-\pi,\pi[} \rho\, d\rho\, d\theta = \left(\int_{]0,r[} \rho\, d\rho\right).\left(\int_{]-\pi,\pi[} d\theta\right) = \pi r^2.$$

Corrigé 8.4 Notons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$; l'aire de D est représentée par $\int_D 1\, dx\, dy$. Effectuons le changement de variables

$$(x',y') = \phi(x,y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})\ ;$$

alors $dx'dy' = |J\phi(x,y)|dx\, dy = \frac{1}{ab}dx\, dy$. D'autre part, on vérifie facilement que $\phi(D)$ est le disque unité (ouvert), noté $B(0,1)$. On obtient :

$$\int_D 1\, dx\, dy = ab \int_{B(0,1)} 1\, dx'\, dy'.$$

L'exercice 8.3 permet de conclure que l'aire du domaine cherché est πab.

Corrigé 8.5 Puisque le domaine est borné (par l'inégalité $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, on a $|x| \leq a$ et $|y| \leq b$) et puisque la fonction $(x,y) \mapsto \left|\frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2}\right|$ est bornée sur le domaine D ($|\frac{b^2x^2-a^2y^2}{x^2}| \leq b^2 + a^2\beta^2$ pour $(x,y) \in D$), on a

$$\int_D \left|\frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2}\right| dx\, dy < +\infty.$$

L'intégrale est donc bien définie.

Calculons ensuite l'intégrale $\int_D \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2}\, dx\, dy$. Effectuons le changement de variables

$$(x,y) = \phi(\rho,\theta) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta)\ ;$$

alors $dxdy = |J\phi(\rho,\theta)|d\rho d\theta$, avec $J\phi(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho$. On vérifie facilement que $\phi^{-1}(D) =]\frac{1}{2},1[\times]\theta_1,\theta_2[$, où

$$\theta_1 = \arctan(\frac{a\alpha}{b}) \quad et \theta_2 = \arctan(\frac{a\beta}{b}).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} I &= \int_D \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2}\, dx\, dy \\ &= ab^3 \int_{]\frac{1}{2},1[\times]\theta_1,\theta_2[} \left|\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right| \rho\, d\rho\, d\theta. \end{aligned}$$

On applique alors le théorème de Fubini (nous avons bien affaire à une fonction intégrable)

$$\begin{aligned} I &= \int_D \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2}\, dx\, dy \\ &= ab^3 \left(\int_{]\frac{1}{2},1[} \rho\, d\rho\right) \cdot \left(\int_{]\theta_1,\theta_2[} 1 - \tan^2\theta\, d\theta\right) \\ &= \frac{3}{8}ab^3 \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2 - (1+\tan^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{3}{8}ab^3[2(\theta_2-\theta_1) - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\tan(\theta)] \\ &= \frac{3}{8}ab^3[2(\theta_2-\theta_1) - \frac{a}{b}(\beta-\alpha)]. \end{aligned}$$

Corrigé 8.6 Démontrons le résultat pour l'intégrale I_α ; nous laissons au lecteur le soin de retranscrire la preuve pour la deuxième intégrale J_α.
Notons, pour $r > 0$,

$$\Delta_r = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 :\ x^2+y^2 < r^2\}\ ;$$

la double inclusion $\Delta_1 \subset]0,1[^2 \subset \Delta_{\sqrt{2}}$ entraîne

$$\int_{\Delta_1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dx\, dy \leq I_\alpha \leq \int_{\Delta_{\sqrt{2}}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dx\, dy.$$

Effectuons le changement de variables en coordonnées polaires qui est en particulier un difféomorphisme de l'ouvert $]0,1[\times]0,\frac{\pi}{2}[$ (resp. $]0,\sqrt{2}[\times]0,\frac{\pi}{2}[$) sur l'ouvert Δ_1 (resp. $\Delta_{\sqrt{2}}$) ; nous obtenons

$$\int_{]0,1[\times]0,\frac{\pi}{2}[} \rho^{3-2\alpha}\cos\theta\sin\theta\, d\rho d\theta \leq I_\alpha \leq \int_{]0,\sqrt{2}[\times]0,\frac{\pi}{2}[} \rho^{3-2\alpha}\cos\theta\sin\theta\, d\rho\, d\theta.$$

Et, par application du théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} &\left(\int_{]0,1[} \rho^{3-2\alpha}\, d\rho\right) \cdot \left(\int_{]0,\frac{\pi}{2}[} \cos\theta\sin\theta\, d\theta\right) \leq I_\alpha \\ &\leq (\int_{]0,\sqrt{2}[} \rho^{3-2\alpha}\, d\rho).(\int_{]0,\frac{\pi}{2}[} \cos\theta\sin\theta\, d\theta). \end{aligned}$$

Or, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \rho^{3-2\alpha}\, d\rho$ est convergente si et seulement si $3-2\alpha > -1$ soit $\alpha < 2$. Grâce à l'encadrement ci-dessus, la conclusion est alors évidente.

Corrigé 8.7 Nous rappelons que les formules des coordonnées sphériques pour un point M de coordonnées (x,y,z) (si ce point n'appartient pas au demi-plan $\Pi = \{y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$) sont :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\cos\varphi\ ; \\ y &= \rho\sin\theta\cos\varphi\ ; \\ z &= \rho\sin\varphi. \end{aligned}\right.$$

où

- ρ est la distance OM entre l'origine O et le point M,
- θ est la mesure (dans le plan orienté $\{z = 0\}$, orienté par le vecteur $(0,0,1)$) de l'angle entre le vecteur $(1,0,0)$ etle vecteur $\overrightarrow{OH}$ (H est la projection du point M sur le plan $\{z = 0\}$) ; on choisit $\theta \in]-\pi,\pi[$;
- φ est la mesure de l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OH}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de telle sorte que φ est positif si $z \geq 0$ et φ est négatif sinon.

La relation

$$(x,y,z) = \phi(\rho,\theta,\varphi)$$

définie un difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi$. En dérivant formellement, nous avons

$$dx\, dydz = |J\phi(\rho,\theta,\phi)| d\rho d\theta d\varphi,$$

avec pour jacobien de ϕ au point (ρ,θ,ϕ) :

$$J\phi(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho^2\cos\varphi.$$

Ainsi en effectuant ce changement de variables sur l'intégrale

$$\int_{B(0,1)\setminus\Pi} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

dont la valeur n'est autre que I, puis en appliquant ensuite le théorème de Fubini, nous concluons :

$$\begin{aligned} I &= \int_{]0,1[\times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \rho^3\cos\phi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \\ &= \left(\int_{]0,1[} \rho^3\, d\rho\right) \cdot \left(\int_{]-\pi,\pi[} d\theta\right) \cdot \left(\int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \cos\varphi\, d\varphi\right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Corrigé 8.8 *Etape 1 :* Supposons dans un premier temps que f soit positive et effectuons dans la première intégrale le changement de variables :

$$\phi(x,y) = (x+y, x-y) = (u,v).$$

La fonction ϕ est bien un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ avec

$$\phi^{-1}(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}).$$

Posons $U =]0,+\infty[^2$; bien sûr ϕ est aussi un difféomorphisme de U sur $\phi(U)$.

• Calculons $\phi(U)$; on a les équivalences :

$$\begin{aligned}(u,v)\in\phi(U) &\iff \exists(x,y)\in]0,+\infty[^2, \phi(x,y)=(u,v)\\ &\iff \exists(x,y)\in]0,+\infty[^2, x=\frac{u+v}{2} \text{ et } \frac{u-v}{2}\\ &\iff \frac{u+v}{2}>0 \text{ et } \frac{u-v}{2}>0\\ &\iff u>|v|.\end{aligned}$$

Ainsi $\phi(U)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u>|v|\}$.

• Partant de la relation

$$(u,v)=\phi(x,y),$$

nous avons $dudv = |J\phi(x,y)|\,dxdy$. Comme $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 2$, la dérivation formelle devient $dxdy=\frac{1}{2}dudv$.

• Nous sommes maintenant en mesure d'effectuer notre changement de variables :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x-y)e^{-(x+y)}\,dx\,dy &= \int_U f(x-y)e^{-(x+y)}\,dx\,dy\\ &= \frac{1}{2}\int_{\phi(U)} f(v)e^{-u}\,du\,dv.\end{aligned}$$

• Pour conclure, calculons $\int_{\phi(U)} f(v)e^{-u}\,du\,dv$; par application du théorème de Fubini-Tonelli (voir chapitre 7), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\phi(U)} f(v)e^{-u}\,du\,dv &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{]|v|,+\infty[} f(v)e^{-u}\,du\right)\,dv\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(v)[-e^{-u}]_{|v|}^{+\infty}\,dv\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-|v|}\,dv.\end{aligned}$$

Etape 2 : supposons maintenant que f soit intégrable. En appliquant ce qui précède à la fonction $|f|$, on déduit

$$\int_{\phi(U)} |f(v)e^{-u}|\,du\,dv = \int_{\mathbb{R}} |f(v)|e^{-|v|}\,dv \le \int_{\mathbb{R}} |f(v)|\,dv < +\infty.$$

L'application $(u,v)\mapsto f(v)e^{-u}$ est donc intégrable sur $\phi(U)$. Les calculs faits à la fin de l'étape 1 sont alors justifiés pour une fonction f de signe quelconque, en appliquant le théorème de Fubini (voir chapitre 7).

Corrigé 8.9 (i) Fixons $x\in\mathbb{R}$; on pose $A(x)=\{y\in\mathbb{R} : (x,y)\in A\}$. Si y et y' appartiennent à $A(x)$ avec $y\neq y'$, alors, par l'hypothèse (44),

$$\{x\}\times[y-t,y+t]\cap\{x\}\times[y'-t,y'+t]=\emptyset,$$

ce qui entraîne que $|y-y'|\ge 2t$. C'est pourquoi $A(x)$ est un ensemble dénombrable et donc

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A(x,y)\,d\lambda(y) = \lambda(A(x)) = 0.$$

Par application du théorème de Fubini, on a donc

$$\begin{aligned}\lambda_2(A) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x,y)\,d\lambda_2(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x,y)\,d\lambda(y)\right)\,d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} 0\,d\lambda(x) = 0.\end{aligned}$$

(ii) Il suffit, en reprenant la fin du raisonnement du (i), de montrer que, pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, $A(x)$ est dénombrable. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n(x)=\left\{y\in A(x) : \{x\}\times[y-\frac{1}{n},y+\frac{1}{n}]\cap A=\{(x,y)\}\right\}.$$

Comme au (i), on montre que deux points de $A_n(x)$ sont au moins distants de $\frac{1}{2n}$; donc, $A_n(x)$ est dénombrable. De plus, nous avons $A(x)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n(x)$, par la condition (44) ; une réunion d'ensembles dénombrables étant dénombrable, on conclut que $A(x)$ est dénombrable.

(iii) La relation (44) est aussi satisfaite avec la direction $\frac{d}{\|d\|}$; nous pouvons donc nous ramener au cas où d est unitaire. Il existe alors une rotation vectorielle R de matrice $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ qui envoie le vecteur d sur le vecteur $(0,1)$. Alors le borélien $R(A)$ vérifie la relation (44) avec la direction $R(d)$; par la question (ii),

$$\lambda_2(R(A))=0. \tag{45}$$

Effectuons dans l'intégrale $\lambda_2(A)=\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x,y)\,dx\,dy$, le changement de variables :

$$(x',y')=R(x,y)\ \ (dx'dy'=dxdy \text{ car } |JR(x,y)| = \begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1).$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\lambda_2(A) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(R^{-1}(x',y'))\,dx'\,dy'\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} 1_{R(A)}(x',y')\,dx'\right)\,dy',\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}1_A(R^{-1}(x',y'))=1 &\iff R^{-1}(x',y')\in A\\ &\iff (x',y')\in R(A).\end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (45), on conclut $\lambda_2(A)=\lambda_2(R(A))=0$.

Corrigé 8.10
(i) La fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; le problème de convergence de l'intégrale I ne se pose donc qu'en $+\infty$. Par le changement de variables $u = x^2$, l'intégrale proposée est de même nature que $\int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du$. En intégrant par parties, pour $X > 1$, on a :

$$\int_1^X \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du = \left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_1^X + \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\sin u}{u\sqrt{u}}\, du.$$

Comme $\left|\frac{\sin u}{u\sqrt{u}}\right| \leq \frac{1}{u\sqrt{u}}$, l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin u}{u\sqrt{u}}\, du$ est absolument convergente. Donc, $\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du$ existe et l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du$ est convergente. De même, on prouve que l'intégrale J est convergente.

(ii) Remarquons tout d'abord que $\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$. Donc, pour tout entier non nul,

$$\begin{aligned} 2J &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{2n\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du\right). \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $u = 2k\pi + v$ (resp. $u = (2k+1)\pi + v$) sur la première (resp. deuxième) intégrale, on obtient

$$2J = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi + v}} - \frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi + v}}\right)\sin v\, dv.$$

Comme, pour tout $v \in]0, \pi[$, $\frac{1}{\sqrt{2k\pi + v}} - \frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi + v}} > 0$, la série ci-dessus est composée de termes strictement positifs et par conséquent $J > 0$.

(iii) En effectuant le changement de variables en coordonnées polaires (le domaine D_t étant borné, la fonction $(x,y) \mapsto \sin(x^2+y^2)$ est intégrable sur D_t), on a

$$\psi(t) = \int_{\Delta_t} \sin(\rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta,$$

où $\Delta_t = \{(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[:\ 0 < \rho < tf(\theta)\}$. Par application du théorème de Fubini, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{tf(\theta)} \rho\sin(\rho^2)\, d\rho\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{\cos(\rho^2)}{2}\right]_0^{tf(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(t^2f^2(\theta))}{2}\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t^2f^2(\theta))\, d\theta. \end{aligned}$$

Le théorème de continuité sous le signe intégral permet de dire que l'application $t \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t^2f^2(\theta))\, d\theta$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc, l'application ψ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0^+. Alors on a, par application du théorème de Fubini,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2T}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^T \cos(t^2f^2(\theta))\, dt\right) d\theta.$$

Puis, en posant $u = f(\theta)t$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2T}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(\theta)}\left(\int_0^{Tf(\theta)} \cos(u^2)\, du\right) d\theta. \tag{46}$$

D'après (ii), il existe une constante $M > 0$ telle que $\left|\int_0^{Tf(\theta)} \cos(u^2)\, du\right| \leq M$, pour tout $T > 0$. D'autre part, f étant continue et strictement positive sur le compact $[0,\frac{\pi}{2}]$, il existe une constante $m > 0$ telle que $f \geq m$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Alors $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(\theta)}(\int_0^{Tf(\theta)} \cos(u^2)\, du)\, d\theta\right| \leq \frac{\pi M}{2m}$ et en faisant $T \to +\infty$ dans la relation (46), on conclut $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\, dt = \frac{\pi}{4}$.

(iv) La formule trigonométrique $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$ permet d'écrire

$$\psi(t) = \int_{]0,t[\times]0,t[} \sin(x^2).\cos(y^2)\, dx\, dy + \int_{]0,t[\times]0,t[} \cos(x^2).\sin(y^2)\, dx\, dy$$

et le théorème de Fubini donne alors

$$\psi(t) = 2\int_{]0,t[} \sin(x^2)\, dx.\int_{]0,t[} \cos(x^2)\, dx.$$

En faisant $t \to +\infty$, on conclut $\lim_{t\to+\infty}\psi(t) = 2I.J$.

(v) Posons $\ell = 2I.J$; par (iv), $\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \ell$. Montrons que cela entraîne aussi $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\,dt = \ell$.
Soit $\epsilon > 0$; pour $t \geq T_0$, $|\,\psi(t) - \ell\,| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors, pour $T \geq T_0$,

$$\begin{aligned} \left|\,\frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\,dt - \ell\,\right| &= \left|\,\frac{1}{T}\int_0^T (\psi(t)-\ell)\,dt\,\right| \\ &\leq \frac{1}{T}\int_0^{T_0} |\,\psi(t)-\ell\,|\;dt + \frac{1}{T}\int_{T_0}^T |\,\psi(t)-\ell\,|\;dt \\ &\leq \frac{1}{T}\int_0^{T_0} |\,\psi(t)-\ell\,|\;dt + \frac{\epsilon}{2}.\frac{T-T_0}{T}. \end{aligned}$$

Donc, pour T assez grand, $|\,\frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\,dt - \ell\,| \leq \epsilon$. Le résultat souhaité est démontré.
Enfin, par (iii), on déduit que $\ell = \frac{\pi}{4}$ soit $I.J = \frac{\pi}{8}$.

(vi) D'une part, en reprenant le même type de calculs qu'au (iii), on a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \chi(t)\,dt = 0.$$

D'autre part la formule trigonométrique

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$

permet de déduire $\lim_{T\to+\infty} \chi(t) = I^2 - J^2$. Ainsi, par l'argument donné au (v), $I^2 - J^2 = 0$ soit $I = J$ ou $I = -J$.

(vii) En résumé, des questions précédentes, nous pouvons dire que $I = J > 0$ et $I.J = \frac{\pi}{8}$. Ainsi $I = J = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Corrigé 8.11 (i) Vérifions que $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$ est convergente. L'application $x \mapsto x^{a-1}e^{-x}$ étant continue sur $]0,+\infty[$, les problèmes de convergence se posent en 0^+ et en $+\infty$.
Au voisinage de 0^+, nous avons $x^{a-1}e^{-x} \sim x^{a-1}$. L'intégrale $\int_0^1 x^{a-1}\,dx$ étant convergente, il en est de même pour $\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx$.
Au voisinage de $+\infty$, nous avons $\lim_{x\to+\infty} x^2(x^{a-1}e^{-x}) = 0$ et donc, pour x assez grand, $x^{a-1}e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ étant convergente, il en est de même pour l'intégrale $\int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$.
Vérifions que l'intégrale $\int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy$ est convergente. L'application $y \mapsto y^{a-1}(1-y)^{b-1}$ étant continue sur $]0,1[$, les problèmes de convergence se posent en 0^+ et en 1^-.
Au voisinage de 0^+, nous avons $y^{a-1}(1-y)^{b-1} \sim y^{a-1}$. L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} y^{a-1}\,dx$ étant convergente, il en est de même pour $\int_0^{\frac{1}{2}} y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy$.
Au voisinage de 1^-, nous avons l'équivalence $y^{a-1}(1-y)^{b-1} \sim (1-y)^{b-1}$. L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-y)^{b-1}\,dy$ étant convergente, il en est de même pour l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy$ qui converge.

(ii) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} (x,y) \in \phi(]0,+\infty[^2) &\iff \exists (u,v) \in]0,+\infty[^2, \phi(u,v) = (x,y) \\ &\iff \exists (u,v) \in]0,+\infty[^2, x = u+v \text{ et } y = \frac{u}{u+v} \\ &\iff \exists (u,v) \in]0,+\infty[^2, x = u+v \text{ et } y = \frac{u}{x} \\ &\iff \exists (u,v) \in]0,+\infty[^2, u = xy \text{ et } v = x(1-y) \\ &\iff xy > 0 \text{ et } x(1-y) > 0 \\ &\iff x > 0 \text{ et } 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Donc, l'application ϕ est une bijection de $]0,+\infty[^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,1[$ et son inverse est définit par la relation

$$\phi^{-1}(x,y) = (u,v) = (xy, x(1-y)).$$

Nous obtenons, en dérivant formellement cette égalité,

$$dudv = |J\phi^{-1}(x,y)|dx\,dy \text{ avec } J\phi^{-1}(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -x,$$

soit $dudv = |x|dx\,dy$. En effectuant le changement de variables, puis, en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{]0,+\infty[^2} f(u+v)u^{a-1}v^{b-1}dudv &= \int_{]0,+\infty[\times]0,1[} f(x)y^{a-1}(1-y)^{b-1}x^{a+b-1}dxdy \\ &= B(a,b)\int_0^\infty x^{a+b-1}f(x)\,d\lambda(x). \end{aligned}$$

(iii) En appliquant la question (ii) à la fonction $f(t) = e^{-t}$, on obtient

$$\int_{]0,+\infty[^2} e^{-u}e^{-v}u^{a-1}v^{b-1}\,du\,dv = B(a,b)\Gamma(a+b).$$

En utilisant sur cette dernière intégrale le théorème de Fubini-Tonelli, nous concluons $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b).B(a,b)$.

9 ESPACES $\mathcal{L}^p$ ET L^p

Dans tout ce chapitre, on se placera sur un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et f, g, $f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$ désigneront des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurables.

9.1 Définitions

Définition 9.1 *Pour toute fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, on pose :*

- *si $p \in [1, +\infty[$, $N_p(f) = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ (avec la notation : $\infty^p = \infty$) ;*
- *si $p = +\infty$, $N_p(f) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \ |f| \leq \lambda \ \ \mu - p.p.\}$.*

Remarque 9.2 D'après la proposition 4.6 (iv), pour $p \in [1, +\infty[$, $N_p(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout. Pour $p = +\infty$, le résultat est encore valable et est une conséquence de l'inégalité :

$$|f| \leq N_\infty(f) \quad \text{presque partout.}$$

On définit alors les espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ de la manière suivante.

Définition 9.3 *Pour $p \in [1, +\infty]$, on pose :*

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : \ f \ \ \textit{est mesurable et} \ \ N_p(f) < +\infty\} \ ;$$

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : \ f \ \ \textit{est mesurable et} \ \ N_p(f) < +\infty\} \ ;$$

S'il n'y a pas d'ambiguité sur l'espace à considérer, on écrira $\mathcal{L}^p$ (resp. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$) au lieu de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu)$ (resp. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, \mu)$). Dans la définition de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, on a écarté volontairement les deux infinis comme valeur de f pour que l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ ait une structure d'espace vectoriel (voir section suivante).

9.2 Inégalités classiques

Définition 9.4 *On dit que deux éléments p et q de $[1,+\infty]$ sont conjugués si $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, avec la convention $\dfrac{1}{\infty}=0$.*

Les exemples classiques d'éléments conjugués sont

$$\{p,q\}=\{1,+\infty\} \text{ et } (p,q)=(2,2).$$

Nous avons les deux inégalités suivantes qui sont fort utiles dans les majorations.

Proposition 9.5

(i) *Si p et q sont des éléments conjugués, alors :*

$$N_1(fg)\leq N_p(f).N_q(g) \text{ (inégalité de Hölder).}$$

(ii) *Si $p\in[1,+\infty]$ et si f et g sont à valeurs positives (éventuellement $+\infty$) ou à valeurs réelles, alors :*

$$N_p(f+g)\leq N_p(f)+N_p(g) \text{ (inégalité de Minkowski).}$$

Les remarques suivantes sont des conséquences de l'inégalité de Minkowski.

Remarque 9.6 L'inégalité suivante est parfois utile dans les applications :

$$|N_p(f)-N_p(g)|\leq N_p(f+g),$$

pour f et g appartenant à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$.

Remarque 9.7 L'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel réel.

Remarque 9.8 L'application $N_p:\ \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}_+$ est une semi-norme, c'est-à-dire, elle vérifie les trois propriétés :

- $\forall f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, $f=0$ entraîne $N_p(f)=0$;
- $\forall f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $N_p(\lambda f)=|\lambda|N_p(f)$;
- $\forall(f,g)\in(\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}})^2$, $N_p(f+g)\leq N_p(f)+N_p(g)$.

L'introduction de l'espace quotient va permettent d'obtenir une véritable norme (voir section 9.4).

9.3 Convergence en moyenne d'ordre p

Définition-proposition 9.9 *Soient $p\in[1,+\infty]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ et $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p vers f et on note $f_n\stackrel{N_p}{\to}f$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}N_p(f_n-f)=0$.*

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p vers deux limites f et g, alors $f=g$ presque partout.

Remarque 9.10 *Si $f_n\stackrel{N_p}{\to}f$ alors, de l'inégalité*

$$|N_p(f_n)-N_p(f)|\leq N_p(f_n-f),$$

on déduit que la suite $(N_p(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $N_p(f)$.

Soit $p\in[1,+\infty[$; si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f et, sous de bonnes hypothèses de domination (par exemple, il existe une fonction $h\in\mathcal{L}^p$ telle que , pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leq h$), on peut dire, grâce au théorème de la convergence dominée, que $f_n\stackrel{N_p}{\to}f$. Le théorème ci-dessous est une réciproque à cette propriété.

Théorème 9.11 *Soit $p\in[1,+\infty]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ et $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$. Si $f_n\stackrel{N_p}{\to}f$, alors il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement presque partout vers f.*

9.4 Espace quotient L^p

Définition-proposition 9.12 *Soit $p\in[1,+\infty]$; la relation $\mathcal{R}$ définie entre deux éléments de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ par :*

$$f\mathcal{R}g\iff f=g \text{ presque partout}$$

est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences forment l'espace L^p. Si f est un élément de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, on notera $\zeta=\overline{f}\in L^p$ la classe de f.

Définition-proposition 9.13 *Soit $p\in[1,+\infty]$;*

(i) *si ζ_1 et ζ_2 sont des éléments de L^p, on peut définir la somme $\zeta_1+\zeta_2$ par :*

$$\zeta_1+\zeta_2=\overline{f_1+f_2},$$

où f_1 et f_2 sont des représentants respectifs des classes ζ_1 et ζ_2 ;

(ii) *si ζ est un élément de L^p et si $\lambda\in\mathbb{R}$, on peut définir le produit $\lambda.\zeta$ par :*

$$\lambda.\zeta=\overline{\lambda.f},$$

où f est un représentant de la classe de ζ

(iii) *si ζ est un élément de L^p, on peut définir la norme de ζ par :*

$$N_p(\zeta) = N_p(f),$$

où f est un représentant de la classe de ζ.

Il est important de noter que les définitions (i), (ii) et (iii) ci-dessus ne dépendent pas du représentant choisi. Nous avons alors :

Proposition 9.14 *Pour $p \in [1, +\infty]$, $(L^p, +, .)$ est un espace vectoriel muni de la norme N_p.*

Pour plus de détails sur cet espace, nous renvoyons le lecteur au livre de H. Brézis mentionné dans la bibliographie.

9.5 Énoncés des exercices

Exercice 9.1 ($\star$)
Les fonctions suivantes appartient-elles à l'espace $\mathcal{L}^p(]0, +\infty[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_{]]0,+\infty[})$ lorsque p décrit l'intervalle $[1, +\infty]$?

(i) $f_1(t) = e^{-t}$ $(t > 0)$;

(ii) $f_2(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}(1 + |\ln(t)|)}$ $(t > 0)$.

Exercice 9.2 ($\star\star$)
Montrer en utilisant l'inégalité de Hölder que, pour tout $a > 0$,

$$\int_0^a x^{-\frac{1}{2}} e^{2x}\, dx \leq \frac{3}{2} a^{1/6} e^{2a}.$$

Exercice 9.3 ($\star\star$)
Montrer que si $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1])$ alors les deux inégalités suivantes sont incompatibles :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (f(x) - e^x)^2\, dx & \leq \quad 4\ ; \\ \displaystyle\int_0^1 (f(x) - e^{-x})^2\, dx & \leq \quad 1. \end{cases}$$

Exercice 9.4 ($\star\star$)
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et p, q deux réels de l'intervalle $[1, +\infty]$. On se propose de comparer les deux espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^q$.

(i) On suppose que $\mu(X) < +\infty$ et $q \leq p$; montrer alors que

$$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q.$$

(ii) On suppose toujours que $q \leq p$; montrer alors que si une fonction bornée f appartient à l'espace $\mathcal{L}^q$, elle appartient aussi à $\mathcal{L}^p$.

(iii) En utilisant des fonctions, définies sur un intervalle bien choisi de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, montrer que les hypothèses faites dans les questions (i) et (ii) sont indispensables.

Exercice 9.5 ($\star\star\star$)
Soit $(p_j)_{1\leq j\leq n}$ une suite finie d'éléments de $[1, +\infty]$ telle que , avec la convention $\dfrac{1}{\infty} = 0$, on ait $\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = 1$.

(i) Montrer, par récurrence sur n, l'inégalité de Hölder généralisée, à savoir que pour tout n-uple $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ de fonctions mesurables positives , on a :

$$N_1(f_1.\cdots.f_n) \leq N_{p_1}(f_1).\cdots.N_{p_n}(f_n).$$

(ii) En déduire que, pour tout n-uple $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ de fonctions réelles mesurables tel que, pour tout entier j compris entre 1 et n, on ait $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}$, le produit $f_1.\cdots.f_n$ est élément de l'espace $\mathcal{L}^1$.

Exercice 9.6 ($\star\star$)
Cet exercice généralise l'inégalité de Minkowski à une famille dénombrable de fonctions mesurables positives. Soit donc $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et p un élément de l'intervalle $[1, +\infty[$.

(i) Etablir par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que, si $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ est un n-uple de fonctions mesurables positives, on a l'inégalité :

$$N_p(\sum_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n N_p(f_j).$$

(ii) En déduire que si $(f_j)_{j\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables positives, on a l'inégalité :

$$N_p(\sum_{j=1}^\infty f_j) \leq \sum_{j=1}^\infty N_p(f_j).$$

(iii) Montrer que ces résultats restent valables pour $p = +\infty$.

Exercice 9.7 ($\star$)
Soient p et q des réels strictement positifs ; on définit alors le réel r par la relation $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que si f et g sont deux fonctions $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables alors

$$\left(\int_X |f.g|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_X |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Indication : appliquer l'inégalité de Hölder au produit $|f^r|.|g^r|$.

Exercice 9.8 ($\star\star\star$)
Soit $2 \leq p < +\infty$; on se propose de démontrer que si f et g sont deux fonctions à valeurs réelles de l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ alors

$$\left(N_p\left(\frac{f+g}{2}\right)\right)^p + \left(N_p\left(\frac{f-g}{2}\right)\right)^p \leq \frac{1}{2}\left[(N_p(f))^p + (N_p(g))^p\right].$$

(i) Montrer que l'application $x \mapsto (1+x^2)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$ est croissante sur $[0, +\infty[$; en déduire que, pour α et β positifs,

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}.$$

(ii) En déduire que si a et b sont réels alors

$$|\frac{a+b}{2}|^p + |\frac{a-b}{2}|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p).$$

(iii) Conclure.

Exercice 9.9 ($\star\star\star$)
L'objet de cet exercice est la recherche des conditions dans lesquelles les deux membres de l'inégalité de Hölder sont en fait égaux. On se donne donc un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$, deux réels de l'intervalle $]1, +\infty[$ conjugués et deux fonctions réelles f et g mesurables. On désire trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux quantités $N_1(fg)$ et $N_p(f).N_q(g)$ soient égales

(i) Montrer qu'il y a égalité lorsque l'une des deux quantités $N_p(f)$ ou $N_q(g)$ est nulle.

(ii) Etablir que si $N_p(f)$ et $N_q(g)$ sont toutes deux finies et non nulles, l'égalité est réalisée si et seulement s'il existe deux constante finies et non nulles α et β telles que l'égalité $\alpha f^p = \beta g^q$ soit satisfaite μ-presque partout.

Exercice 9.10 ($\star\star$)
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$; on note par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs réelles strictement positives. Trouver alors la valeur minimum de

$$(\int_X f \, d\mu).(\int_X \frac{1}{f} \, d\mu)$$

lorsque f décrit l'ensemble $\mathcal{S}$. Pour quelles fonctions ce minimum est-il atteint ?

Exercice 9.11 ($\star\star$)
Soit p un nombre réel supérieur ou égal à un. On considère dans cette exercice deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \in \mathcal{L}^p$ et g est continue et nulle en dehors d'un compact de la forme $[-a, a]$ ($a > 0$).

(i) Montrer que l'on peut définir une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule, vraie pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x+t) \, d\lambda(t)$$

et que $|F(x)| \leq N_p(f)N_q(g)$.

(ii) Montrer que F est continue.

X **Exercice 9.12** ($\star\star\star$)
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et f, g deux fonctions de l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$.

(i) Montrer que l'on définit une application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule, vraie pour $u \in \mathbb{R}$,

$$\phi(u) = N_p(f + ug).$$

(ii) Montrer que, pour $u \in \mathbb{R}$, $\phi(u) \leq N_p(f) + |u|N_p(g)$.

(iii) Montrer que ϕ est lipschitzienne de rapport $N_p(g)$; en déduire que ϕ est continue.

(iv) Retrouver le résultat de la question précédente en montrant que ϕ est convexe.

(v) Calculer $\lim_{|u| \to +\infty} \phi(u)$; en déduire que ϕ est une application constante si et seulement si $g = 0$ presque partout.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité, pour a et b réels,

$$|a+b|^p \geq \frac{|a|^p}{2^{p-1}} - |b|^p.$$

Exercice 9.13 $(\star\star)$
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie et $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$; on se propose de démontrer que

$$\lim_{p \to +\infty} N_p(f) = N_\infty(f).$$

(i) Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$, $N_p(f) \leq N_\infty(f) \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{p}}$.

(ii) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $N_\infty(f) > 0$.

On supposera dorénavant que $N_\infty(f) > 0$.

(iii) Soit ϵ réel tel que $0 < \epsilon < N_\infty(f)$; on pose

$$S_\epsilon = \{N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2} \leq |f| \leq N_\infty(f)\}.$$

(a) Montrer que S_ϵ est mesurable, de mesure strictement positive.

(b) Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$,

$$N_p(f) \geq \left(N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2}\right) . \mu(S_\epsilon)^{\frac{1}{p}} ;$$

(c) en déduire que, pour p assez grand, $N_p(f) \geq N_\infty(f) - \epsilon$;

(d) conclure.

(iv) Le résultat reste-t-il valable si $N_\infty(f) = +\infty$, c'est-à -dire si la fonction f n'appartient pas à $\mathcal{L}^\infty(X)$.

Exercice 9.14 $(\star\star)$
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie et $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ telle que $N_\infty(f) > 0$. Si l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_X |f|^n \, d\mu$ on se propose de démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = N_\infty(f).$$

(i) Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq N_\infty(f)$.

(ii) En appliquant l'inégalité de Hölder, montrer que

$$I_n \leq (I_{n+1})^{\frac{n}{n+1}} . \mu(X)^{\frac{1}{n+1}} ;$$

(iii) en déduire que $\dfrac{(I_n)^{1/n}}{\mu(X)^{1/n}} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

(iv) Conclure, en appliquant l'exercice 9.13.

Exercice 9.15 $(\star\star)$
Soit p et q deux réels conjugués ; montrer que si une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p vers f et si une suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre q vers g, alors la suite

$$(f_n . g_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge en moyenne d'ordre 1 vers $f.g$.

Exercice 9.16 $(\star\star\star)$
Soient p un réel de l'intervalle $]1, +\infty[$ ($q = \dfrac{p}{p-1}$ désignera alors le conjugué de p) et f une fonction continue bornée de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{L}^p([0, +\infty[)$. On pose alors

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt,$$

si $x > 0$, et $F(0) = f(0)$.

(i) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$,

$$xF'(x) = f(x) - F(x).$$

(ii) On suppose de plus dans cette question que f est nulle en dehors du compact $[0, n]$ $(n \geq 1)$.

(a) Montrer qu'il existe une constante positive C telle que, pour tout $x > 0$,

$$|F(x)| \leq \frac{C}{x}.$$

(b) On suppose que la fonction f est positive. En remarquant que, pour $x > 0$,

$$F^p(x) = F^{p-1}(x).f(x) - xF^{p-1}(x)F'(x)$$

et en utilisant une intégration par parties sur l'intervalle $[\frac{1}{n}, n]$, montrer que

$$\int_0^\infty F^p(t) \, dt = q \int_0^\infty F^{p-1}(t).f(t) \, dt.$$

(c) En déduire l'inégalité :

$$N_p(F) \leq qN_p(f). \tag{47}$$

(iii) En approchant f par une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ continues telle que, pour tout n, f_n est nulle en dehors du compact $[0, n + \frac{1}{n}]$, montrer que l'inégalité (47) reste valable dans le cadre général.

Exercice 9.17 $(\star\star)$
A l'aide d'un exemple, montrer que la converge en moyenne d'ordre p (avec $p \in [1, +\infty[$) d'une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ vers une fonction g n'entraîne pas nécessairement la converge simple presque partout de cette même suite vers g.
Indication : on pourra s'aider des fonctions $f_k^j = 1_{[\frac{j}{k+1}, \frac{j+1}{k+1}]}$, avec $k \geq 1$ et $0 \leq j \leq k$.

Exercice 9.18 $(\star)$
Soient $1 \leq p \leq +\infty$ et $f, f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$ des fonctions de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ telles que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p vers une fonction f de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$. On suppose de plus qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout n,

$$|f_n| \leq M.$$

Prouver alors que $|f| \leq M$ presque partout.

Exercice 9.19 $(\star)$
Répondre aux questions suivantes concernant l'espace $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, pour $p \in [1, +\infty]$.

(i) Quelle est la fonction $\overline{1_{\mathbb{Q}}}$?

(ii) Donner un exemple d'élément de L^p n'admettant pas de représentant continu. Justifier de manière précise votre réponse.

(iii) Quel est l'ensemble suivant :

$$A = \{\zeta \in L^p : \text{ il existe un représentant } f \text{ de } \zeta \text{ vérifiant } f(0) = 0\}.$$

(iv) L'ensemble

$$B = \{\zeta \in L^p : \text{ il existe un représentant } f \text{de } \zeta \text{vérifiant } f = 0 \text{ sur } [0, 1]\}.$$

est-il fermé dans l'epace vectoriel normé L^p ?

9.6 Corrigés des exercices

Corrigé 9.1 (i) Il est clair que $\sup\{f_1(t) : t > 0\} = 1$; donc, $N_\infty(f_1) \leq 1$ (en fait il y a égalité) et f_1 appartient à l'espace $\mathcal{L}^\infty$. Supposons maintenant que $1 \leq p < +\infty$; la fonction f_1 étant continue sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer, d'après le théorème 5.2 (théorème de comparaison de l'intégrale généralisée de Riemann et de l'intégrale de Lebesgue), la convergence de $\int_0^\infty |f_1(t)|^p \, dt$. Le problème de convergence ne se pose qu'en $+\infty$. Or nous avons, pour $X > 0$,

$$\int_0^X e^{-pt} \, dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^X = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-pX}\right) ;$$

en faisant $X \to +\infty$, nous obtenons $\int_0^\infty |f_1(t)|^p \, dt = \frac{1}{p}$ et la fonction f_1 appartient aussi à $\mathcal{L}^p$.

(ii) En 0^+, nous avons $f_2 \sim \frac{-1}{\sqrt{t}\ln(t)}$; donc $\lim_{t\to 0^+} f_2(t) = +\infty$. Montrons alors que $N_\infty(f_2) = +\infty$ (résultat qui doit sembler évident aux yeux du lecteur!) ; pour cela, il suffit de vérifier que l'ensemble

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \ |f_2| \leq \lambda \ \text{ presque partout } \}$$

est vide. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f_2 \leq \lambda \ \text{ presque partout } ; \tag{48}$$

Par définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que

$$f_2 \geq \lambda + 1 \text{ sur l'intervalle }]0, \eta[. \tag{49}$$

Comme la mesure de Borel de l'intervalle $]0, \eta[$ est strictement positive, on conclut que les relations (48) et (49) sont contradictoires.
Soit maintenant $1 \leq p < +\infty$; la fonction f_2 étant continue sur $]0, +\infty[$, il suffit de montrer, d'après le théorème 5.2, la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty |f_2(t)|^p \, dt$. Les problèmes de convergence se posent en 0^+ et en $+\infty$. Nous allons discuter suivant les différentes valeurs de p
Cas 1 : $1 \leq p < 2$. Comme $\frac{p}{2} < 1$, nous pouvons choisir une constante a telle que $\frac{p}{2} < a < 1$. Alors comme $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{p}{2}-a}(1 + |\ln t\ |)^p = 0$, nous avons, pour t assez grand, $t^{\frac{p}{2}-a}(1 + |\ln t\ |)^p \leq 1$, ce que l'on peut écrire $\frac{1}{t^a} \leq |f_2(t)|^p$. L'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t^a} \, dt$ n'étant pas convergente, on en déduit que l'intégrale $\int_1^\infty |f_2(t)|^p \, dt$ n'est pas convergente. Donc, la fonction f_2 n'appartient pas à $\mathcal{L}^p$.
Cas 2 : $2 \leq p < +\infty$. Comme $\frac{p}{2} > 1$, nous pouvons choisir une constante a telle que $\frac{p}{2} > a > 1$. Alors comme $\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{p}{2}-a}(1 + |\ln t\ |)^p = 0$, nous avons, pour t assez petit, $t^{\frac{p}{2}-a}(1 + |\ln t\ |)^p \leq 1$, ce que l'on peut écrire $\frac{1}{t^a} \leq |f_2(t)|^p$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^a} \, dt$ n'étant pas convergente, on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 |f_2(t)|^p \, dt$ n'est pas convergente. Donc, la fonction f_2 n'appartient pas à $\mathcal{L}^p$.
Cas 3 : $p = 2$. En faisant le changement de variable $u = \ln t$, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{1}{t(1 + |\ln(t)|)^2} \, dt$ est de même nature que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |u|)^2} \, du$ et cette dernière est évidemment une intégrale convergente. Donc, la fonction f_2 appartient à $\mathcal{L}^2$.

Corrigé 9.2 En appliquant l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{3}{2}$ et $q = 3$ (on a bien $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), nous avons :

$$\int_0^a x^{-\frac{1}{2}} e^{2x}\,dx \le \left(\int_0^a x^{-\frac{3}{4}}\,dx\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\int_0^a e^{6x}\,dx\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Calculons maintenant les termes intervenant dans ce produit. D'une part, nous avons

$$\int_0^a x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \left[4x^{\frac{1}{4}}\right]_0^a = 4a^{\frac{1}{4}}.$$

D'autre part, nous avons

$$\int_0^a e^{6x}\,dx = \frac{e^{6a}-1}{6}.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\int_0^a x^{-\frac{1}{2}} e^{2x}\,dx \le 4^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{6}} \left(\frac{e^{6a}-1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3^{\frac{1}{3}}} a^{\frac{1}{6}} (e^{6a}-1)^{\frac{1}{3}}.$$

On conclut en remarquant que $(e^{6a}-1)^{\frac{1}{3}} \le e^{2a}$ et que $\frac{2}{3^{\frac{1}{3}}} \le \frac{3}{2}$ est équivalent à $64 = 4^3 \le 3^4 = 81$.

Corrigé 9.3 Raisonnons par l'absurde en supposant que les deux inégalités soient satisfaites. En appliquant l'inégalité de Hölder avec $p = 2$ et $q = 2$, nous avons

$$\int_0^1 |f(x) - e^x|\,dx \le \left(\int_0^1 (f(x)-e^x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 1\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

et donc, par hypothèse,

$$\int_0^1 |f(x) - e^x|\,dx \le 2.$$

En procédant de la même manière pour la deuxième inégalité, on a aussi :

$$\int_0^1 |f(x) - e^{-x}|\,dx \le 1.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |e^x - e^{-x}|\,dx &\le \int_0^1 |e^x - f(x)|\,dx + \int_0^1 |f(x) - e^{-x}|\,dx\\ &\le 3.\end{aligned}$$

Or, en effectuant le calcul de $\int_0^1 |e^x - e^{-x}|\,dx$, nous avons

$$\int_0^1 |e^x - e^{-x}|\,dx = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,dx = e + \frac{1}{e}.$$

On aboutit à la contradiction $e + \frac{1}{e} \le 3$.

Corrigé 9.4 (i) Si $q = p$ le résultat est immédiat ; supposons maintenant que $q < p$. Soit $f \in \mathcal{L}^p$; nous allons alors envisager deux cas.

Cas 1 : $q < p = +\infty$. Dans ce cas, nous avons $|f| \le N_\infty(f) < +\infty$ presque partout, ce qui implique

$$\int_X |f|^p\,d\mu \le \int_X N_\infty(f)^p\,d\mu = N_\infty(f)^p.\mu(X) < +\infty.$$

Donc, $f \in \mathcal{L}^q$.

Cas 2 : $q < p < +\infty$. Considérons les fonctions $F = |f|^q$ et $G = 1$; en appliquant l'inégalité de Hölder avec $P = \frac{p}{q}$ et $Q = \frac{1}{1-\frac{q}{p}}$ (remarquer que les deux éléments P et Q sont conjugués), nous avons

$$\int_X F.G\,d\mu \le \left(\int_X F^P\,d\mu\right)^{\frac{1}{P}} . \left(\int_X G^Q\,d\mu\right)^{\frac{1}{Q}}.$$

Cela s'écrit

$$\int_X |f|^q\,d\mu \le \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{q}{p}} .\mu(X)^{\frac{p-q}{p}},$$

et aussi

$$N_q(f) \le \mu(X)^{\frac{p-q}{pq}}.N_p(f) < +\infty.$$

Donc, dans ce cas encore, $f \in \mathcal{L}^q$.

(ii) Soit f une fonction bornée appartenant à l'espace $\mathcal{L}^q$. Si $p = +\infty$ la conclusion est immédiate. Nous pouvons donc supposer que $q \le p < +\infty$. Comme f est bornée, il existe une constante $M > 0$ telle que $|f| \le M$, ce qui s'écrit $\frac{|f|}{M} \le 1$. Donc, $\left(\frac{|f|}{M}\right)^p \le \left(\frac{|f|}{M}\right)^q$ et en intégrant chaque membre de cette inégalité

$$\int_X |f|^p\,d\mu \le M^{p-q} \int_X |f|^q\,d\mu,$$

ce qui s'écrit

$$N_p(f) \le M^{\frac{p-q}{p}} N_p(f)^{\frac{q}{p}} < +\infty.$$

Donc, f appartient à l'espace $\mathcal{L}^p$.

(iii)(a) Montrons que l'hypothèse $\mu(X) < +\infty$ est indispensable dans la question (i), en supposant bien sûr que $q < p$. Pour cela, nous allons nous placer sur l'espace $([1,+\infty[, \mathcal{B}([1,+\infty[), \lambda_{|[1,+\infty[})$; si $p = +\infty$ il suffit de prendre la fonction constante égale à un ; si $p < +\infty$, il suffit de prendre la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ où α est un réel choisi dans l'intervalle $]\frac{1}{p}, \frac{1}{q}[$.

(b) Montrons que l'hypothèse de bornitude de la fonction est indispensable dans la question (ii), en supposant bien sûr que $q < p$. Pour cela, nous allons nous placer sur l'intervalle $]0,1]$; il suffit de prendre la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\beta}$ où β est un réel choisi dans l'intervalle $]\frac{1}{p}, \frac{1}{q}[$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Corrigé 9.5 (i) Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour $n-1$ ($n \geq 2$). Nous allons envisager deux cas.
Cas 1 : pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $p_j \neq +\infty$.
Alors, grâce à la condition $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$, nous avons aussi $p_j \in]1, +\infty[$, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$. Posons $a = (1 - \frac{1}{p_n})^{-1} > 0$; nous avons

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a}{p_j} = 1.$$

Par hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$\int_X (f_1)^a. \cdots .(f_{n-1})^a \, d\mu \leq \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_X (f_j)^{p_j} \, d\mu \right)^{\frac{a}{p_j}},$$

et en élevant chaque membre de l'inégalité par $\frac{1}{a}$:

$$\left(\int_X (f_1)^a. \cdots .(f_{n-1})^a \, d\mu \right)^{\frac{1}{a}} \leq \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_X (f_j)^{p_j} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_j}} \tag{50}$$

D'autre part, par l'inégalité de Hölder,

$$\int_X f_1. \cdots .f_n \, d\mu \leq \left(\int_X (f_1. \cdots .f_{n-1})^a \, d\mu \right)^{\frac{1}{a}} . \left(\int_X f_n^{p_n} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_n}}. \tag{51}$$

En combinant les deux inégalités (50) et (51), le résultat est démontré à l'ordre n dans ce cas.
Cas 2 : il existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $p_j = +\infty$.
Considérons l'ensemble non vide

$$J = \{j \in \{1, \cdots, n\} : \ p_j = +\infty\} ;$$

la condition $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$ devient $\sum_{j \notin J} \frac{1}{p_j} = 1$ et en particulier le complémentaire de J est aussi non vide ; en intégrant sur X chaque membre de l'inégalité

$$f_1. \cdots .f_n \leq \prod_{j \in J} N_\infty(f_j) . \prod_{j \notin J} f_j \quad \text{presque partout,}$$

nous déduisons

$$N_1(f_1. \cdots .f_n) \leq \prod_{j \in J} N_{p_j}(f_j) . N_1 \left(\prod_{j \notin J} f_j \right).$$

Pour conclure dans ce cas, il suffit d'appliquer la récurrence aux fonctions $(f_j)_{j \notin J}$.

(ii) Par hypothèse, pour $j \in \{1, \cdots, n\}$, $N_{p_j}(f_j) < +\infty$, et en appliquant l'inégalité précédemment démontrée au produit $|f_1| \cdots |f_n|$, nous obtenons

$$N_1(f_1. \cdots .f_n) \leq N_{p_1}(f_1). \cdots .N_{p_n}(f_n) < +\infty.$$

Ainsi, le produit $f_1. \cdots .f_n$ est élément de l'espace $\mathcal{L}^1$.

Corrigé 9.6 (i) Pour $n = 2$, c'est l'inégalité de Minkowski. Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour $n-1$ ($n \geq 3$). En appliquant l'inégalité de Minkowski aux fonctions $\sum_{j=1}^{n-1} f_j$ et f_n, nous obtenons :

$$N_p(\sum_{j=1}^{n} f_j) \leq N_p(\sum_{j=1}^{n-1} f_j) + N_p(f_n). \tag{52}$$

D'autre part, par hypothèse de récurrence,

$$N_p(\sum_{j=1}^{n-1} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n-1} N_p(f_j). \tag{53}$$

En combinant les deux inégalités (52) et (53), le résultat est démontré à l'ordre n.

(ii) La suite de fonctions $\left(\left(\sum_{j=1}^{n} f_j \right)^p \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers la fonction $\left(\sum_{j=1}^{+\infty} f_j \right)^p$. Par le théorème de la convergence monotone, nous avons donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \right)^p \, d\mu = \int_X \left(\sum_{j=1}^{+\infty} f_j \right)^p \, d\mu$$

et par continuité de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ (si $N_p \left(\left(\sum_{j=1}^{+\infty} f_j \right)^p \right) < +\infty$; sinon utiliser que $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{p}} = +\infty$) :

$$\lim_{n \to +\infty} N_p \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \right) = N_p \left(\sum_{j=1}^{+\infty} f_j \right). \tag{54}$$

D'autre part, d'après (i), pour $n \geq 1$, on a :

$$N_p \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} N_p(f_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} N_p(f_j). \tag{55}$$

Grâce à l'égalité (54) et en faisant $n \to +\infty$ dans l'inégalité (55), on conclut :

$$N_p\left(\sum_{j=1}^{+\infty} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} N_p(f_j).$$

(iii) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une partie mesurable négligeable A_j tel que $0 \leq f_j \leq N_\infty(f_j)$ sur $X \setminus A_j$. Considérons alors la partie mesurable

$$A = \bigcup_{j=0}^{+\infty} A_j\ ;$$

A est négligeable comme réunion de parties négligeables et, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq f_j \leq N_\infty(f_j) \ \text{ sur } \ X \setminus A.$$

En sommant ces inégalités de 0 à $+\infty$, on obtient

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} f_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} N_\infty(f_j) \ \text{ sur } \ X \setminus A.$$

Par définition de $N_\infty\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right)$, on conclut :

$$N_\infty\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} N_\infty(f_j).$$

Corrigé 9.7 En appliquant l'inégalité de Hölder aux deux nombres conjugués $\dfrac{p}{r}$ et $\dfrac{q}{r}$ et aux deux fonctions $|f^r|$ et $|g^r|$, on a

$$\int_X |f.g|^r\, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{r}{p}} . \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{r}{q}}.$$

En élevant à la puissance $\dfrac{1}{r}$ chaque membre de l'inégalité, on obtient le résultat souhaité.

Corrigé 9.8 (i) Notons ϕ la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie , pour $x \geq 0$, par

$$\phi(x) = x^{\frac{p}{2}}\ ;$$

on a $\phi''(x) = \dfrac{p}{2}(\dfrac{p}{2} - 1)x^{\frac{p}{2}-2} \geq 0$ car $p \geq 2$ et donc, ϕ est une fonction convexe sur $[0, +\infty[$. Si l'on pose maintenant

$$\psi(x) = (1+x^2)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1 = \phi(1+x^2) - \phi(x^2) - 1,$$

on a :

$$\psi'(x) = 2x(\phi'(1+x^2) - \phi'(x^2)) \geq 0$$

car, ϕ étant convexe, la fonction dérivée ϕ' est croissante. L'application ψ est donc croissante.
Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $\psi(x) \geq \psi(0) = 0$, ce qui s'écrit

$$1 + x^p \leq (1+x^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Si $\alpha > 0$, en choisissant dans la dernière inégalité $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$, on obtient

$$1 + \frac{\beta^p}{\alpha^p} \leq (1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2})^{\frac{p}{2}}$$

ou en multipliant chaque membre de l'inégalité par α^p :

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Remarquons que cette inégalité est évidemment vraie si $\alpha = 0$.

(ii) En choisissant dans la question (i), $\alpha = \left|\dfrac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\dfrac{a-b}{2}\right|$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p &\leq (\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2)^{\frac{p}{2}} \\ &= \phi\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \leq \frac{\phi(a^2)+\phi(b^2)}{2} = \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p),\end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de la convexité de la fonction ϕ.

(iii) En choisissant dans la question (ii) les valeurs $a = f(x)$ et $b = g(x)$, où x est un élément quelconque de l'espace X, on obtient

$$\left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^p + \left|\frac{f(x)-g(x)}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Il suffit alors d'intégrer sur l'espace X chaque terme de l'inégalité.

Corrigé 9.9 (i) Supposons que $N_p(f)$ soit nulle ; alors comme il l'a été rappelé dans la remarque 9.2, $f = 0$ presque partout. On aura donc aussi $fg = 0$ presque partout et les deux normes $N_1(fg)$ et $N_p(f)$ sont nulles. Grâce à la convention $0. + \infty = 0$, on conclut qu'il y a bien égalité dans ce cas. Nous avons bien sûr aussi le même résultat si $N_q(g) = 0$.

(ii) Supposons que l'on ait

$$N_1(f.g) = N_p(f).N_q(g), \tag{56}$$

avec les deux valeurs $N_p(f)$ et $N_q(g)$ finies et non nulles. Posons, pour $x \in X$, $a(x) = \dfrac{|f(x)|^p}{N_p(f)^p}$ et $b(x) = \dfrac{|g(x)|^q}{N_q(g)^q}$. Par stricte-concavité de la fonction ln et pour $a(x) > 0$ et $b(x) > 0$, nous avons

$$\frac{1}{p}\ln a(x) + \frac{1}{q}\ln b(x) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a(x) + \frac{1}{q}b(x)\right),$$

avec égalité si et seulement si $a(x) = b(x)$. En prenant l'exponentielle de chaque membre de l'inégalité, on obtient

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} a(x)^{\frac{1}{p}}b(x)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}a(x) + \frac{1}{q}b(x) \stackrel{\text{def}}{=} k(x) \tag{57}$$

avec

$$h(x) = k(x) \Longleftrightarrow a(x) = b(x). \tag{58}$$

Remarquons que les relations (57) et (58) sont aussi vraies lorsque $a(x)$ ou $b(x)$ est nulle.
D'une part, nous avons

$$\int_X k(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{p}\int_X a(x)\, d\mu(x) + \frac{1}{q}\int_X b(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

donc $k \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$. D'autre part, grâce à la relation (56), nous avons

$$\int_X h\, d\mu(x) = \int_X a(x)^{\frac{1}{p}}b(x)^{\frac{1}{q}}\, d\mu(x) = \int_X \frac{|f|(x)}{N_p(f)} \cdot \frac{|g|(x)}{N_q(g)}\, d\mu = 1,$$

et $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$. Ainsi la différence $k - h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$ et

$$\int_X k - h\, d\mu(x) = \int_X k\, d\mu(x) - \int_X h\, d\mu(x) = 1 - 1 = 0.$$

Comme d'autre part, d'après la relation (57), $k-h \geq 0$, on déduit que $k-h = 0$ presque partout, ou de manière équivalente, d'après la relation (58), $a = b$ presque partout. Par définition de a et b, cela signifie que

$$N_q(g)^q.|f|^p = N_p(f)^p.|g|^q \text{ presque partout.}$$

La conclusion est donc satisfaite en prenant $\alpha = N_q(g)^q$ et $\beta = N_p(f)^p$.

Inversement, supposons qu'il existe deux constantes finies et non nulles α et β telles que l'égalité $\alpha f^p = \beta g^q$ soit satisfaite μ-presque partout. D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} N_1(f.g) &= \int_X f.g\, d\mu \\ &= \int_X \left(\frac{\beta}{\alpha}g^q\right)^{\frac{1}{p}}.g\, d\mu \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \int_X g^{\frac{q}{p}+1}\, d\mu \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \int_X g^q\, d\mu, \end{aligned}$$

car p et q sont conjugués. D'autre part,

$$\begin{aligned} N_p(f).N_q(g) &= \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_X g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_X \frac{\beta}{\alpha}g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_X g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_X g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \int_X g^q\, d\mu, \end{aligned}$$

car p et q sont conjugués. Ainsi l'égalité $N_1(f.g) = N_p(f).N_q(g)$ est satisfaite.

Corrigé 9.10 Par l'inégalité de Hölder, pour $p = 2$ et $q = 2$, on a

$$1 = \mu(E)^2 = \left(\int_X \sqrt{f}.\frac{1}{\sqrt{f}}\, d\mu\right)^2 \leq \left(\int_X f d\mu\right).\left(\int_X \frac{1}{f}\, d\mu\right).$$

D'autre part, pour toute fonction égale à une constante strictement positive presque partout, cette valeur est atteinte ; donc, la valeur minimum cherchée est 1. Soit f une fonction telle que

$$\left(\int_X f\, d\mu\right).\left(\int_X \frac{1}{f}\, d\mu\right) = 1\,;$$

en particulier l'inégalité de Hölder utilisée ci-dessus est un égalité. D'après l'exercice 9.9 (ii), il existe deux constantes finies et non nulles a et b telles que l'égalité $af = b\dfrac{1}{f}$ soit satisfaite μ-presque partout. Cela signifie que f est égale à une constante strictement positive μ-presque partout.
Ainsi le minimum est atteint pour les fonctions égales à une constante strictement positive μ-presque partout.

Corrigé 9.11 (i) Soit $x \in \mathbb{R}$; l'application $t \mapsto g(x+t)$ est continue donc mesurable. Par conséquent, par produit, l'application $t \mapsto f(t)g(x+t)$ est mesurable. Pour conclure que F est bien définie, il suffit de vérifier que :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x+t)|\, d\lambda(t) < +\infty.$$

Or, en appliquant l'inégalité de Hölder (q désigne le conjugué de p), nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x+t)|\, d\lambda(t) \leq N_p(f).N_q(g(x+.)).$$

En faisant le changement de variable $u = x+t$, on a $N_q(g(x+.) = N_q(g)$ et en notant $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}\} < +\infty$, on a

$$N_q(g) \leq M.(2a)^{1/p} < +\infty.$$

Ainsi
$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x+t)|\, d\lambda(t) \leq N_p(f).N_q(g) < +\infty.$$
(ii) Démontrons, en utilisant le théorème de continuité sous le signe intégral, que F est continue sur l'intervalle $[-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$ fixé). Seule l'hypothèse (H'3) n'est pas immédiate ; vérifions là. Nous avons, pour $x \in [-n, n]$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$|f(t)g(x+t)| \leq |f(t)| M 1_{[-a-n, a+n]}(t) \stackrel{\text{def}}{=} h(t) \ ;$$

en effet, si $t \notin [-a-n, a+n]$, alors $x + t \notin [-a, a]$ et donc $g(x+t) = 0$.
La fonction $h_{|[-a-n,a+n]}$ est clairement dans l'espace $\mathcal{L}^p([-a-n, a+n])$ et donc, d'après l'exercice 9.4 (i), elle est aussi dans l'espace $\mathcal{L}^1([-a-n, a+n])$; donc, h est élément de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
Par application du théorème de continuité sous le signe intégral, F est continue en chaque point de l'intervalle $[-n, n]$. En faisant $n \to +\infty$, on déduit que F est continue en chaque point de $\mathbb{R}$, donc, F est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé 9.12 (i) L'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel, donc, $f + ug$ est aussi une fonction de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ et donc, $\phi(u) = N_p(f + ug) \in \mathbb{R}$.

(ii) En utilisant l'inégalité de Minkowski, nous avons :

$$\phi(u) = N_p(f + ug) \leq N_p(f) + N_p(ug) = N_p(f) + |u| N_p(g).$$

(iii) Soit (u, v) un couple de réels ; grâce à la remarque 9.6, on a :

$$\begin{aligned} |\phi(u) - \phi(v)| &= |N_p(f + ug) - N_p(f + vg)| \\ &\leq N_p((f + ug) - (f + vg)) = |u - v| N_p(g). \end{aligned}$$

Donc, ϕ est lipschitzienne de rapport $N_p(g)$ et en particulier ϕ est continue.

(iv) Soit (u, v) un couple de réels et $t \in [0, 1]$; grâce à l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\begin{aligned} \phi(tu + (1-t)v) &= N_p(t(f + ug) + (1-t)(f + vg)) \\ &\leq N_p(t(f + ug)) + N_p((1-t)(f + vg)) = t\phi(u) + (1-t)\phi(v). \end{aligned}$$

Donc, ϕ est convexe et en particulier elle est continue sur $\mathbb{R}$.

(v) Justifions l'inégalité donnée dans l'indication. Soient α et β deux réels ; comme l'application $x \mapsto x^p$ est convexe sur $]0, +\infty[$,

$$\left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{2}\right)^p \leq \frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2}$$

et donc,
$$|\alpha - \beta|^p \leq (|\alpha| + |\beta|)^p \leq 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p).$$

En posant $\alpha = a + b$ et $\beta = b$, on obtient $|a|^p \leq 2^{p-1}(|a + b|^p + |b|^p)$, ce qui s'écrit aussi
$$|a + b|^p \geq \frac{|a|^p}{2^{p-1}} - |b|^p.$$

Si $g = 0$ presque partout (ou en d'autres termes si $N_p(g) = 0$) alors, pour tout réel u, $f + ug = f$ presque partout et donc, $\phi(u) = N_p(f)$ et dans ce cas ϕ est une fonction constante et $\lim_{|u| \to +\infty} \phi(u) = N_p(f)$.
Nous supposerons dorénavant que $N_p(g) > 0$. Soient $u \in \mathbb{R}$ et $x \in X$; en choisissant $a = u.g(x)$ et $b = f(x)$ dans l'inégalité précédemment démontrée, on a :
$$|f(x) + u.g(x)|^p \geq \frac{|u.g(x)|^p}{2^{p-1}} - |f(x)|^p$$

et en intégrant sur l'espace X chaque membre de l'inégalité, on obtient :

$$(N_p(f + ug))^p \geq \frac{|u|^p}{2^{p-1}} (N_p(g))^p - (N_p(f))^p.$$

En particulier, $\lim_{|u| \to +\infty} (N_p(f + ug))^p = +\infty$ et ainsi $\lim_{|u| \to +\infty} \phi(u) = +\infty$. Dans ce cas, ϕ ne peut être une fonction constante.
En résumé, nous avons démontré que ϕ est une application constante si et seulement si $g = 0$ presque partout.

Corrigé 9.13 (i) Nous savons que $|f| \leq N_\infty(f)$ presque partout, donc,

$$|f|^p \leq N_\infty(f)^p \text{ presque partout.}$$

En intégrant de chaque coté de cette inégalité, on obtient :

$$\int_X |f|^p\, d\mu \leq \int_X N_\infty(f)^p\, d\mu = N_\infty(f)^p.\mu(X),$$

et en élevant à la puissance $\dfrac{1}{p}$:

$$N_p(f) \leq N_\infty(f).(\mu(X))^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Si $N_\infty(f) = 0$ alors, par la question (i), pour tout $p \geq 1$, $N_p(f) = 0$. Dans ce cas le résultat est évident.

(iii)(a) La partie S_ϵ est l'image réciproque par l'application mesurable $|f|$ du borélien $[N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2}, N_\infty(f)]$, donc, S_ϵ est mesurable.
Raisonnons par l'absurde en supposant que S_ϵ soit de mesure nulle. Donc, comme $|f| \leq N_\infty(f)$ presque partout, on aura

$$|f| \leq N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2} \text{ presque partout.}$$

Alors, par définition de $N_\infty(f)$, $N_\infty(f) \leq N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2}$. Puisque $N_\infty(f) \in \mathbb{R}$, on aboutit à l'absurdité $\frac{\epsilon}{2} \leq 0$. (b) Sur la partie S_ϵ, nous avons

$$|f|^p \geq (N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2})^p,$$

donc,

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p \, d\mu &\geq \int_{S_\epsilon} |f|^p \, d\mu \\ &\geq \int_{S_\epsilon} \left(N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2}\right)^p d\mu = \left(N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2}\right)^p .\mu(S_\epsilon).\end{aligned}$$

En élevant à la puissance $\frac{1}{p}$, on conclut :

$$N_p(f) \geq \left(N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2}\right).\mu(S_\epsilon)^{\frac{1}{p}}.$$

(c) Comme $\mu(S_\epsilon) > 0$, $\lim_{p\to+\infty} \left(N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2}\right).\mu(S_\epsilon)^{\frac{1}{p}} = N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2}$ et donc, pour p assez grand,

$$\left(N_\infty(f) - \frac{\epsilon}{2}\right).\mu(S_\epsilon)^{\frac{1}{p}} \geq N_\infty(f) - \epsilon.$$

En combinant cette inégalité avec celle obtenue au (iii)(b), on obtient, pour p assez grand,

$$N_p(f) \geq N_\infty(f) - \epsilon. \tag{59}$$

(d) Comme $0 < \mu(S_\epsilon) < +\infty$, $\lim_{p\to+\infty} N_\infty(f).(\mu(X))^{\frac{1}{p}} = N_\infty(f)$ et donc, pour p assez grand,

$$N_\infty(f).(\mu(X))^{\frac{1}{p}} \leq N_\infty(f) + \epsilon.$$

En combinant cette inégalité avec celle obtenue au (i), on obtient, pour p assez grand,

$$N_p(f) \leq N_\infty(f) + \epsilon. \tag{60}$$

Des relations (59) et (60), on tire, pour p assez grand,

$$|N_p(f) - N_\infty(f)| \leq \epsilon.$$

Par définition de la limite, on a donc démontré que $\lim_{p\to+\infty} N_p(f) = N_\infty(f)$.

(iv) Le résultat reste valable si $N_\infty(f) = +\infty$; pour le démontrer, il suffit de remplacer dans la question (iii) la partie S_ϵ par la partie $S_a = \{|f| \geq a\}$, où $a > 0$ tendra vers l'infini.

Corrigé 9.14 (i) Nous avons $|f| \leq N_\infty(f)$ presque partout, donc,

$$|f|^{n+1} \leq N_\infty(f).|f|^n \quad \text{presque partout.}$$

En intégrant sur X chaque membre de cette inégalité, on obtient :

$$I_{n+1} \leq \int_X N_\infty(f).|f|^n \, d\mu = N_\infty(f).I_n.$$

D'où l'on obtient le résultat souhaité.

(ii) Il suffit de prendre dans l'inégalité de Hölder les deux réels conjugués $p = \frac{n+1}{n}$, $q = n+1$ et les deux fonctions $|f|^n$ et 1_X.

(iii) En élevant chaque membre de l'inégalité du (ii) à la puissance $\frac{n+1}{n}$, on a :

$$I_n.(I_n)^{1/n} \leq I_{n+1}.\mu(X)^{1/n}.$$

Comme $N_\infty(f) > 0$ on a nécessairement $\mu(X) > 0$, et donc, $\frac{(I_n)^{1/n}}{\mu(X)^{1/n}} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

(iv) En combinant les inégalités obtenues aux questions (i) et (iii), on a

$$\frac{(I_n)^{1/n}}{\mu(X)^{1/n}} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq N_\infty(f). \tag{61}$$

Grâce à l'exercice 9.13, nous savons que $\lim_{n\to+\infty} (I_n)^{1/n} = N_\infty(f)$; donc, en faisant $n \to +\infty$ dans la relation (61), on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = N_\infty(f).$$

Corrigé 9.15 Nous avons l'égalité

$$N_1(f_n g_n - fg) = N_1(f_n(g_n - g) + (f_n - f)g)$$

et en appliquant successivement les inégalités de Minkowski et de Hölder :

$$\begin{aligned}N_1(f_n g_n - fg) &\leq N_1(f_n(g_n - g)) + N_1((f_n - f)g) \\ &\leq N_p(f_n)N_q(g_n - g) + N_p(f_n - f)N_q(g).\end{aligned}$$

Par hypothèse, les deux suites $(N_p(f_n - f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_q(g_n - g))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ; et en particulier, d'après la remarque 9.6, la suite $(N_p(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $N_p(f)$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} N_1(f_n g_n - fg) = 0,$$

et donc, la suite $(f_n.g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre 1 vers $f.g$

Corrigé 9.16 (i) Comme nous avons affaire à une intégrale d'une fonction continue, la fonction h définie, pour $x \geq 0$, par $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, $h'(x) = f(x)$. Alors en dérivant l'égalité, vraie pour $x > 0$, $xF(x) = h(x)$, on obtient $xF'(x) = f(x) - F(x)$. Il reste maintenant à justifier la continuité de F en 0^+. Soit $\epsilon > 0$; par continuité de f, il existe un réel $\eta > 0$, tel que, si $t \in [0, \eta[$, $|f(t) - f(0)| \leq \epsilon$. Alors, pour $x \in]0, \eta[$,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(0)| &= \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t) - f(0)\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - f(0)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{x}\int_0^x \epsilon\,dt \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi F est aussi continue en 0^+.

(ii)(a) Pour $x > 0$, on a $|F(x)| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt$ et, comme f est nulle en dehors de l'intervalle $[0, n]$,

$$|F(x)| \leq \frac{1}{x}\int_0^n |f(t)|\,dt.$$

Il suffit donc de prendre la constante C égale à $\int_0^n |f(t)|\,dt$.

(b) Supposons que $f \geq 0$; on a donc $F \geq 0$. Grâce à l'inégalité obtenue au (i), on a, pour $t > 0$,

$$F^p(t) = F^{p-1}(t).F(t) = F^{p-1}(t).f(t) - F^{p-1}(t)F'(t)t.$$

Donc, par intégration par parties sur l'intervalle $[\frac{1}{n}, n]$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^n F^p(t)\,dt &= \int_{\frac{1}{n}}^n F^{p-1}(t).f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{n}}^n F^{p-1}F'(t)t\,dt \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^n F^{p-1}(t).f(t)\,dt - \left(\frac{nF^p(n)}{p} - \frac{F^p(\frac{1}{n})}{np}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{F^p(t)}{p}\,dt. \end{aligned}$$

Or, d'après (i), F est continue en 0^+ ; donc, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F^p(\frac{1}{n})}{np} = 0.$$

D'autre part, d'après (ii)(a), $nF^p(n) \leq Cn^{1-p}$, ce qui entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{nF^p(n)}{p} = 0.$$

Ainsi, en faisant $n \to +\infty$ dans la suite d'égalités ci-dessus, on obtient, par le théorème de la convergence monotone,

$$\int_{[0,\infty[} F^p(t)\,d\lambda(t) = \int_{[0,\infty[} F^{p-1}(t).f(t)\,d\lambda(t) + \frac{1}{p}\int_{[0,\infty[} F^p(t)\,d\lambda(t).$$

Remarquons que F^p est continue sur $[0, +\infty[$ (voir (i)) et que, pour $x > 1$, $F^p(x) \leq \frac{C^p}{x^p}$. Donc, $\int_0^\infty F^p(t)\,dt$ est convergente et, d'après le théorème 5.2, coïncide avec $\int_{[0,\infty[} F^p(t)\,d\lambda(t) < +\infty$. Ainsi

$$\int_0^\infty F^p(t)\,dt = q\int_{[0,\infty[} F^{p-1}(t).f(t)\,d\lambda(t).$$

Maintenant $\int_{[0,\infty[} F^{p-1}(t).f(t)\,d\lambda(t) < +\infty$ et donc, d'après le théorème 5.2, cette intégrale coïncide avec $\int_0^\infty F^{p-1}(t).f(t)\,dt$. Le résultat est donc démontré.

(c) Supposons dans un premier temps que $f \geq 0$ et donc $F \geq 0$. On a, d'après (ii)(b),

$$(N_p(F))^p = \int_0^\infty F^p(t)\,dt = q\int_0^\infty F^{p-1}(t).f(t)\,dt,$$

et, en appliquant l'inégalité de Hölder,

$$(N_p(F))^p \leq qN_p(f).N_q(F^{p-1}) = qN_p(f).N_p(F)^{p/q}.$$

Comme $N_p(F) < +\infty$, on déduit : $N_p(F) \leq qN_p(f)$.
Revenons maintenant au cas général, c'est-à-dire f de signe quelconque. Posons $g = |f|$ et considérons la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt,$$

si $x > 0$, et $G(0) = |f(0)|$, sinon. D'une part $g \geq 0$ et $N_p(f) = N_p(g)$; d'autre part, puisque $|F| \leq G$, on a $N_p(F) \leq N_p(G)$. Ainsi, grâce à l'inégalité démontrée dans le cas positif, on déduit

$$N_p(F) \leq N_p(G) \leq qN_p(g) = qN_p(f).$$

Le résultat est donc démontré.

(iii) Pour $n \geq 1$, considérons la fonction continue f_n définie, pour $x \geq 0$, par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq n\,; \\ nf(n)\left(n + \frac{1}{n} - x\right) & \text{si } n \leq x \leq n + \frac{1}{n}\,; \\ 0 & \text{si } x \geq n + \frac{1}{n}\,; \end{cases}$$

f_n coïncide avec f sur l'intervalle $[0,n]$, est affine sur l'intervalle $[n, n+\frac{1}{n}]$ et s'annule sur $[n+\frac{1}{n}, +\infty[$. Considérons alors, pour $n \geq 1$, la fonction F_n définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\, dt,$$

si $x > 0$ et $F_n(0) = f_n(0)$, sinon. D'après (ii)(c), on a l'inégalité

$$N_p(F_n) \leq q N_p(f_n). \tag{62}$$

D'une part, puisque la fonction f est bornée en valeur absolue par une constante notée M, nous avons

$$(N_p(f_n - f))^p = \int_n^{n+\frac{1}{n}} |f(t) - f_n(t)|^p\, dt \leq \frac{(2M)^p}{n}$$

et donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p vers f ; en particulier, grâce à la remarque 9.6,

$$\lim_{n\to+\infty} N_p(f_n) = N_p(f). \tag{63}$$

D'autre part, grâce à l'inégalité de Hölder, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} |F(x) - F_n(x)| &\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f_n(t) - f(t)|\, dt \\ &\leq \frac{1}{x} N_p(f_n - f) N_q(1_{[0,x]}) = x^{-\frac{1}{p}} N_p(f_n - f). \end{aligned}$$

Ainsi la suite F_n converge simplement vers la fonction F. C'est alors que nous pouvons conclure :

$$\begin{aligned} (N_p(F))^p &= \int_0^\infty |F(t)|^p\, dt \\ &= \int_0^\infty \lim_{n\to+\infty} |F_n(t)|^p\, dt \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^\infty |F_n(t)|^p\, dt \quad \text{(d'après le lemme de Fatou)} \\ &\leq q^p \liminf_{n\to+\infty} (N_p(f_n))^p \quad \text{(d'après la relation (62))} \\ &\leq q^p N_p(f)^p \quad \text{(d'après la relation (63)).} \end{aligned}$$

Corrigé 9.17 Posons, pour $k \geq 1$, $u_k = 1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Soit maintenant $n \geq 1$; comme la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est strictement croissante et que $u_1 = 1$, il existe un unique entier $k \geq 1$ tel que

$$u_k = 1 + \cdots + k \leq n < 1 + \cdots + (k+1) = u_{k+1}.$$

Par conséquent, il existe une unique paire d'entiers (k, j) telle

$$\begin{cases} n = (1 + \cdots + k) + j \,; \\ k \geq 1 \,; \\ 0 \leq j \leq k. \end{cases} \tag{64}$$

La paire (k, j) dépend de l'entier n choisi au départ. Dans la suite nous noterons donc cette paire $(k(n), j(n))$ et en particulier nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} k(n) = +\infty,$$

puisque :

$$n \leq 1 + \cdots + (k(n)+1) = \frac{(k(n)+1)(k(n)+2)}{2} \leq \frac{(k(n)+2)^2}{2}$$

et $k(n) \geq \sqrt{2n} - 2$.
Considérons alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie, pour $n \geq 1$, par

$$f_n = f_{k(n)}^{j(n)} = 1_{[\frac{j(n)}{k(n)+1}, \frac{j(n)+1}{k(n)+1}]}.$$

Pour bien comprendre comment sont construite ces fonctions, il est conseillé au lecteur de dessiner leurs graphes pour n allant de 1 jusqu'à 10.
D'une part, $N_p(f_n) = \frac{1}{k(n)^{\frac{1}{p}}}$; et donc, $\lim_{n\to+\infty} N_p(f_n) = 0$; la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge donc en moyenne d'ordre p vers la fonction nulle. D'autre part, soit $x \in [0,1]$ et $k \geq 1$; il existe un entier j compris entre 0 et k tel que $\frac{j}{k+1} \leq x \leq \frac{j+1}{k+1}$ et $f_k^j(x) = 1$, ce qui s'écrit grâce à la relation (64),

$$f_{\frac{k(k+1)}{2}+j}(x) = 1.$$

Il existe donc un entier $k' \geq k$ tel que $f_{k'}(x) = 1$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ ne peut donc pas converger simplement vers la fonction nulle presque partout.

Corrigé 9.18 D'après le théorème 9.11, il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant simplement vers la fonction f sur une partie mesurable T de l'espace X dont le complémentaire est μ- négligeable. Soit maintenant $x \in T$; en faisant $n \to +\infty$ dans l'inégalité $|f_{\phi(n)}(x)| \leq M$, on obtient $|f(x)| \leq M$. Cela exprime que $|f| \leq M$ presque partout.

Corrigé 9.19 (i) Nous savons que $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle, donc $1_{\mathbb{Q}} = 0$ presque partout et $\overline{1_{\mathbb{Q}}} = \overline{0}$.

(ii) Montrons que la fonction $\overline{1_{\mathbb{R}_+}}$ n'admet pas de représentant continu. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une fonction f continue telle que $\overline{1_{\mathbb{R}_+}} = \overline{f}$ ou en d'autre termes $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ presque partout. Il existe un ensemble négligeable N tel que $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ sur $\mathbb{R}\setminus N$; en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_-\setminus N$, $f(x) = 0$. Comme $\lambda(\mathbb{R}_- \setminus N) = +\infty$, $\mathbb{R}_- \setminus N$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et donc, il existe un réel négatif a tel que $f(a) = 0$. De même, on prouve l'existence d'un réel positif b tel que $f(b) = 1$.
Considérons maintenant la partie $O = f^{-1}(]0,1[)$. Comme la fonction f est continue (et que $]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$), O est un ouvert de $\mathbb{R}$ et O est

non vide, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Il existe donc un intervalle de la forme $]\alpha, \beta[$ $(\alpha < \beta)$ inclus dans O et

$$\lambda(O) \geq \lambda(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha > 0. \tag{65}$$

D'autre part, par définition de O, si $x \in O$ $f(x) \neq 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ et donc $x \in N$. Ainsi, on a l'inclusion $O \subset N$ et

$$\lambda(O) \leq \lambda(N) = 0. \tag{66}$$

Les relations (65) et (66) fournissent la contradiction.

(iii) Montrons que $A = L^p$. En effet, soit $\zeta \in L^p$; choisissons un représentant f de ζ. Considérons alors la fonction g qui coïncide avec f sur $\mathbb{R}^\star$ et qui s'annule au point 0. Il est clair que $f = g$ presque partout et, par la proposition 2.15 (ii) et (iii), g est mesurable ; donc, $\zeta = \overline{g} \in A$.

(iv) Soit $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B convergeant en norme N_p vers un élément ζ de L^p. Par définition de l'ensemble B, pour tout entier k, il existe un représentant f_k de ζ_k tel que $f_k = 0$ sur l'intervalle $[0,1]$. Alors si f est un représentant de ζ la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p vers f. Grâce au théorème 9.11, il existe une sous-suite $(f_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et un borélien N de mesure nulle tels que $(f_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur le complémentaire de N. En faisant $k \to +\infty$ dans la relation

$$f_{\phi(k)} = 0 \text{ sur } [0,1] \cap N,$$

on obtient $f = 0$ sur $[0,1] \cap N$. Considérons alors la fonction g qui coïncide avec f sur $\mathbb{R} \setminus N$ et qui s'annule sur N ; $f = g$ presque partout et $g = 0$ sur $[0,1]$. De plus, par la proposition 2.15 (ii) et (iii), il est clair que g est mesurable. Donc, $\zeta = \overline{g} \in B$ et ainsi l'ensemble B est fermé.

10 PROBLÈMES NON CORRIGÉS

10.1 Problème 1

On désigne par λ la mesure de Borel induite sur $[0,1]$.
Soit f une fonction mesurable définie sur $[0,1]$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la fonction H_f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante : pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on pose :

$$H_f(\alpha) = \int_{[0,1]} |f(t) - \alpha| \, d\lambda(t).$$

On justifiera brièvement que la fonction H_f est bien définie.
On notera

$$m_f = \inf\{H_f(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

et

$$S_f = \{\alpha \in \mathbb{R} : H_f(\alpha) = m_f\},$$

où respectivement m_f désigne la borne inférieure des valeurs prises par H_f et S_f représente l'ensemble des points où cette borne inférieure est atteinte.

Partie A
On se propose dans cette partie de se familiariser avec la fonction H_f.

(i) Expliciter la fonction H_f dans les deux cas suivants

- $f(t) = t$ pour $t \in [0,1]$;
- $f = 1_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}$.

Constater sur ces deux exemples les résultats suivants :

- H_f est continue sur $\mathbb{R}$;
- H_f est dérivable en un point α si et seulement si $\lambda(\{f = \alpha\}) = 0$.

(ii) Pour a réel non nul, quelle relation existe-t-il entre les fonctions H_{af} et H_f, puis entre les nombres m_{af} et m_f ?

(iii) Montrer que $m_f \geq 0$.

Partie B

On se propose dans cette partie de montrer que la fonction H_f atteint sa borne inférieure en au moins un point (i.e. $S_f \neq \emptyset$).

(i) Montrer que H_f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) A l'aide de l'inégalité triangulaire $|a-b| \geq |b| - |a|$ (pour a, b dans $\mathbb{R}$), montrer que $\lim_{|\alpha|\to+\infty} H_f(\alpha) = +\infty$.

(iii) Conclure.

(iv) Que peut-on dire sur la fonction f si $m_f = 0$?

Partie C

On se propose dans cette partie d'étudier la dérivabilité de la fonction H_f, noté plus brièvement H.

(i) Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser le théorème du cours sur la dérivabilité sous le signe intégral.

(ii) Soient $u > 0$ et α fixés. Montrer que

$$H(\alpha+u) - H(\alpha) = u.[\lambda(\{f \leq \alpha\}) - \lambda(\{f \geq \alpha+u\})] + R(u)$$

avec $R(u) = \int_{\{\alpha<f<\alpha+u\}} [2(\alpha - f(t)) + u]\, d\lambda(t)$.
Indication : on utilisera la décomposition

$$[0,1] = \{f \leq \alpha\} \cup \{\alpha < f < \alpha+u\} \cup \{f \geq \alpha+u\},$$

ainsi que la définition même de H.

(iii) Montrer que $|R(u)| \leq 3u.\lambda(\{\alpha < f < \alpha+u\})$.

(iv) En déduire $\lim_{u\to0^+} \dfrac{R(u)}{u} = 0$, puis que la dérivée à droite en α, notée $H'_+(\alpha)$ existe. Donner sa valeur.

(v) En reprenant un argument analogue aux questions précédentes, montrer que la dérivée à gauche en α existe et vaut

$$\lambda(\{f < \alpha\}) - \lambda(\{f \geq \alpha\}).$$

(vi) Conclure que H est dérivable en α si et seulement si

$$\lambda(\{f = \alpha\}) = 0.$$

Partie D

On se propose dans cette partie de caractériser l'ensemble S_f. Pour cela, on pose :

$$I = \{\alpha \in \mathbb{R} : \lambda(\{f > \alpha\}) - \lambda(\{f \leq \alpha\}) \leq 0\} ;$$
$$J = \{\alpha \in \mathbb{R} : \lambda(\{f < \alpha\}) - \lambda(\{f \geq \alpha\}) \leq 0\}.$$

(i) En remarquant que les intervalles I et J sont définis à partir de fonctions monotones, montrer qu'ils sont respectivement de la forme $[\alpha_I, +\infty[$ et $[\alpha_J, +\infty[$, où α_I et α_J sont deux réels.

(ii) A l'aide de la partie C, démontrer que $S_f \subset I \cap J$, puis, à l'aide de la partie B, démontrer que $\alpha_I \leq \alpha_J$.

Dans la suite de cette partie, on se propose de démontrer que $S_f = I \cap J$.

(iii) Conclure dans le cas où $\alpha_I = \alpha_J$.

(iv) On suppose dans cette question que $\alpha_I < \alpha_J$.

(a) En utilisant la définition de I et J, vérifier que

$$\lambda(\{f > \alpha_I\}) \leq \lambda(\{f \leq \alpha_I\}) ;$$
$$\lambda(\{f < \alpha_J\}) - \lambda(\{f \geq \alpha_J\}) ;$$

(b) en déduire que

$$\lambda(\{\alpha_I < f < \alpha_J\}) = 0 \text{ et } \lambda(\{f \geq \alpha_J\}) = \lambda(\{f \leq \alpha_I\}).$$

(c) Conclure que la fonction H_f est constante sur $I \cap J$, puis que $S_f = I \cap J$.

(v) Expliciter S_f si la fonction est croissante et continue.

Partie E

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur $[0,1]$ convergeant vers f dans $\mathcal{L}^1([0,1])$. Soit de plus, pour tout n, α_n un point où la fonction H_{f_n} atteint sa borne inférieure, i.e., $\alpha_n \in S_{f_n}$ (voir partie B).

(i) Montrer que la suite (α_n) est bornée (on utilisera, après justification, les inégalités $H_{f_n}(\alpha_n) \leq H_{f_n}(0)$ et une inégalité triangulaire) ; en déduire que l'on peut trouver une sous-suite $(\alpha_{n_k})_k$ qui converge vers un nombre noté $\overline{\alpha}$.

(ii) Montrer que $\overline{\alpha} \in S_f$.

(iii) Si les fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}$) et f sont continues, démontrer que la suite (α_n) est convergente de limite l'unique point de S_f.

10.2 Problème 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne vérifiant l'une des conditions suivantes

(C1) $f \geq 0$;

(C2) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

On définit alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{[x-1,x+1]} f \, d\lambda,$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

(i) Donner un exemple de fonction vérifiant (C1) mais pas (C2), et vice versa.

(ii) Montrer que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(iii) Calculer F lorsque $f(t) = |t|$, pour tout t.

(iv) On suppose que f vérifie la condition (C2).

(a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que F est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$ et en donner sa dérivée ; que dire de f si F est une fonction constante.

(c) Calculer $\lim_{|x| \to +\infty} F(x)$.

(v) Dans les deux cas, calculer $\int_{\mathbb{R}} F \, d\lambda$ (on justifiera son existence).

10.3 Problème 3

Soit $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{|[0,1]})$ et α, β deux réels strictement positifs. Pour $(u,v) \in [0,+\infty[^2$, on pose :

$$g(u,v) = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{(1 + ux^\alpha + vy^\alpha)^\beta} |f(x) - f(y)| \, d(\lambda \otimes \lambda)(x,y).$$

(i) Pourquoi la fonction f est intégrable sur $[0,1]$?

(ii) Montrer que $g(u,v)$ est bien définie et que

$$|g(u,v)| \leq 2N_1(f).$$

(iii) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(A1) $\exists a \in \mathbb{R}$, $f = a$ presque partout sur $[0,1]$;

(A2) $\exists (u_0, v_0) \in [0,+\infty[^2$, $g(u_0,v_0) = 0$.
Dans ce cas, que dire alors de $g(u,v)$?

(iv) Montrer que g est continue sur $[0,+\infty[^2$.

(v) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que g soit une fonction constante.

(vi) Calculer $g(1,0)$ lorsque $f(x) = x$, pour $x \in [0,1]$, $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

(vii) On suppose dans cette question que $\beta = 3$. Montrer que

$$\int_{]0,+\infty[^2} g(u,v) \, d(\lambda \otimes \lambda)(u,v) = \frac{1}{2} \int_{[0,1]^2} \frac{|f(x) - f(y)|}{x^\alpha y^\alpha} \, d(\lambda \otimes \lambda)(x,y).$$

(a) Si $\alpha = \frac{1}{4}$, montrer que g est intégrable sur $[0,+\infty[^2$.

(b) On suppose maintenant que $\alpha = 1$ et que f est dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$.

(α) Montrer que, pour tout $a > 0$,

$$\int_{[0,a]^2} \frac{|x-y|}{xy} \, d(\lambda \otimes \lambda)(x,y) = +\infty \, .$$

(β) Conclure dans ce cas que g n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[^2$.

10.4 Problème 4

Soit α, p et q trois nombres réels fixés tels que

$$1 < p < +\infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad \alpha > -\frac{1}{q} \text{ (donc } \alpha > -1.)$$

Si f est une fonction de puissance p-ième intégrable sur $[0,1]$, pour la mesure de Borel restreinte à $[0,1]$ notée λ ($f \in \mathcal{L}^p([0,1],\lambda)$), on note classiquement $N_p(f)$ la norme de f dans $\mathcal{L}^p$:

$$N_p(f) = \left(\int_{[0,1]} |f(u)|^p \, d\lambda(u) \right)^{\frac{1}{p}}$$

et on pose, pour tout x dans $[0,1]$:

$$G_f(x) = \int_{[0,1]} |x-u|^\alpha f(u) \, d\lambda(u).$$

(i) En appliquant l'inégalité de Hölder, montrer que $G_f(x)$ est bien définie et est finie, pour tout x de $[0,1]$ et pour toute fonction f de $\mathcal{L}^p([0,1],\lambda)$.

(ii) Dans cette question f est la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$. Calculer G_f, puis la borne supérieure, notée M_α, de G_f sur $[0,1]$.

(iii) Expliquer pourquoi $\mathcal{L}^p([0,1],\lambda)$ est contenu dans $\mathcal{L}^1([0,1],\lambda)$. Si f est dans $\mathcal{L}^p([0,1],\lambda)$, montrer, en appliquant le théorème de Fubini que G_f appartient à $\mathcal{L}^1([0,1],\lambda)$ et que

$$N_1(G_f) \leq M_\alpha N_1(f).$$

(iv) Soit f une fonction fixée dans $\mathcal{L}^p([0,1],\lambda)$; on s'intéresse à la continuité de la fonction G_f sur l'intervalle $[0,1]$.

(a) Montrer que, pour $\alpha \geq 0$, un théorème du cours permet de conclure à la continuité de G_f, mais ne le permet pas si $\alpha < 0$.

(b) Montrer, par une intégration par parties, que si k est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, alors la fonction G_k est continue sur $[0,1]$.

(c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([0,1],\lambda)$ convergeant en moyenne d'ordre p vers une fonction f élément de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}([0,1],\lambda)$. Montrer que la suite de fonctions $(G_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_f sur $[0,1]$;

(d) en déduire que G_f est continue sur $[0,1]$.

(v) On suppose $\alpha = 2$. Pour f fixé dans $\mathcal{L}^p([0,1],\lambda)$, développer G_f. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction G_f soit convexe sur $[0,1]$.

(vi) On suppose $\alpha = 1$. Pour f fixé dans $\mathcal{L}^p([0,1],\lambda)$, développer G_f. Montrer que si f est continue, G_f est de classe C^1 et donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction G_f soit convexe sur $[0,1]$.

BIBLIOGRAPHIE

BREZIS H. – *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Dunod (1983)

DE BARRA G. – *Measure Theory and Integration*, Ellis Horwood Series (1981)

GENET J. – *Mesure et intégration*, Vuibert (1976)

GEORGE C. – *Exercices et problèmes d'intégration*, Gauthier-Villars (1980)

GRAMIN A. – *Intégration*, Hermann (1988)

HEURTEAUX Y., HULIN D., PICARD F. et QUERFELLEC H. – *Exercices et problèmes corrigés de calcul intégral*, Orsay, Publications Universitaires Scientifiques (1991)

METIVIER M. – *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod (1979)

VO KHAC Kh. – *Théorie de la mesure. Exercices et problèmes corrigés*, Hermann (1993)

VO KHAC Kh. – *Théorie des probabilités. Exercices et problèmes corrigés*, Hermann (1993)

INDEX

45741 - (I) - (1,5) - OSB-80° - RET - MPN

Achevé d'imprimer sur les presses de la
SNEL S.A.
Rue Saint-Vincent 12 – B-4020 Liège
tél. 32(0)4 344 65 60 - fax 32(0)4 341 48 41
mai 2001 – 21255

Dépôt légal : juin 2001
Dépôt légal de la 1^{re} édition : février 1997