

Jean-Pierre Lecoutre
Philippe Pilibossian

TD

ANALYSE

70%
APPLICATIONS

4^e
édition

30%
COURS

DUNOD

The logo consists of the letters 'TD' in a bold, white, sans-serif font. The letters are positioned inside a light gray circle. The circle has a subtle drop shadow, giving it a three-dimensional appearance as if it is floating above the background.

TD

The word 'ANALYSE' is written in a bold, dark gray, sans-serif font. It is centered horizontally and is partially overlaid by a large, light gray semi-circle that sits behind it, creating a layered effect.

ANALYSE

The screenshot shows the Dunod website interface. At the top, there's a navigation bar with the Dunod logo and a search bar. Below the search bar, there are several tabs for different categories: Sciences et Techniques, Informatique, Gestion et Management, and Sciences Humaines. The main content area is divided into sections for 'Interviews', 'Nouveautés', and 'LES BIBLIOTHÈQUES DES MÉTIERS'. The 'Interviews' section features a list of authors and their books, including 'Bachelors 2008' and 'Profession dirigeant'. The 'Nouveautés' section highlights new books like 'Bachelors 2008' and 'Profession dirigeant'. The 'LES BIBLIOTHÈQUES DES MÉTIERS' section lists various professional libraries available for purchase or rental. The bottom of the page features a footer with contact information and a list of links to other websites.

bibliothèques des médias newslifers hivernichoff.ca edacence.net cipari-wap.com
 l'office législatif

Jean-Pierre Lecoutre
Philippe Pilibossian

TD

ANALYSE

70%
APPLICATIONS

30%
COURS

4^e
édition

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2008
ISBN 978-2-10-054432-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TD Sommaire



Avant-propos	VII
TD ❶ Fonction numérique d'une variable réelle	1
L'essentiel	1
QCM	5
Réflexion	5
Entraînement	6
Solutions	12
TD ❷ Dérivées et différentielles	26
L'essentiel	26
QCM	29
Réflexion	29
Entraînement	30
Solutions	35
TD ❸ Formule de Taylor et applications	54
L'essentiel	54
QCM	59
Réflexion	59
Entraînement	60
Solutions	67
TD ❹ Fonctions puissance, logarithme et exponentielle	95
L'essentiel	95
QCM	98
Réflexion	98
Entraînement	99
Solutions	106

TD 5	Fonction de plusieurs variables et optimisation	133
	L'essentiel	133
	QCM	141
	Réflexion	141
	Entraînement	142
	Solutions	148
TD 6	Calcul intégral	176
	L'essentiel	176
	QCM	181
	Réflexion	182
	Entraînement	183
	Solutions	188
TD 7	Suites et équations de récurrence	209
	L'essentiel	209
	QCM	216
	Réflexion	217
	Entraînement	217
	Solutions	227
TD 8	Annales corrigées	265
	Index	290

Avant-propos

Pour se familiariser avec l'usage de l'outil mathématique, indispensable à toute formalisation en économie, nous proposons une série d'exercices, regroupés en deux volumes : *Analyse* et *Algèbre*. Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de Licence d'Économie et Gestion ou d'AES.

Chacun des sept premiers chapitres présente la même structure. Au début, les principales notions de cours et les résultats importants sont rappelés de façon succincte dans « L'essentiel » du cours. Un bref texte introductif indique les points essentiels qui vont être abordés et présentés dans le chapitre. Il ne s'agit pas d'un résumé de cours, mais seulement d'un avant-propos où on essaie d'expliquer, dans un langage peu formalisé, le fondement et l'utilité des notions définies ensuite de façon plus formelle.

Un certain nombre d'affirmations constituent le paragraphe « Q.C.M ». La réponse en vrai-faux permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien compris les principaux points de cours. Il doit exercer sa vigilance face à des affirmations, parfois simples, mais qui peuvent contenir un piège.

Les questions de « Réflexion » qui sont proposées ensuite ont essentiellement pour but de mettre l'accent sur certaines notions un peu délicates du cours. Il faut être attentif aux commentaires qui figurent dans la solution de l'exercice, en fin de chapitre.

Les exercices de « Entraînement » permettent enfin à l'étudiant de tester sa capacité à passer de la théorie à la pratique. Ils suivent l'ordre de progression du cours et sont précédés d'un titre indiquant la principale notion à laquelle ils se rapportent. Une rubrique « Analyse de l'énoncé et conseils » précise la démarche à suivre et les résultats de cours à utiliser pour résoudre l'exercice proposé.

Les solutions très détaillées sont regroupées en fin de chapitre, très souvent assorties de commentaires. Certaines solutions se concluent par un énoncé d'exercice identique (« Vous avez compris ? ») et la seule réponse figure aussitôt après.

En fin d'ouvrage, les textes récents des examens de 1^{re} année de la Licence d'Économie et Gestion de l'université Paris II Panthéon-Assas permettent de retrouver les principaux points abordés dans les chapitres précédents. L'étudiant peut ainsi évaluer le niveau de difficulté de ce qui peut être demandé à une épreuve d'examen. Les corrigés sont regroupés après les énoncés.

TD 1

Fonction numérique d'une variable réelle



On trouvera dans ce chapitre la définition et les principales caractérisations d'une **fonction numérique d'une variable réelle**. L'étude d'une fonction commence par la détermination de son **ensemble de définition**, formé par un ou plusieurs **intervalles**. On cherche ensuite à réduire l'ensemble d'étude en examinant si la fonction est **périodique**, **paire** ou **impaire**. On introduit alors la notion très importante de **continuité**. La recherche de points de discontinuité éventuels consiste à examiner la limite de la fonction en certains points particuliers. Dans de très nombreux cas, c'est l'utilisation des **équivalents** qui permet de calculer simplement cette limite. On complète l'étude par la mise en évidence des intervalles où cette fonction est **monotone**, **croissante** ou **décroissante** et par la recherche des limites aux bornes des intervalles qui constituent l'ensemble de définition ou de monotonie. Parmi les résultats importants de ce chapitre, on doit noter que l'image d'un intervalle fermé, par une fonction continue, est un intervalle fermé. De plus, toutes les valeurs de cet intervalle image sont atteintes par cette fonction. Dans le cas où elle est strictement monotone sur cet intervalle, elle admet alors une **fonction réciproque**. Notons que seules les bijections admettent des applications réciproques.

1 ● Définitions et qualifications d'une fonction numérique

Définition. On appelle *fonction numérique d'une variable réelle* toute application f d'une partie E de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

La notation usuelle est :

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

et, pour tout réel x de E , on écrit :

$$f : x \mapsto f(x)$$

Fonction paire ou impaire. Une fonction f définie sur E est dite :

- *paire* si, pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$;
- *impaire* si, pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Fonction périodique. Une fonction f définie sur E est dite *périodique* s'il existe un nombre réel non nul T tel que, pour tout $x \in E$:

$$x + T \in E \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x)$$

Ce nombre T est la *période* de f s'il est le plus petit réel positif qui satisfait cette condition.

Fonction bornée. Une fonction f définie sur E est dite *bornée* s'il existe un nombre positif M tel que, pour tout $x \in E$, on ait $|f(x)| \leq M$.

Fonction monotone. Une fonction f définie sur E est dite :

- *croissante* sur E si, pour tous $x, x' \in E$ tels que $x < x'$, on a $f(x) \leq f(x')$;
- *décroissante* sur E si, pour tous $x, x' \in E$ tels que $x < x'$, on a $f(x) \geq f(x')$;
- *monotone* sur E si elle est croissante ou décroissante sur E .

2 ● Composition d'applications

Si f est une fonction définie sur E et g une fonction définie sur F , avec $F \supset f(E)$, on peut définir la *fonction composée* de f par g , notée $g \circ f$, et qui associe à tout $x \in E$ le nombre réel $g[f(x)]$.

Il faut souligner que la composition des applications n'est pas une opération commutative, c'est-à-dire qu'en général $g \circ f$ est différente de $f \circ g$.

3 ● Continuité

Définition. Une fonction numérique f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est *continue* en un point x_0 de I si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe avec } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est *continue à droite* (resp. *à gauche*) si :

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\text{resp. } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Une fonction est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si elle est continue en tout point de l'ouvert $]a, b[$ et si elle est continue à gauche en a et à droite en b .

Théorème. Si une fonction f est continue sur un intervalle I , alors l'ensemble image $f(I)$ est lui aussi un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle fermé $[a, b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$ avec :

$$\alpha = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \quad \text{et} \quad \beta = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

La fonction f est bornée et elle atteint ses bornes, ainsi que toutes les valeurs intermédiaires comprises entre ses bornes.

Théorème. Si f est une fonction continue en un point a et g une fonction continue en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a .

4 ● Application réciproque

Définition. Une application f de E dans F admet une *application réciproque*, notée f^{-1} , si, et seulement si, f est une bijection de E dans F . Pour tout y fixé dans F , l'équation $f(x) = y$ admet alors une solution unique x dans E , notée $x = f^{-1}(y)$.

Théorème. Une fonction continue sur un intervalle I admet une application réciproque sur I si, et seulement si, elle est strictement monotone sur I .

5 ● Formes indéterminées algébriques

Il existe quatre *formes indéterminées algébriques*, c'est-à-dire d'expressions dont la limite ne peut pas être déterminée immédiatement :

- forme $\frac{0}{0}$: toute expression $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) \rightarrow 0$ et $g(x) \rightarrow 0$;
- forme $\frac{\infty}{\infty}$: toute expression $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $|f(x)| \rightarrow +\infty$ et $|g(x)| \rightarrow +\infty$;
- forme $0 \times \infty$: toute expression $f(x)g(x)$ avec $f(x) \rightarrow 0$ et $|g(x)| \rightarrow +\infty$;
- forme $\infty - \infty$: toute expression $f(x) - g(x)$ avec $f(x) \rightarrow +\infty$ et $g(x) \rightarrow +\infty$.

6 ● Fonctions équivalentes

Deux fonctions numériques f et g définies sur un intervalle I de \mathbb{R} sont dites *équivalentes* quand x tend vers a , avec $a \in I$, s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage $V(a)$ de a telle que :

$$f(x) = g(x)[1 + \varepsilon(x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Si $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in V(a) \cap I$, on écrit plus simplement :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

C'est une relation d'équivalence, notée $f \sim g$. Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$, mais on n'a pas en général $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

Dans le cas d'un polynôme, il est équivalent à son monôme de plus bas degré au voisinage de zéro et à son monôme de plus haut degré au voisinage de l'infini.

Une fraction rationnelle est équivalente au voisinage de zéro au rapport des monômes de plus bas degré et, au voisinage de l'infini, au rapport des monômes de plus haut degré.



	Vrai	Faux
1. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. La somme de deux fonctions périodiques définies sur le même ensemble est une fonction périodique.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Le produit de deux fonctions monotones sur un même ensemble E est une fonction monotone sur E .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. La composée $g \circ f$ de deux fonctions f et g décroissantes sur leur ensemble de définition est croissante.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle, les fonctions $f + g$ et fg sont continues sur le même intervalle.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6. La réciproque d'une application continue et strictement croissante sur un intervalle est aussi continue et strictement croissante.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7. Si la fonction f admet une limite finie l , non nulle, quand x tend vers a , alors $f(x) \sim l$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8. Si on a les équivalences $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors on a aussi l'équivalence $f_1 \circ f_2 \sim g_1 \circ g_2$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9. Si f et g sont deux fonctions équivalentes quand la variable x tend vers $+\infty$, alors $f(x) - g(x)$ tend vers 0.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



10. Sans déterminer la dérivée, montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$ admet sur son ensemble de définition un maximum et un minimum que l'on déterminera.

11. On considère les applications $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2$. Déterminer les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$. Les applications f et g sont-elles réciproques l'une de l'autre ?

12. Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = e^{mx} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{mx^3 + (m-1)x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} + x + \frac{2}{x}$$

où m est un paramètre réel. Indiquer pour quelle(s) valeur(s) de m l'expression $h(x) = g(x) - f(x)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

13. À partir de l'expression $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$, définir une fonction f qui soit continue sur tout \mathbb{R} .

14. La fonction f est définie à partir de :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ a - \frac{b}{x} & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

Déterminer les paramètres réels a et b pour que f soit continue partout.

15. On considère l'expression :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - b}{x - a^2}$$

où a et b sont deux nombres réels quelconques. Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers a^2 .



Intervalles de \mathbb{R}

16. Déterminer les intervalles de \mathbb{R} définis par les conditions suivantes sur x :

$$5x + 2 \geq -3 \quad x^2 + 1 \leq 1 \quad |x - 1| \leq 4 \quad 2\sqrt{2x - x^2} < 1 \quad |x + |x|| \geq 2$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On remplace la condition imposée par une condition équivalente qui ne fait plus intervenir de valeur absolue ou de radical.

17. En utilisant des valeurs absolues, exprimer sous forme de conditions sur x les relations d'appartenance suivantes :

$$x \in [-1, 5] \quad x \in]1, 3[\quad x \in]-4, -2[$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour que x appartienne à un intervalle, il faut que la distance de ce point au milieu de l'intervalle soit inférieure à sa demi-longueur.

18. À partir des intervalles $A =]-\infty, -1]$, $B = [-1, 3]$, $C =]-1, 5[$ et $D = [-2, +\infty[$, déterminer les ensembles A^c , $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $A \cup D$, $B \cup C$, $(B \cap C) \cup (B \cap D)$, $A^c \cup C^c$ et $A^c \cap D^c$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'être attentif à la forme des intervalles où les extrémités sont comprises ou non.

19. Pour $n > 0$, on définit les intervalles :

$$A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad B_n = \left[0, \frac{1}{n}\right[\quad \text{et} \quad C_n = \left[-\frac{1}{n}, 0\right[.$$

Déterminer les ensembles :

$$E_p = \bigcap_{k=1}^p A_k, \quad F_p = \bigcup_{k=1}^p A_k, \quad G_p = \bigcap_{k=1}^p B_k \quad \text{et} \quad H_p = \bigcap_{k=1}^p C_k.$$

Étudier les limites de ces ensembles quand p tend vers l'infini.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut examiner l'inclusion de deux ensembles d'indices successifs k et $k+1$ et en tirer une conclusion quant à leur union ou leur intersection.

Ensemble de définition

20. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D que l'on demande de déterminer à chaque fois :

a) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$;

b) $\sqrt{x^3 - 1}$;

c) $\sqrt[3]{1 - x^2}$;

d) $\sqrt{x^2 + x - 2}$;

e) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$;

f) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$;

g) $\sqrt{-x} + (2+x)^{-1/2}$;

h) $(x - |x|)^{-1/2}$;

$$\text{i) } \sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}} ;$$

$$\text{j) } \sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} ;$$

$$\text{k) } \ln \frac{2+x}{2-x} ;$$

$$\text{l) } \ln \frac{x^2-3x+2}{x+1}.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. L'ensemble de définition est obtenu à partir de celui des fonctions usuelles : dénominateur non nul pour une fraction, argument positif pour une racine carrée ou un logarithme...

Parité, périodicité, graphe

21. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D où l'on demande d'examiner si elles sont paires ou impaires :

$$\text{a) } \sqrt{1-|x|} ;$$

$$\text{b) } \sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2} ;$$

$$\text{c) } |x^2-x| ;$$

$$\text{d) } |x+1|-|x-1| ;$$

$$\text{e) } \frac{x-1/x}{x+1/x} ;$$

$$\text{f) } \ln \frac{1+x}{1-x} ;$$

$$\text{g) } \frac{(1+x)^{x-1}}{(1-x)^{x+1}}.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit de remplacer x par $-x$ dans l'expression de $f(x)$ et de vérifier si on retrouve comme nouvelle expression $f(x)$ ou $-f(x)$.

22. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D où l'on demande d'examiner si elles sont périodiques, paires ou impaires, puis de les représenter graphiquement :

a) $E(x)$ qui représente la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x ;

$$\text{b) } 2x - E(x), x \in [-2, 2].$$

Analyse de l'énoncé et conseils. L'expression de $E(x+1)$ à l'aide de $E(x)$ peut permettre de déceler une périodicité éventuelle des fonctions précédentes et de simplifier la représentation graphique.

Composition d'applications

23. a) Déterminer l'application composée $f \circ f \circ f = f^3$, avec $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

b) Déterminer l'application composée $f \circ g$, avec :

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. L'application $f \circ g$ est définie par $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$, donc il faut que x appartienne au domaine de définition de g et que $g(x)$ appartienne à celui de f . Ayant ainsi déterminé les valeurs de x pour lesquelles $f \circ g$ existe, on remplace x par $g(x)$ dans l'expression de $f(x)$ pour obtenir celle de $(f \circ g)(x)$.

Application réciproque

24. Déterminer la réciproque des fonctions f définies par les expressions $f(x)$ ci-après :

a) $2x+1$;

b) $\sqrt[3]{1-x^3}$;

c) $\ln \frac{x-1}{x+1}$;

d) $f(x) = x$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = x^2$ pour $x > 0$.

Analyse de l'énoncé et conseils. La résolution de l'équation $y = f(x)$, où x est l'inconnue, conduit à une solution unique $x = g(y)$ si la fonction f est inversible, et la fonction g obtenue est alors la réciproque f^{-1} .

Calcul de limites

25. Déterminer les limites des expressions $f(x)$ suivantes, sans utiliser de fonctions équivalentes :

a) $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 2}$, $x \rightarrow +\infty$;

b) $\frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 2}$, $x \rightarrow 1$;

c) $x+1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x \rightarrow 0$;

d) $\frac{x\sqrt{x} + x}{x^2 + 4x + 1}$, $x \rightarrow +\infty$;

e) $x - \sqrt{x^2 - x}$, $x \rightarrow +\infty$;

f) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$, $x \rightarrow +\infty$;

g) $\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$, $x \rightarrow 1$;

h) $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$, $x \rightarrow 0$;

i) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$, $x \rightarrow a$, avec $a > 0$;

j) $\sqrt{x(x+a)} - x$, $x \rightarrow +\infty$, avec a réel quelconque ;

k) $x + \sqrt[3]{1-x^3}$, $x \rightarrow +\infty$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Dans cet exercice, on demande de ne pas utiliser les fonctions équivalentes pour déterminer les limites, bien que cette méthode soit en général plus rapide. Dans le cas d'une fraction rationnelle, si le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément, c'est qu'il y a une simplification possible après factorisation. Quand l'expression est un rapport de fonctions puissances, la limite pour x tendant vers l'infini s'obtient en divisant numérateur et dénominateur par le terme d'exposant le plus élevé. La présence de radicaux conduit presque toujours à utiliser les identités remarquables permettant de faire disparaître la forme indéterminée initiale.

Fonctions équivalentes

26. Pour chacune des expressions $f(x)$ suivantes, déterminer une fonction équivalente, puis la limite.

$$\text{a) } \frac{(x^2 + 3x^3)(2x + 1)}{2x + x^4}, x \rightarrow +\infty ; \quad \text{b) } \frac{(2x^2 + x^4)(2 + x)}{x + 2x^3}, x \rightarrow 0 ;$$

$$\text{c) } \sqrt{x^3 + x + 2} - x\sqrt{x + \frac{1}{x}}, x \rightarrow +\infty ; \quad \text{d) } \frac{x^2 - 1}{\sqrt{(x-1)^4}} - \frac{2x + 1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2}}, x \rightarrow 1 ;$$

$$\text{e) } \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x - 2}}, x \rightarrow 2 ; \quad \text{f) } \frac{1}{4} + \sqrt{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2}, x \rightarrow 1 ;$$

$$\text{g) } \frac{x}{|x-1|} - \frac{3x-1}{|x^2-1|}, x \rightarrow 1 ; \quad \text{h) } \frac{1}{2} + \sqrt{x-1} - \frac{1}{x+1}, x \rightarrow 1 .$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Avant d'étudier la limite en un point, il faut vérifier si la fonction est définie au voisinage de ce point. Dans le cas contraire, on n'étudie que la limite à gauche ou à droite. Toute fonction polynôme est équivalente à son terme de plus haut degré au voisinage de l'infini et à son terme de plus bas degré au voisinage de zéro. Cependant, les équivalents peuvent disparaître par différence ; dans le cas d'expressions avec radicaux, on peut multiplier par la quantité conjuguée afin d'éviter cet inconvénient. Enfin, si x tend vers un réel non nul a , l'équivalent de f s'exprimera à l'aide d'une puissance de $u = x - a$.

Continuité

27. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f dont on demande de déterminer l'ensemble de continuité et la nature des points de discontinuité éventuels.

a) $\frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x+1}}$;

b) $\frac{2x^3 + 2x^2 - x - 1}{|x+1|}$;

c) $\frac{x^2 + x}{2\sqrt{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;

d) $\frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = 1$;

e) $\frac{\sqrt{1/x + x} - \sqrt{1/x - x}}{x + |x|}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;

f) $f(x) = 4\sqrt{x^2 + 1}$ pour $x \leq 1$ et $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{x + a^2}}$ pour $x > 1$,
où a est un nombre réel quelconque.

Analyse de l'énoncé et conseils. Après avoir déterminé l'ensemble de définition de la fonction f , on étudie sa continuité aux bornes finies des intervalles qui composent cet ensemble. Si une fonction n'est pas définie en un point a , mais avec des limites à gauche et à droite de ce point égales à ℓ , on peut prolonger cette fonction par continuité en définissant $f(a) = \ell$.



QCM

1. **Vrai.** Si f et g sont deux fonctions impaires définies sur un même ensemble E , pour tout x de E , leur produit vérifie :

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x) = (fg)(x)$$

2. **Faux.** Le résultat est faux en général, mais peut être vrai dans certains cas particuliers. Si f et g sont deux fonctions périodiques définies sur un même ensemble E , il existe deux nombres réels T_1 et T_2 tels que sur E on ait $f(x+T_1) = f(x)$ et $g(x+T_2) = g(x)$. Pour que leur somme soit une fonction périodique, il faut qu'il existe un réel T tel que $(f+g)(x+T) = (f+g)(x)$ soit $f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x)$. Cela se produira si T est un multiple entier de T_1 et T_2 , c'est-à-dire s'il existe deux entiers relatifs p et q tels que $T = pT_1 = qT_2$ soit $T_1/T_2 = q/p$. Donc la fonction somme sera périodique dans le cas où le rapport T_1/T_2 est un nombre rationnel.

3. **Faux.** Soit par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x-1$; les fonctions f et g sont monotones sur $[0,1]$ mais leur produit fg défini par $(fg)(x) = x^2 - x$ est décroissant sur $[0, 1/2]$, puis croissant sur $[1/2, 1]$, donc non monotone sur $[0, 1]$.

4. **Vrai.** Soit deux réels x et x' tels que $x < x'$; la fonction f étant décroissante, on a $f(x) \geq f(x')$. Comme g est décroissante, on en déduit $g[f(x)] \leq g[f(x')]$, soit $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x')$.

5. **Vrai.** Ces propriétés sont des conséquences immédiates des opérations sur les limites.

6. **Vrai.** Soit f continue et strictement croissante sur l'intervalle I et y et y' deux réels de $f(I)$ tels que $y < y'$. Nous allons établir que la réciproque f^{-1} est strictement croissante. Les nombres réels $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$ sont tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ et on a donc $f(x) < f(x')$. Comme f est strictement croissante, cela implique que $x = f^{-1}(y) < x' = f^{-1}(y')$, donc que f^{-1} est aussi strictement croissante.

7. **Vrai.** Propriété évidente puisque par hypothèse $\frac{f(x)}{l} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow a$.

8. **Faux.** Soit par exemple $f_1(x) = x^3 + x$, $g_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$ et $g_2(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$ avec $x \rightarrow +\infty$. On a bien $f_1(x) \sim g_1(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$, mais $(f_1 \circ f_2)(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ et $(g_1 \circ g_2)(x) = \left(\frac{x^2}{x^3 + 1}\right)^3 \sim \frac{1}{x^3}$.

9. **Faux.** Soit, par exemple, $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 - x$; ces deux polynômes sont équivalents, quand $x \rightarrow +\infty$, à leur terme de plus haut degré qui est x^2 . Cependant, $f(x) - g(x) = x$ tend vers plus l'infini avec x .

10. La fonction f est positive sur son domaine de définition qui est l'intervalle fermé $[0, 10]$. Sa valeur minimum est donc la valeur 0, obtenue pour $x = 0$ et $x = 10$. Par ailleurs, f atteint son maximum quand le terme sous radical est maximum. Celui-ci est le produit de deux termes dont la somme est constante, égale à 10, donc est maximum quand ces deux termes sont égaux, soit pour $x = 10 - x = 5$. Le maximum a pour valeur $f(5) = 5$.

11. Les applications f et g paraissent réciproques l'une de l'autre, puisqu'elles associent le carré ou la racine carrée d'un nombre. On a d'ailleurs $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$, mais $g \circ f$ n'est pas l'application identique sur \mathbb{R} , car f n'est définie que sur \mathbb{R}_+ . D'autre part, pour tout x réel, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$. Ces deux applications ne sont donc pas réciproques l'une de l'autre ; elles le seraient si elles étaient restreintes à \mathbb{R}_+ .

12. Pour $m > 0$, le théorème des croissances comparées permet d'affirmer que $f(x)$ est un infiniment grand par rapport à $g(x)$. Pour $m = 0$, on a $f(x) = 1$ et $g(x) \sim x$, donc $b(x) \rightarrow +\infty$. Il reste à étudier le cas $m < 0$ où $f(x)$ est un infiniment petit, $b(x)$ ayant donc même limite que $g(x)$, qui est équivalent à $(m+1)x$ pour $m \neq -1$. Dans ce dernier cas, $b(x)$ est un infiniment grand. Enfin, pour $m = -1$ on obtient :

$$b(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{x} - e^{-x} \rightarrow -1$$

C'est donc uniquement pour $m = -1$ que $b(x)$ admet une limite finie.

13. L'expression $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 0$. Pour $x \rightarrow 0$, le dénominateur est équivalent à x donc $f(x)$ tend vers 1. Il suffit de poser alors $f(0) = 1$ et de conserver l'expression de $f(x)$ pour $x \neq 0$, afin d'obtenir une fonction f qui soit définie et continue partout. C'est ce qu'on appelle un *prolongement par continuité*, où on a défini la valeur $f(0)$ à partir de la limite de l'expression de $f(x)$ qui n'était pas définie pour $x = 0$.

14. C'est aux points $x = 2$ et $x = 4$ où l'expression de $f(x)$ change, que se pose le problème de la continuité de f . On calcule la limite à droite $f(2+0) = a - b/2$ qui doit être égale à $f(2) = 0$. De même, $f(4+0) = 1$ doit être égale à $f(4) = a - b/4$. Ces deux conditions de continuité permettent d'obtenir $b = 4$ et $a = 2$, soit $f(x) = 2 - 4/x$ pour $2 < x \leq 4$.

15. Le dénominateur tend vers zéro et le numérateur vers $\sqrt{a^2 + 3} - b$. Pour $b \neq \sqrt{a^2 + 3}$, $f(x)$ est donc un infiniment grand. Pour $b = \sqrt{a^2 + 3}$, on

obtient une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, avec pour $x \neq a^2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{a^2+3}}{x-a^2} = \frac{x-a^2}{(x-a^2)(\sqrt{x+3} + \sqrt{a^2+3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{a^2+3}} \end{aligned}$$

donc $f(x) \rightarrow 1/2\sqrt{a^2+3}$.

16. On remplace la condition initiale par une condition équivalente portant sur x :

$$5x + 2 \geq -3 \Leftrightarrow 5x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -1$$

ce qui correspond à l'intervalle $[-1, +\infty[$. La condition $x^2 + 1 \leq 1$ n'est réalisée que pour $x = 0$, soit l'intervalle $[0, 0]$. On obtient les équivalences :

$$|x-1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$$

soit l'intervalle $[-3, 5]$. Le terme sous radical doit être positif, d'où les équivalences :

$$2\sqrt{2x-x^2} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x-x^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \leq x(2-x) \quad \text{et} \quad 0 < x^2-2x + \frac{1}{4}$$

la première condition est vérifiée pour $0 \leq x \leq 2$ et la seconde s'écrit

$(x-1)^2 - \frac{3}{4} > 0$, soit $|x-1| > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces conditions réunies définissent les inter-

valles $\left[0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ et $\left]1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right]$.

Le nombre $x+|x|$ est positif, donc la condition imposée s'écrit $x+|x| \geq 2$. Pour $x \leq 0$, on obtient $x+|x| = 0$ et cette condition n'est donc pas vérifiée. Pour $x > 0$, elle est équivalente à $2x \geq 2$, d'où l'intervalle $[1, +\infty[$.

Vous avez compris ?

Déterminer les intervalles définis par les conditions $\sqrt{x+1} < 1$, puis $|x-|x|| < 2$.

Réponses : $[-1, 0[$ et $] -1, +\infty[$.

17. Le milieu de l'intervalle $[a, b]$ est $\frac{1}{2}(a+b)$, donc l'appartenance de x à cet intervalle se traduit par la condition :

$$\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$$

On a en effet les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b &\Leftrightarrow a - \frac{a+b}{2} \leq x - \frac{a+b}{2} \leq b - \frac{a+b}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{b-a}{2} \leq x - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

Donc $x \in [-1, 5]$ est équivalent à $|x-2| \leq 3$. Lorsque l'intervalle est ouvert, on remplace l'inégalité large par une inégalité stricte. Ainsi, $x \in]1, 3[$ est équivalent à $|x-2| < 1$ et $x \in]-4, -2[$ équivalent à $|x+3| < 1$.

18. On obtient les intervalles suivants :

$$\begin{aligned} A^c &=]-1, +\infty[, A \cap B = \{-1\}, A \cap C = \emptyset, A \cap D = [-2, -1], \\ B \cap C &=]-1, 3], A \cup D = \mathbb{R}, B \cup C = [-1, 5], (B \cap C) \cup (B \cap D) = B, \\ A^c \cup C^c &= (A \cap C)^c = \mathbb{R}, A^c \cap D^c = (A \cup D)^c = \emptyset \end{aligned}$$

19. Pour tout entier positif k on a la relation d'inclusion :

$$A_{k+1} = \left[0, \frac{1}{k+1} \right] \subset \left[0, \frac{1}{k} \right] = A_k$$

L'intersection de ces deux ensembles se réduit donc au plus petit et l'union au plus gros, soit :

$$E_p = A_p = \left[0, \frac{1}{p} \right] \quad \text{et} \quad F_p = A_1 = [0, 1]$$

Comme 0 appartient à A_p pour tout entier p , cela reste vrai à la limite, donc :

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\} \quad \text{et} \quad F = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 = [0, 1]$$

On a également l'inclusion $B_{k+1} \subset B_k$, donc $G_p = B_p = \left[0, \frac{1}{p} \right]$. On a encore 0 qui appartient à B_p pour tout entier p , donc même si $\frac{1}{p}$ tend vers zéro ce point est encore dans l'ensemble limite, soit :

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{0\}$$

En raison de l'inclusion $C_{k+1} \subset C_k$, on a $H_p = C_p = \left[-\frac{1}{p}, 0\right]$. Cette fois par contre le point 0 est exclu de tous les intervalles H_p , donc il en est de même à la limite et :

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset$$

20. a) Le dénominateur se factorise en $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, donc $D = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$. Cependant, le numérateur se factorise aussi par $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, donc on peut simplifier la fraction par $x+1$ pour $x \neq -1$, soit $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, et prolonger cette fonction par continuité en posant $f(-1) = -\frac{1}{4}$.

b) Le terme sous le radical s'écrit $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, donc est positif pour x supérieur à 1, soit $D = [1, +\infty[$.

c) S'agissant d'une racine cubique, elle est toujours définie, donc $D = \mathbb{R}$.

d) Le terme sous radical s'écrit $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, qui est positif en dehors de l'intervalle des racines, soit $D =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

e) Le terme sous radical doit être positif, et il est du signe de $(x-1)(x+1)$. Par ailleurs, le dénominateur doit être non nul, d'où $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

f) Les termes sous radicaux doivent être tous deux positifs et le dénominateur non nul, soit $x+1 \geq 0$ et $x-1 > 0$, donc $D =]1, +\infty[$.

g) La fonction f est définie pour $-x \geq 0$ et $2+x > 0$, soit $D =]-2, 0]$.

h) Pour tout réel x , on a $x \leq |x|$, donc la fonction f ne peut pas être définie et $D = \emptyset$.

i) Cette fonction f est définie pour $|x| \neq 2$ et $(1-|x|)(2-|x|) \geq 0$. Nous allons distinguer deux cas pour pouvoir retirer les valeurs absolues. Pour x positif, la condition s'écrit $(1-x)(2-x) \geq 0$, donc $x \leq 1$ ou $x \geq 2$, soit avec la condition précédente $x \in [0, 1] \cup [2, +\infty[$. Pour x négatif, on doit avoir $(1+x)(2+x) \geq 0$, soit $x \leq -2$ ou $x \geq -1$, donc $x \in]-\infty, -2] \cup [-1, 0]$. Au total, on obtient $D =]-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty[$.

j) Chacun des termes sous radical doit être positif, soit $x \geq 0$ et $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x} + 2$. Les deux membres de l'inégalité étant positifs, on peut élever au carré et obtenir comme conditions équivalentes $x \geq 0$ et $x+2 \geq x+4+4\sqrt{x}$. La condition $2+4\sqrt{x} \leq 0$ étant impossible à réaliser, on a $D = \emptyset$.

k) L'argument du logarithme doit être positif, soit $(2+x)(2-x) > 0$ et $D =]-2, 2[$.

l) L'argument du logarithme est du signe de :

$$(x^2 - 3x + 2)(x + 1) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$$

donc $D =]-1, 1[\cup]2, +\infty[$.

21. a) Comme $|-x| = |x|$ on trouve $f(-x) = f(x)$, donc f est paire.

b) On obtient :

$$f(-x) = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} = -f(x)$$

donc f est impaire.

c) Comme $f(-x) = |x^2 + x|$ ne peut pas s'exprimer à l'aide de $f(x)$, on en conclut que f n'est ni paire ni impaire.

d) On a :

$$f(-x) = |-x + 1| - |-x - 1| = |x - 1| - |x + 1| = -f(x)$$

donc f est impaire.

e) Pour x non nul :

$$f(-x) = \frac{-x + 1/x}{-x - 1/x} = \frac{x - 1/x}{x + 1/x} = f(x)$$

donc f est paire.

f) Pour $-1 < x < 1$:

$$f(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$$

donc f est impaire.

g) Pour $-1 < x < 1$:

$$f(-x) = \frac{(1-x)^{-x-1}}{(1+x)^{-x+1}} = \frac{(1+x)^{x-1}}{(1-x)^{x+1}} = f(x)$$

donc f est paire.

Vous avez compris ?

Déterminer si les expressions ci-après définissent une fonction paire ou impaire sur son domaine de définition :

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad e^x - \frac{1}{e^x}$$

Réponses : la première fonction est paire et la seconde impaire.

22. a) La fonction partie entière, notée E , est définie partout. Elle est constante sur tout intervalle de la forme $[k, k+1[$, de valeur $E(x) = k$ sur cet intervalle, avec un saut pour tout entier relatif k . Elle est croissante au sens large sur tout \mathbb{R} , donc elle ne peut pas être périodique. Pour tout entier positif k , on a $E(x) = k$ pour x dans l'intervalle $]k, k+1[$ et $E(-x) = -k-1$ car $-x$ est dans l'intervalle $] -k-1, -k[$, donc E n'est ni paire ni impaire. La figure 1.1 ci-après représente le graphe de E sur l'intervalle $[-3, 4[$.

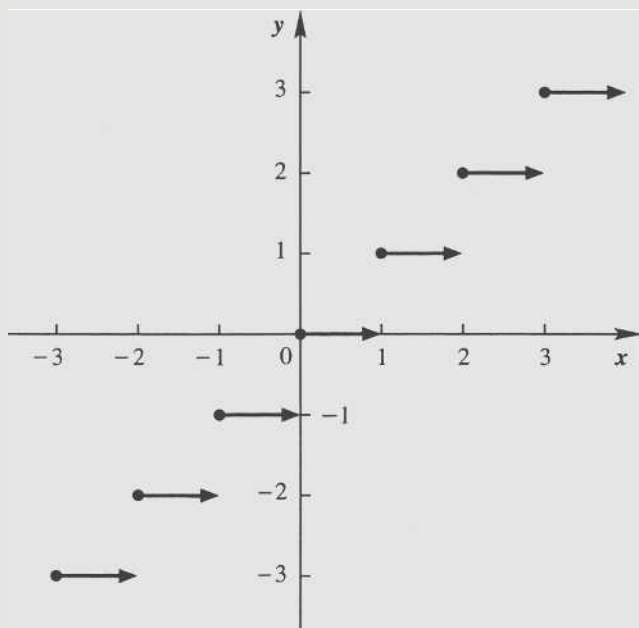


Figure 1.1

b) Compte tenu des propriétés de la fonction partie entière, cette fonction n'est ni paire, ni impaire, ni périodique. Cependant, on peut remarquer que sur tout intervalle $[k, k+1[$ où l'entier k peut prendre les valeurs $-2, -1, 0$ et 1 , la fonction f a pour expression $f(x) = 2x - E(x) = 2x - k$, avec donc $f(k) = k$, et que $f(x+1) = 2x+2 - [E(x)+1] = f(x)+1$. La figure 1.2 ci-après représente le graphe de cette fonction sur l'intervalle $[-2, 2]$.

23. a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$, donc $f \circ f$ est définie pour $f(x) \neq 1$, soit $x \neq 0$, avec :

$$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1 - x}{1 - x - 1} = \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Enfin, $f \circ f \circ f$ est définie aussi sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, avec :

$$(f \circ f \circ f)(x) = f[f^2(x)] = \frac{1}{1 - f^2(x)} = \frac{1}{1/x} = x$$

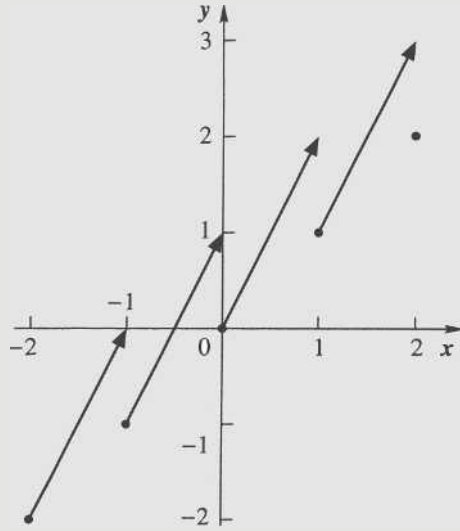


Figure 1.2

b) La fonction g est définie pour $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \geq 0$, soit sur $D_1 =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$, et la fonction f pour $1 - x^2 \geq 0$. La fonction $f \circ g$ est donc définie pour tout x de D_1 tel que $1 - g^2(x) \geq 0$, soit $x^2 - 3x + 2 \leq 1$ ou $x^2 - 3x + 1 \leq 0$, condition qui est équivalente à $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \leq 0$ ou $\left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Le domaine de définition de $f \circ g$ est donc l'intersection de D_1 et de $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, soit $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. Sur cet ensemble :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{1 - [g(x)]^2} = \sqrt{-x^2 + 3x - 1}$$

24. a) La fonction f est croissante sur \mathbb{R} et son image est \mathbb{R} . Pour tout réel y , on écrit l'équation $y = 2x + 1$, qui admet la solution $x = \frac{1}{2}(y - 1)$. La réciproque de f est donc définie pour tout réel x par $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$.

b) La fonction f est décroissante sur tout \mathbb{R} et l'équation $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ admet pour solution $x = \sqrt[3]{1 - y^3}$, donc $f^{-1} = f$. Ainsi, $f \circ f = f \circ f^{-1} = i$, application identique sur \mathbb{R} .

c) Cette fonction f est définie et monotone croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$, qui ont comme intervalles images respectifs

$]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$. Pour $y \neq 0$, l'équation $y = f(x)$ s'écrit :

$$y = \ln \frac{x-1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{x-1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1+e^y}{1-e^y}$$

La réciproque f^{-1} est donc définie pour x différent de zéro par :

$$f^{-1}(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$$

d) La fonction f est la fonction identité sur \mathbb{R}_- , donc il en est de même pour sa réciproque. Pour x positif, cette fonction est croissante et a pour image \mathbb{R}_+^* , l'équation $y = x^2$ admettant la solution unique $x = \sqrt{y}$. La réciproque est donc :

$$f^{-1} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}_- \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

25. a) Comme il s'agit d'une fraction rationnelle avec la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, on divise numérateur et dénominateur par x^3 pour obtenir :

$$f(x) = \frac{x + 1/x + 1/x^3}{1 - 2/x^3} \rightarrow +\infty$$

résultat prévisible car le polynôme numérateur est de degré plus élevé que le polynôme dénominateur.

b) Nous obtenons la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire que 1 est racine du numérateur qui se factorise par $(x-1)$ ($x^2 + 4x + 1$) et du dénominateur qui se factorise par $(x-1)(x+2)$. Pour x différent de 1, cette fraction se simplifie donc par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2} \rightarrow \frac{6}{3} = 2$$

c) Comme $\sqrt{x^2} = |x|$, il va falloir étudier deux cas selon le signe de x . Pour $x > 0$:

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x} \rightarrow 2$$

quand x tend vers zéro par valeurs positives.

Pour $x < 0$:

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{x} \rightarrow 0$$

quand x tend vers zéro par valeurs négatives. Ces deux limites étant distinctes, on en conclut que $f(x)$ n'admet pas de limite quand x tend vers zéro.

d) On divise le numérateur et le dénominateur de cette forme indéterminée $\frac{0}{0}$ par x^2 , soit :

$$f(x) = \frac{1/\sqrt{x} + 1/x}{1 + 4/x + 1/x^2} \rightarrow 0$$

e) On résout cette forme indéterminée $\infty - \infty$ en multipliant par la quantité conjuguée pour faire disparaître le radical :

$$f(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2 - x})(x + \sqrt{x^2 - x})}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 1/x}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

f) On divise numérateur et dénominateur par \sqrt{x} :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1/x + 1/x\sqrt{x}}}} \rightarrow 1$$

g) On réduit au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3}$$

Comme numérateur et dénominateur s'annulent pour $x = 1$, on peut simplifier cette fraction par $x - 1$, avec pour $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{x+2}{x^2+x+1} \rightarrow -1$$

h) On peut poser $1+x = u^6$, avec u qui tend vers 1 quand x tend vers zéro :

$$f(x) = \frac{u^3 - 1}{u^2 - 1} = \frac{(u-1)(u^2 + u + 1)}{(u-1)(u+1)} = \frac{u^2 + u + 1}{u+1} \rightarrow \frac{3}{2}$$

i) On factorise le dénominateur, puis on simplifie par $\sqrt{x} - \sqrt{a}$ pour $x \neq a$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

j) On multiplie par la quantité conjuguée pour faire disparaître le radical :

$$f(x) = \frac{x(x+a) - x^2}{\sqrt{x(x+a)+x}} = \frac{ax}{x[1 + \sqrt{1+a/x}]} \rightarrow \frac{a}{2}$$

k) Pour résoudre cette forme indéterminée $\infty - \infty$ on utilise l'identité $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, avec ici $a = x$ et $b = \sqrt[3]{1-x^3}$, donc $a^3 + b^3 = 1$ et :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2} \rightarrow 0$$

car les trois termes du dénominateur tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Vous avez compris ?

Déterminer les limites des expressions suivantes pour $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{2x^2 + 3x - 1}{3x^2 + 1}, \quad \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^3 + 2x}}$$

Réponses : ces deux formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$ tendent respectivement vers $2/3$ et 1 .

26. a) Au voisinage de l'infini, on remplace chaque polynôme par son terme de plus haut degré qui lui est équivalent :

$$f(x) \sim \frac{3x^3 \times 2x}{x^4} = 6$$

donc cette valeur 6 est la limite de $f(x)$.

b) Au voisinage de zéro, on remplace chaque polynôme par son terme de plus bas degré qui lui est équivalent :

$$f(x) \sim \frac{4x^2}{x} = 4x$$

donc $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

c) Chacun des termes de la différence est équivalent à $x\sqrt{x}$, donc ces termes disparaissent. Nous allons multiplier par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 + x + 2 - x^2(x + 1/x)}{\sqrt{x^3 + x + 2} + x\sqrt{x + 1/x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^3 + x + 2} + x\sqrt{1 + 1/x}} \sim \frac{2}{2x\sqrt{x}} = x^{-3/2} \end{aligned}$$

donc $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

d) On remplace les radicaux par leurs expressions, soit $\sqrt{(x-1)^4} = (x-1)^2$ et $\sqrt{(x^2-1)^2} = |x^2-1|$. Il va donc falloir distinguer les limites à droite et à

gauche pour pouvoir retirer la valeur absolue. Au voisinage de 1 et pour $x > 1$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} - \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} \sim \frac{1}{2(x-1)}$$

donc $f(x)$ tend vers plus l'infini quand x tend vers 1 par valeurs supérieures. Pour $x < 1$:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} - \frac{2x+1}{1-x^2} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{x^2 + 4x + 2}{(x-1)(x+1)} \sim \frac{7}{2(x-1)}$$

et $f(x)$ tend vers moins l'infini quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Ainsi, $f(x)$ n'admet pas de limite quand x tend vers 1.

e) La fonction f n'est définie que pour $x > 2$, donc on étudie la limite quand x tend vers 2 par valeurs supérieures. Dans ce cas, on peut simplifier par $\sqrt{x-2}$:

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x-2} \sim 3\sqrt{x-2}$$

et $f(x)$ tend vers 0 par valeurs supérieures.

f) On remarque que f n'est définie que pour $x > 1$, donc on étudie la limite quand x tend vers 1 par valeurs supérieures. Pour obtenir l'équivalent, on pose $u^2 = x-1$:

$$\begin{aligned} f(u^2 + 1) &= \frac{1}{4} + u^3 - \frac{1}{(2+u^2)^2} = u^3 + \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{(1+u^2/2)^2} \right] \\ &= u^3 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1+u^2/2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+u^2/2} \right) \\ &= u^3 + \frac{u^2}{4(2+u^2)} \left(1 + \frac{1}{1+u^2/2} \right). \end{aligned}$$

Comme u est voisin de zéro, on ne conserve que les termes de plus bas degré :

$$f(x) \sim \frac{2u^2}{8} = \frac{1}{4}(x-1)$$

et donc $f(x)$ tend vers zéro par valeurs supérieures.

g) Au voisinage de 1 on obtient :

$$f(x) = \frac{x}{|x-1|} - \frac{3x-1}{(x+1)|x-1|} = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x+1)|x-1|} = \frac{|x-1|}{x+1} \sim \frac{1}{2}|x-1|$$

et donc $f(x)$ tend vers zéro par valeurs supérieures.

h) La fonction f n'est définie que pour $x \geq 1$, donc on étudie la limite quand x tend vers 1 par valeurs supérieures. On obtient :

$$f(x) = \frac{x+1-2}{2(x+1)} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x-1} \left[1 + \frac{\sqrt{x-1}}{2(x+1)} \right] \sim \sqrt{x-1}$$

et donc $f(x)$ tend vers zéro par valeurs supérieures.

Vous avez compris ?

Déterminer un équivalent, puis la limite, des expressions suivantes :

$$\frac{(2x^2 + x^4)(x^2 + 5)}{5x + x^2}, \quad x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x-1}}, \quad x \rightarrow 1$$

Réponses : les équivalents sont $2x \rightarrow 0$ et $2\sqrt{x-1} \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow 1^+$.

27. a) Le numérateur est un polynôme défini et continu partout et le dénominateur défini et continu pour $x+1 \geq 0$. Le rapport est donc continu sur son ensemble de définition $]-1, +\infty[$.

b) Cette fraction n'est pas définie pour $x = -1$. Nous allons cependant étudier les limites à gauche et à droite, à cause de la valeur absolue, pour examiner si on peut prolonger cette fonction par continuité. Pour $x < -1$:

$$f(x) = -\frac{2x^2(x+1) - (x+1)}{x+1} = -2x^2 + 1 \rightarrow -1$$

et, pour $x > -1$:

$$f(x) = \frac{2x^2(x+1) - (x+1)}{x+1} = 2x^2 - 1 \rightarrow 1$$

Les limites à gauche et à droite sont distinctes et f n'est pas définie pour $x = -1$ où il y a une discontinuité de première espèce.

c) La fonction f est définie partout sur \mathbb{R} . Mais la valeur en $x = 0$ doit être la limite de $f(x)$ pour $x \neq 0$ et $x \rightarrow 0$, afin qu'elle soit continue en ce point. Il faut étudier les limites à gauche et à droite. Pour $x < 0$:

$$f(x) = -\frac{x(x+1)}{2x} = -\frac{1}{2}(x+1) \rightarrow -\frac{1}{2}$$

et, pour $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{2x} = \frac{1}{2}(x+1) \rightarrow \frac{1}{2}$$

Il y a une discontinuité de première espèce pour $x = 0$.

d) Le terme sous radical est $(x-1)^2$, donc f est définie partout sur \mathbb{R} . Elle sera continue pour $x=1$ si les limites à gauche et à droite sont égales à $f(1)=1$. Pour $x < 1$:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{1-x} = -x \rightarrow -1$$

et, pour $x > 1$:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x-1} = x \rightarrow 1$$

donc f est continue à droite et discontinue à gauche.

e) Les termes sous les radicaux doivent être positifs et le dénominateur de $f(x)$, pour $x \neq 0$, non nul. Or, pour $x \leq 0$ on a $x+|x|=0$, donc les conditions sont :

$$x > 0, \quad x(x+1) \geq 0, \quad x(1-x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0, \quad 1-x \geq 0$$

Le domaine de définition est donc l'intervalle $[0,1]$ puisqu'on a défini $f(0)=0$.

Comme $f(1^-) = f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la fonction f est continue à gauche pour $x=1$. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1/x+x} - \sqrt{1/x-x}}{2x} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x^2}{2x\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

donc f est continue à droite pour $x=0$ et par conséquent continue sur son ensemble de définition $[0,1]$.

f) Pour x supérieur à 1, on a toujours $\sqrt{x^2+a^2} > \sqrt{x+a^2}$, donc la fonction f est définie partout. Les expressions de $f(x)$ étant différentes sur les intervalles $]-\infty, 1]$ et $]1, +\infty[$ il faut étudier la continuité pour $x=1$. On a $f(1^-) = f(1) = 4\sqrt{2}$. D'autre part, pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2-1)(\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{x+a^2})}{(x^2+a^2) - (x+a^2)} \\ &= \frac{x+1}{x}(\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{x+a^2}) \rightarrow 4\sqrt{1+a^2} \end{aligned}$$

donc il faut que $a^2=1$ pour que f soit continue partout.

TD 2 Dérivées et différentielles



La dérivée d'une fonction est définie à partir du taux d'accroissement de celle-ci, divisé par le taux d'accroissement Δx de la variable. Si ce rapport admet une limite quand Δx tend vers zéro, alors la dérivée existe. Cette limite bien sûr n'existe que si la fonction est continue. L'existence d'une dérivée prouve donc une certaine régularité de cette fonction, traduite par une direction privilégiée du graphe au voisinage d'un point. La constance du signe de cette dérivée sur un certain intervalle correspond à la monotonie de cette fonction sur cet intervalle. C'est donc un outil essentiel de l'étude d'une fonction. La dérivation est une opération linéaire sur l'ensemble des fonctions dérivables, c'est-à-dire que la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions est la combinaison linéaire des dérivées de ces fonctions. La dérivée des fonctions usuelles permet d'obtenir celle de fonctions plus complexes, à partir des formules indispensables de dérivation d'un produit, d'un rapport ou d'une composition de fonctions. La dérivée logarithmique peut être utile notamment pour le calcul de la dérivée d'un produit ou d'une forme exponentielle. Elle permet aussi de calculer l'élasticité d'une fonction, notion utile en économie.

1 ● Notion de dérivée

Définition. Une fonction numérique f , définie au voisinage d'un point x_0 de \mathbb{R} , est dérivable en x_0 si le rapport :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

où x est différent de x_0 , admet une limite quand x tend vers x_0 . Cette limite, quand elle existe, est appelée *dérivée* de f au point x_0 et notée $f'(x_0)$ ou

$$\left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x=x_0}.$$

Notons que toute fonction dérivable en un point est continue en ce point mais que la réciproque est fautive.

Définition. Si une fonction f est dérivable en tout point d'un intervalle ouvert, la fonction f' qui associe à tout point x de cet intervalle le nombre $f'(x)$ est la *fonction dérivée* de f , définie sur cet intervalle.

Dérivées à droite et à gauche. On dit que f est dérivable à droite (resp. gauche) en x_0 , si le rapport :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

où x est différent de x_0 , admet une limite à droite (resp. gauche) quand x tend vers x_0^+ (resp. x_0^-). Cette limite, quand elle existe, est notée $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

Une fonction est dérivable sur un intervalle fermé $[a, b]$ si elle est dérivable en tout point de l'ouvert $]a, b[$, si elle est dérivable à droite en a et à gauche en b .

Dérivées successives. Si la fonction dérivée f' est dérivable à son tour en tout point d'un intervalle ouvert, la fonction dérivée $(f')'$ est définie sur le même intervalle, notée f'' . Elle se nomme dérivée seconde de f . On peut ainsi définir de proche en proche, quand elle existe, la dérivée n -ième, ou d'ordre n , qui se note $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.

2 ● Calcul des dérivées

Si u et v sont deux fonctions définies sur un intervalle ouvert et dérivables en un point x_0 de cet intervalle, alors les fonctions $u + v$, λu , uv et $\frac{u}{v}$ sont dérivables en x_0 avec :

$$(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

$$(\lambda u)'(x_0) = \lambda u'(x_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(uv)'(x_0) = u(x_0)v'(x_0) + u'(x_0)v(x_0)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}, \quad \text{si } v(x_0) \neq 0$$

Dérivée d'une fonction composée. Si u est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 , dérivable en x_0 , et si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $u(I)$, dérivable en $u(x_0)$, alors la fonction composée $f \circ u$ est dérivable en x_0 , de dérivée :

$$(f \circ u)'(x_0) = f'[u(x_0)]u'(x_0)$$

Formule de Leibniz. Si u et v sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle ouvert I , alors la fonction uv est n fois dérivable sur I , avec :

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots + C_n^p u^{(n-p)} v^{(p)} + \cdots + uv^{(n)}$$

Dérivée d'une fonction réciproque. Soit f une fonction strictement monotone et dérivable sur un intervalle ouvert I . En tout point y_0 de $J = f(I)$ tel que $f'(x_0)$ est différent de zéro, où $y_0 = f(x_0)$, la fonction réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable, avec :

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'[g(y_0)]}$$

Dérivée logarithmique. Si f est une fonction réelle, définie et dérivable sur un intervalle ouvert I , non nulle sur I , on appelle dérivée logarithmique de f l'expression $\frac{f'}{f}$, qui n'est autre que la dérivée de $\ln |f|$.

Élasticité. Si f est une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I , dérivable en un point x_0 de I , l'*élasticité* de la fonction f au point x_0 , par rapport à la variable x , est le nombre :

$$e_{y/x}(x_0) = \frac{dy/y_0}{dx/x_0} = \frac{x_0}{y_0} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} = \frac{x_0}{y_0} f'(x_0) = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$



	Vrai	Faux
1. Une fonction peut être continue mais non dérivable en un point.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. Si deux fonctions ont la même dérivée sur un intervalle ouvert, elles sont égales.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Si les dérivées à gauche et à droite en un point sont égales, la fonction est dérivable en ce point.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. Si une fonction est deux fois dérivable en un point, elle est indéfiniment dérivable en ce point.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. Une fonction à élasticité constante est une fonction puissance.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6. L'élasticité d'une somme de deux fonctions est la somme de leurs élasticités.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7. Si une fonction paire est dérivable, sa fonction dérivée est impaire.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



8. En utilisant la propriété suivante de la fonction logarithme :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

retrouver l'expression de la dérivée de cette fonction.

9. Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = |x^3 - 3x|$.

10. Montrer comment on peut déterminer par récurrence les dérivées successives de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2/2}$.

11. La fonction f est définie par $f(x) = x^2 e^{1-x} - 2$, pour $x \geq 1$, et par $f(x) = axe^{bx^2}$, pour $0 \leq x < 1$. Déterminer les constantes réelles a et b pour que f soit dérivable sur \mathbb{R}_+ .



Dérivée en un point

12. Utiliser la définition de la dérivée d'une fonction en un point x_0 pour calculer les dérivées $f'(x_0)$ des fonctions f définies par les expressions $f(x)$ ci-après :

a) $x^3 + x$; b) $\frac{x}{x+1}, x \neq -1$; c) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}, x > -1$.

Analyse de l'énoncé et conseils. La dérivée en un point x_0 est définie comme la limite, lorsqu'elle existe, du taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0 . Il faut donc calculer ce rapport, en posant $x = x_0 + h$ avec h qui tend vers zéro.

Calcul de dérivées

13. Calculer, lorsqu'elle est définie, la dérivée des expressions $f(x)$ suivantes :

a) $\sqrt[4]{x^3}$;	b) $\sqrt{(x^2 + 1)^3}$;
c) $\frac{x}{x^3 + 1}$;	d) $\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$;
e) $\frac{x}{x^2 + \sqrt{x}}$;	f) $\frac{(1 + \sqrt{x})^2}{1 + (x-1)^2}$;
g) $\frac{(1 + \sqrt{x})^2}{(x+1)^3}$;	h) $\frac{1 + \sqrt{x}}{(x+1)^{3/2}}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. À partir de la dérivée de la fonction puissance, on déduit ces dérivées par application des formules de dérivation d'un rapport ou d'une fonction composée.

14. Calculer, lorsqu'elle est définie, la dérivée des expressions $f(x)$ suivantes :

a) $x \ln |x + 1|$;

b) $(x + \ln x)^3$;

c) $\frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$;

d) $\frac{x^2}{\ln x}$;

e) $\frac{x + \ln x}{x - \ln x}$;

f) $\ln \left| \frac{x(2x-1)}{x+3} \right|$;

g) 3^x ;

h) $x^2 e^{1/x}$;

i) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$;

j) $\ln(1 + x^3)$;

k) $\ln(1 + xe^x)$.

Analyse de l'énoncé et conseils. En utilisant les formules de dérivation d'un produit ou d'un rapport, ainsi que la dérivée logarithmique, on obtient ces dérivées à partir de celles des fonctions exponentielle et logarithme.

15. Calculer, lorsqu'elles sont définies, les dérivées des expressions suivantes :

$$u = x^x, \quad v = x^u, \quad w = u^x, \quad t = (\ln x)^{\ln x}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Toutes ces expressions étant de la forme f^g , on calculera leur dérivée logarithmique qui sera $g' \ln f + gf'/f$, définie pour toutes les valeurs de x telles que $f(x) > 0$.

Dérivées à droite et à gauche

16. Étudier la dérivabilité des fonctions f définies par les expressions $f(x)$ ci-après :

a) $|x^2 + x - 2| + |x + 1|$; b) $\frac{x}{1 + e^{1/x}}$ pour $x \neq 0$ avec $f(0) = 0$;

c) $\sqrt{|x|} + \sqrt{1 - x}$; d) $\ln(1 + e^{-1/x^2})$ pour $x \neq 0$ avec $f(0) = 0$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On écrit les expressions de $f(x)$ ne faisant pas intervenir des valeurs absolues. On calcule ensuite leur dérivée, et aux points où ces expressions changent, on calcule les limites à gauche et à droite

qui définissent les dérivées à gauche et à droite. Pour que la fonction soit dérivable, il faut que ces dérivées coïncident.

Dérivée d'une fonction composée

17. Calculer la dérivée de la fonction composée $h = f \circ u$ dans les cas suivants :

a) $u(x) = 5x^2 + 2x + 3, f(u) = u^4$; b) $u(x) = xe^x + \frac{1}{x}, f(u) = \sqrt{u}, x > 0$;

c) $u(x) = x + \sqrt{x}, f(u) = \frac{1}{u}, x > 0$; d) $u(x) = 1 + \ln x, f(u) = \frac{u^2}{1+u}, x > 0$;

e) $u(x) = \sqrt{x+1}, f(u) = e^u, x > -1$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'appliquer la formule de dérivation d'une fonction composée $(f \circ u)'(x) = f'[u(x)]u'(x)$. Elle peut se retenir plus

facilement en l'écrivant sous la forme différentielle $\frac{df[u(x)]}{dx} = \frac{df(u)}{du} \times \frac{du}{dx}$.

En effet, si on assimile ces dérivées à des fractions, on retrouve le premier membre par une simplification symbolique de du au numérateur et au dénominateur dans le second membre.

18. Les fonctions f et g étant définies par :

$$f(x) = \frac{a+x}{1+ax} \quad g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

où a est un réel non nul, avec $|a| \neq 1$, montrer que les fonctions g et $g \circ f$ ont la même dérivée par rapport à la variable x .

Analyse de l'énoncé et conseils. On calcule la dérivée de la fonction g sur son domaine de définition, puis on applique la formule de dérivation d'une fonction composée. Bien entendu, si ces deux fonctions ont la même dérivée, c'est qu'elles diffèrent seulement d'une constante, ce que l'on pourrait vérifier en calculant explicitement $(g \circ f)(x)$.

Dérivées successives

19. Calculer la dérivée seconde de la fonction f définie par :

$$f(x) = \exp(2x^2 - 3x + 1).$$

20. Soit n un entier naturel et $f(x) = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$. Calculer l'expression suivante :

$$(x^2 - 1) f''(x) + x f'(x) - n^2 f(x)$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut exprimer les deux dérivées à partir de la fonction elle-même et on obtiendra ainsi facilement l'expression demandée.

21. Calculer la dérivée d'ordre cinq de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il est conseillé de faire apparaître dans l'écriture de la fraction rationnelle $f(x)$ sa partie entière polynômiale, avant de calculer les dérivées successives.

22. Calculer la dérivée d'ordre n des fonctions f définies par les expressions $f(x)$ suivantes :

a) $(ax+b)^n$ où a et $b \in \mathbb{R}^*$;

b) $\ln x$;

c) $\frac{1}{1+2x}$;

d) $x \ln(1+2x)$;

e) $x\sqrt{x}$;

f) $\ln(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Le calcul des deux ou trois premières dérivées permet de pressentir quelle est l'expression générale de $f^{(n-1)}(x)$ en fonction de n . On dérive alors cette expression et ce que l'on obtient doit se déduire de la forme générale précédente en remplaçant $n-1$ par n .

23. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction composée $f \circ u$, où f est une fonction indéfiniment dérivable et $u(x) = ax+b$, avec a et b réels non nuls.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'appliquer la formule de dérivation d'une fonction composée pour obtenir cette dérivée par récurrence.

Formule de Leibniz

24. En utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée d'ordre n des fonctions f définies par les expressions $f(x)$ suivantes :

a) xe^x ;

b) $\frac{x^2+1}{x+1}$;

c) $x^3 \ln x$;

d) $\frac{1+x}{\sqrt{x}}$;

Analyse de l'énoncé et conseils. On calcule les dérivées d'ordre quelconque p des deux fonctions u et v dont le produit donne f . On pourra éventuellement utiliser les résultats de l'exercice 22. Enfin, dans certains cas, on remarquera

que les dérivées sont nulles au-delà d'un certain ordre, ce qui simplifie l'utilisation de la formule de Leibniz.

Dérivée logarithmique

25. Calculer la dérivée logarithmique des fonctions f définies par les expressions $f(x)$ suivantes et en déduire leur dérivée $f'(x)$.

$$\text{a) } (x+1)(2x+1)(3x+1) ; \quad \text{b) } \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}} ; \quad \text{c) } x^{\sqrt{x}}.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour calculer la dérivée logarithmique de la fonction f , il suffit d'écrire le logarithme de $|f|$, puis de dériver. La dérivée de f s'obtient ensuite en multipliant le résultat par f et en précisant le domaine où elle est définie.

Élasticité

26. Si f et g sont deux fonctions dérivables en un point x , d'élasticités notées $e_f(x)$ et $e_g(x)$, on demande d'exprimer l'élasticité des fonctions fg , f/g et $f \circ g$. En déduire alors l'élasticité des fonctions définies par les expressions ci-après :

$$\text{a) } \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}, ax^\alpha \text{ avec } a \text{ et } \alpha \text{ constantes réelles ;}$$

$$\text{b) } \sqrt{x^2+1}, \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+1}} ;$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{x+1}, \sqrt[3]{x^2+x}, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Les formules de dérivation d'un produit et d'une fonction composée permettent d'exprimer les élasticités demandées en considérant le quotient f/g comme le produit de f par $1/g$. On utilisera ensuite ces formules pour le calcul des élasticités, en essayant d'exprimer à chaque fois une fonction à l'aide de celles qui la précèdent.



QCM

1. **Vrai.** On sait que la dérivabilité implique la continuité mais que la réciproque est fautive. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = |x|$ est continue à l'origine. Cependant, puisque $f(x) = -x$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = x$ pour $x \geq 0$, elle admet une dérivée à gauche égale à -1 et une dérivée à droite égale à 1 . Elle n'est donc pas dérivable en ce point.

2. **Faux.** L'égalité $f'(x) = g'(x)$ implique seulement que $f(x) - g(x)$ est constante sur cet intervalle.

3. **Vrai.** Si les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement sont égales, cela implique que ce taux admet une limite qui est par définition la dérivée de la fonction en ce point.

4. **Faux.** Une fonction peut n'admettre des dérivées en un point que jusqu'à un ordre p fini, et pas au-delà. Par exemple, $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$ est définie pour $x \geq 0$, ainsi que les dérivées $f'(x) = 10x\sqrt{x}$ et $f''(x) = 15\sqrt{x}$. Cependant, $f^{(3)}(x) = 15/2\sqrt{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$.

5. **Vrai.** Si $xf'(x)/f(x) = a$, on a $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{x}$, donc en intégrant $\ln |f(x)| = \ln |x|^a + C$.

La fonction est bien de la forme $f(x) = \lambda x^a$, avec λ constante quelconque.

6. **Faux.** C'est l'élasticité d'un produit qui est la somme des élasticité. L'élasticité de la somme $f + g$ est $x \frac{f' + g'}{f + g}$ qui n'est pas la somme de $x \frac{f'}{f}$ et $x \frac{g'}{g}$.

7. **Vrai.** Par hypothèse $f(x) = f(-x)$, donc en dérivant cette égalité on obtient $f'(x) = -f'(-x)$, ce qui traduit le fait que f' est impaire.

8. Pour déterminer la dérivée, on écrit le taux d'accroissement pour $x > 0$, en utilisant la relation $\ln(x + b) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right)$:

$$\frac{\ln(x + b) - \ln x}{b} = \frac{\ln\left(1 + \frac{b}{x}\right)}{b} = \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{b}{x}\right)}{\frac{b}{x}} \rightarrow \frac{1}{x}, \quad b \rightarrow 0$$

et par conséquent on retrouve bien $\frac{1}{x}$ comme dérivée de $\ln x$.

9. Cette fonction est définie et continue partout sur \mathbb{R} . Pour pouvoir calculer la dérivée, il faut retirer la valeur absolue. L'expression $x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$ change de signe pour $x = -\sqrt{3}, 0$ et $\sqrt{3}$. Nous allons donc distinguer quatre cas. Pour $x < -\sqrt{3}$, on a $f(x) = -x^3 + 3x$ et $f'(x) = -3x^2 + 3$. Pour $-\sqrt{3} < x < 0$, on a $f(x) = x^3 - 3x$ et $f'(x) = 3x^2 - 3$. On peut noter que $f'(-\sqrt{3}^-) = -6$ alors que $f'(-\sqrt{3}^+) = 6$, donc f n'est pas dérivable pour $x = -\sqrt{3}$. Comme f est paire, on en déduit pour x positif sa dérivée par la relation $f'(x) = -f'(-x)$, soit $f'(x) = -3x^2 + 3$ pour $0 < x < \sqrt{3}$ et $f'(x) = 3x^2 - 3$ pour $x > \sqrt{3}$. Bien entendu, f n'est pas dérivable non plus en $\sqrt{3}$ et comme $f'(0^-) = -3$ et $f'(0^+) = 3$ elle n'est pas dérivable non plus à l'origine.

10. La fonction f est indéfiniment dérivable, de dérivée logarithmique $-x$, soit $f'(x) = -xf(x)$. En dérivant cette expression, on obtient :

$$f''(x) = -f(x) - xf'(x) = -f(x) + x^2 f(x) = (x^2 - 1)f(x)$$

En dérivant une nouvelle fois :

$$f^{(3)}(x) = 2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x) = (-x^3 + 3x)f(x)$$

On constate donc que les dérivées successives s'écrivent sous la forme $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ où P_n est un polynôme de degré n , avec $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -x$, $P_2(x) = x^2 - 1$ et $P_3(x) = -x^3 + 3x$. Vérifions que cela reste vrai à l'ordre $n+1$ en dérivant $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n+1)}(x) = P'_n(x)f(x) + P_n(x)f'(x) = [P'_n(x) - xP_n(x)]f(x)$$

Cette expression est bien de la forme $P_{n+1}(x)f(x)$, avec $P_{n+1}(x) = P'_n(x) - xP_n(x)$ qui est un polynôme de degré $n+1$ puisque $xP_n(x)$ est de degré $n+1$ et $P'_n(x)$ de degré $n-1$.

11. Les deux expressions qui définissent f sont des produits de fonctions puissance et exponentielle, donc continues et dérivables sur les intervalles considérés. C'est au point de séparation de ces deux intervalles qu'il faut examiner la continuité d'abord, puis la dérivabilité. Puisque $f(1) = -1$ et $f(1^-) = ae^b$, la continuité de f impose comme première condition que $ae^b = -1$. Pour $0 \leq x < 1$, on a $f'(x) = ae^{bx^2} + 2abx^2 e^{bx^2}$, donc $f'(1^-) = ae^b(1+2b)$. Pour $x \geq 1$, on a $f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x}$ et $f'(1) = 1$. La dérivabilité en ce point, donc sur \mathbb{R}_+ , implique $ae^b(1+2b) = 1$, soit avec l'autre condition $1+2b = -1$. On en déduit $b = -1$ et $a = -e$, et ainsi $f(x) = -xe^{1-x^2}$ pour $0 \leq x < 1$.

12. a) On obtient comme accroissement de la fonction f :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= (x_0 + h)^3 + (x_0 + h) - x_0^3 - x_0 \\ &= 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3 + h \end{aligned}$$

Et comme taux d'accroissement :

$$\frac{f(x_0 + b) - f(x_0)}{b} = b^2 + 3bx_0 + 3x_0^2 + 1$$

Sa limite, quand b tend vers zéro, est $3x_0^2 + 1$ qui est donc $f'(x_0)$.

b) L'expression de l'accroissement de la fonction est ici :

$$f(x_0 + b) - f(x_0) = \frac{x_0 + b}{x_0 + b + 1} - \frac{x_0}{x_0 + 1} = \frac{b}{(x_0 + 1)(x_0 + b + 1)}$$

Donc le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x_0 + b) - f(x_0)}{b} = \frac{1}{(x_0 + 1)(x_0 + b + 1)}$$

a pour limite $\frac{1}{(x_0 + 1)^2}$ qui représente $f'(x_0)$.

c) On écrit l'expression de l'accroissement de la fonction, puis on réduit au même dénominateur et enfin on multiplie par la quantité conjuguée pour faire disparaître au numérateur les radicaux :

$$\begin{aligned} f(x_0 + b) - f(x_0) &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + b + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x_0 + 1}} = \frac{\sqrt{x_0 + 1} - \sqrt{x_0 + b + 1}}{\sqrt{x_0 + 1}\sqrt{x_0 + b + 1}} \\ &= \frac{-b}{\sqrt{x_0 + 1}\sqrt{x_0 + b + 1}(\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{x_0 + b + 1})} \end{aligned}$$

En divisant par b , puis en faisant tendre b vers zéro, on obtient comme limite :

$$f'(x_0) = -\frac{1}{2(x_0 + 1)^{3/2}}$$

13. a) La dérivée de $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$, définie sur un ensemble qui est \mathbb{R} si n est un entier supérieur à 1. L'ensemble de définition de f' est \mathbb{R}^* si $n = p/q$ avec p entier inférieur à l'entier q impair ; c'est \mathbb{R}_+^* si n est un réel quelconque. Ici $n = 3/4$, donc la dérivée est $f'(x) = 3/4\sqrt[4]{x}$ définie pour $x > 0$.

b) On a encore une fonction puissance de la forme u^n , avec $n = 3/2$, mais cette fois u est une fonction de x , donc la dérivée est de la forme $nu^{n-1}u'$. Comme $u = x^2 + 1$, on obtient $u' = 2x$ et $f'(x) = 3x\sqrt{x^2 + 1}$ qui est définie partout.

c) Cette fois f se présente sous la forme d'un rapport u/v avec $u = x$ et $v = x^3 + 1$, de dérivées $u' = 1$ et $v' = 3x^2$. La dérivée $(u'v - uv')/v^2$ a pour

expression :

$$f'(x) = \frac{1 - 2x^3}{(1 + x^3)^2}$$

définie, comme f , pour x différent de -1 .

d) L'expression de $f(x)$ peut se mettre sous la forme u^n , avec $u = 2x + 1$ et $n = -2/3$. La dérivée $nu^{n-1}u'$ est définie pour x différent de $-\frac{1}{2}$ par :

$$f'(x) = -\frac{4}{3\sqrt[3]{(2x+1)^5}}$$

e) Il s'agit d'un rapport de la forme u/v avec $u = x$ et $v = x^2 + \sqrt{x}$, de dérivées $u' = 1$ et $v' = 2x + 1/2\sqrt{x}$. La dérivée est définie pour $x > 0$ par :

$$f'(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x} - 2x^2 - \sqrt{x/2}}{(x^2 + \sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x}(1 - 2x\sqrt{x})}{2x(x\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{1 - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1 + x\sqrt{x})^2}$$

f) Nous avons encore un rapport u/v avec $u = (1 + \sqrt{x})^2$ et $v = 1 + (x - 1)^2$, de dérivées $u' = 2(1 + \sqrt{x})/2\sqrt{x}$ et $v' = 2(x - 1)$. La dérivée est définie pour $x > 0$ par :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 + \sqrt{x})(x^2 - 2x + 2) - 2(x - 1)\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(x^2 - 2x + 2)^2} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{x})(-x^2 - 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}(x^2 - 2x + 2)^2} \end{aligned}$$

g) Le numérateur est $u = (1 + \sqrt{x})^2$ et le dénominateur $v = (1 + x)^3$, de dérivées $u' = (1 + \sqrt{x})/\sqrt{x}$ et $v' = 3(1 + x)^2$. D'où une dérivée définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 + \sqrt{x})(1 + x)^3 - 3\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2(1 + x)^2}{\sqrt{x}(1 + x)^6} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{x})(1 - 3\sqrt{x} - 2x)}{\sqrt{x}(1 + x)^4} \end{aligned}$$

h) On peut remarquer que l'expression à dériver ici est la racine carrée de la précédente. Il faut donc diviser la dérivée obtenue par $2\sqrt{f(x)}$, où $f(x)$

représente l'expression de la question g), soit la dérivée :

$$\frac{(1+\sqrt{x})(1-3\sqrt{x}-2x)}{\sqrt{x}(1+x)^4} \times \frac{(1+x)^{3/2}}{2(1+\sqrt{x})} = \frac{1-3\sqrt{x}-2x}{2\sqrt{x}(1+x)^{5/2}}$$

Vous avez compris ?

Calculer la dérivée des expressions suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x}}, \sqrt[4]{(x^2-1)^3} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+(x-1)^2}}$$

Réponses :

$$-\frac{1}{5x\sqrt[5]{x}}, \quad x > 0; \quad \frac{3x}{2\sqrt[4]{x^2-1}}, \quad |x| > 1; \quad \frac{(1-x)(1+3x)}{2\sqrt{x}[\sqrt{x+(x-1)^2}]^2}, \quad x > 0$$

14. a) Il s'agit de la dérivée d'un produit, définie pour x différent de -1 :

$$f'(x) = \ln|x+1| + \frac{x}{x+1}$$

b) La dérivée de u^3 est $3u^2u'$, avec ici $u = x + \ln x$, donc $u' = 1 + \frac{1}{x}$. La dérivée, définie pour $x > 0$, est :

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(x + \ln x)^2$$

c) On considère $\frac{\ln x}{x}$ comme le produit de $\ln x$ par $\frac{1}{x}$ pour calculer la dérivée, définie pour $x > 0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2}(2x + \ln x - 2)$$

d) L'expression à dériver est sous la forme u/v avec $u = x^2$ et $v = \ln x$, de dérivées $u' = 2x$ et $v' = \frac{1}{x}$. Soit, pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x \ln x - x}{(\ln x)^2}$$

e) On a encore un rapport u/v avec $u = x + \ln x$ et $v = x - \ln x$. D'où $u' = 1 + \frac{1}{x}$ et $v' = 1 - \frac{1}{x}$ et donc, pour $x > 0$:

$$f'(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

f) On écrit $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \ln |x| + \ln |2x-1| - \ln |x+3|$$

D'où la dérivée, définie pour x différent de -3 , 0 et $1/2$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+3} = \frac{2x^2 + 12x - 3}{x(2x-1)(x+3)}$$

g) On a $\ln f(x) = x \ln 3$, donc la dérivée logarithmique est $\ln 3$, soit $f'(x) = 3^x \ln 3$.

h) On peut aussi déterminer la dérivée logarithmique à partir de $\ln f(x) = 2 \ln |x| + \frac{1}{x}$ dont la dérivée est $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$. Soit pour x différent de zéro :

$$f'(x) = (2x-1)e^{1/x}$$

i) On écrit encore :

$$\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

dont la dérivée est :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \frac{1/x^2}{1+1/x} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

qui est définie quand l'argument du logarithme est strictement positif, soit pour $x < -1$ ou $x > 0$.

j) La dérivée de $\ln u$ est u'/u avec ici $u = 1 + x^3$, donc $u' = 3x^2$. Soit, pour $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{1+x^3}$$

k) L'expression $u = 1 + xe^x$ est toujours positive, de dérivée $u' = e^x + xe^x$. Donc pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{1+x}{1+xe^x} e^x$$

— Vous avez compris ? —

Calculer les dérivées des expressions suivantes :

$$\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \quad \text{et} \quad x^3 e^{-2x}$$

Réponses :

$$-\frac{2}{x(\ln x - 1)^2}, \quad x \in]0, e[\cup]e, +\infty[\quad \text{et} \quad x^2 e^{-2x} (3 - 2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

15. La fonction u est définie et dérivable pour $x > 0$, avec $\ln u = x \ln x$, donc $u'(x) = u(\ln x + 1)$.

Pour $x > 0$, on a $\ln v = u \ln x$, donc $v' = v(u' \ln x + u/x)$, soit :

$$v'(x) = uv \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right]$$

La fonction w est définie et dérivable aussi pour $x > 0$, avec $\ln w = x \ln u$, donc $w' = w(\ln u + xu'/u)$, soit :

$$w'(x) = xw(2 \ln x + 1)$$

L'expression de t est de la forme f^f avec $f(x) = \ln x$. D'après ce qui précède, sa dérivée est donc $t' = t(\ln f + 1)f'$, soit pour $x > 1$:

$$t'(x) = [1 + \ln(\ln x)] \frac{t(x)}{x}$$

16. a) Comme $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, il faut distinguer quatre intervalles pour pouvoir retirer les valeurs absolues.

- Pour $x < -2$, on a $f(x) = x^2 - 3$ et $f'(x) = 2x$, donc $f'(-2^-) = -4$.
- Pour $-2 < x < -1$, on obtient $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ et $f'(x) = -2x - 2$, donc $f'(-2^+) = 2$ et $f'(-1^+) = 0$. La fonction n'est pas dérivable pour $x = -2$, les dérivées à gauche et à droite étant distinctes.
- Pour $-1 < x < 1$, on a $f(x) = -x^2 + 3$ et $f'(x) = -2x$, d'où $f'(-1^+) = 2$ et $f'(1^-) = -2$. La fonction n'est pas dérivable non plus pour $x = -1$.
- Pour $x > 1$, $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $f'(x) = 2x + 2$, donc $f'(1^+) = 4$ et f n'est pas dérivable au point $x = 1$.

b) La fonction f est définie partout mais il faut étudier l'existence d'une dérivée à l'origine en cherchant la limite du taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

quand x tend vers zéro. L'exposant $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini avec le signe de x , donc ce rapport tend vers 1 quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Ainsi, f admet une dérivée à gauche égale à 1 et une dérivée à droite nulle, donc elle n'est pas dérivable à l'origine.

c) La fonction f est définie pour $x \leq 1$ et admet des expressions distinctes selon le signe de x . Pour $x < 0$, on obtient $f(x) = \sqrt{-x} + \sqrt{1-x}$, d'où la dérivée :

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

qui tend vers moins l'infini quand x tend vers 0 par valeurs inférieures. Pour $0 < x < 1$, on a $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

n'est pas définie pour $x = 1$ et tend vers plus l'infini quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Ainsi, f n'admet ni dérivée à gauche ni dérivée à droite pour $x = 0$.

d) Pour étudier la dérivabilité à l'origine, on utilise la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \ln(1 + e^{-1/x^2})$$

quand x tend vers zéro. La limite de e^{-1/x^2} est nulle, quelle que soit la façon dont x tend vers 0. On sait que :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

quand u tend vers 0, donc le taux a même limite que $\frac{e^{-1/x^2}}{x}$ qui tend vers zéro, d'après le théorème des croissances comparées. Par conséquent, f est dérivable à l'origine avec $f'(0) = 0$. Pour x différent de zéro on obtient comme dérivée :

$$f'(x) = \frac{2e^{-1/x^2}/x^3}{1 + e^{-1/x^2}} = \frac{2}{x^3(1 + e^{1/x^2})}$$

qui tend bien vers zéro quand x tend vers zéro.

17. a) Les fonctions f et u sont dérivables partout sur \mathbb{R} , avec $f'(u) = 4u^3$ et $u'(x) = 10x + 2$, donc $b'(x) = 8(5x + 1)(5x^2 + 2x + 3)^3$.

b) La fonction f est dérivable pour $u > 0$, ce qui est bien le cas ici, avec $f'(u) = 1/2\sqrt{u}$. La fonction u est définie et dérivable pour x différent de zéro, avec :

$$u'(x) = e^x + xe^x - \frac{1}{x^2}$$

D'où :

$$b'(x) = \frac{x^2(1+x)e^x - 1}{2x\sqrt{x(1+x^2e^x)}}$$

c) La fonction f est définie et dérivable pour u différent de zéro, avec $f'(u) = -1/u^2$ et u est dérivable pour $x > 0$, avec $u'(x) = 1 + 1/2\sqrt{x}$ d'où :

$$b'(x) = -\frac{1 + 2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$$

d) La fonction f est définie et dérivable pour $u \neq -1$ et on peut écrire :

$$f(u) = u - 1 + \frac{1}{1+u}$$

donc sa dérivée est :

$$f'(u) = 1 - \frac{1}{(1+u)^2} = \frac{u(2+u)}{(1+u)^2}$$

La fonction u est définie et dérivable pour $x > 0$, avec $u'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi, pour $x > 0$ et différent de e^{-2} :

$$b'(x) = \frac{(1 + \ln x)(3 + \ln x)}{x(2 + \ln x)^2}$$

e) La fonction f est définie et dérivable partout sur \mathbb{R} , avec $f'(u) = e^u$ et la fonction u est dérivable pour $x > -1$, de dérivée $u'(x) = 1/2\sqrt{x+1}$, d'où :

$$b'(x) = \frac{\exp(\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}}$$

Vous avez compris ?

Calculer la dérivée de $h(x) = \ln(\ln x)$.

Réponse : $u(x) = \ln x$, $f(u) = \ln u$, $h'(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

18. La fonction g est définie et dérivable pour $|x| < 1$, avec :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$$

La fonction f est définie et dérivable pour $x \neq -1/a$, avec :

$$f'(x) = \frac{1-a^2}{(1+ax)^2}$$

Pour $|x| < 1$, f prend aussi ses valeurs dans l'intervalle $] -1, 1[$, donc $g \circ f$ est dérivable, de dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{dg[f(x)]}{dx} &= \frac{dg}{df} \frac{df}{dx} = \frac{2}{1-f^2} \frac{1-a^2}{(1+ax)^2} = \frac{2(1-a^2)}{(1+ax)^2 - (a+x)^2} \\ &= \frac{2(1-a^2)}{(1+ax+a+x)(1+ax-a-x)} = \frac{2(1-a^2)}{(1+a)(1+x)(1-a)(1-x)} \\ &= \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

car, $|a|$ étant différent de 1, on a pu simplifier par $1-a^2$.

19. La dérivée logarithmique de f est définie partout et a pour expression $4x-3$. Ainsi, $f'(x) = (4x-3)f(x)$ et, en dérivant à nouveau :

$$f''(x) = 4f(x) + (4x-3)f'(x) = [4 + (4x-3)^2]f(x) = (16x^2 - 24x + 13)f(x)$$

20. La fonction f est définie et dérivable pour $|x| > 1$ avec :

$$f'(x) = n \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = n \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{nf(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

On dérive une nouvelle fois :

$$f''(x) = \frac{nf'(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{nx f(x)}{(x^2 - 1)^{3/2}} = \frac{nf(x)}{x^2 - 1} \left(n - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

Par conséquent $(x^2 - 1)f''(x) = n^2 f(x) - xf'(x)$ et l'expression demandée est nulle pour tout réel x du domaine de définition de f . La fonction f est donc solution de cette équation différentielle du second ordre.

21. La division de x^3 par $1 - x$ permet d'obtenir la partie entière de cette fraction rationnelle, pour $x \neq 1$:

$$f(x) = -x^2 - x - 1 + \frac{1}{1-x}$$

Les dérivées successives sont alors :

$$f'(x) = -2x - 1 + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = -2 + \frac{2}{(1-x)^3}$$

et, à partir de cette dérivée, on peut établir par récurrence que :

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

En particulier :

$$f^{(5)}(x) = \frac{120}{(1-x)^6}$$

22. a) On obtient facilement :

$$f'(x) = na(ax+b)^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)a^2(ax+b)^{n-2}$$

On suppose donc que la dérivée d'ordre p s'écrit :

$$f^{(p)}(x) = n(n-1)\dots(n-p+1)a^p(ax+b)^{n-p}$$

qui par dérivation donne :

$$f^{(p+1)}(x) = n(n-1)\dots(n-p)a^{p+1}(ax+b)^{n-p-1}$$

Cette expression est bien de la forme précédente, ayant remplacé p par $p+1$. Ainsi :

$$f^{(n)}(x) = n!a^n$$

b) Pour $x > 0$, la dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$, donc la dérivée d'ordre n de $f(x)$ est la dérivée d'ordre $n-1$ de $\frac{1}{x}$. On obtient $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, puis

$f^{(3)}(x) = 2/x^3$, donc la forme générale doit être :

$$f^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-2} \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

Par dérivation, on obtient :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

Il s'agit bien de la formule précédente où on a remplacé $n-1$ par n .

c) Cette fonction est indéfiniment dérivable pour x différent de $-1/2$, avec comme dérivées :

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2 \times 2^2}{(1+2x)^3}$$

On suppose donc que la forme générale est :

$$f^{(n-1)}(x) = (-2)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+2x)^n}$$

Par dérivation, on obtient :

$$f^{(n)}(x) = (-2)^n \frac{n!}{(1+2x)^{n+1}}$$

qui se déduit bien de l'expression précédente en remplaçant $n-1$ par n .

d) On obtient comme première dérivée :

$$f'(x) = \ln(1+2x) + \frac{2x}{1+2x} = \ln(1+2x) + 1 - \frac{1}{1+2x}$$

qui peut s'exprimer par $f'(x) = \ln(1+2x) + 1 - g(x)$, ayant noté g la fonction de la question précédente. Ainsi, pour $x > -1/2$ on en déduit :

$$f''(x) = \frac{2}{1+2x} - g'(x) = 2g(x) - g'(x)$$

puis :

$$f^{(n)}(x) = 2g^{(n-2)}(x) - g^{(n-1)}(x)$$

Soit, d'après le résultat précédent, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= 2 \frac{(-2)^{n-2} (n-2)!}{(1+2x)^{n-1}} - \frac{(-2)^{n-1} (n-1)!}{(1+2x)^n} \\ &= (-2)^n \frac{(n-2)! (x + n/2)}{(1+2x)^n} \end{aligned}$$

e) Cette fonction est indéfiniment dérivable pour $x > 0$, avec :

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{3/2-1}, \quad f''(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) x^{3/2-2}$$

On retient donc comme forme générale :

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{3}{2} - n + 2 \right) x^{3/2-n+1}$$

Et, en dérivant cette expression :

$$f^{(n)}(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{3}{2} - n + 1 \right) x^{3/2-n}$$

qui se déduit bien de la forme générale en remplaçant $n-1$ par n .

f) Pour $x > -\frac{b}{a}$, on obtient comme dérivée :

$$f'(x) = \frac{a}{ax+b}$$

Le résultat des dérivations successives sera identique à celui de la question c), où on remplace 2 par a et n par $n-1$, soit :

$$f^{(n-1)}(x) = a(-a)^{n-2} \frac{(n-2)!}{(ax+b)^{n-1}}$$

On obtient en dérivant à nouveau :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} a^n \frac{(n-1)!}{(ax+b)^n}$$

Vous avez compris ?

Calculer les dérivées d'ordre n des expressions suivantes :

$$f(x) = e^{ax}, \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

Réponses :

$$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} \quad \text{et} \quad g^{(n)}(x) = 2 \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad x \neq 1$$

23. La fonction u est dérivable partout sur \mathbb{R} , de dérivée constante $u'(x) = a$, donc la dérivée de la fonction composée $f \circ u$ est :

$$\frac{df[u(x)]}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} = af'(u)$$

Ainsi, en dérivant à nouveau :

$$\frac{d^2 f[u(x)]}{dx^2} = a \frac{df'}{du} \frac{du}{dx} = a^2 f''(u)$$

D'où par récurrence :

$$\frac{d^n f[u(x)]}{dx^n} = a^n \frac{d^n f}{du^n}$$

24. a) Les fonctions u et v qui définissent f par leur produit sont telles que $u'(x) = 1$, $u^{(p)}(x) = 0$ pour $p \geq 2$, et $v^{(p)}(x) = e^x$ pour tout entier p . La formule de Leibniz se réduit donc à :

$$f^{(n)}(x) = uv^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)} = (x+n) e^x$$

b) Les dérivées de $u(x) = x^2 + 1$ sont nulles à partir de l'ordre trois, donc par application de la formule de Leibniz pour $n \geq 2$:

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + 1) v^{(n)} + 2C_n^1 x v^{(n-1)} + 2C_n^2 v^{(n-2)}$$

Pour $x \neq -1$, la fonction v a pour dérivées successives :

$$v'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, v''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \dots, v^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{p!}{(1+x)^{p+1}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} [x^2 + 1 - 2x(1+x) + (1+x)^2] \\ &= 2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \end{aligned}$$

On aurait pu également obtenir ce résultat plus simplement en écrivant :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$$

d'où :

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

et donc la dérivée d'ordre n de f est aussi celle de $2v(x) = \frac{2}{x+1}$.

c) Comme $u(x) = x^3$, la formule de Leibniz, pour $n \geq 4$, se réduit à :

$$f^{(n)}(x) = x^3 v^{(n)} + 3C_n^1 x^2 v^{(n-1)} + 6C_n^2 x v^{(n-2)} + 6C_n^3 v^{(n-3)}$$

La dérivée d'ordre p de $v(x) = \ln x$ a été calculée pour $x > 0$ dans la question d) de l'exercice 22. Ainsi :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-4)!}{x^{n-3}} u_n$$

où on a posé :

$$u_n = (n-1)(n-2)(n-3) - 3n(n-2)(n-3) \\ + 3n(n-1)(n-3) - n(n-1)(n-2)$$

soit :

$$f^{(n)}(x) = 6(-1)^n \frac{(n-4)!}{x^{n-3}}$$

Il était ici beaucoup plus facile de calculer les dérivées successives :

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2, \quad f''(x) = 6x \ln x + 5x, \quad f^{(3)}(x) = 6 \ln x + 11$$

On remarque alors que la dérivée d'ordre n de f , pour $n \geq 4$, n'est autre que la dérivée d'ordre $n-3$ de $\ln x$, multipliée par 6.

d) Comme $u(x) = 1+x$, la formule de Leibniz se réduit à :

$$f^{(n)}(x) = (1+x)v^{(n)} + C_n^1 v^{(n-1)}$$

avec :

$$v'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}, v''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x^{-5/2}, \dots, \\ v^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{2p-1}{2} x^{-p-1/2}$$

Ainsi :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2^n x^{n+1/2}} [(2n-1)(1+x) - 2nx] \\ = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2^n x^{n+1/2}} (2n-1-x)$$

25. a) L'expression de $f(x)$ se présente sous la forme d'un produit dont la dérivée logarithmique s'obtient comme somme des dérivées logarithmiques de chacun des facteurs :

$$\ln |f(x)| = \ln |x+1| + \ln |2x+1| + \ln |3x+1|$$

On en déduit par dérivation :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1}$$

La dérivée de f est donc définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)(3x+1) + 2(x+1)(3x+1) + 3(x+1)(2x+1) \\ &= 2(9x^2 + 11x + 6) \end{aligned}$$

b) La fonction f est définie pour $x \geq 1$ et peut s'écrire comme le produit :

$$f(x) = (x-1)^{1/2} (x+2)^{-2/3} (x+3)^{-3/2}$$

Sa dérivée logarithmique est donc :

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} \\ &= -\frac{5x^2 + x - 24}{3(x-1)(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

et sa dérivée est définie pour $x > 1$ par :

$$f'(x) = -\frac{5x^2 + x - 24}{3\sqrt{x-1}\sqrt[3]{(x+2)^5}\sqrt{(x+3)^5}}$$

c) Pour $x > 0$ on obtient :

$$\ln f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

Soit, en dérivant :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

D'où la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\sqrt{x}-1/2} (\ln x + 2)$$

Vous avez compris ?

Calculer la dérivée logarithmique, puis la dérivée de :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x-1}}{(x-2)^3}$$

Réponse :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x-2} = -\frac{3x^2 + 2x - 4}{2x(x-1)(x-2)}$$

$$f'(x) = -\frac{3x^2 + 2x - 4}{2\sqrt{x-1}(x-2)^4}, \quad x \in]1, 2[\cup]2, +\infty[$$

26. En utilisant la formule de dérivation d'un produit et la définition de l'élasticité d'une fonction en un point :

$$\begin{aligned} e_{fg}(x) &= x \frac{(fg)'(x)}{(fg)(x)} = x \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} \\ &= x \frac{f'(x)}{f(x)} + x \frac{g'(x)}{g(x)} = e_f(x) + e_g(x) \end{aligned}$$

Calculons l'élasticité de la fonction $1/f$:

$$e_{1/f}(x) = x \frac{(1/f)'(x)}{(1/f)(x)} = -x \frac{f'(x)}{f(x)} = -e_f(x)$$

On en déduit alors l'élasticité de $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ par :

$$e_{f/g}(x) = e_f(x) + e_{1/g}(x) = e_f(x) - e_g(x)$$

La dérivée d'une fonction composée s'obtient par :

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]g'(x)$$

d'où l'élasticité :

$$\begin{aligned} e_{f \circ g}(x) &= x \frac{f'[g(x)]g'(x)}{f[g(x)]} = x \frac{g'(x)}{g(x)} \times g(x) \frac{f'[g(x)]}{f[g(x)]} \\ &= e_g(x)e_f[g(x)] \end{aligned}$$

a) La dérivée de $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3}$ est $f'(x) = x^{-1/3}$, d'où l'élasticité :

$$e_f(x) = x \frac{x^{-1/3}}{3x^{2/3}/2} = \frac{2}{3}$$

Pour une fonction puissance quelconque de la forme $f(x) = ax^\alpha$, sa dérivée est $f'(x) = a\alpha x^{\alpha-1}$, donc $xf'(x) = a\alpha x^\alpha = \alpha f(x)$ et son élasticité est constante, égale à l'exposant α .

b) On peut écrire $\sqrt{x^2+1} = f[g(x)]$, avec $g(x) = x^2+1$ et $f(u) = \sqrt{u}$, donc en utilisant l'élasticité d'une fonction composée :

$$e_{f \circ g}(x) = e_g(x)e_f[g(x)] = \frac{1}{2}x \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

L'expression $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ étant l'inverse de la précédente :

$$e_h(x) = -\frac{x^2}{x^2+1}$$

On peut écrire :

$$k(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)h(x)$$

en ayant posé $f(x) = x+1$. Ainsi :

$$e_k(x) = e_f(x) + e_h(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}$$

On remarque que :

$$l(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+1}} = k(2x)$$

Donc on utilise la formule donnant l'élasticité d'une fonction composée :

$$e_l(x) = e_k(2x) = \frac{2x(1-2x)}{(1+2x)(1+4x^2)}$$

puisque l'élasticité de la fonction puissance $g(x) = 2x$ est constante, égale à 1.

c) On écrit encore $\sqrt[3]{x+1} = f[g(x)]$ avec cette fois $g(x) = x+1$ et $f(u) = \sqrt[3]{u}$. Par conséquent :

$$e_{f \circ g}(x) = \frac{1}{3} e_g(x) = \frac{x}{3(x+1)}$$

L'expression $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$ peut s'écrire comme le produit de la fonction précédente par $\sqrt[3]{x}$ dont l'élasticité vaut $1/3$, d'où :

$$e_h(x) = \frac{x}{3(x+1)} + \frac{1}{3} = \frac{2x+1}{3(x+1)}$$

On peut remarquer que :

$$k(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x}}$$

et par conséquent :

$$e_k(x) = \frac{x}{3(x+1)} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3(x+1)}$$

Vous avez compris ?

Calculer l'élasticité des fonctions définies par les expressions ci-après :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1)^{-1/3}$$

Réponses :

$$e_f(x) = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad e_g(x) = -\frac{x}{3(x+1)}$$

TD 3 Formule de Taylor et applications



La notion de développement limité est une des plus utiles dans la recherche des limites et l'étude d'une fonction au voisinage d'un point. Elle vient compléter celle de fonction équivalente, insuffisante dans certains cas où les équivalents peuvent disparaître par addition. Elle consiste à remplacer, au voisinage d'un point, une fonction régulière, c'est-à-dire admettant des dérivées jusqu'à un certain ordre, par un polynôme, fonction beaucoup plus simple à étudier. Elle se déduit des formules fondamentales de Taylor et de Maclaurin. Il est indispensable de connaître les développements limités des fonctions usuelles.

Dans de nombreux problèmes, on doit rechercher l'existence d'extremums d'une fonction et parfois étudier sa convexité. Il est très important de noter que ces deux notions ne sont pas liées a priori à celle de dérivée, association que l'on a souvent tendance à faire trop rapidement. Elles sont définies de façon totalement indépendante. Dans un certain nombre de cas, moins rares qu'on pourrait le penser, une fonction f présente un extremum en un point x_0 où justement elle n'est pas dérivable. Cet extremum ne pourra donc se trouver que par l'étude directe du signe de $f(x) - f(x_0)$, qui doit rester constant quand x reste au voisinage de x_0 .

1 ● Théorème de Rolle

Si f est une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un point c de l'ouvert $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ce théorème traduit le fait que la fonction f présente au moins un minimum ou un maximum sur l'intervalle ouvert, avec une tangente horizontale en ce point.

2 ● Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$, alors il existe au moins un point c de l'ouvert $]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

D'après ce théorème, il existe au moins un point du graphe de f , d'abscisse c , où la tangente est parallèle à la droite qui relie les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. Il montre aussi comment le sens de variation d'une fonction peut être déterminé à partir du signe de la dérivée, qui est celui de l'accroissement $f(b) - f(a)$.

On peut écrire différemment ce résultat en faisant apparaître la longueur $h = b - a$ de l'intervalle et en posant $a = x$. Le point c de l'ouvert peut alors s'écrire sous la forme $c = x + \theta h$, où θ est un nombre, dépendant de h , tel que $0 < \theta < 1$. Avec ces nouvelles notations, la formule des accroissements finis devient :

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$$

3 ● Formules de Taylor

Si f est une fonction dérivable jusqu'à un certain ordre, le résultat précédent se généralise à l'aide des dérivées successives. Les formules de Taylor se différencient par un reste qui peut s'exprimer sous différentes formes.

3.1 ● Formule de Taylor-Lagrange

Si f est une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, admettant n dérivées successives continues sur cet intervalle, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur l'ouvert $]a, b[$, alors il existe au moins un point c de l'ouvert $]a, b[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) &+ \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &+ \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \end{aligned}$$

Il s'agit du développement de la fonction f au point a par la formule de Taylor à l'ordre $n+1$, où le dernier terme se nomme reste de Lagrange.

3.2 ● Formule de Taylor-Young

Si f est une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, admettant n dérivées successives continues sur cet intervalle, telle que $f^{(n+1)}(a)$ existe, alors il existe une fonction ε définie pour tout point x de l'ouvert $]a, b[$ telle que :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers a . Il s'agit du développement de la fonction f au point a par la formule de Taylor à l'ordre $n+1$, où le dernier terme se nomme reste de Young.

Si on écrit l'expression précédente pour $a = 0$, on obtient la formule de Maclaurin avec reste de Young :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

4 ● Développement limité

Définition. Une fonction f , définie au voisinage de 0, admet un *développement limité* d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que $f(x) - P_n(x)$ soit un infiniment petit d'ordre supérieur à n par rapport à x , c'est-à-dire si on peut écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction définie sur un voisinage de 0 et qui tend vers 0 avec x .

Développement limité au voisinage de 0 des fonctions usuelles :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

où, pour chaque développement, ε est une fonction définie sur un voisinage de 0 et qui tend vers 0 avec x .

5 ● Extremum

Définition. Une fonction f présente un *extremum* en un point x_0 s'il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 tel que $f(x) - f(x_0)$ garde un signe constant pour tout point x de cet intervalle. Si $f(x) - f(x_0) \geq 0$, il s'agit d'un *minimum* et si $f(x) - f(x_0) \leq 0$, il s'agit d'un *maximum*.

Si le signe est constant dans tout le domaine de définition de la fonction, il s'agit d'un extremum global. Dans le cas contraire, on peut préciser qu'il s'agit d'un extremum local.

6 ● Fonction convexe

Définition. Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite *convexe* sur cet intervalle si, pour tous les points x et y de I et pour tout nombre t de $[0,1]$, on a l'inégalité :

$$f[(1-t)x + ty] \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

On dit que f est *concave* si la fonction $-f$ est convexe.

Si f est dérivable, la condition de convexité s'écrit plus simplement :

$$f(x+b) \geq f(x) + bf'(x)$$

pour tous les points x et $x+b$ de I . Cela traduit géométriquement le fait que le graphe de la fonction est toujours au-dessus de chacune de ses tangentes.

Si f est deux fois dérivable, la condition de convexité s'écrit encore plus simplement :

$$f''(x) \geq 0$$

en tout point x de I .

Point d'inflexion. Une fonction numérique admet un *point d'inflexion* en un point x_0 où elle est continue, s'il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ tel que cette fonction soit concave (resp. convexe) sur $]a, x_0[$ et convexe (resp. concave) sur $]x_0, b[$.

En un point d'inflexion où le graphe admet une tangente, la courbe traverse cette tangente.



	Vrai	Faux
1. Le reste de la formule de Maclaurin peut être nul en tout point du domaine de définition d'une fonction.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. Si deux fonctions ont le même développement limité à l'ordre n , elles sont égales.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Si une fonction possède un développement limité à l'ordre n , ce développement est unique.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. Le développement limité d'une fonction paire ne comprend dans sa partie polynomiale que des puissances paires de x .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. Si une fonction admet un développement limité à l'ordre deux, elle est deux fois dérivable.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6. La condition $f'(x_0) = 0$ est nécessaire pour qu'une fonction f admette un extremum en un point x_0 .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7. Si une fonction f est deux fois dérivable, la condition $f''(x_0) = 0$ est nécessaire pour que f admette un point d'inflexion en x_0 .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8. Une fonction convexe sur un intervalle ouvert est croissante ou admet un seul minimum sur cet intervalle.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



9. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$. Existe-t-il un point c de l'intervalle $[-1, 1]$ tel que $f'(c) = 0$?

10. Le développement de Taylor-Lagrange peut s'écrire sur l'intervalle $[a, a+b]$ et le point c de l'ouvert s'écrit alors sous la forme $c = a + \theta b$, où θ est un nombre de l'intervalle $]0, 1[$ qui en général dépend de b . On va établir que, dans le cas d'un polynôme, θ ne dépend que de son degré. Pour cela, on demande d'écrire le développement de Taylor-Lagrange d'un polynôme P de degré n , à l'ordre $n-1$ avec $c = a + \theta b$, puis à l'ordre $n+1$. Par différence, on en déduit l'expression de $P^{(n-1)}(a + \theta b) - P^{(n-1)}(a)$. En appliquant ensuite le théorème des accroissements finis au polynôme $P^{(n-1)}$ sur l'intervalle $[a, a + \theta b]$ on pourra obtenir l'expression de θ en fonction de n .

11. Indiquer comment, à partir de l'expression :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

on peut définir une fonction f continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

12. Déterminer les extremums éventuels des fonctions f définies par les expressions suivantes :

a) $f(x) = x$, $x \in [1, 2]$;

b) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et

$f(x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$.

13. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ présente un point d'inflexion pour $x = -2$.



Théorème de Rolle

14. Examiner si on peut appliquer le théorème de Rolle aux fonctions f définies par les expressions $f(x)$ ci-après.

a) $\frac{1}{x^2 - 3}$, $x \in [-2, 2]$; b) $|x - 1|$, $x \in [0, 2]$; c) $\frac{x-1}{x+1}$, $x \in [0, 1]$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut vérifier toutes les hypothèses du théorème de Rolle, c'est-à-dire la continuité de la fonction sur l'intervalle fermé et sa dérivabilité sur l'ouvert, sans oublier la condition d'égalité aux bornes de l'intervalle. Bien entendu, si une seule de ces hypothèses n'est pas vérifiée le théorème ne s'applique pas.

15. Utiliser le théorème de Rolle pour déterminer le nombre de racines de l'équation :

$$f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 17x - 4 = 0$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Le calcul de la dérivée de f permet de déterminer une racine de cette équation et d'en localiser une seconde sur l'intervalle $]17/6, +\infty[$. Le théorème de Rolle permet d'affirmer qu'il ne peut pas y avoir une autre racine sur cet intervalle.

Théorème des accroissements finis

16. Examiner si on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[-1, 1]$ à :

$$f(x) = x^{2/3} \quad \text{et} \quad g(x) = x^{1/3}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut examiner si les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle fermé et dérivables sur l'ouvert.

17. Appliquer le théorème des accroissements finis à :

$$f(x) = x - x^3$$

sur l'intervalle $[-2, 1]$ en précisant la valeur de c .

Analyse de l'énoncé et conseils. Après avoir vérifié les hypothèses du théorème, on calcule la dérivée de f pour obtenir la valeur de c qui figure dans la formule des accroissements finis.

18. Appliquer le théorème des accroissements finis à :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

sur un intervalle $[a, b]$ qui ne contient pas l'origine, en précisant la valeur de c . Si on pose $b = a + h$ et $c = a + \theta h$, calculer $\theta = \theta(h)$ puis étudier sa limite quand h tend vers 0.

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour que f soit dérivable sur l'ouvert $]a, b[$, il ne doit pas contenir l'origine, donc les réels a et b sont de même signe. On exprime d'abord $c = a + \theta h$, puis θ , en fonction de a et de $a + h$ pour faire tendre ensuite h vers 0 et obtenir ainsi la limite de θ .

19. Si f est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée f'' négative, montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, qu'elle vérifie :

$$f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$$

En déduire que la limite de $f'(x)$ est nulle quand x tend vers plus l'infini, si $f(x)$ admet une limite finie.

Analyse de l'énoncé et conseils. On effectue un changement de variable permettant d'utiliser les développements des fonctions usuelles au voisinage de zéro. Pour la dernière question, il faut effectuer le produit de deux développements usuels et regrouper les termes de même degré, en ne dépassant pas l'ordre n .

23. Écrire les développements limités à l'ordre quatre, au voisinage de 0 de :

$$f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \quad g(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Le développement de $f(x)$ s'obtient par addition de deux développements usuels. Celui de $g(x)$ s'en déduira par changement de variable et en utilisant un autre développement usuel. Après un changement de variable, il faut faire attention de ne pas réintroduire des termes d'un ordre supérieur à ceux qui ont été négligés auparavant.

Recherche des équivalents et limites

24. Déterminer un équivalent, au voisinage de 0, des expressions suivantes :

a) $a^x - 1$, où $a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$;

b) $\sqrt{1-x} - 1 + \frac{x}{2}$;

c) $\sqrt{1+x-x^2} - \sqrt[3]{1-2+3x^2}$;

d) $\frac{1}{x^2}(e^x + e^{-x} - 2) - 1$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour obtenir un équivalent, il faut pousser le développement limité suffisamment loin, car on sait que les équivalents peuvent disparaître par différence. On utilise les développements limités usuels.

25. Déterminer les limites des expressions $f(x)$ suivantes :

a) $x \sin \frac{2x}{x^2 + 1}$, quand $x \rightarrow +\infty$;

b) $\frac{xe^{2x} - e^{2x} + x + 1}{x(e^{2x} - 1)}$, quand $x \rightarrow 0$;

c) $\frac{1}{x^3} \left(\exp \frac{x}{1+x} + \exp \frac{x}{1-x} - 2e^x \right)$, quand $x \rightarrow 0$;

d) $\frac{\ln \cos x}{x^2}$, quand $x \rightarrow 0$;

e) $\frac{1}{x^2} [\ln(1 + \sin x) - x]$, quand $x \rightarrow 0$.

Analyse de l'énoncé et conseils. C'est l'utilisation des développements limités usuels qui va permettre de déterminer ces limites, l'infiniment petit étant $1/x$ quand x tend vers l'infini.

26. Déterminer un équivalent des expressions $f(x)$ suivantes, quand $x \rightarrow +\infty$:

$$\text{a) } \left(1 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^m - 2^m, \text{ où } m \in \mathbb{R}; \quad \text{b) } \frac{[\ln(x+1)]^2 - [\ln x]^2}{\ln x}.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit dans la première expression d'introduire le dénominateur x sous le radical numérateur. Dans la seconde expression, on utilise une identité remarquable et ensuite on écrit $x+1 = x(1+1/x)$ pour faire apparaître l'infiniment petit $1/x$.

27. Déterminer les nombres réels a et b pour que les expressions $f(x)$ suivantes soient des infiniment petits d'ordre le plus élevé possible par rapport à l'infiniment petit x :

$$\text{a) } e^x - \frac{1+ax}{1+bx}; \quad \text{b) } \ln \frac{1+x}{1-x} - x \frac{2+ax^2}{1+bx^2}.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On écrit le développement limité du second terme de la différence et on l'identifie avec celui du premier terme, ce qui donnera deux équations à résoudre pour trouver a et b .

28. Déterminer un équivalent au voisinage de $x = 2$ de :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} - \frac{3}{2}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut d'abord faire un changement de variable permettant d'utiliser le développement limité des radicaux au voisinage de zéro. Ensuite on effectue le développement d'une fraction dont le dénominateur est écrit sous la forme $1+u$, où u est un infiniment petit.

Recherche d'asymptotes

29. Les expressions $f(x)$ suivantes définissent des fonctions f . On demande de déterminer les équations des asymptotes au graphe de f et de préciser leur position par rapport à ce graphe.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}; & \text{b) } x \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \\ \text{c) } x + \sqrt{\frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{x+1}}; & \text{d) } x^2 - 3x + 2 - \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}. \end{array}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On examine d'abord l'existence d'une asymptote verticale. Ensuite, pour x tendant vers l'infini, on cherche un développement limité des expressions qui définissent $f(x)$ par rapport à l'infiniment petit $1/x$. Si on obtient une expression de la forme $f(x) = ax + b + g(x)$, où $g(x)$ est un infiniment petit, $Y = ax + b$ est l'équation de l'asymptote et le signe de $g(x)$ donne la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.

Recherche d'extremums

30. Déterminer les extremums des fonctions f définies par les expressions $f(x)$ suivantes et préciser leur nature.

a) $x - x^2/2$; b) $(x-1)^2 (x+1)^3$; c) $2x + 3\sqrt[3]{x^2}$;

Analyse de l'énoncé et conseils. Lorsque la fonction f est dérivable, on étudie le signe de la dérivée seconde au voisinage des points où la dérivée première s'annule. Aux points x_0 où la fonction f n'est pas dérivable, il faut faire une étude locale, c'est-à-dire examiner si le signe de $f(x) - f(x_0)$ reste constant.

Convexité

31. Les expressions $f(x)$ suivantes définissent une fonction f . On demande de déterminer les parties de \mathbb{R} où elle est convexe.

a) $|x|$; b) $e^{-x^2/2}$;
c) $x^2 + |2x - 1|$; d) $(x-1)^2 \frac{e^{1/x}}{x}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Lorsque la fonction f est dérivable, l'étude du signe de $f''(x)$ permet de déterminer les intervalles où elle est convexe. Dans le cas où elle n'est pas dérivable partout, on doit vérifier l'inégalité définissant la condition de convexité sur un intervalle.

Point d'inflexion

32. Déterminer les éventuels points d'inflexion des fonctions f qui sont définies par les expressions $f(x)$ ci-après :

a) $3x^4 - 4x^3$; b) $3x^4 - x + 1$;
c) $\sqrt[3]{x+2}$; d) $\frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On étudie le signe de la dérivée seconde pour déterminer les points éventuels où f change de concavité.

Étude de fonction

33. Étudier et représenter graphiquement les fonctions f qui sont définies par les expressions $f(x)$ ci-après :

a) $3x + 1 + |x^2 - x - 2|$;

b) $x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}$;

c) $\sqrt{x^2 + 3x + 3 + 1/x}$;

d) $\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$;

e) $\left| \frac{x-1}{x+1} \right|$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On détermine au préalable le domaine de définition et les limites de la fonction aux bornes de ce domaine. On calcule ensuite la dérivée pour obtenir le sens de variation. On peut avoir à étudier la dérivabilité en certains points particuliers. On examine ensuite s'il existe des asymptotes, obliques ou non. Enfin, le graphe peut être précisé par l'étude de la convexité et la recherche de points d'inflexion éventuels.



QCM

1. **Vrai.** C'est le cas des polynômes, quand on écrit la formule de Maclaurin à un ordre supérieur à leur degré.
2. **Faux.** Si les dérivées à l'origine de deux fonctions distinctes prennent les mêmes valeurs, les développements seront identiques.
3. **Vrai.** Le développement limité se déduisant de la formule de Taylor à l'origine, il est défini de façon unique pour une fonction donnée. Ce résultat n'est pas contradictoire avec le précédent, car si à une fonction est associé un développement unique, un développement donné peut être lui associé à plusieurs fonctions distinctes.
4. **Vrai.** La partie polynomiale du développement limité d'une fonction est de même parité que celle-ci. Voir par exemple le développement des fonctions sinus et cosinus.
5. **Faux.** Si par exemple une fonction impaire n'admet pas de dérivée seconde, son développement limité à l'ordre deux existe quand même et s'écrit $f(x) = a_1x + x^2\varepsilon(x)$.
6. **Faux.** Une fonction peut admettre un extremum en un point où elle n'est pas dérivable. On trouvera des contre-exemples dans la question 12.
7. **Faux.** Considérons par exemple la fonction f définie par $f(x) = x^4$. On obtient en dérivant $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$ qui s'annule sans changer de signe pour $x = 0$. Il y a un minimum à l'origine mais pas de point d'inflexion.
8. **Vrai.** Si par exemple f est dérivable, sa dérivée est croissante et il ne peut y avoir au plus qu'une valeur pour laquelle elle s'annule. Si la fonction présentait deux minimums, il devrait y avoir un changement de concavité sur l'intervalle.
9. La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[-1, 1]$, avec de plus $f(1) = f(-1) = 1$. Cependant, sa dérivée $f'(x) = 4/5\sqrt[5]{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$ et ne s'annule en aucun autre point de l'intervalle $[-1, 1]$. Le théorème de Rolle ne s'applique pas, car cette fonction n'est pas dérivable sur tout l'ouvert $] -1, 1[$. On voit sur cet exemple qu'il faut être attentif à toutes les hypothèses qui figurent dans l'énoncé du théorème de Rolle.
10. Le développement de Taylor-Lagrange du polynôme P à l'ordre $n-1$ s'écrit :

$$P(a+h) = P(a) + hP'(a) + \dots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} P^{(n-2)}(a) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(a + \theta h)$$

Le même développement à l'ordre $n+1$ ne comportera pas de reste, car la dérivée du polynôme P de degré n , à l'ordre $n+1$, est identiquement nulle :

$$P(a+b) = P(a) + bP'(a) + \dots + \frac{b^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(a) + \frac{b^n}{n!} P^{(n)}(a)$$

Par différence, on en déduit :

$$P^{(n-1)}(a+\theta b) - P^{(n-1)}(a) = \frac{b}{n} P^{(n)}(a)$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué au polynôme $P^{(n-1)}$ sur l'intervalle $[a, a+\theta b]$, il existe un nombre θ' dans $]0,1[$ tel que :

$$P^{(n-1)}(a+\theta b) - P^{(n-1)}(a) = \theta b P^{(n)}(a+\theta\theta' b)$$

Le polynôme $P^{(n)}$ étant une constante, on conclut de ces deux égalités que :

$$\theta = \frac{1}{n}$$

11. La fonction f doit d'abord être définie pour $x=1$. L'expression de $f(x)$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand x tend vers 1. Pour étudier la limite, nous allons poser $x=1+u$, où u tend vers 0, donc $\ln x$ admet comme équivalent u . D'après les propriétés des fonctions équivalentes, on obtient donc :

$$f(x) \sim u \frac{1+u}{u(2+u)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Donc, si on pose par définition $f(1)=1/2$ qui est la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1, on aura défini une fonction f continue sur $]0, +\infty[$. Pour qu'elle soit aussi dérivable sur cet intervalle, il faut que le rapport :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

admette une limite quand x tend vers 1, la fonction f étant dérivable pour tous les autres points de son domaine de définition. L'expression de ce rapport est :

$$\frac{2x \ln x - x^2 + 1}{2(x-1)^2 (x+1)}$$

Si on se contentait de prendre un équivalent du logarithme au numérateur qui s'écrit $2(1+u) \ln(1+u) - u(2+u)$, on obtiendrait u^2 qui n'est pas l'équivalent du numérateur. Les termes du premier degré disparaissant par différence, il faut écrire le développement du logarithme à l'ordre deux, pour

introduire le terme du second degré qui avait été négligé en prenant seulement un équivalent, soit :

$$2(1+u)\ln(1+u)-u(2+u)=2(1+u)\left(u-\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u)\right)-2u-u^2$$

On constate que les termes d'ordre deux disparaissent aussi, donc il faut écrire le développement limité à l'ordre trois du logarithme :

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+u^3\varepsilon(u)$$

pour obtenir $-u^3/3$ comme équivalent du numérateur et au total :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\sim-\frac{u^3}{3\times 2u^2(2+u)}\sim-\frac{u}{12}=\frac{1-x}{12}$$

qui tend vers 0 quand x tend vers 1. La fonction f est donc dérivable en ce point avec $f'(1)=0$.

12. a) La fonction f est définie, continue et dérivable sur l'intervalle $[1,2]$, de dérivée constante $f'(x)=1$, qui ne s'annule donc en aucun point de cet intervalle. Cette fonction étant croissante, elle admet cependant un minimum pour $x=1$ et un maximum pour $x=2$. Notons bien sûr qu'elle n'admet aucun extremum sur l'intervalle ouvert $]1,2[$.

b) La fonction f est définie, continue et dérivable partout, de dérivée $f'(x)=3x^2$ qui s'annule pour $x=0$. Cependant, il n'y a pas d'extremum à l'origine puisque cette fonction est croissante sur tout \mathbb{R} .

c) On a $f(x)=|x|\geq 0=f(0)$, donc l'origine est un minimum global, bien que la dérivée ne soit pas nulle en ce point. En effet, $f'(x)=-1$ pour $x<0$ et $f'(x)=1$ pour $x>0$, donc $f'(0^-)=-1$ et $f'(0^+)=1$. Par conséquent, cette fonction admet un minimum en un point où elle n'est pas dérivable.

d) Pour tout réel positif la fonction f est décroissante, donc $f(x)<f(0)=1$, et au point $x=0$ il y a donc un maximum, qui est d'ailleurs un maximum global puisque cette fonction est nulle pour les réels négatifs. En ce point où la fonction présente un extremum, la dérivée ne s'annule pas puisque f n'y est pas dérivable, n'étant pas continue à l'origine.

13. La fonction f admet comme dérivée $f'(x)=\frac{1}{3}(x+2)^{-2/3}$ pour x différent

de -2 . Si on dérive à nouveau, on obtient $f''(x)=-\frac{2}{9}(x+2)^{-5/3}$, expression

qui est positive pour $x<-2$ et négative pour $x>-2$. Il y a donc un point d'inflexion pour $x=-2$, point où la dérivée seconde change de signe, mais sans s'annuler, puisque la fonction n'y est pas dérivable.

14. a) Cette fonction n'est pas définie pour $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$, donc le théorème de Rolle ne s'applique pas sur l'intervalle $[-2, 2]$. Cependant, si on se restreint à l'intervalle $[-1, 1]$ où la fonction est définie, continue et dérivable, le théorème s'applique puisque $f(-1) = f(1) = -1/2$. La dérivée est $f'(x) = -2x/(x^2 - 3)^2$, donc elle ne s'annule que pour $x = 0$.

b) Cette fonction est définie et continue sur l'intervalle $[0, 2]$, avec $f(0) = f(2) = 1$. Cependant, elle n'est pas dérivable pour $x = 1$, admettant une dérivée à gauche $f'(1^-) = -1$ et une dérivée à droite $f'(1^+) = 1$. Le théorème de Rolle ne s'applique pas ici.

c) Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $[0, 1]$, mais avec $f(0) = -1$ et $f(1) = 0$, donc le théorème ne s'applique pas non plus.

Vous avez compris ?

Examiner si on peut appliquer le théorème de Rolle à $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Réponse : la fonction f est définie et continue sur $[-1, 1]$ avec $f(-1) = f(1) = 0$; elle n'est pas dérivable aux extrémités de cet intervalle, mais la dérivée existe sur l'ouvert $] -1, 1[$, donc le théorème de Rolle s'applique, avec $f'(0) = 0$.

15. On obtient comme dérivée $f'(x) = 12x^2 - 40x + 17$. Les racines de $f'(x) = 0$ sont $1/2$ et $17/6$. On remarque aussi que $f(1/2) = 0$, donc on obtient une première racine $x_1 = 1/2$. La dérivée étant négative sur l'intervalle $[1/2, 17/6]$, la fonction f est décroissante, donc prend des valeurs négatives. Comme $f(x)$ tend vers plus l'infini avec x , il y a une valeur x_2 dans l'intervalle $]17/6, +\infty[$ telle que $f(x_2) = 0$. S'il existait sur cet intervalle une autre valeur x_3 telle que $f(x_3) = 0$, on pourrait appliquer le théorème de Rolle sur $[x_2, x_3]$ et il y aurait ainsi une valeur c telle que $f'(c) = 0$. Cela est impossible puisque f' est un polynôme du second degré qui n'admet que deux racines. S'il n'y a que deux racines distinctes de $f(x) = 0$ c'est parce que $x_1 = 1/2$ est racine double, ce que l'on aurait pu déduire du fait que $f(1/2) = 0$ et $f'(1/2) = 0$. On peut donc factoriser $(x - 1/2)^2$, la division de $f(x)$ donnant :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (4x - 16) = (2x - 1)^2 (x - 4)$$

l'autre racine étant donc $x = 4$.

16. La fonction f est continue sur $[-1, 1]$, de dérivée $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, non définie pour $x = 0$, donc les hypothèses du théorème des accroissements finis ne sont pas remplies. On a ici $f(-1) = f(1) = 1$ et il n'y a aucun point où $f'(x) = 0$. On voit sur la figure 3.1 qu'il y a un point de rebroussement à l'origine.

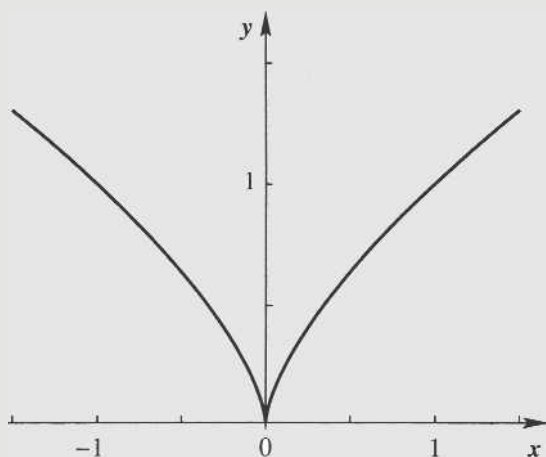


Figure 3.1

La fonction g est continue sur $[-1, 1]$, de dérivée $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, non définie pour $x = 0$, donc les hypothèses du théorème des accroissements finis ne sont pas remplies. Cependant, si on considère cette fonction successivement sur les intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$, les hypothèses vont être vérifiées, puisque g est dérivable sur les intervalles $] -1, 0[$ et $] 0, 1[$. On a $g(0) - g(-1) = 1$ et il y a bien un point c de $] -1, 0[$ où $g'(c) = 1$, soit $c^{-2/3} = 3$ ou $c = -1/3\sqrt{3}$. De même, au point B d'abscisse $1/3\sqrt{3}$ la tangente au graphe est parallèle à la corde OA (voir figure 3.2).

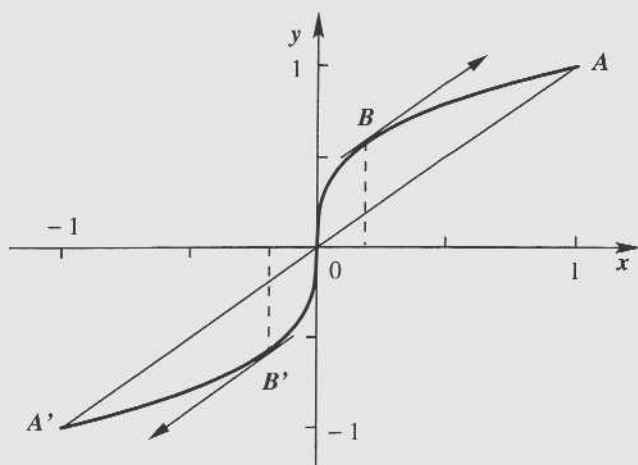


Figure 3.2

17. Le polynôme f vérifie bien entendu les hypothèses du théorème, avec $f(1) = 0$ et $f(-2) = 6$. La dérivée étant $f'(x) = 1 - 3x^2$, la valeur de c doit vérifier $-6 = 3(1 - 3c^2)$ soit $c^2 = 1$, de solution unique $c = -1$ sur l'intervalle $]-2, 1[$.

Vous avez compris ?

Appliquer le théorème des accroissements finis à $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[a, b]$ et préciser la valeur de c .

Réponse :

$$f(b) - f(a) = (b - a)(b + a), \quad f'(x) = 2x, \quad c = \frac{1}{2}(a + b)$$

18. Les hypothèses du théorème des accroissements finis sont vérifiées sur tout intervalle qui ne contient pas l'origine, avec $f'(x) = -1/x^2$, donc le point c de $]a, b[$ vérifie :

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{b - a}{c^2}$$

soit $c^2 = ab$. Dans le cas où a et b sont positifs par exemple, on obtient $c = \sqrt{ab}$. Pour $b = a + h$ et $c = a + \theta h$, on en déduit $a + \theta h = \sqrt{a(a + h)}$, soit :

$$\theta = \frac{1}{h} [\sqrt{a(a + h)} - a] = \frac{a}{\sqrt{a(a + h)} + a}$$

obtenu en multipliant par la quantité conjuguée et en simplifiant ensuite par h différent de zéro. Ceci peut encore s'écrire, en simplifiant par a non nul :

$$\theta = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + h/a}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

quand h tend vers zéro.

19. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f , successivement sur les intervalles $[x - 1, x]$ et $[x, x + 1]$:

$$f(x) - f(x - 1) = f'(x_1)$$

$$f(x + 1) - f(x) = f'(x_2)$$

où x_1 et x_2 sont respectivement des points de $]x - 1, x[$ et $]x, x + 1[$. Comme f'' est négative, la fonction f' est décroissante, donc les inégalités $x_1 < x < x_2$ impliquent les inégalités suivantes :

$$f'(x_2) = f(x + 1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x - 1) = f'(x_1)$$

Si $f(x)$ admet une limite finie ℓ , les différences $f(x+1)-f(x)$ et $f(x)-f(x-1)$ ont comme limite $\ell-\ell=0$, ce qui impose, d'après les inégalités précédentes, que $f'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

20. a) La fonction f est un polynôme indéfiniment dérivable partout, avec $f'(x)=3x^2-4x+3$, $f''(x)=6x-4$, $f^{(3)}(x)=6$ et $f^{(4)}(x)=0$. Au point $a=2$, le développement de Taylor-Lagrange s'écrit donc sans reste, avec :

$$\begin{aligned} f(2+x) &= f(2) + xf'(2) + \frac{x^2}{2} f''(2) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(2) \\ &= 11 + 7x + 4x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Dans ce développement x est voisin de 0. Bien entendu, on aurait pu obtenir directement ce résultat à partir de l'expression du polynôme en remplaçant x par $x+2$.

b) Cette fonction est indéfiniment dérivable sur $[1, x]$, pour x voisin de 1, avec :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, & f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, \\ f^{(3)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4}, & f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5} \end{aligned}$$

Le développement de Taylor-Lagrange est donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{6} f^{(3)}(1) \\ &\quad + \frac{(x-1)^4}{24} f^{(4)}[1 + \theta(x-1)] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{(2-\theta+\theta x)^5} \end{aligned}$$

avec θ dans l'intervalle $]0, 1[$. On pourrait également écrire ce développement sous une autre forme en posant $x-1=u$, avec u voisin de 0 :

$$f(1+u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}u^2 - \frac{1}{16}u^3 + \frac{u^4}{(2+\theta u)^5}$$

c) La fonction logarithme est indéfiniment dérivable au voisinage de 1, avec :

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

Le développement de Taylor-Lagrange sur $[1, x]$ s'écrit donc, avec $0 < \theta < 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{6}f^{(3)}(1) \\ &\quad + \frac{(x-1)^4}{24}f^{(4)}[1 + \theta(x-1)] \\ &= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{(x-1)^4}{4(1-\theta+\theta x)^4} \end{aligned}$$

d) On peut remarquer que f peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2+u} \\ &= \frac{2}{2+2u} - \frac{1}{2+u} \end{aligned}$$

où $u = x - 1$. Nous allons donc pouvoir utiliser le résultat de la question b) où nous avons écrit le développement de Taylor de :

$$f_2(1+u) = \frac{1}{2+u}$$

La partie régulière polynomiale de ce développement était :

$$P(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}u^2 - \frac{1}{16}u^3$$

Celle de f est donc :

$$\begin{aligned} 2P(2u) - P(u) &= 1 - u + u^2 - u^3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}u^2 - \frac{1}{16}u^3 \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}u + \frac{7}{8}u^2 - \frac{15}{16}u^3 \end{aligned}$$

Pour exprimer le reste, on écrit la dérivée d'ordre quatre en utilisant encore le résultat de la question b) :

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} - \frac{24}{(1+x)^5}$$

On calcule sa valeur au point $1 + \theta(x-1)$, avec $0 < \theta < 1$, pour obtenir enfin :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{7}{8}(x-1)^2 - \frac{15}{16}(x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{24}f^{(4)}[1 + \theta(x-1)]$$

21. On calcule les dérivées successives de la fonction f , définies pour $x < 1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4(1-x)^{3/2}}$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{3}{8(1-x)^{5/2}}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16(1-x)^{7/2}}$$

dont les valeurs pour $x = 0$ sont :

$$f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}, \quad f^{(3)}(0) = -\frac{3}{8}, \quad f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$$

Cela permet d'écrire le développement de Maclaurin au voisinage de zéro :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{3x^3}{48} - \frac{15x^4}{384} + x^4 \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers zéro avec x .

Vous avez compris ?

Écrire le développement de Maclaurin, à l'ordre quatre, au voisinage de zéro, de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Réponse :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4 \varepsilon(x)$$

22. a) On effectue le changement $x = a + u$, pour pouvoir utiliser le développement de $\ln(1+t)$ au voisinage de 0. L'expression de $f(x)$ devient ainsi :

$$\ln x = \ln(a + u) = \ln \left[a \left(1 + \frac{u}{a} \right) \right] = \ln a + \ln \left(1 + \frac{u}{a} \right)$$

Pour x voisin de a , on a u , donc u/a , qui est voisin de 0, et par conséquent :

$$\ln \left(1 + \frac{u}{a} \right) = \frac{u}{a} - \frac{u^2}{2a^2} + \frac{u^3}{3a^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{u^n}{na^n} + u^n \varepsilon(u)$$

Soit, en fonction de x , au voisinage de a :

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{na^n} + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

où ε désignera dans toutes les questions une fonction de limite nulle à l'origine.

b) Pour utiliser le développement de $(1+t)^\alpha$ au voisinage de 0, on pose $x = 1 + u$:

$$(1+x)^\alpha = (2+u)^\alpha = 2^\alpha \left(1 + \frac{u}{2}\right)^\alpha$$

avec :

$$\left(1 + \frac{u}{2}\right)^\alpha = 1 + \alpha \frac{u}{2} + \alpha(\alpha-1) \frac{u^2}{8} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \frac{u^n}{2^n} + u^n \varepsilon(u)$$

Soit, avec x au voisinage de 1 :

$$(1+x)^\alpha = 2^\alpha \left[1 + \frac{\alpha}{2}(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{8}(x-1)^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{2^n n!}(x-1)^n + (x-1)^n \varepsilon(x-1) \right]$$

c) L'expression à développer peut s'écrire :

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/2}$$

On peut donc utiliser le développement de $(1+t)^\alpha$ au voisinage de 0, en remplaçant t par $-1/x^2$, qui est voisin de 0, et α par $1/2$. Ainsi :

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \dots - \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \times \frac{1}{x^{2n}} + \frac{\varepsilon(1/x^2)}{x^{2n}}$$

d) On pose $x = a + u$, avec u voisin de 0, ce qui permet d'écrire $e^{x/a} = e^{u/a}$ et de déduire le résultat du développement de e^t au voisinage de 0, en remplaçant t par u/a :

$$e^{x/a} = e \left[1 + \frac{x-a}{a} + \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \dots + \frac{(x-a)^n}{n! a^n} + (x-a)^n \varepsilon(x-a) \right]$$

e) Nous allons effectuer le produit des deux développements usuels :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon_1(x) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

Pour obtenir le terme en x^k du produit, avec $1 \leq k \leq n$, il faut multiplier un terme en x^i dans le premier développement par un terme en x^{k-i} dans le second et faire varier i de 1 à k . Le coefficient de x^k dans le produit est donc la

somme des produits des coefficients respectifs de x^i et x^{k-i} dans chacun de ces développements, soit :

$$\sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} \times (-1)^{k-i} = (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) x^k + x^n \varepsilon(x)$$

Vous avez compris ?

Écrire les développements limités des expressions suivantes, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+e^x) \quad \text{à l'ordre 2, } \ln \cos x \quad \text{à l'ordre 4,}$$

$$\sqrt[3]{1+\sin x} \quad \text{à l'ordre 3, } \ln(1+\sin x) \quad \text{à l'ordre 3.}$$

Réponses :

$$\ln(1+e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x)$$

$$\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\sqrt[3]{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{162} + x^3 \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

23. On utilise le développement limité de $(1+x)^\alpha$, pour $\alpha = 1/2$, et ensuite on remplace x par $-x$. Par addition des deux développements ainsi obtenus, les termes de degré impair vont disparaître, puisque la fonction f est paire :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + x^4 \varepsilon_1(x)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + x^4 \varepsilon_2(x)$$

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + x^4 \varepsilon(x)$$

On peut alors écrire :

$$\ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = \ln 2 + \ln(1+u)$$

en ayant posé $u = -\frac{x^2}{8} - \frac{5x^4}{128} + x^4 \varepsilon(x)$. On utilise alors le développement de $\ln(1+u)$, à l'ordre deux seulement, puisque u est un infiniment petit d'ordre deux par rapport à x . Dans le terme u^2 on ne doit retenir que le terme en x^4 , puisque les termes d'ordre supérieur ont déjà été négligés. Ainsi :

$$\ln(1+u) = -\frac{x^2}{8} - \frac{5x^2}{128} - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{8} \right)^2 + x^4 \varepsilon_3(x)$$

d'où le développement à l'ordre quatre :

$$\ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = \ln 2 - \frac{x^2}{8} - \frac{3x^4}{64} + x^4 \varepsilon_4(x)$$

Toutes les fonctions $\varepsilon_i, 1 \leq i \leq 4$, sont de limite nulle à l'origine.

24. a) On utilise le développement limité à l'ordre 1 de e^u en écrivant :

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + x \varepsilon(x)$$

Par conséquent, $a^x - 1 \sim x \ln a$ au voisinage de 0.

b) Pour obtenir un équivalent, on doit écrire le développement à l'ordre deux de $\sqrt{1-x}$:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x)$$

et ainsi $\sqrt{1-x} - 1 + x/2 \sim -x^2/8$.

c) Il suffit d'écrire le développement à l'ordre un des deux radicaux :

$$\sqrt{1+x-x^2} = 1 + \frac{x}{2} + x \varepsilon_1(x)$$

$$\sqrt[3]{1-2x+3x^2} = 1 - \frac{2x}{3} + x \varepsilon_2(x)$$

pour obtenir $\sqrt{1+x-x^2} - \sqrt[3]{1-2x+3x^2} \sim 7x/6$.

d) Le développement de $e^x + e^{-x}$ ne comporte que des termes pairs et il faudra donc utiliser ici des développements jusqu'à l'ordre quatre pour obtenir

un équivalent :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_2(x)$$

$$e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon_3(x)$$

et ainsi :

$$\frac{1}{x^2} (e^x + e^{-x} - 2) - 1 \sim \frac{x^2}{12}$$

25. a) Au voisinage de l'infini, $x^2 + 1$ est équivalent à x^2 et l'argument du sinus est équivalent à $2x/x^2$ qui est un infiniment petit, donc le sinus est équivalent aussi à $2/x$. On en conclut donc que la limite demandée vaut 2.

b) Le dénominateur est équivalent à $2x^2$ puisque $e^{2x} - 1$ est équivalent à $2x$. Il nous faut également trouver un équivalent du numérateur en utilisant le développement :

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

D'où :

$$\begin{aligned} (x-1)e^{2x} + x + 1 &= x - 1 + 2x(x-1) + 2x^2(x-1) - \frac{4x^3}{3} + x + 1 + x^3 \varepsilon(x) \\ &= \frac{2x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

obtenu en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à trois. Le numérateur est donc équivalent à $2x^3/3$ et le rapport à $x/3$, dont la limite est nulle.

c) On doit d'abord écrire les développements des arguments des exponentielles qui tendent vers zéro :

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^3 \varepsilon_2(x)$$

Ensuite, on utilise le développement de l'exponentielle :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon_3(u)$$

En remplaçant successivement u par $x - x^2 + x^3$, puis par $x + x^2 + x^3$, et en ne conservant que les termes d'ordre inférieur ou égal à trois :

$$\exp \frac{x}{1+x} = 1 + x - x^2 + x^3 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3) + \frac{1}{6}x^3 + x^3 \varepsilon_4(x)$$

$$\exp \frac{x}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3) + \frac{1}{6}x^3 + x^3 \varepsilon_4(x)$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} \exp \frac{x}{1+x} + \exp \frac{x}{1-x} - 2e^x &= 2 + 2x + x^2 + \frac{7}{3}x^3 - 2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \\ &\quad + x^3 \varepsilon(x) = 2x^3 + x^3 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

L'expression étudiée est donc équivalente à 2, qui est sa limite.

d) On écrit le développement à l'ordre deux du cosinus :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

Puis on utilise celui du logarithme :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon_2(u)$$

où $u = \cos x - 1$ est équivalent à $-x^2/2$ et donc $\ln \cos x$ aussi. La limite de $f(x)$ est donc égale à $-1/2$.

e) On utilise le développement à l'ordre deux du sinus :

$$\sin x = x + x^2 \varepsilon_1(x)$$

et on remplace dans le développement à l'ordre deux de $\ln(1+u)$:

$$\ln(1 + \sin x) - x = -\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

La limite de $f(x)$ est donc égale à $-1/2$.

— Vous avez compris ? —

Déterminer les limites des expressions suivantes quand x tend vers 0 :

$$\frac{1}{x} [\ln(1+e^x) - \ln 2]; \quad \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x};$$

$$\frac{1}{x^2} \ln(1+x) - \frac{1}{x}; \quad \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} - 1 \right)$$

Réponses : $\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$.

26. a) On écrit :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

qui peut se développer à l'ordre un par rapport à l'infiniment petit $1/x^2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{\varepsilon_1(1/x)}{x^2} \right]^m - 2^m \\ &= 2^m \left[\left(1 + \frac{1}{4x^2} + \frac{\varepsilon_1(1/x)}{2x^2} \right)^m - 1 \right] \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)$ est équivalent à $m2^m/4x^2 = m2^{m-2}x^{-2}$.

b) On factorise le numérateur :

$$[\ln(x+1)]^2 - [\ln x]^2 = [\ln(x+1) - \ln x][\ln(x+1) + \ln x]$$

Ensuite, on écrit :

$$\ln(x+1) = \ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

pour faire apparaître l'infiniment petit $1/x$ et obtenir :

$$f(x) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left[2 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{\ln x} \sim 2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \sim \frac{2}{x}$$

27. a) On utilise le développement à l'ordre trois :

$$\frac{1}{1+bx} = 1 - bx + b^2 x^2 - b^3 x^3 + x^3 \varepsilon_1(x)$$

On le multiplie par $1 + ax$, en ne conservant que les termes d'ordre inférieur à trois, pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{1+ax}{1+bx} &= 1 - bx + b^2x^2 - b^3x^3 + ax - abx^2 + ab^2x^3 + x^3\epsilon_2(x) \\ &= 1 + (a-b)x + b(b-a)x^2 + b^2(a-b)x^3 + x^3\epsilon_2(x)\end{aligned}$$

Pour que $f(x)$ soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible, il faut que les premiers termes de ce développement soient identiques à ceux de e^x . Cela impose $a-b=1$ et $b(b-a)=1/2$, soit $b=-1/2$ et $a=1/2$. On obtient alors :

$$f(x) = e^x - \frac{2+x}{2-x} \sim -\frac{x^3}{12}$$

b) Le développement de $f(x)$ ne comportera que des termes impairs puisque cette fonction est impaire. Comme les deux termes de la différence sont équivalents à $2x$, ils vont disparaître. Pour déterminer a et b , il faut identifier les deux termes suivants qui sont d'ordres respectifs trois et cinq, et donc pousser les développements jusqu'à l'ordre sept. Pour obtenir le développement de $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, on multiplie par deux les termes d'ordre impair du développement de $\ln(1+x)$:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + x^7 \epsilon_3(x) \right]$$

On écrit ensuite le développement à l'ordre trois, par rapport à l'infiniment petit x^2 :

$$\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + x^7\epsilon_4(x)$$

On le multiplie par $2x + ax^3$:

$$\begin{aligned}x \frac{2+ax^2}{1+bx^2} &= 2x - 2bx^3 + 2b^2x^5 - 2b^3x^7 + ax^3 - abx^5 + ab^2x^7 + x^7\epsilon_5(x) \\ &= 2x + (a-2b)x^3 + b(2b-a)x^5 + b^2(a-2b)x^7 + x^7\epsilon_5(x)\end{aligned}$$

L'identification des premiers termes de ces développements conduit aux équations $a-2b=2/3$ et $b(2b-a)=2/5$, de solution $a=-8/15$ et $b=-3/5$. On obtient donc :

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{2x(15-4x^2)}{3(5-3x^2)} \sim \frac{8x^7}{175}$$

28. On effectue le changement $x = 2 + u$, où u sera un infiniment petit, et on écrit les développements limités à l'ordre deux des radicaux :

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{4+u} = 2 \left(1 + \frac{u}{4} \right)^{1/2} = 2 \left[1 + \frac{u}{8} - \frac{u^2}{128} + u^2 \varepsilon_1(u) \right]$$

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{9+u} = 3 \left(1 + \frac{u}{9} \right)^{1/2} = 3 \left[1 + \frac{u}{18} - \frac{u^2}{648} + u^2 \varepsilon_2(u) \right]$$

Les termes constants au numérateur et au dénominateur disparaissent et la fraction se simplifie par u . C'est pourquoi il était nécessaire d'effectuer les développements jusqu'à l'ordre deux. Après simplification de la fraction par $u/12$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2} \times \frac{1 - u/16 + u \varepsilon_3(u)}{1 - u/36 + u \varepsilon_4(u)} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{u}{16} \right) \left(1 + \frac{u}{36} + u \varepsilon_5(u) \right) - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{5}{96} u + u \varepsilon(u) \end{aligned}$$

donc $f(x)$ est équivalent à $5(2-x)/96$.

29. a) Cette fonction est définie pour $|x| > 1$, avec $f(x)$ qui tend vers plus l'infini quand $|x|$ tend vers 1. Il y a donc deux asymptotes verticales, le graphe de f étant à gauche de l'asymptote $X = -1$ et à droite de $X = 1$. La fonction étant paire, le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Pour x tendant vers plus l'infini, le terme sous radical est équivalent à x^2 et donc $f(x)$ est équivalent à x . Il y a une direction asymptotique qui est celle de la première bissectrice. On écrit :

$$f(x) = \frac{x^2}{|x| \sqrt{1 - 1/x^2}} = x \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-1/2} = x \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2} \right)$$

et le développement du radical permet d'obtenir $1/2x$ comme équivalent de $f(x) - x$ quand x tend vers plus l'infini. Ainsi, la droite $\Upsilon = x$ est une asymptote oblique située au-dessous du graphe de f , puisque $f(x) - x$ est positif. Par symétrie, la droite $\Upsilon = -x$ est aussi asymptote oblique située au-dessous du graphe de f .

b) La fonction f est définie sur tout \mathbb{R} et paire, donc on étudie son comportement seulement pour x tendant vers plus l'infini. Dans ce cas, $f(x)$ est

équivalent à x puisque e^{-x} tend vers 0. On étudie alors :

$$f(x) - x = x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} - 1 \right) = -2x \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

qui tend vers 0 par valeurs négatives. Donc, $\Upsilon = x$ et, par symétrie, $\Upsilon = -x$, sont des asymptotes situées au-dessus du graphe de f .

c) Lorsque x tend vers -1 par valeurs inférieures, $f(x)$ tend vers plus l'infini, donc $X = -1$ est une asymptote verticale située à droite du graphe de f . Pour obtenir un développement du radical au voisinage de l'infini, on effectue la division euclidienne du polynôme numérateur par le dénominateur :

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{x + 1} = x^2 - 4x + 2 - \frac{1}{x + 1}$$

On factorise ensuite x^2 pour faire apparaître l'infiniment petit $1/x$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{x + 1}} &= |x| \left[1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2(x + 1)} \right]^{1/2} \\ &= |x| \left[1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{(-4/x)^2}{2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2} \right] \end{aligned}$$

Donc, pour x tendant vers plus l'infini :

$$f(x) = 2x - 2 - \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x}$$

Cela établit que $\Upsilon = 2x - 2$ est une asymptote oblique située au-dessus du graphe, puisque $f(x) - \Upsilon$ tend vers 0 par valeurs négatives.

Pour x tendant vers moins l'infini :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon(1/x)}{x}$$

Donc, asymptote horizontale $\Upsilon = 2$, située au-dessus du graphe de f puisque $f(x) - 2$ est équivalent à $1/x$, qui tend vers 0 par valeurs négatives.

d) La fonction f est définie pour $|x| > 1$, avec $f(x)$ qui tend vers plus l'infini quand $|x|$ tend vers 1. Il y a donc deux asymptotes verticales, le graphe de f étant à gauche de l'asymptote $X = -1$ et à droite de $X = 1$. La fraction est équivalente à $x^3/|x|$ quand x tend vers l'infini, donc $f(x)$ est équivalent à $2x^2$ quand x tend vers moins l'infini, ce qui correspond à une branche parabolique. Pour x tendant vers plus l'infini, les termes en x^2 disparaissent,

donc il faut écrire un développement limité du radical en factorisant x^2 pour faire apparaître l'infiniment petit $1/x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + 2 - \frac{x^3}{x\sqrt{1-1/x^2}} \\ &= x^2 - 3x + 2 - x^2 \left[1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^4} \right] \\ &= -3x + \frac{3}{2} - \frac{3}{8x^2} - \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2} \end{aligned}$$

On voit ainsi que $\Upsilon = -3x + 3/2$ est une asymptote située au-dessus du graphe de f .

Vous avez compris ?

On demande de déterminer les équations des asymptotes au graphe des fonctions définies par les expressions suivantes et de préciser leur position par rapport à ce graphe.

$$f(x) = \frac{x+2}{x} \sqrt{x^2-1} \quad g(x) = (x-2) \exp\left(\frac{1}{x-3}\right)$$

Réponses : la fonction f est définie pour $|x| > 1$, avec $f(x) - (x+2)$ équivalent à $-1/2x$ pour $x \rightarrow +\infty$, donc courbe au-dessous de l'asymptote $\Upsilon = x+2$ et $f(x) - (-x-2)$ équivalent à $1/2x$ pour $x \rightarrow -\infty$, donc courbe au-dessous de l'asymptote $\Upsilon = -x-2$; asymptote verticale $X = 3$ à gauche du graphe de g et $g(x) - (x-1)$ équivalent à $3/2x$, donc asymptote $\Upsilon = x-1$ au-dessus du graphe pour $x \rightarrow -\infty$ et au-dessous pour $x \rightarrow +\infty$.

30. a) La fonction f est dérivable partout, avec $f'(x) = 1 - x$ qui s'annule pour $x = 1$ et $f''(x) = -1$ négatif, donc maximum au point $(1, 1/2)$.

b) La fonction f est dérivable partout, avec $f'(x) = (x-1)(x+1)^2(5x-1)$ qui s'annule pour $x = 1$, $x = -1$ et $x = 1/5$. La dérivée seconde est $f''(x) = 4(x+1)(5x^2 - 2x - 1)$, positive pour $x = 1$ et négative pour $x = 1/5$. Donc, minimum au point $(1, 0)$ et maximum au point $(1/5, 3 \ 456/3 \ 125)$. Pour $x = -1$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe, donc il y a un point d'inflexion en $(-1, 0)$. Ce point n'est pas un extremum puisque $f(x) - f(-1) = f(x)$ est du signe de $x+1$ dans son voisinage et donc ne garde pas un signe constant (voir figure 3.3).

c) On obtient par dérivation $f'(x) = 2 + 2/\sqrt[3]{x}$ qui n'est pas définie pour $x = 0$ et s'annule pour $\sqrt[3]{x} = -1$, c'est-à-dire pour $x = -1$. La dérivée seconde est définie, pour $x \neq 0$, par $f''(x) = -2/3x\sqrt[3]{x}$ et par conséquent il y a un maximum au point $(-1, 1)$. Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalent à son terme de plus bas degré, soit $3x^{2/3}$ qui est positif. Il y a donc un minimum à l'origine, puisqu'au voisinage de ce point on a $f(x) > f(0) = 0$. La dérivée

première tend vers moins l'infini (resp. plus l'infini) quand x tend vers 0 par valeurs inférieures (resp. supérieures), ce qui correspond à un point de rebroussement (voir figure 3.4).

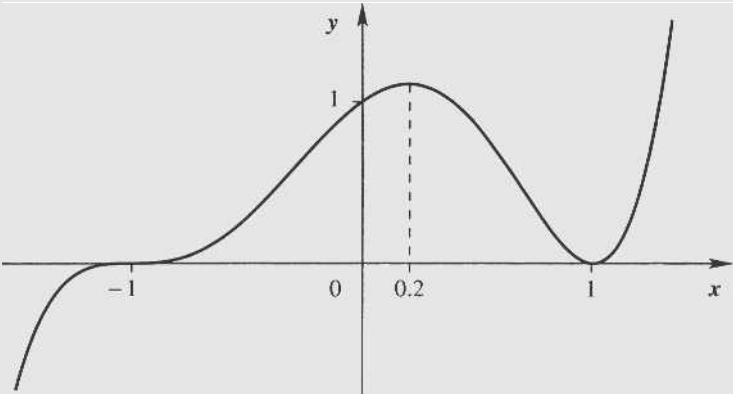


Figure 3.3

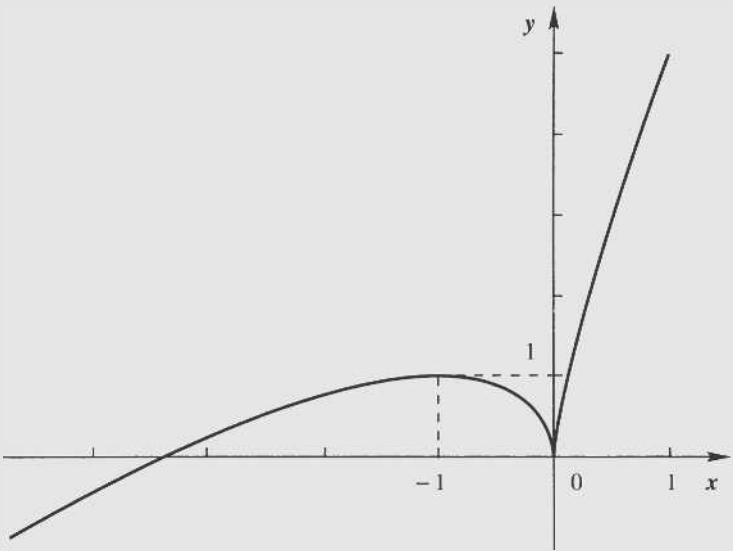


Figure 3.4

Vous avez compris ?

Déterminer les extremums des fonctions définies par les expressions ci-après et déterminer leur nature :

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1 \quad g(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$$

Réponses : minimums aux points $(-1, 1/2)$ et $(1, 1/2)$, maximum au point $(0, 1)$ pour f ; minimum pour $x = 2/5$ et maximum à l'origine où g n'est pas dérivable, mais avec $g(x) < g(0) = 0$ puisque $g(x)$ est équivalent à $-\sqrt[3]{x^2}$ au voisinage de 0.

31. a) La fonction f n'est pas dérivable pour $x = 0$. Nous allons donc essayer d'établir l'inégalité qui définit la convexité, à partir de deux réels quelconques x et y et d'un nombre t de l'intervalle $[0, 1]$. On obtient ici :

$$f[(1-t)x + ty] = |(1-t)x + ty| \leq |(1-t)x| + |ty|$$

Le majorant s'écrit :

$$(1-t)|x| + t|y| = (1-t)f(x) + tf(y)$$

Par conséquent cette fonction est convexe sur tout \mathbb{R} .

b) La fonction f est définie et dérivable partout, avec $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$ et $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$, qui est positive pour $|x| > 1$. Elle est donc convexe sur les intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$.

c) La fonction f peut s'écrire comme somme des fonctions g et h , avec $g(x) = x^2$ et $h(x) = 2|x - 1/2|$. La fonction g est convexe partout puisque $g''(x) = 2$. D'après la première question, h est aussi convexe partout puisqu'il suffit de faire un changement d'origine en remplaçant x par $x - 1/2$. Ainsi, f est convexe comme somme de deux fonctions convexes.

d) On peut calculer la dérivée logarithmique de cette fonction, qui n'est pas définie pour $x = 0$:

$$\ln f(x) = 2 \ln |x-1| - \ln |x| + \frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Soit, en dérivant à nouveau :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[-\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right] f(x) + \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) f'(x) \\ &= [(x+2)(x-1)^2 - 2x^3] \frac{e^{1/x}}{x^4} + [2x^2 - (x-1)(x+1)]^2 \frac{e^{1/x}}{x^5} \\ &= (1+2x-x^2) \frac{e^{1/x}}{x^5} \end{aligned}$$

La dérivée seconde est du signe de $x(1+2x-x^2)$, donc f est convexe sur chacun des intervalles $]-\infty, 1-\sqrt{2}]$ et $]0, 1+\sqrt{2}]$.

Vous avez compris ?

Déterminer les intervalles de \mathbb{R} où les fonctions définies par les expressions suivantes sont convexes :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 12}$$

Réponses :

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}, f \text{ convexe sur } [e\sqrt{e}, +\infty[;$$

$$g''(x) = 24x \frac{36 - x^2}{(12 + x^2)^3}, g \text{ convexe sur }]-\infty, -6] \text{ et } [0, 6].$$

32. a) La fonction f est définie et dérivable partout sur \mathbb{R} , avec $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$ et $f''(x) = 12x(3x - 2)$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = 0$ et $x = 2/3$, qui correspondent donc à des points d'inflexion où le graphe traverse la tangente.

b) La fonction f est définie et dérivable partout sur \mathbb{R} , avec $f'(x) = 12x^3 - 1$ et $f''(x) = 36x^2$. La dérivée seconde est toujours positive, donc la fonction est convexe. Pour $x = 0$ cette dérivée s'annule sans changer de signe.

c) On obtient $f'(x) = (x+2)^{-2/3}/3$, qui n'est pas définie pour $x = -2$, et $f''(x) = -2(x+2)^{-5/3}/9$. Cette dérivée est positive pour $x < -2$ et négative pour $x > -2$, donc la fonction est convexe puis concave, avec un point d'inflexion pour $x = -2$ où il y a une tangente verticale.

d) Cette fonction est dérivable pour $|x| \neq \sqrt{3}$, avec :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 6)}{(x^2 - 3)^2}$$

On calcule la dérivée logarithmique :

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2x}{x^2 - 6} - \frac{4x}{x^2 - 3} = 2xg(x)$$

Au voisinage du point $x = 0$, la dérivée première est positive et la fonction g négative, donc $f''(x)$ est du signe de $-x$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe au point $(0, 1)$ qui est un point d'inflexion, avec une tangente de pente $f'(0) = 2/3$.

— Vous avez compris ? —

Déterminer les éventuels points d'inflexion de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Réponse : $f''(x) = 2 \frac{3x^2 - 1}{(x^2 + 1)^3}$ s'annule en changeant de signe pour $x = -1/\sqrt{3}$

et $x = 1/\sqrt{3}$ où il y a des points d'inflexion.

33. a) Pour retirer la valeur absolue, il faut tenir compte du signe de $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. En dehors de l'intervalle $[-1, 2]$, on obtient $f(x) = x^2 + 2x - 2$, de dérivées $f'(x) = 2x + 2$ et $f''(x) = 2$, donc la fonction est convexe. Dans l'intervalle $[-1, 2]$, on a $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ avec $f'(x) = -2x + 4$ et $f''(x) = -2$, donc la fonction est concave. Elle est définie partout, mais n'est pas dérivable pour $x = -1$ et $x = 2$, admettant des dérivées à gauche et à droite distinctes. Au voisinage de l'infini, $f(x)$ est équivalente à x^2 , donc il y a une branche parabolique. Le graphe de f est d'ailleurs constitué de trois tronçons de deux paraboles. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	$0 \parallel 6$	$+$	$0 \parallel 6$	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	\searrow	-3	\nearrow	6	\nearrow	$+\infty$

On constate d'après ce tableau que f admet un minimum global au point $(-1, -3)$ (voir figure 3.5).

b) La fonction f est définie pour x différent de 1, avec comme dérivée :

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^3}$$

qui est du signe de $(x-1)(x-3)$. Quand x tend vers 1, $f(x)$ tend vers plus l'infini, donc la verticale $X = 1$ est asymptote. D'après l'expression de $f(x)$, on voit que :

$$f(x) - (x+1) = \frac{4}{(x-1)^2}$$

tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers l'infini, donc la droite $Y = x+1$ est une asymptote située au-dessous du graphe de f . Le tableau de variation suivant permet ensuite de tracer le graphe (voir figure 3.6).

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$+\infty +\infty$	\searrow	5	\nearrow	$+\infty$

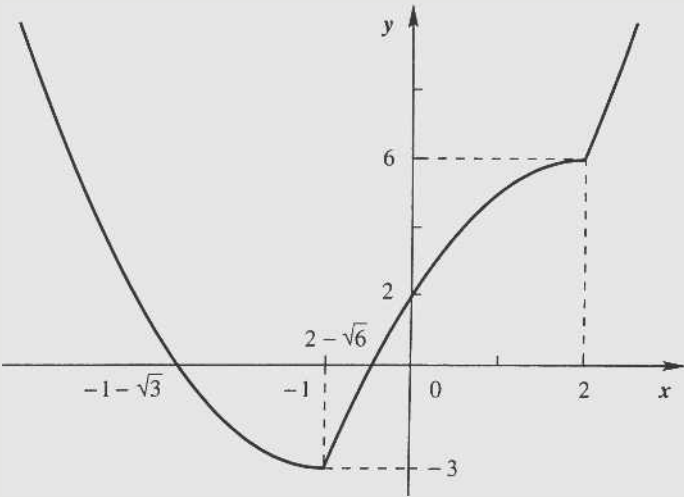


Figure 3.5

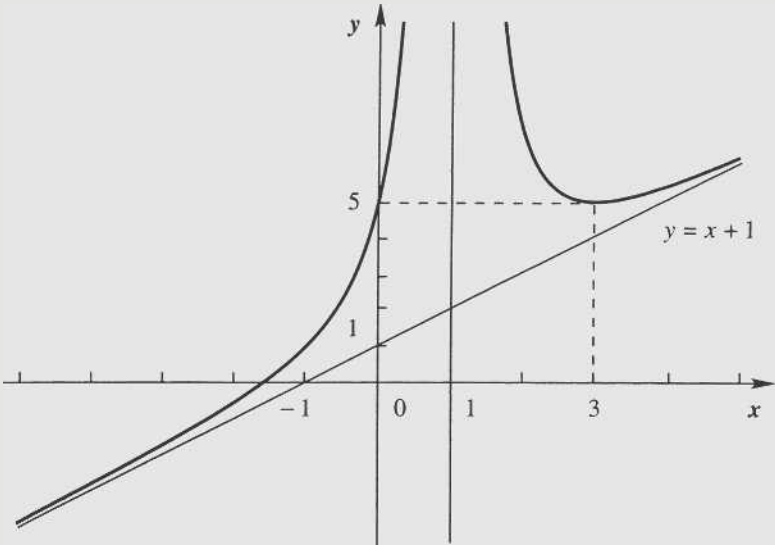


Figure 3.6

c) On peut écrire $f(x) = \sqrt{u}$ en ayant posé $u = (x+1)^3/x$. La fonction f est donc définie sur les intervalles $]-\infty, -1]$ et $]0, +\infty[$, avec comme dérivée :

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \left(x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{x+1}{x^3}}$$

Pour x tendant vers 0 par valeurs supérieures, $f(x)$ tend vers $+\infty$, donc l'axe des ordonnées est asymptote. Au voisinage de l'infini, on effectue un développement limité en mettant x^2 en facteur sous le radical :

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^{1/2} \\ &= |x| \left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{9}{8x^2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - (x + 3/2)$ est équivalent à $3/8x$, donc la droite $\Upsilon = x + 3/2$ est asymptote oblique située au-dessous du graphe de f . Pour $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - (-x - 3/2)$ est équivalent à $-3/8x$, donc la droite $\Upsilon = -x - 3/2$ est asymptote oblique située au-dessous du graphe de f . Le graphe présente un minimum au point $(1/2, 3\sqrt{3}/2)$. Le tableau de variation permet ensuite de tracer le graphe (voir figure 3.7). Au point $(-1, 0)$ la tangente est l'axe des abscisses.

x	$-\infty$	-1		0		$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0			-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0		$+\infty$ ↘		$3\sqrt{3}/2$	↗ $+\infty$

d) La fonction f est définie partout sur \mathbb{R} et admet comme dérivée :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x-1)^4 (x+2)^2}} = \frac{x+1}{(x-1)^{1/3} (x+2)^{2/3}}$$

pour x différent de 1 et -2. Cette dérivée est du signe de $(x-1)(x+1)$. Au voisinage de l'infini on peut obtenir un développement limité de $f(x)$ en mettant x^3 en facteur sous le radical :

$$f(x) = x \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)^{1/3} = x \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^2}\right)$$

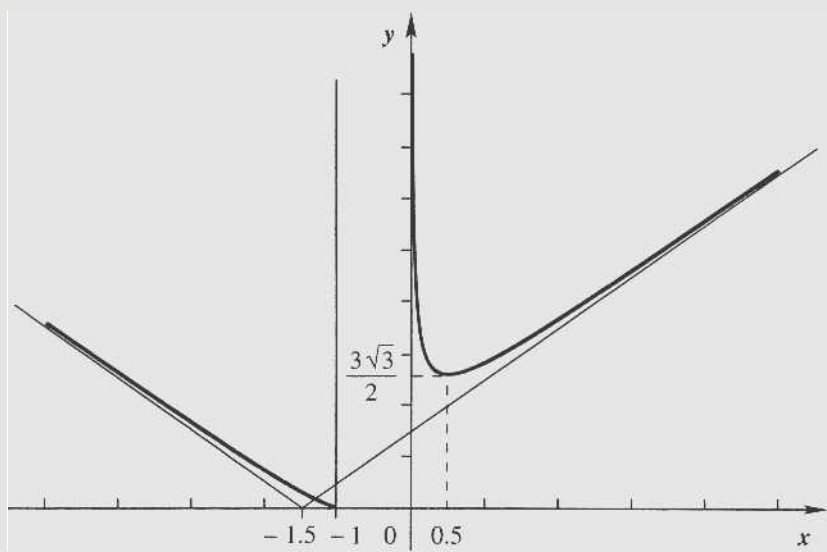


Figure 3.7

Donc $f(x)-x$ est équivalent à $-1/x$. La droite $Y=x$ est une asymptote située au-dessous du graphe pour x tendant vers $-\infty$ et au-dessus pour x tendant vers $+\infty$. Calculons la dérivée seconde :

$$f''(x)=-\frac{2(x-1)^2}{\left(x^3-3x+2\right)^{5/3}}=-\frac{2}{(x-1)^{4/3}(x+2)^{5/3}}$$

Elle est du signe opposé à $x+2$, donc la fonction est convexe pour x inférieur à -2 et concave au-delà. La dérivée n'est pas définie au point $x=-2$, mais le graphe présente un point d'inflexion avec tangente verticale puisque $f'(x)\rightarrow+\infty$ quand x tend vers -2 . Quand x tend vers 1 , $f'(x)$ tend vers l'infini avec le signe de $x-1$; il y a un point de rebroussement en $(1,0)$, la dérivée seconde étant négative au voisinage de ce point. Le tableau de variation ci-dessous montre qu'il y a un maximum local en $\left(-1,\sqrt[3]{4}\right)$. La figure 3.8 représente le graphe de cette fonction.

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$				
$f'(x)$	$+$	$+\infty\parallel+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty\parallel+\infty$	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$\sqrt[3]{4}$	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$

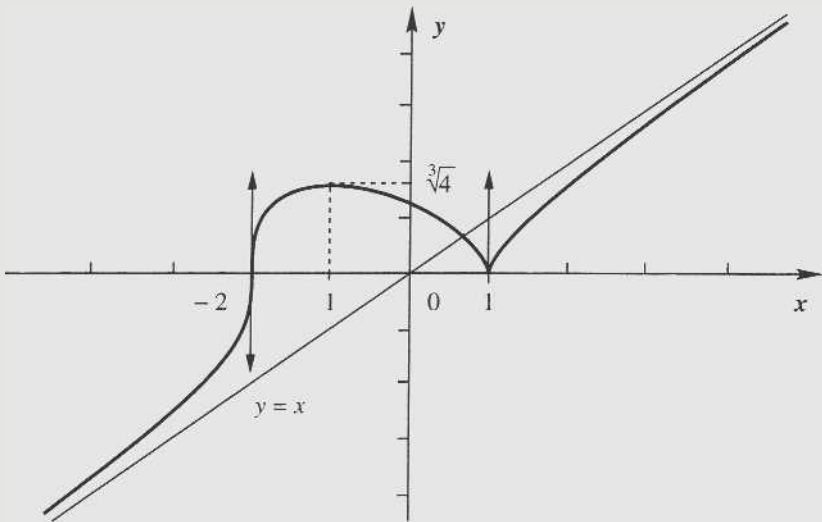


Figure 3.8

e) Cette fonction est définie pour x différent de -1 et sa dérivée se calcule en examinant le signe de $(x-1)(x+1)$. Si on introduit ε qui vaut 1 pour $|x| > 1$ et -1 sinon, on peut écrire :

$$f(x) = \varepsilon \frac{x-1}{x+1} = \varepsilon \left(1 - \frac{2}{x+1} \right)$$

On peut alors dériver :

$$f'(x) = \frac{2\varepsilon}{(x+1)^2}$$

On a donc $f'(1^-) = -1/2$ et $f'(1^+) = 1/2$, donc f est continue mais non dérivable au point $(1,0)$. Quand x tend vers -1 , $f(x)$ tend vers $+\infty$, donc la verticale $X = -1$ est asymptote. Quand $x \rightarrow +\infty$, $f(x)$ tend vers 1 , donc l'horizontale $Y = 1$ est aussi asymptote. Le tableau de variation est donné ci-dessous et le graphe dans la figure 3.9.

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	+		-	$-1/2$ $1/2$	+	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

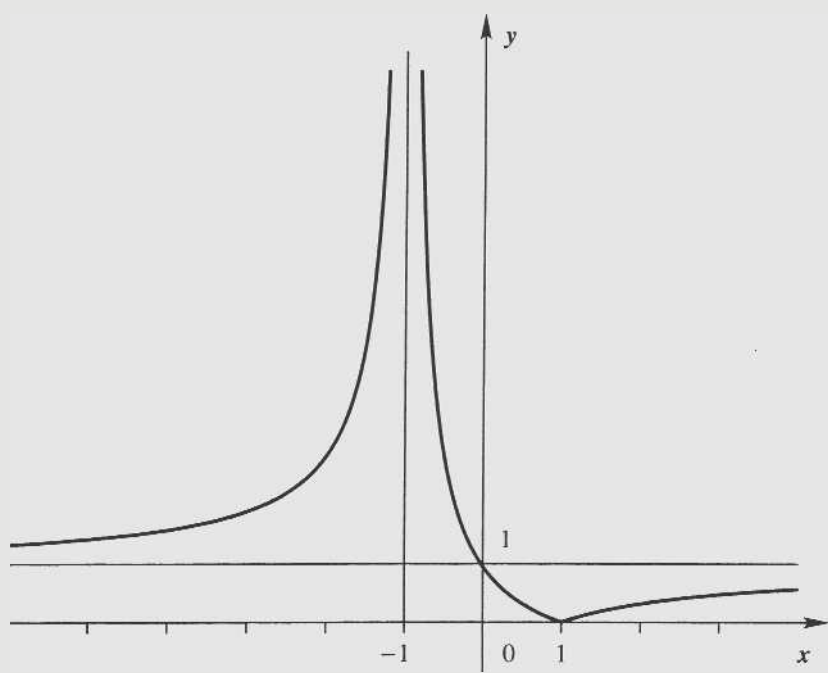


Figure 3.9

TD 4 Fonctions puissance, logarithme et exponentielle



Les progressions arithmétique et géométrique sont des suites numériques fondamentales qui peuvent être définies à partir de deux termes consécutifs, dont respectivement la différence ou le rapport est constant, appelé raison de cette progression. Il est essentiel de connaître l'expression de la somme des n premiers termes de ces suites.

La fonction logarithme népérien, ou de base e , est définie comme primitive de $1/x$ qui s'annule pour $x = 1$, la fonction exponentielle étant sa réciproque. On définit ensuite les fonctions logarithme et exponentielle de base quelconque, réciproques l'une de l'autre. Le théorème des croissances comparées est un outil fondamental pour déterminer les limites qui font intervenir ces trois types de fonctions : puissance, logarithme et exponentielle. Il peut se traduire en langage familier en disant que dans une confrontation entre ces trois fonctions, c'est la fonction exponentielle qui l'emporte sur la fonction puissance, elle-même l'emportant sur la fonction logarithme.

1 ● Progressions arithmétique et géométrique

Définition. On appelle progression arithmétique de raison r une suite de nombres réels telle que la différence de deux termes consécutifs est constante, égale au réel r . Les termes de cette suite sont donc définis, à partir du premier terme u_1 et, pour tout entier k , par :

$$u_{k+1} = u_k + r$$

ou par le terme de rang n :

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

La somme des n premiers termes de cette suite a pour expression :

$$S_n = u_1 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = n \left(u_1 + \frac{n-1}{2} r \right)$$

Définition. On appelle progression géométrique de raison q une suite de nombres réels telle que le rapport de deux termes consécutifs est constant, égal au réel q . Les termes de cette suite sont donc définis, à partir du premier terme u_1 et, pour tout entier k , par :

$$u_{k+1} = qu_k$$

ou par le terme de rang n :

$$u_n = q^{n-1} u_1$$

La somme des n premiers termes de cette suite a pour expression :

$$S_n = u_1 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

si $q \neq 1$, avec $S_n = nu_1$ si $q = 1$. Lorsque $|q| < 1$ la suite des sommes partielles converge, quand $n \rightarrow \infty$, vers $S = \frac{u_1}{1 - q}$.

2 ● Fonction logarithme

Définition. On appelle fonction logarithme népérien la primitive de $1/x$ qui s'annule pour $x = 1$. Elle est définie pour tout réel x strictement positif par :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Il s'agit de la fonction logarithme de base notée e , définie par $\ln e = 1$. Pour tout nombre a strictement positif et différent de 1, on peut définir une fonction logarithme de base a , c'est-à-dire telle que $\log_a a = 1$, proportionnelle à la fonction logarithme népérien :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Elle est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $1/x \ln a$, donc monotone croissante pour a supérieur à 1 et décroissante pour a inférieur à 1. Les propriétés fondamentales de cette fonction sont les suivantes :

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

pour tous réels strictement positifs x et y .

Si a et b sont deux bases de logarithme, les formules de changement de base s'écrivent :

$$\log_a x = \log_b x \times \log_a b$$

$$\log_{1/b} x = -\log_b x$$

3 ● Fonction exponentielle

Définition. On appelle fonction exponentielle de base e la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, c'est-à-dire telle que pour tout réel y strictement positif :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

Cette fonction est définie, continue et indéfiniment dérivable partout sur \mathbb{R} , toutes ses dérivées étant égales à e^x . De la même manière, la fonction exponentielle de base a est définie comme fonction inverse de la fonction logarithme de base a , avec pour $y > 0$:

$$y = a^x = e^{x \ln a} \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Elle est indéfiniment dérivable partout sur \mathbb{R} , de dérivée $a^x \ln a$, donc monotone croissante pour a supérieur à 1 et décroissante pour a inférieur à 1. Les propriétés fondamentales de cette fonction sont les suivantes :

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (ab)^x = a^x b^x$$

pour tous réels x et y et tout réel b strictement positif et différent de 1.

4 ● Formes indéterminées exponentielles

Il existe trois formes indéterminées exponentielles, c'est-à-dire d'expressions dont la limite ne peut pas être déterminée immédiatement :

- forme 0^0 : toute expression $[f(x)]^{g(x)}$ avec $f(x) \rightarrow 0$ et $g(x) \rightarrow 0$;
- forme ∞^0 : toute expression $[f(x)]^{g(x)}$ avec $|f(x)| \rightarrow +\infty$ et $g(x) \rightarrow 0$;
- forme 1^∞ : toute expression $[f(x)]^{g(x)}$ avec $f(x) \rightarrow 1$ et $|g(x)| \rightarrow +\infty$.

Théorème des croissances comparées. Si a est une base quelconque de logarithme et α un exposant strictement positif, on obtient les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log_a x = 0$$



	Vrai	Faux
1. Une suite de nombres réels peut être simultanément une progression arithmétique et géométrique.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. Si a et b sont deux réels tels que $\ln ab$ existe, on a toujours la décomposition $\ln ab = \ln a + \ln b$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Si f et g sont deux fonctions équivalentes, alors e^f et e^g sont aussi équivalentes.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. Un nombre peut être égal à son logarithme.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. La forme 0^∞ est une forme indéterminée exponentielle.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



6. Montrer sans calculs que la fonction f définie par $f(x) = \ln(-x^2 + 3x - 2)$ admet, sur son ensemble de définition, un maximum que l'on déterminera.
7. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que si f et g sont des fonctions équivalentes qui tendent vers 0, alors $e^f - e^g$ est équivalent à $f - g$.
8. Montrer que $f(x) = \ln(x-1) + \ln \frac{2}{x-1}$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = \ln g(x)$ et préciser le domaine de définition de f .
9. Montrer que si a et b sont des nombres réels distincts, on a l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(e^a + e^b) > e^{(a+b)/2}$$

et l'interpréter géométriquement.

10. Déterminer les racines des équations suivantes :

a) $e^x - 1 - x = 0$;

b) $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = 0$;

c) $e^{ax} - bx = 0$ où a et $b \in \mathbb{R}_+$;

d) $x - \log_a x = 0$ où $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.



Progression arithmétique

11. Trouver trois nombres en progression arithmétique dont la somme est égale à 30 et le produit à 910.

Analyse de l'énoncé et conseils. On écrit ces trois nombres sous la forme $x - r$, x , $x + r$ où r est la raison de la progression.

12. Trouver n nombres insérés entre les réels a et $b > a$ tels que ces $n + 2$ nombres forment une progression arithmétique.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'exprimer le dernier nombre en fonction du premier pour obtenir la raison et ainsi tous les termes de la progression.

13. Calculer la somme de chacun des ensembles de nombres définis ci-après :

a) tous les nombres formés de trois chiffres ;

b) les n premiers nombres pairs ;

c) les n premiers nombres impairs ;

d) les n premiers multiples de trois.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit de remarquer à chaque fois que ces nombres sont les termes d'une progression arithmétique dont on déterminera le premier et le dernier terme.

Progression géométrique

14. Trouver deux nombres a et b tels que les réels a , $a + 2b$, $2a + b$ soient les termes successifs d'une progression arithmétique et $(b + 1)^2$, $ab + 5$, $(a + 1)^2$ soient les termes successifs d'une progression géométrique.

Analyse de l'énoncé et conseils. On exprimera d'abord la raison de la progression arithmétique et le nombre a en fonction de b et on calculera ensuite la valeur de b en utilisant la seconde condition.

15. Déterminer la raison d'une progression géométrique dont le troisième terme est la somme des deux premiers.

Analyse de l'énoncé et conseils. La condition imposée permet d'écrire une équation vérifiée par la raison de cette progression.

16. Dans chacune des questions suivantes on définit trois nombres à l'aide des réels a et b tels que $a^2 \neq b^2$. Montrer qu'ils forment les termes successifs d'une progression géométrique dont on donnera la raison.

$$\text{a) } (a+b)^2, a^2-b^2, (a-b)^2; \quad \text{b) } \frac{1}{(a+b)^2}, \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}, (a^2+ab+b^2)^2.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On formera le rapport de deux termes consécutifs et, s'il est constant, il déterminera la raison de la progression.

17. Si u_k est le k -ième terme d'une progression arithmétique de raison r , montrer que $v_k = e^{u_k}$ est le k -ième terme d'une progression géométrique dont on donnera la raison. Calculer la somme des n premiers termes de cette progression géométrique et indiquer dans quel cas elle converge.

Analyse de l'énoncé et conseils. On constate aisément que le rapport de deux termes consécutifs de la suite v_k est constant, ce qui fournit la raison de cette progression géométrique.

Calcul logarithmique et exponentiel

18. Résoudre les équations suivantes :

$$\text{a) } \ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}});$$

$$\text{b) } \ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x); \quad \text{c) } e^{2x} - 3e^x + 2 = 0;$$

$$\text{d) } e^x - e^{-x} = 3; \quad \text{e) } x^x = (\sqrt{x})^{x+1}; \quad \text{f) } 4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'utiliser les propriétés de la fonction logarithme, de poser $X = e^x$ dans les questions c) et d), et, dans la dernière question, de grouper les termes de façon à pouvoir mettre en facteur 4^x dans un membre et 3^x dans l'autre.

19. Résoudre les systèmes d'équations suivants en fonction du paramètre $a > 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 3a - 3\ln 2; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} xy = a^2 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = \frac{5}{2}\ln^2 a; \end{cases} \\ \\ \text{c)} \begin{cases} a^x = y^a \\ a^{x+1} = y^{a+x}; \end{cases} & \end{array}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Les deux premiers systèmes se transforment en un système où le produit et la somme de deux réels ont une valeur fixée. Le troisième système doit être transformé en prenant les logarithmes de chaque membre.

Théorème des accroissements finis

20. Appliquer le théorème des accroissements finis pour déterminer la limite quand $x \rightarrow +\infty$ de :

$$g(x) = (x+1)^{1+1/(x+1)} - x^{1+1/x}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Le théorème des accroissements finis est appliqué à la fonction f définie sur l'intervalle $[x, x+1]$ par $f(x) = x^{1+1/x}$, ce qui permet d'exprimer $g(x)$ en fonction de la dérivée de f en un point de l'ouvert correspondant.

Formule de Taylor

21. Montrer, en utilisant la formule de Taylor, que pour tout réel x positif on a les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

En déduire la limite pour n tendant vers l'infini du produit :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On applique la formule de Taylor, avec reste de Lagrange, à $f(x) = \ln(1+x)$ sur l'intervalle $[0, x]$, successivement à l'ordre un puis à l'ordre deux. Les inégalités obtenues permettent ensuite de déterminer un encadrement de $\ln u_n$, dont on déduira la limite.

Règle de L'Hospital

22. Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivables sur l'ouvert $]a, b[$. On suppose également qu'il n'existe aucun point de $[a, b]$ où f' et g' sont simultanément nulles. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

pour en déduire la *formule des accroissements finis généralisés* :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

où c est un point de l'ouvert $]a, b[$.

Supposons maintenant que f et g sont continues et dérivables sur un intervalle ouvert I contenant a , avec $f(a) = g(a) = 0$. Montrer que si le rapport $f'(x)/g'(x)$ admet une limite, finie ou infinie, quand x tend vers a , alors le rapport $f(x)/g(x)$ admet la même limite. Appliquer ce résultat dans le cas où :

$$f(x) = e^{\alpha x} - e^{\beta x} \quad \text{et} \quad g(x) = \alpha^{\alpha x} - \beta^{\alpha x}$$

α et β étant deux réels strictement positifs, pour x tendant vers 0.

Analyse de l'énoncé et conseils. On vérifie que le théorème de Rolle s'applique à la fonction φ et on en déduit la formule demandée en formant le rapport qui y figure. On applique ensuite cette formule sur l'intervalle $[a, x]$, x étant un point quelconque de I . En faisant ensuite tendre x vers a on obtient le résultat demandé, qui s'appelle la règle de L'Hospital. L'application de cette règle permet d'obtenir la limite de $f(x)/g(x)$ qui est une forme indéterminée $0/0$.

Développement limité

23. Donner un développement limité à l'ordre deux des expressions $f(x)$ suivantes :

$$\text{a) } \ln \frac{2x-1}{x}, \text{ au voisinage de } 1; \quad \text{b) } (1+x)^{1/x}, \text{ au voisinage de } 0;$$

$$\text{c) } \ln(a^x + b^x), \text{ au voisinage de } 0 \text{ et } a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On applique la formule de Maclaurin avec reste de Young à chaque fonction f , en remplaçant x par $x - x_0$ si on effectue le développement au voisinage de x_0 . Pour les questions b) et c), on utilise les développements usuels que l'on applique à une variable u qui va dépendre de

x . Il faut faire attention après ce changement de variable à ne pas réintroduire des termes d'un ordre supérieur ou égal à ceux qui ont déjà été négligés.

24. Donner un développement limité à l'ordre trois des expressions $f(x)$ suivantes :

- a) $\ln(1 + e^x)$, au voisinage de 0 ; b) $(e^x - x)^{1/3}$, au voisinage de 0 ;
 c) $\ln(x + e^x)$, au voisinage de 0 ; d) $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$, au voisinage de $+\infty$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Comme dans l'exercice précédent, on utilise un développement limité usuel et on effectue un changement de variable, en prenant soin de ne conserver que des termes d'ordre au plus égal à celui du développement déjà effectué.

Calcul de limites

25. Déterminer la limite des expressions $f(x)$ suivantes :

- a) $\frac{1}{1 + e^{1/x}}$, $x \rightarrow 0$; b) $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, $x \rightarrow 0$;
 c) $\frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \rightarrow 0$; d) $\frac{\ln(1+e^x)}{x}$, $x \rightarrow +\infty$;
 e) $(\ln x - 1) \ln(x - e)$, $x \rightarrow e$; f) $\frac{1}{x}(e^{ax} - e^{bx})$, $x \rightarrow 0$, a et b étant deux réels distincts ;
 g) $\frac{x^x - 1}{x - 1 + \ln x}$, $x \rightarrow 1$; h) $\frac{x^2}{x-1} \exp\left[\frac{1}{x(1-x)}\right]$, $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow 1$;
 i) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\log_a x - 1}$, $x \rightarrow a$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$;
 j) $\frac{x^a - a^x}{\log_a x - \log_x a}$, $x \rightarrow a$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$.

Analyse de l'énoncé et conseils. En présence de forme indéterminée on utilise un équivalent, ou si nécessaire un développement limité. Lorsque x tend vers un réel a non nul on effectue le changement $x = a + u$ de façon à faire intervenir l'infiniment petit u .

Formes indéterminées exponentielles

26. Déterminer la limite des expressions $f(x)$ suivantes :

a) $x^{1/\ln 3x}$, $x \rightarrow 0^+$;

b) $[\ln(1+x)]^x$, $x \rightarrow 0^+$;

c) $(\ln x)^{1/x}$, $x \rightarrow +\infty$;

d) $\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$, $x \rightarrow +\infty$;

e) $\left(1 + \frac{u(x)}{x}\right)^x$, $x \rightarrow +\infty$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = a$;

f) $(a + bx^n)^{1/(\alpha + \beta \ln x)}$, $x \rightarrow +\infty$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $n, b \in \mathbb{R}_+^*$;

g) $x^{1/\ln(x^2+1)}$, $x \rightarrow +\infty$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On détermine la limite de $\ln f(x)$ en utilisant éventuellement des équivalents.

Étude de fonction

27. Étudier et représenter graphiquement les fonctions f qui sont déterminées par les expressions $f(x)$ ci-après :

a) $\frac{1}{x}(\ln x - x^2 - 1)$;

b) $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

c) $\frac{x}{1 + e^{1/x}}$;

d) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$;

e) $(x+2)e^{1/x}$;

f) $x \ln |e^x - 1|$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On détermine au préalable les intervalles de définition de la fonction et les limites aux extrémités de ces intervalles. Le calcul de la dérivée permet ensuite d'obtenir le sens de variation. On peut parfois avoir à étudier la dérivabilité en certains points particuliers. On complète l'étude par la recherche d'asymptotes éventuelles, l'étude de la convexité et la recherche de points d'inflexion. Le graphe peut enfin être précisé par les coordonnées de certains points particuliers.

Taux d'intérêt

28. Préciser la durée à l'issue de laquelle un capital C , placé à un taux d'intérêt annuel $i = 6\%$, aura doublé ; aura été multiplié par dix.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'utiliser la définition du taux annuel qui transforme au bout d'un an un capital C en $C(1+i)$. Les réponses seront données en années et mois.

Taux instantané

29. Un capital de 1 000 euros est placé à un taux d'intérêt annuel de 5%. Déterminer la valeur de ce capital à un instant t quelconque, et calculer sa valeur au bout de 1 000 jours, l'année civile étant de 360 jours.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut d'abord déterminer le taux instantané en fonction du taux annuel, puis exprimer la valeur du capital à l'aide de ce taux, à une date quelconque exprimée en fraction d'année.

Valeur actualisée

30. La valeur d'un bien à la date t est déterminée par $V(t) = V_0 e^{\sqrt{t}}$. Déterminer le taux de croissance instantané de ce bien et sa valeur actualisée A , en fonction du taux d'escompte annuel r . Calculer la date où cette valeur actualisée est maximum dans le cas où $r = 10\%$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Le taux de croissance instantané d'une fonction du temps est sa dérivée logarithmique. Si C est la valeur d'un capital disponible à la date t , sa valeur actualisée dans le cas d'un escompte pratiqué à la fin de l'année est $C(1+r)^{-t}$.



QCM

1. **Vrai.** Mais seulement dans le cas très particulier d'une suite constante qui est à la fois une progression arithmétique de raison nulle et une progression géométrique de raison 1.
2. **Faux.** L'expression $\ln ab$ est définie pour a et b de même signe, qui peuvent donc être négatifs. On doit donc écrire $\ln ab = \ln |a| + \ln |b|$.
3. **Faux.** Le résultat est faux en général. Il devient vrai si en plus $f - g$ tend vers 0. Soit par exemple $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + x$ qui sont équivalentes quand x tend vers $+\infty$. On obtient $e^{f(x)}/e^{g(x)} = e^{-x}$ qui tend vers 0, donc e^f et e^g ne sont pas équivalentes.
4. **Vrai.** On pourra voir dans la question de réflexion 10 d) que l'équation $x = \log_a x$ admet des solutions si on choisit convenablement la base a . Par exemple, dans la base $e^{1/e}$ le nombre e est égal à son logarithme, c'est-à-dire que $\log_{e^{1/e}} e = e$.
5. **Faux.** Soit $b(x) = [f(x)]^{g(x)}$ avec $f(x) \rightarrow 0^+$ et $|g(x)| \rightarrow +\infty$. On obtient $\ln b(x) = g(x) \ln f(x)$ qui tend vers l'infini avec le signe de $-g$, donc il n'y a pas d'indétermination. Si $g(x) \rightarrow +\infty$, alors $b(x) \rightarrow 0$ et si $g(x) \rightarrow -\infty$ alors $b(x) \rightarrow +\infty$.
6. On peut écrire $f(x) = \ln u(x)$ avec $u(x) = (1-x)(x-2)$. La fonction f est donc définie sur l'intervalle ouvert $]1, 2[$. Par ailleurs, on peut écrire le polynôme u sous la forme $u(x) = -(x - 3/2)^2 + 1/4 \leq 1/4$, donc u est maximum pour $x = 3/2$. Comme la fonction logarithme est croissante, il en est de même pour f qui admet le maximum $f(3/2) = -\ln 4$.
7. On sait que $e^f - 1$ et $e^g - 1$ sont respectivement équivalents aux infiniment petits f et g . Cependant, on ne peut pas en déduire directement par différence que $e^f - e^g$ est équivalent à $f - g$, car l'équivalent d'une différence n'est pas toujours la différence des équivalents. Nous allons donc appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction exponentielle sur l'intervalle $[g, f]$: il existe un nombre u de l'ouvert $]g, f[$ tel que $e^f - e^g = (f - g)e^u$. Comme f et g tendent vers 0, il en est de même de u , et par conséquent :

$$\frac{e^f - e^g}{f - g} = e^u \rightarrow 1$$

ce qui traduit bien que $e^f - e^g$ est équivalent à $f - g$.

8. La somme de deux logarithmes est égale au logarithme du produit, soit :

$$\ln(x-1) + \ln \frac{2}{x-1} = \ln 2$$

mais on ne peut pas en déduire que $f(x) = \ln 2$ pour tout x réel. Il faut en effet déterminer au préalable le domaine de définition de la fonction f , qui est l'intervalle $]1, +\infty[$. L'expression obtenue n'est donc celle de $f(x)$ que sur cet intervalle.

9. Supposons par exemple que b soit supérieur à a et posons $b = a + 2b$, avec $b > 0$. On a alors $(a+b)/2 = a+b$ et $e^a + e^b = e^a(1 + e^{2b})$ avec, par conséquent :

$$\frac{e^a + e^b}{e^{(a+b)/2}} = \frac{1 + e^{2b}}{e^b} = e^{-b} + e^b = g(b)$$

Cette fonction g admet pour dérivée $g'(b) = e^b - e^{-b} = e^{-b}(e^{2b} - 1)$ qui est négative pour $b < 0$ et positive pour $b > 0$. Ainsi g admet un minimum pour $b = 0$, de valeur $g(0) = 2$, et par conséquent, on a bien l'inégalité :

$$\frac{e^a + e^b}{e^{(a+b)/2}} > 2$$

Si on pose $f(x) = e^x$, cette inégalité s'écrit :

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) < \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$$

ce qui exprime que la fonction exponentielle est convexe (voir figure 4.1), propriété évidente puisque la dérivée seconde est positive.

10. a) La dérivée de $e^x - 1 - x$ est $e^x - 1$, qui est négative pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$. Cette expression admet donc un minimum pour $x = 0$, qui a pour valeur 0, et donc l'équation admet comme seule racine $x = 0$.

b) La dérivée de $e^x - 1 - x - x^2/2$ est $e^x - 1 - x$, qui est l'expression précédente dont on a vu qu'elle était toujours positive. Il s'agit donc d'une fonction monotone croissante, qui ne s'annule que pour la valeur $x = 0$ (voir figure 4.2).

c) La fonction f déterminée par $f(x) = e^{ax} - bx$ admet pour dérivée $f'(x) = ae^{ax} - b$, qui s'annule pour $x = \frac{1}{a} \ln \frac{b}{a} = \alpha$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

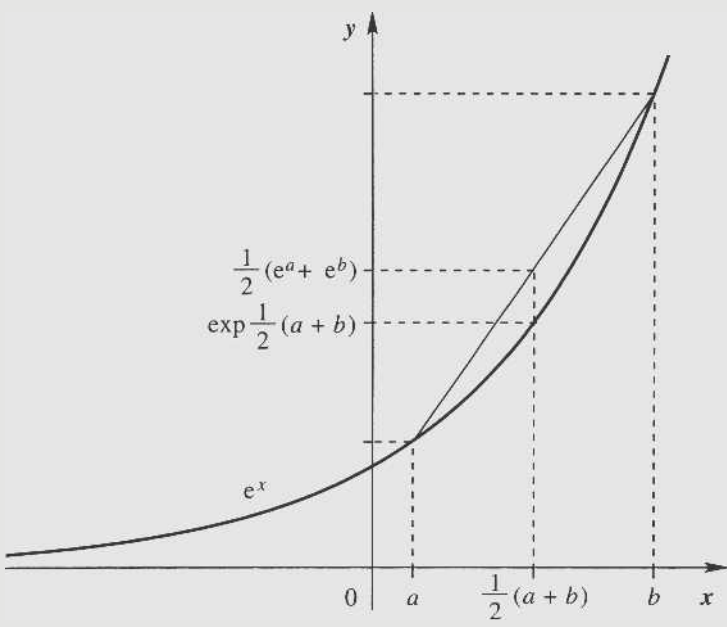


Figure 4.1

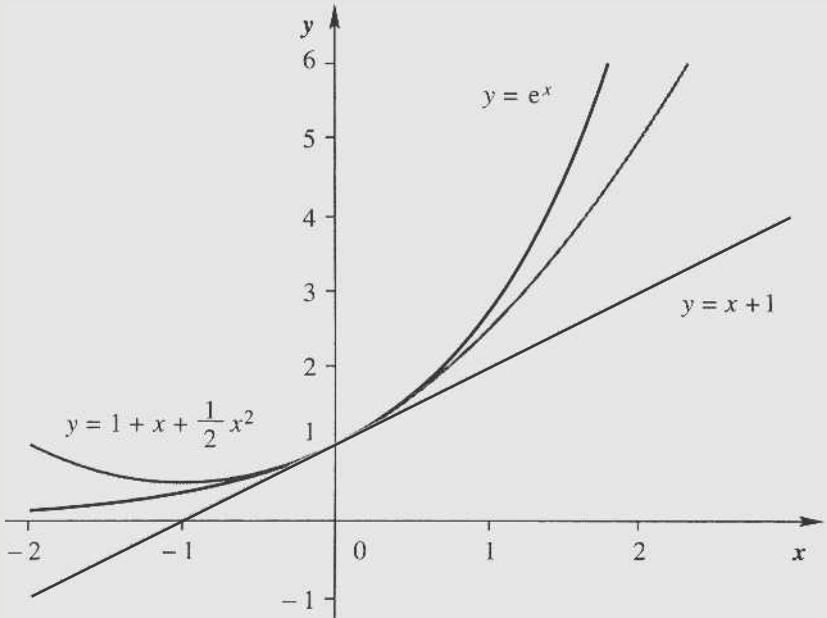


Figure 4.2

On voit ainsi que f passe par un minimum pour $x = \alpha$, de valeur $\beta = f(\alpha) = \frac{b}{a} \ln \frac{ae}{b}$. Si cette valeur minimale est positive, c'est-à-dire si $ae > b$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune racine. Pour $b = ae$, ce minimum est nul et il y a donc une racine unique $x = 1/a$. Pour $b > ae$, le minimum étant négatif, il y a deux racines qui encadrent $\alpha = \frac{1}{a} \ln \frac{b}{a} > \frac{1}{a}$.

d) La dérivée de $g(x) = x - \log_a x$ est $g'(x) = 1 - 1/x \ln a$ qui s'annule pour $x \ln a = 1$, soit $x = \ln e / \ln a = \log_a e$. La fonction g étant définie pour $x > 0$, cette valeur n'appartient pas au domaine de définition si $0 < a < 1$ et dans ce cas g' est toujours positive. La fonction g est donc strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et il existe alors une valeur unique $\alpha < 1$ telle que $g(\alpha) = 0$. Pour $a > 1$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\log_a e$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	\searrow	β	\nearrow	$+\infty$

La fonction g présente donc un minimum de valeur $\beta = g(\log_a e) = \log_a e - \log_a (\log_a e) = \log_a (e / \log_a e)$. Si ce minimum est positif, c'est-à-dire si $e > \log_a e$, alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune racine. Pour $e = \ln e / \ln a$, on a $\beta = 0$ ce qui correspond à une racine unique de valeur $x = \log_a e = e$, la base étant donc définie par $\ln a = \ln e / e$, soit $a = e^{1/e}$. Enfin, pour $1 < a < e^{1/e}$ le minimum est négatif et dans ce cas il y a deux racines qui encadrent la valeur $\log_a e$.

11. Ces trois nombres ont pour somme $(x-r) + x + (x+r) = 3x = 30$, donc $x = 10$. Leur produit est $10(10-r)(10+r) = 910$, soit $100 - r^2 = 91$, donc la raison est 3 ou -3, ce qui donne les mêmes nombres : 7, 10 et 13.

12. Le nombre b se déduit du premier terme a de cette progression par la relation $b = a + (n+1)r$. La raison est donc :

$$r = \frac{b-a}{n+1}$$

et les termes intermédiaires s'écrivent, pour $k = 1, 2, \dots, n$:

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n+1}$$

13. Si u_1 et u_n sont les termes de rang 1 et n d'une progression arithmétique, elle a pour somme $S_n = n(u_1 + u_n)/2$.

a) Le premier nombre de trois chiffres est $u_1 = 100$ et le dernier $u_n = 999$, soit un total de $n = 900$ nombres en progression arithmétique de raison $r = 1$. Leur somme est donc égale à $S_{900} = 450 \times 1099 = 494\,550$.

b) Les nombres pairs forment une progression arithmétique de raison $r = 2$, le premier terme étant $u_1 = 2$ et le n -ième $u_n = 2n$. On obtient donc $S_n = n(n+1)$.

c) Les nombres impairs forment une progression arithmétique de raison $r = 2$, le premier terme étant $u_1 = 1$ et le n -ième $u_n = 2n - 1$. On obtient donc $S_n = n^2$.

d) Les multiples de trois forment une progression arithmétique de raison $r = 3$, le premier terme étant $u_1 = 3$ et le n -ième $u_n = 3n$. On obtient donc $S_n = 3n(n+1)/2$.

14. Si r est la raison de la progression arithmétique, on a $a + 2b = a + r$ et $2a + b = a + 2r$, donc $r = 2b$ et $a = 3b$. La condition suivante se traduit par :

$$\frac{ab+5}{(b+1)^2} = \frac{(a+1)^2}{ab+5}$$

Soit en remplaçant a par $3b$:

$$(b+1)^2(3b+1)^2 = (3b^2+5)^2$$

Cette équation admet la solution unique $b = 1$, d'où $a = 3$ et $r = 2$, la raison de la progression géométrique étant aussi égale à deux.

15. Les trois premiers termes u_1 , $u_2 = qu_1$ et $u_3 = q^2u_1$ sont liés par la relation $u_3 = u_1 + u_2$, soit $(1 + q - q^2)u_1 = 0$. En dehors de la suite nulle constante, la raison q de la suite doit vérifier $q^2 - q - 1 = 0$, soit deux solutions $q = (1 + \sqrt{5})/2$ et $q = (1 - \sqrt{5})/2$.

Vous avez compris ?

Déterminer la raison et les trois premiers termes d'une progression géométrique, liés par les relations $u_1 + u_2 + u_3 = 312$ et $u_3 - u_1 = 192$.

Réponse : $q = 3$, $u_1 = 24$, $u_2 = 72$, $u_3 = 216$ ou $q = -7/5$, $u_1 = 200$, $u_2 = -280$, $u_3 = 392$.

16. a) Les rapports de deux termes consécutifs ont pour expressions :

$$\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} = \frac{a - b}{a + b} \quad \text{et} \quad \frac{(a - b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{a - b}{a + b}$$

Ces rapports étant égaux, leur valeur commune est la raison de la progression.

b) De la même manière :

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}(a+b)^2 = (a^2 + ab + b^2)(a+b)$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}(a^2 + ab + b^2)^2 = (a+b)(a^2 + ab + b^2)$$

Le rapport constant de deux termes consécutifs fournit la raison.

17. Le rapport de deux termes consécutifs est tel que :

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \exp(u_{k+1} - u_k) = e^r$$

donc il s'agit bien d'une progression géométrique de raison e^r . La somme des n premiers termes de cette suite est :

$$S_n = e^{u_1} \frac{1 - e^{nr}}{1 - e^r}$$

pour r différent de 0, avec $S_n = ne^{u_1}$ pour $r=0$. Pour que cette somme admette une limite finie, il faut que r soit négatif, et dans ce cas la limite est :

$$\frac{e^{u_1}}{1 - e^r}$$

18. a) On utilise d'abord la propriété $\ln a + \ln b = \ln ab$, avec $a = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et $b = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Donc $ab = 4 - (2 + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$ et l'équation devient :

$$\ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 - \sqrt{2}) = \ln 2 + \ln(4 - 2) = 2 \ln 2$$

La solution unique est $x = 4$.

b) L'égalité des logarithmes implique l'égalité des arguments, soit :

$$x^2 - 1 = (2 - x)(3 - x) = x^2 - 5x + 6$$

de solution $x = 7/5$.

c) En posant $X = e^x$, on obtient l'équation du second degré $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2) = 0$, de solutions $X = 1$ et $X = 2$, soit $x = 0$ et $x = \ln 2$.

d) Si on pose $X = e^x$, l'équation s'écrit $X - 1/X = 3$ ou $X^2 - 3X - 1 = 0$, dont seule la racine positive $X = (3 + \sqrt{13})/2$ convient, soit $x = \ln(3 + \sqrt{13}) - \ln 2$.

e) En prenant le logarithme des deux membres, on obtient $x \ln x = \frac{1}{2}(x+1) \ln x$ de solution unique $x = 1$.

f) On écrit l'équation sous la forme :

$$4^x + 2^{2x-1} = 3^{x+1/2} + 3^{x-1/2}$$

Ce qui permet les mises en facteur suivantes :

$$4^x \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Cette équation est équivalente à :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}$$

de solution $x = 3/2$.

Vous avez compris ?

Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{3x+1} - 2e^{2x+1} + e^{x+1} = 0$;

b) $x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}^x = 0$;

c) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458$.

Réponses :

a) $e^{3x+1} - 2e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{x+1}(e^x - 1)^2$, $x = 0$;

b) $\sqrt{x} \ln x = \frac{1}{2} x \ln x$, $x = 1$ et $x = 4$;

c) $X = 3^x$, $X^2 + 81X - 2 \times 81^2 = 0$, $X = 81$, $x = 4$.

19. a) La seconde équation peut s'écrire :

$$\ln xy = \ln 9a^2 - \ln 8 = \ln \frac{9}{8} a^2$$

Le système se transforme alors en :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ xy = \frac{9}{8}a^2 \end{cases}$$

On a donc :

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - \frac{9}{4}a^2 = 4a^2$$

soit $x + y = 5a/2$ puisque x et y doivent être positifs. Connaissant la somme et le produit des nombres x et y , ce sont les deux racines de l'équation du second

degré :

$$X^2 - \frac{5}{2}aX + \frac{9}{8}a^2 = 0$$

Soient les solutions :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{4}(5 + \sqrt{7}) \\ y = \frac{a}{4}(5 - \sqrt{7}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{a}{4}(5 - \sqrt{7}) \\ y = \frac{a}{4}(5 + \sqrt{7}) \end{cases}$$

b) Nous posons $X = \ln x$, $Y = \ln y$ et $A = \ln a$ et le système devient :

$$\begin{cases} X + Y = 2A \\ X^2 + Y^2 = \frac{5}{2}A^2 \end{cases}$$

On en déduit donc $X^2 + Y^2 = (X + Y)^2 - 2XY = 4A^2 - 2XY = 5A^2/2$, soit le système :

$$\begin{cases} X + Y = 2A \\ XY = \frac{3}{4}A^2 \end{cases}$$

Donc X et Y sont les deux solutions de l'équation $z^2 - 2Az + \frac{3}{4}A^2 = 0$, soit $X = A/2$, $Y = 3A/2$ ou $X = 3A/2$, $Y = A/2$. Les solutions correspondantes sont $x = \sqrt{a}$, $y = a\sqrt{a}$ ou $x = a\sqrt{a}$, $y = \sqrt{a}$.

c) Pour $a = 1$, le système est indéterminé avec $y = 1$ et x quelconque. Pour $a \neq 1$, en prenant les logarithmes le système s'écrit :

$$\begin{cases} x \ln a = a \ln y \\ (x+1) \ln a = (x+a) \ln y \end{cases}$$

Soit, en formant le rapport de ces équations :

$$1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{x}{a}$$

Les solutions sont $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$, l'autre inconnue étant respectivement $y = a^{1/\sqrt{a}}$ et $y = a^{-1/\sqrt{a}}$.

Vous avez compris ?

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2^{-x} + 2^{-y} = 1 \end{cases}$$

Réponse : $x = y = 1$.

20. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f , avec :

$$f(x) = x^{1+1/x} = x \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

Sur l'intervalle $[x, x+1]$ cela permet d'écrire $g(x) = f'(x+\theta)$, où θ est un nombre de l'ouvert $]0,1[$. La dérivée de f est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) + x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \\ &= \frac{x+1-\ln x}{x} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x+\theta} - \frac{\ln(x+\theta)}{x+\theta}\right) \exp\left(\frac{\ln(x+\theta)}{x+\theta}\right)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, il en est de même de $x+\theta$ et, d'après le théorème des croissances comparées, on en déduit aisément que $g(x)$ tend vers 1.

21. Les dérivées de $f(x) = \ln(1+x)$ sont :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

D'où les développements de Taylor-Lagrange sur $[0, x]$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2(1+\theta_1 x)^2} \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta_2 x)^3} \end{aligned}$$

où θ_1 et θ_2 sont deux nombres de $]0,1[$. L'expression des restes, de signe constant pour $x > 0$, montre que :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

On calcule le logarithme du produit u_n :

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$$

On utilise ensuite la double inégalité :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2}$$

Par ailleurs, on utilise les résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On en déduit l'encadrement :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \ln u_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

Les deux termes de l'encadrement ont la même limite $1/2$, qui est donc aussi celle de $\ln u_n$. Par conséquent u_n admet pour limite \sqrt{e} .

22. La fonction φ est continue sur le fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$, avec de plus $\varphi(b) = \varphi(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe un point c de l'ouvert $]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, soit :

$$[f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0$$

Ce qui conduit à la formule des accroissements généralisés :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Si on applique cette formule sur l'intervalle $[a, x]$, il existe alors un point c de l'ouvert $]a, x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Si x tend vers a , il en est de même du point c , ce qui permet d'obtenir la règle de L'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Appliquons cette règle aux fonctions f et g qui sont telles ici que $f(0) = g(0) = 0$ et qui admettent pour dérivées :

$$f'(x) = \alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x}, \quad g'(x) = \alpha^{\text{ex}} e \ln \alpha - \beta^{\text{ex}} e \ln \beta$$

Ainsi $f'(0) = \alpha - \beta$ et $g'(0) = e \ln \alpha - e \ln \beta$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha^{\text{ex}} - \beta^{\text{ex}}} = \frac{\alpha - \beta}{e \ln(\alpha/\beta)}$$

23. a) On obtient comme dérivées :

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(2x-1)}, \quad f''(x) = \frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$$

de valeurs $f'(1) = 1$ et $f''(1) = -3$, ce qui conduit au développement limité :

$$\ln \frac{2x-1}{x} = x-1 - \frac{3}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1$.

b) On écrit :

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

et on utilise le développement au voisinage de 0 de $\ln(1+x)$:

$$\ln f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

On peut alors mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = e^{1+u}$, en ayant posé $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon_1(x)$. On utilise enfin le développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon_2(u)$$

Soit, en ne retenant que les termes en x de degré inférieur ou égal à deux :

$$\begin{aligned} f(x) &= e \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_3(x) \right] \\ &= e \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24} x^2 + x^2 \varepsilon_3(x) \right] \end{aligned}$$

où tous les termes $\varepsilon_i(x)$ tendent vers 0 avec x .

c) On utilise d'abord le développement limité de la fonction exponentielle :

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2} \ln^2 a + x^2 \varepsilon_1(x)$$

$$b^x = e^{x \ln b} = 1 + x \ln b + \frac{x^2}{2} \ln^2 b + x^2 \varepsilon_2(x)$$

On écrit ensuite :

$$f(x) = \ln(a^x + b^x) = \ln(2 + 2u) = \ln 2 + \ln(1 + u)$$

en ayant posé :

$$2u = x(\ln a + \ln b) + \frac{x^2}{2}(\ln^2 a + \ln^2 b) + x^2 \varepsilon_3(x)$$

On utilise enfin le développement de la fonction logarithme :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon_4(u)$$

Soit, en ne conservant que les termes en x et x^2 :

$$\begin{aligned} \ln(a^x + b^x) &= \ln 2 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b) + \frac{x^2}{4}(\ln^2 a + \ln^2 b) \\ &\quad - \frac{x^2}{8}(\ln a + \ln b)^2 + x^2 \varepsilon_5(x) \\ &= \ln 2 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b) + \frac{x^2}{8}(\ln^2 a + \ln^2 b - 2 \ln a \ln b) + x^2 \varepsilon_6(x) \end{aligned}$$

où tous les termes $\varepsilon_i(x)$ tendent vers 0 avec x .

Vous avez compris ?

Donner le développement limité à l'ordre deux, au voisinage de 0, de $f(x) = (1+x)^x$.

Réponse :

$$(1+x)^x = 1 + x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

24. a) L'expression de $f(x)$ est de la forme $\ln(1+u)$, avec $u = e^x$, qui n'est pas un infiniment petit au voisinage de 0 et qui admet comme développement à l'ordre trois :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

Soit :

$$f(x) = \ln(2+v) = \ln 2 + \ln(1+t)$$

en ayant posé :

$$2t = v = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

On écrit également le développement à l'ordre trois du logarithme, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3 \varepsilon_2(x)$$

On remplace ensuite t par son expression en fonction de x , mais dans les termes en t^2 et t^3 on ne retient pas les termes en x de degré supérieur à trois. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 2 + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) - \frac{1}{8} (x^2 + x^3) + \frac{1}{24} x^3 + x^3 \varepsilon_3(x) \\ &= \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^3 \varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

où toutes les fonctions ε_i sont des infiniment petits au voisinage de 0.

b) On utilise le développement de l'exponentielle à l'ordre trois :

$$e^x - x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

et ensuite on écrit $f(x) = (1+u)^{1/3}$, avec $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)$. On écrit alors le développement de cette fonction puissance, à l'ordre un seulement puisque u est du second degré par rapport à x :

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} + u \varepsilon_2(u)$$

On remplace enfin u par son expression en fonction de x :

$$(e^x - x)^{1/3} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{18} + x^3 \varepsilon_3(x)$$

où toutes les fonctions ε_i sont des infiniment petits au voisinage de 0.

c) Le développement à l'ordre trois de l'exponentielle permet d'obtenir :

$$x + e^x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

On écrit alors $f(x) = \ln(1+u)$, ayant posé $u = 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)$. Le développement à l'ordre trois du logarithme, au voisinage de 0, est :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \varepsilon_2(u)$$

Soit, en remplaçant u en fonction de x et ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à trois :

$$\begin{aligned} \ln(x + e^x) &= 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}(4x^2 + 2x^3) + \frac{8}{3}x^3 + x^3 \varepsilon_3(x) \\ &= 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + x^3 \varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

où toutes les fonctions ε_i sont des infiniment petits au voisinage de 0.

d) L'infiniment petit est $t = 1/x$ et on obtient comme nouvelle expression :

$$f(x) = \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) + \left(1 + \frac{1}{t} \right) \ln t = \frac{1}{t} \ln(t+1) + \ln t$$

Soit en développant le logarithme au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln t + 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + t^3 \varepsilon(t) \\ &= \ln \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x^3} \end{aligned}$$

25. a) Il faut distinguer deux cas :

- si $x \rightarrow 0^+$, alors $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ et $e^{1/x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow 0$;
- si $x \rightarrow 0^-$, alors $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ et $e^{1/x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 1$.

b) Un équivalent de $\ln(1+x)$ ne permet pas de résoudre cette forme indéterminée $\infty - \infty$. Il faut écrire le développement limité à l'ordre deux pour obtenir :

$$f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \sim \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

c) Il suffit ici d'utiliser les équivalents $\ln(1+x) \sim x$ et $\ln(1-x) \sim -x$ pour

obtenir :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x) - \frac{1}{x} \ln(1-x) \rightarrow 2$$

d) Quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln(1+e^x) \sim \ln e^x = x$ et par conséquent $f(x)$ tend vers 1.

e) Pour résoudre cette forme indéterminée $0 \times \infty$ on fait le changement $x = e + u$:

$$f(x) = [\ln(e+u)-1] \ln u = [\ln(e+u) - \ln e] \ln u = \ln u \times \ln \left(1 + \frac{u}{e}\right)$$

On voit ainsi que $f(x)$ est équivalent à $u \ln u / e$, qui tend vers 0 d'après le théorème des croissances comparées.

f) En effectuant le développement limité à l'ordre 1 des exponentielles, on obtient les équivalences $e^{ax} - 1 \sim ax$ et $e^{bx} - 1 \sim bx$. Donc $e^{ax} - e^{bx}$ est équivalent à $(a-b)x$. La limite de $f(x)$ est $a-b$.

g) C'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ que nous allons résoudre en prenant des équivalents du numérateur et du dénominateur, après le changement $x = 1 + u$. Le numérateur devient :

$$x^x - 1 = \exp(x \ln x) - 1 = \exp[(1+u) \ln(1+u)] - 1 \sim u$$

car $(1+u) \ln(1+u) \sim u$, puis $e^u - 1 \sim u$. Le dénominateur devient :

$$x - 1 + \ln x = u + \ln(1+u) \sim 2u$$

et par conséquent $f(x)$ tend vers $1/2$ quand u tend vers 0.

h) Il faut distinguer deux cas selon le signe de x :

- si $x \rightarrow 0^-$, alors $\frac{1}{x(1-x)} \rightarrow -\infty$ et $f(x) \rightarrow 0$ d'après le théorème des croissances comparées ;

- si $x \rightarrow 0^+$, alors $\frac{1}{x(1-x)} \rightarrow +\infty$ et $f(x)$ se présente sous une forme indéterminée $0 \times \infty$, ayant même limite que $gx) = -x^2 \exp(1/x) = -\frac{e^{1/x}}{(1/x)^2}$ qui tend vers $-\infty$ d'après le théorème des croissances comparées.

Quand x tend vers 1, il faut encore distinguer deux cas :

- si $x \rightarrow 1^-$, alors $\frac{1}{x(1-x)} \rightarrow +\infty$ et $f(x) \rightarrow -\infty$;

• si $x \rightarrow 1^+$, alors $\frac{1}{x(1-x)} \rightarrow -\infty$ et $f(x)$ est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ qui a même limite que $g(x) = \frac{1}{x-1} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{u}{e^u}$, ayant posé $u = \frac{1}{x-1}$.

Quand $u \rightarrow +\infty$, $g(x)$ tend vers 0 d'après le théorème des croissances comparées, donc il en est de même pour $f(x)$.

i) L'expression se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Avec le changement $x = a + u$, le numérateur devient :

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{a} \left(\sqrt{1 + \frac{u}{a}} - 1 \right) \sim \frac{u}{2\sqrt{a}}$$

et le dénominateur :

$$\log_a x - 1 = \frac{\ln(a+u)}{\ln a} - 1 = \frac{\ln(1+u/a)}{\ln a} \sim \frac{u}{a \ln a}$$

Par conséquent, $f(x)$ a pour limite $\sqrt{a} \ln \sqrt{a}$.

j) Nous avons une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ que nous transformons avec le changement $x = a + u$. Le numérateur s'écrit :

$$x^a - a^x = (a+u)^a - a^{a+u} = a^a \left[\left(1 + \frac{u}{a}\right)^a - a^u \right]$$

avec comme équivalents au voisinage de 0, $(1+u/a)^a - 1 \sim u$ et $a^u - 1 \sim u \ln a$ soit au total :

$$x^a - a^x \sim u a^a (1 - \ln a)$$

à condition que a soit différent de e. Le dénominateur a pour expression :

$$\log_a x - \log_x a = \frac{\ln(a+u)}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln(a+u)} = 1 + \frac{\ln(1+u/a)}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln a + \ln(1+u/a)}$$

Soit, en utilisant l'équivalent $\ln(1+u/a) \sim u/a$:

$$\log_a x - \log_x a \sim \frac{2u}{a \ln a}$$

Pour a différent de e, en effectuant le rapport des équivalents, on obtient comme limite de $f(x)$:

$$\frac{1}{2} a^{a+1} \ln a (1 - \ln a)$$

Il reste à étudier le cas particulier $a = e$ où le numérateur devient, avec $u = x - e$:

$$x^e - e^x = e^e \left[\left(1 + \frac{u}{e} \right)^e - e^u \right]$$

Il faut ici utiliser les développements limités à l'ordre deux :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{u}{e} \right)^e &= 1 + u + \frac{e-1}{2e} u^2 + u^2 \varepsilon_1(u) \\ e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon_2(u) \end{aligned}$$

soit par différence :

$$x^e - e^x \sim -\frac{u^2}{2} e^{e-1}$$

L'équivalent du dénominateur étant $2u/e$, on obtient finalement :

$$f(x) \sim -\frac{e^e}{4}(x - e)$$

Donc la limite est égale à 0.

Vous avez compris ? —————

Déterminer les limites des expressions suivantes :

$$f(x) = \ln(1 - e^{-x}), x \rightarrow +\infty; \quad g(x) = \frac{1}{x^3} [\ln(1+x)^2 - 2x + x^2], x \rightarrow 0;$$

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 0.$$

Réponses :

$$f(x) \rightarrow 0, \quad g(x) \rightarrow \frac{2}{3}, \quad h(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$$

26. a) C'est une forme indéterminée exponentielle 0^0 avec :

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{\ln 3x} = \frac{\ln x}{\ln x + \ln 3} = \frac{1}{1 + \ln 3 / \ln x} \rightarrow 1$$

donc $f(x)$ tend vers e .

b) C'est encore une forme indéterminée 0^0 avec :

$$\ln f(x) = x \ln [\ln(1+x)]$$

Comme $\ln(1+x)$ est équivalent à x , $\ln f(x)$ a même limite que $x \ln x$, qui tend vers 0 d'après le théorème des croissances comparées. Donc $f(x)$ tend vers 1.

c) C'est une forme indéterminée ∞^0 , avec :

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(\ln x) = \frac{\ln u}{e^u}$$

où on a posé $u = \ln x$. D'après le théorème des croissances comparées, ce rapport tend vers 0 donc $f(x)$ tend vers 1.

d) C'est une forme indéterminée 1^∞ , avec :

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= (x+2) \ln \frac{x-1}{x+3} \\ &= (x+2) \left[\ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) - \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right] \sim x \left(-\frac{1}{x} - \frac{3}{x} \right) \end{aligned}$$

Donc $\ln f(x)$ tend vers -4 et $f(x)$ vers e^{-4} .

e) C'est une forme indéterminée 1^∞ , avec :

$$\ln f(x) = x \ln \left[1 + \frac{u(x)}{x} \right] \sim u(x)$$

donc $\ln f(x)$ tend vers a et $f(x)$ vers e^a .

f) C'est une forme indéterminée ∞^0 , avec :

$$\ln f(x) = \frac{\ln(a + bx^n)}{\alpha + \beta \ln x} \sim \frac{\ln bx^n}{\beta \ln x} \sim \frac{n \ln x}{\beta \ln x}$$

donc $f(x)$ converge vers $e^{n/\beta}$.

g) C'est une forme indéterminée ∞^0 , avec :

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x^2 + 1)} \sim \frac{\ln x}{\ln x^2}$$

Donc $\ln f(x)$ tend vers $1/2$ et $f(x)$ vers \sqrt{e} .

27. a) Cette fonction est définie et continue pour x strictement positif, en raison de la présence du logarithme. Elle admet pour dérivée :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}(\ln x - x^2 - 1) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - 2x \right) = \frac{1}{x^2}(2 - x^2 - \ln x)$$

qui est du signe du numérateur $u = 2 - x^2 - \ln x$. Sa dérivée est $u' = -2x - 1/x$, toujours négative. La fonction u est donc strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$, s'annulant pour une seule valeur α . Comme $u(1) = 1$ et $u(2) = -2 - \ln 2 < 0$, on

en conclut que cette racine α est comprise entre 1 et 2 ; sa valeur approchée est 1,31. La fonction passe par un maximum d'ordonnée $\beta = f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1 - 2\alpha^2)$, proche de $-1,86$. Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $f(x) \rightarrow -\infty$, donc l'axe des ordonnées est asymptote. Pour x tendant vers plus l'infini, le numérateur est équivalent à $-x^2$, et $f(x)$ à $-x$. D'autre part :

$$f(x) + x = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$$

converge vers 0 par valeurs positives, donc la droite $Y = -x$ est une asymptote située au-dessous du graphe représenté dans la figure 4.3. L'asymptote coupe le graphe pour $\ln x - 1 = 0$, soit pour $x = e$. Le tableau de variation est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	β	\searrow	$-\infty$

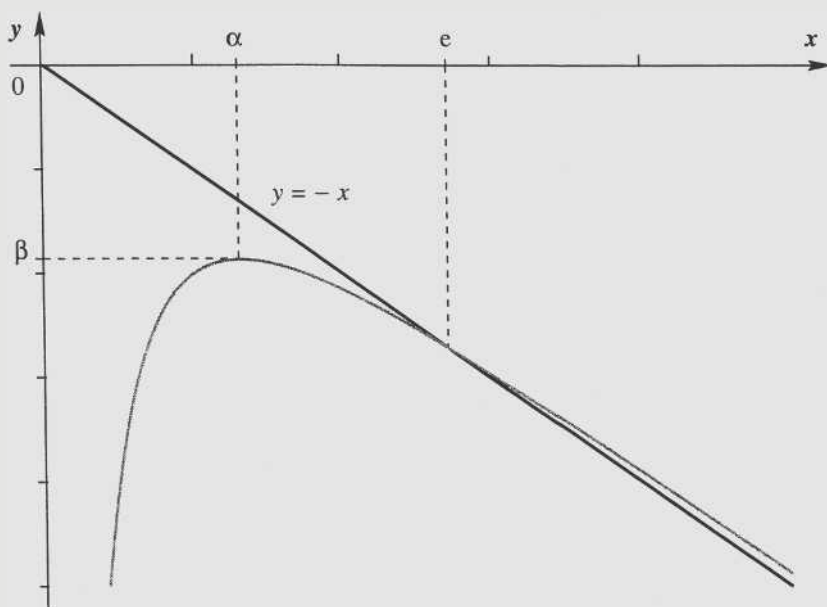


Figure 4.3

b) Cette fonction est définie et continue pour x strictement positif, avec pour dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

qui change de signe pour $x = e^2$. D'après le théorème des croissances comparées, $f(x)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, donc l'axe des abscisses est asymptote. De même, $f(x) \rightarrow -\infty$ quand x tend vers 0, donc l'axe des ordonnées est aussi asymptote. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$2/e$	\searrow	0

Pour préciser le graphe représenté dans la figure 4.4, on calcule la dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{5/2}}$$

Le graphe présente un point d'inflexion d'abscisse $x_0 = e^{8/3}$, la fonction étant convexe pour $x > x_0$.

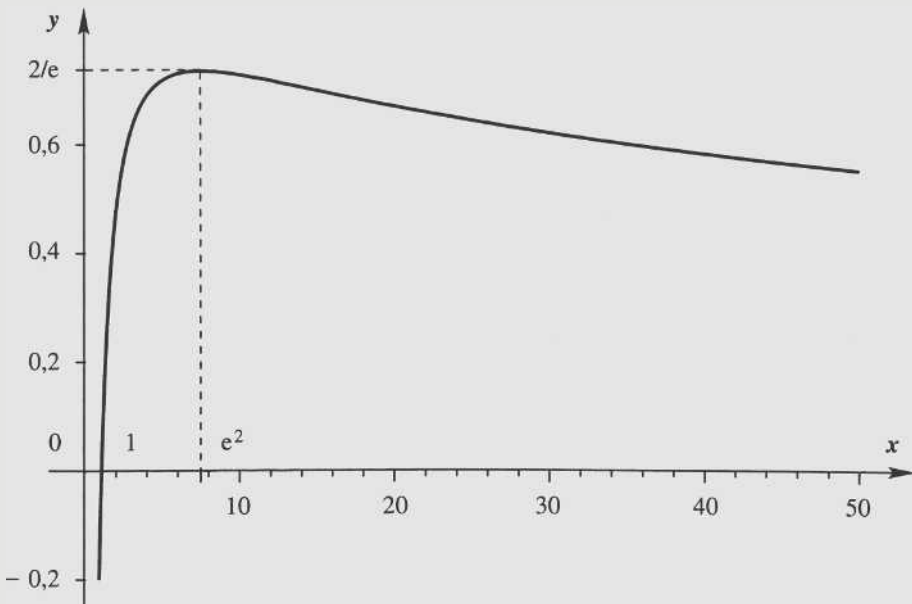


Figure 4.4

c) Cette fonction n'est pas définie pour $x = 0$, mais on peut remarquer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On peut donc la prolonger par continuité en posant par définition $f(0) = 0$. On obtient comme dérivée, pour x différent de 0 :

$$f'(x) = \frac{1 + e^{1/x} + e^{1/x}/x}{(1 + e^{1/x})^2}$$

qui est toujours positive, donc la fonction est croissante. On peut étudier la dérivabilité à l'origine en formant le rapport :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

qui admet comme limite à gauche 1 et comme limite à droite 0. Le graphe admet des demi-tangentes à gauche et à droite distinctes. Quand x devient infini, on peut écrire le développement limité :

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{\varepsilon_1(1/x)}{x^3}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$f(x) = \frac{x}{2(1+u)} = \frac{x}{2} (1 - u + u^2 - u^3 + u^3 \varepsilon_2(u))$$

ayant posé $2u = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{\varepsilon_1(1/x)}{x^3}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{12x^3} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{8x^3} + \frac{\varepsilon_3(1/x)}{x^3} \right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1 + \varepsilon(1/x)}{48x^2} \end{aligned}$$

donc la droite $\Upsilon = x/2 - 1/4$ est une asymptote située au-dessous du graphe représenté dans la figure 4.5.

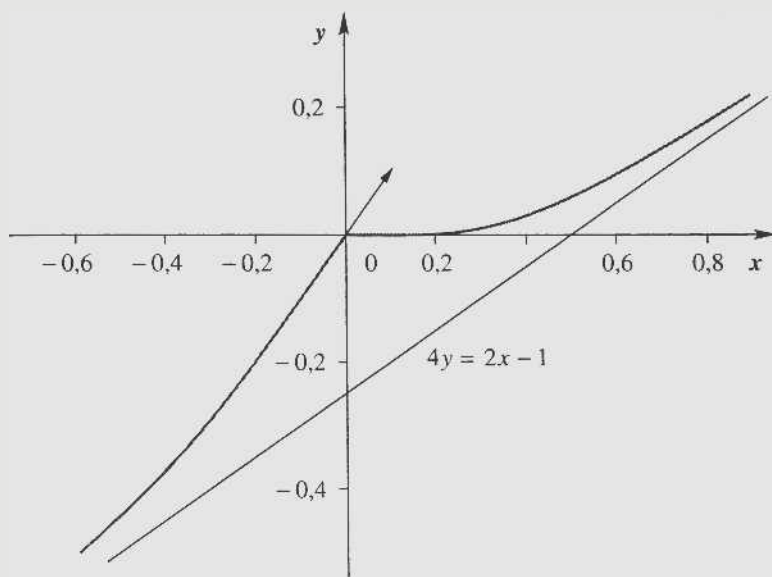


Figure 4.5

d) La fonction est définie pour $1 + 1/x$ positif, expression qui est du signe de $x(x+1)$, donc positive à l'extérieur de l'intervalle $[-1, 0]$. Le domaine de définition est donc formé des intervalles $] -\infty, -1[$ et $] 0, +\infty[$. On calcule ensuite la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} = g(x)$$

dont on étudie le signe en calculant sa dérivée :

$$g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

On détermine maintenant les limites de g aux bornes des intervalles de définition. Quand x devient infini, on doit écrire les développements limités à l'ordre deux, par rapport à l'infiniment petit $1/x$, car les deux termes sont équivalents :

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\varepsilon_1(1/x)}{x^2} \\ \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{x} \frac{1}{1+1/x} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon_2(1/x)}{x} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$g(x) = \frac{1 + \varepsilon(1/x)}{2x^2}$$

tend vers 0 quand x devient infini. Quand x tend vers -1 par valeurs inférieures, on écrit :

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(-x-1) - \ln(-x) - \frac{1}{x+1} \\ &= -\frac{1}{x+1} [1 - (x+1)\ln(-x-1) + (x+1)\ln(-x)] \\ &= \frac{1}{u} [1 + u \ln u - u \ln(1+u)] \end{aligned}$$

où $u = -x-1$ est un infiniment petit positif. Le terme entre crochets tend vers 1, donc $g(x)$ tend vers $+\infty$. Enfin, quand x tend vers 0, il est facile de voir que $g(x)$ tend aussi vers $+\infty$.

Il reste maintenant à étudier les limites de la fonction elle-même. Quand x devient infini :

$$\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \rightarrow 1$$

donc $f(x)$ tend vers e . La droite $Y = e$ est donc une asymptote horizontale. Quand x tend vers -1 , alors $\ln f(x) \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. La droite $X = -1$ est une asymptote verticale. Enfin, quand x tend vers 0 :

$$\ln f(x) = x \ln(x+1) - x \ln x \rightarrow 0$$

donc $f(x)$ tend vers 1 . Comme la dérivée logarithmique tendait vers $+\infty$, l'axe des ordonnées est la demi-tangente verticale au point $(0,1)$. Le tableau de variation ci-après résume tout cela et le graphe est représenté dans la figure 4.6 ci-dessous.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	\parallel	\parallel	-
$g(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty \parallel$	$\parallel +\infty$	$\searrow 0$
$f'(x)$	+	\parallel	$\parallel +\infty$	+
$f(x)$	$e \nearrow$	$+\infty \parallel$	$\parallel 1$	$\nearrow e$

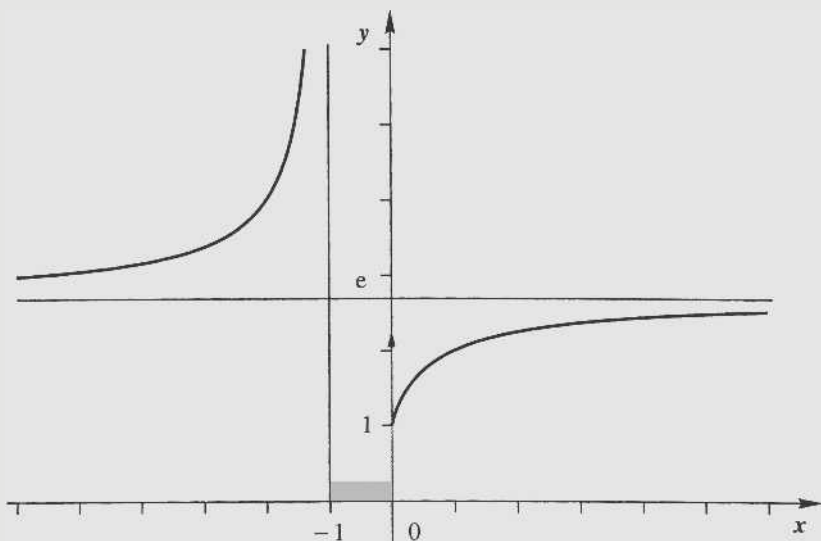


Figure 4.6

e) Cette fonction n'est pas définie pour $x = 0$ et admet pour dérivée :

$$f'(x) = e^{1/x} - \frac{x+2}{x^2} e^{1/x} = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} e^{1/x}$$

qui tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs inférieures. De même, $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, donc l'axe des abscisses

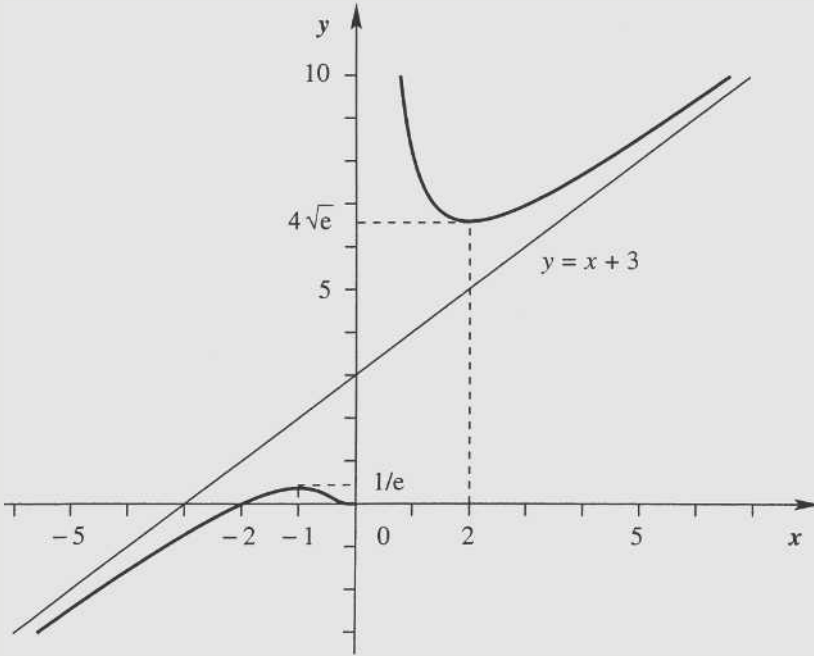


Figure 4.7

est une demi-tangente à l'origine. Quand x devient infini, on utilise un développement limité de l'exponentielle :

$$f(x) = (x+2) \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\varepsilon_1(1/x)}{x^2} \right] = x + 3 + \frac{5 + \varepsilon(1/x)}{2x}$$

qui permet de constater que la droite $Y = x + 3$ est asymptote au graphe, avec $f(x) - Y$ qui est du signe de x . On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$					
$f'(x)$		$+$	0	$-$	\parallel	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	e^{-1}	\searrow	$0 \parallel$	$+\infty$	\searrow	$4\sqrt{e}$	\nearrow	$+\infty$

On peut préciser le graphe de la figure 4.7, en étudiant la dérivée seconde :

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) e^{1/x} - \frac{e^{1/x}}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{5x+2}{x^4} e^{1/x}$$

La fonction est donc convexe sur les intervalles $[-2/5, 0[$ et $]0, +\infty[$. Il y a un point d'inflexion pour $x = -2/5$.

f) La fonction n'est pas définie pour $e^x - 1 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 0$. Cependant, $e^x - 1$ est équivalent à x au voisinage de 0 et $x \ln |x|$ tend vers 0, donc on peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = 0$. Les dérivées ont pour expression :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln|e^x - 1| + x \frac{e^x}{e^x - 1} \\ f''(x) &= \frac{e^x}{e^x - 1} + e^x \frac{e^x - x - 1}{(e^x - 1)^2} \\ &= e^x \frac{2(e^x - 1) - x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

La dérivée seconde est du signe de $g(x) = 2(e^x - 1) - x$, de dérivée $g'(x) = 2e^x - 1$. Ce qui permet de construire le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow	$+\infty$

Le minimum de g est $\ln 2 - 1 < 0$, donc il y a deux valeurs $\alpha < -\ln 2$ et 0 pour lesquelles g s'annule. La dérivée seconde change de signe au voisinage de ces deux points qui sont donc des points d'inflexion. La fonction f est convexe sur $] -\infty, \alpha[$ et $] 0, +\infty[$. Pour $x \rightarrow -\infty$, $\ln|e^x - 1|$ est équivalent à e^x , donc $f(x)$ a même limite que xe^x , soit $f(x) \rightarrow 0$ d'après le théorème des croissances comparées. L'axe des abscisses est asymptote. Pour $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \sim x \ln e^x = x^2$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. Comme $f(x)/x \rightarrow +\infty$, il y a une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

Sur $] 0, +\infty[$, f' est croissante de $-\infty$ à $+\infty$ donc elle s'annule pour une certaine valeur $\beta > 0$ où la fonction f présente un minimum. On obtient comme valeurs numériques approchées $\alpha = -1,6$ et $\beta = 0,28$. La dérivée f' s'annule aussi pour $x = -\ln 2$ où f présente un maximum local. Tout cela est résumé dans le tableau de variation ci-après. Le graphe de f est représenté dans la figure 4.8.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	\nearrow	$(\ln 2)^2$	\searrow	m

28. Si le capital a doublé à l'issue de t années, on a la relation :

$$2C = C(1 + i)^t$$

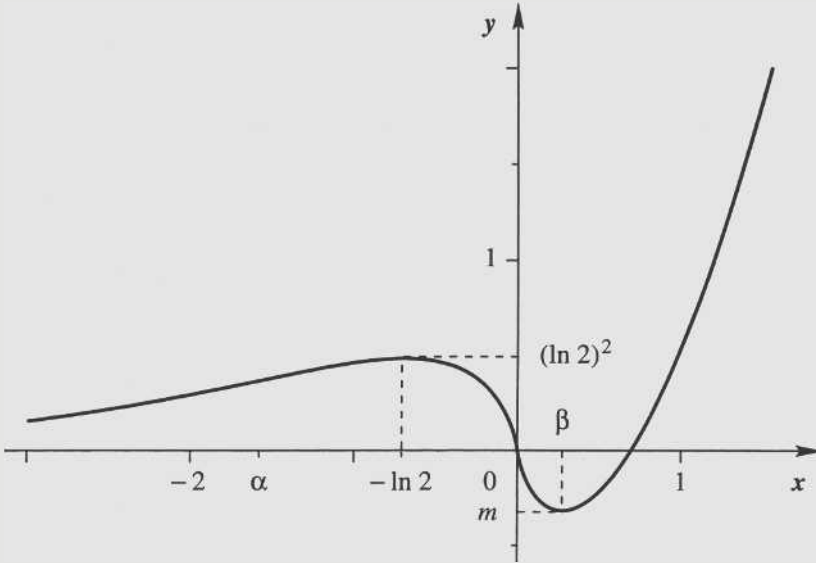


Figure 4.8

Donc $t = \ln 2 / \ln(1+i) = 11$ ans 11 mois. Il est multiplié par dix après une durée $t = \ln 10 / \ln(1+i) = 39$ ans 6 mois.

29. Le taux annuel i et le taux instantané α équivalent donnent le même capital au bout d'une année, soit la relation $1000(1+i) = 1000e^\alpha$. Ainsi $\alpha = \ln(1+i) = 0,04879$ et la valeur du capital à une date t quelconque exprimée en fraction d'année est :

$$C(t) = 1000e^{\alpha t}$$

Pour $t = 1000/360$ on obtient $C = 1145,14$ euros.

30. Le taux de croissance instantané est la dérivée logarithmique de la fonction V :

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

La valeur actualisée du bien est :

$$A = V(1+r)^{-t} = V_0 e^{\sqrt{t}} (1+r)^{-t}$$

Pour déterminer son maximum, on calcule aussi sa dérivée logarithmique :

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln V_0 + \sqrt{t} - t \ln(1+r) \\ \frac{A'}{A} &= \frac{1}{2\sqrt{t}} - \ln(1+r) \end{aligned}$$

La dérivée s'annule pour $\sqrt{t} = 1/2 \ln(1+r)$, avec une dérivée seconde :

$$A'' = A' \left[\frac{1}{2\sqrt{t}} - \ln(1+r) \right] - \frac{A}{4t\sqrt{t}}$$

de valeur négative en ce point où $A' = 0$. Le maximum de A est donc obtenu pour $t = \left[2 \ln(1+r) \right]^{-1} = 27$ ans 6 mois.

Vous avez compris ?

La valeur d'un bien à la date t est déterminée par $V(t) = V_0 2^{\sqrt{t}}$. Calculer la date où la valeur actualisée A est maximum dans le cas où le taux d'escompte annuel est $r = 12\%$.

Réponse :

$$A = V_0 2^{\sqrt{t}} (1+r)^{-t} \quad \text{et} \quad A' = \left[\frac{\ln 2}{2\sqrt{t}} - \ln(1+r) \right] = 0$$

pour $t = \left[\frac{\ln 2}{2 \ln(1+r)} \right]^2 = 9$ ans 4 mois.

TD 5

Fonction de plusieurs variables et optimisation



Les notions de limite, de continuité et de dérivabilité sont étendues aux fonctions de deux ou trois variables. Si la définition de la continuité n'est qu'une généralisation de celle donnée pour une fonction d'une variable, il faut être attentif au fait que cette notion concerne l'ensemble des variables et non pas chacune d'elles prise séparément. Toutes les propriétés relatives aux fonctions continues d'une variable ne sont donc pas généralisables à l'identique. La notion de dérivée partielle, par contre, concerne la dérivabilité par rapport à chacune des variables prise isolément. Lorsque les dérivées partielles secondes sont continues, l'ordre de dérivation par rapport aux variables est indifférent. L'étude d'une fonction, au voisinage d'un point, peut se faire à l'aide de la formule de Taylor qui se généralise au cas d'une fonction de plusieurs variables. Son expression est beaucoup plus compliquée, mais souvent très utile, notamment lors de la recherche d'un extremum local.

Il est important de noter que la recherche d'un extremum local d'une fonction n'est pas a priori liée à l'étude de ses dérivées. Cet extremum peut notamment se situer en un point où la fonction n'est pas dérivable. Une fonction présente un extremum en un point si ses valeurs, au voisinage de ce point, sont toutes supérieures, ou toutes inférieures, à la valeur en ce point. Cependant, si la fonction admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 et si on recherche un extremum dans un ensemble ouvert, alors cette recherche peut se ramener à l'étude du comportement des dérivées. Dans ce cas, on cherche d'abord les points où toutes les dérivées partielles premières sont nulles, ce qui correspond aux conditions dites du premier ordre. Ces points candidats à un extremum sont alors en effet les seuls où il peut y avoir un extremum. On les appelle points critiques ou points stationnaires.

Pour savoir ensuite s'il s'agit effectivement d'un extremum et quelle est sa nature, maximum ou minimum, on examine les conditions du second ordre. Nous donnerons des conditions suffisantes explicites d'existence d'un extremum dans les cas particuliers de fonctions de deux ou trois variables. Il arrive parfois que les variables soient liées par une ou plusieurs relations, appelées contraintes. On introduit alors une nouvelle fonction, faisant intervenir ces contraintes, en utilisant des multiplicateurs de Lagrange.

1 ● Fonction de plusieurs variables

Définition. On appelle *fonction numérique de n variables réelles* une application f d'une partie E de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

L'image d'un point M de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n est donc un nombre réel noté $f(M)$ ou $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Définition. Une fonction f , définie dans une partie E de \mathbb{R}^n , est *continue* en un point a de E si elle admet une limite quand x tend vers a , avec :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Pour simplifier la présentation, nous n'introduisons le concept de dérivée partielle que dans le cas d'une fonction f de trois variables notées x, y et z . On attribue à deux variables des valeurs constantes, par exemple $y = b$ et $z = c$. Quand on fait varier x , f devient une fonction continue de la seule variable x . Si cette fonction admet une dérivée au point $A(a, b, c)$, elle définit la *dérivée partielle* en A de f par rapport à x :

$$f'_x(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b, c) - f(a, b, c)}{\Delta x}$$

On définit bien sûr de façon analogue les 2 autres dérivées partielles :

$$f'_y(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial y} \quad f'_z(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial z}$$

Il est important de noter que l'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité en ce point. On a seulement le résultat suivant.

Théorème. Si une fonction f admet des dérivées partielles toutes continues en un point, alors elle est continue en ce point.

Dérivées partielles du second ordre. Si les dérivées partielles existent, elles définissent les fonctions dérivées, notées f'_x, f'_y, f'_z . Ces fonctions peuvent à leur tour admettre des dérivées partielles, appelées *dérivées partielles du second ordre* ou *secondes*. Par exemple, les dérivées de f'_x par rapport aux variables x, y ,

z sont notées respectivement :

$$f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{xz} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

On peut bien sûr continuer à définir des dérivées partielles d'ordre 3, puis 4...

Théorème de Schwarz. Si une fonction f admet des dérivées partielles du second ordre dans un voisinage du point A et si elles sont continues en ce point, alors :

$$f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A) \quad f''_{xz}(A) = f''_{zx}(A) \quad f''_{yz}(A) = f''_{zy}(A)$$

Dérivée d'une fonction composée. Soit f une fonction définie dans une partie E de \mathbb{R}^2 , admettant des dérivées partielles continues dans E . Si x et y sont des fonctions d'une seule variable indépendante t , continues et dérivables dans un intervalle ouvert de \mathbb{R} , elles définissent une fonction composée de t par :

$$F(t) = f[x(t), y(t)]$$

Cette fonction est dérivable par rapport à t , avec :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Si x et y étaient des fonctions de deux variables indépendantes t et s , on aurait, avec des conditions analogues :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Formule de Taylor. Si f est une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre $p+1$ continues en $M(x, y, z)$ et $M+H(x+b, y+k, z+l)$, la formule de Taylor à l'ordre $p+1$ pour la fonction f s'écrit :

$$\begin{aligned} f(M+H) &= f(M) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} \left(b \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^i f(M) \\ &\quad + \frac{1}{(p+1)!} \left(b \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{p+1} f(M + \theta H) \end{aligned}$$

Dans le développement par la formule du binôme de :

$$\left(b \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^i$$

le terme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\gamma \quad \text{avec } \alpha + \beta + \gamma = i$$

représente l'opérateur :

$$\frac{\partial^i}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$$

qui est appliqué à f , au point M , avec $0 < \theta < 1$ qui définit le point $M + \theta H(x + \theta b, y + \theta k, z + \theta l)$.

Pour une fonction de deux variables, on peut écrire la formule de Taylor à l'ordre deux, au voisinage du point (a, b) en posant $h = x - a, k = y - b$:

$$\begin{aligned} f(a + h, y + k) &= f(a, b) + hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b) + \frac{h^2}{2} f''_{x^2}(a, b) + hkf''_{xy}(a, b) \\ &\quad + \frac{k^2}{2} f''_{y^2}(a, b) + (h^2 + k^2) \varepsilon(h, k) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(h, k)$ tend vers 0 quand (h, k) tend vers $(0, 0)$.

Fonction implicite d'une variable. Soit f une fonction définie dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , admettant des dérivées partielles premières continues dans Ω . Si (x_0, y_0) est une solution de $f(x, y) = 0$, avec $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, alors il existe 2 intervalles ouverts I et J tels que pour tout x de I , il existe un réel unique y de J tel que $f(x, y) = 0$. Cette propriété définit une fonction continue $\varphi : I \rightarrow J$, de dérivée continue sur I définie par :

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x[x, \varphi(x)]}{f'_y[x, \varphi(x)]}$$

Fonction convexe. Une fonction f de dérivées partielles secondes continues dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 est *convexe* si en tout point (x, y) de Ω :

$$f''_{x^2}(x, y) \geq 0 \quad f''_{y^2}(x, y) \geq 0 \quad f''_{x^2}(x, y)f''_{y^2}(x, y) - [f''_{xy}(x, y)]^2 \geq 0$$

On dit que f est *concave* si $-f$ est convexe.

Fonction homogène. Une fonction f définie dans une partie E de \mathbb{R}^n est dite *homogène* de degré r , nombre réel, si pour tout point M de E et tout réel positif λ tel que λM est aussi un point de E , elle vérifie :

$$f(\lambda M) = \lambda^r f(M) \quad \text{ou} \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Propriété. Si une fonction homogène de degré r admet des dérivées partielles, alors ce sont des fonctions homogènes de degré $r - 1$.

Théorème d'Euler. Une fonction f définie dans une partie E de \mathbb{R}^n est homogène de degré r si et seulement si, en tout point où ses dérivées partielles sont continues, elle vérifie :

$$rf(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2 ● Extremum sans contrainte

Définition. On dit que f présente un *extremum local* au point M_0 s'il existe un voisinage de M_0 où $f(M) - f(M_0)$ garde un signe constant. Si ce signe est positif, il s'agit d'un *minimum local* et s'il est négatif, d'un *maximum local*. Si $f(M) - f(M_0)$ garde un signe constant pour tous les points M où f est définie, il s'agit d'un *extremum absolu* ou *global*.

Théorème. Si f admet des dérivées partielles premières toutes continues, pour que f présente un extremum en un point M_0 d'un ouvert, il est nécessaire, mais non suffisant, que toutes les dérivées partielles premières s'annulent en ce point :

$$f'_{x_i}(M_0) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Définition. Un point M_0 où toutes les dérivées partielles premières s'annulent est appelé un *point stationnaire* ou *point critique*.

Extremum d'une fonction de deux variables. Si f admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 3, au voisinage d'un point stationnaire M_0 , les termes du premier ordre du développement de Taylor sont nuls. Ainsi, $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ est du signe de :

$$h^2 f''_{x^2}(x_0, y_0) + 2hk f''_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f''_{y^2}(x_0, y_0)$$

pour (h, k) voisin de $(0, 0)$. Nous pouvons donc donner des conditions suffisantes du *second ordre* d'existence d'un extremum. On utilise pour cela les notations de Monge :

$$r_0 = f''_{x^2}(x_0, y_0) \quad s_0 = f''_{xy}(x_0, y_0) \quad t_0 = f''_{y^2}(x_0, y_0)$$

- si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, il y a un extremum en M_0 qui est un minimum si $r_0 > 0$ (ou $t_0 > 0$) et un maximum si $r_0 < 0$ (ou $t_0 < 0$) ;
- si $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, il n'y a pas d'extremum en M_0 ; on dit que M_0 est un point *col*, ou *point-selle* ;

- si $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$, on ne peut pas conclure; il faut étudier directement le signe de $f(x_0 + b, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ pour (b, k) voisin de $(0, 0)$, ou écrire la formule de Taylor à un ordre supérieur si cela est possible.

Extremum d'une fonction de trois variables. Si f admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 3, au voisinage d'un point stationnaire M_0 , les termes du premier ordre du développement de Taylor sont nuls. Ainsi, $f(x_0 + b, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0)$ est du signe de :

$$\Delta_{M_0}(b, k, l) = b^2 f''_{x^2}(M_0) + k^2 f''_{y^2}(M_0) + l^2 f''_{z^2}(M_0) + 2bk f''_{xy}(M_0) \\ + 2kl f''_{yz}(M_0) + 2bl f''_{xz}(M_0)$$

pour (b, k, l) voisin de $(0, 0, 0)$. Il s'agit d'une forme quadratique des trois variables b, k, l que l'on peut décomposer par la méthode de Gauss (voir *Algèbre*, chap. 8). Les conclusions dépendent alors de la nature de cette forme quadratique :

- si Δ_{M_0} est définie positive (resp. négative), il y a un minimum (resp. maximum) en M_0 ;
- si Δ_{M_0} est non définie, il n'y a pas d'extremum en M_0 qui est un point col ;
- si Δ_{M_0} est semi-définie, on ne peut pas conclure; il faut étudier directement le signe de $f(x_0 + b, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0)$ pour (b, k, l) voisin de $(0, 0, 0)$, ou écrire la formule de Taylor à un ordre supérieur si cela est possible.

Il est possible également d'écrire des conditions suffisantes d'existence d'un extremum de f qui font intervenir sa *matrice hessienne* constituée de toutes les dérivées secondes :

$$H = \left(f''_{x_i x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$$

Nous noterons $H_p, 1 \leq p \leq 3$, le déterminant formé à partir des p premières lignes et des p premières colonnes de H . Ces conditions suffisantes s'écrivent alors sous la forme suivante :

- si $H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0$ en un point M_0 , alors il y a un maximum en ce point ;
- si $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$ en un point M_0 , alors il y a un minimum en ce point.

3 ● Extremum sous contraintes

On suppose maintenant que les variables x_1, x_2, \dots, x_n sont liées par une contrainte qui se traduit par une équation de la forme :

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Deux cas particuliers peuvent se présenter.

- L'équation précédente permet d'exprimer l'une des variables en fonction des $n-1$ autres. On est alors ramené à un problème de recherche d'extremum sans contrainte, pour une fonction de $n-1$ variables.
- L'équation précédente peut être paramétrée, c'est-à-dire que toutes les variables x_1, x_2, \dots, x_n peuvent s'exprimer en fonction d'un même paramètre réel t . On est alors ramené au problème de la recherche d'un extremum pour la fonction F de la seule variable t , définie par :

$$F(t) = f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

Dans le cas général, on introduit un nombre réel quelconque λ , appelé *multiplicateur de Lagrange*, qui permet de définir une fonction L , appelée *lagrangien*, et définie par :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

On est alors ramené au problème de la recherche d'un extremum pour cette fonction L .

Si f et g admettent des dérivées partielles premières continues, on écrit les conditions nécessaires du premier ordre qui permettent de déterminer les points stationnaires de coordonnées $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$. Pour déterminer la nature de ces points, extremum ou col, il faut étudier le signe de :

$$f(\hat{x}_1 + h_1, \hat{x}_2 + h_2, \dots, \hat{x}_n + h_n) - f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$$

lorsque (h_1, h_2, \dots, h_n) varie au voisinage de l'origine, sous la contrainte :

$$g(\hat{x}_1 + h_1, \hat{x}_2 + h_2, \dots, \hat{x}_n + h_n) = 0$$

Cette étude de signe peut se faire en utilisant un développement de Taylor, mais il faut bien noter qu'ici les termes du premier ordre en h_1, h_2, \dots, h_n ne sont pas nuls et qu'en plus ces variables ne sont pas indépendantes.

Extremum d'une fonction de deux variables. On obtient des conditions nécessaires qui s'expriment à l'aide du déterminant :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} L''_{x^2} & L''_{xy} & g'_x \\ L''_{xy} & L''_{y^2} & g'_y \\ g'_x & g'_y & 0 \end{vmatrix}$$

On calcule la valeur de ce déterminant en un point stationnaire M_0 .

- si $\Delta_3(M_0) < 0$, il y a un minimum en M_0 ;
- si $\Delta_3(M_0) > 0$, il y a un maximum en M_0 .

Extremum d'une fonction de trois variables. On obtient des conditions nécessaires qui s'expriment à l'aide des déterminants :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} L''_{x^2} & L''_{xy} & g'_x \\ L''_{xy} & L''_{y^2} & g'_y \\ g'_x & g'_y & 0 \end{vmatrix} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} L''_{x^2} & L''_{xy} & L''_{xz} & g'_x \\ L''_{xy} & L''_{y^2} & L''_{yz} & g'_y \\ L''_{xz} & L''_{yz} & L''_{z^2} & g'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z & 0 \end{vmatrix}$$

On calcule la valeur de ces déterminants en un point stationnaire M_0 .

- si $\Delta_3(M_0) < 0$ et $\Delta_4(M_0) < 0$, il y a un minimum en M_0 ;
- si $\Delta_3(M_0) > 0$ et $\Delta_4(M_0) < 0$ il y a un maximum en M_0 .

Cas de plusieurs contraintes. Dans le cas où il y a p contraintes qui se traduisent par les p équations :

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq p$$

on introduit p multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et on cherche les extremums du lagrangien L défini par :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$$



1. Si $f(a)$ existe et si la limite de $f(x)$ existe quand x tend vers a , alors f est continue en a .
2. Une fonction de deux variables, continue en un point par rapport à chacune des deux variables séparément, est continue en ce point.
3. L'inversion de l'ordre de dérivation par rapport aux variables ne change pas la valeur des dérivées partielles du second ordre en un point où elles existent.
4. Une fonction de signe constant possède au moins un extremum.
5. Si une fonction de deux variables admet des dérivées secondes toutes positives en un point stationnaire, il y a un minimum en ce point.
6. Une fonction ne peut présenter un extremum qu'en un point stationnaire.
7. Une fonction qui admet des dérivées partielles premières et ne possède aucun point stationnaire peut présenter des extremums.



8. Étudier la limite à l'origine de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

9. On considère la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Étudier sa limite à l'origine en faisant tendre x et y vers 0, d'abord séparément puis simultanément.



Limites

10. Calculer les limites des expressions suivantes :

$$\text{a) } \frac{\sin(xy)}{x} \quad \text{avec } (x, y) \rightarrow (0, 1) \quad \text{b) } \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x \quad \text{avec } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 2$$

$$\text{c) } \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad \text{avec } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut utiliser les équivalents pour les fonctions usuelles. Quand les deux variables deviennent infinies, on peut utiliser les coordonnées polaires.

Continuité

11. Étudier la continuité à l'origine des fonctions f définies par $f(0,0) = 0$ et par les expressions $f(x, y)$ suivantes pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$\text{a) } \frac{x}{x+y}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{c) } \frac{|x+y|}{x^2 + y^2}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. La valeur de f à l'origine étant nulle, il faut que sa limite soit aussi égale à 0 pour qu'elle soit continue en ce point.

Dérivabilité

12. On considère la fonction f définie par :

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(0, 0) = 0$$

Déterminer les fonctions g et h définies par :

$$g(x) = f'_y(x, 0) \quad h(y) = f'_x(0, y)$$

Calculer ensuite $g'(0)$ et $h'(0)$. Que peut-on en conclure ?

Analyse de l'énoncé et conseils. On utilise la définition des dérivées partielles pour les calculer. On exprime ensuite les fonctions g et h à l'aide de f pour conclure.

Calcul de dérivées partielles

13. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions f définies par les expressions ci-après.

$$a) f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

$$b) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$c) f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$d) f(x, y, z) = \ln(xy + z)$$

$$e) f(x, y, z) = (xy)^z$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Quand on dérive par rapport à une variable, les autres sont considérées comme des constantes.

14. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions f définies par les expressions ci-après.

$$a) f(x, y) = xe^{y^2}$$

$$b) f(x, y) = x^y$$

$$c) f(x, y) = x^2 + y^2^{1/3}$$

$$d) f(x, y, z) = x^2z + xy^3 + z$$

$$e) f(x, y, z) = xz^3 + y^2z + xy^4z$$

$$f) f(x, y, z) = xy \ln z$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Lorsqu'on dérive par rapport à une variable, les autres sont considérées comme des constantes. Si les dérivées partielles premières sont continues, il n'y a que trois dérivées secondes à calculer, pour une fonction de deux variables, et six pour une fonction de trois variables.

Dérivées de fonctions composées

15. Soit f la fonction définie par :

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

On définit la fonction composée de t :

$$F(t) = f(a \sin t, b \cos t)$$

où a et b sont deux réels positifs. Calculer les deux premières dérivées de F par rapport à t .

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'appliquer les formules des rappels de cours.

16. La fonction f est fonction des variables x et y par l'intermédiaire des fonctions u et v :

$$f(u, v) = u \ln |v|$$

avec $u = u(x, y) = x + 2y$ et $v = v(x, y) = y - 2x$

Calculer les dérivées partielles premières de f .

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'appliquer les formules des rappels de cours.

Fonctions homogènes

17. Vérifier que les fonctions f définies ci-après sont des fonctions homogènes dont on précisera le degré. Montrer ensuite qu'elles vérifient le théorème d'Euler.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} & \text{b) } f(x, y) &= \ln \frac{x}{y} \\ \text{c) } f(x, y) &= x^\alpha g\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

avec α réel quelconque et g fonction dérivable sur \mathbb{R} .

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'appliquer la définition puis de calculer les dérivées partielles premières.

Formule de Taylor

18. Écrire la formule de Taylor pour les fonctions f définies ci-après.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= x^2 y \text{ à l'ordre deux, au voisinage du point } (1, 1). \\ \text{b) } f(x, y) &= y^x \text{ à l'ordre deux, au voisinage du point } (1, 1). \\ \text{c) } f(x, y) &= e^x \sin y \text{ à l'ordre trois, au voisinage de l'origine.} \end{aligned}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On calcule les dérivées partielles au point demandé, à l'ordre 2 ou à l'ordre 3, puis on applique la formule donnée en cours.

Polynômes de deux variables

19. Rechercher les extremums des fonctions f définies ci-après.

a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y$

b) $f(x, y) = x^2 + y^4 - 2y^2$

c) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

d) $f(x, y) = x^4 + x^2y - x^2 - y$

e) $f(x, y) = x^2 - 4xy + 8y^2 + 2x + 3$

f) $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$

Analyse de l'énoncé et conseils. Chaque fonction f est un polynôme, donc on cherche les points stationnaires M_0 . Les conditions du second ordre permettent ensuite de déterminer la nature de ces points.

Polynômes avec paramètres

20. Rechercher, en fonction du paramètre réel a , les extremums des fonctions f définies ci-après.

a) $f(x, y) = x^3 - 3axy + y^3$

b) $f(x, y) = x^4 - ax^2y + y^2$

c) $f(x, y) = \frac{a}{2}(x^2 + y^2) + xy + y - x - 1$

Analyse de l'énoncé et conseils. On procède comme dans l'exercice précédent, en discutant suivant les valeurs du paramètre.

Fonctions quelconques

21. Rechercher les extremums des fonctions f définies ci-après.

a) $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2 + 3}$

b) $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

c) $f(x, y) = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

d) $f(x, y) = \exp(2x^2 + y^2 - 8x - 4y)$

Analyse de l'énoncé et conseils. Les expressions de ces fonctions étant assez compliquées, on essaye de déterminer les extremums par une étude directe ou par l'utilisation des coordonnées polaires.

Extremums sans dérivée

22. Rechercher les extremums des fonctions f définies ci-après.

a) $f(x, y) = x^2 + |x + y|$

b) $f(x, y) = (y^2 - 2)\sqrt[3]{x^2}$

Analyse de l'énoncé et conseils. Aux points où une fonction n'admet pas de dérivées partielles premières, il faut faire une étude directe pour la recherche d'extremums.

Fonctions de trois variables

23. Rechercher les extremums des fonctions f définies ci-après.

a) $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + z^2 - 4z + 5$

b) $f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$

c) $f(x, y, z) = x \ln y + z \ln x - y$

Analyse de l'énoncé et conseils. Aux points stationnaires, on détermine la nature de la forme quadratique $\Delta(b, k, l)$ ou on fait une étude directe.

Optimisation avec contrainte

24. Rechercher les extremums des fonctions f définies ci-après, les variables étant liées par une contrainte.

a) $f(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ avec $x^2 + y = 1$

b) $f(x, y) = x \ln x + y \ln y$ avec $x + y = 2$

c) $f(x, y) = x^2 y$ avec $x + y = 1$

d) $f(x, y) = \exp(-x^2 + xy - y^2 + 3y - 3)$ avec $x + y = 1$

Analyse de l'énoncé et conseils. Il s'agit à chaque fois d'un cas simple où l'une des variables peut s'exprimer en fonction de l'autre. On est donc ramené au problème de la recherche d'un extremum d'une fonction d'une seule variable.

25. Rechercher les extremums des fonctions f définies ci-après, les variables étant liées par une contrainte.

a) $f(x, y) = xy$ avec $x^2 + y^2 = 2$

b) $f(x, y) = \ln(x - y)$ avec $x^2 + y^2 = 2$

c) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2 - 2x + y)$ avec $x^2 + y^2 = 2$

d) $f(x, y) = e^{-y} \sqrt{x+1} + e^{-x} \sqrt{y+1}$ avec $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4$

Analyse de l'énoncé et conseils. Dans les trois premiers cas, la contrainte correspond à l'équation d'un cercle. En paramétrant l'équation de ce cercle, on est ramené au problème de la recherche d'un extremum d'une fonction d'une seule variable. Dans le dernier cas, on peut soit à nouveau paramétrer la contrainte, soit utiliser le multiplicateur de Lagrange.

26. Rechercher les extremums des fonctions f définies ci-après, les variables étant liées par une contrainte.

a) $f(x, y, z) = x + y + z$ avec $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

b) $f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z$ avec $x + y + z = 9$

Analyse de l'énoncé et conseils. On calcule la valeur des déterminants Δ_3 et Δ_4 , définis en cours, aux points stationnaires. Si les conditions suffisantes d'existence d'un extremum ne sont pas remplies, on effectue une étude directe.

Optimisation avec deux contraintes

27. Rechercher les extremums de la fonction f définie ci-après, les variables étant liées par deux contraintes :

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4xy + 6z^2 + 12z \quad \text{avec} \quad z - x = 3 \quad \text{et} \quad x - y = 0$$

Analyse de l'énoncé et conseils. La simplicité des contraintes permet de ramener le problème à celui de la recherche d'extremum pour une fonction d'une seule variable. Cependant, à titre d'entraînement, il sera intéressant de retrouver le résultat par la méthode générale du lagrangien.



QCM

1. **Faux.** Il faut de plus que la limite de $f(x)$ soit égale à $f(a)$.
2. **Faux.** Voir la question de réflexion 9.
3. **Faux.** Ce n'est vrai que si ces dérivées partielles sont continues.
4. **Faux.** Une fonction de signe constant ne possède pas obligatoirement un extremum, sauf si elle s'annule à l'origine. Par exemple, si elle est positive, pour tout point M on a $f(M) \geq f(0) = 0$ et il y a donc un minimum global à l'origine.
5. **Faux.** Si en ce point on a $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, ce n'est pas un extremum mais un col.
6. **Faux.** Une fonction peut présenter un extremum en un point où elle n'admet pas de dérivées. Par exemple $f(x, y) = |x| + |y| \geq 0 = f(0, 0)$; il y a un minimum global à l'origine qui n'est pas un point stationnaire.
7. **Vrai.** Si une fonction est définie sur un domaine borné, elle peut présenter des extremums sur la frontière de ce domaine.
8. Quand x et y tendent vers 0, l'expression de $f(x, y)$ est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Nous allons étudier cette limite selon la manière dont le point (x, y) se déplace vers l'origine. S'il est sur la droite passant par l'origine $y = tx$, on obtient pour t fixé et x non nul :

$$f(x, tx) = \frac{tx^3}{x^4 + t^2 x^2} = \frac{tx}{x^2 + t^2}$$

Dans ce cas, f tend vers 0 pour toute valeur de t .

Faisons tendre maintenant le point (x, y) vers l'origine sur la parabole $y = x^2$:

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

Pour tout x non nul, f est constante sur cette parabole, donc sa limite est cette fois $\frac{1}{2}$. La limite obtenue dépend de la façon dont (x, y) tend vers $(0, 0)$, donc on en conclut que f n'admet pas de limite en ce point.

9. Pour tout x :

$$f(x, 0) = 0$$

Donc f est continue par rapport à x , pour $x = 0$, puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$$

De même, pour tout y :

$$f(0, y) = 0$$

Donc f est aussi continue par rapport à y , pour $y = 0$. Faisons maintenant tendre le point (x, y) vers l'origine, le long d'une droite passant par l'origine, définie par $y = tx$. Pour tout réel t fixé :

$$f(x, tx) = \frac{t}{1 - t + t^2} \quad x \neq 0$$

Cette valeur dépend de t quelconque et n'a pas pour limite $f(0, 0) = 0$ quand x tend vers 0. La fonction f n'est donc pas continue au point $(0, 0)$.

10. a) On écrit l'expression sous la forme :

$$y \times \frac{\sin(xy)}{xy}$$

Quand (x, y) tend vers $(0, 1)$, le produit $t = xy$ tend vers 0 et par conséquent l'équivalence $\sin t \sim t$ permet d'obtenir :

$$\frac{\sin(xy)}{xy} \rightarrow 1$$

Puisque y tend vers 1, on en déduit donc que :

$$\frac{\sin(xy)}{x} \rightarrow 1$$

b) On prend le logarithme :

$$\ln \left(1 + \frac{y}{x} \right)^x = x \ln \left(1 + \frac{y}{x} \right)$$

Quand x devient infini, $t = \frac{y}{x}$ est un infiniment petit et l'équivalence $\ln(1+t) \sim t$ permet d'obtenir :

$$\ln \left(1 + \frac{y}{x} \right)^x \sim x \frac{y}{x}$$

Puisque y tend vers 2, le logarithme précédent tend aussi vers 2, et :

$$\left(1 + \frac{y}{x} \right)^x \rightarrow e^2$$

c) On écrit l'expression avec les coordonnées polaires $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}{\rho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\rho}$$

Quand x et y deviennent infinis, il en est de même de ρ et la fraction précédente tend vers 0 puisque le numérateur est borné.

Vous avez compris ?

Calculer la limite suivante :

$$e^{x-y} \quad \text{avec} \quad x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$$

Réponse : pas de limite.

11. a) On fait tendre (x, y) vers l'origine sur la droite $y = tx$. Pour t fixé et x non nul, on obtient :

$$f(x, tx) = \frac{x}{x+tx} = \frac{1}{1+t}$$

Cette expression dépend de t , qui peut être quelconque, donc $f(x, tx)$ n'admet pas de limite à l'origine. La fonction f ne peut donc pas être continue en ce point.

b) On procède comme dans la question précédente :

$$f(x, tx) = \frac{x^2 - t^2 x^2}{x^2 + t^2 x^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Cette valeur dépendant de t , $f(x, tx)$ n'admet pas de limite, donc f n'est pas continue à l'origine.

c) On obtient encore pour x non nul :

$$f(x, tx) = \frac{|x+tx|}{x^2+t^2x^2} = \frac{|1+t|}{(1+t^2)|x|}$$

Cette expression devient infinie quand x tend vers 0, donc $f(x, tx)$ n'admet pas de limite et f n'est donc pas continue à l'origine.

Vous avez compris ?

Étudier la continuité à l'origine de la fonction f définie par $f(0,0) = 0$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$ par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$$

Réponse : $|f(x, y)| \leq x^2 + y^2 \rightarrow 0$, fonction continue à l'origine.

12. Par définition de la dérivée partielle :

$$f'_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y}$$

Soit, puisque $f(x, 0) = 0$ pour x non nul :

$$g(x) = f'_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x$$

De même :

$$\begin{aligned} b(y) = f'_x(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y \end{aligned}$$

Ces deux fonctions ont donc pour dérivées respectives $g'(x) = 1$ et $b'(y) = -1$, donc $g'(0) = 1$ et $b'(0) = -1$. Par ailleurs :

$$g'(x) = \frac{\partial f'_y(x, 0)}{\partial x} = f''_{yx}(x, 0) \quad b'(y) = \frac{\partial f'_x(0, y)}{\partial y} = f''_{xy}(0, y)$$

On a par conséquent :

$$f''_{yx}(0, 0) = g'(0) = 1 \quad f''_{xy}(0, 0) = b'(0) = -1$$

On constate donc que $f''_{yx}(0, 0) \neq f''_{xy}(0, 0)$. Ces deux dérivées existent à l'origine, mais leurs valeurs sont distinctes car les dérivées f''_{yx} et f''_{xy} ne sont pas continues en ce point.

13. a) Pour dériver par rapport à x , on écrit :

$$f(x, y) = \sqrt{x \left(y + \frac{1}{y} \right)}$$

On obtient comme dérivée :

$$f'_x(x, y) = \frac{y + 1/y}{2\sqrt{x(y + 1/y)}}$$

On dérive de même par rapport à y :

$$f'_y(x, y) = \frac{x(1 - 1/y^2)}{2\sqrt{x(y + 1/y)}}$$

b) Si on dérive par rapport à x , le numérateur a pour dérivée 1 et le dénominateur $x(x^2 + y^2)^{-1/2}$. On obtient donc :

$$f'_x(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^{1/2} - x^2(x^2 + y^2)^{-1/2}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Si on dérive par rapport à y , on écrit la fonction sous la forme :

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$$

La dérivée est donc :

$$f'_y(x, y) = -\frac{x}{2}(x^2 + y^2)^{-3/2}(2y) = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Ces dérivées existent sur l'ensemble de définition de f , c'est-à-dire dans tout le plan, sauf à l'origine.

c) La fonction à dériver est de la forme $\ln u$, donc de dérivée $\frac{u'}{u}$. Si on dérive par rapport à x :

$$f'_x(x, y) = \frac{1 + x(x^2 + y^2)^{-1/2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En dérivant par rapport à y :

$$f'_y(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2)^{-1/2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2}$$

Ces dérivées existent sur l'ensemble de définition de f , c'est-à-dire dans tout le plan, sauf à l'origine.

d) Les dérivées se calculent comme dans la question précédente, pour $xy + z > 0$:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{y}{xy + z} \quad f'_y(x, y, z) = \frac{x}{xy + z} \quad f'_z(x, y, z) = \frac{1}{xy + z}$$

e) Les dérivées par rapport à x et y sont simplement celles de fonctions puissances :

$$f'_x(x, y, z) = yz(xy)^{z-1} \quad f'_y(x, y, z) = xz(xy)^{z-1}$$

Pour dériver par rapport à z , on écrit $\ln f(x, y, z) = z \ln(xy)$ dont la dérivée est $\ln(xy)$. Par conséquent :

$$f'_z(x, y, z) = f(x, y, z) \times \ln(xy) = (xy)^z \ln(xy)$$

Ces dérivées existent dans le domaine de définition de f où on doit avoir $xy > 0$.

Vous avez compris ?

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions définies par les expressions ci-après :

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x+y} \quad g(x, y) = \ln \left(1 + \frac{y}{x} \right)$$

Réponses :

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{y^3}{(x+y)^2} & f'_y(x, y) &= xy \frac{2x+y}{(x+y)^2} \\ g'_x(x, y) &= -\frac{y}{x(x+y)} & g'_y(x, y) &= \frac{1}{x+y} \end{aligned}$$

14. a) La fonction exponentielle est continue et dérivable partout, donc toutes les dérivées de f existent et sont continues dans \mathbb{R}^2 . On calcule les deux dérivées partielles premières :

$$f'_x(x, y) = e^{y^2} \quad f'_y(x, y) = 2xye^{y^2}$$

On en déduit :

$$f''_{x^2}(x, y) = 0 \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 2ye^{y^2}$$

$$f''_{y^2}(x, y) = 2x(1 + 2y^2)e^{y^2}$$

b) Cette fonction est continue et de dérivées continues dans son domaine de définition où on doit avoir $x > 0$. On écrit $\ln f(x, y) = y \ln x$ et on obtient comme dérivées premières :

$$f'_x(x, y) = yx^{y-1} \quad f'_y(x, y) = x^y \ln x$$

Les dérivées secondes sont :

$$f''_{x^2}(x, y) = y(y-1)x^{y-2} \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = x^{y-1}(y \ln x + 1)$$

$$f''_{y^2}(x, y) = x^y (\ln x)^2$$

c) Cette fonction admet des dérivées continues sauf à l'origine, avec des dérivées premières :

$$f'_x(x, y) = \frac{2}{3} x(x^2 + y^2)^{-2/3} \quad f'_y(x, y) = \frac{2}{3} y(x^2 + y^2)^{-2/3}$$

On obtient comme dérivées secondes :

$$f''_{x^2}(x, y) = \frac{2(3y^2 - x^2)}{9(x^2 + y^2)^{5/3}} \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -\frac{8xy}{9(x^2 + y^2)^{5/3}}$$

$$f''_{y^2}(x, y) = \frac{2(3x^2 - y^2)}{9(x^2 + y^2)^{5/3}}$$

d) C'est une fonction polynômiale continue et de dérivées continues, avec pour dérivées premières :

$$f'_x(x, y, z) = 2xz + y^3 \quad f'_y(x, y, z) = 3xy^2 \quad f'_z(x, y, z) = x^2 + 1$$

Les dérivées secondes sont :

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(x, y, z) &= 2z & f''_{xy}(x, y, z) &= f''_{yx}(x, y, z) = 3y^2 \\ f''_{xz}(x, y, z) &= f''_{zx}(x, y, z) = 2x \\ f''_{y^2}(x, y, z) &= 6xy & f''_{yz}(x, y, z) &= f''_{zy}(x, y, z) = 0 \\ f''_{z^2}(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

e) C'est encore une fonction polynômiale, de dérivées continues, avec :

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= z^3 + y^4 z & f'_y(x, y, z) &= 2yz + 4xy^3 z \\ f'_z(x, y, z) &= 3xz^2 + y^2 + xy^4 \end{aligned}$$

Les dérivées secondes sont :

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(x, y, z) &= 0 & f''_{xy}(x, y, z) &= f''_{yx}(x, y, z) = 4y^3 z \\ f''_{xz}(x, y, z) &= f''_{zx}(x, y, z) = 3z^2 + y^4 \\ f''_{y^2}(x, y, z) &= 2z + 12xy^2 z & f''_{yz}(x, y, z) &= f''_{zy}(x, y, z) = 2y + 4xy^3 \\ f''_{z^2}(x, y, z) &= 6xz \end{aligned}$$

f) La fonction logarithme est dérivable dans son ensemble de définition, donc cette fonction admet des dérivées continues pour $z > 0$. Les dérivées premières sont :

$$f'_x(x, y, z) = y \ln z \quad f'_y(x, y, z) = x \ln z \quad f'_z(x, y, z) = \frac{xy}{z}$$

$$f''_{x^2}(x, y, z) = 0 \quad f''_{xy}(x, y, z) = f''_{yx}(x, y, z) = \ln z$$

$$f''_{xz}(x, y, z) = f''_{zx}(x, y, z) = \frac{y}{z}$$

$$f''_{y^2}(x, y, z) = 0 \quad f''_{yz}(x, y, z) = f''_{zy}(x, y, z) = \frac{x}{z}$$

$$f''_{z^2}(x, y, z) = -\frac{xy}{z^2}$$

Vous avez compris ?

Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions définies par les expressions ci-après :

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \quad g(x, y, z) = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5$$

Réponses :

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= -\frac{4y}{(x+y)^3} & f''_{xy} &= 2\frac{x-y}{(x+y)^3} & f''_{y^2} &= \frac{4x}{(x+y)^3} \\ g''_{x^2} &= 6xy^2z & g''_{yx} &= g''_{xy} = 6x^2yz & g''_{xz} &= g''_{zx} = 3x^2y^2 \\ g''_{y^2} &= 2x^3z & g''_{yz} &= g''_{zy} = 2x^3y & g''_{z^2} &= 0 \end{aligned}$$

15. On obtient comme dérivées :

$$f'_x = 2x \quad f'_y = -2y \quad x'(t) = a \cos t \quad y'(t) = -b \sin t$$

D'après les formules des rappels de cours :

$$F'(t) = 2a^2 \sin t \cos t + 2b^2 \sin t \cos t = (a^2 + b^2) \sin 2t$$

Il suffit ensuite de dériver pour obtenir :

$$F''(t) = 2(a^2 + b^2) \cos 2t$$

16. D'après les formules de rappels de cours :

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x \quad f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y$$

On obtient ici :

$$f'_u = \ln|v| \quad f'_v = \frac{u}{v} \quad u'_x = 1 \quad v'_x = -2 \quad u'_y = 2 \quad v'_y = 1$$

Soit :

$$f'_x(x, y) = \ln|v(x, y)| - 2 \frac{u(x, y)}{v(x, y)} = \ln|y - 2x| - 2 \frac{2y + x}{y - 2x}$$

$$f'_y(x, y) = 2 \ln|v(x, y)| + \frac{u(x, y)}{v(x, y)} = \ln(y - 2x)^2 + \frac{2y + x}{y - 2x}$$

Vous avez compris ?

La fonction f est fonction des variables x et y exprimées en coordonnées polaires $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Exprimer les dérivées partielles de f par rapport à x et y en fonction de celles par rapport à ρ et θ .

Réponse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \end{aligned}$$

17. a) Pour tout $\lambda > 0$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\sqrt[3]{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}} = \lambda^{1/3} f(x, y)$$

donc f est homogène de degré $\frac{1}{3}$. En tout point autre que l'origine, on obtient comme dérivées partielles :

$$f'_x(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^{1/3} - \frac{2}{3} x(x + y)(x^2 + y^2)^{-2/3}}{(x^2 + y^2)^{2/3}} = \frac{x^2 + 3y^2 - 2xy}{3(x^2 + y^2)^{4/3}}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y^2 + 3x^2 - 2xy}{3(x^2 + y^2)^{4/3}}$$

On vérifie le théorème d'Euler :

$$\begin{aligned} x f'_x + y f'_y &= \frac{x^3 + 3xy^2 - 2x^2 y + y^3 + 3x^2 y - 2xy^2}{3(x^2 + y^2)^{4/3}} \\ &= \frac{x^3 + y^3 + xy(x + y)}{3(x^2 + y^2)^{4/3}} = \frac{(x + y)(x^2 + y^2)}{3(x^2 + y^2)^{4/3}} = \frac{1}{3} f \end{aligned}$$

b) On obtient pour tout $\lambda > 0$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \ln \frac{\lambda x}{\lambda y} = f(x, y)$$

donc f est homogène de degré 0. En tout point où $xy > 0$:

$$f'_x = \frac{1}{x} \quad f'_y = -\frac{1}{y}$$

On vérifie le théorème d'Euler :

$$xf'_x + yf'_y = 0$$

c) Pour tout $\lambda > 0$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^\alpha g\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \lambda^\alpha f(x, y)$$

donc f est homogène de degré α . Les dérivées partielles sont obtenues pour $x > 0$:

$$f'_x = \alpha x^{\alpha-1} g\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{\alpha-2} g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f'_y = x^{\alpha-1} g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

On vérifie le théorème d'Euler :

$$xf'_x + yf'_y = \alpha x^\alpha g\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha f(x, y)$$

Vous avez compris ?

Vérifier que $f(x, y) = 2\sqrt{x^3}\sqrt{y}$ est homogène et montrer qu'elle vérifie le théorème d'Euler.

Réponse :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y) \quad xf'_x + yf'_y = 2f$$

18. a) On calcule les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 :

$$f'_x = 2xy \quad f'_y = x^2 \quad f''_{x^2} = 2y \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2x \quad f''_{y^2} = 0$$

Leurs valeurs au point (1, 1) sont :

$$f'_x = 2 \quad f'_y = 1 \quad f''_{x^2} = 2 \quad f''_{xy} = 2 \quad f''_{y^2} = 0$$

Le développement de Taylor à l'ordre 2 est donc :

$$\begin{aligned} f(1+b, 1+k) &= f(1, 1) + bf'_x + kf'_y + \frac{1}{2}(b^2 f''_{x^2} + 2b k f''_{xy} + k^2 f''_{y^2}) \\ &\quad + (b^2 + k^2) \varepsilon(b, k) \\ &= 1 + 2b + k + b^2 + 2bk + (b^2 + k^2) \varepsilon(b, k) \end{aligned}$$

avec (b, k) au voisinage de $(0, 0)$ et ε qui tend vers 0 à l'origine. En fait, on obtient ici :

$$f(1+b, 1+k) = (1+b)^2 (1+k) = 1 + 2b + k + b^2 + 2bk + b^2 k$$

b) On écrit $\ln f = x \ln y$ et on obtient comme dérivées, pour $y > 0$:

$$f'_x = f \ln y \quad f'_y = \frac{x}{y} f \quad f''_{x^2} = f (\ln y)^2 \quad f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x}{y} f \ln y + \frac{f}{y}$$

$$f''_{y^2} = -\frac{x}{y^2} f + \frac{x^2}{y^2} f$$

Leurs valeurs au point $(1, 1)$ où $f = 1$ sont :

$$f'_x = 0 \quad f'_y = 1 \quad f''_{x^2} = 0 \quad f''_{xy} = 1 \quad f''_{y^2} = 0$$

On obtient comme développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$f(1+b, 1+k) = 1 + k + bk + (b^2 + k^2) \varepsilon(b, k)$$

avec (b, k) au voisinage de $(0, 0)$ et ε qui tend vers 0 à l'origine.

c) On calcule les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} f'_x &= f & f'_y &= e^x \cos y & f''_{x^2} &= f & f''_{xy} &= f'_y & f''_{y^2} &= -f \\ f'''_{x^3} &= f & f'''_{x^2 y} &= f'_y & f'''_{xy^2} &= -f & f'''_{y^3} &= -f'_y \end{aligned}$$

À l'origine on a $f = 0$ et $f'_y = 1$, d'où le développement à l'ordre 3 :

$$f(b, k) = k + bk + \frac{1}{2} b^2 k - \frac{k^3}{6} + (b^2 + k^2)^{3/2} \varepsilon(b, k)$$

avec (b, k) au voisinage de $(0, 0)$ et ε qui tend vers 0 à l'origine.

— Vous avez compris ? —

Écrire la formule de Taylor pour $g(x, y) = e^{x+y}$ à l'ordre 3, au voisinage du point $(1, -1)$.

Réponse :

$$g(1+b, -1+k) = 1 + b + k + \frac{1}{2}(b+k)^2 + \frac{1}{6}(b+k)^3 + (b^2 + k^2)^{3/2} \varepsilon(b, k)$$

19. Chaque polynôme f est indéfiniment dérivable, de dérivées partielles continues. On écrit donc d'abord les conditions du premier ordre pour déterminer les points stationnaires. On examine ensuite les conditions du second ordre en ces points.

a) Conditions du premier ordre :

$$f'_x(x, y) = 2x + 2 = 0$$

$$f'_y(x, y) = 8y - 4 = 0$$

Il y a un seul point stationnaire $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$. On étudie les conditions du second ordre en un point stationnaire (x_0, y_0) par le signe de :

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{x^2}(x_0, y_0) \times f''_{y^2}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

On obtient ici comme dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 2 \quad f''_{y^2} = 8 \quad f''_{xy} = 0$$

Soit $\Delta\left(-1, \frac{1}{2}\right) = 16 > 0$, donc un extremum en ce point. Les dérivées partielles secondes étant positives, il s'agit d'un minimum. On aurait d'ailleurs pu écrire :

$$f(x, y) = (x+1)^2 + (2y-1)^2 - 2 \geq -2$$

et conclure ainsi directement à l'existence d'un minimum global en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, avec $f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = -2$.

b) Conditions du premier ordre :

$$f'_x(x, y) = 2x = 0$$

$$f'_y(x, y) = 4y^3 - 4y = 0$$

Donc trois points stationnaires $(0,0), (0,1), (0,-1)$. On obtient ici comme dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 2 \quad f''_{y^2} = 12y^2 - 4 \quad f''_{xy} = 0$$

On étudie les conditions du second ordre en chacun des points stationnaires :

$$\Delta(0,0) = -8 \quad \Delta(0,1) = \Delta(0,-1) = 16$$

Il y a donc un col à l'origine et des minima en $(0,1)$ et $(0,-1)$. Il s'agit de minima globaux puisque :

$$f(x,y) = x^2 + (y^2 - 1)^2 - 1 \geq -1$$

c) Conditions du premier ordre :

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$$

$$f'_y(x,y) = 6xy - 12 = 0$$

Donc quatre points stationnaires : $(1,2), (-1,-2), (2,1), (-2,-1)$. On obtient ici comme dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 6x \quad f''_{y^2} = 6x \quad f''_{xy} = 6y$$

On étudie les conditions du second ordre en chacun des points stationnaires :

$$\Delta(1,2) = \Delta(-1,-2) = -108 \quad \Delta(2,1) = \Delta(-2,-1) = 108$$

Il y a donc des cols aux points $(1,2)$ et $(-1,-2)$ et des extremums aux points $(2,1)$ et $(-2,-1)$, minimum local en $(2,1)$ avec $f(2,1) = -28$ et maximum local en $(-2,-1)$ avec $f(-2,-1) = 28$.

d) Conditions du premier ordre :

$$f'_x(x,y) = 4x^3 + 2xy - 2x = 0$$

$$f'_y(x,y) = x^2 - 1 = 0$$

Donc deux points stationnaires : $(1,-1)$ et $(-1,-1)$. On obtient ici comme dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 12x^2 + 2y - 2 \quad f''_{y^2} = 0 \quad f''_{xy} = 2x$$

On étudie les conditions du second ordre en chacun des points stationnaires :

$$\Delta(1,-1) = \Delta(-1,-1) = -4$$

Il y a donc un col en chacun de ces points.

e) Conditions du premier ordre :

$$f'_x(x, y) = 2x - 4y + 2 = 0$$

$$f'_y(x, y) = 16y - 4x = 0$$

Donc un seul point stationnaire : $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$. On obtient ici comme dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 2 \quad f''_{y^2} = 16 \quad f''_{xy} = -4$$

On étudie les conditions du second ordre en ce point stationnaire :

$$\Delta\left(-2, -\frac{1}{2}\right) = 16, \text{ donc minimum. On peut remarquer que :}$$

$$f(x, y) = (x - 2y + 1)^2 + (2y + 1)^2 + 1 \geq 1$$

donc il s'agit d'un minimum global.

f) Conditions du premier ordre :

$$f'_x(x, y) = 4x^3 - 2x + 2y = 0$$

$$f'_y(x, y) = 2x + 2y = 0$$

Donc trois points stationnaires : $(0, 0), (1, -1), (-1, 1)$. On obtient ici comme dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 12x^2 - 2 \quad f''_{y^2} = 2 \quad f''_{xy} = 2$$

On étudie les conditions du second ordre en chacun des points stationnaires :

$$\Delta(0, 0) = -8 \quad \Delta(1, -1) = \Delta(-1, 1) = 16$$

Il y a donc un col à l'origine et des minima aux points $(1, -1)$ et $(-1, 1)$, qui sont des minima globaux, car :

$$f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + (x + y)^2 - 1 \geq -1$$

Vous avez compris ?

Rechercher les extremums des fonctions définies ci-après :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy - 36 \quad g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$h(x, y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 2y + 1$$

Réponses : pour f, col en $(0, 0)$ et maximum local en $(-3, -3)$; pour g, col en $(0, 0)$ et minimum local en $(1, 1)$; pour h, minimum absolu en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

20. Comme dans l'exercice précédent, on écrit d'abord les conditions du premier ordre pour déterminer les points stationnaires. On examine ensuite les conditions du second ordre en ces points.

a) Conditions du premier ordre :

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay = 0$$

$$f'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax = 0$$

Donc un point stationnaire (a, a) . On obtient ici comme dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 6x \quad f''_{y^2} = 6y \quad f''_{xy} = -3a$$

On étudie les conditions du second ordre au point stationnaire :

$$\Delta(a, a) = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2$$

Il y a donc un minimum pour $a > 0$ et un maximum pour $a < 0$. Pour $a = 0$, on ne peut pas conclure. Il faut faire une étude directe, au voisinage (b, k) de l'origine, du signe de :

$$f(0+b, 0+k) - f(0, 0) = b^3 + k^3$$

Pour b et k positifs, cette différence est positive; elle est négative quand b et k sont négatifs. Le signe n'étant pas constant, il n'y a pas d'extremum, mais un col à l'origine, pour $a = 0$.

b) Conditions du premier ordre :

$$f'_x(x, y) = 4x^3 - 2axy = 0$$

$$f'_y(x, y) = 2y - ax^2 = 0$$

Donc les points stationnaires sont : $(0, 0)$, (x, x^2) si $a = 2$, $(x, -x^2)$ si $a = -2$ avec x quelconque. On obtient ici comme dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 12x^2 - 2ay \quad f''_{y^2} = 2 \quad f''_{xy} = -2ax$$

On étudie les conditions du second ordre en chacun des points stationnaires :

$$\Delta(0, 0) = \Delta(x, x^2) = \Delta(x, -x^2) = 0$$

Pour conclure dans tous les cas, il suffit d'écrire :

$$f(x, y) = \left(x^2 - \frac{a}{2}y\right)^2 + \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)y^2$$

On voit ainsi que l'origine est un minimum global pour $|a| < 2$ et un col pour $|a| > 2$ puisque f ne garde pas un signe constant au voisinage de l'origine. Pour $|a| = 2$, tous les points situés sur les paraboles (x, x^2) ou $(x, -x^2)$ correspondent à des minimums globaux.

c) Conditions du premier ordre :

$$f'_x(x, y) = ax + y - 1 = 0$$

$$f'_y(x, y) = ay + x + 1 = 0$$

Donc points stationnaires : $\left(\frac{1}{a-1}, \frac{1}{1-a}\right)$ si $|a| \neq 1, (x, x+1)$ avec x quelconque si $a = -1$. On obtient ici comme dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = a \quad f''_{y^2} = a \quad f''_{xy} = 1$$

On étudie les conditions du second ordre en chacun des points stationnaires :

$$\Delta\left(\frac{1}{a-1}, \frac{1}{1-a}\right) = a^2 - 1 \quad \Delta(x, x+1) = 0$$

Au point $\left(\frac{1}{a-1}, \frac{1}{1-a}\right)$ il y a un minimum si $a > 1$, un maximum si $a < -1$ et un col si $|a| < 1$.

Pour $a = -1$:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}(x - y + 1)^2 - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

donc il y a un minimum global pour tous les points de la droite $(x, x+1)$.

Vous avez compris ?

Rechercher, en fonction du paramètre réel a , les extremums des fonctions définies ci-après :

$$f(x, y) = x^3 + axy - y^3 \quad g(x, y) = x^2 + 2axy + y^2$$

$$h(x, y) = (a^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4axy - 2(a+1)(x+y) + 2$$

Réponses : pour f , col en $(0, 0)$, minimum en $\left(\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$ si $a > 0$ et maximum si $a < 0$; pour g , minimum global en $(0, 0)$ si $|a| < 1$ et col pour $|a| > 1$, minimum global en tous les points $(x, -x)$ si $a = 1$ et en (x, x) si $a = -1$ avec x quelconque ; pour h , minimum global en $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$ si $|a| \neq 1$, en tous les points $(x, 1-x)$ si $a = 1$ et (x, x) si $a = -1$ avec x quelconque.

21. a) Les dérivées partielles premières de cette fraction rationnelle s'annulent quand leur numérateur s'annule, soit :

$$x^2 + y^2 + xy + 3 - (x + y)(2x + y) = -x^2 - 2xy + 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + xy + 3 - (x + y)(2y + x) = -y^2 - 2xy + 3 = 0$$

On obtient deux points stationnaires : $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Pour déterminer leur nature, on fait une étude directe en examinant le signe de :

$$\begin{aligned} f(\varepsilon + b, \varepsilon + k) - f(\varepsilon, \varepsilon) &= \frac{b + k + 2\varepsilon}{b^2 + k^2 + bk + 3\varepsilon b + 3\varepsilon k + 6} - \frac{2\varepsilon}{6} \\ &= -\frac{\varepsilon(b^2 + k^2 + bk)}{3(b^2 + k^2 + bk + 3\varepsilon b + 3\varepsilon k + 6)} \end{aligned}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ et (b, k) voisin de $(0, 0)$. Le dénominateur est voisin de 18, donc positif. Pour le numérateur :

$$b^2 + bk + k^2 = \left(b + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geq 0$$

donc la différence précédente est du signe de $-\varepsilon$. Le point $(1, 1)$ correspond à un maximum et $(-1, -1)$ à un minimum.

b) L'expression de $f(x, y)$ s'exprime plus simplement en coordonnées polaires :

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = 1 - \rho^{4/3} = F(\rho)$$

On est ainsi ramené à la recherche d'extremum pour une fonction dérivable d'une seule variable. On obtient :

$$F'(\rho) = -\frac{4}{3}\rho^{1/3} < 0$$

La fonction F est décroissante, donc on obtient un maximum à l'origine, $F(0) = f(0, 0) = 1$.

c) Si on pose $u = 1 + x^2 + y^2$, les dérivées partielles premières s'écrivent :

$$u^{3/2} f'_x = 1 - x + xy + y^2 = 0$$

$$u^{3/2} f'_y = -(1 + y + xy + x^2) = 0$$

Il y a un seul point stationnaire $(1, -1)$. On écrit de la même façon les dérivées secondes :

$$u^{5/2} f''_{x^2} = (y-1)u - 3x(1-x+xy+y^2)$$

$$u^{5/2} f''_{y^2} = -(x+1)u + 3y(1+y+xy+x^2)$$

$$u^{5/2} f''_{xy} = (x+2y)u - 3y(1-x+xy+y^2)$$

Les conditions du second ordre conduisent à :

$$\Delta(1, -1) = 4 \times 3^{-3} - 3^{-3} = \frac{1}{9}$$

donc le point $(1, -1)$ est un maximum puisque $f''_{x^2}(1, -1) = -2 \times 3^{-3/2} < 0$, avec $f(1, -1) = \sqrt{3}$.

d) La fonction exponentielle étant strictement croissante, les extremums de f correspondent aux extremums de son argument, soit :

$$g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 8x - 4y$$

On obtient comme conditions du premier ordre :

$$g'_x = 4x - 8 = 0$$

$$g'_y = 2y - 4 = 0$$

Donc un seul point stationnaire $(2, 2)$. Les dérivées secondes sont :

$$g''_{x^2} = 4 \quad g''_{xy} = 0 \quad g''_{y^2} = 2$$

Ce point correspond donc à un minimum pour f .

Vous avez compris ?

Rechercher les extremums des fonctions définies ci-après :

$$f(x, y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x} \quad g(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(x^2 - y^2)$$

Réponses : pour f , minimum au point $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$; pour g , minimum en $(0, 0)$ et col aux points $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

22. a) Pour calculer les dérivées de f , il faut distinguer deux cas pour pouvoir retirer les valeurs absolues. Si $y > -x$:

$$f'_x = 2x + 1 \quad f'_y = 1$$

Si $y < -x$:

$$f'_x = 2x - 1 \quad f'_y = -1$$

Dans ces deux cas il n'y a pas de point stationnaire. Cependant, f n'est pas dérivable en tous les points tels que $x + y = 0$, notamment à l'origine. Or, on a $f(x, y) \geq 0$, donc à l'origine il y a un minimum global. Les autres points où $f(x, y) = x^2$ ne correspondent pas à des extremums.

b) On obtient comme dérivées premières :

$$f'_x = \frac{2(y^2 - 2)}{3\sqrt[3]{x}} \quad f'_y = 2y\sqrt[3]{x^2}$$

On n'obtient donc pas de point stationnaire, car si f'_y s'annule pour $x = 0$, la dérivée f'_x n'existe pas pour cette valeur. Cependant, au voisinage de l'origine, on a $f(x, y) \leq 0$ et par conséquent il y a un maximum local en ce point où f'_x n'est pas définie.

23. a) La fonction f est un polynôme indéfiniment dérivable. On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$f'_x = 2x - 2y = 0$$

$$f'_y = -2x + 4y + 2 = 0$$

$$f'_z = 4z - 4 = 0$$

On obtient un seul point stationnaire $(-1, -1, 2)$. On peut faire ici une étude directe :

$$f(-1 + h, -1 + k, 2 + l) - f(-1, -1, 2) = (h - k)^2 + k^2 + l^2 \geq 0$$

Il y a donc un minimum en ce point. Il s'agit d'ailleurs d'un minimum global puisque :

$$f(x, y, z) = (x - y)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 \geq 0$$

b) On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$f'_x = 4x^3 - 4xy = 0$$

$$f'_y = -2x^2 + 4y - 2z = 0$$

$$f'_z = -2y + 4z - 4 = 0$$

On obtient donc trois points stationnaires :

$$\left(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad (\sqrt{2}, 2, 2) \quad (-\sqrt{2}, 2, 2)$$

Nous allons faire une étude directe en chacun de ces points. Tout d'abord :

$$f\left(b, \frac{2}{3} + k, \frac{4}{3} + l\right) - f\left(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = b^4 - \frac{4}{3}b^2 - 2b^2k + 2k^2 - 2kl + 2l^2$$

On peut noter que pour $k = l = 0$, $b^4 - \frac{4}{3}b^2 = b^2\left(b^2 - \frac{4}{3}\right)$ est négatif pour b voisin de 0. Par ailleurs, pour $b = 0$:

$$2k^2 - 2kl + 2l^2 = 2\left(k - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}l^2 \geq 0$$

La différence précédente ne garde pas un signe constant au voisinage du point $\left(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ où il y a donc un col. Pour les deux autres points, écrits sous la forme $(\varepsilon\sqrt{2}, 2, 2)$ avec $\varepsilon = \pm 1$, on calcule les dérivées secondes :

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= 12x^2 - 4y = 16 & f''_{xy} &= -4x = -4\varepsilon\sqrt{2} & f''_{xz} &= 0 \\ f''_{y^2} &= 4 & f''_{yz} &= -2 & f''_{z^2} &= 4 \end{aligned}$$

La différence $f(\varepsilon\sqrt{2} + b, 2 + k, 2 + l) - f(\varepsilon\sqrt{2}, 2, 2)$ est donc du signe de la forme quadratique :

$$\Delta(b, k, l) = 16b^2 - 8\varepsilon\sqrt{2}bk + 4k^2 - 4kl + 4l^2 = (4b - \varepsilon\sqrt{2}k)^2 + 2(k - l)^2 + 2l^2$$

Cette forme quadratique est définie positive, donc il y a des minimums aux points $(\sqrt{2}, 2, 2)$ et $(-\sqrt{2}, 2, 2)$.

c) On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$f'_x = \ln y + \frac{z}{x} = 0$$

$$f'_y = \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_z = \ln x = 0$$

On obtient un point stationnaire $(1,1,0)$. Les dérivées secondes en ce point ont pour valeurs :

$$f''_{x^2} = -\frac{z}{x^2} = 0 \quad f''_{xy} = \frac{1}{y} = 1 \quad f''_{xz} = \frac{1}{x} = 1 \quad f''_{y^2} = -\frac{x}{y^2} = -1$$

$$f''_{yz} = f''_{z^2} = 0$$

La différence $f(1+b, 1+k, l) - f(1, 1, 0)$ est donc du signe de la forme quadratique :

$$\Delta(b, k, l) = 2bl + 2bk - k^2 = (b+l)^2 - (b-k)^2 - l^2$$

C'est une forme quadratique non définie, donc il y a un col en $(1, 1, 0)$.

Vous avez compris ?

Rechercher les extremums des fonctions définies ci-après :

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - x - 2z$$

Réponses : pour f , minimum en $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$, maximum en $\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$; pour g , minimum en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$.

24. a) On utilise la contrainte pour remplacer $x^2 = 1 - y$ et obtenir la fonction d'une seule variable :

$$F(y) = \frac{1-y}{9} + \frac{y^2}{4}$$

avec $y \leq 1$. On obtient comme dérivée :

$$F'(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{9}$$

D'où le tableau de variation :

y	$-\infty$	$\frac{2}{9}$	1
$F'(y)$		- 0 +	
$F(y)$	$+\infty$	\searrow $\frac{8}{81}$ \nearrow	$\frac{1}{4}$

La fonction f admet un minimum aux points $\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{2}{9}\right)$ et un maximum au point $(0, 1)$.

b) On remplace $y = 2 - x, 0 < x < 2$ pour obtenir la fonction d'une seule variable :

$$F(x) = f(x, 2 - x) = x \ln x + (2 - x) \ln(2 - x)$$

Cette fonction admet pour dérivée :

$$F'(x) = \ln x + 1 - \ln(2 - x) - 1 = \ln \frac{x}{2 - x}$$

Elle s'annule pour $x = 1$ et on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	1	2
$F'(x)$		- 0 +	
$F(x)$	$2 \ln 2$	\searrow 0 \nearrow	$2 \ln 2$

La fonction f admet un minimum en $(1, 1)$. Si on prolonge f par continuité en posant :

$$f(x, 0) = x \ln x \quad f(0, y) = y \ln y$$

pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$ avec $f(0, 0) = 0$, cette nouvelle fonction admet aussi un maximum aux points $(0, 2)$ et $(2, 0)$.

c) On remplace $y = 1 - x$ pour obtenir la fonction d'une seule variable :

$$F(x) = x^2 - x^3$$

Sa dérivée $F'(x) = 2x - 3x^2$ s'annule pour $x = 0$ et $x = \frac{2}{3}$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$F'(x)$		- 0 +	0 -	
$F(y)$	$+\infty$	\searrow 0 \nearrow	$\frac{4}{27}$	$\searrow -\infty$

La fonction f admet un minimum en $(0, 1)$ et un maximum en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

d) La recherche d'un extremum pour la fonction f est équivalente à celle de la fonction :

$$u(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 3y - 3$$

qui est l'argument de la fonction exponentielle, fonction strictement croissante. On remplace $y = 1 - x$:

$$F(x) = u(x, 1 - x) = -x^2 - 4x + 1 = -3x^2 - 1 \leq -1$$

Cette fonction admet un maximum global pour $x = 0$. Cela correspond à un maximum global pour f au point $(0,1)$.

Vous avez compris ?

Rechercher les extremums des fonctions définies ci-après, les variables étant liées par une contrainte : $f(x, y) = x^2 + y^2$ avec $3x + 4y = 5$; $g(x, y) = xy$ avec $x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0$.

Réponses : f admet un minimum absolu $f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 1$; g admet un maximum en $(1,1)$ et un minimum en $(0,2)$ et $(2,0)$.

25. a) La contrainte représente l'équation d'un cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{2}$. On va donc le paramétrer sous la forme $x = \sqrt{2} \cos t, y = \sqrt{2} \sin t$. La fonction f devient alors une fonction d'une seule variable :

$$F(t) = f(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$$

Lorsque t varie de 0 à 2π , la fonction sinus est minimum pour les angles $t = \frac{3\pi}{4}$ et $t = \frac{7\pi}{4}$ et maximum pour les angles $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{5\pi}{4}$. La fonction f admet donc des minimums en $(-1,1)$ et $(1,-1)$ et des maximums en $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

b) On procède comme dans la question précédente et on obtient la fonction :

$$F(t) = f(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t) = \ln \sqrt{2} + \ln(\cos t - \sin t)$$

La fonction F est définie pour t variant dans l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Elle y admet pour dérivée :

$$F'(t) = \frac{-\sin t - \cos t}{\cos t - \sin t} = -\sqrt{2} \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos t - \sin t}$$

Cette dérivée s'annule pour $t = -\frac{\pi}{4}$, étant positive à gauche et négative à droite. Il y a donc un maximum pour F en ce point, soit pour f au point $(1,-1)$.

c) On effectue le même paramétrage que dans les questions précédentes, pour chercher les extremums de l'argument de l'exponentielle, soit $g(x, y) = -x^2 - y^2 - 2x + y$. On obtient :

$$F(t) = g(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t) = \sqrt{2} \sin t - 2\sqrt{2} \cos t - 2$$

Pour t variant de 0 à 2π , la dérivée :

$$F'(t) = \sqrt{2} \cos t + 2\sqrt{2} \sin t$$

s'annule pour $\cos t = -2 \sin t$, soit $\sin^2 t = \frac{1}{5}$. Cela correspond aux deux angles α et β tels que :

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0	α	β	2π		
$F'(t)$		+	0	-	0	+
$F(t)$		\nearrow		\searrow		\nearrow

Il y a donc un maximum en α et un minimum en β , ce qui correspond pour g , et donc aussi pour f , à un maximum en $\left(-2\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ et à un minimum en $\left(2\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

d) Il n'y a pas ici de paramétrage évident de la contrainte, donc on forme le lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = e^{-y} \sqrt{x+1} + e^{-x} \sqrt{y+1} + \lambda (\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} - 4)$$

On cherche les points stationnaires comme solutions de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{e^{-y}}{2\sqrt{x+1}} - e^{-x} \sqrt{y+1} + \frac{\lambda}{2\sqrt{x+1}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -e^{-y} \sqrt{x+1} + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{y+1}} + \frac{\lambda}{2\sqrt{y+1}} = 0 \end{aligned}$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient comme système équivalent :

$$\begin{aligned} e^{-y} - 2e^{-x} \sqrt{(x+1)(y+1)} + \lambda &= 0 \\ e^{-x} - 2e^{-y} \sqrt{(x+1)(y+1)} + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

En faisant la différence de ces deux équations, on en déduit que $x = y$. En reportant dans la contrainte, on obtient donc un seul point stationnaire $(3, 3)$. On calcule alors les dérivées secondes du lagrangien et les dérivées premières

de la fonction g qui définit la contrainte par $g(x, y) = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} - 4 = 0$.
On obtient :

$$L''_{x^2} = -\frac{e^{-y}}{4(x+1)^{3/2}} + e^{-x}\sqrt{y+1} - \frac{\lambda}{4(x+1)^{3/2}}$$

$$L''_{y^2} = -\frac{e^{-x}}{4(y+1)^{3/2}} + e^{-y}\sqrt{x+1} - \frac{\lambda}{4(y+1)^{3/2}}$$

$$L''_{xy} = L''_{yx} = -\frac{e^{-y}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{e^{-x}}{2\sqrt{y+1}}$$

$$g'_x = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad g'_y = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$$

Leurs valeurs au point $(3, 3)$ sont :

$$L''_{x^2} = L''_{y^2} = \frac{7}{4}e^{-3} \quad L''_{xy} = L''_{yx} = -\frac{1}{2}e^{-3} \quad g'_x = g'_y = \frac{1}{4}$$

Cela permet de calculer le déterminant :

$$\begin{aligned} \Delta_3(3, 3) &= \begin{vmatrix} \frac{7}{4}e^{-3} & -\frac{1}{2}e^{-3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}e^{-3} & \frac{7}{4}e^{-3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{7}{4}e^{-3} & -\frac{9}{4}e^{-3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}e^{-3} & \frac{9}{4}e^{-3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{9}{32}e^{-3} \end{aligned}$$

obtenu en retranchant la première colonne de la deuxième. On constate que $\Delta_3(3, 3) < 0$, donc il y a un minimum en $(3, 3)$.

Vous avez compris ?

Rechercher les extremums des fonctions définies ci-après, les variables étant liées par une contrainte : $f(x, y) = x + 2y$ avec $x^2 + y^2 = 5$; $g(x, y) = \frac{(x + y + 1)^2}{x^2 + y^2 + 1}$ avec $x + y = 2$.

Réponses : f admet un minimum en $(-1, -2)$ et un maximum en $(1, 2)$; g admet un minimum en $(1, 1)$.

26. a) On forme le lagrangien :

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

On cherche les points stationnaires comme solutions de :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2\lambda z = 0$$

On a donc $x = y = z = -\frac{1}{2\lambda}$, soit en reportant dans la contrainte deux

points stationnaires $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Les conditions suffisantes d'existence d'un extremum en ces points ne peuvent pas être utilisées ici car $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$. On fait donc une étude directe en examinant le signe de :

$$f\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} + b, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} + k, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} + l\right) - f\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right) = b + k + l$$

lorsque (b, k, l) est voisin de $(0, 0, 0)$ et où ε prend les deux valeurs 1 puis -1 . En raison de la contrainte, les trois variables b, k et l sont liées par la relation :

$$b^2 + k^2 + l^2 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}(b + k + l) = 0$$

La différence précédente peut donc aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} + b, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} + k, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} + l\right) - f\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right) = \\ -\varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}(b^2 + k^2 + l^2) \end{aligned}$$

Elle est de signe constant et par conséquent il y a un extremum aux points stationnaires, qui est un maximum en A et un minimum en B .

b) La méthode la plus simple ici consiste à exprimer z en fonction de x et y dans la contrainte. On est alors ramené au problème simple de la recherche

de l'extremum d'une fonction de deux variables, sans contrainte. Cependant, à titre d'entraînement, nous allons introduire le lagrangien :

$$L(x, y, z, \lambda) = x \ln x + y \ln y + z \ln z + \lambda (x + y + z - 9)$$

On cherche les points stationnaires :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \ln x + 1 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \ln y + 1 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \ln z + 1 + \lambda = 0$$

On obtient donc un seul point stationnaire $A(3, 3, 3)$. Examinons les conditions du second ordre à partir des dérivées secondes :

$$L''_{x^2} = \frac{1}{x} \quad L''_{xy} = L''_{xz} = L''_{yz} = 0 \quad L''_{y^2} = \frac{1}{y} \quad L''_{z^2} = \frac{1}{z}$$

La contrainte s'écrit $g(x, y, z) = x + y + z - 9 = 0$, avec les dérivées :

$$g'_x = g'_y = g'_z = 1$$

Au point stationnaire, les déterminants ont pour valeurs :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \Delta_3 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$$

Ces deux valeurs étant négatives, il y a un minimum en A .

Vous avez compris ?

Rechercher les extremums de la fonction définie ci-après, les variables étant liées par une contrainte :

$$f(x, y, z) = xy^2z \quad \text{avec} \quad 8x + y + 4z = 32, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

Réponse : minimums absolus en $(0, 32, 0)$ et $(x, 0, 8 - 2x)$ avec $x \geq 0$; maximum en $(1, 16, 2)$.

27. On forme le lagrangien :

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + 2y^2 - 4xy + 6z^2 + 12z + \lambda(z - x - 3) + \mu(x - y)$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 4y - \lambda + \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4y - 4x - \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 12z + 12 + \lambda = 0$$

Avec les contraintes, $x = y = z - 3$, on obtient $\mu = 0, \lambda = -2x$ et un seul point stationnaire $A\left(-\frac{24}{5}, -\frac{24}{5}, -\frac{9}{5}\right)$. Nous allons étudier le signe de $f(M) - f(A)$ lorsque le point $M\left(-\frac{24}{5} + b, -\frac{24}{5} + k, -\frac{9}{5} + l\right)$ est au voisinage de A , avec b, k, l voisins de 0 et liés par les contraintes :

$$-\frac{9}{5} + l + \frac{24}{5} - b = 3 \quad -\frac{24}{5} + b + \frac{24}{5} - l = 0$$

Par conséquent, $b = k = l$ et on obtient :

$$\begin{aligned} f(M) - f(A) &= \left(-\frac{24}{5} + b\right)^2 + 2\left(-\frac{24}{5} + k\right)^2 \\ &\quad - 4\left(-\frac{24}{5} + b\right)\left(-\frac{24}{5} + k\right) \\ &\quad + 6\left(-\frac{9}{5} + l\right)^2 + 12\left(-\frac{9}{5} + l\right) \\ &= 5b^2 \end{aligned}$$

Cette différence est toujours positive donc il y a un minimum au point A .

TD 6 Calcul intégral



La notion de fonction intégrable au sens de Riemann est liée à l'existence d'une limite de certaines sommes et s'interprète comme l'aire située sous le graphe de la fonction. Cependant, on peut retenir le résultat simple, mais important, que toute fonction continue sur un intervalle fini y est intégrable, même si l'ensemble des fonctions intégrables est plus vaste que celui des fonctions continues. La propriété essentielle de l'intégrale simple est la linéarité, c'est-à-dire que l'intégrale d'une combinaison linéaire de fonctions est la combinaison linéaire des intégrales, bien entendu si elles existent. Les méthodes d'intégration par changement de variable et par parties permettent de se ramener aux primitives usuelles qu'il est essentiel de connaître. Pour calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle, il faut employer une méthode spécifique qui consiste à décomposer au préalable cette fraction en éléments simples, c'est-à-dire une somme de fractions dont les dénominateurs sont de la forme $(x-a)^k$ ou $(x^2+px+q)^k$ et d'une partie entière éventuelle.

Le point le plus délicat de ce chapitre est celui de l'étude de la convergence des intégrales généralisées, c'est-à-dire du cas où l'une des bornes est infinie ou du cas où l'intégrande devient infinie au voisinage de l'une des bornes. Le principe de l'étude de cette convergence consiste en une comparaison avec une intégrale dont on connaît la nature, convergence ou divergence. Le cas le plus simple est celui où on peut remplacer la fonction à intégrer par une fonction équivalente.

1 ● Définition de l'intégrale simple de Riemann

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$. On effectue une subdivision de cet intervalle en n intervalles

disjoints $[x_{k-1}, x_k[$, de même longueur $\frac{b-a}{n}$, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$. La fonction f étant bornée, il existe deux nombres m_k et M_k tels que pour z_k dans l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$:

$$m_k \leq f(z_k) \leq M_k$$

On leur associe les sommes de Darboux :

$$s_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) m_k \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) M_k$$

Définition. La fonction f est dite *intégrable* sur $[a, b]$, au sens de Riemann, si les sommes de Darboux s_n et S_n tendent vers une limite commune I quand $n \rightarrow \infty$. Cette limite est alors appelée intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ et notée :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

La valeur de I représente l'aire située sous le graphe de f et délimitée par l'axe des abscisses et les verticales $x = a$ et $x = b$. On peut également définir cette intégrale comme limite des sommes de Riemann :

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k), \quad \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k), \quad \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(z_k)$$

2 ● Propriétés de l'intégrale

Les fonctions f et g étant intégrables sur $[a, b]$, les principales propriétés de l'intégrale sont les suivantes.

- Pour tout point c de $[a, b]$: $\int_c^c f(x) dx = 0$.
- Pour tout point c de $[a, b]$: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- Pour tous points c et d de $[a, b]$: $\int_c^d f(x) dx = -\int_d^c f(x) dx$.
- Pour tous réels λ et μ , la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ avec :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

– Si f est une fonction paire, pour tout intervalle $[-c, c]$ inclus dans $[a, b]$, on a :

$$\int_{-c}^c f(x) dx = 2 \int_0^c f(x) dx$$

– Si f est une fonction impaire, pour tout intervalle $[-c, c]$ inclus dans $[a, b]$, on a :

$$\int_{-c}^c f(x) dx = 0$$

– L'intégrale conserve les inégalités, c'est-à-dire que si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ ou si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Théorème de la moyenne. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors il existe un point c de cet intervalle tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

le second membre étant nommé *valeur moyenne* de f sur l'intervalle $[a, b]$.

3 ● Primitives

Définition. On appelle *primitive* d'une fonction numérique f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} toute fonction F dérivable sur I , telle que $F'(x) = f(x)$ pour $x \in I$. Une primitive est notée $F(x) = \int f(x) dx$. Toute autre primitive de f est de la forme $F + C$, où C est une constante réelle quelconque.

Calcul d'une intégrale définie. L'*intégrale définie* de f sur $[a, b]$ s'exprime à l'aide d'une primitive F par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Les primitives usuelles sont les suivantes :

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a|$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0 \text{ et } a \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

4 ● Méthodes d'intégration

Intégration par changement de variable. Pour calculer l'intégrale d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$, on peut faire le changement de variable $x = u(t)$ au moyen d'une fonction u de dérivée continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, avec $a = u(\alpha)$ et $b = u(\beta)$. La variable t est la nouvelle variable d'intégration et les bornes sont changées :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)] u'(t) dt$$

Intégration par parties. Si u et v sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient la *formule d'intégration par parties* :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

Intégration de fractions rationnelles. Pour calculer la primitive d'une fraction rationnelle, c'est-à-dire d'un rapport P/Q de deux polynômes, il faut au préalable décomposer cette fraction en éléments simples. Cela consiste d'abord à déterminer la partie entière, dans le cas où le degré de P est supérieur au degré de Q . On détermine ensuite les racines réelles x_j du polynôme Q qui se factorise sous la forme :

$$Q(x) = A(x - x_1)^{n_1} \dots (x - x_r)^{n_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}$$

les trinômes du second degré n'admettant pas de racines réelles. La fraction se décompose alors en une somme, de la partie entière éventuelle, d'éléments de première espèce de la forme :

$$\frac{\alpha_j}{(x - x_j)^{k_j}}, \text{ où } k_j \text{ prend les valeurs entières de } 1$$

à n_j , l'indice j variant de 1 à r et d'éléments de seconde espèce de la forme :

$$\frac{a_jx + b_j}{(x^2 + p_jx + q_j)^{k_j}}, \text{ où } k_j \text{ prend les valeurs entières de } 1 \text{ à } m_j, \text{ l'indice } j \text{ variant}$$

de 1 à s .

5 ● Intégrales généralisées

5.1 ● Intervalle d'intégration non borné

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Pour établir cette convergence, on peut utiliser la propriété suivante. Si f et g sont deux fonctions équivalentes et de signe constant quand x tend vers $+\infty$, les intégrales généralisées :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} g(t) dt$$

sont de même nature. Si la fonction équivalente de f est une fonction puissance, on peut conclure à la nature de l'intégrale suivant la valeur de l'exposant. Si $f(t)$ est équivalent à A/t^α , alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

5.2 ● Fonction non bornée

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$ et telle que $|f(x)| \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow b^-$. On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures.

Là encore, pour établir cette convergence, on peut utiliser la propriété suivante. Si f et g sont deux fonctions équivalentes quand x tend vers b par valeurs inférieures, de signe constant, les intégrales généralisées :

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b g(t) dt$$

sont de même nature. Si l'équivalent de $f(t)$ est de la forme $A/(b-t)^\alpha$, on peut conclure à la nature de l'intégrale suivant la valeur de l'exposant :

$$\int_a^b f(t) dt \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$



	Vrai	Faux
1. Si f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle $[a, b]$, où a et b sont deux nombres réels finis, on a toujours la relation :	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. Pour qu'une fonction soit intégrable au sens de Riemann, il faut qu'elle soit continue.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Si f est une fonction impaire sur \mathbb{R} , alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. Si les fonctions f et g sont intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, leur produit fg l'est aussi.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. Si f et g sont deux fonctions équivalentes quand x tend vers $+\infty$, alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ sont de même nature, c'est-à-dire toutes les deux convergentes ou divergentes.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6. Si f et g sont deux fonctions telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour $x \geq a$, alors la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ entraîne celle de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



7. Calculer la primitive :

$$\int \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx$$

en utilisant l'identité $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, puis en intégrant par parties. Que peut-on remarquer ?

8. On peut calculer la valeur numérique d'une intégrale sans utiliser de primitive, mais en partant de la définition de l'intégrale comme limite d'une somme de Riemann, par exemple :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

On se propose de calculer les intégrales I suivantes par cette méthode.

a) Soit l'intégrale :

$$I = \int_0^1 (x - x^2) dx$$

Calculer la somme S_n associée à la subdivision de l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles $[x_{k-1}, x_k]$ avec $x_k = k/n$ pour k entier variant de 0 à n . En déduire la valeur de I en faisant tendre n vers l'infini.

b) On considère l'intégrale :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} a^x dx$$

où a est un réel strictement positif et différent de 1. Calculer la somme S_n associée à la subdivision de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ en n intervalles $[x_{k-1}, x_k]$ avec $x_k = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{k}{n}$ pour k entier variant de 0 à n . En déduire la valeur de I en faisant tendre n vers l'infini.

c) On considère l'intégrale :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x}$$

où α et β sont deux réels strictement positifs. Calculer la somme S_n associée à la subdivision de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ en n intervalles $[x_{k-1}, x_k]$ avec $x_k = \alpha q^{\frac{k}{n}}$, q

étant une valeur à déterminer et k un entier variant de 0 à n . En déduire la valeur de I en faisant tendre n vers l'infini.

9. De la même manière que dans l'exercice précédent, on peut cette fois utiliser la valeur d'une intégrale pour en déduire la limite d'une expression S_n qui sera considérée comme une somme de Riemann. Dans les cas suivants, on demande de déterminer la limite de S_n quand n tend vers l'infini, en lui associant une intégrale définie sur l'intervalle $[0,1]$.

$$\text{a) } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$$

$$\text{b) } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \alpha \neq -1$$

10. Déterminer une primitive de $|x|$.

11. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx$$

en effectuant le développement de $(1-x)^n$ par la formule du binôme. Calculer ensuite I en effectuant le changement de variable $y = 1-x$ et en déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$



Formule de la moyenne

12. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = \alpha x + \beta$ sur l'intervalle $[a, b]$ et calculer l'unique valeur de c qui apparaît dans cette expression. Donner une interprétation géométrique du résultat.

Analyse de l'énoncé et conseils. On calcule l'intégrale de f et on applique le théorème de la moyenne. On obtient une équation du premier degré en c qui admet donc une solution unique. La valeur obtenue permet de situer le point sur le graphe de f .

Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive

13. Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\int_1^2 (x-1)(x-2) dx$;

b) $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} \right) dx$;

c) $\int_{-1}^1 \left(x^2 - \sqrt{|x|} \right) \sqrt[3]{x^2} dx$;

d) $\int_{-2}^2 \left(x^3 - \sqrt[3]{x} \right) x^2 dx$;

e) $\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 \right) dx$;

f) $\int_2^0 \sqrt{|1-x|} dx$;

g) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$;

h) $\int_2^3 2^x dx$;

i) $\int_{-1}^1 e^{-2x+1} dx$;

j) $\int_0^1 \left(e^{x/2} + e^{-x/2} \right)^2 dx$;

k) $\int_0^3 \frac{dx}{3+2^x}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour calculer ces intégrales, on utilise les primitives usuelles, en écrivant par exemple les radicaux sous forme d'exposant fractionnaire.

Intégration par changement de variable

14. Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\int_1^5 \sqrt{2x-1} dx$;

b) $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+\ln x)}$;

c) $\int_2^3 \frac{x+1/2}{x^2+x-3} dx$;

d) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{(10-3e^x)^2}$;

e) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

f) $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$;

g) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx$;

h) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^x} dx$;

i) $\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut être attentif aux nouvelles bornes de l'intégrale qu'il faut calculer après le changement de variable. En présence d'un radical, c'est souvent la nouvelle variable qu'il faut choisir. Dans le cas d'un rapport, on examine si le numérateur est, à un coefficient près, la dérivée du dénominateur qui serait alors la nouvelle variable. Si la fonction à intégrer ne comporte que des termes avec $\ln x$ et $1/x$, la nouvelle variable est $\ln x$.

Intégration par parties

15. Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\int_2^3 \ln(x^2 - 1) dx$;

b) $\int_0^1 x 2^x dx$;

c) $\int_1^2 x \ln \frac{x}{x+1} dx$;

d) $\int_{-1}^1 (x + e^x) (2x - e^{-x}) dx$;

e) $\int_2^3 (x+1) 3^{x+1} dx$;

f) $\int_2^1 x (\ln x)^2 dx$;

g) $\int_1^2 x^2 e^x dx$;

h) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut choisir les fonctions u et v de telle sorte que l'intégrale de vu' soit plus facile à calculer que celle de uv' . S'il y a une fonction logarithme, c'est généralement cette expression qui est choisie pour u . Dans le cas d'un produit de fonctions puissance et exponentielle, on choisit pour u la fonction puissance.

16. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre :

$$I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \quad \text{et} \quad I_{n-1}$$

puis en déduire la valeur de I_4 .

Analyse de l'énoncé et conseils. Après avoir effectué l'intégration par parties, on remplace x^2 par $(x^2 - 1) + 1$ de façon à pouvoir exprimer la nouvelle intégrale en fonction de I_n et I_{n-1} .

Intégration de fractions rationnelles

17. Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{1+x^5-x^6}{1-x} dx$;

b) $\int \frac{3x^2+1}{x^2(x^2+1)^2} dx$;

c) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x-2} dx$;

d) $\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$;

e) $\int \frac{x}{x^3-3x+2} dx$;

f) $\int \frac{dx}{x^3-7x+6}$;

g) $\int \frac{x+2}{(x-1)^2} dx$;

h) $\int \frac{2x+1}{(x^2-1)^2} dx$;

i) $\int \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2} dx$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Si le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, on détermine le polynôme qui représente la partie entière de la fraction. Si le dénominateur possède une racine réelle simple a , on obtient le numérateur de l'élément de première espèce en multipliant les deux membres par $x - a$ puis en remplaçant x par a . Pour obtenir les autres termes de la décomposition on peut donner à x des valeurs particulières simples ($x = 0, 1, -1 \dots$). Il est de toute façon déconseillé de procéder par identification des deux membres.

Intégrales avec des radicaux

18. Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int \left(2x\sqrt{x-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \right) dx ;$$

$$b) \int \frac{x^2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx ;$$

$$c) \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}} ;$$

$$d) \int \frac{x + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} dx ;$$

$$e) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}} ;$$

$$f) \int \frac{x dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} ;$$

$$g) \int e^x \sqrt{1-2e^x} dx .$$

Analyse de l'énoncé et conseils. En règle générale on prend le radical comme nouvelle variable d'intégration. Il faut parfois cependant modifier l'écriture des radicaux qui interviennent dans la fonction à intégrer, avant de choisir la nouvelle variable.

Convergence d'une intégrale

19. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} ;$$

$$b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} ;$$

$$c) \int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2} ;$$

$$d) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx ;$$

$$e) \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, p, q \in \mathbb{R};$$

$$f) \int_0^1 x^a \ln x dx, a \in \mathbb{R} ;$$

$$g) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx ;$$

$$h) \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx ;$$

$$i) \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, a \in \mathbb{R}.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On cherchera par des majorations ou des équivalents à comparer avec une intégrale dont on sait si elle est convergente ou divergente.

Intégrales généralisées

20. Calculer les intégrales généralisées suivantes quand elles sont convergentes.

a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2} ;$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5} ;$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x}} ;$

d) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} ;$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx, a \in \mathbb{R}.$

Analyse de l'énoncé et conseils. On applique la méthode de comparaison avec une intégrale dont on sait si elle est convergente ou divergente ou, si cela est possible, on calcule directement sa valeur, ce qui prouve bien sûr qu'elle est convergente.



QCM

1. **Faux.** Il se peut que $f + g$ soit intégrable sur $[a, b]$ mais pas f ou g . C'est le cas par exemple de $f(x) = x + 1/x$ et $g(x) = x - 1/x$ où $\int_0^1 (f + g)(x) dx = 1$ alors que les fonctions f et g ne sont pas intégrables sur $[0, 1]$.
2. **Faux.** La continuité est une condition suffisante, mais pas nécessaire, pour qu'une fonction soit intégrable. Par exemple, une fonction qui est constante par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$, donc qui présente des discontinuités, est intégrable sur cet intervalle.
3. **Faux.** Il s'agit d'une intégrale généralisée qui n'est pas forcément convergente. C'est le cas par exemple de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2}$ qui est divergente.
4. **Vrai.** C'est un résultat de cours.
5. **Faux.** Si les fonctions équivalentes ne sont pas de signe constant, on peut trouver des exemples où une intégrale est convergente et l'autre divergente.
6. **Vrai.** Cette propriété découle de l'inégalité vraie pour tout x supérieur à a :

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt$$

7. Si on utilise l'identité $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, on obtient comme primitive :

$$\int \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{(x-1)^2} = x + \frac{1}{x-1}$$

Si on intègre par parties avec $u = x^2 - 2x$ et $dv = dx/(x-1)^2$, on obtient cette fois comme primitive :

$$\int \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx = -\frac{x^2 - 2x}{x-1} + \int \frac{2x-2}{x-1} dx = 2x - \frac{x^2 - 2x}{x-1}$$

On pourrait penser qu'il s'agit de deux résultats distincts pour la même intégrale. En fait, cette dernière expression peut s'écrire :

$$2x - \frac{x^2 - 2x}{x-1} = 2x - (x-1) + \frac{1}{x-1} = x + \frac{1}{x-1} + 1$$

et il s'agit donc bien de deux primitives de la même fonction, qui sont égales à une constante additive près.

8. a) Tous les intervalles de la subdivision ont la même longueur $x_k - x_{k-1} = 1/n$ et :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

Ainsi, S_n a pour limite $\frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ qui est la valeur de l'intégrale I .

b) Tous les intervalles de la subdivision ont la même longueur $h = x_k - x_{k-1} = \frac{\beta - \alpha}{n}$ et :

$$\begin{aligned} S_n &= h \sum_{k=1}^n a^{\alpha + kb} = ha^{\alpha+b} \sum_{k=1}^n (a^b)^{k-1} = ha^{\alpha+b} \frac{a^{nb} - 1}{a^b - 1} \\ &= ha^b \frac{a^\beta - a^\alpha}{a^b - 1} \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, h tend vers 0 et $a^b - 1$ est équivalent à $b \ln a$, donc la limite de S_n est :

$$\frac{a^\beta - a^\alpha}{\ln a} = \int_{\alpha}^{\beta} a^x dx$$

c) La valeur de q doit être telle que $x_n = \beta = \alpha q^n$, donc $q = (\beta/\alpha)^{1/n}$. On obtient :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{q}\right) = n \frac{q-1}{q}$$

Lorsque n tend vers l'infini, q tend vers 1 et $q-1 = \exp\left(\frac{1}{n} \ln \frac{\beta}{\alpha}\right) - 1$ est équivalent à $\frac{1}{n} \ln \frac{\beta}{\alpha}$, donc la limite de S_n est :

$$\ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \beta - \ln \alpha = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x}$$

9. a) L'expression de S_n peut s'écrire sous la forme :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$$

C'est donc une somme de Riemann associée à la subdivision de l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles $[x_{k-1}, x_k]$, avec $x_k = k/n$ et k entier variant de 0 à n , soit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

la fonction f étant définie ici par $f(x) = \sqrt{x}$. Par conséquent, la limite de S_n est l'intégrale de cette fonction sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

b) L'expression de S_n peut s'écrire sous la forme :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^\alpha$$

C'est donc une somme de Riemann associée à la subdivision de l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles $[x_{k-1}, x_k]$, avec $x_k = k/n$ et k entier variant de 0 à n , soit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

la fonction f étant définie ici par $f(x) = x^\alpha$. Par conséquent, la limite de S_n est l'intégrale de cette fonction sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 x^\alpha \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

10. Pour pouvoir calculer cette primitive, il faut utiliser le signe de x , que nous allons noter ε , ce qui permet d'écrire $|x| = \varepsilon x$ dont une primitive est :

$$F(x) = \int |x| \, dx = \varepsilon \int x \, dx = \varepsilon \frac{x^2}{2} = \varepsilon x \frac{x}{2} = \frac{1}{2} x |x|$$

11. On utilise la formule du binôme :

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} \, dx &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k x^{k-1} \, dx \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k \int_0^1 x^{k-1} \, dx = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^k \end{aligned}$$

D'autre part, si on effectue le changement de variable $y = 1 - x$, on obtient $dy = -dx$ et les bornes sont inversées, donc au total :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1 - y^n}{1-y} dy = \int_0^1 (1 + y + \dots + y^{n-1}) dy \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{y^k}{k} \right]_0^1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

12. La fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et sa valeur moyenne est l'intégrale :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b (\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{b-a} \left[\alpha \frac{x^2}{2} + \beta x \right]_a^b = \alpha \frac{b+a}{2} + \beta$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe une valeur c de cet intervalle telle que $f(c) = \alpha c + \beta$ soit égal à cette valeur moyenne. Cette valeur est ici unique, avec $c = \frac{a+b}{2}$, donc le point $C(c, f(c))$ est le milieu du segment d'extrémités $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

— Vous avez compris ? —

Calculer la valeur moyenne de la fonction définie par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-a, a]$ et déterminer les valeurs de c qui figurent dans cette formule.

Réponse :

$$f(c) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{a^2}{3}, \quad c = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ ou } c = -\frac{a}{\sqrt{3}}$$

13. a) On effectue le produit dans l'intégrande :

$$\int_1^2 (x-1)(x-2) dx = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = -\frac{1}{6}$$

b) On écrit les radicaux sous forme d'exposants fractionnaires :

$$\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int_0^8 (\sqrt{2}x^{1/2} + x^{1/3}) dx = \left[\sqrt{2} \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{4/3}}{4/3} \right]_0^8 = \frac{100}{3}$$

c) La fonction à intégrer est paire et l'intervalle d'intégration centré à l'origine, donc :

$$\int_{-1}^1 (x^2 - \sqrt{|x|}) \sqrt[3]{x^2} dx = 2 \int_0^1 (x^2 - x^{1/2}) x^{2/3} dx = 2 \left[\frac{x^{11/3}}{11/3} - \frac{x^{13/6}}{13/6} \right]_0^1 = -\frac{54}{143}$$

d) La fonction à intégrer est impaire et l'intervalle d'intégration centré à l'origine, donc l'intégrale est nulle.

e) Cette intégrale est définie pour a et b strictement positifs :

$$\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 \right) dx = \left[2\sqrt{x} - \frac{x^3}{3} \right]_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

On peut constater que cette intégrale est convergente quand a tend vers 0 ; elle admet pour limite $2\sqrt{b} - b^3/3$.

f) Pour pouvoir retirer la valeur absolue, on sépare en deux l'intervalle d'intégration :

$$\begin{aligned} \int_2^0 \sqrt{|1-x|} dx &= \int_2^1 \sqrt{x-1} dx + \int_1^0 \sqrt{1-x} dx \\ &= \int_2^1 \sqrt{x-1} d(x-1) - \int_1^0 \sqrt{1-x} d(1-x) \\ &= \frac{2}{3} \left[(x-1)^{3/2} \right]_2^1 - \frac{2}{3} \left[(1-x)^{3/2} \right]_1^0 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

g) On utilise une primitive usuelle :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = [\ln |x+1|]_0^1 = \ln 2$$

h) On utilise une primitive usuelle :

$$\int_2^3 2^x dx = \int_2^3 e^{x \ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} [e^{x \ln 2}]_2^3 = \frac{4}{\ln 2}$$

i) On utilise une primitive usuelle :

$$\int_{-1}^1 e^{-2x+1} dx = e \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(e^3 - \frac{1}{e} \right)$$

j) Il suffit de développer le carré :

$$\int_0^1 (e^{x/2} + e^{-x/2})^2 dx = \int_0^1 (e^x + 2 + e^{-x}) dx = [e^x + 2x - e^{-x}]_0^1 = 2 + e - 1/e$$

k) On modifie l'écriture de la fraction pour faire apparaître au numérateur, à un coefficient près, la dérivée du dénominateur :

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{3+2^x} &= \frac{1}{3} \int_0^3 \left(1 - \frac{2^x}{2^x+3} \right) dx = \left[\frac{x}{3} \right]_0^3 - \frac{1}{3 \ln 2} \int_0^3 \frac{d(2^x+3)}{2^x+3} \\ &= 1 - \frac{1}{3 \ln 2} \left[\ln(2^x+3) \right]_0^3 = \frac{5}{3} - \frac{\ln 11}{\ln 8}\end{aligned}$$

Vous avez compris ?

Calculer les intégrales ci-après :

$$\int_0^1 (3\sqrt{x} - 4x) dx, \quad \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}, \quad \int_{-1}^2 (\sqrt{x+1} + \sqrt{|x|}) dx$$

Réponses :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (3\sqrt{x} - 4x) dx &= 0, \quad \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3} = -\frac{3}{8}, \\ \int_{-1}^2 (\sqrt{x+1} + \sqrt{|x|}) dx &= 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

14. a) La présence du radical nous incite à le prendre comme nouvelle variable, soit $u = \sqrt{2x-1}$, et le nouvel élément différentiel $du = dx/\sqrt{2x-1}$ ou $dx = u du$.

Les nouvelles bornes sont $u = 1$ et $u = 3$, d'où l'intégrale :

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1} dx = \int_1^3 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^3 = \frac{26}{3}$$

b) On prend comme nouvelle variable $u = 1 + \ln x$, d'où $du = dx/x$ et les nouvelles bornes $u = 1$ et $u = 1 + \ln 2$:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int_1^{1+\ln 2} \frac{du}{u} = [\ln u]_1^{1+\ln 2} = \ln(1+\ln 2)$$

c) Le numérateur est la dérivée du dénominateur au coefficient 1/2 près. On effectue donc le changement de variable $u = x^2 + x - 3$, soit $du = (2x+1)dx$ et les nouvelles bornes $u = 3$ et $u = 9$:

$$\int_2^3 \frac{x+1/2}{x^2+x-3} dx = \frac{1}{2} \int_3^9 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} [\ln u]_3^9 = \ln \sqrt{3}$$

d) Le numérateur e^x est la dérivée, à un coefficient près, du terme $10 - 3e^x$ qui est au carré au dénominateur. On retient donc comme nouvelle variable $u = 10 - 3e^x$, avec $du = -3e^x dx$ et les nouvelles bornes $u = 7$ et $u = 10 - 3e$:

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{(10 - 3e^x)^2} = - \int_7^{10-3e} \frac{du}{3u^2} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{u} \right]_7^{10-3e} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10-3e} - \frac{1}{7} \right)$$

e) On prend le dénominateur comme nouvelle variable, soit $u = 1 + \sqrt{x}$ et $du = dx/2\sqrt{x} = dx/2(u-1)$. Les nouvelles bornes sont $u = 1$ et $u = 3$:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = 2 \int_1^3 \frac{u-1}{u} du = 2[u - \ln u]_1^3 = 4 - \ln 9$$

f) Le numérateur étant la dérivée du dénominateur, on prend ce dernier comme nouvelle variable $u = e^x + e^{-x}$, avec $du = (e^x - e^{-x}) dx$ et les nouvelles bornes $u = 2$ et $u = e + 1/e$:

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int_2^{e+1/e} \frac{du}{u} = [\ln u]_2^{e+1/e} = \ln \frac{e^2 + 1}{2e}$$

g) On prend le radical comme nouvelle variable $u = \sqrt{1+x^3}$, donc $u^2 = 1+x^3$ et $2u du = 3x^2 dx$. Les nouvelles bornes étant $u = 1$ et $u = \sqrt{2}$:

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{2}{3} \int_1^{\sqrt{2}} u^2 du = \frac{2}{9} [u^3]_1^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-2}{9}$$

h) Le radical est choisi comme nouvelle variable $u = \sqrt{1+e^x}$, soit $u^2 = 1+e^x$ et $2u du = e^x dx$ avec comme nouvelles bornes $u = 2$ et $u = 3$, soit :

$$\begin{aligned} \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^x} dx &= \int_2^3 \frac{2u^2}{u^2-1} du = \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= [2u + \ln(u-1) - \ln(u+1)]_2^3 = 2 + \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

i) Le numérateur étant la dérivée du dénominateur, ce dernier est la nouvelle variable $u = x \ln x$ et $du = (1 + \ln x) dx$, les nouvelles bornes étant $u = e$ et $u = 2e^2$:

$$\int_e^{2e^2} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \int_e^{2e^2} \frac{du}{u} = [\ln u]_e^{2e^2} = 1 + \ln 2$$

— Vous avez compris ? —

Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}}$, $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{2+x^3}$, $\int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx$,
 $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$, $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$, $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$.

Réponses :

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}} = \frac{2}{3} \int_4^5 du = \frac{2}{3} ;$$

$$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{2+x^3} = \frac{1}{3} \int_2^{10} \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln 5 ;$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx = \int_0^1 \frac{u^3 du}{1+u^2} = \int_0^1 u du - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \frac{1}{2} (1 - \ln 2) ;$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x} = \ln 2 ;$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} = \sqrt{2} - 1 ;$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x d(\sin x) = \frac{1}{3} ;$$

15. a) En l'absence de produit, il n'y a pas de choix à faire :

$$\begin{cases} u = \ln(x^2 - 1) \\ dv = dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = \frac{2x dx}{x^2 - 1} \\ v = x \end{cases}$$

La formule d'intégration par parties conduit à :

$$\begin{aligned} \int_2^3 \ln(x^2 - 1) dx &= [x \ln(x^2 - 1)]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x^2 dx}{x^2 - 1} \\ &= 3 \ln 8 - 2 \ln 3 - \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= 9 \ln 2 - 2 \ln 3 - \left[2x + \ln \frac{x-1}{x+1} \right]_2^3 = 10 \ln 2 - 3 \ln 3 - 2 \end{aligned}$$

b) On choisit la fonction puissance comme fonction u :

$$\begin{cases} u = x \\ dv = 2^x dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = dx \\ v = 2^x / \ln 2 \end{cases}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x 2^x dx &= \left[\frac{x 2^x}{\ln 2} \right]_0^1 - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 e^{x \ln 2} dx \\ &= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2} [2^x]_0^1 = \frac{2 \ln 2 - 1}{(\ln 2)^2}\end{aligned}$$

c) L'intégrale à calculer peut s'écrire sous la forme d'une différence de deux intégrales :

$$I = \int_1^2 x \ln \frac{x}{x+1} dx = \int_1^2 x \ln x dx - \int_1^2 x \ln (x+1) dx$$

La première intégrale se déduit d'une primitive F de $x \ln x$ et la seconde se calcule à partir du changement de variable $t = x + 1$:

$$J = \int_1^2 x \ln (x+1) dx = \int_2^3 (t-1) \ln t dt = \int_2^3 x \ln x dx - \int_2^3 \ln x dx$$

Si G est une primitive de $\ln x$, on obtient au total :

$$I = F(2) - F(1) - J = F(2) - F(1) - [F(3) - F(2) - G(3) + G(2)]$$

On calcule G par une intégration par parties :

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

et ainsi :

$$G(x) = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

On calcule F de la même manière :

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

et donc :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

On obtient par conséquent :

$$\begin{aligned} I &= 2F(2) - F(1) - F(3) + G(3) - G(2) \\ &= 4 \ln 2 - 2 + \frac{1}{4} - \frac{9}{2} \ln 3 + \frac{9}{4} + 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1 = 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d) On effectue d'abord le produit pour obtenir :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (x + e^x) (2x - e^{-x}) dx = \int_{-1}^1 (2x^2 - xe^{-x} + 2xe^x - 1) dx \\ &= 2 \left[\frac{2x^3}{3} - x \right]_0^1 - \int_{-1}^1 xe^{-x} dx + 2 \int_{-1}^1 xe^x dx \\ &= -\frac{2}{3} + \int_{-1}^1 te^t dt + 2 \int_{-1}^1 xe^x dx = -\frac{2}{3} + 3 \int_{-1}^1 xe^x dx \end{aligned}$$

ayant fait le changement de variable $t = -x$. On intègre maintenant par parties en prenant pour u la fonction puissance :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} & \quad \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \\ I &= -\frac{2}{3} + 3 [xe^x]_{-1}^1 - 3 \int_{-1}^1 e^x dx = -\frac{2}{3} + 3(e + e^{-1}) - 3[e^x]_{-1}^1 \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{6}{e} \end{aligned}$$

e) La fonction puissance est choisie pour u :

$$\begin{cases} u = x + 1 \\ dv = 3^{x+1} dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{3^{x+1}}{\ln 3} \end{cases}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_2^3 (x+1) 3^{x+1} dx &= \left[(x+1) \frac{3^{x+1}}{\ln 3} \right]_2^3 - \frac{1}{\ln 3} \int_2^3 3^{x+1} dx \\ &= \frac{324 - 81}{\ln 3} - \left[\frac{3^{x+1}}{(\ln 3)^2} \right]_2^3 = \frac{243}{\ln 3} - \frac{54}{(\ln 3)^2} \end{aligned}$$

f) On choisit la fonction logarithme comme fonction u à dériver :

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = x \, dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = 2 \frac{\ln x}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_2^1 x (\ln x)^2 \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_2^1 - \int_2^1 x \ln x \, dx \\ &= -2(\ln 2)^2 - F(1) + F(2) = \ln 4 - 2(\ln 2)^2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ayant utilisé la primitive F de la question c).

g) La fonction puissance est choisie comme fonction à dériver :

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = 2x \, dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 e^x \, dx &= \left[x^2 e^x \right]_1^2 - 2 \int_1^2 x e^x \, dx = \left[x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \right]_1^2 \\ &= 2e^2 - e \end{aligned}$$

obtenu à l'aide du résultat de la question d).

h) Il faut dériver la fonction logarithme :

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} du = 2 \frac{\ln x}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

et on obtient :

$$\int_1^e \frac{\ln x^2}{x^2} \, dx = \left[-\frac{(\ln x)^2}{x} \right]_1^e + 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx$$

On intègre une nouvelle fois par parties :

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

pour obtenir :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}$$

Ainsi, la valeur de l'intégrale est :

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx = 2 - \frac{5}{e}$$

Vous avez compris ?

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{x+1}{e^x} dx, \quad \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^2 (\ln x)^2 dx$$

Réponses :

$$\int_0^1 \frac{x+1}{e^x} dx = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = 2 - \frac{3}{e};$$

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \ln x \right]_1^4 - 2 \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4(\ln 4 - 1);$$

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right]_1^2 = 2(\ln 2)^2 - 4 \ln 2 + 2.$$

16. L'intégrande n'étant pas un produit de deux fonctions, il n'y a pas ici de choix possible pour la fonction u à dériver :

$$\begin{cases} u = (x^2 - 1)^n \\ dv = dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = 2nx(x^2 - 1)^{n-1} dx \\ v = x \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[x(x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - 2n \int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1)^{n-1} dx \\ &= -2n \int_{-1}^1 (x^2 - 1 + 1)(x^2 - 1)^{n-1} dx = -2nI_n - 2nI_{n-1} \end{aligned}$$

D'où la relation de récurrence :

$$I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

On en déduit ainsi :

$$I_4 = -\frac{8}{9} I_3 = \frac{8}{9} \times \frac{6}{7} I_2 = -\frac{8}{9} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} I_1 = \frac{8}{9} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} I_0 = \frac{256}{315}$$

17. Nous noterons C la constante d'intégration.

a) La fraction à intégrer peut s'écrire :

$$\frac{1+x^5-x^6}{1-x} = \frac{1+x^5(1-x)}{1-x} = x^5 + \frac{1}{1-x}$$

On obtient donc comme primitive :

$$F(x) = \int x^5 dx + \int \frac{dx}{1-x} = \frac{x^6}{6} - \ln|1-x| + C$$

b) Le dénominateur s'écrivant sous la forme $x^2(x^2+1)^2 = (x^3+x)^2$, l'expression du numérateur amène à faire le changement de variable $u = x^3 + x$, avec $du = (3x^2+1)dx$. On obtient comme primitive :

$$F(x) = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x(x^2+1)} + C$$

c) Le numérateur et le dénominateur se simplifient par $x+1$:

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \frac{x^2-x+1}{x-2} = x+1 + \frac{3}{x-2}$$

Une primitive est donc :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x-2| + C$$

d) Le dénominateur se factorise en $x^2-5x+4 = (x-4)(x-1)$, donc la fraction se décompose en éléments de première espèce sous la forme :

$$\frac{1}{x^2-5x+4} = \frac{1}{(x-4)(x-1)} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x-1}$$

En multipliant les deux membres par $x-4$ puis en faisant $x=4$, on obtient $a=1/3$; ensuite, en multipliant par $x-1$ puis en faisant $x=1$, on obtient $b=-1/3$. Une primitive est donc :

$$F(x) = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-4} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-4}{x-1} \right| + C$$

e) On remarque que 1 est racine double du dénominateur qui se factorise sous la forme $(x-1)^2(x+2)$. La décomposition de la fraction comporte donc uniquement des éléments de première espèce :

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$$

En multipliant successivement par $(x-1)^2$ et $x+2$ puis faisant $x=1$ et $x=-2$, on obtient $a=1/3$ et $c=-2/9$. En faisant ensuite par exemple $x=0$, on doit avoir $0=1/3-b-1/9$, donc $b=2/9$. Une primitive s'écrit donc :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{3(1-x)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

f) Le dénominateur admet trois racines réelles 1, 2 et -3 , ce qui conduit à la décomposition en éléments de première espèce :

$$\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{1/5}{x-2} - \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/20}{x+3}$$

et à une primitive :

$$F(x) = \frac{1}{20} \ln \frac{(x-2)^4 |x+3|}{|x-1|^5} + C$$

g) La décomposition ne comporte que des éléments de première espèce :

$$\frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

En multipliant par $(x-1)^2$ puis en faisant $x=1$, on obtient $b=3$. Pour $x=0$, on a alors $2=-a+3$, donc $a=1$. Une primitive est :

$$F(x) = \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln |x-1| + \frac{3}{1-x} + C$$

h) La décomposition en éléments de première espèce est de la forme :

$$\frac{2x+1}{(x^2-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

où en multipliant par $(x-1)^2$, puis $(x+1)^2$, on obtient $b=3/4$ et $d=-1/4$. Si on multiplie par x puis qu'on le fait tendre vers l'infini, cela donne la relation $0=a+c$. D'autre part, pour $x=0$ on a la relation $1=-a+3/4+c-1/4$. Par conséquent $a=-c=-1/4$ et une primitive s'écrit :

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= 4 \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{3}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} + C \end{aligned}$$

i) La décomposition en éléments de première espèce est de la forme :

$$\frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2} = \frac{4x^2 - 6x + 1}{x^2(2x - 1)} = \frac{a}{2x - 1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

et en multipliant par $2x - 1$ puis par x^2 on obtient $a = -4$ et $c = -1$. En faisant ensuite $x = 1$ par exemple, on déduit $-1 = -4 + b - 1$ soit $b = 4$. Une primitive est donc :

$$\begin{aligned} F(x) &= 4 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} - 2 \int \frac{2dx}{2x - 1} \\ &= 4 \ln |x| + \frac{1}{x} - 2 \ln |2x - 1| = \frac{1}{x} + \ln \frac{x^4}{(1 - 2x)^2} + C \end{aligned}$$

Vous avez compris ?

Calculer les primitives suivantes :

$$F(x) = \int \frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x} dx \quad G(x) = \int \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 6x + 5} dx$$

Réponses :

$$F(x) = \frac{5}{6} \ln |x| + \frac{9}{10} \ln |x - 2| - \frac{26}{15} \ln |x + 3| + C$$

$$G(x) = x + 3 \ln \frac{|x - 5|^5}{|x - 1|} + C$$

18. Nous noterons C la constante d'intégration.

a) On prend comme nouvelle variable le seul radical présent $u = \sqrt{x - 1}$, donc $u^2 = x - 1$ et $2u du = dx$. On obtient comme primitive :

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \int \left[2u(u^2 + 1) + \frac{(u^2 + 1)^2}{u} \right] u du \\ &= 2 \int (u^2 + 1)(2u^2 + u^2 + 1) du = 2 \int (3u^4 + 4u^2 + 1) du \\ &= \frac{6}{5} u^5 + \frac{8}{3} u^3 + 2u + C = \frac{u}{15} (18u^4 + 40u^2 + 30) + C \\ &= \frac{2\sqrt{x - 1}}{15} (9x^2 + 2x + 4) + C \end{aligned}$$

b) On pose $u = \sqrt{x}$, donc $u^2 = x$ et $2u \, du = dx$. La primitive devient :

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \int \frac{u^6}{1+u} \, du = 2 \int \left(u^5 - u^4 + u^3 - u^2 + u - 1 + \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} + x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

c) En présence de deux radicaux, nous allons poser $1+x = u^6$, soit $dx = 6u^5 \, du$. La primitive s'écrit :

$$\begin{aligned} F(x) &= 6 \int \frac{u^6 - 1}{u^2 - u^3} u^5 \, du = -6 \int \frac{u^6 - 1}{u - 1} u^3 \, du \\ &= -6 \int (u^8 + u^7 + u^6 + u^5 + u^4 + u^3) \, du \\ &= -u^4 \left(\frac{2}{3} u^5 + \frac{3}{4} u^4 + \frac{6}{7} u^3 + u^2 + \frac{6}{5} u + \frac{3}{2} \right) + C \end{aligned}$$

Il faut ensuite remplacer u par $(1+x)^{1/6}$.

d) L'intégrale à calculer se sépare en deux intégrales :

$$F(x) = \int dx + \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

En multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur de la seconde intégrale :

$$F(x) = x + \int x (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) \, dx$$

On sépare à nouveau en deux intégrales où on fait les changements de variable respectifs $u = \sqrt{x+2}$ et $v = \sqrt{x+1}$, soit $2u \, du = dx$ et $2v \, dv = dx$:

$$\begin{aligned} F(x) &= x + 2 \int u^2 (u^2 - 2) \, du - 2 \int v^2 (v^2 - 1) \, dv \\ &= x + \frac{2}{5} u^5 - \frac{4}{3} u^3 - \frac{2}{5} v^5 + \frac{2}{3} v^3 + C \\ &= x + \frac{2}{15} (3x-4)(x+2)\sqrt{x+2} - \frac{2}{15} (3x-2)(x+1)\sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

e) Le terme sous le radical s'écrit $-x^2 + 3x - 2 = -(x-2)(x-1)$, quantité qui est positive dans l'intervalle $]1, 2[$. On effectue alors le changement de variable :

$$t = \sqrt{-\frac{x-1}{x-2}}, \quad x = \frac{2t^2 + 1}{t^2 + 1}, \quad \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \frac{t}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{2t \, dt}{(t^2 + 1)^2}$$

On obtient alors comme primitive :

$$F(x) = 2 \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + C = -2\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + C$$

f) Comme dans la question précédente, le terme sous le radical se factorise en $(1-x^2)(1+x^2)$ et sur l'intervalle $] -1, 1[$ on effectue le changement de variable :

$$t = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}, \quad x^2 = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad x dx = \frac{2t dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{1-x^4} = \frac{2t}{t^2+1}$$

On obtient comme primitive :

$$F(x) = \int \frac{dt}{2t^2} = -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + C$$

g) On prend comme nouvelle variable le radical $u = \sqrt{1-2e^x}$, soit $u^2 = 1-2e^x$ et $u du = -e^x dx$, la primitive devenant :

$$F(x) = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{1}{3}(1-2e^x)^{3/2} + C$$

Vous avez compris ?

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} dx, \quad \int e^{\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{x dx}{2+\sqrt{1+x}}, \quad \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

Réponses :

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{3}(x-4)\sqrt{2x+1};$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}};$$

$$\int \frac{x dx}{2+\sqrt{1+x}} = \frac{2}{3}(x+10)\sqrt{1+x} - 2(1+x) - 12 \ln(2+\sqrt{1+x});$$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x+1}} = \frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}.$$

19. a) La primitive de $1/x^2$ est $-1/x$, qui n'est pas défini pour $x = 0$, donc cette intégrale est divergente puisque le point 0 appartient à l'intervalle d'intégration.

b) Sur l'intervalle d'intégration, on a $1 - x^4 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3) \geq 1 - x$ et par conséquent :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Cette intégrale est donc convergente, comme l'intégrale qui la majore puisque l'exposant est $\alpha = 1/2 < 1$.

c) La fonction à intégrer est négative au voisinage de l'origine et équivalente à $-1/5x^2$. L'intégrale est donc de même nature que celle de $1/x^2$ sur $[0, 1]$, qui est divergente, l'exposant étant $\alpha = 2 > 1$.

d) La fonction à intégrer tend vers 1 quand x tend vers 0, donc elle est bornée et son intégrale converge.

e) Au voisinage de 0, la fonction à intégrer est équivalente à x^{p-1} dont l'intégrale est convergente pour $1 - p < 1$. Au voisinage de 1, l'équivalent est $(1-x)^{q-1}$ dont l'intégrale converge pour $1 - q < 1$. Ainsi, pour que cette intégrale soit convergente, il faut que p et q soient strictement positifs.

f) On calcule $\int_{\varepsilon}^1 x^a \ln x \, dx$ par une intégration par parties :

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^a \, dx \end{cases} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^{a+1}}{a+1} \end{cases}$$

Nous obtenons pour a différent de -1 :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 x^a \ln x \, dx &= \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \ln x \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^a}{a+1} \, dx \\ &= -\frac{\varepsilon^{a+1} \ln \varepsilon}{a+1} - \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{\varepsilon^{a+1}}{(a+1)^2} \end{aligned}$$

dont il faut étudier la limite quand ε tend vers 0. Il y a deux cas à étudier suivant la valeur de l'exposant $a+1$.

Si $a+1 > 0$, alors ε^{a+1} et $\varepsilon^{a+1} \ln \varepsilon$ tendent vers 0 d'après le théorème des croissances comparées, donc l'intégrale est convergente et a pour valeur $-1/(a+1)^2$.

Si $a+1 < 0$, alors ε^{a+1} tend vers l'infini et l'intégrale est divergente.

Enfin, dans le cas particulier $a = -1$, on obtient comme intégrale $\int_0^1 \ln x \, dx$ qui est divergente.

En résumé, cette intégrale est convergente pour $a > -1$.

g) Nous allons calculer $\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$ par une intégration par parties :

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{1+x} \end{cases} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \ln(1+x) \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = [\ln x \times \ln(1+x)]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

et on sait d'après la question d) que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ est convergente.

D'autre part, $\ln \varepsilon \times \ln(1+\varepsilon)$ est équivalent à $\varepsilon \ln \varepsilon$ qui tend vers 0 quand ε tend vers 0, donc cette intégrale est convergente.

h) La fonction à intégrer tend vers 1 quand x tend vers 0, donc elle est bornée au voisinage de cette borne d'intégration. D'après le théorème des croissances comparées, on sait que pour x assez grand on a $e^x - 1 \geq x^3$. Donc, la fonction à intégrer est majorée par $1/x^2$ dont l'intégrale est convergente, l'exposant étant $\alpha = 2 > 1$. Cette intégrale est donc aussi convergente.

i) Au voisinage de 0, cette intégrale se comporte comme celle de x^{a-1} qui est donc convergente pour $1-a < 1$, soit $a > 0$. Pour x assez grand, e^{-x} est plus petit que n'importe quelle puissance de $1/x$ d'après le théorème des croissances comparées, donc par exemple $x^{a-1} e^{-x} \leq 1/x^2$. L'intégrale du majorant étant convergente puisque l'exposant est $\alpha = 2 > 1$, cette intégrale est aussi convergente. En résumé, il y a donc convergence pour a strictement positif.

Vous avez compris ?

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^a}, a \in \mathbb{R}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^5+1}}; \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Réponses : la première intégrale converge pour $a < 1$; la deuxième est divergente et la troisième convergente.

20. a) Pour x supérieur à 2, on a $(x^2-1)^2 \geq (x-1)^2$, donc l'intégrale est majorée par celle de $1/(x-1)^2$ qui est convergente, l'exposant étant $\alpha = 2 > 1$. Pour le calcul, on décompose la fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

La fraction étant paire, on peut remarquer que $c = -a$ et $d = b$. En multipliant ensuite par $(x+1)^2$ et faisant $x = -1$, on obtient $b = 1/4$. Pour $x = 0$, on a $1 = a + 1/4 + a + 1/4$, soit $a = 1/4$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2} &= \frac{1}{4} \int_2^{+\infty} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ln 3\end{aligned}$$

b) Au voisinage de l'infini, la fonction à intégrer est positive et équivalente à $1/2x$ dont l'intégrale est divergente, donc elle est aussi divergente.

c) Au voisinage de l'infini, la fonction à intégrer est positive et équivalente à $1/2x^2$ dont l'intégrale est convergente, donc elle est aussi convergente. Pour la calculer, on fait le changement de variable $u = 1/x$, soit $du = -dx/x^2$ et la nouvelle expression de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{4+u}} = \left[2\sqrt{4+u} \right]_0^1 = 2\sqrt{5} - 4$$

d) L'intégrale s'écrit :

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u}$$

intégrale qui est divergente.

e) Pour x assez grand, $\ln x > 1$ et la fonction à intégrer est supérieure à $1/x^a$, donc est divergente pour $a \leq 1$. Pour $a > 1$, on intègre par parties :

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^a} \end{cases} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{(a-1)x^{a-1}} \end{cases}$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx &= \left[-\frac{\ln x}{(a-1)x^{a-1}} \right]_1^{+\infty} + \frac{1}{(a-1)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} \\ &= \frac{1}{(a-1)^2} \left[-\frac{1}{x^{a-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(a-1)^2}\end{aligned}$$

— Vous avez compris ? —

Calculer les intégrales suivantes, si elles sont convergentes :

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

Réponses :

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = 1$$

et la seconde intégrale est divergente.

TD 7 Suites et équations de récurrence



Une suite est une application numérique u définie sur l'ensemble des entiers naturels, dont les valeurs, pour chaque entier n , sont notées traditionnellement u_n au lieu de $u(n)$. Nous utiliserons la notation (u_n) pour représenter la suite de terme général u_n . Si l'expression de u_n admet une limite finie quand n devient infini, on dit que la suite est convergente. On s'intéresse parfois à certains éléments d'une suite, comme par exemple ceux qui sont d'indices pairs ou d'indices impairs, et qui constituent ce qu'on appelle des suites extraites. Si par exemple ces suites extraites admettent des limites différentes, ces limites sont appelées des points d'accumulation de la suite qui dans ce cas n'admet pas de limite et est qualifiée de divergente. Il arrive souvent qu'une suite ne soit pas définie par la donnée de la fonction u , mais par une relation de récurrence exprimant un terme en fonction du précédent. Il s'agit d'une suite récurrente qui est donc définie par une fonction f qui relie deux termes successifs sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et par le premier terme u_0 (parfois u_1). L'outil le plus utile pour démontrer la convergence d'une telle suite est le théorème des suites monotones.

Une équation de récurrence linéaire d'ordre p est une relation où le terme général d'une suite s'exprime comme une combinaison linéaire des p termes précédents de cette suite, plus une fonction donnée de son indice. Cette fonction constitue ce qu'on appelle le second membre de l'équation. Pour déterminer la solution générale d'une telle équation, on procède en trois étapes. On cherche d'abord une solution générale de l'équation sans second membre, appelée équation homogène. Cette solution s'exprime comme une combinaison linéaire de p suites obtenues par les racines de l'équation caractéristique associée. Dans une deuxième étape on cherche

une solution particulière de l'équation avec second membre. L'addition de ces deux solutions donne une solution générale de l'équation complète qui s'exprime à l'aide de p constantes réelles. La troisième étape consiste à déterminer ces constantes en utilisant les p valeurs initiales de la suite solution.

1 ● Définitions générales

Définition. On appelle suite numérique une application u de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

La notation usuelle de l'image de l'entier n est u_n , et non pas $u(n)$, et se nomme terme général de la suite représentée symboliquement sous la forme (u_n) .

Suite monotone. Une suite (u_n) est dite croissante (resp. strictement croissante) si, pour tout entier n :

$$u_n \leq u_{n+1} \quad (\text{resp. } u_n < u_{n+1})$$

Elle est dite décroissante (resp. strictement décroissante) si, pour tout entier n :

$$u_n \geq u_{n+1} \quad (\text{resp. } u_n > u_{n+1})$$

Une suite qui est croissante ou décroissante est dite monotone.

Suite bornée. Une suite (u_n) est dite majorée (resp. minorée) s'il existe un nombre réel a qui est un majorant (resp. minorant) de l'ensemble des nombres réels u_n , c'est-à-dire que pour tout entier n :

$$u_n \leq a \quad (\text{resp. } u_n \geq a)$$

Une suite qui est majorée et minorée est dite bornée.

Suite majorante, minorante. La suite (v_n) est une majorante de la suite (u_n) si, à partir d'un certain rang :

$$u_n \leq v_n$$

La suite (u_n) est alors une minorante de (v_n) .

Suite convergente. Une suite (u_n) est dite convergente s'il existe un nombre fini ℓ tel que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un entier N tel que :

$$\forall n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On dit alors que la suite (u_n) converge vers ℓ ou admet la limite ℓ . Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Point d'accumulation. Si la suite (u_n) converge vers ℓ , cela signifie qu'à partir d'un certain rang tous les éléments de la suite vont se trouver dans

l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, aussi petit que l'on ait choisi ε . De façon imagée, on peut dire que tous les éléments de la suite vont venir s'accumuler autour du point ℓ . La notion plus générale de point d'accumulation correspond à celle d'un point autour duquel on trouvera toujours une infinité d'éléments de la suite qui seront proches, mais pas tous les éléments de la suite au-delà d'un certain rang. La définition précise est la suivante. Un nombre réel a est un point d'accumulation de la suite (u_n) si pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier N , on peut trouver un entier n tel que :

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

La propriété importante à noter est que la limite d'une suite convergente est le seul point d'accumulation de cette suite. Par conséquent, si une suite admet plus d'un point d'accumulation elle est divergente.

2 ● Théorèmes sur les limites

Théorème. La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique.

Suite extraite. Une suite extraite d'une suite (u_n) est une suite (u_{n_k}) où (n_k) est une suite infinie d'entiers, strictement croissante, indexée par k . On retient donc un certain nombre de termes de la suite (u_n) en conservant le même ordre, par exemple tous les termes d'indice pair.

Théorème. Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Théorème. Si une suite (u_n) converge vers une limite ℓ et qu'à partir d'un certain rang il existe deux réels a et b tels que $a < u_n < b$, alors $a \leq \ell \leq b$.

Théorème. Si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ et qu'à partir d'un certain rang on a $v_n < u_n < w_n$, alors la suite (u_n) converge aussi vers ℓ . Ce théorème est appelé théorème de l'encadrement, ou des « gendarmes ».

Théorème des suites monotones. Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée. Une suite décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.

3 ● Suites adjacentes

Définition. Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si elles vérifient les trois conditions suivantes :

- (i) la suite (u_n) est croissante ;
- (ii) la suite (v_n) est décroissante ;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

4 ● Suites récurrentes

Définition. Une suite récurrente (u_n) est définie au moyen du premier terme u_0 et d'une application réelle f par une relation de récurrence telle que pour tout entier n on ait $u_{n+1} = f(u_n)$.

Théorème. Soit (u_n) une suite récurrente définie au moyen du premier terme u_0 et d'une application réelle f dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe un nombre k dans $[0, 1[$ avec $|f'(x)| \leq k$ pour tout x dans $]a, b[$. Si l'équation $\ell = f(\ell)$ admet une solution unique ℓ_0 dans $]a, b[$ et si le premier terme de la suite vérifie $|u_0 - \ell_0| < \min\{b - \ell_0, \ell_0 - a\}$, alors elle converge vers ℓ_0 .

5 ● Équations de récurrence linéaires

Définitions. On appelle *équation de récurrence linéaire*, ou parfois aux différences finies, d'ordre p , à coefficients constants, une relation entre p termes successifs d'une suite, de la forme :

$$u_{n+p} - a_1 u_{n+p-1} - a_2 u_{n+p-2} - \dots - a_p u_n = g(n)$$

où a_1, \dots, a_p sont des constantes réelles données et g une fonction réelle donnée.

On appelle *équation homogène* associée à l'équation précédente, l'équation sans second membre :

$$v_{n+p} - a_1 v_{n+p-1} - a_2 v_{n+p-2} - \dots - a_p v_n = 0$$

On appelle *équation caractéristique* associée à l'équation précédente, l'équation :

$$r^p - a_1 r^{p-1} - a_2 r^{p-2} - \dots - a_{p-1} r - a_p = 0$$

Théorème. L'ensemble des solutions d'une équation de récurrence linéaire d'ordre p , sans second membre, forme un espace vectoriel de dimension p . La solution générale s'obtient comme somme de la solution générale v_n de l'équation sans second membre et d'une solution particulière u_n^* de l'équation avec second membre :

$$u_n = v_n + u_n^*$$

Propriété. Si le second membre se décompose sous la forme :

$$g(n) = g_1(n) + \dots + g_k(n)$$

et si $u_n^{*(1)}, \dots, u_n^{*(k)}$ sont des solutions particulières des équations ayant le même premier membre que l'équation initiale et comme seconds membres respectifs

$g_1(n), \dots, g_k(n)$, alors la suite :

$$u_n^{*(1)} + \dots + u_n^{*(k)}$$

est une solution particulière de l'équation initiale.

6 ● Équations de récurrence linéaires du premier ordre

Ces équations sont de la forme :

$$u_{n+1} - au_n = g(n)$$

où a est une constante réelle non nulle donnée. Si u_n^* est une solution particulière de l'équation complète, la solution générale est :

$$u_n = \lambda a^n + u_n^* \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

6.1 ● Solutions particulières

Le principe consiste à rechercher une solution particulière de même nature que le second membre. Nous allons passer en revue les principaux cas.

- Second membre constant : $g(n) = b$

Si $a \neq 1$, solution :

$$u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^n + \frac{b}{1-a}$$

Si $a = 1$, solution :

$$u_n = u_0 + bn$$

- Second membre polynomial de degré k : $g(n) = P_k(n)$

Si $a \neq 1$, on cherche comme solution particulière un polynôme de degré k , $u_n^* = Q_k(n)$, et la solution est :

$$u_n = \left[u_0 - Q_k(n) \right] a^n + Q_k(n)$$

Si $a = 1$, on cherche comme solution particulière un polynôme de degré $k+1$, $u_n^* = nQ_k(n)$, et la solution est :

$$u_n = u_0 + nQ_k(n)$$

- Second membre exponentiel : $g(n) = br^n$

Si $a \neq r$, solution :

$$u_n = \left(u_0 - \frac{b}{r-a} \right) a^n + \frac{b}{r-a} r^n$$

Si $a = r$, on dit qu'il y a *résonance* et on cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = \mu n a^n$; la solution est alors :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a} n \right) a^n$$

7 ● Équations de récurrence linéaires du second ordre

Ces équations sont de la forme :

$$u_{n+2} - a u_{n+1} - b u_n = g(n)$$

où a est une constante quelconque et b une constante non nulle.

7.1 ● Équation homogène

La solution de l'équation homogène associée dépend des racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 - ar - b = 0$$

- Racines réelles distinctes r_1 et r_2 :

$$v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Racine réelle double $r = \frac{a}{2}$:

$$v_n = (\lambda + \mu n) \left(\frac{a}{2} \right)^n$$

- Racines complexes conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$, $r_2 = \bar{r}_1 = \rho e^{-i\theta}$:

$$v_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$$

où λ et μ sont deux constantes réelles quelconques.

7.2 ● Solutions particulières

- Second membre polynomial de degré k : $g(n) = P_k(n)$

Si 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche comme solution particulière un polynôme de degré k , $u_n^* = Q_k(n)$.

Si 1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche comme solution particulière un polynôme de degré $k+1$, $u_n^* = nQ_k(n)$.

Si 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche comme solution particulière un polynôme de degré $k+2$, $u_n^* = n^2Q_k(n)$.

- Second membre exponentiel : $g(n) = br^n$

Si r n'est pas racine de l'équation caractéristique, solution particulière $u_n^* = \alpha r^n$.

Si r est racine simple de l'équation caractéristique, on dit qu'il y a résonance et la solution particulière est de la forme $u_n^* = \alpha n r^n$.

Si a est racine double de l'équation caractéristique, on dit qu'il y a résonance (double) et la solution particulière est de la forme $u_n^* = \alpha n^2 r^n$.

8 ● Système d'équations récurrentes

Dans le cas où il y a p équations de récurrence qui sont linéaires par rapport à p suites $(u_n), (v_n), (w_n), \dots$, on a un système d'équations récurrentes qui s'écrit sous forme matricielle :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = M X_n$$

où X_n est la suite vectorielle, représentée par un vecteur colonne à p composantes u_n, v_n, w_n, \dots et M la matrice carrée d'ordre p du système. La solution générale de cette équation de récurrence matricielle est :

$$X_n = M^n X_0$$

Cette solution pourra s'obtenir aisément dans le cas où M est diagonalisable, en écrivant $M = PDP^{-1}$ (voir *TD Algèbre*, chapitre 6) pour obtenir $M^n = PD^nP^{-1}$.



	Vrai	Faux
1. Si la suite (u_n) est majorée, la suite (u_n) est bornée.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites divergentes, la suite somme $(u_n + v_n)$ est aussi divergente.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Si la suite (u_n) est divergente, il en est de même de la suite (u_n) .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. La convergence d'une suite extraite implique la convergence de la suite elle-même.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leq v_n$, alors la convergence de (v_n) implique celle de (u_n) .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang le terme général u_n est équivalent à v_n , alors ces deux suites sont de même nature, c'est-à-dire toutes les deux convergentes ou divergentes.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7. Une suite solution d'une équation de récurrence linéaire peut être convergente ou divergente suivant la valeur du premier terme de la suite.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8. Deux solutions particulières d'une équation de récurrence linéaire, homogène, du second ordre permettent d'exprimer la solution générale de cette équation.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9. Il existe une suite unique solution d'une équation de récurrence linéaire, homogène, du second ordre et de premier terme fixé.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



10. Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$$

est bornée. Est-elle convergente ?

11. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier p par :

$$u_{2p} = p \quad u_{2p+1} = \frac{p}{p+1}$$

Examiner si cette suite est bornée et convergente.

12. La suite (u_n) est définie par l'équation de récurrence linéaire, à coefficients non constants :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 u_n - n^2 - 2n$$

Après avoir obtenu une solution constante (a) de cette équation, on demande d'écrire la relation de récurrence vérifiée par $v_n = u_n - a$. On en déduira les solutions (v_n) puis (u_n) de ces équations. On précisera la nature de la solution trouvée en fonction du premier terme u_0 de la suite.

13. Résoudre le système suivant d'équations de récurrence non linéaires:

$$\begin{cases} u_n = \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-1} + v_{n-1}} \\ v_n = \frac{v_{n-1}^2}{u_{n-1} + v_{n-1}} \end{cases}$$

avec $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. On étudiera les suites $(u_n - v_n)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.



Convergence d'une suite

14. Étudier la convergence des suites définies ci-dessous par leur terme

général u_n :

a) $\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$;

b) $\sqrt{n^2+3n}-n$;

c) $\frac{1}{n} \sin n$;

d) $\left(1+\sqrt{1+1/n}\right)^n$;

e) $\left(\frac{\sin n}{3}\right)^n$;

f) $\frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+2n+1}$;

g) $\sin \frac{2n\pi}{3}$;

h) $2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$;

i) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'étude de la limite de l'expression de u_n en fonction de n permet de conclure à la convergence ou à la divergence de la suite. Pour une suite de signe quelconque, il peut être utile d'étudier la suite positive de terme général $|u_n|$. La comparaison avec une suite géométrique permet souvent également de déterminer sa nature.

Suite géométrique

15. Étudier la convergence des suites définies ci-après par leur terme général u_n :

a) $\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n$, a réel quelconque ; b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On sait qu'une suite géométrique est convergente quand sa raison, en valeur absolue, est inférieure à 1. La seconde suite est définie comme somme des premiers termes d'une suite géométrique.

16. La suite (u_n) est définie, pour tout entier n , par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

et par ces deux premiers termes $u_0 = a$ et $u_1 = b$, où a et b sont deux réels quelconques. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$ est une suite géométrique convergente et en déduire que (u_n) est aussi une suite convergente dont on déterminera la limite.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'expression de v_n en fonction de v_{n-1} montrera qu'il s'agit bien d'une suite géométrique convergente. Le terme général u_n s'exprimant à l'aide de la somme partielle de cette suite, on pourra facilement déterminer sa limite.

Théorème de l'encadrement

17. La suite (u_n) est définie par son terme général, pour tout entier n strictement positif :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Montrer qu'il existe deux suites (v_n) et (w_n) convergentes, de même limite et telles que :

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Analyse de l'énoncé et conseils. En déterminant un majorant commun et un minorant commun de chacun des termes de la somme, on obtient l'encadrement demandé. Le théorème de l'encadrement permet alors de conclure que la suite (u_n) converge vers la même limite que ces deux suites minorante et majorante.

18. La suite (u_n) est définie par son terme général, pour tout entier n strictement positif :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{np}$$

où p est un entier strictement positif fixé. On veut montrer qu'il existe deux suites (v_n) et (w_n) convergentes, de même limite et telles que :

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

Pour cela, on établira d'abord que pour tout x dans $]0,1[$:

$$1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

et on en déduira que pour x strictement supérieur à 1 :

$$\ln \frac{x+1}{x} \leq \frac{1}{x} \leq \ln \frac{x}{x-1}$$

En conclure alors que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour obtenir l'encadrement de l'exponentielle, on la transformera en prenant les logarithmes, puis en dérivant. En appliquant ensuite l'encadrement de $1/x$ à chacun des termes de la somme qui constitue u_n on obtiendra un encadrement du terme général de la suite (u_n) . Le théorème de l'encadrement permettra alors de conclure.

Théorème des suites monotones

19. Étudier la convergence des suites définies ci-dessous par leur terme général u_n :

a) $\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$; b) $\frac{a^n}{n!}$, $a > 0$;

c) $\frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!}$;

d) $(1+a)(1+a^2) \dots (1+a^n)$, avec $0 < a < 1$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour démontrer que la suite est monotone, il faut établir que la différence de deux termes consécutifs est de signe constant, au moins à partir d'un certain rang, ou que le rapport de deux termes consécutifs est toujours supérieur ou inférieur à 1, au-delà d'un certain rang. Il faut ensuite trouver un majorant si la suite est croissante, ou un minorant si elle est décroissante, pour conclure à la convergence d'après le théorème des suites monotones.

Suites adjacentes

20. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies ci-dessous par leur terme général sont des suites adjacentes.

a) $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ $v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}$;

b) $u_n = n - \left(\cos 1 + \cos \frac{1}{2} + \dots + \cos \frac{1}{n} \right)$ $v_n = u_n + \sin \frac{1}{n}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On établit d'abord que les suites sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante, en formant la différence de deux termes consécutifs. On montre ensuite que la différence $v_n - u_n$ tend vers 0, ce qui établit que les suites sont adjacentes, donc convergentes vers la même limite.

Suites adjacentes récurrentes

21. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par les relations de récurrence suivantes sont adjacentes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

avec $u_1 = 4$ et $v_1 = 1$. Calculer leur limite commune.

Analyse de l'énoncé et conseils. On pourra établir d'abord que la différence $v_{n+1} - u_{n+1}$ est une suite géométrique, de même que les suites $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$. Pour déterminer la limite commune de ces deux suites adjacentes, on pourra par exemple déterminer v_{n+1} par sommation des différences et ensuite faire tendre n vers l'infini.

Moyennes arithmétique et géométrique

22. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par les relations de récurrence suivantes sont convergentes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases}$$

avec $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > a$. Montrer qu'elles ont une limite commune appartenant à l'intervalle $\left[\sqrt{ab}, \frac{1}{2}(a+b) \right]$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On pourra établir d'abord que la différence $v_{n+1} - u_{n+1}$ est une suite positive, de même que les suites $u_{n+1} - u_n$ et $v_n - v_{n+1}$. Pour établir que ces suites sont convergentes, on utilisera le théorème des suites monotones. Les relations de récurrence étant toujours vérifiées, on en déduira que ces deux suites ont la même limite.

Réurrence homographique

23. Étudier la convergence des suites définies ci-dessous par leur terme général u_n obtenu par une relation de récurrence.

$$\text{a) } u_n = \frac{u_{n-1} + 1}{2u_{n-1} + 3}, u_0 = 0 ;$$

$$\text{b) } u_n = \frac{u_{n-1} + 1}{u_{n-1} + 2}, u_0 = 0 ;$$

$$\text{c) } u_n = \frac{u_{n-1}}{1 + 3u_{n-1}}, u_0 = 1.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour pouvoir utiliser le théorème des suites monotones, on démontre par récurrence que la différence de deux termes consécutifs est de signe constant. Il faut ensuite établir que la suite est majorée ou minorée, suivant les cas. La limite est obtenue enfin en utilisant la formule de récurrence, qui reste vraie quand n devient infini.

Réurrence homographique et terme initial

24. Étudier, suivant la valeur du premier terme u_0 , la convergence des suites définies ci-après par leur terme général u_{n+1} obtenu par une relation de récurrence.

$$\text{a) } u_{n+1} = \frac{3u_n}{2 + 5u_n}, u_0 > 0 ;$$

$$\text{b) } u_{n+1} = -\frac{1}{u_n + 3} + 3, u_0 > 0.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. La suite est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et si elle admet une limite ℓ , celle-ci doit vérifier $f(\ell) = \ell$. On cherchera donc la solution x_0 de l'équation $f(x) = x$, équivalente à $g(x) = f(x)/x = 1$, et on étudiera la convergence suivant la position du premier terme de la suite par rapport à x_0 .

Réurrence homographique et suites extraites

25. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par la récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{4u_n - 2} \quad u_0 = 1$$

Montrer que les deux suites extraites, respectivement d'indices pairs et d'indices impairs, sont convergentes et en déduire que la suite (u_n) est aussi convergente.

Analyse de l'énoncé et conseils. On exprimera u_{n+2} en fonction de u_n et on en déduira par différence que les suites extraites sont monotones. Par majoration de l'une et minoration de l'autre, on en déduira qu'elles convergent vers

la même limite, qui sera aussi celle de la suite formée de ces deux suites extraites.

Suites récurrentes

26. Étudier la convergence des suites définies ci-dessous par leur terme général u_n obtenu par une relation de récurrence.

a) $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{2u_n + 2}, u_0 = 2 ;$

b) $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n + 6}, u_0 = 3 ;$

c) $u_{n+1} = \ln(1 + u_n), u_0 = 1 ;$

d) $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2/2 + u_n}, u_0 = 1 ;$

e) $u_{n+1} = \sqrt{1 + 2u_n} - 1, u_0 = 4.$

Analyse de l'énoncé et conseils. Dans la première question, on utilisera le théorème de convergence des suites récurrentes en montrant que la dérivée de la fonction qui définit la relation de récurrence est majorée en valeur absolue par un nombre inférieur à 1. Dans les autres questions, on utilisera le théorème des suites monotones en étudiant le signe de la différence de deux termes consécutifs.

Méthode de cobweb (toile d'araignée)

27. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par la récurrence :

$$u_{n+1} = 3 - \frac{1}{4}u_n^2, \text{ avec } u_0 = 1$$

Montrer que les suites extraites d'indices pairs et d'indices impairs sont convergentes et en déduire que la suite (u_n) est aussi convergente.

Analyse de l'énoncé et conseils. On peut déterminer le comportement de la suite (u_n) en traçant le graphe de la fonction f qui définit la récurrence, soit

$f(x) = 3 - \frac{x^2}{4}$ pour x dans l'intervalle $]0, 2\sqrt{3}[$. L'équation $f(x) - x = 0$ admet une seule racine positive x_0 et les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) se répartissent respectivement dans les intervalles $]0, x_0[$ et $]x_0, 2\sqrt{3}[$. Le théorème des suites monotones permet de conclure à la convergence de ces deux suites vers la même limite x_0 qui est donc aussi celle de la suite (u_n) .

Équations de récurrence linéaires du premier ordre

28. Déterminer les suites solutions des équations de récurrence suivantes puis étudier leur convergence.

a) $u_n + 2u_{n-1} = 3n^2 + 1$, avec $u_0 = 1$ b) $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1)$, avec $u_0 = 3$

c) $3u_{n-1} - 3u_n + n = 1$, avec $u_0 = 1$ d) $u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} = \frac{1}{2^n} - 1$, avec $u_0 = 0$

e) $2u_n - u_{n-1} = n^2 + \frac{1}{2^{n-1}}$, avec $u_0 = 1$

Analyse de l'énoncé et conseils. On cherche d'abord une solution de l'équation homogène associée. Ensuite, on cherche une solution particulière de même nature que le second membre. Si ce dernier comporte plusieurs fonctions différentes, on considère les équations ayant chacune de ces fonctions comme second membre. Dans le cas d'un second membre exponentiel, il faut examiner s'il y a résonance. On additionne ensuite la solution de l'équation homogène, qui dépend d'une constante, et la solution particulière. On détermine enfin la valeur de la constante par la condition initiale.

29. Déterminer les suites solutions de l'équation de récurrence suivante, puis étudier leur convergence en fonction de la valeur du premier terme u_0 :

$$u_n = 3u_{n-1}^2$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On transforme cette relation de récurrence non linéaire en faisant le changement $w_n = \ln u_n$. De la solution w_n de l'équation linéaire obtenue, on déduira la solution u_n , exprimée en fonction de u_0 .

30. Déterminer, en fonction du paramètre réel $a \neq 1$, les suites solutions des équations de récurrence suivantes, puis étudier leur convergence.

a) $u_{n+1} - \frac{a}{a-1}u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ b) $u_{n+1} - a(a-1)u_n = 2^n$

Analyse de l'énoncé et conseils. La solution particulière dépendra des valeurs du paramètre a , suivant lesquelles il y aura ou non résonance.

Équations de récurrence linéaires du second ordre

31. Déterminer les suites solutions des équations de récurrence suivantes.

a) $2u_n - 3u_{n-1} + u_{n-2} = 2$, avec $u_0 = 3$, $u_1 = 3$

b) $u_n - 2u_{n-1} + 2u_{n-2} = 1$, avec $u_0 = 2$, $u_1 = 3$

c) $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2n + 1$, avec $u_0 = 1, u_1 = 4$

d) $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2n + 1$, avec $u_0 = 0, u_1 = 1$

e) $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = n^2 + n + 1$, avec $u_0 = 25, u_1 = 31$

f) $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2^n$, avec $u_0 = 0, u_1 = 1$

g) $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 2^n$, avec $u_0 = 0, u_1 = 3$

h) $u_n = 2\sqrt{3}u_{n-1} - 4u_{n-2} + 2^n \cos \frac{n\pi}{6}$, avec $u_0 = 0, u_1 = 2 + \sqrt{3}$

Analyse de l'énoncé et conseils. On détermine les solutions générales de l'équation homogène associée, à l'aide des racines de l'équation caractéristique. On cherche ensuite une solution particulière de même nature que le second membre. On additionne ces solutions et on cherche la solution qui vérifie les conditions initiales données.

32. Déterminer, en fonction du paramètre réel a , les suites solutions des équations de récurrence suivantes, puis étudier leur convergence.

a) $u_{n+2} - a\sqrt{3}u_{n+1} + a^2u_n = 0$, avec $u_0 = 1, u_3 = 0$

b) $u_{n+2} + a^2u_n = (-1)^n$, avec $u_0 = \frac{1}{1+a^2}, u_1 = \frac{a^2}{1+a^2}$

c) $u_{n+2} - (1-a)u_{n+1} + a(1-2a)u_n = \frac{1}{3^{n+2}}$

d) $u_{n+2} - 3au_{n+1} + 2a^2u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad 0 < a < 1$

Analyse de l'énoncé et conseils. On détermine les solutions générales de l'équation homogène associée, selon les racines de l'équation caractéristique. Ces solutions peuvent dépendre du paramètre a . On cherche ensuite une solution particulière de même nature que le second membre, lorsqu'il y en a un. On additionne ces solutions et on cherche la solution qui vérifie les conditions initiales, lorsqu'elles sont données.

Équations de récurrence linéaires d'ordre quelconque

33. Déterminer les suites solutions des équations de récurrence suivantes.

a) $u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n + 1$, avec $u_0 = 2, u_1 = 5, u_2 = 12$

$$\text{b) } u_n - 3u_{n-1} + 3u_{n-2} - u_{n-3} = 0, \quad \text{avec} \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 9$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Le principe est le même pour ces équations de récurrence d'ordre trois. La solution générale dépend de trois constantes qui sont déterminées par les conditions initiales.

Système d'équations récurrentes

34. Résoudre les systèmes d'équations de récurrence suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 2v_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad u_0 = 2, \quad v_0 = 0.$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad u_1 = 5, \quad v_1 = -2.$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_{n+1} = v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = -1.$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On écrit le système sous forme matricielle. Sa solution s'exprime à l'aide de la puissance n -ème d'une matrice, que l'on obtient à partir de sa forme diagonale. Si cette matrice n'est pas diagonalisable, on utilise l'équation typique (voir *TD Algèbre*, chapitre 6) pour calculer sa puissance n -ème.



QCM

1. **Vrai.** S'il existe un réel positif a tel que $|u_n| \leq a$, alors $-a \leq u_n \leq a$, donc la suite (u_n) est bornée.

2. **Faux.** On ne peut rien conclure a priori sur la somme. Soit par exemple :

$$u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2} \quad v_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$$

Ces deux suites sont divergentes et pourtant :

$$u_n + v_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$$

converge vers 0.

3. **Vrai.** Raisonnons par l'absurde et supposons que (u_n) converge vers 0. Alors, pour n assez grand on a $|u_n| < \varepsilon$, ce qui implique que $(|u_n|)$ converge vers 0, d'où une contradiction. En cas de convergence vers une limite non nulle ℓ , il suffit de remplacer u_n par $u_n - \ell$.

4. **Faux.** C'est la réciproque qui est vraie. Par contre, il se peut que deux suites extraites convergent vers des limites distinctes. Dans ce cas, la suite elle-même aura deux points d'accumulation et sera donc divergente.

5. **Faux.** Soit par exemple $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \frac{n+1}{n}$. On a bien pour tout n positif $v_n \geq u_n$, la suite (v_n) qui converge vers 1 et cependant la suite (u_n) est divergente.

6. **Vrai.** Par hypothèse $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ quand n tend vers l'infini. Donc, l'une des suites admet une limite ℓ si et seulement si l'autre admet la même limite ℓ .

7. **Vrai.** La nature d'une solution peut dépendre du premier terme; voir par exemple l'exercice 12.

8. **Faux.** Il faut que ces deux solutions particulières soient linéairement indépendantes pour engendrer l'ensemble des solutions de cette équation homogène.

9. **Faux.** Il faut que les deux premiers termes soient fixés pour que la solution soit totalement déterminée.

10. On a :

$$|u_n| = \frac{n+1}{n+2} < 1$$

donc la suite est bornée. Elle admet deux points d'accumulation puisque les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent respectivement vers 1 et -1 . Elle est donc divergente. On sait que toute suite convergente est bornée, mais bien sûr la réciproque est fausse.

11. Comme les termes d'indices pairs tendent vers l'infini, la suite n'est pas bornée et ne peut donc pas être convergente. Cependant, la suite extraite des termes d'indices impairs converge vers 1.

12. Une solution constante (a) doit vérifier :

$$a = (n+1)^2 a - n^2 - 2n$$

On obtient aisément $a = 1$. On effectue alors le changement $v_n = u_n - 1$:

$$v_{n+1} + 1 = (n+1)^2 (v_n + 1) - n^2 - 2n$$

soit :

$$v_{n+1} = (n+1)^2 v_n$$

Si le premier terme u_0 est supérieur à 1, alors $v_0 = u_0 - 1 > 0$ et par récurrence la suite (v_n) est à termes positifs. Le terme $w_n = \sqrt{v_n}$ vérifie alors :

$$w_{n+1} = (n+1)w_n = (n+1) \dots \times 2 \times 1 \times w_0$$

La solution est donc $w_n = n!w_0$, soit $v_n = (n!)^2 v_0$.

Si $u_0 < 1$, alors $v_0 = u_0 - 1 < 0$ et la suite (v_n) est à termes négatifs. Le terme $w_n = \sqrt{-v_n}$ vérifie la même relation de récurrence et on obtient donc la même solution. Au total, on obtient donc :

$$u_n = v_n + 1 = (n!)^2 (u_0 - 1) + 1$$

La suite (u_n) est donc divergente pour $u_0 \neq 1$ et stationnaire pour $u_0 = 1$.

13. On établit par récurrence que les suites (u_n) et (v_n) sont à termes positifs. Si on forme la différence :

$$u_n - v_n = \frac{u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2}{u_{n-1} + v_{n-1}} = u_{n-1} - v_{n-1} = \dots = u_0 - v_0$$

Il s'agit donc d'une suite stationnaire.

Formons maintenant le rapport :

$$\frac{u_n}{v_n} = \left(\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \right)^2 = \left(\frac{u_{n-2}}{v_{n-2}} \right)^4 = \dots = \left(\frac{u_0}{v_0} \right)^{2^n}$$

Si $u_0 = v_0$, les deux suites sont stationnaires et égales. Sinon, en combinant ces deux résultats, on obtient :

$$u_n = \frac{u_0 - v_0}{1 - (v_0/u_0)^{2^n}} \quad v_n = \frac{u_0 - v_0}{(u_0/v_0)^{2^n} - 1}$$

Pour $u_0 > v_0$:

$$u_n \rightarrow u_0 - v_0 \quad v_n \rightarrow 0^+$$

Pour $u_0 < v_0$:

$$u_n \rightarrow 0^+ \quad v_n \rightarrow v_0 - u_0$$

14. a) D'après le théorème des croissances comparées, $\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc la suite (u_n) converge vers 0.

b) En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée, puis en divisant par n , on obtient :

$$u_n = \frac{n^2 + 3n - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n + n}} = \frac{3}{1 + \sqrt{1 + 3/n}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

donc la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{2}$.

c) La suite est à termes de signe quelconque, mais avec $0 \leq |u_n| \leq 1/n$, donc la suite $(|u_n|)$ converge vers 0 et par conséquent il en est de même de la suite (u_n) .

d) On a $1 + \sqrt{1 + 1/n} > 1 + 1$ donc $u_n > 2^n$ et la suite minorante est une suite géométrique divergente dont le terme général tend vers l'infini, donc il en est de même de la suite (u_n) .

e) La suite est à termes de signe quelconque, mais avec $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et la suite majorante converge vers 0, donc il en est de même des suites $(|u_n|)$ et (u_n) .

f) Le terme général u_n est une somme de fractions dont le dénominateur est de la forme $n^2 + p$, où p est un entier qui varie de 0 à $2n+1$. On a donc

l'encadrement suivant :

$$\frac{n}{n^2 + 2n + 1} \leq \frac{n}{n^2 + p} \leq \frac{n}{n^2}$$

Donc, pour le terme général qui est la somme de $2n + 2$ fractions, on a l'encadrement :

$$\frac{n(2n + 2)}{n^2 + 2n + 1} \leq u_n = \sum_{p=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2 + p} \leq \frac{n(2n + 2)}{n^2}$$

Les suites majorante et minorante convergent vers la même limite 2, donc il en est de même de la suite (u_n) .

g) Le sinus prend une infinité de fois les trois seules valeurs :

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La suite possède donc trois points d'accumulation et n'est pas convergente.

h) Quand n tend vers l'infini, le sinus est équivalent à son argument $\frac{\pi}{2^n}$ qui tend vers 0. Donc, u_n tend vers π qui est la limite de cette suite convergente.

i) Pour $n \geq 3$, on a l'encadrement $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. La suite majorante étant une suite géométrique qui converge vers 0, il en est de même de la suite (u_n) .

15. a) Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1-a^2}{1+a^2}$, donc telle que $|q| < 1$ pour a différent de 0 et par conséquent convergente. Pour $a = 0$, on a $q = 1$ et la suite est constante, égale à 1, donc convergente.

b) On peut écrire le terme général de cette suite sous la forme :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

en ayant posé $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. Par conséquent, on obtient :

$$u_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

avec q^n qui tend vers 0 puisque $0 < q < 1$. Comme d'autre part q tend vers $\frac{1}{2}$, cette suite converge vers 2.

16. On remplace u_n par son expression en fonction des deux termes précédents :

$$v_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2}) - u_{n-1} = \frac{1}{2}(u_{n-2} - u_{n-1}) = -\frac{1}{2}v_{n-1}$$

Cela établit que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$, donc convergente.

Par ailleurs, on obtient comme somme partielle :

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$$

Avec également :

$$\sum_{k=1}^n v_k = v_1 \sum_{k=1}^n q^{k-1} = v_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{2}{3}v_1(1-q^n)$$

qui converge vers $\frac{2v_1}{3}$, puisque q^n tend vers 0. La suite (u_n) est donc convergente, de limite :

$$\frac{2}{3}v_1 + u_0 = u_0 + \frac{2}{3}(u_1 - u_0) = \frac{1}{3}(a + 2b)$$

17. Les termes sous radicaux sont de la forme $n^2 + k$ où k est un entier qui varie de 1 à n . Par conséquent, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Ce qui conduit à :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Les suites majorante et minorante convergent vers la même limite 1, donc il en est de même pour la suite (u_n) .

18. La fonction logarithme étant strictement croissante, l'encadrement de l'exponentielle est équivalent, en prenant les logarithmes, à :

$$\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$$

Ces trois termes ont pour dérivées respectives $\frac{1}{1+x}$, 1 et $\frac{1}{1-x}$. Or, sur

l'intervalle $]0,1[$ on a $1+x > 1$, soit $\frac{1}{1+x} < 1$ et $0 < 1-x < 1$, soit $\frac{1}{1-x} > 1$.

L'encadrement :

$$\frac{1}{1+x} < 1 < \frac{1}{1-x}$$

conduit par intégration à :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) < \int_0^x dt = x < \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-t)$$

Ce qui est bien équivalent à :

$$1+x < e^x < \frac{1}{1-x}$$

Pour $x = 1/t$ on obtient donc :

$$1 + \frac{1}{t} < e^{1/t} < \frac{1}{1-1/t} = \frac{t}{t-1}$$

Et, en prenant les logarithmes :

$$\ln \frac{t+1}{t} < \frac{1}{t} < \ln \frac{t}{t-1}$$

On applique ces inégalités pour t prenant les valeurs entières de n à np , ce qui conduit à :

$$\sum_{t=n}^{np} [\ln(t+1) - \ln t] < u_n < \sum_{t=n}^{np} [\ln t - \ln(t-1)]$$

On a donc obtenu l'encadrement demandé, avec $v_n = \ln(np+1) - \ln n = \ln(p+1/n)$ et $w_n = \ln np - \ln(n-1) = \ln\left(p + \frac{p}{n-1}\right)$. Les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite $\ln p$, donc il en est de même de la suite (u_n) .

19. a) Tous les termes du produit sont de la forme $1 - \frac{1}{p}$, avec p entier supérieur à 3, donc la suite est à termes positifs. Le rapport de deux termes consécutifs a comme expression :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n+3} < 1$$

La suite est donc décroissante ; étant minorée par 0, elle est convergente, de limite $\ell \geq 0$.

b) Dans le cas où $0 < a \leq 1$, le terme général de la suite tend vers 0 qui est donc la limite de cette suite. Pour $a > 1$, on obtient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$$

et comme ce rapport tend vers 0, il est inférieur à 1 au-delà d'un certain rang et la suite est donc décroissante. Comme cette suite est minorée par 0, elle est convergente de limite $\ell \geq 0$.

c) On forme ici la différence de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+1)!} + 1 - \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!} \\ &= 1 - n \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n! - n(1! + 2! + \dots + n!)}{(n+1)!} \\ &= -n \frac{1! + 2! + \dots + (n-2)!}{(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

La suite est décroissante. D'autre part, le numérateur de u_n étant supérieur au dénominateur, la suite est minorée par 1, donc convergente de limite $\ell \geq 1$.

d) Le rapport de deux termes consécutifs a comme expression :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a^{n+1} > 1$$

donc cette suite est croissante. Nous allons obtenir un majorant de u_n à partir de l'inégalité $1 + x \leq e^x$. Considérons en effet $f(x) = e^x - x - 1$; sa dérivée est $f'(x) = e^x - 1$ qui s'annule pour $x = 0$ où f passe par un minimum de valeur $f(0) = 0$. Cette fonction est donc toujours positive. On en déduit la majoration :

$$u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n) \leq e^a e^{a^2} \dots e^{a^n}$$

L'argument de l'exponentielle est :

$$a + a^2 + \dots + a^n = a \frac{1 - a^n}{1 - a} \leq \frac{a}{1 - a}$$

donc :

$$u_n \leq \exp \frac{a}{1-a}$$

La suite étant croissante et majorée est convergente, de limite $\ell \leq \exp\left(\frac{a}{1-a}\right)$.

20. a) L'expression de u_{n+1} montre que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc la suite (u_n) est croissante. On obtient également :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} < 0$$

donc la suite (v_n) est décroissante. Comme $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ tend vers 0, ces deux suites convergent vers la même limite qui est le nombre e.

b) On obtient :

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \cos \frac{1}{n+1} \geq 0$$

donc la suite (u_n) est croissante. Par ailleurs :

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \cos \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+1} - \sin \frac{1}{n}$$

Tous les arguments sont des infiniment petits pour $n \rightarrow \infty$ et nous allons utiliser des équivalents des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon(1/n)}{n^2} \\ &= -\frac{n+2}{2n(n+1)^2} + \frac{\varepsilon(1/n)}{n^2} = -\frac{1+\varepsilon'(1/n)}{2n^2} \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon'(1/n)$ tend vers 0 quand n devient infini, le numérateur est positif à partir d'un certain rang et la suite (v_n) est donc décroissante. Par définition, $v_n - u_n = \sin(1/n)$ tend vers 0, donc les suites sont adjacentes et convergent vers la même limite.

21. Par différence :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$$

ce qui montre qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ définie par :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_1 - v_1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \rightarrow 0$$

On en déduit alors :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 0$$

donc la suite (u_n) est décroissante. De la même manière :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > 0$$

donc la suite (v_n) est croissante. Pour obtenir la limite commune de ces deux suites adjacentes, on peut par exemple calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3}$$

Quand n tend vers l'infini, la suite (v_n) a donc pour limite $v_1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, qui est aussi la limite de la suite (u_n) .

22. Par différence :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}) = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0$$

On en déduit donc :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n u_n} = u_n$$

donc la suite (u_n) est croissante. De la même manière :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \leq \frac{1}{2}(v_n + v_n) = v_n$$

et la suite (v_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par exemple par $u_1 = \sqrt{ab}$, puisque $v_n \geq u_n$ et que la suite (u_n) est croissante, elle est convergente. Elle admet une limite $\ell \geq \sqrt{ab}$. De la même manière, la suite (u_n) est croissante et majorée par exemple par $v_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ puisque $u_n \leq v_n$ et que la suite (v_n) est décroissante. La suite (u_n) est donc convergente vers une limite $\ell' \leq \frac{1}{2}(a+b)$. Ces limites vérifient toujours les relations de récurrence, soit

$\ell' = \sqrt{\ell'\ell}$ et $\ell = \frac{1}{2}(\ell' + \ell)$ et donc on a $\ell = \ell'$ qui appartient à l'intervalle $\left[\sqrt{ab}, \frac{1}{2}(a+b) \right]$.

23. a) Formons la différence de deux termes consécutifs :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{u_{n-1} + 1}{2u_{n-1} + 3} - \frac{u_{n-2} + 1}{2u_{n-2} + 3} = \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{(2u_{n-1} + 3)(2u_{n-2} + 3)}$$

Ainsi, toutes les différences seront du même signe si on établit que le dénominateur est positif. Pour cela, nous allons montrer que la suite est à termes positifs. Nous obtenons $u_1 = \frac{1}{3} > 0$ et si on suppose que u_{n-1} est positif, il en sera de même du numérateur et du dénominateur qui définissent le terme suivant u_n . Nous avons donc prouvé par récurrence que tous les termes étaient positifs, donc $u_n - u_{n-1}$ est du signe de $u_1 - u_0 = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire positif, et la suite est donc croissante. Pour obtenir un majorant, nous formons la différence :

$$u_n - 1 = -\frac{u_{n-1} + 2}{2u_{n-1} + 3}$$

qui est toujours négative. La suite étant croissante et majorée par 1 est convergente, de limite ℓ dans l'intervalle $[0, 1]$ qui vérifie toujours la relation de récurrence, soit :

$$\ell = \frac{\ell + 1}{2\ell + 3} \Leftrightarrow 2\ell^2 + 2\ell - 1 = 0$$

dont la seule racine positive est $\ell = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

b) La différence de deux termes consécutifs a pour expression :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{u_{n-1} + 1}{u_{n-1} + 2} - \frac{u_{n-2} + 1}{u_{n-2} + 2} = \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{(u_{n-1} + 2)(u_{n-2} + 2)}$$

Toutes les différences sont de même signe car le dénominateur est positif. En effet, $u_1 = \frac{1}{2} > 0$ et si on suppose que u_{n-1} est positif, l'expression de u_n montre qu'il est aussi positif. Ayant établi par récurrence que la suite était à termes positifs, le signe de $u_n - u_{n-1}$ est celui de $u_1 - u_0 = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire

positif. La suite est donc croissante. Par ailleurs :

$$u_n - 1 = -\frac{1}{u_{n-1} + 2}$$

est toujours négatif, donc cette suite est majorée par 1. Elle admet une limite ℓ dans l'intervalle $[0, 1]$ et qui vérifie :

$$\ell = \frac{\ell + 1}{\ell + 2} \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 1 = 0$$

la racine positive étant $\ell = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

c) La différence de deux termes successifs s'écrit :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{u_{n-1}}{1 + 3u_{n-1}} - u_{n-1} = -\frac{3u_{n-1}^2}{1 + 3u_{n-1}}$$

toujours négative si on établit que le dénominateur est positif. Or, $u_1 = \frac{1}{4} > 0$ et si on suppose que u_{n-1} est positif, il en est de même de u_n . Ainsi, la suite est à termes positifs et décroissante, donc de limite ℓ positive et qui vérifie :

$$\ell = \frac{\ell}{1 + 3\ell}$$

de solution $\ell = 0$.

Vous avez compris ?

Étudier la convergence des suites définies ci-dessous par leur terme général obtenu par une relation de récurrence :

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}}, u_0 = 1; \quad v_n = \frac{3}{4 - v_{n-1}}, v_0 = 2$$

Réponses : la suite (u_n) est positive et décroissante de limite $\ell = 0$; la suite (v_n) est décroissante et minorée par 1, de limite $\ell = 1$.

24. a) La fonction f qui détermine la relation de récurrence est définie pour x positif par $f(x) = \frac{3x}{2+5x}$ et donc $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{3}{2+5x}$. La fonction g est décroissante avec $g(x) = 1$ pour $x = \frac{1}{5} = x_0$. Ainsi, pour $0 < x < x_0$, on a $g(x) > 1$ et par conséquent, si $0 < u_n < \frac{1}{5}$, on aura $g(u_n) = \frac{f(u_n)}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite sera croissante. La fonction f est croissante de 0 à $\frac{1}{5}$, donc l'image de

l'intervalle $\left]0, \frac{1}{5}\right[$ est le même intervalle. Si on choisit le premier terme u_0 dans cet intervalle, tous les termes suivants seront donc aussi dans cet intervalle. La suite est croissante et majorée par $\frac{1}{5}$, donc convergente, de limite $\ell = \frac{1}{5}$ qui est la seule solution de $g(x) = 1$. Si u_0 est dans l'intervalle $\left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$, les termes de la suite seront dans l'intervalle image de celui-ci par f , soit $\left]\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right[$. Dans ce cas, $u_n > \frac{1}{5}$, donc $g(u_n) < 1$ et la suite est décroissante, minorée par $\frac{1}{5}$, donc convergente de limite $\ell = \frac{1}{5}$. Dans le cas particulier où $u_0 = \frac{1}{5}$ la suite est stationnaire, avec $u_n = \frac{1}{5}$ pour tout entier n .

b) La solution unique positive de $f(x) = x$ est $x_0 = 2\sqrt{2}$. La fonction f est croissante, et l'intervalle $]0, 2\sqrt{2}[$ a pour image $\left]\frac{8}{3}, 2\sqrt{2}\right[$. Donc, si on choisit $u_0 < 2\sqrt{2}$, tous les termes de la suite seront inférieurs à $2\sqrt{2}$ puisque dans ce cas $f(x) < 2\sqrt{2}$.

D'autre part :

$$u_{n+1} - u_n = 3 - u_n - \frac{1}{u_n + 3} = \frac{8 - u_n^2}{3 + u_n}$$

est positif donc la suite est croissante. Étant majorée par $2\sqrt{2}$, elle est convergente, de limite $\ell = 2\sqrt{2}$. Pour $u_0 > 2\sqrt{2}$, les termes de la suite seront dans l'intervalle image de $]2\sqrt{2}, +\infty[$ par f , soit $]2\sqrt{2}, 3[$ et par conséquent la suite est décroissante. Elle est minorée par $2\sqrt{2}$ donc convergente, de limite $\ell = 2\sqrt{2}$. Le cas particulier $u_0 = 2\sqrt{2}$ correspond à une suite stationnaire, avec $u_n = 2\sqrt{2}$ pour tout entier n .

25. Cette suite est définie par une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f(x) = \frac{4x-1}{4x-2} = 1 + \frac{1}{4x-2}. \text{ La fonction } f \text{ est décroissante sur}$$

l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ dont l'image par f est l'intervalle $]1, +\infty[$. Comme

$u_0 = 1 > \frac{1}{2}$, tous les termes de la suite étant définis par f seront donc minorés par 1. Par ailleurs, on obtient :

$$u_{n+2} = \frac{4u_{n+1} - 1}{4u_{n+1} - 2} = \frac{16u_n - 4 - 4u_n + 2}{16u_n - 4 - 8u_n + 4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4u_n}$$

Donc, si la suite est convergente, la limite ℓ doit vérifier $\ell = \frac{3}{2} - \frac{1}{4\ell}$, soit

$4\ell^2 - 6\ell + 1 = 0$ dont la seule solution supérieure à 1 est $\frac{3 + \sqrt{5}}{4}$. De cette expression, on déduit ensuite :

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{4u_{n-2}} - \frac{1}{4u_n} = \frac{u_n - u_{n-2}}{4u_n u_{n-2}}$$

et comme le dénominateur est positif, chaque différence est du signe de la précédente. Pour la suite extraite d'indices pairs, $u_{2p+2} - u_{2p}$ est donc du signe de

$u_2 - u_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$ c'est-à-dire positif ; cette suite est donc croissante.

L'expression de u_{n+2} en fonction de u_n montre que la suite est majorée par $\frac{3}{2}$.

La suite extraite d'indices pairs est croissante et majorée, donc convergente de limite $\ell = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$.

Pour la suite extraite d'indices impairs, $u_{2p+1} - u_{2p-1}$ est donc du signe de

$u_3 - u_1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$. Cette suite est décroissante et minorée par 1, donc con-

vergente de même limite $\ell = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$. Les deux suites extraites d'indices pairs et impairs étant convergentes et de même limite, il en est de même de la suite qu'elles reconstituent.

26. a) Cette suite est définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x + 2}$. Cette fonction admet pour dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2} = \frac{(x+1-2)(x+1+2)}{2(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)^2 - 4}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

avec comme dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$$

Ainsi, quand x varie de 0 à $+\infty$ la dérivée f' croît de $-\frac{3}{2}$ à $\frac{1}{2}$ en passant par les valeurs $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{18}$ et $f'(1) = 0$. Par conséquent, pour x supérieur à $\frac{1}{2}$, on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

L'équation $\ell = f(\ell)$ est équivalente à $\ell^2 + 2\ell - 3 = 0$ et n'admet que la solution $\ell = 1$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$. Le premier terme u_0 appartient aussi à cet intervalle, donc cette suite est convergente d'après le théorème sur les suites récurrentes, de limite $\ell = 1$.

b) La fonction f qui définit la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ applique l'intervalle $]2, +\infty[$ sur lui-même. Comme $u_0 = 3 > 2$, tous les termes de la suite sont supérieurs à 2. Formons maintenant la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt[3]{u_n + 6} - u_n$$

est du signe de $u_n + 6 - u_n^3 = (2 - u_n)(3 + 2u_n + u_n^2)$ c'est-à-dire négatif. Cette suite est donc décroissante et minorée par 2, par conséquent convergente de limite vérifiant $\ell = \sqrt[3]{\ell + 3}$, soit $\ell = 2$.

c) Pour tout x positif, $\ln(1+x)$ est positif, donc la suite est à termes positifs. Par ailleurs, la différence de deux termes consécutifs a pour expression :

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n) - u_n = g(u_n)$$

en ayant posé $g(x) = \ln(1+x) - x$. La fonction g est décroissante et négative pour x positif, donc cette suite est décroissante. Elle est minorée par 0 et par conséquent convergente, de limite vérifiant $\ell = \ln(1+\ell)$, soit $\ell = 0$.

d) La suite est bien sûr à termes positifs, avec :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{\frac{u_n^2}{2} + u_n} - \sqrt{\frac{u_{n-1}^2}{2} + u_{n-1}} = \frac{\left(\frac{u_n^2}{2} + u_n\right) - \left(\frac{u_{n-1}^2}{2} + u_{n-1}\right)}{\sqrt{\frac{u_n^2}{2} + u_n} + \sqrt{\frac{u_{n-1}^2}{2} + u_{n-1}}} \\ &= \frac{(u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n-1} + 2)}{2\left(\sqrt{\frac{u_n^2}{2} + u_n} + \sqrt{\frac{u_{n-1}^2}{2} + u_{n-1}}\right)} \end{aligned}$$

qui est donc du signe de $u_1 - u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$, c'est-à-dire positif. Cette suite est croissante. La fonction f qui définit la relation de récurrence applique l'intervalle $[0, 2]$ sur lui-même, donc tous les éléments de la suite sont majorés par 2.

Cette suite est convergente, de limite ℓ telle que $\ell = \sqrt{\frac{\ell^2}{2+\ell}}$, la seule solution supérieure à $u_0 = 1$ étant $\ell = 2$.

e) La fonction f qui définit la récurrence est positive sur $]0, +\infty[$, donc la suite est à termes positifs. Par ailleurs :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1 + 2u_n} - 1 - u_n = \frac{1 + 2u_n - 1 - 2u_n - u_n^2}{\sqrt{1 + 2u_n} + 1 + u_n}$$

est toujours négatif, donc la suite est décroissante. Elle est minorée par 0, donc convergente de limite ℓ vérifiant $\ell = \sqrt{1 + 2\ell} - 1$, de solution $\ell = 0$.

Vous avez compris ?

Etudier la convergence des suites définies ci-dessous par leur terme général u_n obtenu par une relation de récurrence.

a) $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_{n-1}}$, $u_0 = \sqrt{2}$; c) $u_{n+1} = \sqrt{8 + u_n^2/2}$, $u_0 = 0$;

b) $u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{2}{3} u_n$, $u_0 = 1$; d) $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$.

Réponses :

a) Suite bornée, avec $0 < u_n < 2$, et croissante, convergente vers $\ell = 2$;

- b) la suite $(|u_n|)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, donc converge vers 0, comme (u_n) ;
- c) suite bornée, avec $0 < u_n < 4$, et croissante, convergente vers $\ell = 4$;
- d) suite minorée par $\sqrt{2}$, et décroissante, convergente vers $\ell = \sqrt{2}$.

27. L'équation $f(x) - x = 0$ admet une seule racine positive $x_0 = 2$. Les premiers termes de la suite sont déterminés sur le graphe de f représenté figure 7.1. On voit que $u_1 = \frac{11}{4}$ est supérieur à x_0 puis $u_2 = \frac{71}{64}$ inférieur et que les termes successifs vont se rapprocher de x_0 , alternativement à sa droite et à sa gauche.

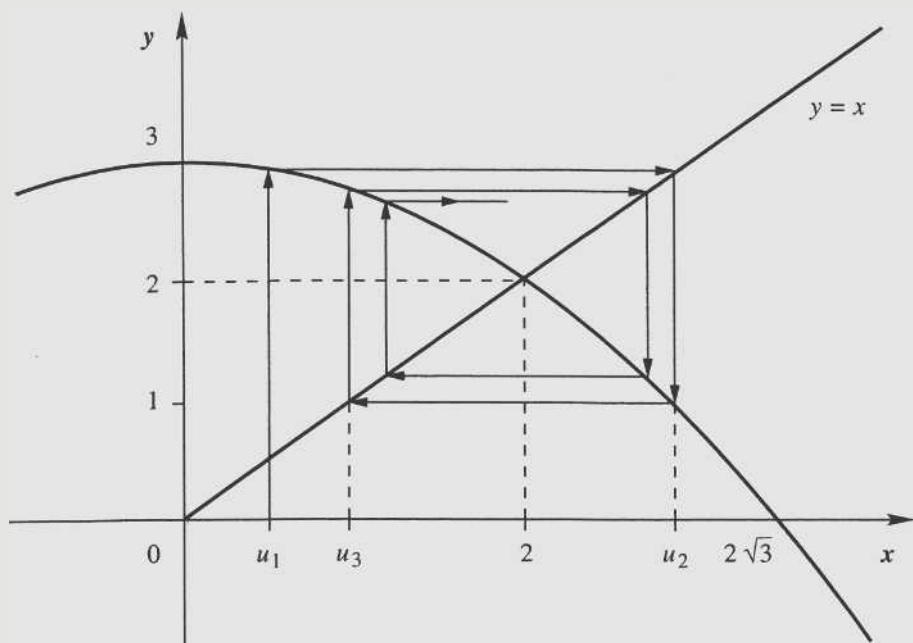


Figure 7.1

Montrons par récurrence que tous les termes de la suite extraite (u_{2p}) sont dans l'intervalle $]0, 2[$ et ceux de la suite extraite (u_{2p+1}) dans l'intervalle $]2, 2\sqrt{3}[$. Si on suppose que $0 < u_{2p-2} < 2$, on a alors $0 < u_{2p-2}^2 < 4$, puis $2 < u_{2p-1} = 3 - \frac{1}{4}u_{2p-2}^2 < 3 < 2\sqrt{3}$ et donc $4 < u_{2p-2}^2 < 12$, d'où on déduit $0 < u_{2p} = 3 - \frac{1}{4}u_{2p-2}^2 < 2$. On aura alors également $2 < u_{2p+1} =$

$3 - \frac{1}{4}u_{2p}^2 < 3 < 2\sqrt{3}$. Pour étudier maintenant la monotonie de ces deux suites extraites, formons la différence :

$$u_n - u_{n-2} = \frac{1}{4}(u_{n-3}^2 - u_{n-1}^2)$$

On en déduit que $u_{2p} - u_{2p-2}$ est du signe contraire à $u_{2p-1} - u_{2p-3}$, donc du signe de $u_{2p-2} - u_{2p-4}$ et par conséquent du signe de $u_2 - u_0 = \frac{7}{64}$. La suite (u_{2p}) est donc croissante et majorée par 2 et par conséquent converge vers $\ell = 2$ qui est la seule solution positive de l'équation $f(x) = x$. La suite (u_{2p-1}) est décroissante et minorée par 2, donc converge vers la même limite, qui est aussi celle de la suite (u_n) puisque ces deux suites extraites convergent vers la même limite.

28. a) L'équation homogène s'écrit :

$$v_n + 2v_{n-1} = 0$$

Elle a pour solution la suite géométrique $v_n = \lambda(-2)^n$. Le second membre est un polynôme de degré 2, donc on cherche comme solution particulière un polynôme de degré 2 :

$$u_n^* = an^2 + bn + c$$

Pour trouver les constantes a, b, c on remplace dans l'équation :

$$an^2 + bn + c + 2a(n-1)^2 + 2b(n-1) + c = 3n^2 + 1$$

En identifiant ces deux polynômes, on obtient :

$$3a = 3, \quad 3b - 4a = 0, \quad 2a - 2b + 3c = 1$$

La solution particulière est donc :

$$u_n^* = n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{5}{9}$$

La solution générale de l'équation complète s'obtient par addition :

$$u_n = v_n + u_n^* = \lambda(-2)^n + n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{5}{9}$$

La condition initiale $u_0 = 1$ donne $\lambda = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$, soit :

$$u_n = \frac{1}{9}(-2)^{n+2} + n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{5}{9}$$

Cette suite n'admet pas de limite pour $n \rightarrow \infty$.

b) L'équation homogène est :

$$v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n = 0$$

Elle admet pour solution $v_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Le second membre est une constante, donc on cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = a$. Cette constante doit vérifier :

$$a - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

donc $u_n^* = 1$. La solution générale de l'équation complète est :

$$u_n = v_n + u_n^* = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$$

La condition initiale $u_0 = 3 = \lambda + 1$ donne $\lambda = 2$, soit :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$$

Cette suite converge vers 1.

c) L'équation homogène est :

$$v_n - v_{n-1} = 0$$

de solution $v_n = \lambda$. Le second membre est un polynôme de degré 1, mais comme les constantes sont solutions de l'équation homogène, il faut chercher une solution particulière qui soit un polynôme de degré 2 :

$$u_n^* = an^2 + bn$$

On remplace dans l'équation :

$$an^2 + bn - a(n-1)^2 - b(n-1) = \frac{1}{3}(n-1)$$

Par identification, on obtient $2a = \frac{1}{3}, b - a = -\frac{1}{3}$, soit :

$$u_n^* = \frac{1}{6}(n^2 - n)$$

La solution générale de l'équation complète est :

$$u_n = v_n + u_n^* = \lambda + \frac{1}{6}(n^2 - n)$$

On utilise la condition initiale $u_0 = 1 = \lambda$ pour obtenir :

$$u_n = \frac{1}{6}(n^2 - n + 6)$$

Cette suite est divergente et tend vers l'infini avec n .

d) L'équation homogène a pour solution :

$$v_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Le second membre est la somme d'une fonction exponentielle et d'une constante. On cherche donc une solution particulière pour chacune des deux équations :

$$u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} = -1$$

Pour la première, il y a résonance et on cherche une solution de la forme

$$u_n^{*(1)} = \mu \frac{n}{2^n} :$$

$$\frac{\mu}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

Donc :

$$u_n^{*(1)} = \frac{n}{2^n}$$

Pour la seconde équation, on cherche une solution constante $u_n^{*(2)} = a$, d'où $a - \frac{a}{2} = -1$ et $u_n^{*(2)} = -2$. On obtient ainsi comme solution particulière :

$$u_n^* = u_n^{*(1)} + u_n^{*(2)} = \frac{n}{2^n} - 2$$

La solution générale est :

$$u_n = \frac{\lambda}{2^n} + \frac{n}{2^n} - 2$$

La condition initiale $u_0 = 0 = \lambda - 2$ donne :

$$u_n = \frac{n+2}{2^n} - 2$$

Cette suite converge vers -2 .

e) L'équation homogène a pour solution :

$$v_n = \lambda \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Le second membre est la somme d'une fonction exponentielle et d'un polynôme. On cherche donc une solution particulière pour chacune des deux équations :

$$u_n - \frac{1}{2} u_{n-1} = \frac{n^2}{2} \quad \text{et} \quad u_n - \frac{1}{2} u_{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

Pour la première, on cherche une solution polynômiale de la même forme $u_n^{*(1)} = an^2 + bn + c$:

$$an^2 + bn + c - \frac{a}{2}(n-1)^2 - \frac{b}{2}(n-1) - \frac{c}{2} = \frac{n^2}{2}$$

Par identification :

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{2}, \quad a + \frac{b}{2} = 0, \quad \frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 0$$

La première solution particulière est donc :

$$u_n^{*(1)} = n^2 - 2n + 3$$

Pour la seconde équation, il y a résonance et on cherche une solution de la forme $u_n^{*(2)} = \mu \frac{n}{2^n}$:

$$\mu \frac{n}{2^n} - \mu \frac{n-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

On obtient donc :

$$u_n^{*(2)} = \frac{n}{2^n}$$

La solution particulière de l'équation complète est donc :

$$u_n^* = u_n^{*(1)} + u_n^{*(2)} = n^2 - 2n + 3 + \frac{n}{2^n}$$

La solution générale s'écrit :

$$u_n = \lambda \left(\frac{1}{2} \right)^n + n^2 - 2n + 3 + \frac{n}{2^n}$$

La condition initiale $u_0 = 1 = \lambda + 3$ implique $\lambda = -2$:

$$u_n = \frac{n-2}{2^n} + n^2 - 2n + 3$$

Cette suite est divergente puisque $u_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

Vous avez compris ?

Déterminer les suites solutions des équations de récurrence suivantes puis étudier leur convergence :

- a) $3u_n - u_{n-1} = 3^n$, $u_0 = 0$; b) $u_n + 2u_{n-1} + e^{-n} = 0$, $u_0 = \frac{2e}{2e+1}$
 c) $u_n - 2u_{n-1} + 1 = 2^n$, $u_0 = 0$.

Réponses :

- a) $u_n = \frac{1}{8}(3^{n+1} - 3^{-n+1}) \rightarrow +\infty$; b) $u_n = (-2)^n - \frac{e^{-n}}{1+2e} n$ n'a pas de limite ;
 c) $u_n = (n-1)2^n + 1 \rightarrow +\infty$.

29. Le changement $w_n = \ln u_n$ conduit à l'équation :

$$w_n = 2w_{n-1} + \ln 3$$

La solution de l'équation homogène est $v_n = \lambda 2^n$. On cherche ensuite une solution particulière constante $u_n^* = a$:

$$a - 2a = \ln 3$$

D'où :

$$w_n = \lambda 2^n - \ln 3$$

avec $w_0 = \lambda - \ln 3$, soit :

$$w_n = (w_0 + \ln 3)2^n - \ln 3 = 2^n \ln 3u_0 - \ln 3 = \ln \frac{(3u_0)^{2^n}}{3}$$

La suite est à termes positifs, donc $u_0 > 0$. On obtient :

$$u_n = \frac{1}{3}(3u_0)^{2^n}$$

Cette suite est convergente si $0 < 3u_0 < 1$, avec $u_n \rightarrow 0$. Elle est stationnaire pour $u_0 = \frac{1}{3}$ et divergente pour $u_0 > \frac{1}{3}$.

Vous avez compris ?

Déterminer la suite solution de l'équation de récurrence :

$$u_{n+1} = e^n u_n^3, \quad u_0 = 1$$

Réponse : $w_n = \ln u_n = \frac{3^n}{4} - \frac{n}{2} - \frac{1}{4}, u_n = \exp \frac{1}{4}(3^n - 2n - 1)$.

30. a) L'équation sans second membre a pour solution :

$$v_n = \lambda \left(\frac{a}{a-1} \right)^n$$

Pour déterminer une solution particulière, il faut distinguer deux cas, suivant qu'il y a résonance ou non.

Pour $\frac{a}{a-1} \neq -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $a \neq \frac{1}{3}$, on cherche une solution particulière semblable au second membre, soit :

$$u_n^* = \mu \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

On doit avoir :

$$\mu \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} - \mu \frac{a}{a-1} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

soit :

$$\mu \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{a-1} \right) = -1$$

La solution particulière est donc :

$$u_n^* = \frac{2a-2}{1-3a} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

La solution générale s'écrit :

$$u_n = v_n + u_n^* = \lambda \left(\frac{a}{a-1} \right)^n + \frac{2a-2}{1-3a} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

Cette suite est convergente pour $a < \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ et a pour limite 0.

Pour $a = \frac{1}{3}$, il y a résonance et on cherche une solution particulière de la forme :

$$u_n^* = \mu n \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

On doit avoir :

$$\mu (n+1) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{\mu n}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

Soit :

$$-\frac{\mu}{2} = 1$$

et :

$$u_n^* = -2n \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

La solution générale est alors :

$$u_n = \lambda \left(-\frac{1}{2} \right)^n - 2n \left(-\frac{1}{2} \right)^n = (u_0 - 2n) \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

Cette suite converge vers 0.

b) L'équation sans second membre a pour solution :

$$v_n = \lambda [a(a-1)]^n$$

Pour déterminer une solution particulière, il faut distinguer deux cas, suivant qu'il y a résonance ou non.

Pour $a(a-1) \neq 2$, c'est-à-dire $a \neq -1$ et $a \neq 2$, on cherche une solution particulière semblable au second membre, soit :

$$u_n^* = \mu 2^n$$

On doit avoir :

$$\mu 2^{n+1} - a(a-1)\mu 2^n = 2^n$$

D'où :

$$u_n^* = \frac{1}{2 - a(a-1)} 2^n$$

La solution générale est alors :

$$u_n = \lambda [a(a-1)]^n + \frac{2^n}{2 - a(a-1)}$$

Cette suite est divergente.

Pour $a(a-1) = 2$, c'est-à-dire $a = -1$ ou $a = 2$, on cherche une solution particulière de la forme :

$$u_n^* = \mu n 2^n$$

Soit :

$$\mu (n+1) 2^{n+1} - \mu n 2^{n+1} = 2^n$$

et :

$$u_n^* = n 2^{n-1}$$

La solution générale est :

$$u_n = \lambda 2^n + n 2^{n-1} = (2u_0 + n) 2^{n-1}$$

Elle est divergente.

31. a) L'équation homogène associée est :

$$2v_n - 3v_{n-1} + v_{n-2} = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0$$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$v_n = \lambda + \frac{\mu}{2^n}$$

Le second membre est une constante et toute suite constante est solution de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière qui soit soit un polynôme de degré 1, de la forme $u_n^* = \alpha n$. On remplace dans l'équation :

$$2\alpha n - 3\alpha(n-1) + \alpha(n-2) = 2$$

D'où $u_n^* = 2n$ et la solution générale de l'équation complète :

$$u_n = v_n + u_n^* = \lambda + \frac{\mu}{2^n} + 2n$$

Les conditions initiales imposent :

$$u_0 = 3 = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad u_1 = 3 = \lambda + \frac{\mu}{2} + 2$$

soit $\lambda = -1$ et $\mu = 4$:

$$u_n = \frac{1}{2^{n-2}} + 2n - 1$$

b) L'équation homogène associée est :

$$v_n - 2v_{n-1} + 2v_{n-2} = 0$$

Avec pour équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

Les racines sont les complexes conjugués :

$$r_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \quad \text{et} \quad r_2 = \bar{r}_1 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

La solution réelle de l'équation homogène est alors :

$$v_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\lambda \cos \frac{n\pi}{4} + \mu \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

On cherche une solution particulière constante, comme le second membre, $u_n^* = a$:

$$a - 2a + 2a = 1$$

La solution de l'équation complète est donc :

$$u_n = 2^{n/2} \left(\lambda \cos \frac{n\pi}{4} + \mu \sin \frac{n\pi}{4} \right) + 1$$

Les constantes λ et μ sont déterminées par les conditions initiales :

$$u_0 = 2 = \lambda + 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 3 = \lambda + \mu + 1$$

D'où la solution :

$$u_n = 2^{n/2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) + 1$$

c) L'équation homogène associée est :

$$v_n - 5v_{n-1} + 6v_{n-2} = 0$$

Son équation caractéristique est :

$$r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$$

La solution de l'équation homogène est alors :

$$v_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$$

Le second membre est un polynôme de degré 1, donc on cherche une solution particulière de la même forme, $u_n^* = an + b$:

$$an + b - 5a(n-1) - 5b + 6a(n-2) + 6b = 2n + 1$$

D'où, par identification :

$$2a = 2 \quad \text{et} \quad 2b - 7a = 1$$

La solution de l'équation complète est donc :

$$u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n + n + 4$$

On utilise les conditions initiales :

$$u_0 = 1 = \lambda + \mu + 4 \quad \text{et} \quad u_1 = 4 = 2\lambda + 3\mu + 1 + 4$$

D'où la solution :

$$u_n = 5 \times 3^n - 2^{n+3} + n + 4$$

d) L'équation homogène associée est :

$$v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 0$$

Son équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$$

La solution de l'équation homogène est alors :

$$v_n = \lambda + \mu 2^n$$

Le second membre est un polynôme de degré 1, mais 1 est racine de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière qui soit un polynôme de degré 2, de la forme $u_n^* = an^2 + bn$:

$$a(n+2)^2 + b(n+2) - 3a(n+1)^2 - 3b(n+1) + 2an^2 + 2bn = 2n + 1$$

Par identification on obtient :

$$4a + b - 6a - 3b + 2b = 2 \quad \text{et} \quad 4a + 2b - 3a - 3b = 1$$

La solution particulière est donc :

$$u_n^* = -n^2 - 2n$$

La solution de l'équation complète est :

$$u_n = \lambda + \mu 2^n - n^2 - 2n$$

On utilise les conditions initiales :

$$u_0 = 0 = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad u_1 = 1 = \lambda + 2\mu - 3$$

D'où la solution :

$$u_n = 2^{n+2} - n^2 - 2n - 4$$

e) L'équation homogène associée est :

$$v_n - 4v_{n-1} + 4v_{n-2} = 0$$

Son équation caractéristique est :

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$$

La racine $r = 2$ est double, donc la solution de l'équation homogène est :

$$v_n = (\lambda + \mu n) 2^n$$

Le second membre est un polynôme de degré 2, donc on cherche une solution particulière de la même forme, $u_n^* = an^2 + bn + c$:

$$an^2 + bn + c - 4a(n-1)^2 - 4b(n-1) - 4c + 4a(n-2)^2 + 4b(n-2) + 4c = n^2 + n + 1$$

Par identification on obtient :

$$a = 1, \quad b + 8a - 4b - 16a + 4b = 1, \quad c - 4a + 4b - 4c + 16a - 8b + 4c = 1$$

La solution particulière est donc :

$$u_n^* = n^2 + 9n + 25$$

La solution de l'équation complète est :

$$u_n = (\lambda + \mu n)2^n + n^2 + 9n + 25$$

On utilise les conditions initiales :

$$u_0 = 25 = \lambda + 25 \quad \text{et} \quad u_1 = 31 = 2\lambda + 2\mu + 35$$

D'où la solution :

$$u_n = -n2^{n+1} + n^2 + 9n + 25$$

f) On retrouve l'équation homogène de la question c), de solution :

$$v_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$$

Il y a résonance, donc on cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = \mu n 2^n$, avec :

$$\mu n 2^n - 5\mu (n-1)2^{n-1} + 6\mu (n-2)2^{n-2} = 2^n$$

On obtient $u_n^* = -n2^{n+1}$. La solution de l'équation complète est :

$$u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n - n2^{n+1}$$

On utilise les conditions initiales :

$$u_0 = 0 = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad u_1 = 1 = 2\lambda + 3\mu - 4$$

La solution qui vérifie ces conditions est :

$$u_n = 5(3^n - 2^n) - n2^{n+1}$$

g) On retrouve l'équation homogène de la question e), de solution :

$$v_n = (\lambda + \mu n)2^n$$

Il y a résonance, et comme 2 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = \alpha n^2 2^n$, avec :

$$\alpha n^2 2^n - 4\alpha(n-1)^2 2^{n-1} + 4\alpha(n-2)^2 2^{n-2} = 2^n$$

On obtient $u_n^* = n^2 2^{n-1}$. La solution de l'équation complète est :

$$u_n = (\lambda + \mu n) 2^n + n^2 2^{n-1}$$

On utilise les conditions initiales :

$$u_0 = 0 = \lambda \quad \text{et} \quad u_1 = 3 = 2\lambda + 2\mu + 1$$

La solution qui vérifie ces conditions est :

$$u_n = n(n+2) 2^{n-1}$$

h) L'équation homogène associée est :

$$v_n - 2\sqrt{3}v_{n-1} + 4v_{n-2} = 0$$

Son équation caractéristique est :

$$r^2 - 2\sqrt{3}r + 4 = 0$$

Les racines sont les complexes conjugués :

$$r_1 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2e^{i\pi/6} \quad \text{et} \quad r_2 = \bar{r}_1 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2e^{-i\pi/6}$$

La solution réelle de l'équation homogène est alors :

$$v_n = 2^n \left(\lambda \cos \frac{n\pi}{6} + \mu \sin \frac{n\pi}{6} \right)$$

Il y a résonance, donc pour déterminer une solution particulière de l'équation complète, il faut considérer l'équation sur le corps des complexes :

$$u_n - 2\sqrt{3}u_{n-1} + 4u_{n-2} = 2^n e^{in\pi/6}$$

Le second membre de l'équation dans \mathbb{R} étant la partie réelle du second membre de cette équation dans \mathbb{C} , la solution particulière sera obtenue comme partie réelle de la solution particulière de la forme $u_n^* = \alpha n 2^n e^{in\pi/6}$. La constante α doit vérifier :

$$\alpha n 2^n e^{in\pi/6} - 2\sqrt{3}\alpha(n-1)2^{n-1} e^{i(n-1)\pi/6} + 4\alpha(n-2)2^{n-2} e^{i(n-2)\pi/6} = 2^n e^{in\pi/6}$$

On a donc la condition :

$$\alpha \sqrt{3} e^{i\pi/6} - 2\alpha = e^{i\pi/3}$$

Cette condition est équivalente à :

$$\alpha e^{2i\pi/3} = e^{i\pi/3}$$

La solution particulière complexe est donc $u_n^* = n2^n e^{i(n-2)\pi/6}$ et sa partie réelle est $n2^n \cos(n-2)\frac{\pi}{6}$. La solution de l'équation complète dans \mathbb{R} est :

$$u_n = 2^n \left(\lambda \cos \frac{n\pi}{6} + \mu \sin \frac{n\pi}{6} \right) + n2^n \cos(n-2)\frac{\pi}{6}$$

On utilise les conditions initiales :

$$u_0 = 0 = \lambda \quad \text{et} \quad u_1 = 2 + \sqrt{3} = \lambda\sqrt{3} + \mu + \sqrt{3}$$

La solution qui vérifie ces conditions est :

$$u_n = 2^{n+1} \sin \frac{n\pi}{6} + n2^n \cos(n-2)\frac{\pi}{6}$$

Vous avez compris ?

Déterminer les suites solutions des équations de récurrence suivantes.

a) $u_n - 9u_{n-1} + 20u_{n-2} = 5^n, \quad u_0 = 1, u_1 = 29;$

b) $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n = -4n - 2, \quad u_0 = 4, u_1 = 8;$

c) $2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = -\frac{1}{2^n} + 1, \quad u_0 = 2, u_1 = 3;$

d) $u_{n+2} - \frac{5}{2}u_{n+1} + \frac{25}{4}u_n = 19 + \frac{7}{2^n}, \quad u_0 = \frac{16}{3}, u_1 = \frac{14}{3};$

Réponses : a) $u_n = 4^n + n5^{n+1};$ b) $u_n = 3^n + n^2 + n + 3;$ c) $u_n = \frac{n+1}{2^{n-1}};$

d) $u_n = 4 + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2^n}.$

32. a) L'équation caractéristique est :

$$r^2 - a\sqrt{3}r + a^2 = 0$$

Les racines sont les complexes conjugués :

$$r_1 = ae^{i\pi/6} \quad r_2 = \bar{r}_1 = ae^{-i\pi/6}$$

La solution générale réelle de cette équation est donc :

$$u_n = |a|^n \left(\lambda \cos \frac{n\pi}{6} + \mu \sin \frac{n\pi}{6} \right)$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$u_0 = 1 = \lambda \quad \text{et} \quad u_3 = 0 = |a|^3 \mu$$

La solution est donc :

$$u_n = |a|^n \cos \frac{n\pi}{6}$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|a| < 1$ et diverge sinon.

b) L'équation homogène associée $v_{n+2} + a^2 v_n = 0$ admet pour équation caractéristique $r^2 + a^2 = 0$, de solutions $r_1 = ai$ et $r_2 = r_1 = -ai$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc :

$$v_n = |a|^n \left(\lambda \cos \frac{n\pi}{2} + \mu \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

On cherche une solution particulière de la même forme que le second membre, soit $u_n^* = \alpha(-1)^n$:

$$\alpha(-1)^{n+2} + a^2 \alpha(-1)^n = (-1)^n$$

On obtient :

$$u_n^* = \frac{(-1)^n}{1 + a^2}$$

Les solutions générales de l'équation complète sont donc de la forme :

$$u_n = |a|^n \left(\lambda \cos \frac{n\pi}{2} + \mu \sin \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{(-1)^n}{1 + a^2}$$

En utilisant les conditions initiales :

$$u_0 = \frac{1}{1 + a^2} = \lambda + \frac{1}{1 + a^2} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{a^2}{1 + a^2} = |a| \mu - \frac{1}{1 + a^2}$$

La solution est donc :

$$u_n = |a|^{n-1} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^n}{1 + a^2}$$

La suite (u_n) est toujours divergente.

c) L'équation homogène associée est :

$$v_{n+2} - (1 - a)v_{n+1} + a(1 - 2a)v_n = 0$$

Son équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - (1-a)r + a(1-2a) = (r-a)(r-1+2a) = 0$$

Il y a deux racines réelles distinctes $r_1 = a$ et $r_2 = 1-2a$ si $a \neq \frac{1}{3}$, d'où la solution générale de l'équation homogène :

$$v_n = \lambda a^n + \mu (1-2a)^n$$

Le second membre est de la forme exponentielle et pour qu'il n'y ait pas résonance il faut que $\frac{1}{3}$ ne soit pas racine de l'équation caractéristique.

Si $a \neq \frac{1}{3}$, on cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = \frac{\alpha}{3^n}$, avec :

$$\frac{\alpha}{3^{n+2}} - (1-a)\frac{\alpha}{3^{n+1}} + a(1-2a)\frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{3^{n+2}}$$

On obtient donc comme solution particulière :

$$u_n^* = -\frac{1}{2(3a-1)^2 3^n}$$

Les solutions de l'équation complète sont de la forme :

$$u_n = \lambda a^n + \mu (1-2a)^n - \frac{1}{2(3a-1)^2 3^n}$$

La suite (u_n) converge vers 0 pour $0 < a < \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} < a < 1$, converge vers μ pour $a = 0$ et diverge dans les autres cas.

Si $a = \frac{1}{3}$, il y a résonance et $\frac{1}{3}$ est racine double, donc la solution générale de l'équation homogène est :

$$v_n = \frac{\lambda + \mu n}{3^n}$$

On cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = \frac{\alpha n^2}{3^n}$, avec :

$$\frac{\alpha(n+2)^2}{3^{n+2}} - \frac{2\alpha(n+1)^2}{3^{n+2}} + \frac{\alpha n^2}{3^{n+2}} = \frac{1}{3^{n+2}}$$

D'où $\alpha = \frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation complète sont de la forme :

$$u_n = \frac{\lambda + \mu n + n^2/2}{3^n}$$

La suite (u_n) converge vers 0.

d) L'équation homogène associée est :

$$v_{n+2} - 3av_{n+1} + 2a^2v_n = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - 3ar + 2a^2 = (r - a)(r - 2a) = 0$$

Il y a deux racines réelles distinctes $r_1 = a$ et $r_2 = 2a$, d'où la solution générale de l'équation homogène :

$$v_n = \lambda a^n + \mu (2a)^n$$

Le second membre est la somme de deux termes. On cherche d'abord une solution particulière constante $u_n^* = \alpha$ pour l'équation :

$$u_{n+2} - 3au_{n+1} + 2a^2u_n = 1$$

On doit avoir :

$$\alpha - 3a\alpha + 2a^2\alpha = 0$$

Soit :

$$u_n^{*(1)} = \frac{1}{(a-1)(2a-1)}$$

pour $a \neq \frac{1}{2}$.

Si $a = \frac{1}{2}$, 1 est racine de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière $u_n^* = \alpha n$ pour l'équation :

$$u_{n+2} - \frac{3}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n = 1$$

La solution particulière est alors $u_n^{*(1)} = 2n$.

On cherche maintenant une solution particulière de la forme $u_n^* = \alpha \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ pour l'équation :

$$u_{n+2} - 3au_{n+1} + 2a^2u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On doit avoir :

$$\alpha \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 3a\alpha \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2a^2\alpha \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

La solution particulière est :

$$u_n^{*(2)} = \frac{(-1)^n}{(4a+1)(2a+1)2^{n-2}}$$

Si $a \neq \frac{1}{2}$, la solution générale de l'équation complète est de la forme:

$$u_n = \lambda a^n + \mu (2a)^n + \frac{1}{(a-1)(2a-1)} + \frac{(-1)^n}{(4a+1)(2a+1)2^{n-2}}$$

Si $a = \frac{1}{2}$:

$$u_n = \frac{\lambda}{2^n} + \mu + 2n + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^{n-1}}$$

La suite (u_n) converge vers $\frac{1}{(a-1)(2a-1)}$ pour $0 < a < \frac{1}{2}$ et diverge dans les autres cas.

Vous avez compris ?

Déterminer, en fonction du paramètre réel a , les suites solutions des équations de récurrence suivantes, puis étudier leur convergence.

$$a) u_{n+2} - u_{n+1} - a(a-1)u_n = \frac{1}{2^n} \quad b) u_{n+2} - au_{n+1} + (a-1)u_n = 2$$

Réponses :

a) Si $a \neq \frac{1}{2}$:

$$u_n = \lambda a^n + \mu (1-a)^n - \frac{1}{(2a-1)^2 2^{n-2}}$$

Si $a = \frac{1}{2}$:

$$u_n = \frac{\lambda n + \mu + 2n^2}{2^n}$$

La suite (u_n) converge vers 0 pour $0 < a < 1$, vers $u_0 + 4$ pour $a = 0$ et $a = 1$ et diverge dans tous les autres cas.

b) Si $a \neq 2$:

$$u_n = \lambda (a-1)^n + \mu + \frac{2n}{2-a}$$

Si $a = 2$:

$$u_n = n^2 + \lambda n + \mu$$

La suite (u_n) est divergente.

33. a) L'équation homogène associée s'écrit :

$$v_{n+3} - 5v_{n+2} + 8v_{n+1} - 4v_n = 0$$

La recherche de solutions de la forme $v_n = r^n$ conduit à résoudre l'équation caractéristique :

$$r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$$

Les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$ qui est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme :

$$v_n = \lambda + \mu 2^n + \nu n 2^n$$

Le second membre est une constante, mais comme les constantes sont solutions de l'équation homogène, on doit chercher une solution particulière de la forme $u_n^* = \alpha n$, avec :

$$\alpha(n+3) - 5\alpha(n+2) + 8\alpha(n+1) - 4\alpha n = 1$$

On obtient $\alpha = 1$ et la solution générale de l'équation complète est :

$$u_n = v_n + u_n^* = \lambda + \mu 2^n + \nu n 2^n + n$$

Les conditions initiales vont permettre de déterminer les trois constantes :

$$u_0 = 2 = \lambda + \mu \quad u_1 = 5 = \lambda + 2\mu + 2\nu + 1 \quad u_2 = 12 = \lambda + 4\mu + 8\nu + 2$$

Ces conditions sont équivalentes à :

$$\lambda + \mu = 2 \quad \mu + 2\nu = 2 \quad \mu + 3\nu = 3$$

La solution est $\nu = 1, \mu = 0, \lambda = 2$, d'où :

$$u_n = 2 + n(2^n + 1)$$

b) L'équation caractéristique associée à cette équation homogène s'écrit :

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3 = 0$$

La solution générale est donc de la forme :

$$u_n = \lambda n^2 + \mu n + \nu$$

Avec les conditions initiales :

$$u_0 = 1 = \nu \quad u_1 = 1 = \lambda + \mu + \nu \quad u_2 = 9 = 4\lambda + 2\mu + \nu$$

On obtient comme solution :

$$u_n = 4n^2 - 4n + 1 = (2n-1)^2$$

Vous avez compris ?

Déterminer la suite solution de l'équation de récurrence suivante :

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0, \quad u_0 = 2, \quad u_1 = 4, \quad u_2 = 10$$

Réponse :

$$u_n = 3^n + 1$$

34. a) On écrit le système sous forme matricielle :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = MX_n$$

La solution de ce système est :

$$X_n = M^n X_0$$

Pour obtenir M^n , nous allons essayer de diagonaliser la matrice M . Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$$

Les deux racines sont simples, donc M est diagonalisable. Les coordonnées d'un vecteur propre associé à $\lambda = -1$ doivent vérifier :

$$3x + 3y = 0$$

On peut donc retenir le vecteur propre de coordonnées 1 et -1.

Les coordonnées d'un vecteur propre associé à $\lambda = 5$ doivent vérifier :

$$-3x + 3y = 0$$

On peut donc retenir le vecteur propre de coordonnées 1 et 1. Ces deux vecteurs forment les colonnes de la matrice de passage à la base de vecteurs propres :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de cette matrice est :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire la solution du système :

$$X_n = M^n X_0 = P D^n P^{-1} X_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 5^n & (-1)^{n+1} + 5^n \\ (-1)^{n+1} + 5^n & (-1)^n + 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$u_n = (-1)^n + 5^n \quad v_n = (-1)^{n+1} + 5^n$$

b) On écrit le système sous forme matricielle :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M X_n$$

La solution de ce système est :

$$X_n = M^{n-1} X_1$$

Pour obtenir M^n , nous allons essayer de diagonaliser la matrice M . Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$$

La valeur propre $\lambda = 3$ est double et le sous-espace propre associé est défini par $x + y = 0$. Il est de dimension 1, donc M n'est pas diagonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton (voir *TD Algèbre*, chapitre 6), la matrice M vérifie :

$$(M - 3I)^2 = 0$$

Par ailleurs, puisque $M - 3I$ n'est pas la matrice nulle, l'équation typique est :

$$(M - 3I)^2 = M^2 - 6M + 9I = 0$$

La matrice M^n est donc solution de l'équation de récurrence :

$$M^{n+2} - 6M^{n+1} + 9M^n = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation de récurrence est $(r - 3)^2 = 0$. La solution générale est donc de la forme :

$$M^n = (A + nB)3^n$$

Les matrices A et B sont déterminées par les conditions initiales :

$$M^0 = I = A \quad \text{et} \quad M = 3(A + B)$$

Par conséquent :

$$M^n = \left[I + \frac{n}{3}(M - 3I) \right] 3^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2n+3 & 2n \\ -2n & 3-2n \end{pmatrix}$$

Cela permet d'exprimer la solution du système :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = 3^{n-2} \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n-2 \\ -2n+2 & 5-2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$u_n = (2n+3)3^{n-1} \quad \text{et} \quad v_n = -2n \times 3^{n-1}$$

c) On écrit le système sous forme matricielle :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = MX_n$$

La solution de ce système est :

$$X_n = M^n X_0$$

Pour obtenir M^n , nous allons essayer de diagonaliser la matrice M . Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda + 2 & 1 & 1 \\ -\lambda + 2 & -\lambda & 1 \\ -\lambda + 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 + \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(1 + \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 + \lambda)^2 \end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à $\lambda = 2$ doivent vérifier :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $x = y = z$, donc on peut prendre comme vecteur propre $(1, 1, 1)$.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre double $\lambda = -1$ doivent vérifier $x + y + z = 0$. C'est un sous-espace propre de dimension 2, donc la matrice M est diagonalisable. On peut retenir comme vecteurs propres $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$. Ces trois vecteurs propres forment les colonnes de la matrice de passage à la base de vecteurs propres :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de cette matrice est :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire la solution du système :

$$\begin{aligned} X_n &= M^n X_0 = P D^n P^{-1} X_0 \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit :

$$u_n = (-1)^n, \quad v_n = 0, \quad w_n = (-1)^{n+1}$$

Vous avez compris ?

Résoudre le système d'équations de récurrence suivant :

$$\begin{cases} 2u_n = & -v_{n-1} + 3w_{n-1} \\ 2v_n = -2u_{n-1} + 9v_{n-1} + 11w_{n-1} \\ 2w_n = 2u_{n-1} - 3v_{n-1} - 5w_{n-1} \end{cases}$$

$$u_0 = 4, \quad v_0 = -3, \quad w_0 = 1.$$

Réponse :

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 9 & 11 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} X_{n-1} = M X_{n-1} = M^n X_0 = P D^n P^{-1} X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$u_n = 2 + (-2)^n + 3^n \quad v_n = -1 + (-2)^n - 3^{n+1} \quad w_n = 1 - (-2)^n + 3^n$$

TD 8 Annales corrigées

Licence économie et gestion, Paris II, 1ère année



Janvier 2008

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{2x} + \frac{1}{1-x} - 3x$$

a) Donner un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0 et en déduire $f'(0)$ et $f''(0)$.

b) Montrer que f est convexe sur $] -1, 1[$ et déterminer ses extremums sur cet intervalle.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + xy)$$

a) Déterminer le domaine de définition de f .

b) Rechercher les extremums de f pour $y \in \left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right[$.

c) Rechercher les extremums de f dans le cas où x et y sont liées par la contrainte $x^2 - y = 0$.

Septembre 2007

1. Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + 3e^x + 2e^{2x}}$

on fera le changement de variable $x = \ln t$.

$$\text{b) } J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

on pourra calculer $J + K$ et $J - K$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{(2+x)\ln(1+x)}{x(1+x^2)}$$

Donner un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0 et en déduire un prolongement par continuité de $f(x)$ pour $x = 0$. Montrer que f admet un maximum local en $x = 0$.

3. Rechercher les extremums de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 12xy$$

La fonction f est-elle convexe ?

4. On considère la fonction f définie par $f(x, y) = -x^3 + y^3 + x^2 + 2y$. Montrer qu'il existe une application ϕ de $]a, b[$ dans \mathbb{R} telle que $f[x, \phi(x)] = 0$, avec $\phi(0) = 0$. Déterminer $\phi'(x)$ puis calculer $\phi''(0)$ et montrer que ϕ admet un maximum local à l'origine.

5. Rechercher les extremums de la fonction f définie par $f(x, y) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ dans le cas où x et y sont liées par la contrainte $x + y - 5 = 0$.

Mai 2007

1. Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } f(x) = \frac{x \ln(\cos x)}{1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x)} \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{b) } g(x) = x^2 \left(e^{1/x} - e^{1/(x+1)} \right) \quad x \rightarrow +\infty$$

2. Étudier la convergence de la suite de nombres réels définis par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \quad \text{avec } u_0 > \sqrt{a}$$

où a est un nombre réel strictement positif. Déterminer sa limite.

3. On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-x} \sin x$. Déterminer $f^{(4)}(x)$ et en déduire :

$$I = \int_0^{\pi} f(x) dx$$

Janvier 2007

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{\sqrt{1+x^2} - 1}$$

Donner un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0 et en déduire un prolongement par continuité de $f(x)$ pour $x = 0$. Montrer que f est alors dérivable en $x = 0$ et déterminer $f'(0)$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \frac{y^{2/3}}{\sqrt{x}}$$

a) Déterminer l'élasticité de f par rapport à x et en déduire une approximation de l'accroissement relatif de f au voisinage de $(1, 1)$ quand x croît de 10%.

b) Montrer que f est homogène.

3. Rechercher les extremums de la fonction f définie par $f(x, y) = \ln x + \ln y$ et montrer que f est concave. Même question dans le cas où x et y sont liées par la contrainte $x + y/2 - 1 = 0$.

Septembre 2006

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2} \quad J = \int_2^3 \ln x^2 dx \quad \text{et} \quad K = \int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(x^3 - 3x^2 - 4x)$$

Déterminer le maximum de f sur $] -1, 0[$ et sur $[5, 6]$.

3. Rechercher les extremums de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = 100(x-10)^{1/2} y^{1/4} - 20x - 10y$$

4. Rechercher les extremums de la fonction f définie par $f(x, y) = -x^2 + 4xy - 3y^2 - 6x + 1$ dans le cas où x et y sont liées par la contrainte $x + y = 0$.

5. Déterminer la suite solution de l'équation de récurrence suivante :

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$$

avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

Mai 2006

1. Étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 + x + 3}$$

2. Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \int_1^2 \frac{5x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $J = \int_0^1 (x^2 + x + 1) e^x dx$

c) $K = \int_1^2 \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)^2} dx$

Janvier 2006

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f définie par :

$$f(x) = \exp(x^3 - 3x^2 - 9x + 10)$$

Déterminer le maximum de f sur $[-2, 2]$ et sur $[0, 4]$.

2. Rechercher les extremums de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = 100(x-10)^{1/4} y^{1/2} - 10x - 20y$$

3. Rechercher les extremums de la fonction f définie par $f(x, y) = -x^2 - 3y^2 + 6x + 1$ dans le cas où x et y sont liées par la contrainte $x - y + 5 = 0$.

Septembre 2005

1. Étudier la convergence de l'intégrale suivante puis calculer sa valeur :

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

2. a) Déterminer la limite suivante :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x}{\sin x - x} \quad x \rightarrow 0$$

b) Donner un développement limité à l'ordre 3 de g au voisinage de 0 :

$$g(x) = \sqrt{1 + 2x - x^2}$$

c) On considère la fonction h telle que :

$$h(x) = (x^2 - x) \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)$$

Déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de h et préciser sa position par rapport à ce graphe.

3. a) Étudier la convergence de la suite de nombres réels définis par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 6 - \frac{9}{u_n} \text{ avec } u_0 = 7$$

Déterminer sa limite.

b) Montrer que la suite $a_n = 1/(u_n - 3)$ est une suite arithmétique dont on donnera l'expression en fonction de n . En déduire u_n en fonction de n .

4. On considère la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 e^{2y}$.

a) Déterminer la différentielle df .

b) Donner un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage du point $(-2, 1)$.

c) Déterminer l'élasticité de f par rapport à x puis par rapport à y .

5. Rechercher les extremums de la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy - 36$. Même question dans le cas où x et y sont liées par la contrainte $x - y = 0$.

6. Déterminer la suite solution de l'équation de récurrence suivante :

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = -6 \times 5^n$$

avec $u_0 = 4$ et $u_1 = 7$.

Mai 2005

1. Étudier la convergence de l'intégrale suivante puis calculer sa valeur :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{-5x - 3}{x(x^2 + 1)} dx$$

2. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^e x^3 \ln x dx$$

3. Déterminer la suite solution de l'équation de récurrence suivante :

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = -20n + 48$$

avec $u_0 = 15$ et $u_1 = 20$.

Janvier 2005

1. a) Déterminer la limite suivante :

$$f(x) = \frac{\sin [\ln(1+x)]}{\sqrt{1+x}-1} \quad x \rightarrow 0$$

b) On considère la fonction g telle que :

$$g(x) = \sin [\ln(1+x)] - \cos x$$

Déterminer l'équation de la tangente au graphe de g en $x = 0$ et préciser sa position par rapport à ce graphe.

2. a) Déterminer la différentielle df de la fonction f définie par $f(x, y) = x^2 y + \ln(x^2 - y)$.

b) Donner un développement limité à l'ordre deux de f au voisinage du point $(1, 0)$.

3. Rechercher les extremums de la fonction f définie par $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$. Même question dans le cas où x et y sont liées par la contrainte $2x + y = 0$.

4. On considère la fonction f définie par :

$$f(x, y) = x^2 e^{y/x}$$

Montrer que f est homogène et vérifie le théorème d'Euler.



Janvier 2008

1. a) On écrit les développements limités :

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + x^2 \varepsilon_1(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)$$

On en déduit :

$$f(x) = 2 + 3x^2 + x^2 \varepsilon_3(x)$$

avec $\varepsilon_i(x), 1 \leq i \leq 3$, qui tendent vers 0 avec x . Ainsi $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 6$.

b) On obtient :

$$f'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{(1-x)^2} - 3$$

$$f''(x) = 4e^{2x} + \frac{2}{(1-x)^3}$$

Comme $f''(x) > 0$ sur $] -1, 1[$, on en conclut que f est convexe sur cet intervalle. Comme la dérivée est nulle pour $x = 0$ on en déduit que, sur cet intervalle, f admet un minimum global en ce point.

2. a) La fonction f est définie pour $1 + x^2 + xy > 0$, soit pour $y > -(x + 1/x)$ et $x > 0$ ou $y < -(x + 1/x)$ et $x < 0$. Il faut donc étudier le graphe de $b(x) = -(x + 1/x)$. On a $b'(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$, d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$b'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	\parallel	$+ \quad 0 \quad -$	
$b(x)$	$+\infty \searrow$	$2 \nearrow$	$+\infty \parallel$	$-\infty \nearrow$	$-2 \searrow -\infty$

Ainsi, f est définie pour les points qui sont situés à l'extérieur du graphe, c'est-à-dire en-dessous pour $x < 0$ et au-dessus pour $x > 0$.

b) On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$\begin{cases} f'_x = \frac{2x+y}{1+x^2+xy} = 0 \\ f'_y = \frac{x}{1+x^2+xy} = 0 \end{cases}$$

On obtient un seul point stationnaire (0,0). Les dérivées partielles secondes sont :

$$f''_{x^2} = -\frac{2x^2+2xy+y^2-2}{(1+x^2+xy)^2} \quad f''_{y^2} = -\frac{x^2}{(1+x^2+xy)^2} \quad f''_{xy} = \frac{1-x^2}{(1+x^2+xy)^2}$$

On étudie les conditions du second ordre :

$$\Delta(0,0) = -1 < 0$$

Il y a donc un col au point (0,0).

c) On forme le lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = \ln(1+x^2+xy) + \lambda(x^2 - y)$$

On cherche les points stationnaires comme solutions de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{2x+y}{1+x^2+xy} + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{x}{1+x^2+xy} - \lambda = 0 \end{aligned}$$

On obtient deux points stationnaires (0,0) et $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$. Si on se restreint à $y \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, seule l'origine convient. On calcule alors les dérivées secondes du lagrangien et les dérivées premières de la fonction g qui définit la contrainte :

$$\begin{aligned} L''_{x^2} &= -\frac{2x^2+2xy+y^2-2}{(1+x^2+xy)^2} + 2\lambda & L''_{y^2} &= -\frac{x^2}{(1+x^2+xy)^2} \\ L''_{xy} &= L''_{yx} = \frac{1-x^2}{(1+x^2+xy)^2} & g'_x &= 2x & g'_y &= -1 \end{aligned}$$

Les valeurs au point $(0,0)$ sont $L''_{x^2} = 2$, $L''_{y^2} = 0$ et $L''_{xy} = L''_{yx} = 1$ ce qui permet de calculer le déterminant :

$$\Delta_3(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

donc il y a un minimum à l'origine.

Il aurait été ici plus simple de remplacer $y = x^2$ puis d'étudier la fonction d'une seule variable :

$$F(x) = f(x, x^2) = \ln(1 + x^2 + x^3)$$

L'étude de variation de $G(x) = 1 + x^2 + x^3$ montre que F est définie pour

$x > \alpha$, avec $\alpha \in \left]-\frac{3}{2}, -1\right]$ tel que $G(\alpha) = 0$. On obtient comme dérivée

$$F'(x) = \frac{x(2+3x)}{1+x^2+x^3} \text{ d'où le tableau de variation ci-après :}$$

x	α	$-2/3$	0	$+\infty$
$F'(x)$		+	0	- 0 +
$F(x)$	$-\infty \nearrow$	$\ln(31/27)$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

Ainsi, F admet un maximum local en $-2/3$ (point qui était exclu des conditions précédentes) et un minimum local à l'origine. On peut noter que le problème de maximisation de F est équivalent à celui de la maximisation de G puisque la fonction logarithme est strictement croissante sur son domaine de définition.

Septembre 2007

1. a) Après le changement de variable $x = \ln t$, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)(2t+1)} = \int_1^e \frac{dt}{t} + \int_1^e \frac{dt}{t+1} - 4 \int_1^e \frac{dt}{2t+1} \\ &= \left[\ln \frac{t(t+1)}{(2t+1)^2} \right]_1^e = \ln \frac{9e(e+1)}{2(2e+1)^2} \end{aligned}$$

b) On obtient $J + K = \pi/4$ et :

$$\begin{aligned} J - K &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int_0^{\pi/4} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} \\ &= - \left[\ln(\sin x + \cos x) \right]_0^{\pi/4} = - \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

On en déduit $J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$ et $K = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$.

2. La fonction f n'est pas définie pour $x = 0$. Nous allons déterminer au préalable un développement limité du logarithme :

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon_1(x)$$

Le développement de $f(x)$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2+x) \left[1 - x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \right] \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon_1(x) \right] \\ &= 2 - \frac{11}{6} x^2 + x^2 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x), \varepsilon_i(x), 1 \leq i \leq 2$, qui tendent vers 0 avec x . On en conclut que $f(x)$ tend vers 2 quand x tend vers 0. On peut donc prolonger f par continuité en posant par définition $f(0) = 2$. D'après le développement précédent, on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -11/3$ donc f admet un maximum local en $x = 0$.

3. On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$\begin{cases} f'_x = 8x^3 - 12y = 0 \\ f'_y = -12x + 2y = 0 \end{cases}$$

On obtient 3 points stationnaires $(0,0), (3,18)$ et $(-3,-18)$. Les dérivées partielles secondes sont :

$$f''_{x^2} = 24x^2 \quad f''_{y^2} = 2 \quad f''_{xy} = -12$$

On étudie les conditions du second ordre :

$$\Delta(0,0) = -12^2 < 0$$

$$\Delta(3,18) = \Delta(-3,-18) = 6 \times 48 > 0$$

Il y a donc un col au point $(0,0)$ et un extremum aux points $(3,18)$ et $(-3,-18)$, qui est un minimum puisque les dérivées f''_{x^2} et f''_{y^2} sont positives en ce point. La fonction f n'est-ni convexe ni concave car $\Delta = 48(x^2 - 3)$ n'est pas de signe constant.

4. La fonction f est définie et continue sur tout \mathbb{R}^2 et l'équation $f(0, y) = 0$ admet la solution unique $y = 0$. Par ailleurs, f admet une dérivée partielle :

$$f'_y(x, y) = 3y^2 + 2$$

qui est aussi continue sur tout \mathbb{R}^2 . Comme $f'_y(0, 0) = 2 \neq 0$, on en conclut qu'il existe une application unique φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f[x, \varphi(x)] = 0$ et $\varphi(0) = 0$. La fonction f admet une autre dérivée partielle :

$$f'_x(x, y) = -3x^2 + 2x$$

qui est continue sur \mathbb{R}^2 . La fonction φ est donc dérivable, de dérivée :

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x[x, \varphi(x)]}{f'_y[x, \varphi(x)]} = \frac{3x^2 - 2x}{3\varphi^2(x) + 2}$$

On a donc $\varphi'(0) = 0$ et :

$$\varphi''(x) = \frac{(6x - 2)[3\varphi^2(x) + 2] - (3x^2 - 2x)6\varphi(x)\varphi'(x)}{[3\varphi^2(x) + 2]^2}$$

Ainsi $\varphi''(0) = -1$ et φ admet un maximum local à l'origine.

5. On forme le lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \lambda(x + y - 5)$$

On cherche les points stationnaires comme solutions de :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} + \lambda = 0$$

On obtient un seul point stationnaire (1, 4). On calcule alors les dérivées secondes du lagrangien et les dérivées premières de la fonction g qui définit la contrainte :

$$L''_{x^2} = -\frac{1}{4x^{3/2}} \quad L''_{y^2} = -\frac{1}{2y^{3/2}} \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$g'_x = g'_y = 1$$

Les valeurs au point (1, 4) sont $L''_{x^2} = -\frac{1}{4}$ et $L''_{y^2} = -\frac{1}{16}$, ce qui permet de

calculer le déterminant :

$$\Delta_3(1,4) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{16} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{5}{16} > 0$$

donc il y a un maximum en $(1,4)$.

Il aurait été ici plus simple de remplacer $y = 5 - x$ puis d'étudier la fonction d'une seule variable :

$$F(x) = f(x, 5 - x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{5 - x}$$

Mai 2007

1. a) On écrit les développements limités des différents termes figurant au numérateur et au dénominateur :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_2(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_3(x)$$

$$\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_4(x)$$

avec $\varepsilon_i(x), 1 \leq i \leq 4$, qui tendent vers 0 avec x . On en déduit :

$$x \ln(\cos x) \sim -\frac{x^3}{2} \quad 1 + x\sqrt{1+x} - \exp(\sin x) \sim -\frac{x^3}{8}$$

Ainsi :

$$f(x) \rightarrow 4$$

b) On écrit le développement limité à l'ordre 2 de $e^{1/x}$ et $e^{1/(x+1)}$ au voisinage de l'infini, par rapport aux infiniment petits $1/x$ et $1/(x+1)$:

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\varepsilon_1(1/x)}{x^2}$$

$$e^{1/(x+1)} = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{\varepsilon_2(1/x)}{x^2}$$

On en déduit :

$$g(x) = x^2 \left[\frac{1}{x(x+1)} + \frac{\varepsilon_3(1/x)}{x^2} \right] \rightarrow 1 \quad x \rightarrow +\infty$$

avec $\varepsilon_i(1/x), 1 \leq i \leq 3$, qui tendent vers 0 avec $1/x$.

2. Il est facile de voir par récurrence que la suite est à termes positifs, puisque le premier terme est positif. La fonction f qui définit cette récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est :

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{2x}$$

Sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{x^2 - a}{2x^2}$$

On obtient le tableau de variation ci-après :

x	0	\sqrt{a}	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \sqrt{a} \nearrow$	$+\infty$

Ce tableau montre que tous les termes de la suite sont supérieurs à \sqrt{a} . Par ailleurs :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$$

avec $g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x} - x \right)$ et $g'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{x^2} + 1 \right) < 0$ donc g décroît de $+\infty$ à $-\infty$. Comme $g(\sqrt{a}) = 0$ on en déduit que $g(x) < 0$ pour $x > \sqrt{a}$. Ainsi, puisque $u_n > \sqrt{a}$, on a $g(u_n) = u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite est décroissante et minorée par \sqrt{a} , donc convergente. Sa limite ℓ doit vérifier $\ell = \frac{\ell^2 + a}{2\ell}$, donc $\ell = \sqrt{a}$.

3. On obtient comme dérivées successives :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -f(x) + e^{-x} \cos x & f''(x) &= -2e^{-x} \cos x \\ f^{(3)}(x) &= 2f(x) + 2e^{-x} \cos x & f^{(4)}(x) &= -4f(x) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$I = -\frac{1}{4} \int_0^\pi f^{(4)}(x) dx = \left[-\frac{1}{4} f^{(3)}(x) \right]_0^\pi = \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi})$$

Janvier 2007

1. On écrit les développements limités des différents termes figurant au numérateur et au dénominateur :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_2(x)$$

Le développement de $f(x)$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$f(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)}{\frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_2(x)} = -1 + \frac{2}{3}x + x\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x), \varepsilon_i(x), 1 \leq i \leq 2$, qui tendent vers 0 avec x . On en conclut que $f(x)$ tend vers -1 quand x tend vers 0. On peut donc prolonger f par continuité en posant $f(0) = -1$. D'après le développement précédent, on voit alors que f est dérivable avec $f'(0) = \frac{2}{3}$.

2. a) Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on obtient comme dérivée partielle :

$$f'_x(x, y) = -\frac{y^{2/3}}{2x\sqrt{x}}$$

D'où l'élasticité de f par rapport à x :

$$e_{f/x} = x \frac{f'_x}{f} = -\frac{1}{2}$$

On en déduit qu'au voisinage de (1,1) quand x croît de 10%, f diminue approximativement de 5%.

b) Pour tout $\lambda > 0$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{1/6} f(x, y)$$

donc f est homogène de degré $\frac{1}{6}$.

3. On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$f'_x = 1/x = 0$$

$$f'_y = 1/y = 0$$

On n'obtient aucun point critique. Les dérivées partielles secondes sont :

$$f''_{x^2} = -1/x^2 \quad f''_{y^2} = -1/y^2 \quad f''_{xy} = 0$$

La fonction f est concave car $\Delta = 1/x^2 y^2$ est toujours positif.

On forme le lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = \ln x + \ln y + \lambda (x + y/2 - 1)$$

On cherche les points stationnaires comme solutions de :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{x} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{\lambda}{2} = 0$$

On obtient un seul point stationnaire $(1/2, 1)$. On calcule alors les dérivées secondes du lagrangien et les dérivées premières de la fonction g qui définit la contrainte :

$$L''_{x^2} = -\frac{1}{x^2} \quad L''_{y^2} = -\frac{1}{y^2} \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0$$

$$g'_x = 1 \quad g'_y = 1/2$$

Les valeurs au point $(1/2, 1)$ sont $L''_{x^2} = -4$ et $L''_{y^2} = -1$, ce qui permet de calculer le déterminant :

$$\Delta_3(1, 4) = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

donc il y a un maximum en $(1/2, 1)$.

Il aurait été ici plus simple de remplacer $y = 2 - 2x$ puis d'étudier la fonction d'une seule variable :

$$F(x) = f(x, 2 - 2x) = \ln x + \ln(1 - x) + \ln 2$$

Septembre 2006

1. On obtient :

$$I = \int_0^1 \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \left[-\frac{1}{1+e^x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}$$

On intègre par parties :

$$J = 2 \int_2^3 \ln x dx = 2 \left[x \ln x - x \right]_2^3 = 2 \left(\ln \frac{27}{4} - 1 \right)$$

On fait le changement $u = 1 + \sqrt{x}$:

$$K = 2 \int_2^3 \ln u du = J$$

2. On écrit $f(x) = \ln [x(x+1)(x-4)]$, donc f est définie sur $D =]-1, 0[\cup]4, +\infty[$. Elle admet comme dérivées :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-4} = \frac{3x^2 - 6x - 4}{x(x+1)(x-4)}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-4)^2} < 0$$

Le numérateur de la dérivée s'annule pour les valeurs $\alpha = 1 - \sqrt{7/3} \in]-1, 0[$ et $\beta = 1 + \sqrt{7/3} \notin D$. On obtient le tableau de variation ci-après :

x	-1	α		0	4	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-			+	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	M	\searrow	$-\infty$	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$

Ainsi, f admet un maximum $M = f(\alpha)$ sur $]-1, 0[$ et $f(6) = \ln 84$ sur $[5, 6]$ puisque f est croissante sur cet intervalle.

3. On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$\begin{cases} f'_x = 50(x-10)^{-1/2} y^{1/4} - 20 = 0 \\ f'_y = 25(x-10)^{1/2} y^{-3/4} - 10 = 0 \end{cases}$$

On obtient un point stationnaire pour $x_0 = 10 + (5/2)^4$ et $y_0 = (5/2)^4$. Les

dérivées partielles secondes sont:

$$f''_{x^2} = -25(x-10)^{-3/2} y^{1/4} \quad f''_{y^2} = -\frac{75}{4}(x-10)^{1/2} y^{-7/4}$$

$$f''_{xy} = \frac{25}{2}(x-10)^{-1/2} y^{-3/4}$$

On étudie les conditions du second ordre :

$$\Delta(x_0, y_0) = \frac{2^5}{5^6} (3 \times 5^3 - 2^3) > 0$$

Il y a donc un extremum en ce point qui est un maximum puisque les dérivées f''_{x^2} et f''_{y^2} sont négatives.

4. On forme le lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = -x^2 + 4xy - 3y^2 - 6x + 1 + \lambda(x + y)$$

On cherche les points stationnaires comme solutions de :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x + 4y - 6 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4x - 6y + \lambda = 0$$

On obtient un seul point stationnaire $\left(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$. On calcule alors les dérivées secondes du lagrangien et les dérivées premières de la fonction g qui définit la contrainte :

$$L''_{x^2} = -2 \quad L''_{y^2} = -6 \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 4$$

$$g'_x = g'_y = 1$$

D'où le déterminant :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

donc il y a un maximum en $\left(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

Il aurait été ici plus simple de remplacer $y = -x$ puis d'étudier la fonction d'une seule variable :

$$F(x) = f(x, -x) = -8x^2 - 6x + 1$$

5. La solution générale de cette équation homogène est :

$$u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Celle qui vérifie les conditions initiales est $u_n = 2^n$.

Mai 2006

1. La fonction à intégrer est équivalente à l'infini à $1/x^3$ de primitive $-1/2x^2$ donc I est convergente.

2. a) On fait le changement $u = 1 + x^2$:

$$I = \frac{5}{2} \int_2^5 \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[5\sqrt{u} \right]_2^5 = 5(\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

b) On intègre par parties :

$$\begin{aligned} J &= \left[(x^2 + x + 1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (2x + 1)e^x dx \\ &= 3e - 1 - \left[(2x + 1)e^x \right]_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx = 2(e - 1) \end{aligned}$$

c) On écrit :

$$\begin{aligned} K &= \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} + 2 \int_1^2 \frac{dx}{x+1} - \int_1^2 \frac{dx}{x} \\ &= \left[\ln \frac{(x+1)^2}{x} - \frac{1}{x+1} \right]_1^2 = \frac{1}{6} + \ln \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Janvier 2006

1. On obtient comme dérivées :

$$f'(x) = 3(x+1)(x-3)f(x)$$

$$f''(x) = 3 \left[2x - 2 + 3(x^2 - 2x - 3)^2 \right] f(x)$$

On obtient le tableau de variation ci-après :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$		
$f'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	\nearrow		e^{15}	\searrow		e^{-17}	\nearrow	$+\infty$

Le tableau montre que f est croissante sur l'intervalle $[-2, -1]$ et décroissante sur l'intervalle $[-1, 2]$, donc elle admet un maximum sur $[-2, -2]$ en $x = -1$. Comme f est décroissante sur l'intervalle $[0, 3]$ et croissante sur l'intervalle $[3, 4]$, il faut comparer les valeurs $f(0) = e^{10}$ et $f(4) = e^{-10}$. Le maximum sur $[0, 4]$ est donc obtenu pour $x = 0$.

2. On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$\begin{cases} f'_x = 25(x-10)^{-3/4} y^{1/2} - 10 = 0 \\ f'_y = 50(x-10)^{1/4} y^{-1/2} - 20 = 0 \end{cases}$$

On obtient un point stationnaire pour $x_0 = 10 + (5/2)^4$ et $y_0 = (5/2)^4$. Les dérivées partielles secondes sont :

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= -\frac{75}{4}(x-10)^{-7/4} y^{1/2} & f''_{y^2} &= -25(x-10)^{1/4} y^{-3/2} \\ f''_{xy} &= \frac{25}{2}(x-10)^{-3/4} y^{-1/2} \end{aligned}$$

On étudie les conditions du second ordre :

$$\Delta(x_0, y_0) = \frac{2^9}{5^6} > 0$$

Il y a donc un extremum en ce point qui est un maximum puisque les dérivées f''_{x^2} et f''_{y^2} sont négatives.

3. On forme le lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = -x^2 - 3y^2 + 6x + 1 + \lambda(x - y + 5)$$

On cherche les points stationnaires comme solutions de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -2x + 6 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -6y - \lambda = 0 \end{aligned}$$

On obtient un seul point stationnaire $(-3, 2)$. On calcule alors les dérivées secondes du lagrangien et les dérivées premières de la fonction g qui définit la contrainte :

$$\begin{aligned} L''_{x^2} &= -2 & L''_{y^2} &= -6 & L''_{xy} &= L''_{yx} = 0 \\ g'_x &= g'_y &= 1 \end{aligned}$$

D'où le déterminant :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

donc il y a un maximum en $(-3, 2)$.

Il aurait été ici plus simple de remplacer $y = x + 5$ puis d'étudier la fonction d'une seule variable :

$$F(x) = f(x, x+5) = -4x^2 - 24x - 74$$

Septembre 2005

1. La fonction à intégrer est équivalente à l'infini à $1/x\sqrt{x}$ de primitive $-2/\sqrt{x}$ donc I est convergente. On fait le changement $u = \sqrt{x-1}$:

$$I = 2 \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = 2 [\arctan u]_1^{+\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

2. a) On écrit les développements limités des différents termes figurant au numérateur et au dénominateur :

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x = \frac{2x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_2(x)$$

avec $\varepsilon_i(x), 1 \leq i \leq 2$, qui tendent vers 0 avec x . On en conclut que $f(x)$ tend vers -4 quand x tend vers 0.

b) On écrit d'abord le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + u^3 \varepsilon_1(u)$$

On en déduit avec $u = 2x - x^2$:

$$g(x) = 1 + x - x^2 + x^3 + x^3 \varepsilon_2(x)$$

avec $\varepsilon_i(x), 1 \leq i \leq 2$, qui tendent vers 0 avec x .

c) Pour déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de h , nous allons écrire le développement limité à l'ordre 3 de $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$, au voisinage de l'infini, par rapport à l'infiniment petit $1/x$:

$$\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} + \frac{\varepsilon_1(1/x)}{x^3}$$

On en déduit le développement de $b(x)$:

$$b(x) = (x^2 - x) \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} + \frac{\varepsilon_1(1/x)}{x^3} \right) = 2x - 4 + \frac{14}{3x} + \frac{\varepsilon(1/x)}{x}$$

où $\varepsilon_1(1/x)$ et $\varepsilon(1/x)$ tendent vers 0 quand x tend vers l'infini. La droite $y = 2x - 4$ est donc asymptote au graphe de b et comme $b(x) - (2x - 4) \sim$

$\frac{14}{3x}$, la courbe est au-dessus de l'asymptote pour $x \rightarrow +\infty$.

3. a) On a $u_{n+1} - 3 = \frac{3}{u_n}(u_n - 3)$, donc on établit par récurrence que $u_n > 3$. Par ailleurs :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 3)^2}{u_n} < 0$$

donc cette suite est décroissante. Comme elle est minorée par 3, elle converge, avec pour limite ℓ telle que $\ell = 6 - 9/\ell$, soit $\ell = 3$.

b) On vérifie que $a_{n+1} - a_n = 1/3$ donc c'est une suite arithmétique avec

$$a_n = 1/4 + n/3. \text{ On en déduit } u_n = \frac{12n + 21}{4n + 3}.$$

4. a) On obtient comme différentielle :

$$df = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = x^2 e^{2y} (3dx + 2xdy)$$

b) Pour déterminer le développement limité à l'ordre deux, on a besoin aussi des dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 6xe^{2y} \quad f''_{y^2} = 4f \quad f''_{xy} = 6x^2 e^{2y}$$

Le développement limité à l'ordre deux, au voisinage de $(-2, 1)$ s'écrit donc :

$$f(-2 + h, 1 + k) = e^2 \left(-8 + 12h - 16k - 6h^2 + 24hk - 16k^2 \right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

avec $\varepsilon(h, k)$ qui tend vers 0 quand h et k tendent vers 0.

c) Les élasticités de f par rapport à x puis par rapport à y sont :

$$e_{f/x} = x \frac{f'_x}{f} = 3 \quad e_{f/y} = y \frac{f'_y}{f} = 2y$$

5. On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 9y = 0 \\ f'_y = 9x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

On obtient 2 points stationnaires (0,0) et (3,-3). Les dérivées partielles secondes sont :

$$f''_{x^2} = 6x \quad f''_{y^2} = 6y \quad f''_{xy} = 9$$

On étudie les conditions du second ordre :

$$\Delta(0,0) = -9^2 < 0$$

$$\Delta(-3,-3) = 3 \times 9^2 > 0$$

Il y a donc un col au point (0,0) et un extremum au point (-3,-3), qui est un maximum puisque les dérivées f''_{x^2} et f''_{y^2} sont négatives en ce point.

Il est plus simple de remplacer y par x et d'étudier la fonction d'une seule variable :

$$F(x) = f(x, x) = 2x^3 + 9x^2 - 36$$

On obtient comme dérivée $F'(x) = 6x(x+3)$ d'où le tableau de variation ci-après :

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$			
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$-\infty$	\nearrow	-9	\searrow	-36	\nearrow	$+\infty$

Ainsi, F admet un maximum local en -3 et un minimum local en 0 .

6. L'équation homogène associée admet pour solutions :

$$v_n = \lambda 2^n + \mu 3^n \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = a5^n$ et on obtient $u_n^* = -5^n$. La solution qui vérifie les conditions initiales est :

$$u_n = 3 \times 2^n + 2 \times 3^n - 5^n$$

Mai 2005

1. La fonction à intégrer est équivalente à l'infini à $-5/x^2$ de primitive $5/x$

donc I est convergente, de valeur :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{-3}{x} + \frac{3x-5}{x^2+1} \right) dx = \int_1^{+\infty} \left[\frac{-3}{x} dx + \frac{3}{2} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - 5 \frac{dx}{x^2+1} \right] \\ &= \left[3 \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - 5 \arctan x \right]_1^{+\infty} = -\frac{3}{2} \ln 2 - 5 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{3}{2} \ln 2 - 5 \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

2. On intègre par parties :

$$I = \left[\frac{x^4}{4} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{3e^4 + 1}{16}$$

3. L'équation homogène associée admet pour solutions :

$$v_n = (\lambda + \mu n) 3^n \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière de la forme $u_n^* = an + b$ et on obtient $u_n^* = -5n + 7$. La solution qui vérifie les conditions initiales est :

$$u_n = -2(n-4)3^n - 5n + 7$$

Janvier 2005

1. a) On écrit les développements limités des différents termes figurant au numérateur et au dénominateur :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + u^4 \varepsilon_2(u)$$

$$\sin[\ln(1+x)] = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_3(x)$$

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2} + x \varepsilon_4(x)$$

avec $\varepsilon_i(x), 1 \leq i \leq 4$, qui tendent vers 0 avec x . On en conclut que $f(x)$ tend vers 2 quand x tend vers 0.

b) On écrit le développement limité :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_5(x)$$

D'où :

$$g(x) = -1 + x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_6(x)$$

avec $\varepsilon_i(x), 5 \leq i \leq 6$, qui tendent vers 0 avec x . Le développement précédent permet d'obtenir :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon_6(x)$$

La fonction g est donc dérivable en $x = 0$, avec $g'(0) = 1$. On en déduit aussi l'équation de la tangente en ce point qui est $Y = -1 + x$ avec :

$$g(x) - Y = \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_6(x)$$

donc la tangente traverse le graphe qui est au-dessous pour $x < 0$ et au-dessus pour $x > 0$. Il y a donc un point d'inflexion.

2. a) On obtient comme différentielle :

$$df = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy = 2x \left(y + \frac{1}{x^2 - y} \right) dx + \left(x^2 - \frac{1}{x^2 - y} \right) dy$$

b) Pour déterminer le développement limité à l'ordre deux, on a besoin aussi des dérivées partielles secondes :

$$f''_{x^2} = 2y - 2 \frac{x^2 + y}{(x^2 - y)^2} \quad f''_{y^2} = -\frac{1}{(x^2 - y)^2} \quad f''_{xy} = 2x + \frac{2x}{(x^2 - y)^2}$$

Le développement limité à l'ordre deux, au voisinage de $(1, 0)$ s'écrit donc :

$$f(1 + h, k) = 2h - h^2 + 4hk - \frac{1}{2}k^2 + (h^2 + k^2) \varepsilon(h, k)$$

avec $\varepsilon(h, k)$ qui tend vers 0 quand h et k tendent vers 0.

3. On écrit les conditions nécessaires du premier ordre :

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x + 2y = 0 \\ f'_y = 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

On obtient 3 points stationnaires $(0,0)$, $(1,-1)$ et $(-1,1)$. Les dérivées partielles secondes sont :

$$f''_{x^2} = 12x^2 - 2 \quad f''_{y^2} = 2 \quad f''_{xy} = 2$$

On étudie les conditions du second ordre :

$$\Delta(0,0) = -8 < 0$$

$$\Delta(1,-1) = \Delta(-1,1) = 16 > 0$$

Il y a donc un col au point $(0,0)$ et un extremum aux points $(1,-1)$ et $(-1,1)$, qui est un minimum puisque les dérivées f''_{x^2} et f''_{y^2} sont positives en ces points.

Il est plus simple de remplacer y par $-2x$ et d'étudier la fonction d'une seule variable :

$$F(x) = f(x, -2x) = x^4 - x^2$$

On obtient comme dérivée $F'(x) = 2x(2x^2 - 1)$ d'où le tableau de variation ci-après :

x	$-\infty$ $-1/\sqrt{2}$ 0 $1/\sqrt{2}$ $+\infty$								
$F'(x)$	<div><div>$-$</div><div>0</div><div>$+$</div><div>0</div><div>$-$</div><div>0</div><div>$+$</div></div>								
$F(x)$	$+\infty$	\searrow	$-1/4$	\nearrow	0	\searrow	$-1/4$	\nearrow	$+\infty$

Ainsi, F admet un maximum local à l'origine et des minima globaux en $-1/\sqrt{2}$ et $1/\sqrt{2}$.

4. Pour tout $\lambda > 0$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$$

donc f est homogène de degré 2.

On obtient comme dérivées partielles :

$$f'_x = 2xe^{y/x} - ye^{y/x} \quad f'_y = xe^{y/x}$$

On vérifie le théorème d'Euler :

$$xf'_x + yf'_y = 2x^2e^{y/x} = 2f(x, y)$$

Index

A

accroissements finis (théorème des) 55, 60-62, 68, 70-72, 98, 101, 106, 114
accroissements finis généralisés 102, 115
actualisée (valeur) 105, 131-132
application réciproque 3, 5-6, 9
asymptote 64-66, 83-85, 89, 91-93, 104, 124-126, 128-130, 269, 284-285

B

branche parabolique 84, 89, 130

C

cobweb (méthode de) 223
col 137-139, 148, 160-163, 165, 167-168, 272, 274, 286, 289
concave (fonction) 57-58, 88-89, 92, 136, 267, 274, 279
convexe (fonction) 57-59, 65, 87-89, 92, 107, 125, 129-130, 136, 265-266, 271, 274
coordonnées polaires 156, 164

D

demi-tangente 126, 128-129
dérivée
à droite 27, 29, 31-32, 35, 41-42, 70
à gauche 27, 29, 31-32, 35, 41-42, 70, 89
logarithmique 26, 28, 31, 34, 36, 40, 44, 49-51, 87-88, 105, 127-128, 131
partielle 133-139, 141, 143-144, 146, 148, 151, 153, 155-164, 274-275, 278-279, 281, 283, 285-286, 288-289
développement limité 54, 56-57, 59, 63-65, 67, 69, 77-78, 85, 91, 102-103, 116-117, 119-120, 126, 129, 265-267, 269-271, 274, 276, 278, 284-285, 287-288
différentielle 26, 32, 45, 269-270, 285, 288
discontinuité 1, 10, 24, 188

E

élasticité 26, 28-29, 34-35, 51-53, 267, 269, 278, 285
encadrement 101, 115, 211, 219-220, 230-232
équation
caractéristique 209, 212, 214-215, 225, 250-252, 254-258, 260, 262
homogène 209, 212, 214, 224-225, 227, 243-247, 250-254, 256-258, 260, 282, 286-287
typique 226, 262
équivalente (fonction) 4-6, 9-10, 14, 16, 19, 54, 68, 80, 84, 89, 98, 106, 112, 169, 176, 179-181, 188, 205, 207, 282, 284, 286
extremum 54, 57, 59-60, 65, 67, 69, 85, 87, 133-134, 137-141, 145-148, 159-166, 168-175, 265-270, 274, 281, 283, 286, 289

F

fonction
composée 2-3, 27, 31-34, 48, 51-52, 58, 135, 143
concave 57-58, 89, 92, 267, 274, 279
continue 1, 3, 5-6, 25-26, 29, 36, 70-71, 133-134, 136, 153, 176, 178-180
convexe 57, 59, 65, 87-89, 92, 107, 129-130, 136, 265-266, 271, 274
croissante 1, 19-20, 69, 165, 169, 231, 237-238, 282
décroissante 1, 5, 12, 19, 69-70, 72, 164, 237-238, 241, 282
équivalente 4-5, 9-10, 54, 68, 169, 176, 179-181, 188, 205, 207, 282, 284, 286
homogène 136-137, 144, 156-157, 267, 270, 278, 289
impaire 2, 5, 8, 12, 17, 29, 67, 178, 181, 192
implicite 136

monotone 1-2, 5, 12, 19, 107
 paire 1-2, 5, 17-18, 29, 77, 83, 177, 192
 périodique 2, 5, 8, 12
 forme quadratique 167-168
 formule
 de la moyenne 183-184, 191
 de Leibniz 28, 33-34, 48-49
 de Maclaurin 56, 59, 62, 67, 75, 102
 de Taylor 54-56, 62, 67, 101, 133, 135-136, 138, 144, 159
 fraction rationnelle 4, 10, 20, 33, 45, 164, 176, 179, 185, 200-202, 206

I

imaginaire 250, 254-256
 infiniment petit 13, 56, 64-65, 78-79, 81-85, 103, 106, 117-119, 127, 149, 234, 276, 284
 intégrale généralisée 179-180, 187

M

matrice hessienne 138
 maximum 5, 13, 55, 57, 69, 85, 87, 92, 98, 105-106, 124, 130-132, 134, 137-138, 140, 160-166, 168-173, 175, 266-268, 273-276, 279, 280-283, 286, 289
 méthode de cobweb 223
 minimum 5, 13, 55, 57, 59, 67, 69, 85, 87, 89, 91, 107, 109, 130, 134, 137-138, 140-141, 148, 159-175, 233, 271, 273-274, 286, 289
 multiplicateur de Lagrange 139-140, 147, 171, 173, 272, 275, 279, 281, 283

P

point
 d'accumulation 209-211, 227-228, 230
 de discontinuité 1, 10
 d'inflexion 58, 65, 59-60, 66-67, 69, 88-89, 92, 104, 125, 129-130, 288
 de rebroussement 70, 86, 92
 stationnaire 133, 137-141, 145, 147-148, 159-166, 168, 171, 173-175, 179, 272, 274-275, 279-281, 283, 286, 289
 progression
 arithmétique 95, 98-100, 106, 109-110
 géométrique 95-96, 98-100, 106, 110-111

prolongement par continuité 13, 16, 125, 130, 169, 266-267, 274, 278

R

récurrence homographique 222, 237
 règle de L'Hospital 102, 115
 résonance 214-215, 224, 245-246, 248-249, 253-254, 257

S

somme de Riemann 177, 182-183, 190
 suite
 bornée 210, 217, 220, 227-228, 241-242
 croissante 210-211, 220, 233-239, 241, 243
 décroissante 211, 232-235, 237-241, 243, 277, 285
 extraite 211, 216, 222-223, 228, 239, 242
 géométrique 218-219, 221, 229-231, 235, 242-243
 majorante 210, 229-231
 minorante 210, 219, 229-231
 récurrente 209, 212, 223, 240
 stationnaire 228-229, 238
 suites adjacentes 211, 220-221, 234-235
 système d'équations 101, 215, 217, 226, 264

T

tangente 55, 57-58, 71, 88, 91-92, 270, 288
 taux
 d'accroissement 26, 30, 35, 37, 42
 d'intérêt 104-105

théorème

 de l'encadrement 115, 211, 219-220
 d'Euler 137, 144, 156-157, 270, 289
 de Rolle 54, 60-61, 67, 70, 102, 115
 de Schwarz 135
 des accroissements finis 55, 60-62, 68, 70-72, 98, 101, 106, 114
 des croissances comparées 13, 42, 95, 97, 114, 120-121, 123, 125, 130, 205-206, 229
 des suites monotones 209, 220-223

V

valeur approchée 124
 valeur propre 261, 263
 vecteur propre 261, 263



Jean-Pierre Lecoutre
Philippe Pilibossian

ANALYSE

PUBLIC

- Licence Économie-Gestion, AES, MASS
- MIAE

Les ouvrages de la collection **TD** proposent des **résumés de cours**, de **nombreux QCM**, des questions de réflexion, ainsi que des **exercices d'entraînement** et des **sujets d'annales corrigés**.

Cette **4^e édition**, complétée par un chapitre entièrement consacré aux **derniers sujets d'annales**, couvre en **210 questions et exercices**, les bases de l'analyse :

- fonction numérique d'une variable réelle ;
- dérivées et différentielles ;
- formule de Taylor et applications ;
- fonctions puissance, logarithme et exponentielle ;
- calcul intégral ;
- suites numériques.

JEAN-PIERRE LECOUTRE
Maître de conférences
à l'université
Panthéon-Assas (Paris II).

PHILIPPE PILIBOSSIAN
Maître de conférences
à l'université
Pierre-et-Marie-Curie
(Paris VI).

30%
Cours

70%
Applications

- QCM
- questions de réflexion
- exercices d'entraînement
- annales
- + corrigés