

B. CALVO, J. DOYEN
A. CALVO, F. BOSCHET

exercices d'analyse

1^{er} cycle scientifique
préparation aux grandes écoles

2^e Année

Armand Colin _ collection **U**

Série « Mathématiques » dirigée par André REVUZ

Bernard CALVO, Jacques DOYEN

Maîtres-Assistants à l'Université Paris VII

Adina CALVO, Françoise BOSCHET

Assistants à l'Université Paris VII

EXERCICES D'ANALYSE

1^{er} Cycle, 2^e Année et Spéciales MM'

LIBRAIRIE ARMAND COLIN

103, boulevard Saint-Michel, Paris 5^e

AVANT-PROPOS

Le présent volume fait partie d'une série de recueils d'exercices à l'usage des étudiants en Mathématiques et Physique du premier cycle et aussi des élèves des classes préparatoires aux Grandes Ecoles. Il s'adresse plus particulièrement aux étudiants de deuxième année et traite des questions d'Analyse. Les exercices ont été regroupés en chapitres dont le sujet est indiqué en tête et ils sont, dans la mesure du possible, classés par ordre de difficulté croissante. On trouvera ci-après une table qui fournit une classification des exercices autour des thèmes principaux de chaque chapitre. Le dernier chapitre se compose de problèmes d'examen dont certains ont été proposés aux concours d'entrée aux grandes écoles, Ecole Polytechnique et Ecole Normale Supérieure en particulier.

Nous nous référons fréquemment au Cours d'Analyse de MM. RAYMOND COUTY et JACQUES EZRA (tomes 1 et 2) parus dans la même série : par exemple *cf.* C. E., tome 1, Ch. 10, § III, n° 152 renvoie au numéro 152 du paragraphe III du chapitre 9 du tome 1 et *cf.* C. E., Ch. 8, § I, n° 136 renvoie au numéro 136 du paragraphe I du chapitre 8 du tome 2. Nous avons extrait de cet ouvrage de nombreux exercices ; certains autres proviennent de devoirs donnés ces dernières années en MP à la Faculté des Sciences de Paris ; nous tenons donc à remercier ici MM. RAYMOND COUTY et JACQUES EZRA, et tous nos collègues, pour l'aide qu'ils nous ont ainsi apportée.

Nos remerciements vont aussi à MM. ANDRÉ REVUZ et MICHEL QUEYSANNE qui nous ont proposé la rédaction de ce livre et à la librairie ARMAND COLIN pour le soin qu'elle a apporté à la présentation matérielle de l'ouvrage.

A. CALVO, B. CALVO, F. BOSCHET, J. DOYEN

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1. Propriétés topologiques des espaces métriques	9
Adhérence, intérieur, frontière d'une partie : exercices 1.1 à 1.4 et 1.9.	
Espaces complets : exercices 1.6 ; 1.8 et 1.15.	
Fonctions continues : exercices 1.5 ; 1.8 et 1.10.	
Espaces compacts : exercices 1.11 à 1.15.	
Espaces connexes : exercices 1.16 à 1.18.	
Chapitre 2. Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p.....	35
Continuité : exercices 2.1 à 2.6.	
Différentiabilité : exercices 2.7 à 2.15 et 2.20.	
Dérivées partielles : exercices 2.16 à 2.19 ; 2.21 et 2.26.	
Etude des extremums : exercices 2.23 à 2.25.	
Théorème des fonctions implicites : exercices 2.27 et 2.28.	
Chapitre 3. Calcul différentiel extérieur.....	82
Algèbre extérieure : exercices 3.1 à 3.3.	
Différentielles extérieures : exercices 3.4 à 3.10.	
Image transposée d'une forme différentielle : exercices 3.11 à 3.13.	
Champs de vecteurs : exercices 3.14 et 3.15.	
Chapitre 4. Intégration	106
Intégrales impropres : exercices 4.1 à 4.10.	
Intégrales doubles : exercices 4.11 à 4.16.	
Intégrales triples : exercices 4.17 à 4.19.	
Intégrales curvilignes : exercices 4.21 et 4.24.	
Formule de Green-Riemann : exercices 4.25 et 4.26.	
Calculs de surfaces et de volumes : exercices 4.20 ; 4.27 et 4.28.	
Chapitre 5. Fonctions de variable complexe	153
Fonctions holomorphes : exercices 5.1 à 5.6.	
Intégration de fonctions de variable complexe : exercices 5.7 à 5.9 et 5.20.	
Intégration par la méthode des résidus : exercices 5.11 à 5.20.	

Chapitre 6. Séries 189

Séries numériques : exercices 6.1 à 6.21.
Séries de fonctions : exercices 6.22 à 6.28.
Séries entières : exercices 6.29 à 6.39.
Séries de Fourier : exercices 6.40 à 6.43.

Chapitre 7. Systèmes différentiels et équations différentielles 237

Systèmes différentiels du premier ordre : exercices 7.1 à 7.5.
Systèmes différentiels du second ordre : exercices 7.6 et 7.7.
Equations différentielles linéaires à coefficients non constants : exercices 7.8 à 7.12.

Chapitre 8. Problèmes de synthèse 267

PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES ESPACES MÉTRIQUES

1.1 Soit E un espace métrique muni de la distance d . Pour toute partie X de E , on note \bar{X} l'adhérence de X .

1° Soit A une partie de E . Montrer que \bar{A} est égale à l'intersection de toutes les parties fermées de E contenant A .

2° Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Montrer que $\bar{A} \subset \bar{B}$.

3° Soient A et B deux parties de E . Montrer que

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

4° Soit A une partie de E . Montrer que l'élément x de E appartient à \bar{A} si et seulement si $\inf_{a \in A} d(x, a) = 0$.

Solution 1° Soient x un élément de \bar{A} et F une partie fermée de E qui contient A . Pour tout voisinage V de x on a $V \cap A \neq \emptyset$ et par suite $V \cap F \neq \emptyset$, ce qui prouve que x est un élément de \bar{F} . Mais F étant fermé, $F = \bar{F}$ et $x \in F$, par suite x appartient à l'intersection de tous les fermés de E contenant A . Cette intersection contient donc \bar{A} .

Réciproquement, soit x un élément qui n'appartient pas à \bar{A} . Alors il existe un ouvert U de E tel que $x \in U$ et $U \cap A = \emptyset$. Mais $E - U$ est une partie

fermée de E telle que $A \subset E - U$ et $x \notin E - U$. Il existe donc une partie fermée de E qui contient A et ne contient pas x , ce qui prouve que x n'appartient pas à l'intersection de tous les fermés qui contiennent A .

Nous avons donc montré que \bar{A} est égale à l'intersection de tous les fermés qui contiennent A , ou en d'autres termes que \bar{A} est, pour l'inclusion, le plus petit fermé qui contient A .

2° Comme $B \subset \bar{B}$, on a $A \subset \bar{B}$. Donc \bar{B} est un fermé qui contient A et \bar{A} est le plus petit fermé vérifiant cette propriété. Par suite $\bar{A} \subset \bar{B}$.

3° Comme $A \subset \bar{A}$ et $B \subset \bar{B}$, on a $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. La partie $\bar{A} \cup \bar{B}$ est fermée comme réunion de deux fermés, et contient $A \cup B$; par suite

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Réciproquement, comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, le résultat de la question 2° montre que $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, d'où $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

4° Supposons d'abord que x soit un élément de \bar{A} . Soient ε un nombre réel strictement positif et $B(x, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ε . Comme $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, il existe un élément a de A tel que $d(x, a) < \varepsilon$. Comme ceci est vrai pour tout nombre réel strictement positif ε , on a

$$\inf_{a \in A} d(x, a) = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\inf_{a \in A} d(x, a) = 0$. Soit V un voisinage de x ; par définition V contient une boule ouverte de centre x . Si r est le rayon de cette boule, il existe un élément a de A tel que $d(x, a) < r$. Alors a appartient à V et $V \cap A \neq \emptyset$. Comme ceci est vrai pour tout voisinage V de x , on a $x \in \bar{A}$.

1.2

Soit E un espace métrique muni de la distance d . Si X est une partie de E , on dit que l'élément x de E est *intérieur* à X si et seulement si X est un voisinage de x . L'ensemble des points intérieurs à X est appelé *l'intérieur de X* et est noté $\overset{\circ}{X}$.

1° Soit A une partie de E . Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est la plus grande partie ouverte de E qui soit contenue dans A .

2° Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3° Soient A et B deux parties de E . Montrer que

$$\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

4° Soit A une partie de E . Montrer que

$$\overset{\circ}{E - A} = E - \bar{A}$$

où \bar{A} désigne l'adhérence de A .

Solution 1° Soit x un élément de $\overset{\circ}{A}$. Comme A est un voisinage de x , il existe un ouvert U de E tel que $x \in U$ et $U \subset A$. Mais il est clair que A est un voisinage de chacun des points de U , donc $U \subset \overset{\circ}{A}$. Il en résulte que $\overset{\circ}{A}$ est une partie ouverte.

Si B est une partie ouverte telle que $B \subset A$, alors A est un voisinage de chacun des points de B ; par suite $B \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A .

2° Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$ on a $\overset{\circ}{A} \subset B$. Mais $\overset{\circ}{B}$ est le plus grand ouvert contenu dans B , et $\overset{\circ}{A}$ est une partie ouverte; par suite $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3° Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $\overset{\circ}{B} \subset B$, on a $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$. Mais $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est une partie ouverte comme intersection de deux ouverts, donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$.

Réciproquement, on a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$; d'après la question 2°, on obtient $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B}$, d'où $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

4° Soit x un élément de $\overline{E - A}$. Alors $E - A$ est un voisinage de x et $(E - A) \cap A = \emptyset$; donc x n'est pas un point adhérent à A et $x \in E - \overline{A}$, d'où $\overline{E - A} \subset E - \overline{A}$.

Réciproquement si $x \in E - \overline{A}$, il existe un ouvert U tel que

$$x \in U \quad \text{et} \quad U \cap A = \emptyset,$$

ce qui équivaut à $x \in U$ et $U \subset E - A$. Mais alors $E - A$ est un voisinage de x et $x \in \overline{E - A}$, d'où $E - \overline{A} \subset \overline{E - A}$.

1.3

Pour tout sous-ensemble A d'un espace métrique E , on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A , \overline{A} l'adhérence de A et on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{A}$ et $\beta(A) = \overline{A}$.

1° Montrer que si une partie A est ouverte, on a $A \subset \alpha(A)$ et si A est fermée, alors $A \supset \beta(A)$.

2° Montrer que pour toute partie A on a les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A} &\subset A \subset \overline{A} \\ \alpha(\overset{\circ}{A}) &\subset \alpha(A) \quad \beta(A) \subset \beta(\overline{A}) \\ \overset{\circ}{A} &\subset \alpha(\overset{\circ}{A}) \subset \beta(A) \subset \overline{A} \\ \overset{\circ}{A} &\subset \alpha(A) \subset \beta(\overline{A}) \subset \overline{A}. \end{aligned}$$

3° Trouver une partie A de l'espace \mathbb{R} muni de la métrique habituelle, telle que les sept ensembles $A, \overset{\circ}{A}, \overline{A}, \alpha(A), \beta(A), \alpha(\overset{\circ}{A}), \beta(\overline{A})$ soient tous distincts et n'aient pas d'autres relations d'inclusion que celles énumérées à la question 2° et celles qui en résultent par transitivité.

Solution 1° Par définition $\alpha(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans \bar{A} , et on a $A \subset \bar{A}$. Donc si A est ouvert, on a $A \subset \alpha(A)$.

De même, $\beta(A)$ est le plus petit fermé contenant $\overset{\circ}{A}$. Comme $A \supset \overset{\circ}{A}$, si A est fermé, on a $\beta(A) \subset A$.

2° Des exercices 1.1 et 1.2 il résulte que α et β sont deux applications croissantes de l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ muni de l'inclusion dans lui-même. Comme par définition $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$, on obtient immédiatement

$$\alpha(\overset{\circ}{A}) \subset \alpha(A) \quad \beta(A) \subset \beta(\bar{A}) \quad \beta(A) \subset \bar{A} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{A} \subset \alpha(A).$$

L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est ouvert, donc d'après 1° on a $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(\overset{\circ}{A})$. De même, \bar{A} est fermé, donc $\beta(\bar{A}) \subset \bar{A}$.

D'autre part $\alpha(\overset{\circ}{A}) = \widehat{\beta(\overset{\circ}{A})}$ donc $\alpha(\overset{\circ}{A}) \subset \beta(A)$, de plus $\beta(\bar{A}) = \overline{\alpha(\bar{A})}$ donc $\alpha(A) \subset \beta(\bar{A})$.

3° Posons $A = (\mathbf{Q} \cap]-1, 0[) \cup]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\}$. On a

$$\overset{\circ}{A} =]0, 1[\cup]1, 2[$$

$$\bar{A} = [-1, 2] \cup \{3\}$$

$$\alpha(A) =]-1, 2[$$

$$\beta(A) = [0, 2]$$

$$\alpha(\overset{\circ}{A}) =]0, 2[$$

$$\beta(\bar{A}) = [-1, 2].$$

Ces ensembles sont tous différents et on vérifie aisément qu'ils ne satisfont pas à d'autres relations d'inclusion que celles indiquées dans l'énoncé.

1.4

Soient E un espace métrique et X une partie de E . On appelle *frontière* de X et on note $\text{Fr}(X)$ l'ensemble $\bar{X} \cap (\overline{E - X})$ où \bar{X} désigne l'adhérence de X .

1° Montrer que $\text{Fr}(X) = \bar{X} - \overset{\circ}{X}$ où $\overset{\circ}{X}$ désigne l'intérieur de X (cf. exercice 1.2).

2° Montrer que $\text{Fr}(\bar{X}) \subset \text{Fr}(X)$ et $\text{Fr}(\overset{\circ}{X}) \subset \text{Fr}(X)$. Trouver une partie X de l'espace métrique \mathbf{R} telle que les trois ensembles $\text{Fr}(\overset{\circ}{X})$, $\text{Fr}(X)$, $\text{Fr}(\bar{X})$ soient distincts.

3° Soient A et B deux parties de E . Montrer que

$$\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B).$$

Trouver deux parties de \mathbf{R} telles que ces deux ensembles soient distincts.

Montrer que si les parties A et B de E sont telles que $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, alors

$$\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B).$$

Solution 1° Soit x un élément de $\bar{X} \cap \overline{(E - X)}$. Comme x est un élément de $\overline{E - X}$ tout voisinage de x rencontre $E - X$, ce qui prouve que X n'est pas un voisinage de x et que x n'appartient pas à $\overset{\circ}{X}$. Donc x est un élément de $\bar{X} - \overset{\circ}{X}$ et on a

$$\bar{X} \cap \overline{E - X} \subset \bar{X} - \overset{\circ}{X}.$$

Réciproquement soient x un élément de $\bar{X} - \overset{\circ}{X}$, et U un ouvert contenant x . Si $U \cap (E - X)$ était vide, l'ensemble $U \cup \overset{\circ}{X}$ serait un ouvert contenu dans X et on aurait $U \cup \overset{\circ}{X} \subset \overset{\circ}{X}$, ce qui est impossible puisque x n'appartient pas à $\overset{\circ}{X}$. Par suite $U \cap (E - X) \neq \emptyset$ et x est un élément de $\bar{X} \cap \overline{E - X}$, d'où

$$\bar{X} - \overset{\circ}{X} \subset \bar{X} \cap \overline{E - X}.$$

2 On a $\text{Fr } \bar{X} = \bar{X} \cap \overline{E - \bar{X}}$ et $\text{Fr } X = \bar{X} \cap \overline{E - X}$. Comme $X \subset \bar{X}$, on a

$$E - \bar{X} \subset E - X$$

et

$$\overline{E - \bar{X}} \subset \overline{E - X}, \quad \text{donc} \quad \text{Fr } \bar{X} \subset \text{Fr } X.$$

D'autre part on a $\overset{\circ}{X} \subset X$, $\text{Fr } \overset{\circ}{X} = \bar{\overset{\circ}{X}} - \overset{\circ}{X}$ et $\text{Fr } X = \bar{X} - \overset{\circ}{X}$. On sait que $\bar{\overset{\circ}{X}} \subset \bar{X}$, donc $\text{Fr } \overset{\circ}{X} \subset \text{Fr } X$.

Posons $X =]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\}$. On a alors

$$\bar{X} = [0, 2] \cup \{3\}, \overset{\circ}{X} =]0, 1[\cup]1, 2[, \bar{\overset{\circ}{X}} = [0, 2], \bar{\bar{X}} =]0, 2[$$

d'où

$$\text{Fr } X = \{0, 1, 2, 3\}, \text{Fr } \bar{X} = \{0, 2, 3\}, \text{Fr } \overset{\circ}{X} = \{0, 1, 2\}$$

3° On a

$$\begin{aligned} \text{Fr}(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{E - (A \cup B)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\overline{E - A}) \cap (\overline{E - B}) \\ &= [\bar{A} \cap (\overline{E - A}) \cap (\overline{E - B})] \cup [\bar{B} \cap (\overline{E - A}) \cap (\overline{E - B})] \end{aligned}$$

or

$$\overline{(E - A) \cap (E - B)} \subset \overline{E - A} \quad \text{et} \quad \overline{(E - A) \cap (E - B)} \subset \overline{E - B}$$

donc

$$\text{Fr}(A \cup B) \subset (\overline{A \cap E - A}) \cup (\overline{B \cap E - B})$$

soit

$$\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B).$$

Si on pose $A = [0, 1[$ et $B =]0, 2]$ on a

$$\text{Fr}(A) = \{0, 1\} \quad \text{Fr}(B) = \{0, 2\}$$

$$A \cup B = [0, 2] \quad \text{Fr}(A \cup B) = \{0, 2\} \quad \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B) = \{0, 1, 2\}.$$

Supposons maintenant que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ et soit x un élément de $\text{Fr}(A)$; alors x appartient à \overline{A} donc à $\overline{A \cup B}$. Comme x appartient à \overline{A} il n'appartient pas à \overline{B} , par suite il existe un ouvert U de E tel que $x \in U$ et $U \cap B = \emptyset$. Supposons que x appartienne à $\overset{\circ}{A \cup B}$; alors il existe un ouvert V de E tel que $x \in V$ et $V \subset A \cup B$. Posons $W = U \cap V$. L'ouvert W contient x et on a $W \subset A \cup B$ et $W \cap B = \emptyset$ donc $W \subset A$ et $x \in \overset{\circ}{A}$. Mais ceci est impossible car $x \in \text{Fr}(A)$

donc x n'est pas dans $\overset{\circ}{A \cup B}$ ce qui prouve que

$$x \in \text{Fr}(A \cup B) \quad \text{et que} \quad \text{Fr}(A) \subset \text{Fr}(A \cup B).$$

On démontre de même que $\text{Fr}(B) \subset \text{Fr}(A \cup B)$, donc

$$\text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B) = \text{Fr}(A \cup B).$$

1.5

Soient E et E' deux espaces métriques et f une application de E dans E' . Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(α) f est continue.

(β) Pour toute partie ouverte U de E' , $f^{-1}(U)$ est une partie ouverte de E .

(γ) Pour toute partie fermée F de E' , $f^{-1}(F)$ est une partie fermée de E .

Solution

Il est clair que (β) et (γ) sont deux propositions équivalentes car on a pour toute partie A de E'

$$f^{-1}(E' - A) = E - f^{-1}(A).$$

Supposons (α) vraie, et soient U un ouvert de E' et x un élément de $f^{-1}(U)$. Alors U est un voisinage de $f(x)$ et par suite il existe un voisinage V de x tel que $f(V) \subset U$. Mais on a alors $V \subset f^{-1}(U)$ ce qui prouve que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x . La partie $f^{-1}(U)$ étant un voisinage de chacun de ses points, est un ouvert de E . On a donc montré que (α) entraîne (β).

Supposons maintenant que (β) est vraie. Soient x un élément de E et W un voisinage de $f(x)$. Il existe un ouvert U de E' tel que $f(x) \in U$ et $U \subset W$. Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E tel que $x \in f^{-1}(U)$ et $f(f^{-1}(U)) \subset W$. La fonction f est donc continue au point x et par suite (α) est vraie.

1.6 Soient E un espace métrique complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties fermées non vides de E dont le diamètre tend vers 0. On pose $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Démontrer que F est une partie non vide réduite à un seul élément.

Solution Pour tout entier n , soit x_n un élément de F_n . Soit ε un nombre réel strictement positif. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(F_n) = 0$, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait $\delta(F_n) < \varepsilon$. Soient p et q deux entiers supérieurs à N . Par définition $x_p \in F_p$ et $x_q \in F_q$ et comme la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante on a $x_p \in F_N$ et $x_q \in F_N$, d'où

$$d(x_p, x_q) \leq \delta(F_N) < \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de CAUCHY, et l'espace E étant complet elle admet une limite x . Si p est un entier, pour tout entier n supérieur à p , on a $x_n \in F_p$; par suite $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+p}$ et $x \in \bar{F}_p$. Comme F_p est fermé, $x \in F_p$ et ceci pour tout entier p . On a donc $x \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p$ et F est non vide.

Soit y un élément de F . Pour tout entier p , les éléments x et y appartiennent à F_p , donc

$$d(x, y) \leq \delta(F_p).$$

Comme $\lim \delta(F_p) = 0$, on a $d(x, y) = 0$ et $x = y$, d'où

$$F = \{x\}.$$

1.7 Soient E un espace métrique, dont la distance est notée d , F un espace métrique complet dont la distance est notée d' , A une partie de E dont l'adhérence \bar{A} est égale à E , i l'injection canonique de A dans E et f une fonction de A dans F .

1° Soit a un élément de E . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(α) f admet une limite au point a .

(β) Pour tout nombre réel strictement positif ε , il existe un voisinage V de a tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de $V \cap A$, on ait

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

2° On suppose que la fonction f est uniformément continue sur A . Montrer qu'il existe une fonction \bar{f} uniformément continue de E dans F , et une seule telle que $f = \bar{f} \circ i$.

Solution 1° Supposons (α) vraie. Posons $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un voisinage V de a tel que pour tout élément x de $V \cap A$ on ait

$$d'(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors pour tout couple (x, y) d'éléments de $V \cap A$ on a

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), l) + d'(l, f(y)) < \varepsilon$$

ce qui prouve que (α) entraîne (β) .

Réciproquement supposons (β) vraie. Pour tout entier strictement positif n il existe un voisinage V_n de a tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de $V_n \cap A$ on ait

$$d'(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}.$$

Posons pour tout entier n strictement positif

$$V'_n = V_1 \cap \dots \cap V_n.$$

Alors la suite $(\overline{f(V'_n \cap A)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties fermées dont le diamètre tend vers 0. L'espace F étant complet, l'exercice 1.6 nous permet d'affirmer qu'il existe un élément b de F tel que

$$\{b\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f(V'_n \cap A)}.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un entier n tel que $1/n < \varepsilon$. Alors pour tout élément x de $V'_n \cap A$ on a

$$d'(f(x), b) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ce qui prouve que $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Par suite (β) entraîne (α) .

2° Démontrons d'abord l'unicité d'une telle fonction. Soient g et h deux fonctions uniformément continues de E dans F telles que $f = g \circ i = h \circ i$. Alors pour tout élément x de A on a $f(x) = g(x) = h(x)$. Soit a un élément de E . Comme $E = \overline{A}$ et comme g et h sont continues, on a

$$g(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} h(x) = h(a)$$

et par suite $g = h$.

Montrons l'existence de \bar{f} . Soient a un élément de E et ε un nombre réel strictement positif. Comme f est uniformément continue sur A , il existe un nombre réel strictement positif η tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de A tels que $d(x, y) < \eta$, on ait $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Si on appelle V la boule ouverte de centre a et de rayon $\eta/2$, on a pour tout couple (x, y) d'éléments de $V \cap A$

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

La fonction f vérifie donc la condition (β) au point a ; donc elle admet une limite en ce point.

Définissons la fonction \bar{f} , en posant pour tout élément a de E ,

$$\bar{f}(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x).$$

Il est clair que $f = \bar{f} \circ i$. Montrons que \bar{f} est uniformément continue sur E . Soit ε un nombre réel strictement positif et η un nombre réel strictement positif tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de A vérifiant $d(x, y) < \eta$, on ait $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Soient a et b deux éléments de E tels que $d(a, b) < \eta$. Comme $E = \bar{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$) d'éléments de A telle que

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \quad (\text{resp } b = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n).$$

La fonction d étant continue sur $E \times E$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = d(a, b).$$

Comme $d(a, b) < \eta$, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait $d(x_n, y_n) < \eta$. Alors si $n > N$ on a

$$d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$$

et comme

$$d'(\bar{f}(a), \bar{f}(b)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d'(f(x_n), f(y_n))$$

on a

$$d'(\bar{f}(a), \bar{f}(b)) \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout couple (a, b) d'éléments de E tels que $d(a, b) < \eta$, on a

$$d'(\bar{f}(a), \bar{f}(b)) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que \bar{f} est uniformément continue sur E .

1.8

Soit E un espace métrique muni de la distance d . Le but de ce problème est d'étudier les couples (E', i) formés d'un espace métrique complet E' muni

d'une distance d' et d'une application i de E dans E' vérifiant les propriétés suivantes.

$$(P_1) \quad (\forall (x, y) \in E \times E) \quad d(x, y) = d'(i(x), i(y)).$$

(P_2) Pour tout espace métrique complet F et toute fonction uniformément continue f de E dans F , il existe une et une seule application uniformément continue \bar{f} de E' dans F telle que $f = \bar{f} \circ i$.

1° Soit S l'ensemble des suites de CAUCHY d'éléments de E . On définit une relation \mathcal{R} sur S de la manière suivante : si $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux éléments de S , on a $a \mathcal{R} b$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, b_n) = 0$.

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur S . On appelle \hat{E} l'espace quotient S/\mathcal{R} .

2° a) Montrer que si $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux éléments de S , la suite $(d(a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente.

b) Pour tout couple (a, b) d'éléments de S avec $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on pose

$$\alpha(a, b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, b_n).$$

Montrer que l'application α de $S \times S$ dans \mathbb{R}_+ induit une application \hat{d} de $\hat{E} \times \hat{E}$ dans \mathbb{R}_+ qui est une distance sur \hat{E} .

3° Soit j l'application de E dans \hat{E} qui à l'élément x de E fait correspondre la classe d'équivalence modulo \mathcal{R} de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $x_n = x$. Montrer que j vérifie la propriété (P_1) et que \hat{E} est égal à l'adhérence $\overline{j(E)}$ de l'ensemble $j(E)$.

4° Montrer que l'espace métrique \hat{E} est complet et que le couple (\hat{E}, j) vérifie la propriété (P_2).

5° Montrer que si (E', i) est un couple vérifiant les propriétés (P_1) et (P_2), alors il existe une bijection k de \hat{E} sur E' et une seule telle que

$$k \circ j = i$$

et

$$(\forall (a, b) \in \hat{E} \times \hat{E}) \quad \hat{d}(a, b) = d'(k(a), k(b)).$$

Solution 1° Il est clair que \mathcal{R} est une relation réflexive et symétrique. Soient

$$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

des éléments de S tels que $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$. Comme pour tout entier n on a

$$0 \leq d(a_n, c_n) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, c_n)$$

et comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(b_n, c_n) = 0,$$

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, c_n) = 0$; par suite $a \mathcal{R} c$ et \mathcal{R} est une relation transitive. \mathcal{R} est donc bien une relation d'équivalence sur S .

2° a) Soit ε un nombre réel strictement positif. Comme a et b sont des suites de CAUCHY, il existe un entier N tel que pour tout couple (p, q) d'entiers supérieurs à N on ait

$$d(a_p, a_q) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad d(b_p, b_q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors pour tout couple (p, q) d'entiers supérieurs à N

$$\begin{aligned} |d(a_p, b_p) - d(a_q, b_q)| &\leq |d(a_p, b_p) - d(b_p, a_q)| + |d(b_p, a_q) - d(a_q, b_q)| \\ &\leq d(a_p, a_q) + d(b_p, b_q) < \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite $(d(a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de CAUCHY de nombres réels, et l'espace \mathbb{R} étant complet, cette suite est une suite convergente.

b) Soient s, t, u, v des éléments de S tels que $s \mathcal{R} t$ et $u \mathcal{R} v$. Pour tout entier naturel n , on a

$$d(s_n, u_n) \leq d(s_n, t_n) + d(t_n, v_n) + d(v_n, u_n)$$

et

$$d(t_n, v_n) \leq d(t_n, s_n) + d(s_n, u_n) + d(u_n, v_n)$$

d'où on déduit par passage à la limite que

$$\alpha(s, u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(s_n, u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(t_n, v_n) = \alpha(t, v).$$

Si on désigne par \dot{s} la classe modulo \mathcal{R} d'un élément s de S , on peut définir l'application \hat{d} de $\hat{E} \times \hat{E}$ dans \mathbb{R}_+ en posant pour tout couple (\dot{s}, \dot{t}) d'éléments de $\hat{E} \times \hat{E}$,

$$\hat{d}(\dot{s}, \dot{t}) = \alpha(s, t).$$

Montrons que l'application \hat{d} ainsi définie est une distance sur \hat{E} . Si \dot{s}, \dot{t} sont des éléments de \hat{E} tels que $\hat{d}(\dot{s}, \dot{t}) = 0$, alors

$$\alpha(s, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(s_n, t_n) = 0$$

d'où $s \mathcal{R} t$ et $\dot{s} = \dot{t}$.

Il est clair que $\alpha(s, t) = \alpha(t, s)$ pour tout couple (s, t) d'éléments de E ; par suite $\hat{d}(\dot{s}, \dot{t}) = \hat{d}(\dot{t}, \dot{s})$ pour tout élément (\dot{s}, \dot{t}) de $\hat{E} \times \hat{E}$.

Si s, t, u sont des éléments de E , on a pour tout entier naturel n

$$d(s_n, u_n) \leq d(s_n, t_n) + d(t_n, u_n)$$

d'où par passage à la limite

$$\alpha(s, u) \leq \alpha(s, t) + \alpha(t, u)$$

et par conséquent

$$\widehat{d}(\dot{s}, \dot{u}) \leq \widehat{d}(\dot{s}, \dot{t}) + \widehat{d}(\dot{t}, \dot{u}).$$

3° Il est clair que si x et y sont deux éléments de E , on a

$$\widehat{d}(j(x), j(y)) = d(x, y)$$

ce qui prouve que j vérifie la propriété (P_1) .

Soit \dot{s} un élément de \widehat{E} et $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un représentant de cette classe. Si p est un entier on a

$$\widehat{d}(\dot{s}, j(s_p)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(s_n, s_p).$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. La suite s étant une suite de CAUCHY, il existe un entier N tel que pour tout couple (p, n) d'entiers tel que $p > N$ et $n > N$ on ait

$$d(s_n, s_p) < \varepsilon.$$

Par suite pour $p > N$, on a

$$\widehat{d}(\dot{s}, j(s_p)) < \varepsilon$$

ce qui prouve que $\dot{s} = \lim_{p \rightarrow +\infty} j(s_p)$.

Donc tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de $j(E)$, ce qui prouve que $\widehat{E} = j(E)$.

4° Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de CAUCHY d'éléments de \widehat{E} . Comme $\widehat{E} = \overline{j(E)}$, pour tout entier n il existe un élément x_n de E tel que

$$\widehat{d}(\dot{s}_n, j(x_n)) < \frac{1}{n}.$$

Posons $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et montrons que x est une suite de CAUCHY. Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un entier N tel que pour tout couple (p, q) d'entiers tel que $p > N$ et $q > N$ on ait

$$\frac{1}{p} < \frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \widehat{d}(\dot{s}_p, \dot{s}_q) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour un tel couple on a

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) = \widehat{d}(j(x_p), j(x_q)) &\leq \widehat{d}(j(x_p), \dot{s}_p) + \widehat{d}(\dot{s}_p, \dot{s}_q) + \widehat{d}(\dot{s}_q, j(x_q)) \leq \\ &\leq \frac{1}{p} + \widehat{d}(\dot{s}_p, \dot{s}_q) + \frac{1}{q} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc x est un élément de E . Soit \dot{x} sa classe dans \widehat{E} . D'après la question 3° on a

$$\dot{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} j(x_n).$$

Si ε est un nombre réel strictement positif, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{d}(\dot{x}, j(x_n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour un tel entier on a alors

$$\widehat{d}(\dot{s}_n, \dot{x}) \leq \widehat{d}(\dot{s}_n, j(x_n)) + \widehat{d}(j(x_n), \dot{x}) < \varepsilon$$

et on obtient

$$\dot{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{s}_n$$

ce qui prouve que \widehat{E} est un espace complet.

Soient F un espace métrique complet et f une fonction uniformément continue de E dans F . Pour tout élément y de $j(E)$ posons $\varphi(y) = f(x)$ où x est le seul élément de E tel que $y = j(x)$. Comme j vérifie P_1 , il est clair que la fonction φ ainsi définie est uniformément continue sur $j(E)$. Mais alors d'après l'exercice 1.7, il existe une et une seule fonction uniformément continue \bar{f} de $\widehat{E} = \overline{j(E)}$ dans F qui prolonge φ . Il est clair que \bar{f} ainsi définie vérifie toutes les conditions imposées, et que si g est une autre fonction vérifiant ces conditions, alors g coïncide avec φ sur $j(E)$ et par suite $g = \bar{f}$.

Le couple (\widehat{E}, j) vérifie donc les conditions (P_1) et (P_2) de l'énoncé.

5° Il est clair que si i vérifie (P_1) alors i est une fonction uniformément continue de E dans l'espace complet E' . Comme (\widehat{E}, j) vérifie (P_2) il existe une et une seule application uniformément continue k de \widehat{E} dans E' telle que

$$i = k \circ j.$$

Soient y_1 et y_2 deux éléments de $j(E)$, et x_1 et x_2 les éléments de E tels que $y_1 = j(x_1)$ et $y_2 = j(x_2)$. On a

$$\begin{aligned} d'(k(y_1), k(y_2)) &= d'(k \circ j(x_1), k \circ j(x_2)) = d'(i(x_1), i(x_2)) = \\ &= d(x_1, x_2) = \widehat{d}(j(x_1), j(x_2)) = \widehat{d}(y_1, y_2). \end{aligned}$$

On voit que l'application de $\widehat{E} \times \widehat{E}$ dans \mathbf{R}_+ qui au couple (a, b) fait correspondre $d'(k(a), k(b))$ coïncide avec \widehat{d} sur $j(E) \times j(E)$. Comme

$$\widehat{E} \times \widehat{E} = \overline{j(E) \times j(E)}$$

ces deux applications sont égales, et on a pour tout couple (a, b) de $\widehat{E} \times \widehat{E}$

$$\widehat{d}(a, b) = d'(k(a), k(b)).$$

Il nous reste à prouver que l'application k est bijective. Comme (E', i) vérifie (P_2) , il existe une et une seule application uniformément continue \bar{k} de E' dans \widehat{E} telle que

$$j = \bar{k} \circ i.$$

Mais alors on a

$$\text{Id}_{\widehat{E}} \circ j = \bar{k} \circ i = (\bar{k} \circ k) \circ j = j$$

et comme il n'existe qu'une seule application ψ de \widehat{E} dans \widehat{E} telle que $\psi \circ j = j$, on a

$$\bar{k} \circ k = \text{Id}_{\widehat{E}}.$$

On démontre de manière analogue que $k \circ \bar{k} = \text{Id}_{E'}$, donc k est une bijection de \widehat{E} sur E' .

1.9

Soient E un ensemble et d une application de $E \times E$ dans \mathbf{R}_+ telle que

$$(\alpha) (\forall (x, y) \in E \times E) [d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y].$$

$$(\beta) (\forall (x, y) \in E \times E) d(x, y) = d(y, x).$$

$$(\gamma) (\forall (x, y, z) \in E \times E \times E) d(x, z) \leq \sup(d(x, y), d(y, z)).$$

1° Montrer que l'application d est une distance sur E . Une telle distance est appelée distance *ultramétrique*.

2° Soient x, y, z trois points de E tels que $d(x, y) \neq d(y, z)$. Montrer que $d(x, z) = \sup(d(x, y), d(y, z))$.

3° Soient x un élément de E et r un nombre réel strictement positif. Montrer que la boule ouverte $B(x, r)$ de centre x et de rayon r est un ensemble fermé et que pour tout point y de $B(x, r)$ la boule ouverte $B(y, r)$ de centre y et de rayon r est égale à $B(x, r)$.

4° Soient x un élément de E et r un nombre réel strictement positif. Montrer que la boule fermée $B'(x, r)$ de centre x et de rayon r est un ensemble ouvert et que pour tout point y de $B'(x, r)$ la boule fermée $B'(y, r)$ de centre y et de rayon r est égale à $B'(x, r)$.

Solution

1° Il faut montrer que d vérifie l'inégalité triangulaire. Or comme d prend des valeurs positives, il est clair que

$$(\forall (x, y, z) \in E \times E \times E) d(x, z) \leq \sup(d(x, y), d(y, z)) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

2° Comme $d(x, y) \neq d(y, z)$, supposons que $d(x, y) < d(y, z)$. D'après la propriété (γ) , on a

$$d(x, z) \leq d(y, z)$$

et

$$d(y, z) \leq \sup(d(y, x), d(x, z)).$$

Mais comme $d(y, x) < d(y, z)$ la deuxième inégalité est forcément

$$d(y, z) \leq d(x, z)$$

ce qui joint à la première donne

$$d(x, z) = d(y, z) = \sup(d(x, y), d(y, z)).$$

3° Nous allons montrer que $B(x, r)$ contient tous ses points d'accumulation. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $B(x, r)$ et a la limite de cette suite. On a pour tout entier naturel n , $d(x, a_n) < r$. Comme

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

il existe un entier naturel p tel que $d(a_p, a) < r/2$. On a alors

$$d(x, a) \leq \sup(d(x, a_p), d(a_p, a)) < r$$

ce qui prouve que a est un élément de $B(x, r)$ qui est donc une partie fermée de E .

Soit y un élément de $B(x, r)$. Si z est un élément de $B(x, r)$ on a

$$d(y, z) \leq \sup(d(y, x), d(x, z)) < r$$

donc $z \in B(y, r)$ et $B(x, r) \subset B(y, r)$.

Soit u un élément de $B(y, r)$. On a

$$d(x, u) \leq \sup(d(x, y), d(y, u)) < r$$

donc $u \in B(x, r)$ et $B(y, r) \subset B(x, r)$.

On a donc bien $B(x, r) = B(y, r)$.

4° Si y est un élément de $B'(x, r)$ et z un élément de E tel que $d(y, z) < r/2$, on a

$$d(x, z) \leq \sup(d(x, y), d(y, z)) \leq r$$

donc $z \in B'(x, r)$. Ceci prouve que la boule ouverte de centre y et de rayon $r/2$ est contenue dans $B'(x, r)$ qui est donc voisinage de chacun de ses points, et par suite une partie ouverte de E .

Une démonstration analogue à celle de la question 3° montre que

$$B'(x, r) = B'(y, r).$$

1.10

1° Soit E un espace muni d'une distance ultramétrique d (cf. exercice 1.9). Montrer que, pour qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E soit une suite de CAUCHY, il faut et il suffit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, a_{n+1}) = 0.$$

2° Soient X un ensemble et E' l'ensemble des suites d'éléments de X . Pour deux éléments distincts $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E' , on appelle $k(x, y)$ le plus petit élément de l'ensemble des entiers n tels que $x_n \neq y_n$. On définit une application d' de $E' \times E'$ dans \mathbb{R}_+ en posant pour tout couple (x, y) de $E' \times E'$,

$$\begin{cases} d'(x, y) = \frac{1}{k(x, y)} & \text{si } x \neq y \\ d'(x, y) = 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que d' est une distance ultramétrique sur E' et que l'espace métrique E' ainsi défini est un espace complet.

Solution 1° Il est clair que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, a_{n+1}) = 0.$$

Réciproquement, supposons que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, a_{n+1}) = 0.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un entier p tel que pour tout entier m supérieur à p on ait $d(a_m, a_{m+1}) < \varepsilon$. Si (m, n) est un couple d'entiers tels que $n > m \geq p$, on a

$$d(a_m, a_n) \leq \sup (d(a_m, a_{m+1}), d(a_{m+1}, a_{m+2}), \dots, d(a_{n-1}, a_n)) < \varepsilon$$

ce qui prouve que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY.

2° Il est clair que

$$(\alpha) (\forall (x, y) \in E' \times E') [d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y].$$

$$(\beta) (\forall (x, y) \in E' \times E') [d'(x, y) = d'(y, x)].$$

Soient x, y, z des éléments de E' . Si $x = y, y = z$ ou $x = z$, il est clair que

$$d'(x, z) \leq \sup (d'(x, y), d'(y, z)).$$

Supposons que $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soient distincts deux à deux. Alors on a

$$k(x, z) \geq \inf (k(x, y), k(y, z))$$

car si on avait $k(x, z) < k(x, y)$ et $k(x, z) < k(y, z)$ on aurait

$$x_{k(x,z)} = y_{k(x,z)} = z_{k(x,z)}$$

ce qui est impossible puisque par définition $x_{k(x,z)} \neq z_{k(x,z)}$. Par conséquent on a

$$(\gamma) (\forall (x, y, z) \in E' \times E' \times E') [d'(x, z) \leq \sup [d'(x, y), d'(y, z)]].$$

L'application d' est donc une distance ultramétrique.

Soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de CAUCHY d'éléments de E' . Pour tout entier strictement positif p , posons $x_p = (x_{p,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. D'après la question 1° on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} d'(x_p, x_{p+1}) = 0.$$

Pour tout entier strictement positif n , il existe des entiers N tels que pour tout entier p vérifiant $p \geq N$ on ait

$$d'(x_p, x_{p+1}) < \frac{1}{n}.$$

Soit N_n le plus petit de ces entiers. Remarquons que la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. On a pour tout entier p supérieur à N_n et tout entier k inférieur à n

$$x_{p,k} = x_{p+1,k}$$

car $d'(x_p, x_{p+1}) < 1/n$ entraîne $(x_p) = (x_{p+1})$ ou $k(x_p, x_{p+1}) > n$. Par suite on a pour tout entier p supérieur à N_n et tout entier k inférieur à n

$$x_{p,k} = x_{N_n,k}. \tag{1}$$

Définissons l'élément $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de E' en posant pour tout entier strictement positif i

$$y_i = x_{N_i,i}.$$

Montrons que y est la limite de la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$. Soit ε un nombre réel strictement positif ; il existe un entier strictement positif n tel que $1/n < \varepsilon$. Soit p un entier supérieur à N_n . Pour tout entier k inférieur à n on a

$$y_k = x_{N_k,k}$$

et, en tenant compte de l'égalité (1) et du fait que la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

$$y_k = x_{p,k}.$$

Ceci prouve que pour $p \geq N_n$, on a $y = x_p$ ou $k(x_p, y) > n$ et par suite

$$d'(y, x_p) < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

On a donc bien $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_p$ et la suite de CAUCHY $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite. L'espace E' est donc un espace complet.

1.11

Soient K un espace métrique compact et F une partie fermée de K . Montrer que F est un espace compact.

Solution Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de F par des parties ouvertes. Comme $K - F$ est un ouvert de K , et comme

$$K = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cup (K - F)$$

d'après la propriété de BOREL-LEBESGUE, il existe une sous-famille finie $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$ telle que

$$K = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n} \cup (K - F).$$

Mais alors $F \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}$ et vérifie donc la propriété de BOREL-LEBESGUE. Par suite F est bien un espace compact.

1.12 Soient E un espace métrique compact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E . Montrer qu'il existe un nombre réel α strictement positif, tel que toute boule ouverte de rayon α dans E soit contenue dans l'un au moins des ouverts du recouvrement $(U_i)_{i \in I}$.

Solution Soit x un élément de E . Il existe un élément i de I tel que x appartienne à U_i et un nombre réel strictement positif r_x pour lequel la boule ouverte $B(x, r_x)$ de centre x et de rayon r_x soit contenue dans U_i .

La famille $(B(x, \frac{1}{2} r_x))_{x \in E}$ des boules de centre x et de rayon $\frac{1}{2} r_x$ est un recouvrement ouvert de E ; comme E est compact, il existe un entier strictement positif n et des éléments x_1, \dots, x_n de E tels que

$$E = B(x_1, \frac{1}{2} r_{x_1}) \cup \dots \cup B(x_n, \frac{1}{2} r_{x_n}).$$

Posons $\alpha = \frac{1}{2} \inf(r_{x_1}, \dots, r_{x_n})$. Les nombres r_{x_j} étant strictement positifs pour $1 \leq j \leq n$, le nombre réel α est strictement positif. Montrons qu'il satisfait aux conditions imposées.

Soit x un élément de E . Il existe un entier j tel que

$$1 \leq j \leq n \quad \text{et} \quad x \in B(x_j, \frac{1}{2} r_{x_j}).$$

Comme $\alpha \leq \frac{1}{2} r_{x_j}$, la boule ouverte $B(x, \alpha)$ de centre x et de rayon α est contenue dans $B(x_j, r_{x_j})$. D'autre part il existe un élément i de I tel que x_j appartienne à U_i , et par construction $B(x_j, r_{x_j})$ est contenue dans U_i . On a donc bien

$$B(x, \alpha) \subset B(x_j, r_{x_j}) \subset U_i.$$

1.13 Soient K un espace métrique compact, E un espace métrique et f une fonction continue et bijective de K dans E . Montrer que la fonction $g = f^{-1}$ est une fonction continue de E dans K .

Solution D'après l'exercice 1.5 il suffit de montrer que l'image réciproque par g de tout fermé de K est un fermé de E . Soit F un fermé de K . On sait que F est un sous-espace compact de K (cf. exercice 1.11) et alors $f(F)$ est un sous-espace compact de E (cf. C. E., Ch. 1, § III, n° 13). Mais tout sous-espace compact de E est fermé (cf. C. E., Ch. 1, § IV, n° 18) donc $f(F) = g^{-1}(F)$ est un fermé de E et par suite g est continue.

1.14 Soient E et E' deux espaces métriques, et f une application de E dans E' . On note d (resp d') la distance définie sur E (resp E').

1° Soit x un élément de E . Montrer que la fonction f est continue au point x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui admet x pour limite, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet $f(x)$ pour limite.

2° Montrer que si la restriction de f à n'importe quel sous-espace compact de E est continue, alors la fonction f est continue sur E .

Solution 1° Supposons f continue au point x et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un réel strictement positif η tel que pour tout élément y de E vérifiant $d(y, x) < \eta$ on ait $d'(f(y), f(x)) < \varepsilon$ et un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait $d(x_n, x) < \eta$. Alors pour tout entier n supérieur à N on a $d'(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ ce qui prouve que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

Réciproquement supposons que f ne soit pas continue au point x . Alors il existe un nombre réel strictement positif ε tel que pour tout entier positif n , il existe un élément x_n de E vérifiant

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d'(f(x_n), f(x)) > \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet x pour limite, mais il est clair que $f(x)$ ne peut être la limite de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

2° Soient x un élément de E et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Posons

$$K = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} \right) \cup \{x\}.$$

L'ensemble K satisfait à la propriété de BOLZANO-WEIERSTRASS, car toute partie infinie de K admet le point d'accumulation x . Par suite K est un compact et la restriction de f à K est continue. On a alors

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

Ceci étant vrai pour toute suite qui tend vers x , d'après 1° la fonction f est continue au point x . Comme ceci est vrai pour tout élément x de E , la fonction f est continue sur E .

1.15 Soit E un espace métrique muni d'une distance d . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(α) E est un espace compact.

(β) E est un espace complet tel que pour tout nombre réel strictement positif ε , il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de diamètre strictement inférieur à ε .

Solution Supposons (α) vraie. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de CAUCHY d'éléments de E . L'espace E étant compact, la propriété de BOLZANO-WEIERSTRASS (cf. C. E., Ch. I, § II, n° 10) est vraie et il existe un élément x de E et une suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_{n_k})$. Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un entier N_1 tel que pour tout entier p supérieur à N_1 on ait

$$d(x, x_{n_p}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

et un entier N_2 tel que pour tout couple (q, r) d'entiers tels que $N_2 \leq q \leq r$ on ait

$$d(x_q, x_r) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $N = \sup(N_1, N_2)$ on a pour tout entier i supérieur à N ,

$$d(x, x_i) \leq d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui prouve que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. La suite de CAUCHY $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et par suite E est un espace complet.

Soient ε un nombre réel strictement positif, x un élément de E et $B(x, \varepsilon/3)$ la boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon/3$. La famille $(B(x, \varepsilon/3))_{x \in E}$ est un

recouvrement de E par des ensembles ouverts ; d'après la propriété de BOREL-LEBESGUE, il existe un nombre fini d'éléments x_1, x_2, \dots, x_p de E tels que

$$E = \bigcup_{1 \leq i \leq p} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Mais pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$ on a

$$\delta\left(B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

On a donc obtenu un recouvrement fini de E par des ensembles de diamètre strictement inférieur à ε . Nous venons de montrer que (α) entraîne (β) .

Pour montrer la réciproque, supposons (β) vraie et (α) fausse. Alors il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de E dont aucune sous-famille finie n'est un recouvrement de E .

Nous allons construire par récurrence une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de boules ouvertes de E de la manière suivante :

Il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, et au moins une de ces boules ne peut être recouverte par un nombre fini de parties de la famille $(U_i)_{i \in I}$. On appelle B_0 une telle boule.

Supposons définie B_{n-1} , boule ouverte de rayon inférieur à $1/2^{n-1}$ telle qu'aucune sous-famille finie de $(U_i)_{i \in I}$ n'en soit un recouvrement. Considérons alors un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon strictement inférieur à $1/n$. Parmi les boules de ce recouvrement dont l'intersection avec B_{n-1} est non vide il en existe au moins une qui ne peut être recouverte par un nombre fini d'éléments de la famille $(U_i)_{i \in I}$. On appelle B_n une telle boule.

La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant ainsi définie, pour tout entier naturel n on appelle x_n le centre de la boule B_n . Comme $B_{n-1} \cap B_n \neq \emptyset$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un entier n tel que $1/2^{n-2} < \varepsilon$. Alors on a pour tout couple d'entiers tels que $n \leq p < q$

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \dots + \frac{1}{2^{q-2}} \\ &\leq \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^{p-2}} \leq \frac{1}{2^{n-2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY. L'espace E étant complet la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite x . Il existe un élément i_0 de I tel que $x \in U_{i_0}$, et un nombre réel strictement positif α tel que $B(x, \alpha) \subset U_{i_0}$. Il existe au moins un entier n tel que l'on ait

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad d(x, x_n) < \frac{\alpha}{2}.$$

On a alors

$$B_n \subset B(x, \alpha) \subset U_{i_0}$$

ce qui est impossible car B_n ne peut être recouverte par aucune sous-famille finie de la famille $(U_i)_{i \in I}$. On a ainsi montré que (β) entraîne (α) .

1.16 Soient A et B deux parties connexes d'un espace métrique E , vérifiant $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, où \overline{A} désigne l'adhérence de A . Montrer que $A \cup B$ est une partie connexe de E .

Solution Soient U et V deux ouverts de $A \cup B$ tels que

$$A \cup B = U \cup V \quad \text{et} \quad U \cap V = \emptyset.$$

Soit x un élément de $A \cap B$; cet élément appartient à l'un des deux ouverts par exemple U . Alors U est un voisinage de x et $U \cap A \neq \emptyset$. Les parties $U \cap A$ et $V \cap A$ sont deux ouverts de A tels que

$$(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset \quad \text{et} \quad A = (U \cap A) \cup (V \cap A).$$

Comme A est connexe, et $U \cap A \neq \emptyset$ on a nécessairement

$$U \cap A = A \quad \text{et} \quad V \cap A = \emptyset$$

c'est-à-dire $U \supset A$ et $V \subset B$. Mais alors V et $U \cap B$ sont deux ouverts de B tels que

$$B = V \cup (U \cap B) \quad \text{et} \quad V \cap (U \cap B) = \emptyset.$$

Comme $U \cap B$ n'est pas vide, et B est connexe, on a nécessairement $V = \emptyset$ et $U = A \cup B$, ce qui prouve que $A \cup B$ est une partie connexe de E .

1.17 Soient X et Y deux espaces métriques connexes non vides, Z un espace métrique et f une application de $X \times Y$ dans Z . Si x est un élément de X , on désigne par f_x l'application de Y dans Z définie pour tout élément y de Y par $f_x(y) = f(x, y)$. Si y est un élément de Y , on désigne par f_y l'application de X dans Z définie pour tout élément x de X par $f_y(x) = f(x, y)$.

Soient (C_1) et (C_2) les conditions suivantes :

(C_1) Pour tout élément x de X la fonction f_x est continue sur Y .

(C_2) Il existe un élément y_0 de Y tel que la fonction f_{y_0} soit continue sur X .

1° Montrer que si les conditions (C_1) et (C_2) sont satisfaites, $f(X \times Y)$ est une partie connexe de Z .

2° Montrer au moyen d'un exemple qu'il n'est pas nécessaire que les conditions (C_1) , (C_2) soient satisfaites pour que $f(X \times Y)$ soit connexe dans Z .

3° Montrer au moyen d'un exemple que la condition (C_1) n'est pas suffisante pour que $f(X \times Y)$ soit connexe dans Z .

Solution

1° Supposons que f vérifie les conditions C_1 et C_2 . Posons pour tout élément x de X

$$A_x = f_x(Y) \cup f_{y_0}(X).$$

Comme pour tout élément x de X , la fonction f_x est continue, $f_x(Y)$ est une partie connexe de Z (cf. C. E., Ch. 1, § III, n° 13). La fonction f_{y_0} est continue, donc $f_{y_0}(X)$ est aussi une partie connexe de Z . Pour tout élément x de X on a

$$f(x, y_0) \in f_x(Y) \cap f_{y_0}(X)$$

par suite A_x est la réunion de deux parties connexes dont l'intersection est non vide ; on sait (cf. C. E., Ch. 1, § III, n° 12) que dans ce cas A_x est une partie connexe de Z . Comme

$$f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} f_x(Y)$$

on a *a fortiori*

$$f(X \times Y) = \bigcup_{x \in X} A_x.$$

Mais $f_{y_0}(X) \subset \bigcap_{x \in X} A_x$, donc $(A_x)_{x \in X}$ est une famille de parties connexes dont l'intersection est non vide. Alors $f(X \times Y)$ qui est leur réunion est une partie connexe de Z .

2° Posons $X = Y = Z = [0, 1]$. Soit f la fonction définie pour tout élément (x, y) de $X \times Y$ par

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1] \\ f(x, y) = y & \text{si } x \in (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Si x est rationnel, la fonction f_x est la fonction constante de valeur 0 et si x est irrationnel f_x est l'identité de $[0, 1]$; donc pour tout élément x de $[0, 1]$, f_x est une fonction continue. Par contre pour tout y de $[0, 1]$, f_y n'est pas continue. La fonction f ne vérifie pas (C_2) , pourtant $f(X \times Y) = [0, 1]$ est une partie connexe de $[0, 1]$.

La condition « (C_1) et (C_2) » n'est donc pas nécessaire pour que $f(X \times Y)$ soit connexe.

3° Posons $X = Y = Z = [0, 1]$. Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $X \times Y$ par

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1] \\ f(x, y) = 1 & \text{si } x \in (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Pour tout élément x de X , f_x est une fonction constante donc continue sur Y . La condition (C_1) est vérifiée ; on a $f(X \times Y) = \{0, 1\}$ et $f(X \times Y)$ n'est pas connexe dans $[0, 1]$. Par suite (C_1) n'est pas une condition suffisante pour que $f(X \times Y)$ soit connexe dans Z .

1.18

On dit qu'un espace métrique E est *connexe par arcs* si et seulement si pour tout couple (x, y) d'éléments de E il existe une fonction continue f de $[0, 1]$ dans E telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

1° Montrer qu'un espace connexe par arcs est un espace connexe.

2° Considérons les parties suivantes de \mathbb{R}^2 muni de la métrique habituelle :

$$A = \{ (x, y) \mid x = 0 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \},$$

$$B = \left\{ (x, y) \mid x > 0 \text{ et } y = \sin \frac{1}{x} \right\}.$$

Montrer que $C = A \cup B$ est une partie connexe de \mathbb{R}^2 qui n'est pas connexe par arcs.

3° Soit U un ouvert de l'espace métrique \mathbb{R}^n . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(α) U est une partie connexe par arcs.

(β) U est une partie connexe.

Solution

1° Soit E un espace connexe par arcs. Supposons qu'il existe deux ouverts non vides A et B tels que

$$E = A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Soient a un élément de A et b un élément de B . Il existe une fonction continue de $[0, 1]$ dans E telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Posons $\Gamma = f([0, 1])$. Les parties $\Gamma \cap A$ et $\Gamma \cap B$ sont deux ouverts non vides de Γ tels que

$$\Gamma = (\Gamma \cap A) \cup (\Gamma \cap B) \quad \text{et} \quad (\Gamma \cap A) \cap (\Gamma \cap B) = \emptyset.$$

Mais ceci est impossible car f étant continue et $[0, 1]$ étant une partie connexe de \mathbb{R} , la partie $\Gamma = f([0, 1])$ est une partie connexe de E (cf. C. E., Ch. I § III, n° 13). L'hypothèse faite est donc fautive et E est un espace connexe.

2° Remarquons d'abord que l'adhérence \bar{B} de B contient A . En effet si $(0, y)$ est un élément de A , il existe un nombre réel strictement positif z tel que $y = \sin z$ et on a

$$(0, y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{z + 2k\pi}, \sin(z + 2k\pi) \right)$$

par suite $(0, y)$ est limite d'une suite de points de B . Alors $\bar{B} \cap A = \emptyset$ et d'après l'exercice 1.16 on déduit que $A \cup B$ est connexe.

Pour montrer que C n'est pas connexe par arcs, nous prouverons par l'absurde qu'il n'existe aucune fonction continue f de $[0, 1]$ dans C telle que

$$f(0) = (0, a) \quad \text{et} \quad f(1) = \left(b, \sin \frac{1}{b}\right)$$

où $(0, a)$ est un élément de A et $(b, \sin 1/b)$ un élément de B .

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans C définie pour tout nombre réel t de $[0, 1]$ par $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ et telle que

$$f(0) = (0, a) \quad \text{et} \quad f(1) = \left(b, \sin \frac{1}{b}\right).$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont donc des fonctions continues qui vérifient pour tout réel t de $[0, 1]$

$$f_1(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(f_1(t) \neq 0 \quad \text{et} \quad f_2(t) = \sin \frac{1}{f_1(t)}\right).$$

Comme $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = b$ avec $b > 0$, il existe des éléments t de $[0, 1]$ tels que $f_1(t) > 0$. Soit α la borne inférieure de l'ensemble des éléments t de $[0, 1]$ tels que $f_1(t) > 0$. La fonction f_1 étant continue on a $\alpha < b$ et $f_1(\alpha) = 0$. On a donc pour tout t strictement supérieur à α

$$f(t) = \left(f_1(t), \sin \frac{1}{f_1(t)}\right).$$

La fonction f étant continue on a

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^+} f(t) = (0, f_2(\alpha))$$

mais ceci est impossible car $\sin(1/x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0_+ et par suite $\sin(1/f_1(t))$ ne peut en avoir quand t tend vers α_+ .

La fonction f n'est donc pas continue et C n'est pas connexe par arcs.

3° D'après 1° on sait que (α) entraîne (β) . Montrons la réciproque. Soit U un ouvert connexe de \mathbb{R}^n et x un élément de U . Soit V l'ensemble des points y de U pour lesquels il existe une fonction continue f de $[0, 1]$ dans U telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$. Il est clair que V est non vide puisque $x \in V$. Montrons d'abord que V est un ouvert de U . Soit y un point de V . Comme U est ouvert, il existe un nombre réel strictement positif r tel que la boule ouverte $B(y, r)$ de centre y et de rayon r soit contenue dans U . Soient z un élément de $B(y, r)$, f une fonction continue de $[0, 1]$ dans U telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$, et \bar{f} la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\begin{cases} \bar{f}(t) = f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{f}(t) = y + 2(t - \frac{1}{2})(z - y) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

La fonction \bar{f} est une application continue de $[0, 1]$ dans U telle que

$$\bar{f}(0) = x \quad \text{et} \quad \bar{f}(1) = z,$$

donc $z \in V$ et $B(y, r) \subset V$, ce qui prouve que V est un ouvert dans U .

Montrons que $U - V$ est aussi un ouvert dans U . Soient ω un élément de $U - V$ et r un nombre strictement positif tel que la boule ouverte $B(\omega, r)$ de centre ω et de rayon r soit contenue dans U . S'il existait un élément v de V tel que v appartienne à $B(\omega, r)$ on démontrerait comme précédemment que ω est dans V , ce qui n'est pas. Par suite $B(\omega, r) \subset U - V$ et $U - V$ est ouvert dans U . Les ouverts U et $U - V$ vérifient alors

$$U = V \cup (U - V) \quad \text{et} \quad V \cap (U - V) = \emptyset.$$

Comme U est connexe et V non vide on a nécessairement

$$V = U \quad \text{et} \quad U - V = \emptyset$$

ce qui prouve que U est connexe par arcs.

APPLICATIONS DE \mathbb{R}^n DANS \mathbb{R}^p

2.1 1° Soit f la fonction réelle définie sur l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ par

$$f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin y.$$

Déterminer si elle admet une limite au point $(0, 0)$ et la calculer le cas échéant.

2° Mêmes questions pour la fonction réelle g définie sur l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$$

par

$$g(x, y) = \frac{1 + x + y}{x^2 - y^2}.$$

Solution 1° Nous avons

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 + y^2) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin y}{y} = 1;$$

par suite la fonction f admet une limite au point $(0, 0)$ et on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1.$$

2° La restriction g_2 de g à l'ensemble $\{0\} \times \mathbf{R}^*$ est définie par

$$g_2(0, y) = \frac{1 + y}{-y^2}$$

donc

$$\lim_{y \rightarrow 0} g_2(0, y) = -\infty.$$

La restriction g_1 de g à l'ensemble $\mathbf{R}^* \times \{0\}$ est définie par

$$g_1(x, 0) = \frac{1 + x}{x^2}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_1(x, 0) = +\infty.$$

Les applications partielles g_1 et g_2 n'ayant pas la même limite au point $(0, 0)$, la fonction g n'admet pas de limite en ce point.

2.2

Soit f l'application de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} définie pour chaque élément (x, y) de \mathbf{R}^2 par

$$f(x, y) = \frac{|y|}{x^2} \exp\left(\frac{-|y|}{x^2}\right) \quad \text{si } x \neq 0$$

et

$$f(x, y) = 0 \quad \text{si } x = 0.$$

1° Soient λ un nombre réel et φ_λ la restriction de f à l'ensemble des couples (x, y) de \mathbf{R}^2 tels que $y = \lambda x$. Calculer la limite de φ_λ au point $(0, 0)$.

2° Soit ψ la restriction de f à la partie de \mathbf{R}^2 formée des couples (x, y) tels que $y = x^2$. Trouver la limite de la fonction ψ au point $(0, 0)$.

Solution 1° Nous avons

$$\varphi_\lambda(x, y) = f(x, \lambda x) = \frac{|\lambda x|}{x^2} \exp\left(\frac{-|\lambda x|}{x^2}\right)$$

pour $x \neq 0$. Si $\lambda = 0$, nous avons :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi_0(x, y) = 0$$

et si $\lambda \neq 0$, comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\lambda x|}{x^2} = +\infty$, on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\lambda x|}{x^2} \exp\left(-\frac{|\lambda x|}{x^2}\right) = 0.$$

Nous avons donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi_\lambda(x, y) = 0$ pour tout nombre réel λ .

2° Nous avons $\psi(x, y) = f(x, x^2) = e^{-1}$ pour $x \neq 0$ donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \psi(x, y) = e^{-1}$$

Comme les restrictions φ_λ et ψ de f possèdent des limites différentes au point $(0, 0)$, la fonction f n'admet pas de limite en ce point.

2.3

Etudier la continuité au point $(0, 0)$ des fonctions de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} définies pour chaque élément (x, y) de \mathbf{R}^2 par

$$1^\circ f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

$$2^\circ g(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } g(0, 0) = 0$$

$$3^\circ h(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } h(0, 0) = 0.$$

Solution

1° Nous avons

$$f(x, y) = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Considérons la restriction de f à l'ensemble des éléments (x, y) de \mathbf{R}^2 tels que $x = y$. Nous avons

$$f(x, x) = 1 + \frac{2x^2}{2x^2}$$

si $x \neq 0$ et par suite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 2$. Considérons maintenant la restriction de f à l'ensemble $\{0\} \times \mathbf{R}$. Comme $f(0, y) = 1$ si $y \neq 0$, nous avons

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 1.$$

La fonction f n'admet donc pas de limite au point $(0, 0)$ et n'est pas continue en ce point.

2° Nous avons

$$g(x, y) = (x + y) \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Nous allons démontrer que la fonction φ définie sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2}$$

est bornée. Si $x = 0$ et $y \neq 0$, nous avons $\varphi(0, y) = 1$. Si $x \neq 0$, en posant $y = \lambda_x x$, il vient

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 + \lambda_x^2 x^2 - \lambda_x x^2}{x^2 + \lambda_x^2 x^2}$$

d'où

$$\varphi(x, y) = \frac{\lambda_x^2 - \lambda_x + 1}{1 + \lambda_x^2}.$$

Soit ψ la fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définie pour chaque élément λ de \mathbf{R} par

$$\psi(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{1 + \lambda^2};$$

nous avons

$$\psi(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

d'où

$$\psi'(\lambda) = -\frac{1 - \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2}.$$

Étudions les variations de la fonction ψ ; on a

λ	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
ψ'		$+$	0	$-$	0	$+$	
ψ	1	\nearrow	$\frac{3}{2}$	\searrow	$\frac{1}{2}$	\nearrow	1

Par suite pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ on a

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{3}{2} < 2;$$

la fonction ψ est bornée.

APPLICATIONS DE \mathbf{R}^n DANS \mathbf{R}^p

Nous avons donc

$$|g(x, y) - g(0, 0)| = |g(x, y)| \leq 2|x + y| \leq 2(|x| + |y|).$$

Soit ε un nombre réel strictement positif, alors si

$$|x| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad |y| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{on a} \quad |g(x, y) - g(0, 0)| < \varepsilon$$

ce qui démontre que la fonction g est continue au point $(0, 0)$.

3° Nous avons $|h(x, y)| \leq x^2 + y^2$. Soit ε un nombre réel strictement positif, alors si $|x| < \sqrt{\varepsilon/2}$ et $|y| < \sqrt{\varepsilon/2}$, nous avons $|h(x, y)| < \varepsilon$, ce qui prouve que la fonction h est continue au point $(0, 0)$.

2.4

Peut-on prolonger par continuité au point $(0, 0)$ la fonction f définie sur l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 0\}$ par

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{y}.$$

Solution

Soit u un nombre réel strictement positif, d'après la formule de TAYLOR avec reste de LAGRANGE il existe un nombre réel θ tel que $0 < \theta < u$ et

$$\cos u - 1 = u(-\sin 0) + \frac{u^2}{2}(-\cos \theta) = -\frac{u^2}{2} \cos \theta.$$

Nous avons donc

$$|1 - \cos u| \leq \frac{u^2}{2} \leq u^2.$$

Pour tout couple (x, y) de l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 0\}$, nous avons donc

$$\frac{|1 - \cos \sqrt{xy}|}{|y|} \leq |x|.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif, alors si $|x| < \varepsilon$ et $|y| < \varepsilon$, nous avons $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ ce qui démontre que la fonction f peut être prolongée par continuité au point $(0, 0)$ en posant

$$f(0, 0) = 0.$$

2.5 Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

1° Soit ρ un nombre réel strictement positif. Montrer que la fonction f est bornée sur l'ensemble

$$C_\rho = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \rho^2\}.$$

2° Soient M et m les fonctions de \mathbf{R}_+^* dans \mathbf{R} définies pour chaque élément ρ de \mathbf{R}_+^* par

$$M(\rho) = \sup_{x^2+y^2=\rho^2} f(x, y) \quad \text{et} \quad m(\rho) = \inf_{x^2+y^2=\rho^2} f(x, y).$$

Démontrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction f au point $(0, 0)$ si et seulement si les fonctions M et m admettent des limites égales au point 0.

Solution 1° L'ensemble C_ρ est une partie compacte de \mathbf{R}^2 ; en effet cette partie est bornée et d'autre part si on note N_1 la norme euclidienne de \mathbf{R}^2 , C_ρ est l'image réciproque par l'application N_1 du sous-espace fermé $\{\rho\}$ de \mathbf{R} , donc C_ρ est une partie fermée de \mathbf{R}^2 . Par suite la restriction de la fonction f à l'ensemble C_ρ est une fonction bornée.

2° Supposons f prolongeable par continuité au point $(0, 0)$ et notons $f(0, 0)$ sa valeur en ce point. Munissons l'espace \mathbf{R}^2 de la norme euclidienne N_1 . Alors puisque f est continue au point $(0, 0)$, pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe un nombre réel ρ_1 tel que pour tout élément (x, y) de \mathbf{R}^2 vérifiant $N_1(x, y) < \rho_1$ nous ayons

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite si $x^2 + y^2 < \rho_1^2$, nous avons

$$f(0, 0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x, y) < f(0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit ρ un nombre réel tel que $\rho < \rho_1$, alors pour tout couple (x, y) de \mathbf{R}^2 tel que $x^2 + y^2 = \rho^2$, nous avons

$$f(0, 0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x, y) < f(0, 0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où

$$f(0, 0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq m(\rho) \leq M(\rho) \leq \frac{\varepsilon}{2} + f(0, 0)$$

et par suite

$$|M(\rho) - f(0, 0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |m(\rho) - f(0, 0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe un nombre réel ρ_1 tel que pour tout nombre réel ρ vérifiant $\rho < \rho_1$, nous avons

$$|M(\rho) - f(0, 0)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |m(\rho) - f(0, 0)| < \varepsilon,$$

ce qui démontre que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} M(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} m(\rho) = f(0, 0).$$

Réciproquement supposons que les fonctions M et m possèdent des limites égales en 0 et posons $l = \lim_{\rho \rightarrow 0} M(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} m(\rho)$. Soit ε un nombre réel strictement positif, alors il existe un nombre réel strictement positif η_1 (resp η_2) tel que pour tout nombre réel ρ vérifiant $0 < \rho < \eta_1$ (resp. $0 < \rho < \eta_2$), nous avons $|M(\rho) - l| < \varepsilon$ (resp $|m(\rho) - l| < \varepsilon$). Posons $\eta = \text{Inf}(\eta_1, \eta_2)$ et soit (x, y) un élément de \mathbf{R}^2 tel que $N_1(x, y) < \eta$, alors si ρ_1 vérifie

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2,$$

nous avons $\rho_1 < \eta$, d'où les inégalités

$$l - \varepsilon < m(\rho) \leq f(x, y) \leq M(\rho) < l + \varepsilon$$

par suite $|f(x, y) - l| < \varepsilon$, ce qui démontre que la fonction f peut être prolongée par continuité au point $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = l$.

2.6

Soit f une fonction continue de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . On considère l'application φ de $\mathbf{R}^2 - \mathbf{R} \times \{0\}$ dans \mathbf{R} définie par

$$\varphi(x, y) = (x + y)f\left(\frac{x}{y}\right).$$

1° Démontrer que l'application φ est continue sur $\mathbf{R}^2 - \mathbf{R} \times \{0\}$.

2° Démontrer que l'application φ peut être prolongée par continuité à \mathbf{R}^2 tout entier si et seulement si

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = l,$$

où l est un nombre réel.

Solution 1° Les applications de $\mathbf{R}^2 - \mathbf{R} \times \{0\}$ dans \mathbf{R} définies par

$$(x, y) \mapsto \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto x + y$$

sont continues, donc d'après les théorèmes sur le produit et la composée de fonctions continues, la fonction $(x, y) \mapsto (x + y)f(x/y)$ est continue.

2° Supposons que l'application φ soit prolongée par continuité à \mathbf{R}^2 par une fonction que l'on notera encore φ ; alors φ est continue au point $(1, 0)$ donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \varphi(x, y) = \varphi(1, 0).$$

Mais

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \varphi(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x + y) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f\left(\frac{x}{y}\right)$$

d'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \varphi(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f\left(\frac{x}{y}\right)$$

et par suite

$$\lim_{(1,y) \rightarrow (1,0)} \varphi(1, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{y}\right) = \varphi(1, 0)$$

donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = \varphi(1, 0).$$

Réciproquement supposons que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = l.$$

Démontrons d'abord que φ est prolongeable par continuité au point $(0, 0)$ et pour cela démontrons que la fonction f est bornée sur \mathbf{R} . Puisque

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = l,$$

il existe un nombre réel A_1 strictement positif tel que pour tout nombre réel λ supérieur à A_1 , nous ayons $|f(\lambda) - l| < 1$. De même il existe un nombre réel A_2 strictement positif tel que pour tout nombre réel λ inférieur à $-A_2$, nous ayons $|f(\lambda) - l| < 1$. Par suite si nous posons $A = \sup(A_1, A_2)$, pour tout nombre réel λ vérifiant $|\lambda| > A$, nous avons $|f(\lambda) - l| < 1$ soit $l - 1 < f(\lambda) < l + 1$. D'autre part la fonction f étant continue sur l'intervalle borné $[-A, +A]$, est bornée sur cet intervalle et par suite la fonction f est bornée sur \mathbf{R} . Soit M un nombre réel strictement positif tel que pour tout

élément λ de \mathbf{R} , nous ayons $|f(\lambda)| \leq M$. Soit ε un nombre réel strictement positif ; alors pour tout couple (x, y) de \mathbf{R}^2 tel que

$$|x| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad |y| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

nous avons

$$|\varphi(x, y)| \leq |x + y| M < \varepsilon$$

ce qui prouve que la fonction φ est prolongeable par continuité au point $(0, 0)$ en posant $\varphi(0, 0) = 0$.

Soit x un nombre réel non nul, démontrons que φ est prolongeable par continuité au point $(x, 0)$. Calculons $\lim_{(u,v) \rightarrow (x,0)} \varphi(u, v)$. Nous avons :

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (x,0)} \varphi(u, v) = \lim_{(u,v) \rightarrow (x,0)} (u + v) \cdot \lim_{(u,v) \rightarrow (x,0)} f\left(\frac{u}{v}\right) = x \lim_{(u,v) \rightarrow (x,0)} f\left(\frac{u}{v}\right).$$

Nous allons démontrer que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (x,0)} f\left(\frac{u}{v}\right) = l.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif, on a vu qu'il existe un nombre réel A strictement positif tel que pour tout nombre réel λ vérifiant $|\lambda| > A$, nous ayons $|f(\lambda) - l| < \varepsilon$. Par suite $|u/v| > A$ implique $|f(u/v) - l| < \varepsilon$. Nous avons

$$\left| \frac{u}{v} \right| > A \quad \text{si} \quad |u - x| < \frac{|x|}{2} \quad \text{et} \quad |v| < \frac{|x|}{2A}.$$

En effet l'inégalité $|u - x| < |x|/2$ entraîne que u et x sont de même signe et que

$$\frac{|x|}{2} < |u| < \frac{3|x|}{2}.$$

Il en résulte que

$$|v| < \frac{|u|}{A} \quad \text{soit} \quad \left| \frac{u}{v} \right| > A.$$

Si

$$|u - x| < \frac{|x|}{2} \quad \text{et} \quad |v| < \frac{|x|}{2A},$$

nous avons

$$\left| f\left(\frac{u}{v}\right) - l \right| < \varepsilon$$

ce qui démontre que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (x,0)} f\left(\frac{u}{v}\right) = l$$

et par suite que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (x,0)} \varphi(u, v) = xl.$$

On voit donc que si

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = l,$$

la fonction φ définie sur \mathbf{R}^2 par

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = (x + y)f\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } (x, y) \in \mathbf{R}^2 - \mathbf{R} \times \{0\} \\ \varphi(x, 0) = lx & \text{si } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

est continue sur \mathbf{R}^2 et prolonge la fonction proposée.

2.7

Calculer les dérivées partielles et étudier la différentiabilité des fonctions réelles suivantes sur leur ensemble de définition :

- 1° la fonction f définie sur \mathbf{R}^2 par $f(x, y) = e^x \sin y$;
- 2° la fonction g définie sur \mathbf{R}^2 par $g(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-xy}$;
- 3° la fonction h définie sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par

$$h(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Solution

1° Pour chaque élément (x, y) de \mathbf{R}^2 , nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x \cos y.$$

Ces deux dérivées partielles sont des fonctions définies et continues sur \mathbf{R}^2 donc f est différentiable sur \mathbf{R}^2 (cf. C. E., Ch. 2, § IV, n° 31).

2° Pour chaque élément (x, y) de \mathbf{R}^2 , nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x e^{-xy} - y(x^2 + y^2) e^{-xy}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y e^{-xy} - x(x^2 + y^2) e^{-xy}.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, la fonction g est différentiable sur \mathbf{R}^2 .

3° Pour chaque élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ nous avons

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Les fonctions $\partial h/\partial x$ et $\partial h/\partial y$ sont continues sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$, donc la fonction h est différentiable sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

2.8

Soit α un nombre réel tel que $\alpha > \frac{1}{2}$, démontrer que la fonction réelle f définie sur \mathbf{R}^2 par $f(x, y) = |xy|^\alpha$ est différentiable au point $(0, 0)$.

Solution

Désignons par $\|(x, y)\|$ la norme euclidienne (cf. C. E., Ch. 1, § I, n° 2) d'un élément (x, y) de \mathbf{R}^2 , nous allons démontrer que la fonction f admet une différentielle nulle au point $(0, 0)$, c'est-à-dire que

$$f(x, y) = o(\|(x, y)\|).$$

Il faut donc démontrer que $|xy|^\alpha = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ autrement dit que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Comme le nombre réel $(|x| - |y|)^2$ égal à $x^2 - 2|xy| + y^2$ est positif, nous avons les inégalités

$$0 \leq |xy| \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2$$

et par suite

$$|xy|^\alpha \leq |x^2 + y^2|^\alpha.$$

Or $\alpha > \frac{1}{2}$, donc $(x^2 + y^2)^\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)^{\alpha - (1/2)}$ d'où

$$0 \leq \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq (x^2 + y^2)^{\alpha - 1/2}.$$

Mais $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{\alpha - (1/2)} = 0$ car $\alpha - \frac{1}{2} > 0$, donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

ce qui montre que la fonction f est différentiable au point $(0, 0)$ et que sa différentielle en ce point est nulle.

Remarque Si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \alpha x^{\alpha-1} y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha y^{\alpha-1} x$$

Les dérivées partielles ne sont pas continues au point $(0, 0)$.

2.9 Soit f la fonction réelle définie sur \mathbf{R}^2 par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(0, 0) = 0.$$

Démontrer que cette fonction est différentiable en tout point de \mathbf{R}^2 . Démontrer que ses dérivées partielles ne sont pas continues au point $(0, 0)$.

Solution Calculons les dérivées partielles de f en un point (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x^2 + y^2) \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x^2 + y^2) \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ces deux dérivées partielles sont continues en chaque point de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$, donc la fonction f est différentiable sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Démontrons que la fonction f est différentiable au point $(0, 0)$. Nous avons

$$f(x, 0) = x^2 \sin \frac{1}{|x|} \quad \text{et} \quad f(0, y) = y^2 \sin \frac{1}{|y|}$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{|x|} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{|y|} = 0.$$

Si la fonction f est différentiable au point $(0, 0)$, sa différentielle est nulle. Nous allons donc démontrer que $f(x, y) = o(\|(x, y)\|)$. En utilisant la norme eucli-

dienne, ceci revient à démontrer que $f(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ autrement dit que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Nous avons .

$$0 \leq \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

et

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

ce qui prouve que f admet une différentielle nulle au point $(0, 0)$.

Démontrons que les dérivées partielles ne sont pas continues au point $(0, 0)$.
Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) &= 2x \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) &= 2y \sin \frac{1}{|y|} - \frac{y}{|y|} \cos \frac{1}{|y|}. \end{aligned}$$

Mais $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0, donc $\partial f / \partial x$ n'est pas continue au point $(0, 0)$, de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ n'a pas de limite lorsque y tend vers 0 donc $\partial f / \partial y$ n'est pas continue au point $(0, 0)$.

2.10 Soit f la fonction réelle définie sur \mathbf{R}^2 par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Démontrer que cette fonction admet des dérivées partielles au point $(0, 0)$ et les calculer. La fonction f est-elle différentiable au point $(0, 0)$?

Solution Nous avons $f(x, 0) = x$ et $f(0, y) = -y$, d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 1$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = -1.$$

Si la fonction f est différentiable au point $(0, 0)$, sa différentielle est la forme linéaire df définie sur \mathbf{R}^2 par $df(u, v) = u - v$ et nous avons alors

$$f(x, y) - f(0, 0) = x - y + o(\|(x, y)\|)$$

soit

$$f(x, y) - (x - y) = o(\|(x, y)\|)$$

ce qui donne en prenant comme norme la norme euclidienne

$$\frac{xy(x - y)}{x^2 + y^2} = o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Par suite si la fonction f est différentiable au point $(0, 0)$, on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

Nous allons démontrer que ceci est faux, ce qui prouvera que la fonction f n'est pas différentiable au point 0 .

La restriction de la fonction g définie sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par

$$g(x, y) = \frac{xy(x - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

à la droite $y = -x$ prend pour valeur au point $(x, -x)$

$$g(x, -x) = \frac{-2x^3}{(2x^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{2}|x|}$$

et n'admet pas de limite quand x tend vers 0 . La fonction g n'admet donc pas de limite au point $(0, 0)$ et f ne peut être différentiable en ce point.

2.11

Nous nous proposons de démontrer qu'une application différentiable de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 est affine si et seulement si sa différentielle est indépendante du point où elle est calculée.

1° Soient a, b, c, λ des nombres réels.

a) On considère l'application de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} définie par

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + \lambda.$$

Démontrer que cette application est différentiable et calculer sa différentielle en tout point (x, y, z) de \mathbf{R}^3 .

b) Soit f une fonction différentiable de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} telle que pour tout point (x, y, z) de \mathbf{R}^3 , la différentielle de f soit définie par

$$df_{(x,y,z)}(u, v, w) = au + bv + cw .$$

Déterminer l'application f .

2^o a) Plus généralement soit M une matrice réelle carrée d'ordre 3 et X un élément de \mathbf{R}^3 . On considère l'application g de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} définie par

$$g(x, y, z) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + X .$$

Démontrer que l'application g est différentiable en tout point (x, y, z) de \mathbf{R}^3 et que sa différentielle est indépendante du point (x, y, z) .

b) Réciproquement soit g une application différentiable de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 telle que la différentielle de g au point (x, y, z) soit définie par

$$dg_{(x,y,z)}(u, v, w) = M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

où M est une matrice réelle carrée d'ordre 3. Démontrer que g est définie par

$$g(x, y, z) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + g(0, 0, 0) .$$

Solution 1^o a) Soient (x, y, z) et (u, v, w) deux éléments de \mathbf{R}^3 ; nous avons

$$f(x + u, y + v, z + w) - f(x, y, z) = au + bv + cw .$$

L'application de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} qui à chaque élément (u, v, w) de \mathbf{R}^3 associe le nombre réel $au + bv + cw$ est une application linéaire de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} , donc la fonction f est différentiable au point (x, y, z) et nous avons

$$df_{(x,y,z)}(u, v, w) = au + bv + cw .$$

b) Puisque f est différentiable, f admet des dérivées partielles en tout point et nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = a \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = b, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = c .$$

La première relation nous donne $f(x, y, z) = ax + \varphi(y, z)$ où φ est une application différentiable de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} . Nous avons alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = b$$

donc $\varphi(y, z) = by + \psi(z)$ où ψ est une application différentiable de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Nous obtenons finalement

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial \psi}{\partial z}(z) = c \quad \text{d'où} \quad \psi(z) = cz + d$$

où d est un nombre réel. Nous avons donc

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

où $d = f(0, 0, 0)$.

2° a) Soient (x, y, z) et (u, v, w) deux éléments de \mathbf{R}^3 ; puisque l'application g est affine, nous avons

$$g(x + u, y + v, z + w) - g(x, y, z) = M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

L'application de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 qui à chaque élément (u, v, w) de \mathbf{R}^3 associe $M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ est linéaire, donc l'application g est différentiable et nous avons

$$dg_{(x,y,z)}(u, v, w) = M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

La différentielle de g est donc indépendante du point (x, y, z) .

b) Puisque l'application g est une application différentiable de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 , ses trois applications coordonnées g_1, g_2, g_3 sont des applications différentiables de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} . Posons

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors

$$dg_{1(x,y,z)}(u, v, w) = a_1 u + b_1 v + c_1 w$$

$$dg_{2(x,y,z)}(u, v, w) = a_2 u + b_2 v + c_2 w$$

$$dg_{3(x,y,z)}(u, v, w) = a_3 u + b_3 v + c_3 w$$

et d'après la question 1° b), il existe des nombres réels d_1, d_2, d_3 tels que

$$g_1(x, y, z) = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1$$

$$g_2(x, y, z) = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2$$

$$g_3(x, y, z) = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3.$$

Mais

$$g(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix};$$

donc nous avons

$$g(x, y, z) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + g(0, 0, 0)$$

ce qui démontre que l'application g est une application affine.

2.12

Soit f la fonction réelle définie sur \mathbf{R}^2 par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$. Soit g la fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^2 définie par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

1° Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$ et la différentielle de $f \circ g$ au point (x, y) .

2° Calculer les matrices jacobiniennes de f et g au point (x, y) . En appliquant le théorème sur la composée de deux fonctions différentiables (cf. C. E., Ch. 2, § IV, n° 32) trouver la matrice jacobienne de $f \circ g$ au point (x, y) et retrouver ainsi le résultat du 1°.

Solution

1° Nous avons $f \circ g(x, y) = \sin(4xy)$ d'où

$$\frac{\partial}{\partial x} f \circ g(x, y) = 4y \cos(4xy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} f \circ g(x, y) = 4x \cos(4xy).$$

Nous avons donc pour tout couple (u, v) de nombres réels

$$d(f \circ g)_{(x,y)}(u, v) = (4y \cos 4xy)u + (4x \cos 4xy)v.$$

2° Nous avons

$$J(f)(x, y) = (2x \cos(x^2 - y^2) \quad - 2y \cos(x^2 - y^2))$$

$$J(g)(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous savons que $J(f)(x, y)$ (resp $J(g)(x, y)$) est la matrice relativement aux bases canoniques de \mathbf{R} et \mathbf{R}^2 de l'application linéaire qui est la différentielle au point (x, y) de la fonction f (resp. g). De plus nous savons que

$$d(f \circ g)(x, y) = df(g(x, y)) \circ dg(x, y)$$

d'où

$$J(f \circ g)(x, y) = J(f)(g(x, y)) \cdot J(g)(x, y).$$

En effectuant le produit de ces deux matrices, nous obtenons

$$\begin{aligned} J(f \circ g)(x, y) &= (2(x + y) \cos 4xy \quad - 2(x - y) \cos 4xy) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= (4y \cos 4xy \quad 4x \cos 4xy). \end{aligned}$$

Ceci montre que $J(f \circ g)(x, y)$ est la matrice d'une forme linéaire qui est la différentielle de $f \circ g$ au point (x, y) . Nous avons comme au 1^o

$$\begin{aligned} d(f \circ g)_{(x,y)}(u, v) &= J(f \circ g)(x, y) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= (4y \cos 4xy \quad 4x \cos 4xy) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= (4y \cos 4xy)u + (4x \cos 4xy)v. \end{aligned}$$

2.13

1^o Démontrer que l'application f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2 z)$$

est différentiable en tout point (x, y, z) de \mathbb{R}^3 . Ecrire la matrice par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R}^2 de la différentielle de f au point (x, y, z) de \mathbb{R}^3 .

2^o Mêmes questions pour l'application g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$g(u, v) = (u^2 + v, uv, e^v).$$

3^o Calculer la matrice jacobienne de $g \circ f$ au point (x, y, z) de \mathbb{R}^3

a) directement en explicitant la fonction $g \circ f$,

b) en appliquant le théorème sur la composée des différentielles (cf. C. E., Ch. 2, § IV, n^o 32).

Solution

1^o Il est clair que les dérivées partielles de chacune des fonctions coordonnées de f sont définies et continues sur \mathbb{R}^3 . La fonction f est donc différentiable. Sa différentielle $df_{(x,y,z)}$ au point (x, y, z) est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 dont la matrice par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 est la matrice jacobienne $J(f)(x, y, z)$. Nous avons

$$J(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2 z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix}.$$

2° Nous voyons comme précédemment que la fonction g est différentiable sur \mathbf{R}^2 et nous avons

$$J(g)(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

3° a) On a

$$(g \circ f)(x, y, z) = ((x + y^2)^2 + xy^2 z, xy^2 z(x + y^2), e^{xy^2 z})$$

d'où

$$J(g \circ f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(x + y^2) + y^2 z & 4y(x + y^2) + 2xyz & xy^2 \\ xy^2 z + y^2 z(x + y^2) & 2xyz(x + y^2) + 2xy^3 z & xy^2(x + y^2) \\ y^2 z e^{xy^2 z} & 2xyz e^{xy^2 z} & xy^2 e^{xy^2 z} \end{pmatrix}.$$

b) Nous savons que pour tout élément (x, y, z) de \mathbf{R}^3 on a

$$d(g \circ f)_{(x,y,z)} = dg_{(f(x,y,z))} \circ df_{(x,y,z)}$$

donc $J(g \circ f)(x, y, z) = J(g)(f(x, y, z)) \cdot J(f)(x, y, z)$. En effectuant le produit de ces deux matrices nous obtenons

$$J(g \circ f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(x + y^2) & 1 \\ xy^2 z & x^2 + y^2 \\ 0 & e^{xy^2 z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2 z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x + y^2) + y^2 z & 4y(x + y^2) + 2xyz & xy^2 \\ xy^2 z + y^2 z(x + y^2) & 2xy^3 z + 2xyz(x + y^2) & xy^2(x + y^2) \\ y^2 z e^{xy^2 z} & 2xyz e^{xy^2 z} & xy^2 e^{xy^2 z} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc le résultat de a).

2.14

Soit g une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^n définie pour tout élément (x_1, \dots, x_p) de \mathbf{R}^p par

$$g(x_1, \dots, x_p) = [g_1(x_1, \dots, x_p), \dots, g_n(x_1, \dots, x_p)]$$

où g_1, \dots, g_n sont des fonctions de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R} . On suppose g_i différentiable au point (a_1, \dots, a_p) de \mathbf{R}^p , pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$.

Soit f une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} différentiable au point

$$g(a_1, \dots, a_p) = (b_1, \dots, b_n).$$

On pose $F = f \circ g$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_p)$ pour $1 \leq i \leq p$, en fonction des dérivées partielles des fonctions f et g_j ($1 \leq j \leq n$).

Solution La différentielle au point (a_1, \dots, a_p) de la fonction g est une application linéaire de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^n dont la matrice par rapport aux bases canoniques de \mathbf{R}^p et \mathbf{R}^n est la matrice jacobienne $J(g)$ de g . Si i désigne l'indice de ligne et j l'indice de colonne nous avons

$$J(g)(a_1, \dots, a_p) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

La différentielle au point (b_1, \dots, b_n) de la fonction f est la forme linéaire sur \mathbf{R}^n dont la matrice uniligne par rapport aux bases canoniques de \mathbf{R}^n et \mathbf{R} est

$$J(f)(b_1, \dots, b_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}(b_1, \dots, b_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}(b_1, \dots, b_n) \right).$$

Nous avons

$$J(f \circ g)(a_1, \dots, a_p) = J(f)(g(a_1, \dots, a_p)) \cdot J(g)(a_1, \dots, a_p).$$

Le produit de ces deux matrices est une matrice uniligne, dont le terme situé dans la k -ième colonne est $\frac{\partial F}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_p)$. Nous avons donc

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j}(g(a_1, \dots, a_p)) \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_p).$$

2.15

Cet exercice utilise les résultats de l'exercice précédent.

1° Soit $g = (g_1, g_2)$ la fonction de $\mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ dans \mathbf{R}^2 définie par

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Soient (r_0, θ_0) un élément de $\mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ et f une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} différentiable au point $(x_0, y_0) = g(r_0, \theta_0)$. On pose $F = f \circ g$. Calculer

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0), \frac{\partial F}{\partial \theta}(r_0, \theta_0)$$

en fonction de $r_0, \theta_0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$;

puis calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

en fonction de $\frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0), \frac{\partial F}{\partial \theta}(r_0, \theta_0), r_0$ et θ_0 .

2° Soit $h = (h_1, h_2, h_3)$ la fonction de $\mathbf{R}_+^* \times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ dans \mathbf{R}^3 définie par

$$h(r, \theta, \varphi) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi).$$

Soient $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ un élément de $\mathbf{R}_+^* \times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ et k une fonction de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} différentiable au point $(x_0, y_0, z_0) = h(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. On pose $G = k \circ h$. Calculer

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0), \frac{\partial G}{\partial \theta}(r_0, \theta_0, \varphi_0), \frac{\partial G}{\partial \varphi}(r_0, \theta_0, \varphi_0)$$

en fonction de $r_0, \theta_0, \varphi_0, \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial k}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

Puis calculer

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial k}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

en fonction de $r_0, \theta_0, \varphi_0, \frac{\partial G}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0), \frac{\partial G}{\partial \theta}(r_0, \theta_0, \varphi_0), \frac{\partial G}{\partial \varphi}(r_0, \theta_0, \varphi_0)$.

Solution 1° Nous avons (cf. exercice 2.14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) \frac{\partial g_1}{\partial r}(r_0, \theta_0) + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) \frac{\partial g_2}{\partial r}(r_0, \theta_0) \\ &= \cos \theta_0 \frac{\partial f}{\partial x}(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) + \sin \theta_0 \frac{\partial f}{\partial y}(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) \quad (1) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = & -r_0 \sin \theta_0 \frac{\partial f}{\partial x}(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) + \\ & + r_0 \cos \theta_0 \frac{\partial f}{\partial y}(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0). \quad (2) \end{aligned}$$

Multiplions l'égalité (1) par $r_0 \cos \theta_0$ et l'égalité (2) par $-\sin \theta_0$, en ajoutant membre à membre nous obtenons

$$r_0 \cos \theta_0 \frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) - \sin \theta_0 \frac{\partial F}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = r_0 \frac{\partial f}{\partial x}(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) = \cos \theta_0 \frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) - \frac{\sin \theta_0}{r_0} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r_0, \theta_0).$$

Nous obtenons de même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) = \sin \theta_0 \frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) + \frac{\cos \theta_0}{r_0} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r_0, \theta_0).$$

2° Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0) = & \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial h_1}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0) + \\ & + \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial h_2}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0) + \frac{\partial k}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial h_3}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0) = & \sin \varphi_0 \cos \theta_0 \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \\ & + \sin \varphi_0 \sin \theta_0 \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \cos \varphi_0 \frac{\partial k}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Nous avons de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \theta}(r_0, \theta_0, \varphi_0) = & -r_0 \sin \varphi_0 \sin \theta_0 \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \\ & + r_0 \sin \varphi_0 \cos \theta_0 \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \varphi}(r_0, \theta_0, \varphi_0) = & r_0 \cos \varphi_0 \cos \theta_0 \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \\ & + r_0 \cos \varphi_0 \sin \theta_0 \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - r_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial k}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Par des combinaisons linéaires de ces égalités nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial G}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0) - \frac{\sin \theta_0}{r_0 \sin \varphi_0} \frac{\partial G}{\partial \theta}(r_0, \theta_0, \varphi_0) \\ &\quad + \frac{\cos \theta_0 \cos \varphi_0}{r_0} \frac{\partial G}{\partial \varphi}(r_0, \theta_0, \varphi_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \frac{\partial G}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0) + \frac{\cos \theta_0}{r_0 \sin \varphi_0} \frac{\partial G}{\partial \theta}(r_0, \theta_0, \varphi_0) + \\ &\quad + \frac{\sin \theta_0 \cos \varphi_0}{r_0} \frac{\partial G}{\partial \varphi}(r_0, \theta_0, \varphi_0). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial k}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \cos \varphi_0 \frac{\partial G}{\partial r}(r_0, \theta_0, \varphi_0) - \frac{\sin \varphi_0}{r_0} \frac{\partial G}{\partial \varphi}(r_0, \theta_0, \varphi_0).$$

2.16 1° Soit f_1 la fonction réelle définie sur

$$D_1 = \mathbf{R}^2 - \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0 \} \quad \text{par} \quad f_1(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Calculer en chaque point (x, y) de D_1 ,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}(x, y), \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y).$$

2° Même question pour la fonction réelle f_2 définie sur

$$D_2 = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \quad \text{par} \quad f_2(x, y) = y \operatorname{Log} x.$$

3° Même question pour la fonction réelle f_3 définie sur

$$D_3 = \mathbf{R}^2 \quad \text{par} \quad f_3(x, y) = e^y \cos x.$$

4° Même question pour la fonction réelle f_4 définie sur

$$D_4 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \quad \text{par} \quad f_4(x, y) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

5° Même question pour la fonction réelle f_5 définie sur

$$D_5 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \quad \text{par} \quad f_5(x, y) = y^x.$$

Solution 1° Si (x, y) appartient à D_1 , on trouve

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-4y}{(x+y)^3}; \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4x}{(x+y)^3}.$$

2° Si (x, y) appartient à D_2 , on trouve

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

3° Si (x, y) appartient à D_3 , on trouve

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x, y) = -e^y \cos x; \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}(x, y) = -e^y \sin x$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(x, y) = e^y \cos x.$$

4° Si (x, y) appartient à D_4 , on trouve

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f_4}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

5° Si (x, y) appartient à D_5 , on trouve

$$\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}(x, y) = (\text{Log } y)^2 e^{x \text{Log } y},$$

$$\frac{\partial^2 f_5}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f_5}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{y} e^{x \text{Log } y} + \frac{x}{y} (\text{Log } y) e^{x \text{Log } y};$$

$$\frac{\partial^2 f_5}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{x}{y^2} e^{x \text{Log } y} + \frac{x^2}{y^2} e^{x \text{Log } y}.$$

2.17

Soit f une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définie, deux fois continûment dérivable sur \mathbf{R} . On suppose que la dérivée seconde f'' de f ne s'annule pas. Soit g une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} admettant en chaque point de \mathbf{R}^2 des dérivées partielles d'ordre deux. On suppose que g est harmonique, autrement dit que pour chaque élément (x, y) de \mathbf{R}^2 on a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Démontrer que la fonction $F = f \circ g$ est harmonique si et seulement si la fonction g est une fonction constante.

Solution En chaque point (x, y) de \mathbf{R}^2 nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'[g(x, y)] \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'[g(x, y)] \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''[g(x, y)] \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right)^2 + f'(g(x, y)) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = f''[g(x, y)] \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right)^2 + f'(g(x, y)) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y).$$

Comme g est harmonique on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = f''[g(x, y)] \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right].$$

La fonction F sera harmonique si et seulement si pour chaque élément (x, y) de \mathbf{R}^2 on a

$$f''(g(x, y)) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right] = 0.$$

Comme f'' ne s'annule pas, F sera harmonique si et seulement si pour chaque élément (x, y) de \mathbf{R}^2 on a

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2 = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Si la fonction g est constante, la condition (1) est satisfaite et F est harmonique. Réciproquement supposons la condition (1) satisfaite ; alors comme $\partial g/\partial x = 0$, pour chaque élément (x, y) de \mathbf{R}^2 on a $g(x, y) = a + \varphi(y)$ où a est un nombre réel et φ une application différentiable de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Nous avons alors

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \varphi'(y) = 0,$$

donc φ est constante ; par suite la fonction g est constante.

2.18 1° Montrer que la fonction f_1 définie sur $(\mathbf{R}^3)^*$ par

$$f_1(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

est harmonique (cf. exercice 2.17).

2° Même question pour la fonction f_2 définie sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ par

$$f_2(x, y) = \text{Arc tg } \frac{y}{x}.$$

3° Même question pour la fonction réelle f_3 définie sur $(\mathbf{R}^2)^*$ par

$$f_3(x, y) = \text{Log } \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4° Même question pour la fonction réelle f_4 définie sur \mathbf{R}^2 par

$$f_4(x, y) = e^x \cos y.$$

Solution 1° En chaque point (x, y, z) de $(\mathbf{R}^3)^*$ on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y, z) = \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

donc

$$\Delta f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0.$$

2° En chaque point (x, y) de $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, on a

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

donc

$$\Delta f_2 = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 0.$$

3° En chaque point (x, y) de $(\mathbf{R}^2)^*$ on a

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

donc

$$\Delta f_3 = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} = 0.$$

4° En chaque point (x, y) de \mathbf{R}^2 on a

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \quad \frac{\partial f_4}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cos y \quad \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \cos y$$

donc

$$\Delta f_4 = \frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} = 0.$$

2.19

Soit f une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} admettant des dérivées partielles d'ordre deux. Soit g la fonction de $\mathbf{R}_+ \times [0, 2\pi[$ dans \mathbf{R}^2 définie en posant pour chaque élément (r, θ) de $\mathbf{R}_+ \times [0, 2\pi[$

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

On pose $F = f \circ g$. Calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r, \theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r, \theta))$$

en fonction de r, θ et des dérivées partielles de F .

Solution

Nous avons vu (cf. exercice 2.15) que pour chaque élément (r, θ) de

$$\mathbf{R}_+ \times [0, 2\pi[$$

on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta)) = \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(g(r, \theta)) = \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta).$$

Par suite il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r, \theta)) &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta)) \right] - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(r, \theta)) \right] = \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\cos \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \right] - \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\cos \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \right] \end{aligned}$$

d'où après calcul et simplification

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r, \theta)) &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) + \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta). \end{aligned}$$

Un calcul analogue nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r, \theta)) &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) + \\ &+ \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r, \theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r, \theta)) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

2.20

Soit a un nombre réel. On se propose de trouver toutes les fonctions réelles définies et différentiables sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ telles que l'on ait, pour chaque élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Soient f une fonction vérifiant la condition (1) et g la fonction de $\mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ dans \mathbf{R}^2 définie en posant pour chaque élément (r, θ) de $\mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Posons $F = f \circ g$. Montrer que pour chaque élément (r, θ) de $\mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ on a

$$F(r, \theta) = ar + \varphi(\theta)$$

où φ est une fonction différentiable de $[0, 2\pi[$ dans \mathbf{R} . En déduire toutes les solutions du problème.

Solution

Nous savons (cf. exercice 2.15) que pour chaque élément (r, θ) de $\mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta).$$

L'égalité (1) devient donc

$$r \cos \theta \left[\cos \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \right] + \\ + r \sin \theta \left[\sin \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \right] = ar$$

d'où après simplification

$$r \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = ar$$

et comme $r \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = a.$$

Il en résulte que pour chaque élément (r, θ) de $\mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ on a

$$F(r, \theta) = ar + \varphi(\theta)$$

où φ est une fonction réelle définie et différentiable sur $[0, 2\pi[$. Par suite pour chaque élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ on a

$$f(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2} + \psi(x, y)$$

où ψ est une fonction différentiable de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dans \mathbf{R} telle que $\psi \circ g$ ne dépende que de θ .

Montrons maintenant que les fonctions f ainsi définies sont les solutions du problème.

Si f est une application de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dans \mathbf{R} définie pour chaque élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2} + \psi(x, y)$$

où ψ est une application différentiable de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ dans \mathbf{R} telle que $\psi \circ g$ ne dépende que de θ , alors on a en chaque point (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)$$

de plus si $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{-\sin \theta}{r} \frac{\partial(\psi \circ g)}{\partial \theta}(r, \theta)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(\psi \circ g)}{\partial \theta}(r, \theta)$$

donc

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{ax^2 + ay^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = a \sqrt{x^2 + y^2}$$

d'où notre assertion.

2.21 1° Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x + y} \quad \text{si } x \neq -y$$

et $f(x, y) = 0$ si $x = -y$. Calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

En déduire que l'une au moins des dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

n'est pas continue au point $(0, 0)$.

2° Soit g la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$g(x, y) = xy \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{x + y}{x - y} \right) \quad \text{pour } x \neq y$$

et $g(x, y) = 0$ si $x = y$. Démontrer que la fonction g est différentiable au point $(0, 0)$. Calculer

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

En déduire que l'une au moins des dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$$

n'est pas continue au point $(0, 0)$.

Solution 1° En chaque point (x, y) de \mathbb{R}^2 tel que $x \neq -y$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x + y)^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2yx^2 + xy^2}{(x + y)^2}.$$

Par ailleurs

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0.$$

Comme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0),$$

l'une au moins des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ n'est pas continue au point $(0, 0)$ (cf. C. E., Ch. 2, § VII, n° 45).

2° Nous allons démontrer que $g(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ ce qui démontrera que la fonction g est différentiable au point $(0, 0)$ et que sa différentielle est nulle en ce point. Nous avons en chaque point (x, y) de \mathbf{R}^2

$$|g(x, y)| \leq |xy| \quad \text{d'où} \quad \frac{|g(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Nous avons vu (cf. exercice 2.8) que $|xy| \leq x^2 + y^2$ donc

$$0 \leq \frac{|g(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Mais

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|g(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

ce qui démontre que

$$g(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

En chaque point (x, y) de \mathbf{R}^2 tel que $x \neq y$, nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{x+y}{x-y} \right) - \frac{\pi xy^2}{(x-y)^2} \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{x+y}{x-y} \right)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{x+y}{x-y} \right) + \frac{\pi x^2 y}{(x-y)^2} \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{x+y}{x-y} \right).$$

de plus

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$$

donc

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \frac{\partial g}{\partial x}(0, y) = -1$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial y}(x, 0) = 1.$$

Ceci montre comme précédemment que l'une au moins des dérivées partielles

$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ n'est pas continue au point $(0, 0)$.

2.22

Soient t_0, α, a, b quatre nombres réels tels que $\alpha > 0$ et $a < b$. Soit f une fonction réelle définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times [a, b]$ qui admet en chaque point (t, x) une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$. On suppose que pour chaque élément t de $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ la fonction f_t définie sur $[a, b]$ par $f_t(x) = f(t, x)$ est intégrable sur $[a, b]$. Pour chaque élément t de $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, on pose

$$\varphi(t) = \int_a^b f(t, x) dx.$$

Démontrer que si pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe un nombre réel η strictement positif tel que pour tout élément t de $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ et tout élément x de $[a, b]$ on ait

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| < \varepsilon,$$

alors la fonction φ est dérivable au point t_0 et on a

$$\varphi'(t_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx.$$

Solution Nous allons démontrer que pour tout nombre réel h tel que $0 \leq h < \alpha$ nous avons

$$\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) - h \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx = o(h)$$

soit encore que

$$\int_a^b f(t_0 + h, x) dx - \int_a^b f(t_0, x) dx - h \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx = o(h)$$

ou que

$$\int_a^b \left[f(t_0 + h, x) - f(t_0, x) - h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right] dx = o(h).$$

Pour cela il suffit de démontrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b \left[f(t_0 + h, x) - f(t_0, x) - h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right] dx = 0.$$

En chaque point x de $[a, b]$, appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction f_x définie sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ par $f_x(t) = f(t, x)$; nous savons qu'il existe un nombre réel θ_x tel que $0 < \theta_x < 1$ et tel que

$$f(t_0 + h, x) - f(t_0, x) = h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \theta_x h, x).$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_a^b \left[f(t_0 + h, x) - f(t_0, x) - h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right] dx &= \\ &= \frac{1}{h} \int_a^b h \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \theta_x h, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \theta_x h, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right] dx. \end{aligned}$$

Or pour chaque élément x de $[a, b]$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \theta_x h, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right] dx \right| &\leq \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \theta_x h, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| dx. \end{aligned}$$

Soit ε un nombre réel strictement positif, d'après l'hypothèse faite sur $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$,

il existe un nombre réel η strictement positif tel que pour tout élément t de $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ et tout élément x de $[a, b]$ nous ayons

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Alors si $|h| < \eta$, nous avons $|\theta_x h| < \eta$ d'où

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \theta_x h, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

pour tout élément x de $[a, b]$; par suite

$$\int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \theta_x h, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| dx < (b - a) \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon.$$

Ainsi pour tout nombre réel strictement positif, il existe un nombre réel η strictement positif tel que pour tout nombre réel h vérifiant $|h| < \eta$, nous ayons

$$\left| \frac{1}{h} \int_a^b \left[f(t_0 + h, x) - f(t_0, x) - h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right] dx \right| < \varepsilon$$

ce qui démontre que

$$\int_a^b \left[f(t_0 + h, x) - f(t_0, x) - h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right] dx = o(h)$$

d'où

$$\varphi'(t_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx.$$

2.23 Soit f la fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} définie par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Déterminer les extremums de f .

Solution En chaque point (x, y) de \mathbf{R}^2 nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)$$

donc la fonction f est différentiable sur \mathbf{R}^2 , par suite en tout point (x, y) où f admet un extremum nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Déterminons tous les points (x, y) de \mathbf{R}^2 possédant cette propriété. Le couple (x, y) doit vérifier les relations

$$x^3 = x - y \quad \text{et} \quad y^3 = -(x - y).$$

Un calcul simple donne trois valeurs possibles pour le couple (x, y) à savoir

$$(x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (x_3, y_3) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Étudions si f admet un extremum au point $(0, 0)$. En chaque point (x, y) de \mathbf{R}^2 , nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 4.$$

Par suite si h et k sont voisins de 0, $f(h, k) - f(0, 0)$ est du signe de l'expression $-4h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(h+k)^2$. Cette expression est négative, donc la fonction f admet un maximum au point $(0, 0)$.

Au point $(x_2, y_2) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) &= 20, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4. \end{aligned}$$

Par suite si h et k sont voisins de 0, $f(x_2 + h, y_2 + k) - f(x_2, y_2)$ est du signe de l'expression $20h^2 + 8hk + 20k^2$. Mais

$$20h^2 + 8hk + 20k^2 = 4(5h^2 + 2hk + 5k^2)$$

et il est simple de vérifier que pour tout couple (h, k) de \mathbf{R}^2

$$5h^2 + 2hk + 5k^2 \geq 0.$$

En effet, si $h = 0$, l'inégalité est vraie et si $h \neq 0$, on pose $\lambda = k/h$ et comme le trinôme $5\lambda^2 + 2\lambda + 5$ est toujours positif, nous avons l'inégalité précédente. La fonction f admet donc un minimum au point (x_2, y_2) .

Par les mêmes calculs, on démontre aussi que la fonction f admet un minimum au point (x_3, y_3) .

2.24

Soient φ et ψ deux fonctions réelles, définies et continues au voisinage respectivement des nombres réels x_0 et y_0 . Soit g une fonction réelle définie sur un voisinage du point $(\varphi(x_0), \psi(y_0))$ de \mathbf{R}^2 , et admettant un extremum en ce point. Soit f la fonction réelle définie sur un voisinage de (x_0, y_0) par

$$f(x, y) = g(\varphi(x), \psi(y)).$$

Démontrer que la fonction f admet un extremum au point (x_0, y_0) .

APPLICATION. Démontrer que la fonction réelle f , définie sur \mathbf{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + (y^3 - y)^2$ admet un minimum au point $(0, 0)$. Déterminer les autres extremums de cette fonction.

Solution

Nous allons utiliser dans cet exercice la norme de \mathbf{R}^2 définie par

$$\| (u, v) \| = \sup (|u|, |v|).$$

Supposons que la fonction g admette un maximum M au point $(\varphi(x_0), \psi(y_0))$ alors il existe un nombre réel ρ strictement positif tel que pour tout élément (u, v) de \mathbf{R}^2 vérifiant $\| (u - \varphi(x_0), v - \psi(y_0)) \| < \rho$, nous ayons $g(u, v) \leq M$. La fonction φ (resp. ψ) étant continue au point x_0 (resp. y_0), il existe un nombre réel α_1 (resp. α_2) strictement positif tel que pour tout nombre réel x (resp. y) vérifiant $|x - x_0| < \alpha_1$ (resp. $|y - y_0| < \alpha_2$), nous ayons

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho \text{ (resp. } |\psi(y) - \psi(y_0)| < \rho).$$

Posons $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$, alors pour tout élément (x, y) de \mathbf{R}^2 vérifiant

$$\| (x - x_0, y - y_0) \| < \alpha,$$

nous avons $|x - x_0| < \alpha_1$ et $|y - y_0| < \alpha_2$ donc $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho$ et $|\psi(y) - \psi(y_0)| < \rho$ soit

$$\| (\varphi(x) - \varphi(x_0), \psi(y) - \psi(y_0)) \| < \rho$$

d'où $g(\varphi(x), \psi(y)) \leq M$, ce qui démontre que la fonction f admet un maximum au point (x_0, y_0) . Nous démontrerions de même que si g admet un minimum au point $(\varphi(x_0), \psi(y_0))$ alors la fonction f admet un minimum au point (x_0, y_0) .

APPLICATION. Posons $\varphi(x) = x$, $\psi(y) = y^3 - y$ et $g(u, v) = u^2 + v^2$, alors $f(x, y) = g(\varphi(x), \psi(y))$. Les fonctions φ et ψ sont continues au point 0. Comme pour tout élément (u, v) de \mathbf{R}^2 on a $g(u, v) \geq 0$ et $g(0, 0) = 0$, la fonction g admet un minimum au point $(0, 0)$. D'après ce qui précède la fonction f admet donc un minimum au point $(0, 0)$.

Cherchons les autres extremums de la fonction f . Puisque la fonction f est

différentiable sur \mathbf{R}^2 , les seuls points (x, y) de \mathbf{R}^2 où f peut admettre un extremum doivent vérifier les conditions

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

En chaque point (x, y) de \mathbf{R}^2 , nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(3y^2 - 1)(y^3 - y).$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

aux points $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$ de \mathbf{R}^2 .

En chaque point (x, y) de \mathbf{R}^2 nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2(y^2 - 1) + 2(3y^2 - 1)^2$$

Par suite

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2,$$

et f admet un minimum au point $(0, 0)$ comme nous l'avons déjà vu.

Étudions f au voisinage du point $(0, 1/\sqrt{3})$. Nous savons que

$$f\left(h, \frac{1}{\sqrt{3}} + k\right) - f\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

est du même signe que l'expression

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)k^2.$$

Il suffit donc, au voisinage du point $(0, 1/\sqrt{3})$, d'étudier le signe de la forme quadratique q définie par $q(h, k) = 2h^2 - \frac{8}{3}k^2$. Cette forme n'a pas un signe constant au voisinage de $(0, 0)$, donc la fonction f n'admet pas d'extremum au

point $(0, 1/\sqrt{3})$. On démontre de même qu'elle n'admet pas d'extremum au point $(0, -1/\sqrt{3})$.

Étudions f au voisinage du point $(0, 1)$. Nous savons que $f(h, 1+k) - f(0, 1)$ est du même signe que l'expression

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 1) k^2.$$

Au voisinage du point $(0, 1)$, nous devons donc étudier la forme quadratique q' définie par $q'(h, k) = 2h^2 + 8k^2$. Cette forme quadratique est toujours positive donc la fonction f admet un minimum au point $(0, 1)$. Nous démontrons de même que f admet un minimum au point $(0, -1)$.

2.25 Soit f la fonction de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} définie par

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y.$$

Déterminer les extremums de f .

Solution La fonction f est différentiable sur \mathbf{R}^3 , par suite en tout point (x, y, z) de \mathbf{R}^3 où f admet un extremum, nous devons avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

Cherchons tous les points de \mathbf{R}^3 vérifiant ces relations. En un tel point on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = x + yz = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz + 1 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy - 1 = 0. \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) nous donnent $x \neq 0$ et $y = -z$ d'où $x - y^2 = 0$ et $-xy + 1 = 0$. On en déduit que $x = y^2$ et $xz = 1$, d'où $y^3 = 1$. Par suite le seul point (x, y, z) de \mathbf{R}^3 où les trois dérivées partielles premières sont nulles est le point $(1, 1, -1)$. Calculons les dérivées partielles secondes de f . En chaque point (x, y, z) de \mathbf{R}^3 nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = y.$$

Au voisinage du point $(0, 0, 0)$ la différence

$$f(1 + a, 1 + b, -1 + c) - f(1, 1, -1)$$

aura le même signe que l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1, -1) a^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1, -1) b^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1, 1, -1) c^2 + \\ & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1, -1) ab + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1, 1, -1) bc + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(1, 1, -1) ca. \end{aligned}$$

Il suffit donc d'étudier au voisinage du point $(0, 0, 0)$ la forme quadratique qui à (a, b, c) fait correspondre $a^2 - 2ab + 2bc + 2ca$. Décomposons cette forme quadratique. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + 2bc + 2ca &= a^2 + 2a(c - b) + 2bc \\ &= (a + c - b)^2 - (c - b)^2 + 2bc \\ &= (a + c - b)^2 - b^2 - c^2 + 4bc \\ &= (a + c - b)^2 - (b - 2c)^2 + 3c^2. \end{aligned}$$

Cette forme quadratique n'a pas un signe constant au voisinage de $(0, 0, 0)$ donc la fonction f n'admet pas d'extremum au point $(1, 1, -1)$.

2.26

1° Soit f la fonction réelle définie sur

$$\mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\} \quad \text{par} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x + y}.$$

Démontrer que cette fonction est homogène ; quel est son degré ? En chaque point (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$ calculer

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

et

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

en fonction de $f(x, y)$.

2° Plus généralement soit g une fonction réelle définie sur une partie D de \mathbf{R}^n , homogène de degré $p - 1$ où p est un entier supérieur ou égal à 1. Démontrer que si g admet des dérivées partielles d'ordre p continues, on a la relation

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_p} \frac{\partial^p g}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}} = 0.$$

Solution 1° Pour chaque nombre réel non nul α et chaque élément (x, y) de

$$\mathbf{R}^2 - \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0 \}$$

nous avons $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$ par suite la fonction f est homogène de degré 1. Il résulte donc du théorème d'Euler (cf. C. E., Ch. 2, § X, n° 56) que pour chaque élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0 \}$ on a

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

Calculons les dérivées partielles secondes de f . En chaque point (x, y) du domaine de définition de f on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2}{(x + y)^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{(x + y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-2y^2}{(x + y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{2xy}{(x + y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-2x^2}{(x + y)^3}.$$

Nous retrouvons la relation

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

De plus nous avons

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

2° Puisque la fonction g est homogène de degré $p - 1$, nous avons pour tout nombre réel non nul α et tout élément (x_1, \dots, x_n) de D

$$g(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^{p-1} g(x_1, \dots, x_n). \tag{1}$$

La fonction g admettant des dérivées partielles d'ordre p continues nous allons dériver p fois par rapport à α la relation (1) et plus précisément nous allons établir par récurrence la formule

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n x_{i_1} \cdots x_{i_k} \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) &= \\ &= (p-1)(p-2) \dots (p-k) \alpha^{p-k-1} g(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2)$$

En dérivant par rapport à α la relation (1) nous obtenons

$$\sum_{i_1=1}^n x_{i_1} \frac{\partial g}{\partial x_{i_1}} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = (p-1) \alpha^{p-2} g(x_1, \dots, x_n).$$

La relation (2) est donc vraie pour $k=1$. Supposons-la établie pour l'entier k , alors nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n x_{i_1} \cdots x_{i_k} \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) &= \\ &= (p-1) \dots (p-k) \alpha^{p-k-1} g(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Dérivons cette relation par rapport à α , nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n x_{i_1} \cdots x_{i_k} \left(\sum_{i_{k+1}=1}^n x_{i_{k+1}} \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \right) &= \\ &= (p-1)(p-2) \dots (p-k)(p-k-1) \alpha^{p-k-2} g(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

car les dérivées partielles d'ordre $k+1$ sont continues. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \sum_{i_{k+1}=1}^n x_{i_1} \cdots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) &= \\ &= (p-1) \dots (p-k)(p-k-1) \alpha^{p-k-2} g(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

et la formule (2) est établie par récurrence. Pour $k=p$, le second membre de cette formule est nul. Dans le premier, en posant $\alpha=1$, nous obtenons le résultat cherché c'est-à-dire

$$\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n x_{i_1} \cdots x_{i_p} \frac{\partial^p g}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}} = 0.$$

2.27 Soit F une fonction de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^2 définie par

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z))$$

où f et g sont des fonctions différentiables de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} . Soit (x_0, y_0, z_0) un point de \mathbf{R}^3 tel que $F(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. On suppose que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

est non nul.

1° Démontrer qu'il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 et deux fonctions réelles φ et ψ définies et dérivables sur $V(x_0)$, telles que $\varphi(x_0) = y_0$, $\psi(x_0) = z_0$ et $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$ pour tout élément x de $V(x_0)$.

2° Calculer $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ en fonction des dérivées partielles de F pour tout élément x de $V(x_0)$.

Solution 1° Les hypothèses du théorème des fonctions implicites (cf. C. E., Ch. 2, § XI, n° 59) sont satisfaites au point (x_0, y_0, z_0) , donc il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 et des fonctions φ et ψ vérifiant les conditions de l'énoncé.

2° Nous avons pour tout élément x de $V(x_0)$

$$f(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \quad \text{et} \quad g(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0.$$

Dérivons par rapport à x , les deux membres de chacune de ces égalités. Nous obtenons en posant $(\varphi(x), \psi(x)) = (Y, Z)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, Y, Z) + \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, Y, Z) + \psi'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, Y, Z) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, Y, Z) + \varphi'(x) \frac{\partial g}{\partial y}(x, Y, Z) + \psi'(x) \frac{\partial g}{\partial z}(x, Y, Z) = 0.$$

Nous devons donc résoudre le système suivant en $\varphi'(x), \psi'(x)$:

$$\begin{cases} \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, Y, Z) + \psi'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, Y, Z) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, Y, Z) \\ \varphi'(x) \frac{\partial g}{\partial y}(x, Y, Z) + \psi'(x) \frac{\partial g}{\partial z}(x, Y, Z) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, Y, Z). \end{cases}$$

Nous savons d'après le théorème des fonctions implicites que pour tout élément x de $V(x_0)$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \frac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)) & \frac{\partial g}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \end{vmatrix}$$

est non nul. Le système précédent admet donc une solution unique

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(x, Y, Z) \frac{\partial g}{\partial x}(x, Y, Z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, Y, Z) \frac{\partial g}{\partial z}(x, Y, Z)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, Y, Z) \frac{\partial g}{\partial z}(x, Y, Z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x, Y, Z) \frac{\partial g}{\partial y}(x, Y, Z)}$$

$$\psi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, Y, Z) \frac{\partial g}{\partial y}(x, Y, Z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, Y, Z) \frac{\partial g}{\partial x}(x, Y, Z)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, Y, Z) \frac{\partial g}{\partial z}(x, Y, Z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x, Y, Z) \frac{\partial g}{\partial y}(x, Y, Z)}.$$

2.28

Soit F la fonction de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^2 définie par

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

1° Calculer en chaque point (x, y, z) de \mathbf{R}^3 la matrice jacobienne de la fonction F . Soit (x_0, y_0, z_0) un élément de \mathbf{R}^3 tel que $F(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$, démontrer qu'il existe une fonction φ (resp ψ) définie sur un voisinage $V(x_0)$ (resp $W(z_0)$) de x_0 (resp z_0), à valeurs dans \mathbf{R}^2 , telle que

$$\varphi(x_0) = (y_0, z_0) \quad (\text{resp } \psi(z_0) = (x_0, y_0))$$

et telle que pour tout élément x de $V(x_0)$ (resp z de $W(z_0)$), on ait

$$F(x, \varphi(x)) = (0, 0) \quad (\text{resp } F(\psi(z), z) = (0, 0)).$$

2° Expliciter les fonctions φ et ψ .

Solution

1° Pour chaque élément (x, y, z) de \mathbf{R}^3 , posons

$$F_1(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 1 \quad \text{et} \quad F_2(x, y, z) = xyz - 1.$$

La matrice jacobienne de F au point (x, y, z) de \mathbb{R}^3 est

$$J(F)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}.$$

Comme $F(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$ nous avons $x_0 y_0 z_0 = 1$ d'où $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ et $z_0 \neq 0$, par suite au point (x_0, y_0, z_0) le jacobien

$$\frac{DF}{D(y, z)}(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} -2y_0 & 2x_0 \\ z_0 x_0 & x_0 y_0 \end{vmatrix} = -2x_0(y_0^2 + z_0^2)$$

est non nul. D'après le théorème des fonctions implicites (cf. C. E., Ch. 2, § XI, n° 59), il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 et une fonction φ de $V(x_0)$ dans \mathbb{R}^2 tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et tels que pour tout élément x de $V(x_0)$ nous ayons $F(x, \varphi(x)) = (0, 0)$. Le jacobien

$$\frac{DF}{D(x, y)}(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ y_0 z_0 & z_0 x_0 \end{vmatrix} = 2z_0(x_0^2 + y_0^2)$$

est non nul donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage $W(z_0)$ de z_0 et une fonction ψ de $W(z_0)$ dans \mathbb{R}^2 tels que

$$\psi(z_0) = (x_0, y_0)$$

et tels que pour tout élément z de $W(z_0)$ nous ayons $F(\psi(z), z) = 0$.

2° Soit x un élément de $V(x_0)$, nous avons alors $F(x, \varphi(x)) = 0$ soit en posant $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $x^2 - (\varphi_1(x))^2 + (\varphi_2(x))^2 = 1$ et $x\varphi_1(x) \varphi_2(x) = 1$ donc x est non nul, $\varphi_1(x) \varphi_2(x) = 1/x$ et $(\varphi_2(x))^2 - (\varphi_1(x))^2 = 1 - x^2$. La première relation entraîne $(\varphi_1(x))^2 (\varphi_2(x))^2 = 1/x^2$, donc $-(\varphi_1(x))^2$ et $(\varphi_2(x))^2$ sont deux nombres réels racines de l'équation du second degré

$$u^2 - (1 - x^2)u - \frac{1}{x^2} = 0$$

d'où

$$\varphi_1^2(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)^2 + (4/x^2)} - (1-x^2)}{2}$$

$$\varphi_2^2(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)^2 + (4/x^2)} + (1-x^2)}{2}.$$

On peut supposer $V(x_0)$ connexe. D'après ce qui a été vu plus haut $V(x_0)$ ne contient pas 0, donc x garde un signe constant en parcourant $V(x_0)$.

Si $x_0 > 0$, pour chaque élément x de $V(x_0)$ on a

$$\varphi_1(x) \varphi_2(x) > 0$$

donc on obtient les solutions

$$\varphi_1(x) = \varepsilon \frac{\sqrt{\sqrt{(1-x^2)^2 + (4/x^2)} - (1-x^2)}}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi_2(x) = \varepsilon \frac{\sqrt{\sqrt{(1-x^2)^2 + (4/x^2)} + (1-x^2)}}{\sqrt{2}}$$

avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Si $x_0 < 0$, on obtient les solutions

$$\varphi_1(x) = \varepsilon \frac{\sqrt{\sqrt{(1-x^2)^2 + (4/x^2)} - (1-x^2)}}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi_2(x) = -\varepsilon \frac{\sqrt{\sqrt{(1-x^2)^2 + (4/x^2)} + (1-x^2)}}{\sqrt{2}}$$

avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Posons $\psi(z) = (\psi_1(z), \psi_2(z))$ pour chaque élément z de $W(z_0)$. En écrivant que $F(\psi(z), z) = (0, 0)$ pour tout élément z de $W(z_0)$ on voit que ψ_1 et ψ_2 vérifient les mêmes équations que φ_1, φ_2 donc en supposant $W(z_0)$ connexe, on obtient

$$\psi_1(z) = \varepsilon \frac{\sqrt{\sqrt{(1-z^2)^2 + (4/z^2)} - (1-z^2)}}{\sqrt{2}}$$

$$\psi_2(z) = \varepsilon \frac{\sqrt{\sqrt{(1-z^2)^2 + (4/z^2)} + (1-z^2)}}{\sqrt{2}}$$

avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, si $z_0 > 0$ et

$$\psi_1(z) = \varepsilon \frac{\sqrt{\sqrt{(1-z^2)^2 + (4/z^2)} - (1-z^2)}}{\sqrt{2}}$$

$$\psi_2(z) = -\varepsilon \frac{\sqrt{\sqrt{(1-z^2)^2 + (4/z^2)} + (1-z^2)}}{\sqrt{2}}$$

avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, si $z_0 < 0$.

CALCUL DIFFÉRENTIEL EXTÉRIEUR

3.1 Soient E un espace vectoriel de dimension n sur le corps \mathbf{R} , p un entier naturel tel que $0 < p < n$ et f_1, \dots, f_p des formes linéaires sur E . Montrer que ces formes sont linéairement dépendantes si et seulement si

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p = 0.$$

Solution Supposons que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ soit une famille liée. Alors, l'une des formes linéaires s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire des autres ; supposons que ce soit f_p ; en ce cas il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que

$$f_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f_i.$$

Par suite on a

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f_1 \wedge \dots \wedge f_{p-1} \wedge f_i.$$

Comme f_i est de degré 1, on a $f_i \wedge f_i = 0$ pour $1 \leq i \leq p$ et par suite

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_i \wedge \dots \wedge f_{p-1} \wedge f_i = 0,$$

d'où le résultat.

Réciproquement supposons que $f_1 \wedge \dots \wedge f_p = 0$. Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E^* , on peut écrire pour $1 \leq i \leq p$,

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j.$$

Comme $f_1 \wedge \dots \wedge f_p = 0$, on a aussi $f_1 \wedge \dots \wedge f_p \wedge \varepsilon_{p+1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_n = 0$. Or (cf. C. E., Ch. 3, § I, n° 65)

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_p \wedge \varepsilon_{p+1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{p,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & & a_{p,p} & 0 & & \vdots \\ a_{1,p+1} & & a_{p,p+1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{1,n} & \dots & a_{p,n} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{p,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & & a_{p,p} \end{vmatrix} = 0.$$

Mais on sait que si le déterminant des p premières coordonnées de p vecteurs est nul, alors ces vecteurs sont linéairement dépendants (cf. Q, Ch. 9, § II, n° 174).

3.2

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur \mathbf{R} , et p un entier tel que $0 < p < n$. Soient f_1, \dots, f_p des formes linéaires sur E indépendantes et g_1, \dots, g_p des formes linéaires sur E telles que

$$\sum_{i=1}^p f_i \wedge g_i = 0.$$

Montrer qu'il existe des nombres réels A_{ij} ($1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p$) tels que pour $1 \leq i \leq p$ on ait

$$g_i = \sum_{j=1}^p A_{ij} f_j$$

et $A_{ij} = A_{ji}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p$.

Solution Les formes f_1, \dots, f_p étant indépendantes, il existe des formes linéaires f_{p+1}, \dots, f_n telles que la famille $(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$ soit une base de E^* . Alors il existe des nombres réels A_{ij} ($1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$) tels que pour $1 \leq i \leq p$ on ait

$$g_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} f_j.$$

En tenant compte du fait que

$$f_i \wedge g_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} f_i \wedge f_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_{ij} f_i \wedge f_j$$

la condition de l'énoncé devient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^p f_i \wedge g_i = \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_{ij} f_i \wedge f_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq p} (A_{ij} - A_{ji}) f_i \wedge f_j + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ p+1 \leq j \leq n}} A_{ij} f_i \wedge f_j. \end{aligned}$$

On sait (cf. C. E., Ch. 3, § I, n° 65) que la famille $(f_i \wedge f_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de l'espace des formes bilinéaires, antisymétriques. Cette famille est donc libre et de la relation précédente on déduit que

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ji} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq p, \quad i \neq j \\ A_{ij} &= 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p, \quad p+1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

et que les formes g_i ($1 \leq i \leq p$) s'écrivent bien sous la forme indiquée dans l'énoncé.

3.3

Soient ω une forme multilinéaire antisymétrique sur un espace vectoriel réel et r un entier strictement positif. Nous noterons ω^r le produit extérieur

$$\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega \quad (r \text{ fois}).$$

1° Montrer que si le degré de ω est impair, alors $\omega^2 = 0$.

2° On suppose que $\omega = \alpha \wedge \beta$ où α est une forme multilinéaire de degré impair et β une forme multilinéaire quelconque. Montrer que $\omega^2 = 0$.

3° Calculer le carré de la forme $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ sur \mathbb{R}^4 .

4° Soient λ une forme linéaire, μ une forme multilinéaire de degré pair, γ une forme multilinéaire et p un entier naturel. Calculer $(\mu + \lambda \wedge \gamma)^p$.

5° Soient k un entier strictement positif, $\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}$ des formes linéaires et

$$\omega_k = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4 + \dots + \alpha_{2k-1} \wedge \alpha_{2k}.$$

Calculer $(\omega_k)^k$ et $(\omega_k)^{k+1}$.

Solution 1° Soit p le degré de ω . On a

$$\omega^2 = \omega \wedge \omega = (-1)^{p^2} \omega \wedge \omega.$$

Comme p est impair, $(-1)^{p^2} = -1$ et

$$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$$

d'où $\omega^2 = 0$.

2° Soient p le degré de α et q le degré de β . On a

$$\omega^2 = \omega \wedge \omega = \alpha \wedge \beta \wedge \alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \wedge \alpha \wedge \beta.$$

Mais on sait que $\alpha \wedge \alpha = 0$, par suite $\omega^2 = 0$.

3° On a

$$\begin{aligned} (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)^2 &= \\ &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \\ &\quad + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= 2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

car

$$(dx_1 \wedge dx_2)^2 = 0, \quad (dx_3 \wedge dx_4)^2 = 0$$

et

$$(dx_3 \wedge dx_4) \wedge (dx_1 \wedge dx_2) = (-1)^4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

4° Remarquons que la forme multilinéaire de degré pair μ commute par rapport au produit extérieur avec n'importe quelle forme multilinéaire. Comme le produit extérieur est distributif par rapport à l'addition, on peut appliquer à ce cas particulier la formule du binôme. On a

$$(\mu + \lambda \wedge \gamma)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k \mu^k \wedge (\lambda \wedge \gamma)^{p-k}.$$

Mais d'après 2° toutes les puissances supérieures à 2 de $\lambda \wedge \gamma$ sont nulles et par suite

$$(\mu + \lambda \wedge \gamma)^p = \mu^p + p\mu^{p-1} \wedge \lambda \wedge \gamma.$$

5° Calculons $(\omega_k)^k$ et $(\omega_k)^{k+1}$ par récurrence. Pour $k = 1$, on a

$$\omega_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \quad \text{et} \quad (\omega_1)^2 = 0.$$

Pour $k = 2$, un calcul analogue à celui de la question 3° montre que

$$(\omega_2)^2 = 2 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \quad \text{et que} \quad (\omega_2)^3 = 0.$$

Supposons que pour $k \leq n - 1$, on ait

$$(\omega_k)^k = (k!) \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{2k} \quad \text{et} \quad (\omega_k)^{k+1} = 0.$$

On a alors $\omega_n = \omega_{n-1} + \alpha_{2n-1} \wedge \alpha_{2n}$, où ω_{n-1} est une forme de degré 2. D'après la question 4° on obtient

$$\begin{aligned} (\omega_n)^n &= (\omega_{n-1})^n + n(\omega_{n-1})^{n-1} \wedge \alpha_{2n-1} \wedge \alpha_{2n} \\ &= 0 + n(n-1)! \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{2n-2} \wedge \alpha_{2n-1} \wedge \alpha_{2n} \\ &= n! \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{2n} \end{aligned}$$

et

$$(\omega_n)^{n+1} = n! \omega_n \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{2n} = 0.$$

Nous avons donc montré par récurrence que pour tout entier k strictement positif

$$(\omega_k)^k = k! \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{2k} \quad \text{et} \quad (\omega_k)^{k+1} = 0.$$

3.4

Calculer la différentielle extérieure des formes définies par :

$$\omega_{(x,y)}^1 = 2xy \, dx + x^2 \, dy$$

$$\omega_{(x,y,z)}^2 = x^2 z \, dy \wedge dz + y^2 z \, dz \wedge dx - xy^2 \, dx \wedge dy$$

$$\omega_{(x,y,z)}^3 = 2xz \, dy \wedge dz + 2yz \, dz \wedge dx - (x^2 - y^2) \, dx \wedge dy.$$

Solution On a

$$\begin{aligned} d\omega_{(x,y)}^1 &= d(2xy) \wedge dx + d(x^2) \wedge dy \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \, dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}(x^2) \, dx \wedge dy \\ &= 2x \, dy \wedge dx + 2x \, dx \wedge dy \\ &= (2x - 2x) \, dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} d\omega_{(x,y,z)}^2 &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z) \, dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 z) \, dy \wedge dz \wedge dx - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 y) \, dz \wedge dx \wedge dy \\ &= (2xz + 2yz) \, dx \wedge dy \wedge dz = 2z(x+y) \, dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Enfin on obtient :

$$\begin{aligned} d\omega_{(x,y,z)}^3 &= \frac{\partial}{\partial x}(2xz) \, dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial}{\partial y}(2yz) \, dy \wedge dz \wedge dx - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y^2) \, dz \wedge dx \wedge dy \\ &= 4z \, dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

3.5

Soit D le domaine de \mathbb{R}^2 défini par $x > 0$ et $y > 0$ et soit ω la forme différentielle définie sur D par

$$\omega_{(x,y)} = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}.$$

1° Calculer $d\omega$.

2° Existe-t-il une fonction f définie sur D telle que $df = \omega$? Si oui déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette égalité.

Solution

1° On a

$$\begin{aligned} d\omega_{(x,y)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy \wedge dx \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy + \frac{y^2 + x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

2° La forme ω étant fermée, le théorème de POINCARÉ (cf. C. E., Ch. 3, § II, n° 68) montre qu'il existe des fonctions définies sur D dont la différentielle est ω . Si f est une telle fonction elle vérifie la relation :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \omega.$$

On a donc

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

De la seconde égalité on déduit que

$$f(x, y) = \text{Arc tg } \frac{y}{x} + \varphi(x)$$

où φ est une fonction continûment dérivable sur \mathbb{R}_+^* . La première égalité devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2} \frac{1}{1 + (y^2/x^2)} + \varphi'(x) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

par suite $\varphi'(x) = 0$ et φ est une fonction constante. Les fonctions recherchées sont donc de la forme

$$f(x, y) = \text{Arc tg} \left(\frac{y}{x} \right) + k$$

où k est un nombre réel.

3.6 Mêmes questions qu'à l'exercice 3.5 pour la forme différentielle ω définie sur le domaine $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$\omega_{(x,y)} = \frac{x \, dy - y \, dx}{xy}.$$

Solution 1° On a

$$\omega_{(x,y)} = \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}$$

donc

$$d\omega_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \right) dx \wedge dy - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \right) dy \wedge dx = 0.$$

2° La forme ω étant fermée, il existe au moins une fonction f définie sur le pavé D de \mathbb{R}^2 telle que $df = \omega$ (cf. C. E., Ch. 3, § II, n° 68). Une telle fonction vérifie

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \omega$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y}. \end{cases}$$

De la première égalité on déduit que

$$f(x, y) = -\text{Log} |x| + \varphi(y)$$

où φ est une fonction continûment dérivable sur \mathbb{R}_+^* . La deuxième égalité devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi'(y) = \frac{1}{y}$$

donc $\varphi(y) = \text{Log} |y| + N$ où N est un nombre réel. Les fonctions vérifiant $df = \omega$ sont donc les fonctions définies sur D par

$$f(x, y) = \text{Log} \left| \frac{ky}{x} \right|$$

où k est un nombre réel non nul.

3.7 On considère la forme différentielle ω définie sur \mathbf{R}^2 par

$$\omega_{(x,y)} = y \, dx \wedge dy .$$

1° Montrer que ω est une forme fermée.

2° Déterminer toutes les formes différentielles α définies par

$$\alpha_{(x,y)} = P(x, y) \, dx ,$$

telles que $\omega = d\alpha$.

3° Déterminer toutes les formes différentielles β définies par

$$\beta_{(x,y)} = Q(x, y) \, dy ,$$

telles que $\omega = d\beta$.

Solution 1° On a

$$d\omega_{(x,y)} = dy \wedge dx \wedge dy = 0$$

donc ω est une forme fermée.

2° La forme α doit vérifier l'égalité

$$d\alpha = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx = \omega .$$

On doit donc avoir

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -y$$

et par suite

$$P(x, y) = -\frac{y^2}{2} + \varphi(x)$$

où φ est une fonction continûment dérivable sur \mathbf{R} .

Les formes différentielles cherchées sont donc de la forme

$$\alpha_{(x,y)} = \left(-\frac{y^2}{2} + \varphi(x) \right) dx .$$

3° La forme β doit vérifier l'égalité

$$d\beta = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \omega .$$

On doit donc avoir

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = y$$

et par suite

$$Q(x, y) = xy + \psi(y)$$

où ψ est une fonction continûment dérivable sur \mathbf{R} . Les formes différentielles recherchées sont donc de la forme

$$\beta_{(x,y)} = [xy + \psi(y)] dy .$$

3.8

Soit ω la forme différentielle définie sur \mathbf{R}^3 par

$$\omega_{(x,y,z)} = x dy \wedge dz + y dx \wedge dz .$$

Trouver toutes les formes différentielles α définies par

$$\alpha(x, y, z) = P(y, z) dx + Q(x, z) dy$$

telles que $d\alpha = \omega$.

Solution

Comme $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dx \wedge dz = 0$, la forme ω est fermée et par suite exacte. Il existe donc des formes différentielles dont ω soit la différentielle extérieure. Les formes indiquées dans l'énoncé doivent vérifier

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz - \frac{\partial P}{\partial z} dx \wedge dz = \omega. \end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = -x \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -y. \end{array} \right.$$

De la deuxième égalité on déduit que

$$Q(x, z) = -xz + \varphi(z)$$

où φ est une fonction continûment dérivable sur \mathbf{R} et de la troisième égalité on déduit que

$$P(y, z) = -yz + \psi(y)$$

où ψ est une fonction continûment dérivable sur \mathbf{R} . La première égalité devient alors

$$-z + \varphi'(x) = -z + \psi'(y)$$

ce qui entraîne que φ' et ψ' sont des fonctions constantes et égales.

On a donc

$$\begin{array}{l} \varphi(x) = kx + b \\ \psi(y) = ky + a \end{array}$$

où k, a, b sont des nombres réels. Les formes cherchées sont donc de la forme

$$\alpha_{(x,y,z)} = (-yz + ky + a) dx + (-xz + kx + b) dy.$$

3.9

Soit ω la forme différentielle définie sur \mathbf{R}^3 par

$$\omega_{(x,y,z)} = (3y^2z - 3xz^2) dy \wedge dz + x^2y dz \wedge dx + (z^3 - x^2z) dx \wedge dy.$$

Trouver toutes les formes différentielles α définies par

$$\alpha_{(x,y,z)} = P(x, y, z) dx + Q(x, z) dy + R(y, z) dz$$

telles que $d\alpha = \omega$.

Solution On a

$$\begin{aligned} d\omega_{(x,y,z)} = & -3z^2 dx \wedge dy \wedge dz + x^2 dy \wedge dz \wedge dx + \\ & + (3z^2 - x^2) dz \wedge dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

donc ω est une forme exacte.

La forme α indiquée dans l'énoncé doit vérifier

$$d\alpha = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y}(y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, z) = 3y^2z - 3xz^2 \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = x^2y \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = z^3 - x^2z. \end{cases}$$

De la deuxième égalité on déduit que

$$P(x, y, z) = x^2yz + p(x, y)$$

où p est une fonction continûment différentiable sur \mathbf{R}^2 .
La troisième égalité donne alors

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, z) = z^3 - x^2z + \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = z^3 + \frac{\partial p}{\partial y}(x, y).$$

Comme $\partial Q/\partial x$ ne dépend pas de y on a

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \varphi(x)$$

où φ est une fonction continue sur \mathbf{R} et

$$p(x, y) = y\varphi(x) + k$$

où k est un nombre réel. Soit Φ une primitive de φ ; on a alors

$$Q(x, z) = xz^3 + \Phi(x)$$

et la première égalité du système devient

$$\frac{\partial R}{\partial y}(y, z) = 3y^2z - 3xz^2 + \frac{\partial Q}{\partial z}(x, z) = 3y^2z$$

d'où

$$R(y, z) = y^3z + \psi(z)$$

où ψ est une fonction continûment dérivable sur \mathbf{R} .

Les formes cherchées sont donc :

$$\alpha_{(x,y,z)} = (x^2yz + y\varphi(x) + k) dx + (xz^3 + \Phi(x)) dy + (y^3z + \psi(z)) dz$$

où φ est une fonction continue sur \mathbf{R} , Φ une de ses primitives, ψ une fonction continûment dérivable sur \mathbf{R} et k un nombre réel.

3.10 Déterminer toutes les fonctions réelles f et g continûment dérivables sur \mathbb{R} , telles que la forme ω définie sur \mathbb{R}^3 par

$$\omega_{(x,y,z)} = 2xz \, dx + f(y)g(z) \, dy + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) dz$$

soit fermée. En ce cas trouver toutes les fonctions U de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} telles que $\omega = dU$.

Solution Pour que ω soit fermée, il faut et il suffit que $d\omega = 0$. On a

$$\begin{aligned} d\omega_{(x,y,z)} &= 2x \, dz \wedge dx + f(y)g'(z) \, dz \wedge dy + 2x \, dx \wedge dz + \\ &\quad + y \, dy \wedge dz = (f(y)g'(z) - y) \, dz \wedge dy. \end{aligned}$$

Les fonctions f et g doivent donc vérifier quels que soient les nombres réels y, z la condition

$$f(y)g'(z) - y = 0.$$

On montre facilement que cette condition est satisfaite si et seulement s'il existe un nombre réel non nul k tel que g' soit la fonction constante de valeur k et f la fonction définie pour tout nombre réel y par

$$f(y) = \frac{1}{k} y.$$

Les fonctions f et g cherchées sont donc définies par

$$f(y) = \frac{1}{k} y$$

$$g(z) = kz + k'$$

où k, k' sont deux nombres réels. On a alors

$$\omega_{(x,y,z)} = 2xz \, dx + \left(yz + \frac{k'}{k} y\right) dy + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) dz.$$

Une fonction U telle que $dU = \omega$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = 2xz \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = yz + \alpha y \\ \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{2} \end{array} \right.$$

où $\alpha = k'/k$.

De la première égalité on déduit

$$U(x, y, z) = x^2 z + \varphi(y, z)$$

où φ est une fonction différentiable de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} . La deuxième égalité devient alors

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = yz + \alpha y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z)$$

d'où

$$\varphi(y, z) = \frac{y^2 z}{2} + \alpha y^2 + \psi(z)$$

où ψ est une fonction différentiable de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . La troisième égalité donne alors

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{2} = x^2 + \frac{y^2}{2} + \psi'(z)$$

d'où $\psi'(z) = 0$ et $\psi(z) = \beta$ où β est un nombre réel. On a donc finalement

$$U(x, y, z) = x^2 z + \frac{y^2 z}{2} + \alpha \frac{y^2}{2} + \beta.$$

3.11 Soient

$$U = \left\{ (r, \theta) \mid r > 0 \text{ et } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

et

$$U' = \{ (x, y) \mid x \neq 0 \text{ ou } y > 0 \}$$

deux ouverts de \mathbf{R}^2 et Φ la bijection de U sur U' définie pour tout couple (r, θ) de U par $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Soient α et β les formes différentielles définies sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par

$$\alpha_{(x,y)} = x dx + y dy$$

$$\beta_{(x,y)} = \frac{x dx - y dy}{x^2 + y^2}.$$

Déterminer $\Phi^* \alpha$ et $\Phi^* \beta$ images transposées des formes α et β par l'application Φ (cf. C. E., Ch. 3, § II, n° 69).

Solution On a

$$(\Phi^* dx)_{(r,\theta)} = d(r \cos \theta) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

$$(\Phi^* dy)_{(r,\theta)} = d(r \sin \theta) = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

Par suite

$$\begin{aligned} (\Phi^* \alpha)_{(r,\theta)} &= x(r, \theta) (\Phi^* dx)_{(r,\theta)} + y(r, \theta) (\Phi^* dy)_{(r,\theta)} \\ &= r \cos \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + r \sin \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) dr + (-r^2 \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= r dr \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\Phi^* \beta)_{(r,\theta)} &= \frac{r \cos \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) - r \sin \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) dr - 2r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \cos 2\theta dr - \sin 2\theta d\theta. \end{aligned}$$

3.12 Soient

$$U = \left\{ (r, \theta, \varphi) \mid r > 0 \text{ et } 0 < \theta < \pi \text{ et } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

et

$$U' = \{ (x, y, z) \mid x \neq 0 \text{ ou } y > 0 \}$$

deux ouverts de \mathbf{R}^3 et Φ la bijection de U sur U' définie pour tout élément (r, θ, φ) de U par

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

Soient α et β les formes différentielles définies sur U par

$$\alpha_{(x,y,z)} = x dx + y dy + z dz$$

$$\beta_{(x,y,z)} = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

1° Calculer les images transposées $\Phi^* \alpha$ et $\Phi^* \beta$ des formes α et β par l'application Φ .

2° Montrer que α et β sont deux formes fermées.

3° Trouver toutes les fonctions f, g de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} telles que $df = \alpha$ et $dg = \beta$.

Solution 1° On a

$$(\Phi^* dx)_{(r,\theta,\varphi)} = d(r \sin \theta \cos \varphi) = \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi$$

$$(\Phi^* dy)_{(r,\theta,\varphi)} = d(r \sin \theta \sin \varphi) = \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi$$

$$(\Phi^* dz)_{(r,\theta,\varphi)} = d(r \cos \theta) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta.$$

On obtient

$$\begin{aligned} (\Phi^* \alpha)_{(r,\theta,\varphi)} &= \\ &= r \sin \theta \cos \varphi (\sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi) + \\ &\quad + r \sin \theta \sin \varphi (\sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi) \\ &\quad + r \cos \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) = r dr. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\beta_{(x,y,z)} = h(x, y, z) \alpha_{(x,y,z)}$$

où h est la fonction de U' dans \mathbb{R} définie par

$$h(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

On a alors (cf. C. E., Ch. 3, § II, n° 69)

$$\begin{aligned} (\Phi^* \beta)_{(r,\theta,\varphi)} &= (\Phi^* h)(r, \theta, \varphi) \cdot (\Phi^* \alpha)_{(r,\theta,\varphi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta}} r dr \\ &= \frac{r}{r} dr = dr. \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$(\Phi^* \alpha)_{(r,\theta,\varphi)} = r dr$$

$$(\Phi^* \beta)_{(r,\theta,\varphi)} = dr.$$

2° On sait que α et β sont fermées si et seulement si $(\Phi^* \alpha)$ et $(\Phi^* \beta)$ sont fermées. Or il est évident que

$$d(\Phi^* \alpha) = d(r \, dr) = 0 \quad \text{et} \quad d(\Phi^* \beta) = d(dr) = 0.$$

3° On sait que la fonction f recherchée vérifie

$$d(\Phi^* f) = \Phi^*(df) = \Phi^* \alpha.$$

On a donc

$$d(\Phi^* f)_{(r,\theta,\varphi)} = \Phi^*(df)_{(r,\theta,\varphi)} = r \, dr$$

d'où

$$(\Phi^* f)(r, \theta, \varphi) = \frac{r^2}{2} + k$$

où k est un nombre réel et par suite

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + k.$$

De même

$$d(\Phi^* g)_{(r,\theta,\varphi)} = \Phi^*(dg)_{(r,\theta,\varphi)} = \Phi^* \beta_{(r,\theta,\varphi)} = dr$$

d'où

$$\Phi^* g(r, \theta, \varphi) = r + k'$$

où k' est un nombre réel, et par suite

$$g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + k'.$$

3.13

Soient

$$U = \{ (r, \theta, u) \mid r > 0, -\pi < \theta < \pi \}$$

et

$$U' = \{ (x, y, z) \mid (x > 0 \text{ ou } y \neq 0) \}$$

deux ouverts de \mathbf{R}^3 et Φ la bijection de U sur U' définie pour tout élément (r, θ, u) de U par $\Phi(r, \theta, u) = (r \cos \theta, r \sin \theta, u)$. Soit ω la forme différentielle définie sur U' par

$$\omega_{(x,y,z)} = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx - z \, dx \wedge dy.$$

1° Déterminer l'image transposée $\Phi^*(\omega)$ de la forme ω par l'application Φ .

2° Déterminer toutes les fonctions f de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telles que

$$d(f(u) (\Phi^* \omega))_{(r,\theta,u)} = 0$$

Solution 1° On a

$$(\Phi^* dx)_{(r,\theta,u)} = d(r \cos \theta) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

$$(\Phi^* dy)_{(r,\theta,u)} = d(r \sin \theta) = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

$$(\Phi^* dz)_{(r,\theta,u)} = du.$$

Par suite

$$\begin{aligned} (\Phi^* \omega)_{(r,\theta,u)} &= r \cos \theta [(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \wedge du] + \\ &\quad + r \sin \theta du \wedge (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ &\quad - u[(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)] \\ &= -ur dr \wedge d\theta + r^2 d\theta \wedge du. \end{aligned}$$

2° La fonction f doit vérifier

$$\begin{aligned} d(f(u) (\Phi^* \omega)_{(r,\theta,u)}) &= d(-f(u) ur dr \wedge d\theta + f(u) r^2 d\theta \wedge du) = \\ &= [-f'(u) ur - f(u) r + 2rf(u)] dr \wedge d\theta \wedge du = 0 \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$f(u) - uf'(u) = 0.$$

On en déduit

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u}$$

et par suite

$$f(u) = Ku$$

où K est un nombre réel.

3.14 Soient α un nombre réel et V_α le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ en posant

$$V_\alpha(x, y, z) = \left(\frac{x}{r^\alpha}, \frac{y}{r^\alpha}, \frac{z}{r^\alpha} \right)$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

1° Soit ω_1^α la forme de degré 1 associée à V_α . Pour quelles valeurs de α a-t-on $d\omega_1^\alpha = 0$?

2° Soit ω_2^α la forme de degré 2 associée à V_α . Pour quelles valeurs de α a-t-on $d\omega_2^\alpha = 0$?

Solution 1° On a

$$\omega_{1(x,y,z)}^\alpha = \frac{x}{r^\alpha} dx + \frac{y}{r^\alpha} dy + \frac{z}{r^\alpha} dz$$

et

$$\begin{aligned} d\omega_1^\alpha = & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{r^\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r^\alpha} \right) \right] dx \wedge dy + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r^\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{r^\alpha} \right) \right] dy \wedge dz + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{r^\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r^\alpha} \right) \right] dz \wedge dx. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^\alpha} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha/2} = -\frac{\alpha}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-(\alpha/2)-1} 2x \\ &= -\alpha x (x^2 + y^2 + z^2)^{-(\alpha-2)/2} = \frac{-\alpha x}{r^{\alpha+2}}. \end{aligned}$$

De même on a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^\alpha} \right) = \frac{-\alpha y}{r^{\alpha+2}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^\alpha} \right) = \frac{-\alpha z}{r^{\alpha+2}}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} d\omega_{1(x,y,z)}^\alpha &= \frac{-\alpha}{r^{\alpha+2}} [(xy - yx) dx \wedge dy + (yz - zy) dy \wedge dz + \\ & \quad + (xz - zx) dz \wedge dx] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $d\omega_1^\alpha(x, y, z) = 0$ pour tout nombre réel α . Le champ V_α est donc toujours un champ de gradients et il est facile de vérifier que

$$V_\alpha = \text{grad} \left(-\frac{1}{\alpha r^{\alpha-2}} \right).$$

2° Par définition

$$\omega_{2(x,y,z)}^\alpha = \frac{x}{r^\alpha} dy \wedge dz + \frac{y}{r^\alpha} dz \wedge dx + \frac{z}{r^\alpha} dx \wedge dy.$$

On a

$$d\omega_{2(x,y,z)}^\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^\alpha} \right) \right] dx \wedge dy \wedge dz.$$

Remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^\alpha} \right) = \frac{1}{r^\alpha} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^\alpha} \right) = \frac{1}{r^\alpha} - \frac{\alpha x^2}{r^{\alpha+2}} = \frac{r^2 - \alpha x^2}{r^{\alpha+2}}.$$

On obtient de même

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^\alpha} \right) = \frac{r^2 - \alpha y^2}{r^{\alpha+2}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^\alpha} \right) = \frac{r^2 - \alpha z^2}{r^{\alpha+2}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} d\omega_{2(x,y,z)}^\alpha &= \frac{3r^2 - \alpha(x^2 + y^2 + z^2)}{r^{\alpha+2}} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{r^2(3 - \alpha)}{r^{\alpha+2}} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{3 - \alpha}{r^\alpha} dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Donc la seule valeur de α pour laquelle $d\omega_2^\alpha = 0$ est $\alpha = 3$. Ceci prouve que seul le champ V_3 a une divergence nulle, donc il est le seul à admettre un potentiel vecteur. On vérifie aisément que, par exemple, le champ

$$V'(x, y, z) = \left(0, \frac{xz}{y^2 + z^2} \frac{1}{r}, -\frac{xy}{y^2 + z^2} \frac{1}{r} \right)$$

satisfait à l'égalité $V_3 = \text{rot } V'$.

3.15

L'espace \mathbb{R}^3 étant rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3) les coordonnées d'un point M de \mathbb{R}^3 sont notées (x, y, z) et on pose $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. On donne les champs V_1, V_2, D, S définis pour tout point M de $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ par

$$V_1(M) = \frac{e_3}{r}, \quad V_2(M) = z \text{ grad} \left(\frac{1}{r} \right),$$

$$D(M) = V_1(M) - V_2(M), \quad S(M) = V_1(M) + V_2(M).$$

1° Calculer en fonction de x, y, z, r les composantes de V_1, V_2, D, S .

2° Calculer les divergences des champs V_1, V_2, D, S .

3° Montrer que le champ D dérive d'un potentiel vecteur et trouver un potentiel vecteur A de D parallèle au plan d'équateur $z = 0$, prenant la valeur 0 en tout point de la droite $x = y = 0$, et tel que $\text{div } A = 0$.

4° Calculer les composantes des vecteurs $\text{rot } V_1$ et $\text{rot } V_2$.

5° Trouver une fonction f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} prenant la valeur 0 sur la droite d'équation $x = y = 0$ et telle que

$$S = \text{grad } f.$$

Solution 1° D'après l'exercice 3.14 on a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-z}{r^3}.$$

Les champs proposés ont donc les coordonnées suivantes

$$V_1(M) = \left(0, 0, \frac{1}{r} \right), \quad V_2(M) = \left(-\frac{xz}{r^3}, -\frac{yz}{r^3}, -\frac{z^2}{r^3} \right)$$

$$D(M) = \left(\frac{xz}{r^3}, \frac{yz}{r^3}, \frac{r^2 + z^2}{r^3} \right), \quad S(M) = \left(-\frac{xz}{r^3}, -\frac{yz}{r^3}, \frac{r^2 - z^2}{r^3} \right).$$

2° Rappelons que la divergence du champ $V(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ est

$$\text{div } V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

D'autre part on a vu à l'exercice 3.14 que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{r^3} \right) &= \frac{z}{r^3} + z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = \frac{z}{r^3} + \frac{zr^2 - 3z^3}{r^5} \\ &= \frac{2zr^2 - 3z^3}{r^5}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\text{div } V_1 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-z}{r^3}$$

$$\begin{aligned} \text{div } V_2 &= -\frac{zr^2 - 3x^2z + zr^2 - 3y^2z + 2zr^2 - 3z^3}{r^5} \\ &= -\frac{z(4r^2 - 3r^2)}{r^5} = -\frac{z}{r^3} \end{aligned}$$

$$\text{div } D = \text{div } V_1 - \text{div } V_2 = 0$$

$$\text{div } S = \text{div } V_1 + \text{div } V_2 = -\frac{2z}{r^3}.$$

3° Comme $\operatorname{div} D = 0$, le champ D dérive d'un potentiel vecteur. Soit

$$A(M) = (P(M), Q(M), R(M))$$

un potentiel vecteur satisfaisant aux conditions de l'énoncé. On a alors

$$R(M) = 0$$

pour tout point M de \mathbf{R}^3 et la condition $\operatorname{rot} A = D$ devient

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial Q}{\partial z}(M) = \frac{xz}{r^3} \\ \frac{\partial P}{\partial z}(M) = \frac{yz}{r^3} \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(M) = \frac{r^2 + z^2}{r^3}. \end{array} \right.$$

D'après la première question

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-z}{r^3},$$

donc de la première égalité on déduit

$$Q(M) = \frac{x}{r} + \varphi(x, y)$$

où φ est une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , continûment différentiable et telle que

$$\varphi(0, 0) = 0.$$

De même, on déduit de la deuxième égalité que

$$P(M) = \frac{-y}{r} + \psi(x, y)$$

où ψ est une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , continûment différentiable et telle que

$$\psi(0, 0) = 0.$$

La troisième égalité devient alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(M) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = \frac{r^2 + z^2}{r^3} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

La condition $\operatorname{div} A = 0$, donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Mais alors on a

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy$$

d'où, en tenant compte du fait que $\varphi(0, 0) = \psi(0, 0)$ on déduit

$$\psi(x, y) = \varphi(y, -x).$$

Le champ A est donc défini par

$$A(M) = \left(-\frac{y}{r} + \varphi(y, -x), \frac{x}{r} + \varphi(x, y), 0 \right)$$

où φ est une fonction continûment dérivable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telle que $\varphi(0, 0) = 0$.

4° On a

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} V_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (0), \frac{\partial}{\partial z} (0) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial x} (0) - \frac{\partial}{\partial y} (0) \right) \\ &= \left(\frac{-y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0 \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} V_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-z^2}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{yz}{r^3} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{xz}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-z^2}{r^3} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{yz}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{xz}{r^3} \right) \right). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{z^2}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{yz}{r^3} \right) &= z^2 \frac{3y}{r^5} + y \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} = \frac{y}{r^3} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{xz}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{z^2}{r^3} \right) &= -x \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} - z^2 \frac{x}{r^5} = -\frac{x}{r^3} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{yz}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{xz}{r^3} \right) &= yz \frac{3x}{r^5} - xz \frac{3y}{r^5} = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{rot} V_2 = \left(\frac{y}{r^3}, -\frac{x}{r^3}, 0 \right) = -\operatorname{rot} V_1.$$

5° Comme

$$\operatorname{rot} S = \operatorname{rot} V_1 + \operatorname{rot} V_2 = 0$$

le champ S est un champ de gradients. Une fonction f telle que $S = \operatorname{grad} f$ doit vérifier

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{xz}{r^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{yz}{r^3} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{r^2 - z^2}{r^3}. \end{cases}$$

De la troisième équation on déduit que

$$f(x, y, z) = \frac{z}{r} + \varphi(x, y)$$

où φ est une fonction continûment différentiable de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} . La deuxième équation devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{yz}{r^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{yz}{r^3}$$

et par suite

$$\varphi(x, y) = \psi(x) + k$$

où ψ est une fonction continûment différentiable de \mathbf{R} dans \mathbf{R} et k un nombre réel.

La première égalité devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{xz}{r^3} + \psi'(x) = -\frac{z}{r^3}$$

et par suite $\psi(x) = k'x$ où k' est un nombre réel.

On obtient donc

$$f(x, y, z) = \frac{z}{r} + K$$

où K est un nombre réel. La condition supplémentaire de l'énoncé nous permet de déterminer K . En effet pour tout réel z non nul on doit avoir

$$f(0, 0, z) = \frac{z}{z} + K = 0$$

d'où $K = -1$ et la fonction cherchée est définie par

$$f(x, y, z) = \frac{z}{r} - 1.$$

4.1 Etudier l'existence des intégrales impropres suivantes à partir de la définition et les calculer éventuellement.

$$a) \int_0^{1-0} \frac{dt}{1-t^2}.$$

$$b) \int_0^{(\pi/2)-0} \operatorname{tg} t \, dt.$$

$$c) \int_{+0}^1 \frac{\operatorname{Log} t}{(1+t)^2} dt.$$

Solution a) Soit x un nombre réel tel que $0 < x < 1$. On a

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Log} \frac{1+t}{1-t} \right]_0^x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}.$$

Comme $\operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $1-0$, l'intégrale impropre $\int_0^{1-0} \frac{dt}{1-t^2}$ n'est pas définie.

b) Soit x un nombre réel tel que $0 < x < \pi/2$. On a

$$\int_0^x \operatorname{tg} t \, dt = \int_0^x \frac{\sin t \, dt}{\cos t} = [-\operatorname{Log} \cos t]_0^x = -\operatorname{Log} \cos x.$$

Lorsque x tend vers $(\pi/2)^-0$, la limite de $\cos x$ est 0 et $\text{Log} \cos x$ tend vers $-\infty$. L'intégrale impropre $\int_0^{(\pi/2)^-0} \text{tg } t \, dt$ n'est donc pas définie.

c) Soit x un nombre réel tel que $0 < x < 1$. On a

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{\text{Log } t}{(1+t)^2} dt &= \left[\frac{-\text{Log } t}{1+t} \right]_x^1 + \int_x^1 \frac{dt}{t(1+t)} \\ &= \frac{\text{Log } x}{1+x} + [\text{Log } t - \text{Log}(1+t)]_x^1 \\ &= \frac{\text{Log } x}{1+x} + \text{Log}(1+x) - \text{Log } x - \text{Log } 2 \\ &= \frac{-x \text{Log } x}{1+x} + \text{Log}(1+x) - \text{Log } 2. \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers 0_+ , $x \text{Log } x$ tend vers 0 et par suite $\int_x^1 \frac{\text{Log } t}{(1+t)^2} dt$ tend vers $-\text{Log } 2$.

Par suite l'intégrale impropre $\int_{+0}^1 \frac{\text{Log } t}{(1+t)^2} dt$ est définie et on a

$$\int_{+0}^1 \frac{\text{Log } t}{(1+t)^2} dt = -\text{Log } 2.$$

4.2 Soit k un nombre réel, étudier l'existence des intégrales impropres suivantes

- a) $\int_{+0}^{1-0} \frac{dt}{\text{Log } t}.$
- b) $\int_{+0}^1 \frac{\text{tg } t - 1}{t^{5/2} \sin t} dt.$
- c) $\int_{+0}^{1-0} \frac{t^k - 1}{\text{Log } t} dt.$

Solution a) Par définition on a :

$$\int_{+0}^{1-0} \frac{dt}{\text{Log } t} = \int_{+0}^{1/2} \frac{dt}{\text{Log } t} + \int_{1/2}^{1-0} \frac{dt}{\text{Log } t}.$$

Lorsque t tend vers 0, $\frac{1}{\text{Log } t}$ tend vers 0 et par suite $\int_{+0}^{1/2} \frac{dt}{\text{Log } t}$ est définie (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § I, n° 144). D'autre part lorsque t tend vers 1 - 0, $\frac{\text{Log } t}{t-1}$ tend vers 1 donc l'intégrale impropre $\int_{1/2}^{1-0} \frac{dt}{\text{Log } t}$ n'est pas définie car l'intégrale $\int_{1/2}^{1-0} \frac{dt}{t-1}$ n'est pas définie (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § II, n° 150). Il en résulte que $\int_{+0}^{1-0} \frac{dt}{\text{Log } t}$ n'est pas définie.

b) Lorsque t tend vers 0,

$$\frac{\text{tg } t - 1}{t^{5/2} \sin t} \sim \frac{-1}{t^{7/2}}$$

et par suite l'intégrale $\int_{+0}^1 \frac{\text{tg } t - 1}{t^{5/2} \sin t} dt$ n'est pas définie car l'intégrale $\int_{+0}^1 \frac{dt}{t^{7/2}}$ n'est pas définie (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § II, n° 148).

c) Si on pose $t - 1 = u$, il vient

$$\frac{t^k - 1}{\text{Log } t} = \frac{(1 + u)^k - 1}{\text{Log}(1 + u)}.$$

Lorsque u tend vers 0, on a $(1 + u)^k \sim 1 + ku$ et $\text{Log}(1 + u) \sim u$; par suite $\frac{(1 + u)^k - 1}{\text{Log}(1 + u)}$ tend vers k . Autrement dit $\frac{t^k - 1}{\text{Log } t}$ tend vers k , lorsque t tend vers 1 - 0. On en déduit que l'intégrale $\int_{1/2}^{1-0} \frac{t^k - 1}{\text{Log } t} dt$ est définie.

Si $k \geq 0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^k - 1}{\text{Log } t} = 0$$

et par suite $\int_{+0}^{1/2} \frac{t^k - 1}{\text{Log } t} dt$ est définie.

Si $k < 0$, lorsque t tend vers 0, on a

$$\frac{t^k - 1}{\text{Log } t} \sim \frac{t^k}{\text{Log } t}$$

et par suite l'intégrale impropre $\int_{+0}^{1/2} \frac{t^k - 1}{\text{Log } t} dt$ est définie si et seulement si l'intégrale $\int_{+0}^{1/2} \frac{t^k}{\text{Log } t} dt$ est définie.

Pour tout nombre strictement positif p , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^p \text{Log } t = 0.$$

Il existe donc un nombre strictement positif c tel que $0 < t < c$ implique $t^p |\text{Log } t| < 1$ soit encore $t^p < \frac{1}{|\text{Log } t|}$ et par suite $t^{p+k} < \frac{t^k}{|\text{Log } t|}$. Donc si $k < -1$, en choisissant pour p un nombre positif tel que $p + k \leq -1$ (par exemple $p = -\frac{k+1}{2}$), l'inégalité $t^{p+k} < \frac{t^k}{|\text{Log } t|}$ montre que

$$\int_{+0}^{1/2} \frac{t^k}{\text{Log } t} dt \quad \text{et} \quad \int_{+0}^{1/2} t^{k+p} dt$$

ne sont pas définies.

D'autre part pour tout nombre q strictement positif, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^q}{\text{Log } t} = 0.$$

Il existe donc un nombre d positif tel que $0 < t < d$ implique

$$\frac{1}{|\text{Log } t|} < \frac{1}{t^q}.$$

Donc si $-1 < k < 0$, en choisissant q de manière que $-1 < k - q < 0$ (par exemple $q = \frac{1+k}{2}$), l'inégalité $\frac{t^k}{|\text{Log } t|} < t^{k-q}$ montre que

$$\int_{+0}^{1/2} \frac{t^k}{\text{Log } t} dt$$

est définie de même que

$$\int_{+0}^{1/2} t^{k-p} dt.$$

Si $k = 1$ et $0 < x < \frac{1}{2}$, on a

$$\int_x^{1/2} \frac{t^k}{\text{Log } t} dt = \int_x^{1/2} \frac{dt}{t \text{Log } t} = [\text{Log } |\text{Log } t|]_x^{1/2}.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^{1/2} \frac{dt}{t \text{Log } t} = +\infty,$$

l'intégrale impropre $\int_{+0}^{1/2} \frac{dt}{t \text{Log } t}$ n'est pas définie.

On déduit des résultats précédents que l'intégrale impropre $\int_{+0}^{1-0} \frac{t^k - 1}{\text{Log } t} dt$ est définie si et seulement si $k > -1$.

4.3

Etudier l'existence des intégrales impropres suivantes à partir de la définition et les calculer éventuellement

$$a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}.$$

$$b) \quad \int_1^{+\infty} \text{Arc tg } \frac{1}{t} dt.$$

$$c) \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt.$$

Solution

a) Soit x un nombre réel supérieur à 1. En effectuant le changement de variable $v = (1+t^2)^{1/2}$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}} &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dv}{v^2-1} = \frac{1}{2} \left[\text{Log } \frac{v-1}{v+1} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\text{Log} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right) - \text{Log} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$ tend donc vers $-\frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ et

par suite l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}}$ est définie et on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right).$$

b) Soit x un nombre réel supérieur à 1. Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^x \text{Arc tg } \frac{1}{t} dt &= \left[t \text{Arc tg } \frac{1}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{t dt}{1+t^2} = \\ &= \left(x \text{Arc tg } \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1+x^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \text{Arc tg } \frac{1}{t} dt = +\infty,$$

l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \text{Arc tg } \frac{1}{t} dt$ n'est pas définie.

c) Cherchons des nombres réels a, b, c tels que $(at^2 + bt + c)e^{-t}$ soit une primitive de $t^2 e^{-t}$. Il vient :

$$[(at^2 + bt + c)e^{-t}]' = (-at^2 + (2a - b)t + b - c)e^{-t}$$

et par suite $a = -1, b = -2, c = -2$. Si x est un nombre positif, on a donc

$$\int_0^x t^2 e^{-t} dt = [(-t^2 - 2t - 2)e^{-t}]_0^x = 2 - (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\int_0^x t^2 e^{-t} dt$ tend vers 2 et par suite l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ est définie et on a

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2.$$

4.4 Etudier l'existence des intégrales impropres suivantes

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1/2}} dt.$

b) $\int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt.$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \left(e^{-1/t} - \cos \frac{1}{t} \right) dt.$

Solution a) L'intégration par parties étendue aux intégrales impropres (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § III, n° 154) montre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1/2}} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin t}{t^{1/2}} \right]_1^x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t dt}{2t^{3/2}} = -\sin 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2t^{3/2}} dt.$$

Comme

$$\left| \frac{\sin t}{2 t^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{2 t^{3/2}}$$

pour tout nombre réel t supérieur à 1 et comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ est définie (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § III, n° 153), l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t^{3/2}}$$

est définie et par suite l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1/2}} dt$ est aussi définie.

b) En effectuant le changement de variable $t^2 = u$, il vient

$$\int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} du.$$

L'étude précédente montre donc que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt$ est définie.

c) Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{t} \left(e^{1/t} - \cos \frac{1}{t} \right) \sim \frac{1}{t^2}$$

et par suite l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \left(e^{1/t} - \cos \frac{1}{t} \right) dt$ est définie car l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est définie.

4.5

a) Soit k un nombre réel ; montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} t^{k-1} \cos t dt$$

est absolument convergente pour $k < 0$.

En déduire que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} t^k \sin t dt$$

est définie pour $k < 0$.

b) Utiliser le résultat précédent pour étudier l'existence de l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{t} \sin(t^2) dt.$$

Solution a) Pour tout nombre réel t supérieur à 1, on a

$$|t^{k-1} \cos t| \leq t^{k-1}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{k-1} dt$ est convergente pour $k < 0$ (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § III, n° 153) l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{k-1} \cos t dt$ est absolument convergente pour $k < 0$ (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § III, n° 156).

Une intégration par parties généralisée aux intégrales impropres (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § III, n° 154) montre que

$$\int_1^{+\infty} t^k \sin t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-t^k \cos t]_1^x + k \int_1^{+\infty} t^{k-1} \cos t dt.$$

Si $k < 0$, on a donc

$$\int_1^{+\infty} t^k \sin t dt = -\cos 1 + k \int_1^{+\infty} t^{k-1} \cos t dt.$$

Si $k < 0$, nous savons que $\int_1^{+\infty} t^{k-1} \cos t dt$ est définie ; on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^k \sin t dt$ est définie.

b) En effectuant le changement de variable admissible $u = t^2$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{t} \sin(t^2) dt = \int_1^{+\infty} u^{1/4} \sin u \frac{du}{2u^{1/2}} = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} u^{-1/4} \sin u du.$$

Comme $-\frac{1}{4} < 0$, la question précédente nous montre que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u^{-1/4} \sin u du$$

est convergente et par suite l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sqrt{t} \sin(t^2) dt$ est définie.

4.6

Soit a un nombre réel positif, f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et g une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que la fonction G définie sur $[a, +\infty[$ par

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

soit bornée sur cet intervalle.

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) g(t) dt$ vérifie la condition de CAUCHY et par suite qu'elle est définie.

b) Appliquer le résultat précédent à l'étude de l'intégrale impropre

$$\int_a^{+\infty} f(t) \sin t dt.$$

Solution

a) Soient X et X' des nombres réels tels que $X' > X > a$. D'après la deuxième formule de la moyenne, il existe un nombre réel c appartenant à l'intervalle $[X, X']$ tel que

$$\int_X^{X'} f(t) g(t) dt = f(X) \int_X^c g(t) dt + f(X') \int_c^{X'} g(t) dt.$$

Si M est un majorant strictement positif de la fonction G et si ε est un nombre strictement positif, il existe un nombre réel strictement positif K tel que $K > a$ et tel que pour tout nombre réel x vérifiant $x > K$, on ait $f(x) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Par suite si X et X' sont supérieurs à K , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_X^{X'} f(t) g(t) dt \right| &< \frac{\varepsilon}{4M} \left(\left| \int_X^c g(t) dt \right| + \left| \int_c^{X'} g(t) dt \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M} (2M + 2M) = \varepsilon. \end{aligned}$$

L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) g(t) dt$ vérifie la condition de CAUCHY (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § III, n° 153). Elle est donc convergente.

b) Compte tenu du résultat ci-dessus, pour montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) \sin t dt$ est définie, il suffit de montrer que la fonction G définie sur $[a, +\infty[$ par $G(x) = \left| \int_a^x \sin t dt \right|$ est bornée sur $[a, +\infty[$. Or

$$\int_a^x \sin t dt = {}_x[-\cos t]_a^x = \cos a - \cos x$$

et par suite pour tout nombre réel x appartenant à $[a, +\infty[$ on a

$$\left| \int_a^x \sin t \, dt \right| \leq 2.$$

L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) \sin t \, dt$ est donc convergente.

4.7 a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2 t^2} \, dt$ est définie si x est un nombre réel appartenant à $[0, 1]$.

b) Etudier si elle est uniformément convergente relativement à x dans $[0, 1]$.

Solution a) Si $x = 0$, on a $x e^{-x^2 t^2} = 0$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2 t^2} \, dt$ est définie et vaut 0. Si $x \neq 0$, on peut effectuer le changement de variable admissible $u = xt$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2 t^2} \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du.$$

On a $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 e^{-u^2} = 0$; il existe donc un nombre A strictement positif tel que pour tout nombre réel u vérifiant $u \geq A$, on ait $e^{-u^2} < \frac{1}{u^2}$. Comme l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{du}{u^2}$ est convergente, on en déduit que l'intégrale $\int_A^{+\infty} e^{-u^2} \, du$ est convergente et par suite que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2 t^2} \, dt$ est convergente.

b) Nous avons vu que si $x = 0$ on a $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2 t^2} \, dt = 0$ et que si $x \neq 0$ on a

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2 t^2} \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du.$$

La fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(u) = e^{-u^2}$ étant strictement positive, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du > 0.$$

La fonction G définie sur $[0, 1]$ par

$$G(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 t^2} dt$$

n'est donc pas continue en 0. Par suite l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2 t^2} dt$ n'est pas uniformément convergente relativement à x dans $[0, 1]$.

4.8

a) Soit A un nombre réel strictement positif. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-ty} \frac{\sin t}{t} dt$ est définie lorsque $y \geq A$. On pose

$$G(y) = \int_0^{+\infty} e^{-ty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Montrer que la fonction G est dérivable sur $[A, +\infty[$.

b) Calculer à l'aide de deux intégrations par parties successives l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} e^{-ty} \sin t dt.$$

c) En déduire qu'il existe un nombre réel K tel que pour $y \geq A$ on ait $G(y) = K - \text{Arc tg } y$. Calculer K en étudiant la limite de G quand y tend vers $+\infty$.

d) Peut-on définir la fonction G au voisinage de $y = 0$? En conclure la valeur de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Solution a) Si $t \geq 0$ et $y \geq A$, on a $\left| e^{-ty} \frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-tA}$. Comme l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-tA} dt$ est convergente, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-ty} \frac{\sin t}{t} dt$ est absolument convergente (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § III, n° 156) donc convergente pour $y \geq A$. Soient B un nombre réel tel que $B > A$ et f la fonction définie pour tout couple (t, y) de $[0, +\infty[\times [A, B]$ par

$$\begin{cases} f(t, y) = e^{-ty} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ f(0, y) = 1. \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[\times [A, B]$. Elle admet sur ce domaine une dérivée partielle en y égale à $-e^{-ty} \sin t$ et la fonction g définie sur

$$[0, +\infty[\times [A, B]$$

par $g(t, y) = e^{-ty} \sin t$ est continue sur $[0, +\infty[\times [A, B]$. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-ty} \sin t \, dt$ est uniformément convergente relativement à y dans $[A, B]$ car $|e^{-ty} \sin t| < e^{-tA}$ lorsque (t, y) appartient à $[0, +\infty[\times [A, B]$ (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § IV, n° 157) et car l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-tA} \, dt$ est définie. Comme B est un nombre réel positif, on en déduit (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § IV, n° 159) que la fonction G est définie et dérivable sur $[A, +\infty[$ et que

$$G'(y) = - \int_0^{+\infty} e^{-ty} \sin t \, dt$$

pour $y \geq A$.

b) Par intégrations par parties successives généralisées aux intégrales impropres (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § III, n° 154) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ty} \sin t \, dt &= \lim_{T \rightarrow +\infty} [-e^{-ty} \cos t]_0^T - y \int_0^{+\infty} e^{-ty} \cos t \, dt = \\ &= 1 - y \left[\lim_{T \rightarrow +\infty} [e^{-ty} \sin t]_0^T + y \int_0^{+\infty} e^{-ty} \sin t \, dt \right] \\ &= 1 - y^2 \int_0^{+\infty} e^{-ty} \sin t \, dt. \end{aligned}$$

Par suite on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ty} \sin t \, dt = \frac{1}{1 + y^2}.$$

c) On en déduit que la fonction G est une primitive de $\frac{-1}{1 + y^2}$ sur $[A, +\infty[$. Il existe donc un nombre réel K tel que pour tout élément y de $[A, +\infty[$ on ait $G(y) = K - \text{Arc tg } y$. Comme $\left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq 1$ pour $t > 0$, on a

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-ty} \frac{\sin t}{t} \, dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-ty} \, dt = \frac{1}{y}.$$

Donc pour tout élément y de $[A, +\infty[$ on a $G(y) \leq 1/y$ et par suite

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} G(y) = 0.$$

Comme

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \text{Arc tg } y = \frac{\pi}{2},$$

on en déduit que $K = \pi/2$.

d) A étant un nombre positif quelconque, la fonction G est définie pour tout nombre réel y strictement positif. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est définie ; en effet par intégration par parties on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_1^T - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est convergente comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$. D'autre

part $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est définie car la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ continue sur $]0, 1]$ admet une limite au point 0. Par suite la fonction G est définie pour $y = 0$ en posant

$$G(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Montrons que la suite $\left(y \mapsto \int_0^{k\pi} e^{-ty} \frac{\sin t}{t} dt \right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément relativement à y dans \mathbb{R}_+ . Pour cela il suffit de montrer que $\int_{k\pi}^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t} dt$ converge uniformément vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Or

$$\int_{k\pi}^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=k}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-yt} \frac{\sin t}{t} dt$$

et les résultats sur les séries alternées permettent d'affirmer que

$$\left| \int_{k\pi}^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-yt} \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt. \quad (1)$$

Or

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = 0$$

car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente et car

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

Comme $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ ne dépend pas de y , les inégalités (1) montrent bien que $\int_{k\pi}^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t} dt$ tend vers 0 uniformément sur \mathbf{R}_+ . Par suite la fonction G est continue à droite de 0 et on a

$$G(0) = \lim_{y \rightarrow 0^+} G(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } y \right) = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

4.9

1° Soient n un entier strictement supérieur à 1 et a un nombre réel strictement positif. Montrer que la fonction J_n définie sur $[a, +\infty[$ par

$$J_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n} dt$$

est continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

2° La fonction J_1 définie sur $[a, +\infty[$ par

$$J_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + x^2} dt$$

est-elle continue sur $[a, +\infty[$?

3° Montrer que si $n \geq 1$, la fonction J_n est indéfiniment dérivable sur $[a, +\infty[$ et vérifier la formule

$$\frac{dJ_n}{dx}(x) = -2nxJ_{n+1}(x).$$

4° A l'aide d'intégrations par parties, établir pour tout entier n supérieur à 1 et tout nombre réel strictement positif x la relation

$$J_n(x) + 2n(2n-1)J_{n+1}(x) - 4x^2n(n+1)J_{n+2}(x) = 0$$

et trouver une relation entre $J_n, \frac{dJ_n}{dx}, \frac{d^2J_n}{dx^2}$.

Solution

1° Pour tout élément x de $[a, +\infty[$, tout nombre réel t strictement positif et tout entier n strictement supérieur à 1, on a les inégalités

$$\left| \frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n} \right| < \frac{t}{(t^2 + x^2)^n} < \frac{1}{t^{2n-1}}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n-1}}$ est convergente pour $n > 1$ (cf. C. E., tome 1,

Ch.10, § III, n° 153), on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n} dt$ est absolument et uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. La fonction J_n est donc définie et continue sur $[a, +\infty[$ (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § IV, n° 158).

2° Par une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + x^2} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{-t \cos t}{t^2 + x^2} \right]_0^T + \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} \cos t dt.$$

On en déduit que

$$J_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} \cos t dt.$$

Or

$$\frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} = \frac{1}{t^2 + x^2} - \frac{2t^2}{(t^2 + x^2)^2}$$

et par suite

$$\left| \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \right| \leq \frac{1}{t^2 + x^2} + \frac{2t^2}{(t^2 + x^2)^2} < \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^2} = \frac{3}{t^2}.$$

On en déduit comme précédemment que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} \cos t dt$ est absolument et uniformément convergente car l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente. La fonction J_1 est donc définie et continue sur $[a, +\infty[$.

3° On a

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n} \right) \right] (t, x) = \frac{-2nxt \sin t}{(t^2 + x^2)^{n+1}} \quad \text{si } n \geq 1.$$

Montrons alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{-2nxt \sin t}{(t^2 + x^2)^{n+1}} dt$ est uniformément convergente relativement à x dans $[a, +\infty[$. On a

$$\left| \frac{2nxt \sin t}{(t^2 + x^2)^{n+1}} \right| \leq \frac{2nxt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} = \frac{2n}{(t^2 + x^2)^n} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{t^2 + x^2}} \leq \frac{2n}{t^{2n}}.$$

Comme pour $n \geq 1$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}}$ est convergente, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{-2nxt \sin t}{(t^2 + x^2)^{n+1}} dt$$

est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. La fonction J_n ($n \geq 1$) est donc dérivable sur $[a, +\infty[$ (cf. C. E., tome 1, Ch. 10, § IV, n° 159) et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} J_n(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{-2nxt \sin t}{(t^2 + x^2)^{n+1}} dt \\ &= -2nx \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^{n+1}} dt = -2nx J_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Comme J_{n+1} est dérivable, $\frac{d}{dx} J_n$ est aussi dérivable et $\frac{d^2}{dx^2} J_n$ s'exprime en fonction de x , J_{n+1} et J_{n+2} . On montre ainsi par récurrence que $\frac{d^p}{dx^p} J_n$ existe et s'exprime en fonction de x , J_{n+1} , ..., J_{n+p} et par suite que J_n est indéfiniment dérivable.

4° Pour tout nombre réel x strictement positif et tout entier n supérieur à 1, soit u la fonction définie sur \mathbf{R} par $u(t) = \frac{t}{(t^2 + x^2)^n}$. On a

$$u'(t) = \frac{1}{(t^2 + x^2)^n} - \frac{2nt^2}{(t^2 + x^2)^{n+1}}$$

et

$$\begin{aligned} u''(t) &= \frac{-2nt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} - \frac{4nt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} + \frac{4n(n+1)t^3}{(t^2 + x^2)^{n+2}} \\ &= \frac{-6nt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} + \frac{4n(n+1)t^3}{(t^2 + x^2)^{n+2}}. \end{aligned}$$

On obtient donc par intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} [-u(t) \cos t]_0^T + \int_0^{+\infty} u'(t) \cos t dt = \int_0^{+\infty} u'(t) \cos t dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} [u'(t) \sin t]_0^T - \int_0^{+\infty} u''(t) \sin t dt = - \int_0^{+\infty} u''(t) \sin t dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{6nt}{(t^2 + x^2)^{n+1}} - \frac{4n(n+1)t^3}{(t^2 + x^2)^{n+2}} \right] \sin t dt. \end{aligned}$$

Comme $t^3 = t(t^2 + x^2) - tx^2$, il vient :

$$J_n(x) = 6nJ_{n+1}(x) - 4n(n+1)J_{n+1}(x) + 4n(n+1)x^2J_{n+2}(x)$$

soit encore

$$J_n(x) + 2n(2n-1)J_{n+1}(x) - 4n(n+1)x^2J_{n+2}(x) = 0. \quad (1)$$

D'autre part on a

$$\frac{d}{dx} J_n(x) = -2nxJ_{n+1}(x)$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_n}{dx^2}(x) &= -2nJ_{n+1}(x) - 2nx \frac{d}{dx} J_{n+1}(x) \\ &= -2nJ_{n+1}(x) + 4n(n+1)x^2 J_{n+2}(x) \end{aligned}$$

d'où

$$J_{n+1}(x) = \frac{-1}{2nx} \frac{d}{dx} J_n(x)$$

et

$$J_{n+2}(x) = \frac{\frac{d^2}{dx^2} J_n(x) - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(x)}{4n(n+1)x^2}.$$

En remplaçant dans l'égalité (1) $J_{n+1}(x)$ et $J_{n+2}(x)$ par leurs valeurs en fonction de

$$\frac{d}{dx} J_n(x) \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dx^2} J_n(x)$$

on obtient l'égalité suivante

$$J_n(x) - \frac{2n-1}{x} \frac{d}{dx} J_n(x) - \frac{d^2}{dx^2} J_n(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(x) = 0$$

et par suite

$$x \frac{d^2}{dx^2} J_n(x) + 2(n-1) \frac{d}{dx} J_n(x) - xJ_n(x) = 0.$$

4.10

1° Montrer que la fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt$$

est définie et continue sur \mathbf{R} et étudier ses variations. (On calculera $F(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.)

2° Montrer que la fonction F est dérivable sur \mathbf{R} . (On pourra commencer par montrer qu'elle est dérivable sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où a est un nombre réel strictement positif.)

3° En transformant l'intégrale $F(x)$ par la correspondance $s = x^2 t$, montrer que la fonction F admet un développement limité à un ordre quelconque en $1/x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution 1° Pour tout nombre réel x et tout nombre réel t strictement positif, on a

$$\frac{e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} < \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ est définie, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt$$

est uniformément convergente sur \mathbf{R} et par suite la fonction F est définie et continue sur \mathbf{R} .

Remarquons que la fonction F est paire. Nous l'étudierons donc seulement sur \mathbf{R}_+ . Si $0 < x_1 < x_2$, on a pour tout élément t de \mathbf{R}_+

$$e^{-x_1^2 t} > e^{-x_2^2 t}$$

et par suite la fonction F est décroissante sur \mathbf{R}_+ .

Calculons $F(0)$, il vient

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du.$$

La décomposition en éléments simples de deuxième espèce de la fraction rationnelle $\frac{2u^2}{1+u^4}$ est

$$\begin{aligned} \frac{2u^2}{1+u^4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{u}{\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} - \frac{u}{\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{2\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{2\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right] \\
& = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{2\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} - \frac{2\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{(\sqrt{2}u - 1)^2 + 1} + \frac{1}{(\sqrt{2}u + 1)^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Log} \left(\frac{\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{Arc tg}(\sqrt{2}u - 1) + \operatorname{Arc tg}(\sqrt{2}u + 1)) \right]_0^r
\end{aligned}$$

et par suite que

$$F(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Pour tout nombre réel t strictement positif, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{e^{-x^2t}\sqrt{t}}{1+t^2}$ tend vers 0, montrons alors que $F(x)$ tend vers 0. Soit ε un nombre strictement positif, comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ est convergente, il existe un nombre $M > 1$ tel que

$$\int_M^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

et par suite tel que

$$\int_M^{+\infty} \frac{e^{-x^2t}\sqrt{t}}{1+t^2} dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit α un nombre strictement positif. Nous avons

$$\int_0^\alpha \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt < \int_0^\alpha \sqrt{t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^\alpha \sqrt{t} dt < \alpha^{3/2}$$

donc

$$\int_0^\alpha \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt < \alpha^{3/2}.$$

En posant $\alpha = (\varepsilon/3)^{2/3}$, il vient :

$$\int_0^\alpha \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part on a :

$$\int_\alpha^M \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt < \int_\alpha^M \frac{e^{-x^2\alpha} \sqrt{t}}{1+t^2} dt = e^{-x^2\alpha} \int_\alpha^M \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $e^{-x^2\alpha}$ tend vers 0, et par suite il existe un nombre positif X tel que pour tout nombre réel x vérifiant $x > X$, on ait

$$e^{-x^2\alpha} < \frac{\varepsilon}{3 \int_\alpha^M \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt}$$

Alors si $x > X$, on a aussi

$$\int_\alpha^M \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt = \int_0^\alpha \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt + \int_\alpha^M \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt + \int_M^{+\infty} \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt,$$

nous voyons que si $x > X$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2t} \sqrt{t}}{(1+t^2)} dt < \varepsilon.$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Le tableau de variation de la fonction F est :

x	0	$+\infty$
$F(x)$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	0

2° On a

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} \right) \right] (t, x) = \frac{-2xt e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2}$$

pour tout nombre réel x et tout nombre réel positif t . Soit a un nombre positif. Supposons que x appartienne à $[a, +\infty[$. Si M est un nombre positif, en effectuant le changement de variable $s = x^2 t$ admissible car $x \neq 0$, il vient

$$\int_M^{+\infty} \frac{xt e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt = \int_{x^2 M}^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{3/2}}{s^2 + x^2} ds < \int_{x^2 M}^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{3/2}}{s^2 + a^2} ds < \int_{a^2 M}^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{3/2}}{s^2 + a^2} ds.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{3/2}}{s^2 + a^2} ds$ étant définie, il existe un nombre M tel que

$$\int_{a^2 M}^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{3/2}}{s^2 + a^2} ds < \varepsilon$$

et par suite tel que pour tout élément x de $[a, +\infty[$, on ait

$$\int_M^{+\infty} \frac{xt e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt < \varepsilon.$$

On en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{-2xt e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt$$

est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ et on a

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2xt e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt.$$

Le nombre a étant un élément quelconque de \mathbf{R}_+^* et la fonction F étant paire, on en déduit que la fonction F est dérivable sur $\mathbf{R} - \{0\}$ et que pour tout élément x de $\mathbf{R} - \{0\}$ on a

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2xt e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt.$$

Pour $x \neq 0$, étudions le rapport $\frac{F(x) - F(0)}{x}$. En effectuant le changement de variable admissible $s = x^2 t$, il vient

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t} \sqrt{t}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-s} \sqrt{s}}{x^4 + s^2} ds$$

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x \sqrt{s}}{x^4 + s^2} ds$$

et par suite

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-s} - 1) \sqrt{s}}{s^2 + x^4} ds.$$

Lorsque s tend vers 0,

$$\frac{(e^{-s} - 1) \sqrt{s}}{s^2} \sim \frac{-1}{\sqrt{s}}$$

et par suite $\int_{+0}^{+\infty} \frac{(e^{-s} - 1) \sqrt{s}}{s^2} ds$ est définie. Comme d'autre part, pour tout élément x de \mathbf{R} et tout élément s de \mathbf{R}_+^* on a

$$0 \leq \frac{(1 - e^{-s}) \sqrt{s}}{s^2 + x^4} \leq \frac{(1 - e^{-s}) \sqrt{s}}{s^2}$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-s} - 1) \sqrt{s}}{s^2 + x^4} ds$ est uniformément convergente pour x dans \mathbf{R} .

Par suite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-s} - 1) \sqrt{s}}{s^2 + x^4} ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-s} - 1) \sqrt{s}}{s^2 + x^4} \right) ds \\ &= \int_{+0}^{+\infty} \frac{(e^{-s} - 1) \sqrt{s}}{s^2} ds. \end{aligned}$$

La fonction F est donc dérivable et on a

$$F'(0) = \int_{+0}^{+\infty} \frac{(e^{-s} - 1) \sqrt{s}}{s^2} ds.$$

3° En effectuant le changement de variable $s = x^2 t$ pour $x \neq 0$, nous avons déjà vu que

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} \sqrt{s}}{1 + (s^2/x^4)} \frac{ds}{x^3}.$$

Or pour tout nombre réel u , nous savons que :

$$1 + u + \dots + u^n = \frac{1 - u^{n+1}}{1 - u}$$

soit encore que

$$1 + u + \dots + u^n + \frac{u^{n+1}}{1 - u} = \frac{1}{1 - u}.$$

En posant $u = -s^2/x^4$, il vient

$$\frac{1}{1 + (s^2/x^4)} = 1 - \frac{s^2}{x^4} + \dots + (-1)^n \frac{s^{2n}}{x^{4n}} + (-1)^{n+1} \frac{s^{2(n+1)/x^{4(n+1)}}}{1 + (s^2/x^4)}.$$

Pour tout entier naturel p , la comparaison des fonctions exponentielle et puissance montre que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-s} s^{2p} \sqrt{s} ds$ est définie et par suite que si $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{2(n+1)} \sqrt{s}}{1 + (s^2/x^4)} ds$$

est définie. On a donc pour $x \neq 0$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} \sqrt{s}}{x^3(1 + (s^2/x^4))} ds = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{x^{4p+3}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{2p} \sqrt{s} ds + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{4n+3}} \cdot \frac{1}{x^4} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{2(n+1)} \sqrt{s}}{1 + (s^2/x^4)} ds.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{2(n+1)} \sqrt{s}}{1 + (s^2/x^4)} ds = 0,$$

en posant

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{x^4} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s} s^{2(n+1)} \sqrt{s}}{1 + (s^2/x^4)} ds,$$

on obtient le développement limité en $1/x$ à l'ordre $4n + 3$ de la fonction F quand x tend vers $+\infty$ en écrivant l'égalité

$$F(x) = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{x^{4p+3}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{2p} \sqrt{s} ds + \frac{1}{x^{4n+3}} \varepsilon(x).$$

L'entier n étant quelconque, ceci montre bien que F admet un développement limité à un ordre quelconque en $1/x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4.11 Soit D l'ensemble des couples (x, y) de \mathbb{R}^2 tels que $0 < x < 2$ et $1 < y < 2$. Calculer

$$\int_D (x + y) e^{x+y} dx dy.$$

Solution On a

$$\int_D (x + y) e^{x+y} dx dy = \int_0^2 dx \int_1^2 (x + y) e^{x+y} dy.$$

On remarque que

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} ((x + y) e^{x+y} - e^{x+y}) \right] (x, y) = (x + y) e^{x+y}$$

donc

$$\int_1^2 (x + y) e^{x+y} dy = [(x + y) e^{x+y} - e^{x+y}]_1^2 = (x + 1) e^{x+2} - x e^{x+1}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_D (x + y) e^{(x+y)} dx dy &= \int_0^2 [(x + 1) e^{x+2} - x e^{x+1}] dx = \\ &= [(x + 1) e^{x+2} - e^{x+2} - x e^{x+1} + e^{x+1}]_0^2 = 2e^4 - e^3 - e. \end{aligned}$$

4.12 Soit D l'ensemble des couples (x, y) de \mathbf{R}^2 tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$.
Calculer

$$\int_D |x + y| dx dy.$$

Solution Posons

$$D_1 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1 \quad \text{et} \quad -1 < y < -x \}$$

$$D_2 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1 \quad \text{et} \quad -x \leq y < 1 \}.$$

On a $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Pour tout couple (x, y) de D_1 on a $|x + y| = -x - y$ et pour tout couple (x, y) de D_2 on a $|x + y| = x + y$.
On a donc

$$\int_D |x + y| dx dy = \int_{D_1} (-x - y) dx dy + \int_{D_2} (x + y) dx dy.$$

Calculons séparément chaque terme de cette somme :

$$\begin{aligned} \int_{D_1} (-x - y) dx dy &= - \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{-x} (x + y) dy \\ &= - \int_{-1}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{-x} dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left(-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= - \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \int_{D_2} (x + y) dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{-x}^1 (x + y) dy = \int_{-1}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\int_D |x + y| dx dy = \frac{8}{3}.$$

4.13

Soit D l'ensemble des couples (x, y) de \mathbf{R}^2 tels que $x > 0, y > 0, x + y < 1$.

1° Calculer

$$\int_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy.$$

2° Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Calculer

$$\int_D a^x b^y dx dy.$$

Solution 1° On a

$$\int_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} \text{Log}(x^2 + y^2) \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \text{Log}(2x^2 - 2x + 1) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x \text{Log} x^2 dx.
 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x \text{Log}(2x^2 - 2x + 1) dx &= \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \text{Log}(2x^2 - 2x + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{4x - 2}{2x^2 - 2x + 1} dx \\
 &= - \int_0^1 \frac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 2x + 1} dx = - \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2 - 4x + 2} \right) dx \\
 &= - \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \text{Arc tg}(2x - 1) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1.
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_0^1 x \text{Log} x^2 dx = \int_0^1 2x \text{Log} x dx = [x^2 \text{Log} x]_0^1 - \int_0^1 x dx = -\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\int_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

2° Si $a = b = 1$, on a

$$\int_D dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Si $a = 1$ et $b \neq 1$, on a

$$\begin{aligned}
 \int_D b^y dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} b^y dy = \int_0^1 \left[\frac{b^y}{\text{Log} b} \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\text{Log} b} (b^{1-x} - 1) dx = \frac{1}{\text{Log} b} \left[-\frac{b^{1-x}}{\text{Log} b} - x \right]_0^1 \\
 &= \frac{b-1}{(\text{Log} b)^2} - \frac{1}{\text{Log} b}.
 \end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, si $a \neq 1$ et $b = 1$ on a

$$\int_D a^x dx dy = \frac{a-1}{(\text{Log} a)^2} - \frac{1}{\text{Log} a}.$$

Supposons maintenant $a \neq 1$ et $b \neq 1$. On a

$$\begin{aligned} \int_D a^x b^y dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} a^x b^y dy = \int_0^1 \left[\frac{b^y}{\text{Log } b} \right]_0^{1-x} a^x dx \\ &= \frac{1}{\text{Log } b} \int_0^1 (a^x b^{1-x} - a^x) dx \\ &= \frac{b}{\text{Log } b} \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^x dx - \frac{1}{\text{Log } b} \int_0^1 a^x dx. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que $a = b$. L'expression précédente devient

$$\begin{aligned} \int_D b^{x+y} dx dy &= \frac{b}{\text{Log } b} [x]_0^1 - \frac{1}{(\text{Log } b)^2} [b^x]_0^1 \\ &= \frac{b}{\text{Log } b} - \frac{b-1}{(\text{Log } b)^2}. \end{aligned}$$

Si $a \neq b$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_D a^x b^y dx dy &= \frac{b}{\text{Log } b} \left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\text{Log } \left(\frac{a}{b}\right)} \right]_0^1 - \frac{1}{\text{Log } b} \left[\frac{a^x}{\text{Log } a} \right]_0^1 \\ &= \frac{a-b}{\text{Log } b (\text{Log } a - \text{Log } b)} - \frac{a-1}{\text{Log } a \text{Log } b} \\ &= \frac{(a-1) \text{Log } b - (b-1) \text{Log } a}{\text{Log } a \text{Log } b (\text{Log } a - \text{Log } b)}. \end{aligned}$$

4.14 Soit D l'ensemble des couples (x, y) de \mathbf{R}^2 tels que $x^2 + y^2 < 1$. Calculer

$$\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

Solution Soient D' l'ensemble des couples (r, θ) de \mathbf{R}^2 tels que

$$0 \leq r < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

et $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ l'application de D' dans D définie pour tout couple (r, θ) de D' par

$$\omega_1(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$\omega_2(r, \theta) = r \sin \theta.$$

Il est clair que ω est une bijection de D' sur D et que les fonctions ω_1, ω_2 admettent des dérivées partielles continues. On a

$$\left| \frac{D(\omega_1, \omega_2)}{D(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy &= \\ &= \int_{D'} \frac{1}{1+(\omega_1(r, \theta))^2+(\omega_2(r, \theta))^2} \left| \frac{D(\omega_1, \omega_2)}{D(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \int_{D'} \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r dr}{1+r^2} \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} \text{Log}(1+r^2) \right]_0^1 = \pi \text{Log } 2. \end{aligned}$$

4.15 Soit D l'ensemble des éléments (x, y) de \mathbf{R}^2 tels que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x < 0 \\ x^2 + y^2 - y > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Calculer

$$\int_D (x+y)^2 dx dy.$$

Solution Soient D' l'ensemble des couples (r, θ) de \mathbf{R}^2 tels que

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sin \theta < r < \cos \theta,$$

et $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ l'application de D' dans D définie pour tout élément (r, θ) de D' par

$$\omega_1(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$\omega_2(r, \theta) = r \sin \theta.$$

On a

$$\left| \frac{D(\omega_1, \omega_2)}{D(r, \theta)} \right| = r;$$

par suite

$$\begin{aligned}\int_D (x+y)^2 dx dy &= \int_{D'} (r \cos \theta + r \sin \theta)^2 r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} (r^3 + 2r^3 \sin \theta \cos \theta) dr.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{\sin \theta}^{\cos \theta} (r^3 + 2r^3 \sin \theta \cos \theta) dr &= (1 + \sin 2\theta) \left[\frac{r^4}{4} \right]_{\sin \theta}^{\cos \theta} \\ &= \frac{1}{4} (1 + \sin 2\theta) (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta) \\ &= \frac{1}{4} (1 + \sin 2\theta) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{4} (1 + \sin 2\theta) (\cos 2\theta).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_D (x+y)^2 dx dy &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} (\cos 2\theta + \cos 2\theta \sin 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\cos 4\theta}{8} \right]_0^{\pi/4} = \frac{3}{16}.\end{aligned}$$

4.16

Soit X un nombre réel strictement positif. On pose

$$D_X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < X^2 \}$$

$$\Delta_X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < X, 0 < y < X \}.$$

1° Calculer

$$I(X) = \int_{D_X} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

2° On pose

$$J(X) = \int_{\Delta_X} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

et

$$K(X) = \int_0^X e^{-x^2} dx.$$

Montrer que la fonction K admet une limite lorsque X tend vers $+\infty$ et calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Solution 1° En effectuant le changement de variable

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

on voit que

$$I(X) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^X e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^X = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-X^2}).$$

2° On a

$$J(X) = \int_0^X dy \int_0^X e^{-(x^2+y^2)} dx = \left(\int_0^X e^{-y^2} dy \right) \left(\int_0^X e^{-x^2} dx \right) = [K(X)]^2. \quad (1)$$

La fonction K admet une limite quand X tend vers $+\infty$ si et seulement si la fonction J en admet une.

Remarquons que pour tout nombre réel positif X on a

$$D_X \subset \Delta_X \subset D_{X\sqrt{2}}.$$

La fonction exponentielle est une fonction à valeurs positives ; par suite on a

$$I(X) \leq J(X) \leq I(X\sqrt{2}). \quad (2)$$

Par ailleurs on a

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-X^2}) = \frac{\pi}{4}.$$

Des inégalités (2), on déduit que J admet une limite quand X tend vers $+\infty$, et que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} J(X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) = \frac{\pi}{4}.$$

Par suite la fonction K admet une limite lorsque X tend vers $+\infty$, et de l'égalité (1) on déduit que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} K(X) = \sqrt{\lim_{X \rightarrow +\infty} J(X)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

car K est une fonction à valeurs positives. On a donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.17 Soit V l'ensemble des éléments (x, y, z) de \mathbf{R}^3 qui vérifient $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z \leq 1 - y^2$ et $x + y \leq 1$. Calculer

$$\int_V z \, dx \, dy \, dz.$$

Solution On a

$$\begin{aligned} \int_V z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y^2} z \, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-y^2)^2}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - 2y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(1-x) - \frac{2}{3}(1-x)^3 + \frac{1}{5}(1-x)^5 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{(1-x)^2}{2} + \frac{2}{12}(1-x)^4 - \frac{1}{30}(1-x)^6 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{60} = \frac{11}{60}. \end{aligned}$$

4.18 Soit V l'ensemble des éléments (x, y, z) de \mathbf{R}^3 tels que

$$0 < z^2 + y^2 + x^2 < 1$$

$$0 < x^2 + y^2 < z^2$$

$$z > 0.$$

Calculer

$$\int_V \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{z} \right) dx \, dy \, dz.$$

Solution Soient V' l'ensemble des couples (r, φ, θ) de \mathbf{R}^3 tels que

$$0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

et $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ l'application de V' dans V définie pour tout élément (r, φ, θ) de V' par

$$\begin{cases} \omega_1(r, \varphi, \theta) = r \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_2(r, \varphi, \theta) = r \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_3(r, \varphi, \theta) = r \cos \theta. \end{cases}$$

On a

$$\left| \frac{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{D(r, \varphi, \theta)} \right| = r^2 \sin \theta.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{z} \right) dx dy dz &= \\ &= \int_{V'} \left(\frac{1}{r \sin \theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 (r + r \operatorname{tg} \theta) dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} (1 + \operatorname{tg} \theta) d\theta \\ &= \pi [\theta - \operatorname{Log}(\cos \theta)]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{4} - \pi \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

4.19 Soit V l'ensemble des éléments (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tels que

$$0 < z < 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 < z^2.$$

Calculer

$$\int_V xyz dx dy dz.$$

Solution Soient V' l'ensemble des éléments (r, θ, u) de \mathbb{R}^3 tels que

$$0 < r < u, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < u < 1$$

et $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ la fonction de V' sur V définie pour tout élément (r, θ, u) de V' par

$$\begin{aligned} \omega_1(r, \theta, u) &= r \cos \theta \\ \omega_2(r, \theta, u) &= r \sin \theta \\ \omega_3(r, \theta, u) &= u. \end{aligned}$$

On a

$$\left| \frac{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{D(r, \theta, u)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_V xyz \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \int_{V'} r^3 u \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\theta \, du \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 du \int_0^u r^3 u \sin \theta \cos \theta \, dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{u^5}{4} \sin \theta \cos \theta \, du \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta}{24} d\theta = 0. \end{aligned}$$

4.20 Pour tout entier strictement positif n , on pose

$$B_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x_i)^2 < 1 \right\}.$$

Le but de ce problème est de calculer le volume

$$v_n = \int_{B_n} dx_1 \dots dx_n$$

de l'ensemble B_n .

1° On pose

$$B'_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in B_n \mid x_n > 0 \}.$$

Montrer que l'application $g^n = (g_1^n, \dots, g_n^n)$ définie pour tout élément

$$(r_n, s_1, \dots, s_{n-1}) \text{ de }]0, 1[\times B_{n-1}$$

par

$$g_i^n(r_n, s_1, \dots, s_{n-1}) = r_n s_i \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$g_n^n(r_n, s_1, \dots, s_{n-1}) = r_n \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (s_i)^2}$$

est une bijection continue de $]0, 1[\times B_{n-1}$ sur B'_n admettant des dérivées partielles continues et que la fonction réciproque de g vérifie les mêmes conditions.

2° Montrer que pour tout entier n tel que $n > 1$, il existe une fonction f_n de B_{n-1} dans \mathbf{R} telle que

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(r_n, s_1, \dots, s_{n-1})} = (r_n)^{n-1} f_n(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

3° Soit n un entier supérieur à 2. Démontrer les égalités suivantes

$$v_n = 2 \int_{B_{n-1}} \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i)^2} dx_1 \dots dx_{n-1} \tag{1}$$

$$v_{n-1} = 2 \left(\int_0^1 (r_{n-1})^{n-2} dr_{n-1} \right) \left(\int_{B_{n-2}} f_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-2}) ds_1 \dots ds_{n-2} \right). \tag{2}$$

En déduire que

$$v_n = 2(n - 1) v_{n-1} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^{n-2} dr. \tag{3}$$

4° Démontrer que si p est un entier supérieur à 1 on a

$$v_{2p} = \frac{(\pi)^p}{p!} \quad v_{2p+1} = \frac{(\pi)^p 2^{p+1}}{1.3 \dots (2p+1)}.$$

Solution 1° On vérifie aisément que l'application $h^n = (h_1^n, \dots, h_n^n)$ définie pour tout élément (x_1, \dots, x_n) de B_n' par

$$h_1^n(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$h_i^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_{i-1}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \quad \text{si } 2 \leq i \leq n$$

est l'application réciproque de g^n . Comme sur B_{n-1} l'expression $1 - \sum_{i=1}^{n-1} (s_i)^2$ ne s'annule pas, toutes les dérivées partielles de g^n sont continues. De même toutes les dérivées partielles de h^n sont continues car g_1^n ne s'annule pas sur B_n' .

2° On a

$$\frac{D(g_1^n, \dots, g_n^n)}{D(r_n, s_1, \dots, s_{n-1})} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_1 & r_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & r_n & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ s_{n-1} & 0 & 0 & \dots & r_n \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (s_i)^2} \quad \frac{-r_n s_1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (s_i)^2}} \quad \dots \quad \frac{-r_n s_{n-1}}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (s_i)^2}}$$

Pour tout élément (s_1, \dots, s_{n-1}) de B_{n-1} posons

$$f_n(s_1, \dots, s_{n-1}) =$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ s_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right| \cdot \frac{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (s_i)^2}}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (s_i)^2}} \dots \frac{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (s_i)^2}}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (s_i)^2}}$$

On a alors

$$\frac{D(g_1^n, \dots, g_n^n)}{D(r_n, s_1, \dots, s_{n-1})} = (r_n)^{n-1} f_n(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

3° Soit

$$B'_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in B_n \mid x_n < 0 \}.$$

Pour des raisons de symétrie on a

$$\int_{B'_n} dx_1 \dots dx_n = \int_B dx_1 \dots dx_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{B'_n} dx_1 \dots dx_n + \int_{B''_n} dx_1 \dots dx_n = 2 \int_{B'_n} dx_1 \dots dx_n \\ &= 2 \int_{B_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_0^{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}} dx_n \\ &= 2 \int_{B_{n-1}} \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i)^2} dx_1 \dots dx_{n-1} \end{aligned}$$

d'où l'égalité (1).

Pour démontrer l'égalité (2), utilisons le changement de variable défini par la fonction g^{n-1} .

$$\begin{aligned} v_{n-1} &= 2 \int_{B'_{n-1}} dx_1 \dots dx_n = 2 \int_{]0,1[\times B_{n-2}} \frac{D(g_1^{n-1}, \dots, g_{n-1}^{n-1})}{D(r_{n-1}, s_1, \dots, s_{n-2})} dr_{n-1} ds_1 \dots ds_{n-2} \\ &= 2 \int_{]0,1[\times B_{n-2}} (r_{n-1})^{n-2} f_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-2}) dr_{n-1} ds_1 \dots ds_{n-2} \\ &= 2 \left(\int_0^1 (r_{n-1})^{n-2} dr_{n-1} \right) \left(\int_{B_{n-2}} f_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-2}) ds_1 \dots ds_{n-2} \right) \end{aligned}$$

d'où l'égalité (2).

Pour montrer l'égalité (3) effectuons dans l'égalité (1) le changement de variable défini par la fonction g^{n-1} . On obtient

$$\begin{aligned} v_n &= 4 \int_{B_{n-1}} \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= 4 \int_{]0,1[\times B_{n-2}} \sqrt{1 - (r_{n-1})^2} (r_{n-1})^{n-2} f_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}) dr_{n-1} ds_1 \dots ds_{n-1} \\ &= 4 \left(\int_0^1 \sqrt{1 - r_{n-1}^2} (r_{n-1})^{n-2} dr_{n-1} \right) \left(\int_{B_{n-2}} f_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1} \right). \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\int_0^1 (r_{n-1})^{n-2} dr_{n-1} = \left[\frac{(r_{n-1})^{n-1}}{n-1} \right]_0^1 = \frac{1}{n-1}.$$

En combinant ces résultats et l'égalité (2) on trouve

$$\begin{aligned} v_n &= 4 \left(\int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^{n-2} dr \right) \frac{v_{n-1}(n-1)}{2} \\ &= 2(n-1) v_{n-1} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^{n-2} dr. \end{aligned}$$

4° Pour tout entier positif k , posons

$$I_k = \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^k dr.$$

Si $k > 2$, on a après une intégration par parties

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^k dr \\ &= \left[\frac{-r^{k-1}(1 - r^2) \sqrt{1 - r^2}}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 (k-1) r^{k-2} (1 - r^2) \sqrt{1 - r^2} dr \\ &= \frac{k-1}{3} \int_0^1 r^{k-2} \sqrt{1 - r^2} dr - \frac{k-1}{3} \int_0^1 r^k \sqrt{1 - r^2} dr \end{aligned}$$

et par suite

$$(k+2) I_k = (k-1) I_{k-2}.$$

On a

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} dr = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

et

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r \, dr = \left[-\frac{1}{3} (1-r^2) \sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Si p est un entier positif on obtient

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p+2)2p\dots 4} I_0 = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p+2)2p\dots 4} \cdot \frac{\pi}{4}$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+3)\dots 5} I_1 = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2 \cdot 1}{(2p+3)\dots 5 \cdot 3}.$$

En portant ces valeurs dans l'égalité (3) on trouve

$$v_{2p} = 2(2p-1)v_{2p-1}I_{2p-2} = v_{2p-1} \frac{(2p-1)\dots 1}{(2p)\dots 4 \cdot 2} \pi$$

$$v_{2p+1} = 2(2p)v_{2p}I_{2p-1} = 2v_{2p} \frac{2p\dots 2}{(2p+1)\dots 3}$$

et par suite

$$v_{2p} = \frac{(2p-1)\dots 1}{(2p)\dots 2} \cdot 2 \frac{(2p-2)\dots 2}{(2p-1)\dots 3} v_{2p-2} \pi = \frac{\pi}{p} v_{2p-2}$$

$$v_{2p+1} = 2 \frac{(2p)\dots 2}{(2p+1)\dots 3} \cdot \frac{(2p-1)\dots 1}{(2p)\dots 2} \pi v_{2p-1} = \frac{2\pi}{2p+1} v_{2p-1}.$$

Calculons v_1 et v_2 . On a

$$v_1 = \int_{-1}^{+1} dx_1 = 2$$

$$v_2 = \int_{B_2} dx_1 dx_2 = 2 \int_0^1 dx_2 \int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} dx_1 = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x_2^2} dx_2 = \pi.$$

On obtient donc finalement

$$v_{2p} = \frac{\pi^{p-1}}{p(p-1)\dots 2} v_2 = \frac{\pi^p}{p!}$$

et

$$v_{2p+1} = \frac{2^p \pi^p}{(2p+1)\dots 3} v_1 = \frac{2^{p+1} \pi^p}{(2p+1)\dots 3 \cdot 1}.$$

4.21 Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C (x - y) dx + (x + y) dy$$

où C est le segment de droite qui joint le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(0, 1)$.

Solution La courbe C peut être représentée en fonction du paramètre t qui varie de 0 à 1 en posant

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} dx = - dt \\ dy = dt \end{cases}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \int_C (x - y) dx + (x + y) dy &= \int_0^1 [(1 - t) - t] (- dt) + [(1 - t) + t] dt \\ &= \int_0^1 2 t dt = [t^2]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

4.22 Soit C l'ensemble des couples (x, y) de \mathbb{R}^2 tels que $0 \leq x \leq 1$ et $y = 2x^2$. Calculer

$$\int_C x^2 y dx + (x^2 - y^2) dy.$$

Solution On a

$$dy = 4x dx$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_C x^2 y dx + (x^2 - y^2) dy &= \int_0^1 x^2 (2x^2) dx + (x^2 - 4x^4) (4x dx) \\ &= \int_0^1 (-16x^5 + 2x^4 + 4x^3) dx \\ &= \left[-\frac{8}{3}x^6 + \frac{2}{5}x^5 + x^4 \right]_0^1 = -\frac{19}{15}. \end{aligned}$$

4.23 Soient ρ un nombre réel strictement positif et C le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Calculer

$$\int_C y \, dx + xy \, dy.$$

Solution Le cercle C admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

On a alors

$$\begin{cases} dx = -\rho \sin t \, dt \\ dy = \rho \cos t \, dt \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_C y \, dx + xy \, dy &= \int_0^{2\pi} (-\rho^2 \sin^2 t + \rho^3 \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= \rho^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t - 1}{2} \, dt + \rho^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t \, dt \\ &= \rho^2 \left[\frac{\sin 2t}{4} - \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} + \rho^3 \left[-\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = -\pi\rho^2. \end{aligned}$$

4.24 Calculer la longueur du segment de la courbe d'équation $y = \operatorname{ch} t$ dont les extrémités ont pour coordonnées $(0, 1)$ et $(2, \operatorname{ch} 2)$.

Solution La courbe admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \operatorname{ch} t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

La longueur l de la courbe est

$$\begin{aligned} l &= \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^2 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} dt \\ &= \int_0^2 \operatorname{ch} t dt = [\operatorname{sh} t]_0^2 = \operatorname{sh} 2 = \frac{e^4 - 1}{2e^2}. \end{aligned}$$

4.25 Soit C le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Calculer en utilisant la formule de GREEN-RIEMANN, l'intégrale curviligne

$$\int_C xy^2 dy - yx^2 dx.$$

Solution Soit D l'ensemble des éléments (x, y) de \mathbf{R}^2 qui vérifient l'inégalité

$$x^2 + y^2 - 2y < 0.$$

D'après la formule de GREEN-RIEMANN on a

$$\begin{aligned} \int_C xy^2 dy - yx^2 dx &= \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(-yx^2) \right] dx \wedge dy \\ &= \int_D (x^2 + y^2) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Soit D' l'ensemble des couples (r, θ) de \mathbf{R}^2 tels que

$$0 \leq \theta < \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq r < 2 \sin \theta.$$

L'application $g = (g_1, g_2)$ définie pour tout élément (r, θ) de D' par

$$\begin{aligned} g_1(r, \theta) &= r \cos \theta \\ g_2(r, \theta) &= r \sin \theta \end{aligned}$$

est une bijection de D' sur D et on a

$$\left| \frac{D(g_1, g_2)}{D(r, \theta)} \right| = r$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \int_D (x^2 + y^2) dx \wedge dy &= \int_{D'} r^3 dr \wedge d\theta = \\
 &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^3 dr = 4 \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \\
 &= 4 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta = 4 \int_0^\pi (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= 4 \int_0^\pi \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\theta - 1}{8} \right) d\theta \\
 &= 4 \left[-\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 4\theta}{32} - \frac{\theta}{8} \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

D'ailleurs en utilisant la représentation paramétrique suivante de C

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

on peut calculer directement

$$\begin{aligned}
 \int_C xy^2 dy - x^2 y dx &= \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 t \sin^2 t + 3 \cos^2 t \sin t + \cos^2 t) dt \\
 &= \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

4.26 Soit D l'ensemble des éléments (x, y) de \mathbf{R}^2 tels que

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 > 1.$$

Calculer en utilisant la formule de GREEN-RIEMANN

$$\int_D \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy$$

Solution Soient C_1 le segment de droite dont les extrémités ont les coordonnées $(1, 0)$ et $(1, 1)$, C_2 le segment de droite dont les extrémités ont pour coordonnées $(1, 1)$ et $(0, 1)$ et C_3 l'arc de cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ limité par les points $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

Soit ω la forme différentielle définie en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 par

$$\omega_{(x,y)} = \frac{1}{2} \frac{x}{1 + x^2 + y^2} dx.$$

On voit aisément que

$$d\omega_{(x,y)} = \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy.$$

D'après la formule de GREEN-RIEMANN on a

$$\int_D \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega + \int_{C_3} \omega.$$

Le segment C_1 admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad 0 < t < 1$$

par suite on a

$$\int_{C_1} \omega = 0 \quad \text{car} \quad dx = 0.$$

Le segment C_2 admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \end{cases} \quad 0 < t < 1$$

et on obtient

$$\int_{C_2} \omega = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{(1-t)(-dt)}{2 + (1-t)^2} = \frac{1}{4} [\text{Log}(2 + (1-t)^2)]_1^0 = \frac{1}{4} \text{Log} \frac{2}{3}.$$

L'arc C_3 admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

et par suite

$$\int_{C_3} \omega = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \frac{\cos t \sin t}{2} dt = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}.$$

On a donc finalement

$$\int_D \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy = \frac{1}{8} \left(2 \text{Log} \frac{2}{3} + 1 \right).$$

4.27 Soient a et h deux nombres réels strictement positifs. Calculer l'aire de la surface S définie par

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - az = 0 \text{ et } 0 < z < h \}.$$

Solution La surface S admet la représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(r, \theta) = ar \cos \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ y(r, \theta) = ar \sin \theta & 0 < r < \sqrt{\frac{h}{a}} \\ z(r, \theta) = ar^2 & \end{cases}$$

On a alors

$$\frac{D(y, z)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \sin \theta & ar \cos \theta \\ 2 ar & 0 \end{vmatrix} = -2 a^2 r^2 \cos \theta$$

$$\frac{D(z, x)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} 2 ar & 0 \\ a \cos \theta & -ar \sin \theta \end{vmatrix} = -2 a^2 r^2 \sin \theta$$

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ a \sin \theta & ar \cos \theta \end{vmatrix} = a^2 r.$$

Si on pose

$$D =]0, \sqrt{\frac{h}{a}}[\times]0, 2\pi[$$

l'aire A de la surface S est égale à

$$\begin{aligned} A &= \int_D \sqrt{(-2 a^2 r^2 \cos \theta)^2 + (-2 a^2 r^2 \sin \theta)^2 + (a^2 r)^2} \, d r \, d \theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^{\sqrt{h/a}} \sqrt{4 a^4 r^4 + a^4 r^2} \, dr \\ &= 2 \pi a^2 \int_0^{\sqrt{h/a}} \sqrt{4 r^2 + 1} \, r \, dr \\ &= 2 \pi a^2 \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (4 r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{h/a}} \\ &= 2 \pi a^2 \left[\frac{1}{12} \left(4 \frac{h}{a} + 1 \right)^{3/2} - \frac{1}{12} \right] \\ &= \frac{\pi \sqrt{a}}{6} (4 h + a)^{3/2} - \frac{\pi a^2}{6}. \end{aligned}$$

4.28 Soient a et c deux nombres réels strictement positifs, et S la surface dont l'équation est

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

- 1° Calculer l'aire A de la surface S .
- 2° Calculer le volume V délimité par la surface S .

Solution 1° La surface S privée des points de coordonnées $(0, 0, c)$ et $(0, 0, -c)$ admet la représentation paramétrique

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\theta, h) = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2} \cos \theta \\ y(\theta, h) = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2} \sin \theta \\ z(\theta, h) = h. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 \leq \theta < 2\pi \\ -c < h < c \end{array}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{D(y, z)}{D(h, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{-ah}{c\sqrt{c^2-h^2}} \sin \theta & \frac{a}{c} \sqrt{c^2-h^2} \cos \theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{a}{c} \sqrt{c^2-h^2} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D(z, x)}{D(h, \theta)} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-ah}{c\sqrt{c^2-h^2}} \cos \theta & -\frac{a}{c} \sqrt{c^2-h^2} \sin \theta \end{vmatrix} \\ &= -\frac{a}{c} \sqrt{c^2-h^2} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D(x, y)}{D(h, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{-ah}{c\sqrt{c^2-h^2}} \cos \theta & -\frac{a}{c} \sqrt{c^2-h^2} \sin \theta \\ \frac{-ah}{c\sqrt{c^2-h^2}} \sin \theta & \frac{a}{c} \sqrt{c^2-h^2} \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= -\frac{a^2 h}{c^2}. \end{aligned}$$

Si on pose $D =]-c, c[\times]0, 2\pi[$ on a :

$$\begin{aligned} A &= \int_D \sqrt{\left(-\frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2} \cos \theta\right)^2 + \left(-\frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2} \sin \theta\right)^2 + \left(-\frac{a^2}{c^2} h\right)^2} \\ &\quad \times dh d\theta \\ &= 2\pi \int_{-c}^{+c} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} (c^2 - h^2) + \frac{a^4}{c^4} h^2} dh \\ &= 2\pi a \int_{-c}^{+c} \sqrt{1 + h^2 \frac{a^2 - c^2}{c^4}} dh. \end{aligned}$$

Si $a = c$, on obtient immédiatement

$$A = 4\pi a^2.$$

Supposons $a > c$ et effectuons le changement de variable

$$\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c^2} h = \operatorname{sh} \mu.$$

Si on pose

$$M = \operatorname{Arg sh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c},$$

on obtient

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi a c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_{-M}^M \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \mu} \operatorname{ch} \mu d\mu \\ &= \frac{2\pi a c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_{-M}^{+M} \operatorname{ch}^2 \mu d\mu = \frac{2\pi a c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_{-M}^{+M} \frac{1 + \operatorname{ch} 2\mu}{2} d\mu \\ &= \frac{2\pi a c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left[\frac{\mu}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2\mu}{4} \right]_{-M}^{+M} \\ &= \frac{2\pi a c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} (M + \operatorname{sh} M \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 M}) \\ &= \frac{2\pi a c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{Arg sh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} + 2\pi a^2. \end{aligned}$$

Supposons $a < c$ et effectuons le changement de variable

$$\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c^2} h = \sin v.$$

Si on pose

$$N = \text{Arc sin } \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c},$$

on obtient

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 \pi a c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \int_{-N}^N \sqrt{1 - \sin^2 v} \cos v \, dv = \frac{2 \pi a c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \int_{-N}^N \cos^2 v \, dv \\ &= \frac{2 \pi a c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \int_{-N}^N \frac{1 + \cos 2v}{2} \, dv = \frac{2 \pi a c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \left[\frac{v}{2} + \frac{\sin 2v}{4} \right]_{-N}^N \\ &= \frac{2 \pi a c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} [N + \sin N \sqrt{1 - \sin^2 N}] \\ &= \frac{2 \pi a c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \text{Arc sin } \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} + 2 \pi a^2. \end{aligned}$$

En résumé, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} a < c & \quad A = \frac{2 \pi a c^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \text{Arc sin } \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} + 2 \pi a^2 \\ a = c & \quad A = 4 \pi a^2 \\ a > c & \quad A = \frac{2 \pi a c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \text{Arg sh } \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} + 2 \pi a^2. \end{aligned}$$

2° Posons

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\}$$

$$U' = \left\{ (r, \theta, h) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta < 2\pi, -c < h < c, 0 < r < \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2} \right\}.$$

L'application $g = (g_1, g_2, g_3)$ définie pour tout élément (r, θ, h) de U' par

$$\begin{cases} g_1(r, \theta, h) = r \cos \theta \\ g_2(r, \theta, h) = r \sin \theta \\ g_3(r, \theta, h) = h \end{cases}$$

est une bijection continue de U' sur U . On a

$$\frac{D(g_1, g_2, g_3)}{D(r, \theta, h)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Par suite on obtient

$$\begin{aligned}V &= \int_U dx dy dz = \int_{U'} r dr d\theta dh \\&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{-c}^c dh \int_0^{(a/c)\sqrt{c^2-h^2}} r dr \right) \\&= 2\pi \int_{-c}^c \frac{a^2}{2c^2} (c^2 - h^2) dh \\&= \pi \left[a^2 h - \frac{a^2 h^3}{3c^2} \right]_{-c}^c = 2\pi \left[a^2 c - \frac{a^2 c}{3} \right] \\&= \frac{4\pi}{3} a^2 c.\end{aligned}$$

FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

5.1 Soit f une fonction de \mathbf{C} dans \mathbf{C} . Démontrer que si f est holomorphe, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) f est constante.

(ii) $\operatorname{Re} f$ est constante.

(iii) $\operatorname{Im} f$ est constante.

En déduire que la fonction g définie sur \mathbf{C} en posant pour tout nombre complexe z , $g(z) = |z|$ n'est pas holomorphe.

Solution Posons $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Puisque la fonction f est holomorphe, nous avons

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Il est clair que (i) \Rightarrow (ii) et (i) \Rightarrow (iii).

Démontrons que (ii) \Rightarrow (i). Puisque $\operatorname{Re} f$ est constante, la fonction P est constante et donc

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Par suite

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

ce qui prouve que la fonction Q est constante, donc la fonction f est constante.

On démontre de manière analogue que (iii) \Rightarrow (i).

Si la fonction g est holomorphe, alors comme la fonction $\text{Im } g$ est constante et vaut 0, la fonction g est constante ce qui n'est pas, donc la fonction g n'est pas holomorphe.

5.2

Soit f une fonction holomorphe de \mathbf{C} dans \mathbf{C} . On pose pour tout élément $z = x + iy$ de \mathbf{C} , $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. On suppose qu'il existe des nombres réels a, b, c non tous nuls, tels que l'on ait $aP(x, y) + bQ(x, y) = c$ pour tout élément (x, y) de \mathbf{R}^2 . Démontrer que f est constante.

Solution Pour tout élément (x, y) de \mathbf{R}^2 , nous avons

$$a \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$$

et

$$a \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + b \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Comme la fonction f est holomorphe, nous avons

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

d'où

$$\begin{cases} a \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0 \\ b \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - a \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0. \end{cases}$$

Or a ou b est non nul, sinon a, b et c seraient nuls ; donc le déterminant du système précédent est non nul et ce système admet une seule solution

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0.$$

D'où

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,$$

par suite les fonctions P et Q sont constantes, donc la fonction f est constante.

5.3 Soit r un nombre réel strictement positif ; pour chaque entier n supérieur à 1, on désigne par γ_n (resp γ) l'application de $[0, 2\pi]$ dans \mathbf{C} définie pour tout élément de $[0, 2\pi]$ par

$$\gamma_n(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) r e^{it} \quad (\text{resp } \gamma(t) = r e^{it}).$$

Soit f une application de \mathbf{C} dans \mathbf{C} continue sur le disque fermé de centre O et de rayon r . Démontrer que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Solution Nous avons

$$\int_{\gamma} f(z) dz = r i \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{it} dt$$

et

$$\int_{\gamma_n} f(z) dz = r i \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_0^{2\pi} f\left(r \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it}\right) e^{it} dt.$$

D'où

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_n} f(z) dz = r i \int_0^{2\pi} \left[f(r e^{it}) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) f\left(r \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it}\right) \right] e^{it} dt$$

par suite

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| \leq r \int_0^{2\pi} \left| f(r e^{it}) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) f\left(r \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it}\right) \right| dt.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \left| f(r e^{it}) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) f\left(r \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it}\right) \right| &\leq \\ &\leq \left| f(r e^{it}) - f\left(r \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it}\right) \right| + \frac{1}{n} \left| f\left(r \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it}\right) \right|. \end{aligned}$$

Comme la fonction f est continue, la fonction g définie sur le rectangle

$$R = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

en posant pour tout élément (ρ, t) de R

$$g(\rho, t) = f(\rho e^{it})$$

est continue. Cette fonction est donc bornée et uniformément continue, par suite pour tout nombre réel α strictement positif, il existe deux nombres réels strictement positifs ξ, ζ tels que pour tous les couples $((\rho, t), (\rho', t'))$ d'éléments de R vérifiant $|\rho - \rho'| < \xi$ et $|t - t'| < \zeta$, on ait

$$|f(\rho e^{it}) - f(\rho' e^{it'})| < \alpha.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif ; il existe alors un nombre réel strictement positif η tel que si $|\rho - \rho'| < \eta$, on ait pour tout élément t de $[0, 2\pi]$

$$|f(\rho e^{it}) - f(\rho' e^{it})| < \frac{\varepsilon}{4\pi r}.$$

Il existe donc un entier n_1 tel que pour tout entier n supérieur à n_1 , nous ayons

$$\left| r - \left(1 - \frac{1}{n}\right)r \right| < \eta;$$

alors pour tout entier n supérieur à n_1 , on a

$$\left| f(re^{it}) - f\left(r\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{it}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{4\pi r}.$$

La fonction f étant bornée sur le disque fermé de centre O et de rayon r , il existe un entier n_2 tel que pour tout entier n supérieur à n_2 et tout élément t de $[0, 2\pi]$, on ait

$$\frac{1}{n} \left| f\left(r\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{it}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{4\pi r}.$$

Si n est supérieur à $\sup(n_1, n_2)$, alors pour tout élément t de $[0, 2\pi]$, on a

$$\left| f(re^{it}) - f\left(r\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{it}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{4\pi r} + \frac{\varepsilon}{4\pi r} = \frac{\varepsilon}{2\pi r}$$

par suite

$$\int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) - f\left(r\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{it}\right) \right| dt < \frac{\varepsilon}{r}$$

d'où

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Pour tout nombre réel ε strictement positif, l'entier $n_0 = \sup(n_1, n_2)$ est tel que pour tout entier n supérieur à n_0 , on ait

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Ceci démontre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_n} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

5.4

Soit f une fonction holomorphe de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Pour chaque élément z de \mathbb{C} , on pose $f(z) = P(z) + iQ(z)$ où P et Q sont des fonctions à valeurs réelles. Soient a et b deux éléments de \mathbb{C} ; on définit la fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , en posant pour tout nombre réel t

$$F(t) = \frac{f(b + (a - b)t)}{a - b}.$$

1° Calculer en fonction de dP/dz et dQ/dz , les dérivées par rapport à t des fonctions R et I définies sur \mathbb{R} en posant pour chaque nombre réel t ,

$$R(t) = \operatorname{Re} F(t) \quad \text{et} \quad I(t) = \operatorname{Im} F(t).$$

2° En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires aux deux fonctions précédentes, démontrer qu'il existe deux points c et d du segment joignant a à b tels que

$$f(a) - f(b) = (a - b) \left(\frac{dP}{dz}(c) + i \frac{dQ}{dz}(d) \right).$$

Solution

1° Pour tout nombre réel t , on a

$$R(t) = \frac{P(b + (a - b)t)}{a - b}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \frac{P(b + (a - b)t)}{a - b} = \frac{1}{a - b} \left(\frac{dP}{dz}(b + (a - b)t) \right) \times \\ &\quad \times \frac{d}{dt}(b + (a - b)t) = \frac{dP}{dz}(b + (a - b)t). \end{aligned}$$

Nous avons de même

$$\frac{dI}{dt}(t) = \frac{dQ}{dz}(b + (a - b)t).$$

2° Puisque la fonction f est holomorphe, les fonctions P et Q sont continues et différentiables donc nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis aux fonctions R et I sur l'intervalle $[0, 1]$; par suite, il existe deux éléments θ, θ' de $]0, 1[$ tels que

$$R(1) - R(0) = \frac{dR}{dt}(\theta)$$

et

$$I(1) - I(0) = \frac{dI}{dt}(\theta')$$

ce qui peut s'écrire

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right) = \frac{dP}{dz}(b + (a - b)\theta)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right) = \frac{dQ}{dz}(b + (a - b)\theta').$$

Comme θ et θ' appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$, en posant

$$c = b + (a - b)\theta \quad \text{et} \quad d = b + (a - b)\theta',$$

il est clair que les points c et d sont sur le segment joignant a et b et que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right) = \frac{dP}{dz}(c)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right) = \frac{dQ}{dz}(d)$$

d'où

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{dP}{dz}(c) + i \frac{dQ}{dz}(d)$$

soit

$$f(a) - f(b) = (a - b) \left[\frac{dP}{dz}(c) + i \frac{dQ}{dz}(d) \right].$$

5.5

Soit f une fonction complexe définie et continue dans un ouvert D du plan complexe. On suppose qu'il existe un point a de D et un disque de centre a et de rayon r contenu dans D tels que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

et

$$|f(z)| \leq |f(a)|$$

si $0 \leq \rho \leq r$ et $|z - a| \leq r$.

1° a) On suppose que $f(a)$ est un nombre réel positif et on pose pour tout élément ρ de $[0, r]$

$$M(\rho) = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(a + \rho e^{i\theta})|;$$

démontrer que

$$M(\rho) = f(a).$$

b) Pour tout élément z de D , on pose $g(z) = \operatorname{Re}(f(a) - f(z))$. Démontrer que pour tout nombre réel ρ tel que $0 \leq \rho \leq r$, on a $g(z) \geq 0$ pour $|z - a| = \rho$ et

$$\int_0^{2\pi} g(a + \rho e^{i\theta}) d\theta = 0.$$

En déduire que $g(z) = 0$ pour $|z - a| = \rho$.

2° Déduire de ce qui précède que $f(a) = f(z)$ pour $|z - a| \leq r$.

Solution 1° a) Nous avons par définition $M(\rho) \leq f(a)$. Comme

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

nous avons

$$f(a) = |f(a)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \right|$$

d'où

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + \rho e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(\rho) d\theta = M(\rho).$$

Par suite $M(\rho) = f(a)$.

b) Comme $f(a) \geq 0$, on a pour tout nombre complexe z tel que $|z - a| = \rho$

$$g(z) = f(a) - \operatorname{Re} f(z)$$

par ailleurs $|f(z)| \leq f(a)$ donc $\operatorname{Re} f(z) \leq f(a)$ et $g(z) \geq 0$. On a

$$\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(a) = \int_0^{2\pi} f(a) d\theta$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} [f(a + \rho e^{i\theta}) - f(a)] d\theta = 0$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} [f(a + \rho e^{i\theta}) - f(a)] d\theta = 0$$

soit

$$\int_0^{2\pi} g(a + \rho e^{i\theta}) d\theta = 0.$$

La fonction g est continue et positive sur le cercle de centre a et de rayon ρ ,

donc le nombre réel $\int_0^{2\pi} g(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$ n'est nul que si la fonction g est nulle sur ce cercle, d'où $g(z) = 0$ pour $|z - a| = \rho$. Il en résulte que $\operatorname{Re} f(z) = f(a)$ pour $|z - a| = \rho$ et comme $|f(z)| \leq f(a)$, on a $f(z) = f(a)$ pour $|z - a| = \rho$.

2° Si $f(a) = 0$, alors comme $|f(z)| \leq f(a)$, on a $f(z) = 0$ pour $|z - a| \leq \rho$.

Si $f(a)$ est un nombre complexe non nul, la fonction h définie sur D en posant pour tout élément z de D , $h(z) = f(z)/f(a)$, vérifie les hypothèses de la question 1°, donc pour tout nombre réel ρ tel que $0 \leq \rho \leq r$ et tout élément z de D tel que $|z - a| \leq \rho$, on a $h(z) = h(a) = 1$, donc $f(z) = f(a)$ si $|z - a| \leq r$.

5.6

Soit f une fonction complexe définie et analytique dans un disque ouvert D de centre O . Soient z_1, z_2, \dots, z_n les zéros de f d'ordres respectifs p_1, p_2, \dots, p_n . Soit γ un chemin fermé de D ne passant par aucun des points z_1, z_2, \dots, z_n . Démontrer que si $\mathcal{I}(\gamma, z_i)$ désigne l'indice du chemin γ par rapport à z_i on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n p_i \mathcal{I}(\gamma, z_i).$$

Solution

Puisque f est analytique, il existe une fonction analytique φ définie sur D (cf. C. E., Ch. 9, § 1, n° 157) et ne s'annulant pas sur D telle que l'on ait pour tout élément z de D

$$f(z) = (z - z_1)^{p_1} (z - z_2)^{p_2} \dots (z - z_n)^{p_n} \varphi(z)$$

d'où

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p_1}{z - z_1} + \frac{p_2}{z - z_2} + \dots + \frac{p_n}{z - z_n} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Comme φ ne s'annule pas sur D , la fonction φ'/φ est holomorphe sur D , donc

$$\int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz = 0$$

par suite

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\gamma} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{z - z_i} \right) + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right] dz \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_i} + \int_{\gamma} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz. \end{aligned}$$

Mais par définition de l'indice d'un chemin on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_i} = \mathcal{J}(\gamma, z_i)$$

d'où

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n p_i \mathcal{J}(\gamma, z_i).$$

5.7 Soient a, b deux nombres réels strictement positifs et Γ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Trouver un chemin γ dans \mathbb{C} d'image Γ et calculer

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

En déduire que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Solution Pour tout élément t de $[0, 2\pi]$ posons

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Il est clair que l'application γ est différentiable sur $[0, 2\pi]$ et que, lorsque t parcourt $[0, 2\pi]$, $\gamma(t)$ parcourt Γ .

La fonction constante de valeur 1 définie sur \mathbb{C} est évidemment holomorphe donc la formule intégrale de CAUCHY donne

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi$$

car l'indice du chemin γ est 1. En posant $z = a \cos t + ib \sin t$, on a

$$dz = (-a \sin t + ib \cos t) dt$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin t + ib \cos t}{a \cos t + ib \sin t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \sin t \cos t + iab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= (b^2 - a^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin t \cos t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt + \\ &\quad + iab \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \end{aligned}$$

et comme

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi$$

on a

$$(b^2 - a^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin t \cos t dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = 0$$

et

$$iab \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = 2i\pi$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

5.8

Calculer les intégrales suivantes

a)
$$\int_{\gamma_1} \bar{z} dz$$

γ_1 étant le chemin défini sur $[0, \pi]$ en posant $\gamma_1(\theta) = e^{i\theta}$.

b)
$$\int_{\gamma_2} (z + 1) dz$$

γ_2 étant le chemin défini sur $[0, 1]$ par $\gamma_2(t) = (1 + i)t$.

c)
$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{1 + z^2}$$

γ_3 étant le chemin défini sur $[0, \pi/4]$ par $\gamma_3(\theta) = e^{i\theta}$.

Solution a) On a

$$\int_{\gamma_1} \bar{z} dz = \int_0^\pi e^{-i\theta} (i e^{i\theta}) d\theta = i\pi$$

b) On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} (z + 1) dz &= \int_0^1 [(1 + i)t + 1] (1 + i) dt \\ &= \int_0^1 [1 + i(2t + 1)] dt = \int_0^1 dt + i \int_0^1 (2t + 1) dt \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\gamma_2} (z + 1) dz = 1 + 2i.$$

c)

$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{1 + z^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{i e^{i\theta} d\theta}{1 + e^{2i\theta}} = i \int_0^{\pi/4} \frac{e^{i\theta} d\theta}{1 + e^{2i\theta}}.$$

Mais

$$\frac{e^{i\theta}}{1 + e^{2i\theta}} = \frac{1}{e^{-i\theta} + e^{i\theta}} = \frac{1}{2 \cos \theta}$$

d'où

$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{1 + z^2} = i \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{2 \cos \theta} = \frac{i}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

Posons $\sin \theta = u$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos \theta} &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{1 - u^2} = \left[\frac{1}{2} \text{Log} \frac{1 + u}{1 - u} \right]_0^{\sqrt{2}/2} \\ &= \frac{1}{2} \text{Log} \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

et par suite

$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{i}{4} \text{Log} \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.$$

5.9

Soient A, a deux nombres réels strictement positifs et soit γ l'ensemble des nombres complexes z tels que ($\text{Re } z = A$ ou $\text{Re } z = -A$) et ($\text{Im } z = 0$ ou $\text{Im } z = a$). En calculant $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz$, démontrer que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^{+A} e^{-(x+ia)^2} dx$$

existe et est un nombre complexe indépendant de a .

Solution La fonction f définie pour tout élément z de \mathbb{C} par $f(z) = e^{-z^2}$ est holomorphe donc $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0$. En posant $z = x + iy$, on a

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int_{-A}^A e^{-x^2} dx + i \int_0^a e^{-(A+iy)^2} dy + \int_A^{-A} e^{-(x+ia)^2} dx + i \int_a^0 e^{-(-A+iy)^2} dy. \quad (1)$$

On a

$$\int_0^a e^{-(A+iy)^2} dy = \int_0^a e^{-A^2+y^2-2iAy} dy = e^{-A^2} \int_0^a e^{y^2-2iAy} dy$$

mais

$$\left| \int_0^a e^{y^2-2iAy} dy \right| \leq \int_0^a |e^{y^2-2iAy}| dy \leq \int_0^a e^{y^2} dy \leq a e^{a^2}$$

donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-(A+iy)^2} dy = 0.$$

On montre de même que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^0 e^{(-A+iy)^2} dy = 0.$$

D'autre part, on a

$$\left| \int_{-A}^A e^{-(x+ia)^2} dx \right| \leq \int_{-A}^A e^{-(x^2-a^2)} dx$$

mais

$$\int_{-A}^A e^{-(x^2-a^2)} dx = e^{a^2} \int_{-A}^A e^{-x^2} dx$$

et nous savons (cf. exercice 4.16) que $\int_{-A}^A e^{-x^2} dx$ possède une limite lorsque

A tend vers $+\infty$, donc $\int_{-A}^A e^{-(x+ia)^2} dx$ possède une limite lorsque A tend vers $+\infty$, par suite l'égalité (1) donne par passage à la limite

$$0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A e^{-x^2} dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{-A} e^{-(x+ia)^2} dx$$

d'où

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A e^{-(x+ia)^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A e^{-(x+ia)^2} dx$ existe et est indépendant de a .

5.10 Déterminer les points singuliers des fonctions complexes f et g définies par

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 - 1} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{z^3 + 1}{z(z - i)^3}.$$

Calculer les résidus correspondants.

Solution Les points singuliers de la fonction f sont les nombres complexes z vérifiant $z^4 - 1 = 0$; ce sont donc les nombres $z_k = e^{ki2\pi/4}$ où k est un entier tel que $0 \leq k \leq 3$. Ces points sont des pôles simples et on a (cf. C. E., Ch. 9, § IV, n° 170)

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{z_k^2 + 1}{4 z_k^3}$$

pour $0 \leq k \leq 3$.

D'où

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{1}{2} \qquad \text{Res}(f, e^{i2\pi/4}) = 0$$

$$\text{Res}(f, -1) = -\frac{1}{2} \qquad \text{Res}(f, e^{i6\pi/4}) = 0.$$

Les points singuliers de la fonction g sont les nombres complexes $z = 0$ et $z = i$. Le nombre 0 étant pôle simple, on a

$$\text{Res}(g, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{z^3 + 1}{z(z - i)^3} = -i.$$

Le nombre i est un pôle d'ordre 3. Posons $z - i = t$; alors on a

$$\frac{z^3 + 1}{z(z - i)^3} = \frac{(i + t)^3 + 1}{(t + i)t^3}$$

et le résidu de g au point $z = i$ est donc le coefficient de t^2 dans le développement de TAYLOR en t au point O de la fonction $\frac{(t+i)^3 + 1}{t+i}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1 + (t+i)^3}{t+i} &= \frac{1}{i} \frac{1-i-3t+3it^2+t^3}{1-it} \\ &= \frac{1}{i} (1-i-3t+3it^2+t^3)(1+it-t^2+o(t^2)) \\ &= \frac{1}{i} [(1-i) + (-2+i)t - (1-i)t^2 + o(t^2)]. \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Res}(g, i) = \frac{1}{i}(i-1) = i+1.$$

5.11 Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}.$$

Solution Considérons le cercle γ de rayon 1 centré en O . Posons $z = e^{i\theta}$; alors $1/z = e^{-i\theta}$ donc

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{et} \quad dz = i e^{i\theta} d\theta.$$

Il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2} = \int_{\gamma} \frac{dz}{iz \left(2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)^2}.$$

Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \frac{1}{z \left(2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)^2}.$$

On a

$$f(z) = \frac{4z}{(z^2 + 4z + 1)^2} = \frac{4z}{(z + 2 + \sqrt{3})^2 (z + 2 - \sqrt{3})^2}.$$

Les pôles de f sont $z_1 = -2 - \sqrt{3}$ et $z_2 = -2 + \sqrt{3}$. D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi iR$$

(cf. C. E., Ch. 9, § IV, n° 170) où R est la somme des résidus de f relatifs aux pôles contenus dans le disque unité. Seul le pôle $z_2 = -2 + \sqrt{3}$ est contenu dans le disque unité. Calculons $\text{Res}(f, z_2)$. Posons $t = z - (-2 + \sqrt{3})$; nous obtenons

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{4(t - 2 + \sqrt{3})}{(t + 2\sqrt{3})^2 t^2} = \frac{1}{t^2} \frac{4(t - 2 + \sqrt{3})}{12 + 4\sqrt{3}t + t^2} \\ &= \frac{1}{t^2} \frac{4(t - 2 + \sqrt{3})}{12\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}t + \frac{t^2}{12}\right)} = \frac{1}{3t^2} \frac{t - 2 + \sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}t + \frac{t^2}{12}} \\ &= \frac{1}{3t^2} (t - 2 + \sqrt{3}) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}t + o(t)\right) \\ &= \frac{1}{3t^2} \left(-2 + \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}t + o(t)\right) \end{aligned}$$

et par suite

$$\text{Res}(f, z_2) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

d'où

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{iz \left(2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = 2\pi \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

soit

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$$

5.12

Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}.$$

Solution Effectuons le changement de variable défini par $\theta' = \pi - \theta$; on trouve

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\theta'}{1 + \sin^2 \theta'}$$

d'où

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}.$$

De même en effectuant le changement de variable défini par $\theta'' = \pi + \theta$, nous obtenons

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta''}{1 + \sin^2 \theta''}$$

par suite

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}.$$

Si γ est le chemin défini sur $[0, 2\pi]$ en posant pour tout élément θ de $[0, 2\pi]$, $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et si on effectue le changement de variable $z = e^{i\theta}$, on a

$$dz = iz d\theta \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right);$$

par suite

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} &= \int_{\gamma} \frac{dz}{iz \left[1 - \frac{1}{4} \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \right]} \\ &= -\frac{4}{i} \int_{\gamma} \frac{z dz}{z^4 - 6z^2 + 1}. \end{aligned}$$

La fonction f définie par

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 6z^2 + 1}$$

admet quatre pôles simples réels,

$$z_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$z_2 = -1 - \sqrt{2}$$

$$z_3 = 1 - \sqrt{2}$$

$$z_4 = -1 + \sqrt{2}.$$

Seuls les pôles z_3 et z_4 sont intérieurs au disque unité. Calculons les résidus de la fonction f aux points z_3 et z_4 . On a

$$\operatorname{Res}(f, z_3) = \frac{z_3}{4z_3^3 - 12z_3} = \frac{1}{4(z_3^2 - 3)} = \frac{-1}{8\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{Res}(f, z_4) = \frac{1}{4(z_4^2 - 3)} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

D'après le théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z \, dz}{z^4 - 6z^2 + 1} &= 2\pi i [\operatorname{Res}(f, z_3) + \operatorname{Res}(f, z_4)] \\ &= -\frac{\pi i}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = -\frac{4}{i} \int_{\gamma} \frac{z \, dz}{z^4 - 6z^2 + 1}$$

et par suite

$$I = \pi\sqrt{2}.$$

5.13 Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}.$$

Solution Soit f la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$. Les pôles de la fonction f sont les nombres complexes

$$z_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

où k est un entier tel que $0 \leq k \leq 5$.

Soient r un nombre réel strictement supérieur à 1 et Γ_r le chemin de \mathbb{C} constitué du demi-cercle supérieur γ_r de centre O et de rayon r et du segment $[-r, +r]$. On suppose Γ_r orienté dans le sens direct. Les seuls pôles de la fonction f

contenus dans le domaine limité par Γ_r , sont z_0, z_1, z_2 . D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res}(f, z_k)$$

soit

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res}(f, z_k).$$

On a pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 5$,

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res}(f, z_k) &= -\frac{1}{6}(e^{i\pi/6} + e^{i\pi/2} + e^{i5\pi/6}) \\ &= -\frac{i}{6}\left(1 + 2\sin\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{i}{3}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{-r}^r f(x) dx = \frac{2\pi}{3} - \int_{\gamma_r} f(z) dz.$$

Nous savons que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$$

(cf. C. E., Ch. 9, § V, n° 172) et par suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} f(x) dx = \frac{2\pi}{3}$$

soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2\pi}{3}.$$

5.14 Calculer par la méthode des résidus, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Solution Cette intégrale est convergente car le degré du dénominateur est égal au degré du numérateur plus 2. Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2};$$

les pôles de la fonction f sont les pôles doubles $z_1 = i$ et $z_2 = -i$.

Soient r un nombre réel strictement supérieur à 1, et Γ_r le chemin de \mathbf{C} constitué du demi-cercle supérieur γ_r de cercle O et de rayon r et du segment $[-r, r]$. Nous avons alors

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

Calculons $\operatorname{Res}(f, i)$. Posons $t = z - i$; alors on a

$$f(z) = \frac{(t + i)^2}{t^2(t + 2i)^2}.$$

Le résidu de f au point i est le coefficient de $1/t$ dans le développement de LAURENT au voisinage de 0 de la fonction $\frac{(t + i)^2}{t^2(t + 2i)^2}$; il suffit donc de calculer le coefficient de t dans le développement de TAYLOR au voisinage de 0 de la fonction $\frac{(t + i)^2}{(t + 2i)^2}$. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{(t + i)^2}{(t + 2i)^2} &= \frac{t^2 + 2it - 1}{t^2 + 4it - 4} = -\frac{1}{4} \frac{t^2 + 2it - 1}{1 - it - \frac{t^2}{4}} \\ &= -\frac{1}{4} [(-1 + 2it + t^2)(1 + it + o(t))] \\ &= -\frac{1}{4} [-1 + it + o(t)] \end{aligned}$$

d'où $\operatorname{Res}(f, i) = -i/4$.
Par suite, on a

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz = \frac{\pi}{2}$$

d'où

$$\int_{-r}^r f(z) dz = \frac{\pi}{2} - \int_{\gamma_r} f(z) dz.$$

Comme

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$$

(cf. C. E., Ch. 9, § V, n° 172), nous obtenons

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

5.15 Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Solution On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{(1+x^2)^2} dx.$$

Il est clair que les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{(1+x^2)^2} dx$$

sont absolument convergentes. De plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{-\infty} \frac{-e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx.$$

Si r est un nombre réel strictement supérieur à 1, on appelle Γ_r le chemin formé du demi-cercle supérieur γ_r de centre O et de rayon r et du segment $[-r, r]$. Soit f la fonction définie par $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$. La fonction f n'admet aucun pôle réel et le seul point singulier de f contenu dans le domaine limité par Γ_r est le pôle double $z = i$. D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

Calculons $\text{Res}(f, i)$. Si on pose $z - i = t$, alors le résidu de f au point i est le coefficient de $1/t$ dans le développement de LAURENT de f au voisinage de 0. Nous avons

$$f(z) = \frac{e^{i(t+i)}}{t^2(t+2i)^2}.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{e^{i(t+i)}}{t^2(t+2i)^2} &= \frac{1}{e} \frac{e^{it}}{t^2(-4+4it+t^2)} = \frac{-1}{4et^2} \frac{e^{it}}{1-it-\frac{t^2}{4}} \\ &= -\frac{1}{4et^2} (1+it+o(t))(1+it+o(t)) \\ &= -\frac{1}{4e} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2i}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \right) \end{aligned}$$

donc

$$\text{Res}(f, i) = -\frac{i}{2e}.$$

D'où

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz = \frac{\pi}{e}.$$

Nous savons (cf. C. E., Ch. 9, § V, n° 173) que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \text{Re } z \geq 0}} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} = 0.$$

Donc comme

$$\int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx = - \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} dz + \frac{\pi}{e}$$

on a

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

et par suite

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

5.16 Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Solution Pour tout couple (a, r) de nombres réels tels que $0 < a < 1 < r$, on a

$$\int_a^r \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} \cos x \right]_a^r + \int_a^r \cos x \left[\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} \right]' dx.$$

La fonction cosinus est bornée et comme

$$\frac{-(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)} \sim \frac{1}{x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} \cos x \right]_a^r = \frac{(a^2 - 1) \cos a}{a(a^2 + 1)}.$$

D'autre part, on a

$$\int_a^r \cos x \left(\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} \right)' dx = \int_a^r \cos x \frac{-x^4 + 4x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)^2} dx$$

d'où

$$\left| \int_a^r \cos x \left(\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} \right)' dx \right| \leq \int_a^r \left| \frac{-x^4 + 4x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)^2} \right| dx.$$

Comme

$$\left| \frac{-x^4 + 4x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)^2} \right| \sim \frac{1}{x^2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$, et comme l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente, l'intégrale

$\int_a^r \cos x \left(\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} \right)' dx$ est absolument convergente, donc

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} dx$$

existe. D'autre part

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

par suite l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{\sin x}{x} dx$$

est définie. Nous avons

$$\int_0^r \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \left[\int_0^r \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_0^r \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{e^{-ix}}{x} dx \right].$$

Mais

$$\int_0^r \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{e^{-ix}}{x} dx = \int_0^{-r} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

d'où

$$\int_0^r \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \int_{-r}^r \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

On appelle $\Gamma_{a,r}$ le chemin formé du demi-cercle supérieur γ_r de centre O et de rayon r parcouru dans le sens direct, du segment $[-r, -a]$, du demi-cercle supérieur γ_a de centre O et de rayon a parcouru dans le sens rétrograde, et du segment $[a, r]$. Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \frac{e^{iz}}{z}.$$

Dans le domaine limité par $\Gamma_{a,r}$, la fonction f admet le pôle simple $z = i$. En appliquant le théorème des résidus, nous obtenons

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

Calculons $\operatorname{Res}(f, i)$. Si on pose $z - i = t$, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(t+i)^2 - 1}{t(t+2i)} \frac{e^{i(t+i)}}{t+i} = \frac{1}{e} \frac{-2 + 2it + t^2}{t(-2 + 3it + t^2)} e^{it} \\ &= -\frac{1}{2e} \frac{(-2 + o(1))(1 + o(1))(1 + o(1))}{t} \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{e}$$

d'où

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = \frac{2\pi i}{e}.$$

Mais on a

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = \int_{-r}^{-a} f(x) dx + \int_{\gamma_a} f(z) dz + \int_a^r f(x) dx + \int_{\gamma_r} f(z) dz.$$

Comme

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \operatorname{Re} z \geq 0}} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \frac{e^{iz}}{z} = 0,$$

on a

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

D'autre part on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\gamma_a} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

(cf. C. E., Ch. 9, § V, n° 173).

Calculons $\operatorname{Res}(f, 0)$. Il vient

$$f(z) = \frac{-1 + z^2}{1 + z^2} \frac{e^{iz}}{z} = \frac{(-1 + o(1))(1 + o(1))(1 + o(1))}{z}$$

d'où

$$\operatorname{Res}(f, 0) = -1$$

donc

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\gamma_a} f(z) dz = \pi i$$

et par suite

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \pi i + \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{2\pi i}{e} - \pi i$$

donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi(2 - e)}{2e}.$$

5.17 Le but de cet exercice est de calculer

$$\int_0^{+\infty} x^{1/3} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

1° Démontrer que cette intégrale est convergente.

2° On considère la fonction complexe f définie par

$$f(z) = z^{1/3} \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2} \quad \text{ou} \quad z^{1/3} = |z|^{1/3} e^{i(\text{Arg } z)/3}.$$

Soient a, r deux nombres réels tels que $0 < a < 1 < r$. On appelle $\Gamma_{a,r}$ le chemin formé du demi-cercle supérieur γ_r de centre O et de rayon r parcouru dans le sens direct, du segment $[-r, -a]$, du demi-cercle supérieur γ_a de centre O et de rayon a parcouru dans le sens rétrograde, et du segment $[a, r]$. Démontrer que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\gamma_a} f(z) dz = 0.$$

3° En appliquant le théorème des résidus à la fonction f sur le chemin $\Gamma_{a,r}$, calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Solution 1° Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$x^{1/3} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \sim \frac{1}{x^{1+(2/3)}},$$

par suite l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^{1/3} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

est définie comme l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+(2/3)}}.$$

2° Nous avons $|z^2 - 1| \leq |z|^2 + 1$ et $||z|^2 - 1| \leq |z^2 + 1|$, et par suite

$$\left| z^{1/3} \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2} \right| \leq |z|^{1/3} \frac{|z|^2 + 1}{(|z|^2 - 1)^2}$$

Posons $z = r e^{i\theta}$, il vient

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_0^\pi f(r e^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta$$

d'où

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq r \int_0^\pi |f(r e^{i\theta})| d\theta$$

donc

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq r \int_0^\pi r^{1/3} \frac{r^2 + 1}{(r^2 - 1)^2} d\theta = \pi r^{4/3} \frac{r^2 + 1}{(r^2 - 1)^2}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Nous avons de même en posant $z = a e^{i\theta}$

$$\left| \int_{\gamma_a} f(z) dz \right| \leq \pi a^{4/3} \frac{a^2 + 1}{(a^2 - 1)^2}$$

d'où

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\gamma_a} f(z) dz = 0.$$

3° La fonction f admet le pôle double $z = i$ dans le domaine de \mathbb{C} limité par le chemin $\Gamma_{a,r}$. D'après le théorème des résidus nous avons

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

Calculons $\operatorname{Res}(f, i)$. Nous avons en posant $z - i = t$

$$f(z) = (t + i)^{1/3} \frac{(t + i)^2 - 1}{t^2(t + 2i)^2}.$$

Calculons le coefficient de $1/t$ dans le développement de LAURENT de f au voisinage de 0. Nous obtenons

$$(t + i)^{1/3} = i^{1/3}(1 - it)^{1/3} = e^{i\pi/6} \left(1 - \frac{it}{3} + o(t) \right)$$

$$(t + 2i)^2 = (t^2 + 4it - 4) = -4(1 - it + o(t))$$

d'où

$$\begin{aligned} (t+i)^{1/3} \frac{(t+i)^2 - 1}{t^2(t+2i)^2} &= \\ &= \frac{-e^{i\pi/6}}{4t^2} \left(1 - \frac{it}{3} + o(t)\right) (-2 + 2it + o(t)) (1 + it + o(t)) \\ &= \frac{e^{i\pi/6}}{2t^2} \left(1 - \frac{it}{3} + o(t)\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Res}(f, i) = -i \frac{e^{i\pi/6}}{6}$$

donc

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = \pi \frac{e^{i\pi/6}}{3}.$$

Explicitons $\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz$. Nous avons

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-r}^{-a} f(z) dz + \int_{\gamma_a} f(z) dz + \int_a^r f(z) dz.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{-a} f(z) dz &= \int_{-r}^{-a} (-x)^{1/3} e^{i\pi/3} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= e^{i\pi/3} \int_a^r x^{1/3} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = (1 + e^{i\pi/3}) \int_a^r x^{1/3} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx + \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{\gamma_a} f(z) dz.$$

Par passage à la limite, il en résulte que

$$\frac{\pi e^{i\pi/6}}{3} = (1 + e^{i\pi/3}) \int_0^{+\infty} x^{1/3} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

et par suite on a

$$\int_0^{+\infty} x^{1/3} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{3} e^{i\pi/6} \frac{1}{1 + e^{i\pi/3}}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} x^{1/3} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi \sqrt{3}}{9}.$$

5.18 Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\text{Log } x)^2}{1 + x^2} dx.$$

Solution Démontrons que l'intégrale proposée est convergente. Il existe un nombre réel strictement positif A tel que pour tout nombre réel x supérieur à A , on ait $\text{Log } x < x^{1/4}$ et par suite

$$\frac{(\text{Log } x)^2}{1 + x^2} \leq \frac{x^{1/2}}{1 + x^2}.$$

Comme $\int_A^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{1 + x^2} dx$ est définie, $\int_A^{+\infty} \frac{(\text{Log } x)^2}{(1 + x^2)} dx$ est définie et par suite $\int_1^{+\infty} \frac{(\text{Log } x)^2}{1 + x^2} dx$ est convergente. En effectuant le changement de variable $u = 1/x$, on a

$$\int_0^1 \frac{(\text{Log } x)^2}{1 + x^2} dx = \int_{+\infty}^1 \frac{(\text{Log } u)^2}{1 + \frac{1}{u^2}} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{(\text{Log } u)^2}{u^2 + 1} du.$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\text{Log } x)^2}{1 + x^2} dx$ est définie et $\int_0^{+\infty} \frac{(\text{Log } x)^2}{1 + x^2} dx$ l'est aussi.

Soient a, r des nombres réels tels que $0 < a < 1 < r$. On appelle $\Gamma_{a,r}$ le chemin de \mathbb{C} formé du demi-cercle supérieur γ_r de centre O et de rayon r parcouru dans le sens direct, du segment $[-r, -a]$, du demi-cercle supérieur γ_a de centre O et de rayon a parcouru dans le sens rétrograde et du segment $[a, r]$. Soit f la fonction complexe définie par

$$f(z) = \frac{(\text{Log } z)^2}{1 + z^2}$$

où $\text{Log } z = \text{Log } |z| + i \text{Arg } z$ avec $0 \leq \text{Arg } z < 2\pi$. La fonction f admet le pôle simple $z = i$ dans le domaine de \mathbb{C} limité par $\Gamma_{a,r}$; par suite nous avons

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, i).$$

Calculons $\text{Res}(f, i)$. Pour cela posons $z - i = t$, il vient

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{[\text{Log}(t + i)]^2}{t(t + 2i)} = \frac{[\text{Log } i + \text{Log}(1 - it)]^2}{t(t + 2i)} \\ &= \frac{[i\pi/2 + \text{Log}(1 - it)]^2}{2it\left(1 - \frac{it}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Cherchons le coefficient de $1/t$ du développement de LAURENT de f au voisinage de 0. Nous obtenons

$$f(z) = \frac{-i}{2t} \left(-\frac{\pi^2}{4} + o(1) \right) (1 + o(1)) = \frac{i\pi^2}{8t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

donc

$$\text{Res}(f, i) = \frac{i\pi^2}{8}.$$

Par suite

$$\int_{\Gamma_{arr}} f(z) dz = -\frac{\pi^3}{4}.$$

D'autre part on a

$$\int_{\Gamma_{arr}} f(z) dz = \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-r}^{-a} f(z) dz + \int_{\gamma_a} f(z) dz + \int_a^r f(z) dz.$$

Mais

$$\int_{-r}^{-a} f(z) dz = \int_{-r}^{-a} \frac{(\text{Log}(-x) + i\pi)^2}{1 + x^2} dx.$$

En faisant le changement de variable $u = -x$, il vient

$$\int_{-r}^{-a} f(z) dz = \int_a^r \frac{(\text{Log } u + i\pi)^2}{1 + u^2} du$$

d'où

$$-\frac{\pi^3}{4} = \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{\gamma_a} f(z) dz + \int_a^r \frac{(\text{Log } x + i\pi)^2 + (\text{Log } x)^2}{1 + x^2} dx.$$

On a

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = ir \int_0^\pi f(re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

et d'autre part $\text{Log}(re^{i\theta}) = \text{Log } r + i\theta$, par suite

$$|\text{Log}(re^{i\theta})| \leq |\text{Log } r| + \theta$$

et comme $||z|^2 - 1| \leq |z^2 + 1|$, on obtient

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq r \int_0^\pi \frac{|\operatorname{Log} r| + \theta}{r^2 - 1} d\theta \leq \pi r \frac{|\operatorname{Log} r|}{r^2 - 1} + \frac{r}{r^2 - 1} \int_0^\pi \theta d\theta.$$

Il en résulte que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Par un raisonnement analogue, on démontre que

$$\left| \int_{\gamma_a} f(z) dz \right| \leq \pi a \frac{|\operatorname{Log} a|}{|a^2 - 1|} + \frac{a}{|a^2 - 1|} \int_0^\pi \theta d\theta$$

et comme $\lim_{a \rightarrow 0} a \operatorname{Log} a = 0$, on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\gamma_a} f(z) dz = 0.$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} \int_a^r \frac{(\operatorname{Log} x + i\pi)^2 + (\operatorname{Log} x)^2}{1 + x^2} dx &= \\ &= 2 \int_a^r \frac{(\operatorname{Log} x)^2}{1 + x^2} dx - \pi^2 \int_a^r \frac{dx}{1 + x^2} + 2i\pi \int_a^r \frac{\operatorname{Log} x}{1 + x^2} dx. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient

$$-\frac{\pi^3}{4} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{Log} x)^2}{1 + x^2} dx - \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} + 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{1 + x^2} dx$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{1 + x^2} dx = 0$$

et comme $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}$, il en résulte que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{Log} x)^2}{1 + x^2} dx = \frac{\pi^3}{8}.$$

5.19 Calculer par la méthode des résidus

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{\sqrt{x}(x^2 + 1)^2} dx.$$

Solution Démontrons que cette intégrale est convergente. Il existe un nombre réel strictement positif A tel que pour tout nombre réel x supérieur à A on ait

$$\frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}} \leq 1 \text{ et par suite}$$

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(x^2 + 1)^2} dx \right| \leq \int_A^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Cette dernière intégrale étant convergente, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} dx$ est convergente.

Nous avons d'autre part si a est un nombre réel tel que $0 < a < 1$

$$\left| \int_a^1 \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} dx \right| \leq \int_a^1 \frac{|\text{Log } x|}{\sqrt{x}(x^2 + 1)^2} dx \leq \int_a^1 \frac{|\text{Log } x|}{\sqrt{x}} dx.$$

Lorsque x tend vers 0, $x^{1/4} \text{Log } x$ tend vers 0, donc il existe un nombre réel B , tel que pour tout nombre réel x vérifiant $0 < x < B$ on ait

$$|\text{Log } x| \leq \frac{1}{x^{1/4}}$$

et par suite

$$\frac{|\text{Log } x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{3/4}}$$

Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/4}}$ est définie, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{|\text{Log } x|}{\sqrt{x}} dx$$

est définie et par suite que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} dx$ est convergente et

$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2}$ l'est aussi.

Soient a et r deux nombres réels tels que $0 < a < 1 < r$. On appelle $\Gamma_{a,r}$ le chemin de \mathbb{C} formé du demi-cercle supérieur γ_r de centre O et de rayon r parcouru dans le sens direct, du segment $[-r, -a]$, du demi-cercle supérieur γ_a de centre O et de rayon a parcouru dans le sens rétrograde et du segment $[a, r]$. La fonction complexe f définie par

$$f(z) = \frac{\text{Log } z}{\sqrt{z}(1 + z^2)^2}$$

où

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} |z| + i \operatorname{Arg} z \quad \text{et} \quad \sqrt{z} = |z|^{1/2} \exp \left[i \frac{\operatorname{Arg} z}{2} \right]$$

avec $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$ admet le pôle double $z = i$ dans le domaine de \mathbb{C} limité par le chemin $\Gamma_{a,r}$. Le théorème des résidus nous donne donc

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

Calculons $\operatorname{Res}(f, i)$. Posons $z - i = t$; il vient

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log}(t + i)}{t^2 \sqrt{t + i} (t + 2i)^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\operatorname{Log} i + \operatorname{Log}(1 - it)}{e^{i\pi/4} (1 - it)^{1/2} t^2 (-4 + 4i + t^2)} \\ &= -\frac{e^{-i\pi/4}}{4t^2} \left(i \frac{\pi}{2} - it + o(t) \right) (1 + it + o(t)) \left(1 + \frac{it}{2} + o(t) \right) \\ &= -\frac{e^{-i\pi/4}}{4t^2} \left[i \frac{\pi}{2} - \left(i + \frac{3\pi}{4} \right) t + o(t) \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{e^{-i\pi/4}}{4} \left(\frac{3\pi}{4} + i \right)$$

donc

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = \frac{\pi i e^{-i\pi/4}}{2} \left(\frac{3\pi}{4} + i \right).$$

D'autre part on a

$$\int_{\Gamma_{a,r}} f(z) dz = \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-r}^{-a} f(x) dx + \int_{\gamma_a} f(z) dz + \int_a^r f(x) dx.$$

En posant $z = r e^{i\theta}$, on obtient

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = r i \int_0^\pi f(r e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta.$$

Comme on a $\operatorname{Log}(r e^{i\theta}) = \operatorname{Log} r + i\theta$ et $||z|^2 - 1| \leq |z^2 + 1|$, il en résulte que

$$|f(r e^{i\theta})| \leq \frac{|\operatorname{Log} r| + \theta}{\sqrt{r(r^2 - 1)^2}}$$

et par suite que

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq \frac{r}{\sqrt{r(r^2 - 1)}^2} \int_0^\pi (|\text{Log } r| + \theta) d\theta$$

d'où

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

On démontre de même que

$$\left| \int_{\gamma_a} f(z) dz \right| \leq \frac{\sqrt{a}}{(a^2 - 1)^2} \int_0^\pi (|\text{Log } a| + \theta) d\theta$$

et donc que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\gamma_a} f(z) dz = 0.$$

On a

$$\int_{-r}^{-a} \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} dx = \int_{-r}^{-a} \frac{\text{Log } (-x) + i\pi}{e^{i\pi/2} \sqrt{-x}(1 + x^2)^2} dx.$$

En effectuant le changement de variable $u = -x$, nous obtenons

$$\int_{-r}^{-a} \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} dx = \int_a^r \frac{\text{Log } u + i\pi}{e^{i\pi/2} \sqrt{u}(1 + u^2)^2} du.$$

Par passage à la limite, il vient

$$\begin{aligned} \pi i \frac{e^{-i\pi/4}}{2} \left(\frac{3\pi}{4} + i \right) &= \\ &= (1 + e^{-i\pi/2}) \int_0^{+\infty} \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} dx + i\pi e^{-i\pi/2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\pi i}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{3\pi}{4} + i \right) &= \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} dx + \pi \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} - i \int_0^{+\infty} \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} dx \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}(1 + x^2)^2} dx = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \left(1 + \frac{3\pi}{4} \right)$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)^2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}.$$

5.20

Soient r un nombre réel strictement supérieur à 1, et Γ_r le chemin de \mathbb{C} formé de l'arc de cercle γ_r de centre O , de rayon r , d'extrémités r et $r e^{i\pi/4}$ parcouru dans le sens direct, du segment $I_r = [r e^{i\pi/4}, 0]$ et du segment $[0, r]$.

1° Démontrer que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} e^{-z^2} dz = 0.$$

2° En intégrant la fonction f définie par $f(z) = e^{-z^2}$ sur le chemin Γ_r , démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \cos^2 x dx = \int_0^{+\infty} \sin^2 x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(On rappelle, cf. exercice 4.16, que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

Solution 1° Posons $z = r e^{i\theta}$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} e^{-z^2} dz &= r i \int_0^{\pi/4} \exp[-r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)] e^{i\theta} d\theta \\ &= r i \int_0^{\pi/4} \exp[-r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + i\theta] d\theta \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int_{\gamma_r} e^{-z^2} dz \right| \leq r \int_0^{\pi/4} \exp(-r^2 \cos 2\theta) d\theta.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \exp(-r^2 \cos 2\theta) d\theta &= \int_0^{\pi/4} \left(1 - \frac{1}{r^{3/2}}\right) \exp(-r^2 \cos 2\theta) d\theta + \\ &+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{r^{3/2}}\right) \exp(-r^2 \cos 2\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Pour tout élément θ de $\left[0, \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{r^{3/2}}\right)\right]$ nous avons

$$\cos 2\theta \geq \cos \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{r^{3/2}}\right)$$

donc

$$\exp(-r^2 \cos 2\theta) \leq \exp\left(-r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{r^{3/2}}\right)} \exp(-r^2 \cos 2\theta) d\theta &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{r^{3/2}}\right)} \exp\left(-r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}\right) d\theta \leq \\ &\leq \frac{\pi}{4} \exp\left(-r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

D'autre part comme $e^{-r^2 \cos 2\theta} \leq 1$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{r^{3/2}}\right)}^{\frac{\pi}{4}} \exp(-r^2 \cos 2\theta) d\theta \leq \frac{\pi}{4 r^{3/2}}$$

d'où

$$r \int_0^{\pi/4} \exp(-r^2 \cos 2\theta) d\theta \leq \frac{\pi}{4} \left[r \exp\left(-r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}\right) + \frac{1}{r^{1/2}} \right]$$

mais

$$r \exp\left(-r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}\right) = \frac{r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}}{\exp\left(r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}\right)} \cdot \frac{1}{r \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}}$$

Lorsque r tend vers $+\infty$, on a

$$r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2} r^{1/2}$$

donc

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}}{\exp\left(r^2 \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}\right)} \cdot \frac{1}{r \sin \frac{\pi}{2 r^{3/2}}} = 0$$

et par suite

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \int_0^{\pi/4} \exp(-r^2 \cos 2\theta) d\theta = 0$$

ce qui démontre que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} e^{-z^2} dz = 0.$$

2° La fonction f est holomorphe dans \mathbb{C} donc

$$\int_{I_r} e^{-z^2} dz = 0$$

d'où

$$\int_{\gamma_r} e^{-z^2} dz + \int_{I_r} e^{-z^2} dz + \int_0^r e^{-x^2} dx = 0.$$

Si on pose $z = t e^{i\pi/4}$, on a

$$\int_{I_r} e^{-z^2} dz = e^{i\pi/4} \int_r^0 e^{-t^2} dt = -e^{i\pi/4} \int_0^r e^{-t^2} dt.$$

Par passage à la limite, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= e^{i\pi/4} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \\ &= e^{i\pi/4} \left[\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt - i \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt + \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt + \right. \\ &\quad \left. + i \left(\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt - \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt \right) \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$$

et par suite

$$2 \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

6.1 Montrer que les séries de termes général $n^2/n!$ et $n^3/n!$ sont convergentes et calculer leurs sommes.

Solution Nous avons pour $n \geq 2$, avec la convention $0! = 1$

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

et par suite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

Nous savons d'autre part que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

On en déduit que la série de terme général $n^2/n!$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e.$$

De même, nous pouvons écrire pour $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \frac{n^3}{n!} &= \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{n^2-1+1}{(n-1)!} = \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \\ &= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \end{aligned}$$

et il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + \frac{2^3}{2!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}.$$

D'autre part, nous savons que

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} = e, \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = e - 1, \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e - 1 - \frac{1}{1!}.$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + e + 3(e - 1) + e - 2 = 5e.$$

Les séries proposées sont donc convergentes et leurs sommes sont respectivement $2e$ et $5e$.

6.2

Montrer que la série de terme général u_n défini par

$$u_0 = u_1 = u_2 = 0 \quad \text{et} \quad u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$$

si $n \geq 3$ est convergente et calculer sa somme.

Solution La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{2X-1}{X(X^2-4)}$ s'écrit

$$\frac{2X-1}{X(X^2-4)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+2}$$

où a, b, c sont des nombres réels. Un calcul simple donne

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{3}{8}, \quad c = -\frac{5}{8}.$$

Par suite on a pour tout entier $N \geq 3$

$$\sum_{n=3}^N \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=3}^N \frac{1}{n} \right) + \frac{3}{8} \left(\sum_{n=3}^N \frac{1}{n-2} \right) - \frac{5}{8} \left(\sum_{n=3}^N \frac{1}{n+2} \right).$$

En posant

$$s_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^N \frac{2n-1}{n(n^2-4)} &= \frac{1}{4} \left(s_N - \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{8} \left(s_N - \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) - \\ &\quad - \frac{5}{8} \left(s_N + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &= -\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} \right) - \frac{5}{8} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} - \frac{25}{12} \right). \end{aligned}$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, $\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1}$ tend vers 0 et $\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}$ tend vers 0. La série proposée est donc convergente et a pour somme $89/96$.

6.3

Considérons la série de terme général défini par $u_0 = 0$ et

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{si } n \geq 1.$$

a) Montrer au moyen d'un théorème de comparaison que cette série est convergente.

b) Retrouver ce résultat en calculant sa somme.

Solution

a) La série de terme général u_n est une série à termes positifs. Lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n \sim 1/n^3$ et $1/n^3$ est le terme général d'une série de RIEMANN convergente (cf. C. E., Ch. 5, § II, n° 87). Par suite la série proposée est convergente.

b) Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

Il vient

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$$

et par suite si $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right].$$

Pour chaque entier $N \geq 1$, posons $s_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \frac{1}{2} \left[s_N - 2(s_N - 1) + s_N - 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{N+1} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right]. \end{aligned}$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, $\sum_{n=1}^N u_n$ tend vers $1/4$. Par suite la série proposée est convergente et a pour somme $1/4$,

6.4 Soient P et Q deux polynômes non nuls à une indéterminée et à coefficients réels et soit k un entier supérieur à la plus grande racine réelle du polynôme Q . Etudier la série de terme général défini par

$$u_0 = u_1 = \dots = u_k = \quad \text{et} \quad u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \quad \text{si} \quad n \geq k.$$

Solution Soient p et q les degrés respectifs des polynômes P et Q et soient a_p et b_q leurs coefficients dominants. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p}{b_q} \frac{1}{n^{q-p}}.$$

Par suite, si $p - q \geq 0$, le terme général de la série étudiée ne tend pas vers 0 et la série est divergente. Si $q - p > 0$, le terme général de la série étudiée est équivalent au terme général d'une série de RIEMANN. Par suite si $q - p = 1$, la série est divergente et si $q - p \geq 2$, la série est convergente.

6.5 Etudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$$

où a est un nombre réel positif.

Solution On a pour n très grand

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 \left[\left(1 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)^{1/2} - \left(1 + \frac{a}{n^3} \right)^{1/2} \right] \\ &= n^2 \left[\left(1 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) - \left(1 + \frac{a}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \right] \\ &= n^2 \left[\frac{2-a}{2n^3} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right] \\ &= \frac{2-a}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par suite si $a \neq 2$, $u_n \sim \frac{2-a}{2n}$. Pour n assez grand u_n a un signe constant celui de $2-a$. On peut appliquer à la série proposée les résultats sur les séries à termes positifs. Comme u_n est équivalent au terme général d'une série de RIEMANN divergente la série proposée est divergente (cf. C. E., Ch. 5, § II, n° 87). Si $a = 2$, u_n est équivalent à $1/2n^2$. Comme u_n est positif et comme la série de RIEMANN de terme général $1/n^2$ est convergente, la série proposée l'est aussi.

6.6 Soit p un entier naturel, étudier la série de terme général défini par

$$u_0 = u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_n = \frac{1}{(\text{Log } n)^p} \quad \text{si} \quad n \geq 2.$$

Solution Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{n^{1/2}}{(\text{Log } n)^p}$ tend vers $+\infty$. Soit A un nombre réel strictement positif, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N , on ait $\frac{n^{1/2}}{(\text{Log } n)^p} > A$. Par suite la série proposée est divergente (cf. C. E. Ch. 5, § II, n° 90) comme la série de RIEMANN de terme général $A/n^{1/2}$.

6.7 Soit U une série à termes positifs de terme général u_n . Montrer que si elle est convergente, il en est de même de la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n}$.

Solution Si la série U est convergente, son terme général u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et par suite $\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$. Les deux séries étudiées étant à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n}$ est convergente comme la série U (cf. C. E., Ch. 5, § II, n° 87).

6.8 Soient U et V deux séries à termes positifs convergentes de termes généraux u_n et v_n . Etudier les séries de termes généraux

$$\omega_n = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad t_n = \frac{1}{n} \sqrt{u_n}.$$

Solution De l'inégalité $(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2 \geq 0$, on déduit l'inégalité

$$2\sqrt{u_n v_n} \leq u_n + v_n.$$

Les séries U et V étant convergentes, la série de terme général $u_n + v_n$ est aussi convergente (cf. C. E., Ch. 5, § I, n° 83) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs (cf. C. E., Ch. 5, § II, n° 87) nous permet de conclure que la série de terme général $\omega_n = \sqrt{u_n v_n}$ est convergente. Comme la série de RIEMANN de terme général $1/n^2$ est convergente (cf. C. E., Ch. 5, § I, n° 85). En posant $v_n = 1/n^2$, la démonstration précédente nous prouve que la série de terme général $t_n = \frac{1}{n} \sqrt{u_n}$ est convergente.

6.9 Soit a un nombre réel positif. Etudier les séries de termes généraux $a^n/(n!)$ et $n^n/(n!)$. En déduire les limites des suites $(a^n/(n!))_{n \geq 1}$ et $(n^n/(n!))_{n \geq 1}$.

Solution Pour chaque entier naturel n , posons $u_n = a^n/(n!)$ et $v_n = n^n/(n!)$. Il vient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$$

et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, u_{n+1}/u_n tend vers 0 et v_{n+1}/v_n tend vers e . Par suite en vertu de la règle de d'ALEMBERT la série de terme général $a^n/(n!)$ est convergente et la série de terme général $n^n/(n!)$ est divergente (cf. C. E., Ch. 5, § II, n° 88).

Le terme général d'une série convergente tend vers 0 donc la suite $(a^n/n!)_{n \geq 1}$ est convergente et a pour limite 0. Appliquer la règle de d'ALEMBERT à une série revient à la comparer à une série géométrique et comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} > 1,$$

v_n est supérieur au terme général d'une série géométrique divergente et tend donc vers $+\infty$. La suite $(n^n/(n!))_{n \geq 1}$ a donc pour limite $+\infty$.

6.10 Soient p un entier rationnel et a un nombre réel strictement positif. Etudier la série de terme général n^p/a^n .

Solution Posons $u_n = n^p/a^n$ pour chaque entier naturel n . Alors on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{1}{a}.$$

Par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}.$$

L'application de la règle de d'ALEMBERT (cf. C. E., Ch. 5, § II, n° 88) nous montre que la série est convergente si $a > 1$ et divergente si $0 < a < 1$. Lorsque $a = 1$, la série étudiée est une série de RIEMANN. On en déduit qu'elle est convergente si $p < -1$ et divergente si $p \geq -1$.

6.11 Montrer que la série de terme général défini par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad \text{si} \quad n \geq 1$$

est convergente et trouver une majoration du reste.

Solution On a pour chaque entier $n \geq 1$

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

et

$$\text{Log } \sqrt[n]{u_n} = n \text{Log } \frac{n}{n+1} = -n \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc $\text{Log } \sqrt[n]{u_n}$ tend vers -1 lorsque n tend vers $+\infty$ et par suite $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $1/e$. La règle de CAUCHY (cf. C. E., Ch. 5, § II, n° 88) nous permet de conclure que la série proposée est convergente. Pour trouver une majoration du reste de cette série, nous allons majorer u_n par le terme général d'une série géométrique convergente. Pour cela étudions la fonction réelle f définie sur \mathbf{R}_+^* en posant pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^* , $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$. Calculons sa dérivée ; il vient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\text{Log } \frac{x}{x+1} + x \left(\frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \right) \right] \exp \left[x \text{Log } \frac{x}{x+1} \right] \\ &= \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \left[\text{Log } \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right]. \end{aligned}$$

Étudions les variations de la fonction réelle g définie sur \mathbf{R}_+^* en posant pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^*

$$g(x) = \text{Log } \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}.$$

On a

$$g'(x) = \frac{x+1}{x} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

Lorsque x croît de 0 à $+\infty$, la fonction g croît donc de $-\infty$ à 0 et par suite pour tout x de \mathbf{R}_+^* , la fonction f' est négative. On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$, on a $f(n) \leq f(1)$ donc $\sqrt[n]{u_n} \leq \frac{1}{2}$ et par suite $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Pour chaque entier naturel n posons

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

Alors on a

$$R_n \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

6.12

On considère la série dont le terme général u_n est défini de la manière suivante : si n est pair, on pose $u_n = 1/2^p$ où p est l'entier tel que $n = 2p$ et si n est impair, on pose $u_n = 1/2^{p+1}$ où p est l'entier tel que $n = 2p - 1$. Étudier cette série successivement par la règle de CAUCHY puis par la règle de d'ALEMBERT.

Solution

Si p est un entier strictement positif on a

$$(u_{2p})^{1/2p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad (u_{2p-1})^{1/(2p-1)} = \frac{1}{2^{(p+1)/(2p-1)}}$$

Donc lorsque n tend vers $+\infty$, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $1/\sqrt{2}$. D'autre part on a

$$\frac{u_{2p}}{u_{2p-1}} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = \frac{1}{4}$$

et par suite u_{n+1}/u_n n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$. On a donc un exemple de série tel que $\sqrt[n]{u_n}$ ait une limite quand n tend vers $+\infty$ sans que u_{n+1}/u_n en ait une. D'après la règle de CAUCHY (cf. C. E., Ch. 5, § II, n° 88) la série proposée converge. De plus on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^p} + \dots \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p + \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p. \end{aligned}$$

La série géométrique de terme général $u_p = 1/2^p$ étant convergente, la série proposée est aussi convergente et sa somme est

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{5}{2}.$$

6.13

Soient α, β deux nombres réels tels que $\alpha > 1$ et $0 < \beta < 1$. On considère la série dont le terme général u_n est défini de la manière suivante : $u_0 = 0$ et pour $n > 0$ s'il existe un entier p tel que $n = 2^p$ on pose $u_n = 1/n^\beta$ et sinon on pose $u_n = 1/n^\alpha$. Montrer que cette série est convergente. La suite $(u_{n+1}/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a-t-elle une limite ? est-elle bornée ?

Solution Remarquons que la série de terme général $1/n^\alpha$ est une série de RIEMANN convergente (cf. C. E., Ch. 5, § I, n° 85) et que les séries de termes généraux $1/(2^\beta)^p$ et $1/(2^\alpha)^p$ sont deux séries géométriques convergentes ; or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{p\beta}} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{p\alpha}}$$

par suite la série étudiée est convergente. S'il existe un entier p tel que $n = 2^p$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\alpha},$$

s'il existe un entier p tel que $(n+1) = 2^p$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta} \quad \text{et sinon} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $n^\beta/(n+1)^\alpha$ tend vers 0, $n^\alpha/(n+1)^\beta$ tend vers $+\infty$ et $[n/(n+1)]^\alpha$ tend vers 1. On en déduit que la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite et n'est pas bornée.

6.14 Montrer que la série de terme général $\text{Log}(1+u_n)$ est absolument convergente si et seulement si la série de terme général u_n est absolument convergente.

Solution Si u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on a $|\text{Log}(1+u_n)| \sim |u_n|$ et les théorèmes sur les séries à termes positifs nous permettent de conclure que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |\text{Log}(1+u_n)|$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est convergente.

Si u_n ne tend pas vers 0 pour n tendant vers $+\infty$, alors $\text{Log}(1+u_n)$ ne tend pas vers 0 et par suite les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Log}(1+u_n)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont toutes deux divergentes donc non absolument convergentes.

Il en résulte que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Log}(1+u_n)$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente.

6.15 Soit $S(z)$ la série entière de terme général $a_n z^n$. On suppose que la série $S(z)$ est absolument convergente lorsque $|z| < 1$ et on désigne par $f(z)$ sa somme. Posant $s_n = \sum_{p=0}^n a_p$, montrer que la série de terme général $s_n z^n$ est absolument convergente si $|z| < 1$ et que sa somme est alors $f(z)/(1 - z)$.

Solution La série de terme général $s_n z^n$ est la série produit des deux séries de termes généraux $a_n z^n$ et z^n qui sont absolument convergentes pour $|z| < 1$. En effet on a

$$s_n z^n = a_n z^n \cdot 1 + a_{n-1} z^{n-1} \cdot z + \cdots + a_{n-p} z^{n-p} \cdot z^p + \cdots + a_0 z^n \cdot 1.$$

Le théorème relatif au produit des séries absolument convergentes (cf. C. E., Ch. 5, § IV, n° 103) nous montre donc que la série de terme général $s_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$ et que sa somme est égale au produit de $f(z)$ par la somme de la série géométrique de raison z , donc à $f(z)/(1 - z)$.

6.16 Soit U une série absolument convergente de terme général u_n et de somme u et soit V une série convergente de terme général v_n et de somme v . Le but de cet exercice est de montrer que la série W de terme général

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0$$

est convergente et a pour somme uv . On posera pour chaque entier naturel n ,

$$U_n = \sum_{p=0}^n u_p, \quad V_n = \sum_{p=0}^n v_p, \quad W_n = \sum_{p=0}^n w_p,$$

$$r_n = v - V_n \quad \text{et} \quad t_n = u_0 r_n + u_1 r_{n-1} + \cdots + u_n r_0.$$

- Montrer que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.
- En déduire que la série W converge vers uv .

Solution a) Soient ε un nombre réel strictement positif donné, ε' et ε'' deux nombres réels strictement positifs dont nous fixerons la valeur en fonction de ε et des données du problème au cours de la démonstration. La série V étant convergente, la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0. Soient donc A un majorant strictement positif de la suite $(|r_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ et p un entier tel que pour tout

entier n supérieur à p on ait $|r_n| < \varepsilon'$. On peut alors écrire pour $n > p$ les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |t_n| &\leq \sum_{p+q=n} |u_p| |r_q| \\ &\leq \varepsilon' [|u_0| + \dots + |u_{n-p}|] + A [|u_{n-p+1}| + \dots + |u_n|]. \end{aligned}$$

Comme la série U est absolument convergente, la suite $\left(\sum_{m=0}^n |u_m|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente donc majorée et la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite 0. Par suite soit B un majorant strictement positif de la suite $\left(\sum_{m=0}^n |u_m|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et soit q un entier tel que pour tout entier n supérieur à q on ait $|u_n| < \varepsilon''$. Pour tout n supérieur à $p+q$ on a donc $|t_n| < \varepsilon' B + A p \varepsilon''$.

Posons $\varepsilon' = \varepsilon/2 B$, l'entier p est alors déterminé. Choisissons ensuite ε'' égal à $\varepsilon/2 A p$. On en déduit l'entier q et le raisonnement précédent montre que pour tout entier n supérieur à $p+q$, $|t_n| < \varepsilon$ donc la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

b) On a

$$\begin{aligned} t_n &= u_0(v - V_n) + u_1(v - V_{n-1}) + \dots + u_n(v - V_0) = \\ &= U_n v - (u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + \dots + u_n V_0) \end{aligned}$$

mais

$$u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + \dots + u_n V_0 = \sum_{0 \leq p+q \leq n} u_p v_q = W_n$$

et par suite $t_n = U_n v - W_n$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et la suite $(U_n v)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers uv , donc la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite uv . Autrement dit la série W est convergente et a pour somme uv .

6.17 Etudier la série de terme général défini par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_n = (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Solution La série proposée est une série alternée. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\sqrt[n]{n}$ tend vers 1, $\sin(1/n)$ tend vers 0, par suite le module du terme général de la série étudiée tend vers 0. Considérons la fonction réelle f définie pour tout élément x de \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x^{1/x} \sin(1/x)$. Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\text{Log } x}{x^2} \right) \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right] \exp \left[\frac{\text{Log } x}{x} \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[(1 - \text{Log } x) \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right] \exp \left[\frac{\text{Log } x}{x} \right]. \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $[(1 - \text{Log } x) \sin(1/x) - \cos(1/x)]$ tend vers -1 , par suite il existe un nombre positif M tel que pour tout nombre réel x supérieur à M , $f'(x)$ soit négatif. On en déduit qu'à partir d'un certain rang N supérieur à M , la valeur absolue du terme général de la série étudiée décroît. La nature de la série n'étant pas changée si on modifie les premiers termes (cf. C. E., Ch. 5, § I, n° 83), le théorème sur les séries alternées (cf. C. E., Ch. 5, § V, n° 104) nous permet donc de conclure que la série proposée est convergente.

6.18 Etudier la série de terme général défini par

$$u_0 = u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_n = \text{Log } n \cdot \text{Log} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

pour $n \geq 2$.

Solution On a pour $n \geq 2$

$$\text{Log } n \text{ Log} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \text{Log } n \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) \right]$$

où ε est une fonction de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R} dont la limite au point 0 est 0.

Les séries de termes généraux $\frac{\text{Log } n}{2n^2}$ et $\frac{\varepsilon(1/n) \text{Log } n}{n^2}$ sont absolument convergentes et la série de terme général $((-1)^n \text{Log } n)/n$ est une série alternée dont le terme général tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. La fonction f définie pour $x > 0$ par $f(x) = (\text{Log } x)/x$ a pour dérivée

$$f'(x) = \frac{1 - \text{Log } x}{x^2}.$$

Pour $x > e$, $f(x)$ est négatif. Par suite $(\text{Log } n)/n$ décroît lorsque n tend vers $+\infty$ et le théorème sur les séries alternées (cf. C. E., Ch. 5, § V, n° 104) nous permet d'affirmer que la série de terme général $((-1)^n \text{Log } n)/n$ est convergente.

La série proposée est donc convergente comme somme de trois séries convergentes.

6.19 Soient U une série semi-convergente et l un nombre réel quelconque. Montrer qu'en modifiant l'ordre des termes de cette série, on peut obtenir une série convergente de somme l .

Solution Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$) la suite des termes positifs (resp négatifs) de la série U écrits dans l'ordre où ils se présentent. Cette série étant semi-convergente, les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0 et les séries de termes généraux v_n et w_n sont divergentes (cf. C. E., Ch. 5, § IV, n° 103). L'ensemble des entiers p vérifiant la propriété $\sum_{n=0}^p v_n > l$ est non vide car la suite $\left(\sum_{n=0}^p v_n\right)_{p \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$. On note p_1 son plus petit élément et on pose

$$s_1 = \sum_{n=0}^{p_1} v_n.$$

D'autre part la suite $\left(\sum_{n=0}^q w_n\right)_{q \in \mathbb{N}}$ ayant pour limite $-\infty$, on appelle q_1 le plus petit des entiers q vérifiant

$$s_1 + \sum_{n=0}^q w_n < l$$

et on pose

$$s_2 = s_1 + \sum_{n=0}^{q_1} w_n.$$

De même les suites

$$\left(\sum_{n=p_1+1}^p v_n\right)_{p \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n=q_1+1}^q w_n\right)_{q \in \mathbb{N}}$$

ayant pour limites respectives $+\infty$ et $-\infty$, on note p_2 le plus petit des entiers p tels que

$$s_2 + \sum_{n=p_1+1}^{p_2} v_n > l,$$

on pose

$$s_3 = s_2 + \sum_{n=p_1+1}^{p_2} v_n,$$

on définit ensuite q_2 comme le plus petit des entiers q vérifiant

$$s_3 + \sum_{n=q_1+1}^{q_2} w_n < l$$

et on pose

$$s_4 = s_3 + \sum_{n=q_1+1}^{q_2} w_n.$$

On poursuit l'opération et on forme ainsi par récurrence une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels et deux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres entiers. Par construction des deux dernières suites on a, pour tout entier n tel que $n > 1$, $s_n - l < v_{p_n}$ si n est impair et $l - s_n < -w_{q_n}$ si n est pair. Les deux suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ayant pour limite 0, on voit donc que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite l et par suite que la série

$$\sum_{n=0}^{p_1} v_n + \sum_{n=0}^{q_1} w_n + \sum_{n=p_1+1}^{p_2} v_n + \sum_{n=q_1+1}^{q_2} w_n + \dots + \sum_{n=q_r+1}^{q_{r+1}} v_n + \sum_{n=q_r+1}^{q_{r+1}} w_n + \dots$$

déduite de la série U par modification de l'ordre des termes a pour limite l .

6.20

Etant donné une suite numérique $(u_n)_{n>0}$, on lui associe la suite $(p_n)_{n>0}$ définie par $p_n = u_1 u_2 \dots u_n$ (on note $p_n = \prod_{p=1}^n u_p$) et on appelle produit infini de terme général u_n le couple formé par les deux suites $(u_n)_{n>0}$ et $(p_n)_{n>0}$. Par définition étudier le produit de terme général u_n , c'est étudier la suite $(p_n)_{n>0}$. Si la suite $(p_n)_{n>0}$ a une limite différente de 0, le produit infini est dit convergent et sa limite est notée $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$; dans les autres cas, il est dit divergent.

1° Etudier les produits infinis de termes généraux

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right), \quad b_1 = 1 \quad \text{et} \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{si} \quad n \geq 2,$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2° Montrer que si le produit infini de terme général u_n est convergent, la suite $(u_n)_{n>0}$ a pour limite 1.

3° Si u_n est positif pour tout entier n , montrer que le produit infini de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $\text{Log } u_n$. En déduire que si $u_n > 0$ pour tout entier n , le produit infini de terme général $(1 + u_n)$ est de même nature que la série de terme général u_n et que si $0 < u_n < 1$ pour tout entier n , le produit infini de terme général $(1 - u_n)$ est de même nature que la série de terme général u_n .

4° Montrer que le produit infini de terme général u_n non nul, est convergent si et seulement si, à tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut associer un entier v tel que $|u_v u_{v+1} \dots u_n - 1| < \varepsilon$ pour tout entier n tel que $n > v$.

5° Montrer que si le produit infini de terme général $(1 + |u_n|)$ est convergent, il en est de même du produit infini de terme général $(1 + u_n)$.

Solution 1° Posons $p_p = \prod_{p=1}^n a_p$. Il vient pour $n \geq 1$

$$p_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = 1$$

et

$$p_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Par suite, lorsque n tend vers $+\infty$, p_n tend vers 1 et le produit infini de terme général a_n est convergent.

On a

$$\prod_{p=1}^n b_p = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Donc lorsque n tend vers $+\infty$, $\prod_{p=1}^n b_p$ tend vers 0 et le produit de terme général b_n est divergent.

D'autre part on a

$$\prod_{p=1}^n c_p > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$ et par suite le produit de terme général c_n est divergent car la suite $\left(\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

2° Supposons que le produit infini de terme général u_n soit convergent. La suite $(p_n)_{n>0}$ associée a donc une limite l différente de 0. On en déduit que pour tout entier n , u_n (et par suite p_n) est différent de 0, sinon $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$, et aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n - p_{n-1}) = 0$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{p_n}{p_{n-1}} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 1) = 0$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n>0}$ a pour limite 1.

3° Si pour tout n , u_n est positif, $\text{Log } p_n$ est défini et on a

$$\text{Log } p_n = \sum_{p=1}^n \text{Log } u_p.$$

La suite $(\text{Log } p_n)_{n>0}$ a une limite si et seulement si la série de terme général $\text{Log } u_n$ est convergente. Or la suite $(p_n)_{n>0}$ a une limite non nulle si et seulement si la suite $(\text{Log } p_n)_{n>0}$ est convergente. Donc le produit infini de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $\text{Log } u_n$.

Si $u_n > 0$ pour tout entier n , les séries de termes généraux $\text{Log}(1 + u_n)$ et u_n sont deux séries à termes positifs. Une condition nécessaire pour que ces deux séries convergent est que u_n tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. D'autre part $\text{Log}(1 + u_n) \sim u_n$ si u_n tend vers 0. On en déduit que si u_n est positif pour tout entier n , les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Log}(1 + u_n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ ont même nature et par suite

le produit infini de terme général $(1 + u_n)$ est de même nature que la série de terme général u_n .

Si pour tout entier n on a $0 < u_n < 1$, la série de terme général $\text{Log}(1 - u_n)$ est une série à termes négatifs. Lorsque u_n tend vers 0, $\text{Log}(1 - u_n) \sim -u_n$. On en déduit comme précédemment que les séries de termes généraux $\text{Log}(1 - u_n)$ et u_n sont de même nature et par suite que le produit de terme général $(1 - u_n)$ est de même nature que la série de terme général u_n .

4° Si le produit infini de terme général u_n est convergent, la suite $(p_n)_{n>0}$ a une limite p non nulle, donc à tout nombre réel ε positif on peut associer un entier v_1 tel que pour tout entier $n > v_1$, on ait $|p_n| > \frac{|p|}{2}$ et un entier v_2 tel que si n et r sont deux entiers supérieurs à v_2 on ait

$$|p_n - p_r| < \frac{|p|}{2} \varepsilon.$$

Soit v un entier supérieur à $v_1 + 1$ et à $v_2 + 1$. On a alors

$$|p_{v-1}| > \frac{|p|}{2} \quad \text{et} \quad |p_n - p_{v-1}| < \frac{|p|}{2} \varepsilon$$

pour tout entier n supérieur à v soit encore

$$\left| \frac{p_n - p_{v-1}}{p_{v-1}} \right| = |u_v u_{v+1} \dots u_n - 1| < \varepsilon$$

pour tout entier n supérieur à v . Si le produit est convergent la propriété (P) suivante est donc vérifiée.

(P) : à tout nombre réel positif ε , on peut associer un entier v tel que pour tout entier n supérieur à v on ait

$$|u_v u_{v+1} \dots u_n - 1| < \varepsilon.$$

Réciproquement supposons la propriété (P) vérifiée. Il existe alors un entier v_0 tel que

$$\left| \frac{p_n - p_{v_0-1}}{p_{v_0-1}} \right| < 1$$

pour tout entier $n > v_0$, soit encore tel que

$$|p_n - p_{v_0-1}| < |p_{v_0-1}|.$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur à v_0 , on a

$$|p_n| < 2 |p_{v_0-1}|.$$

La suite $(p_n)_{n>0}$ est donc majorée par le nombre

$$M = \sup(|p_0|, |p_1|, \dots, |p_{v_0}|, 2 |p_{v_0-1}|).$$

Soit ε un nombre réel positif ; si (P) est vérifiée, il existe un entier v tel que pour tout n supérieur à v on ait

$$\left| \frac{p_n - p_{v-1}}{p_{v-1}} \right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Soient n et r deux entiers supérieurs à v , on a alors

$$\begin{aligned} |p_n - p_r| &= |p_n - p_{v-1} + p_{v-1} - p_r| \\ &\leq |p_n - p_{v-1}| + |p_{v-1} - p_r| < \frac{2\varepsilon}{2M} |p_{v-1}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite $(p_n)_{n>0}$ est donc une suite de CAUCHY et elle admet une limite finie p . Montrons que cette limite ne peut être nulle. En effet si (P) est vérifiée, il existe un entier v_1 tel que pour tout n supérieur à v_1

$$|p_n - p_{v_1-1}| < \frac{|p_{v_1-1}|}{2}$$

et par suite pour tout n supérieur à v_1 on a $|p_n| > \frac{|p_{v_1-1}|}{2}$. Comme $u_n \neq 0$ pour tout n , le nombre $|p_n|$ est donc minoré par le nombre strictement positif $\frac{|p_{v_1-1}|}{2}$ et $p \neq 0$. On en déduit que le produit infini de terme général u_n converge si et seulement si la propriété (P) est vérifiée.

5° Si n et r sont deux entiers tels que $1 \leq r \leq n$ on a

$$(1 + u_r)(1 + u_{r+1}) \dots (1 + u_n) - 1 = \sum_{p=1}^{n-r+1} \sum_{r \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_p}$$

d'où en appliquant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |(1 + u_r)(1 + u_{r+1}) \dots (1 + u_n) - 1| &\leq \\ &\leq \sum_{p=1}^{n-r+1} \sum_{r \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} |u_{i_1}| |u_{i_2}| \dots |u_{i_p}| \end{aligned}$$

or, le second membre de cette dernière inégalité est égal à

$$(1 + |u_r|)(1 + |u_{r+1}|) \dots (1 + |u_n|) - 1$$

donc à

$$|(1 + |u_r|)(1 + |u_{r+1}|) \dots (1 + |u_n|) - 1|$$

par suite

$$\begin{aligned} |(1 + u_r)(1 + u_{r+1}) \dots (1 + u_n) - 1| &\leq \\ &\leq |(1 + |u_r|)(1 + |u_{r+1}|) \dots (1 + |u_n|) - 1|. \end{aligned}$$

Il en résulte que si la propriété (P) de la question précédente est satisfaite pour le produit infini de terme général $(1 + |u_n|)$ elle l'est aussi pour le produit infini de terme général $(1 + u_n)$ d'où le résultat.

6.21 Soient α, a, b des nombres réels tels que $\alpha > 0$ et $0 < a < b$. Montrer que la série de terme général défini par $u_0 = 0$ et $u_n = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}$ si $n \geq 1$ est uniformément convergente sur le segment $[a, b]$.

Solution Pour tout élément x de $[a, b]$ et pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)} \leq \frac{1}{n^{\alpha+1} x} \leq \frac{1}{n^{\alpha+1} a}.$$

La série de terme général $1/n^{\alpha+1}$ étant une série de RIEMANN convergente, on en déduit que la série proposée est uniformément convergente sur $[a, b]$ car son terme général est majoré en valeur absolue par le terme général d'une série numérique à termes positifs convergente (cf. C. E., Ch. 6, § I, n° 107).

6.22 Montrer que la série de terme général $x(1 - x)^n$ est simplement convergente sur le segment $[0, 1]$. Calculer sa somme. La convergence est-elle uniforme ?

Solution Si $x = 0$ ou $x = 1$ la série proposée est convergente et a pour somme 0. Si $0 < x < 1$, la série géométrique de terme général $(1 - x)^n$ est convergente et a pour somme $1/x$; par suite la série étudiée est convergente et a pour somme 1. La série de terme général $x(1 - x)^n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$ car sa somme $S(x)$ n'est pas une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. En effet si $x = 0$ ou $x = 1$, $S(x) = 0$ et si $0 < x < 1$, $S(x) = 1$.

6.23 Soient α un nombre réel tel que $\alpha < 2$ et x un nombre réel positif. On considère la série de terme général défini par $u_0(x) = 0$ et $u_n(x) = x^{2-\alpha} e^{-nx}$ si $n \geq 1$.

- 1° Montrer qu'elle est simplement convergente pour tout élément x de \mathbf{R}_+ .
- 2° Montrer qu'elle est uniformément convergente sur \mathbf{R}_+ si $\alpha < 1$.
- 3° Que peut-on dire si $\alpha = 1$?

Solution 1° Pour tout nombre réel x strictement positif, $n^2 e^{-nx}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et par suite pour n assez grand on a $e^{-nx} < 1/n^2$. La série de RIEMANN de terme général $1/n^2$ étant convergente, on en déduit que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. Pour $x = 0$, $u_n(x) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$ et la série est aussi convergente.

2° On a

$$\begin{aligned} u'_n(x) &= (2 - \alpha) x^{1-\alpha} e^{-nx} - nx^{2-\alpha} e^{-nx} \\ &= e^{-nx} x^{1-\alpha} (2 - \alpha - nx). \end{aligned}$$

La fonction u_n admet donc un maximum pour $x = \frac{2 - \alpha}{n}$ et on a

$$u_n(x) \leq u_n\left(\frac{2 - \alpha}{n}\right)$$

et

$$u_n\left(\frac{2 - \alpha}{n}\right) = \left(\frac{2 - \alpha}{n}\right)^{2-\alpha} e^{-(2-\alpha)} = \frac{(2 - \alpha)^{2-\alpha}}{n^{2-\alpha}} e^{-(2-\alpha)}.$$

La série de RIEMANN de terme général $1/n^{2-\alpha}$ étant convergente pour $\alpha < 1$, on en déduit que la série proposée est uniformément convergente sur \mathbb{R}^+ .

3° Pour $\alpha = 1$, on obtient la série de terme général $u_n(x) = x e^{-nx}$ qui est une série géométrique de raison e^{-x} . Si $x \geq 0$, soit $S(x)$ la somme de cette série. Si $x = 0$, on a $S(x) = 0$ et si $x \neq 0$, on a

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1}.$$

La fonction S n'est pas continue à droite de 0 car

$$S(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1.$$

La série n'est donc pas uniformément convergente sur \mathbb{R}_+ (cf. C. E., Ch. 6, § I, n° 108).

6.24 Montrer que la série de terme général défini par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_n = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} \quad \text{si} \quad n \geq 1$$

est uniformément convergente sur tout segment $[a, b]$ mais n'est absolument convergente pour aucune valeur de x .

Solution Pour tout nombre réel x et tout entier naturel n on a

$$(-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} = (-1)^n \frac{x^2}{n^2} + (-1)^n \frac{1}{n}.$$

La série étudiée est donc somme de la série de terme général $(-1)^n x^2/n^2$ absolument convergente pour tout nombre réel x et de la série numérique semi-convergente de terme général $(-1)^n/n$. Elle est donc semi-convergente pour tout nombre réel x . D'autre part en posant, $M = \sup [|a|, |b|]$, il vient :

$$\left| \frac{(-1)^n x^2}{n^2} \right| \leq \frac{|x|^2}{n^2} \leq \frac{M^2}{n^2}.$$

Comme M^2/n^2 est le terme général d'une série numérique de RIEMANN convergente, on en déduit que la série de terme général $(-1)^n x^2/n^2$ est uniformément convergente sur $[a, b]$ et par suite que la série proposée est uniformément convergente sur $[a, b]$.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout élément x de $[a, b]$ on a

$$\left| (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} \right| = \frac{x^2 + n}{n^2}$$

donc $|u_n| \geq 1/n$. Comme la série harmonique diverge, la série proposée n'est absolument convergente pour aucune valeur de x .

3.25

Soit h un nombre réel strictement positif. Montrer que la série de terme général $n e^{-nx}$ est uniformément convergente sur $[h, +\infty[$. Soit $f(x)$ sa somme ; calculer $\int_a^b f(x) dx$ où a et b sont deux nombres réels tels que $h < a < b$.

Solution

Pour tout élément x de $[h, +\infty[$, on a $e^{-nx} < e^{-nh}$. D'autre part la comparaison des fonctions exponentielle et puissance montre que pour n assez grand $e^{-nh} < 1/n^3$ et par suite que la série numérique de terme général $n e^{-nh}$ est convergente comme la série de RIEMANN de terme général $1/n^2$. On en déduit que la série de terme général $n e^{-nx}$ est uniformément convergente sur $[h, +\infty[$. Soit $f(x)$ sa somme. Le théorème sur l'intégration des séries de fonctions (cf. C. E., Ch. 6, § I, n° 108) montre alors que la série de terme général $\int_a^b n e^{-nx} dx$ est convergente et que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b n e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_a^b.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-na} - e^{-nb}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(e^a)^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(e^b)^n} \\ &= \frac{1}{e^a} \frac{1}{1 - 1/e^a} - \frac{1}{e^b} \frac{1}{1 - 1/e^b} \\ &= \frac{1}{e^a - 1} - \frac{1}{e^b - 1} = \frac{e^a - e^b}{(e^a - 1)(e^b - 1)}. \end{aligned}$$

6.26 Montrer que la série de terme général défini par $u_0(x) = 0$ et

$$u_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \quad \text{pour } n \geq 1$$

est uniformément convergente sur \mathbf{R} . Que peut-on dire de la série de terme général $u'_n(x)$?

Solution Pour tout nombre réel x on a

$$\left| \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série de RIEMANN de terme général $1/n^2$ étant convergente, on en déduit que la série proposée est uniformément convergente sur \mathbf{R} .

La série obtenue par dérivation est la série de terme général $u'_n(x) = \cos(n^2 x)$. Pour tout nombre x réel, cette série est divergente car son terme général ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

6.27 Soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et $U(x)$ (resp $V(x)$) la série de terme général $u_n(x) = a_n \cos nx$ (resp $v_n(x) = a_n \sin nx$).

1° Montrer que si la série de terme général a_n est absolument convergente, alors les séries $U(x)$ et $V(x)$ sont uniformément convergentes sur \mathbf{R} .

2° Montrer que si la série de terme général na_n est absolument convergente, alors les séries $U(x)$ et $V(x)$ sont uniformément convergentes sur \mathbf{R} .

Solution 1° La série de terme général a_n est alors convergente. Comme pour tout entier n et tout nombre réel x on a

$$|a_n \cos nx| \leq |a_n| \quad \text{et} \quad |a_n \sin nx| \leq |a_n|,$$

les séries $U(x)$ et $V(x)$ sont uniformément convergentes sur \mathbf{R} (cf. C. E., Ch. 6, § I, n° 107).

2° La série de terme général na_n étant absolument convergente sur \mathbf{R} , le raisonnement précédent nous montre que les séries de termes généraux $na_n \cos nx$ et $na_n \sin nx$ sont uniformément convergentes sur \mathbf{R} . Comme

$$(a_n \cos nx)' = -na_n \sin nx, \quad (a_n \sin nx)' = na_n \cos nx$$

et comme les séries de termes généraux $a_n \cos (n\pi/2)$ et $a_n \sin n0$ sont convergentes, le théorème sur la dérivation des séries de fonctions (cf. C. E., Ch. 6, § I, n° 108) nous permet de dire que les séries $U(x)$ et $V(x)$ sont uniformément convergentes sur \mathbf{R} .

6.28 Pour tout entier n strictement positif et tout élément x de $]0, 2\pi[$ on pose :

$$u_n(x) = \frac{x \sin nx}{2\sqrt{n} + \cos x}.$$

1° Montrer que la série de terme général défini par $u_0(x) = 0$ et $u_n(x)$ si $n \geq 1$ est simplement convergente sur $]0, 2\pi[$.

2° Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout intervalle fermé inclus dans $]0, 2\pi[$.

Solution 1° La suite $\left(\frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x}\right)_{n>0}$ est une suite décroissante de nombres positifs ayant pour limite 0. D'autre part $\sum_{p=1}^n \sin px$ est la partie imaginaire du nombre complexe $\sum_{p=1}^n e^{ipx}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n e^{ipx} &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{-2 \sin^2 \frac{n+1}{2} x + 2i \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \cos \frac{n+1}{2} x}{-2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{ixn/2}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier n strictement positif

$$\left| \sum_{p=1}^n \sin px \right| < \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

et le théorème d'ABEL nous montre que la série proposée est convergente (cf. C. E., Ch. 5, § V, n° 105).

2° Soit $R_n(x)$ le reste de rang n de la série étudiée. En posant

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^n \sin px \quad \text{et} \quad a_n(x) = \frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x}$$

on a

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p(x) \sin px \\ &= \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p(x) (S_p(x) - S_{p-1}(x)) \\ &= -a_{n+1}(x) S_n(x) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_p(x) - a_{p+1}(x)) S_p(x). \end{aligned}$$

Comme pour tout entier p strictement positif on a

$$(a_p(x) - a_{p+1}(x)) > 0 \quad \text{et} \quad |S_p(x)| < \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|},$$

on a

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_p(x) - a_{p+1}(x)) S_p(x) \right| \leq \frac{\sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_p(x) - a_{p+1}(x))}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \frac{a_{n+1}(x)}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

et par suite

$$|R_n(x)| < \frac{2 a_{n+1}(x)}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $]0, 2\pi[$ c'est-à-dire tel que $0 < a < b < 2\pi$.

L'ensemble $\left\{ \left| \sin \frac{x}{2} \right| \right\}_{x \in [a, b]}$ est minoré par un nombre m strictement positif et

l'ensemble $\{a_{n+1}(x)\}_{x \in [a, b]}$ est majoré par $\frac{2\pi}{2\sqrt{n} - 1}$. Donc pour tout élément x de $[a, b]$ on a

$$|R_n(x)| < \frac{2\pi}{(2\sqrt{n} - 1)m}.$$

La série proposée est donc uniformément convergente sur $[a, b]$.

6.29 Soit α un nombre réel ; déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière de terme général $(\text{Arc tg } n^\alpha) x^n$. Etudier cette série lorsque $x = \rho$ ou $x = -\rho$.

Solution Si $\alpha > 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, $\text{Arc tg } n^\alpha$ tend vers $\pi/2$ et

$$(\text{Arc tg } n^\alpha) x^n \sim \frac{\pi}{2} x^n.$$

La série entière de terme général x^n ayant pour rayon de convergence 1, on en déduit que la série étudiée a pour rayon de convergence 1.

Si $\alpha = 0$, pour tout entier n strictement positif $\text{Arc tg } n^\alpha = \text{Arc tg } 1$ et la série de terme général $(\text{Arc tg } n^\alpha) x^n$ a pour rayon de convergence 1.

Si $\alpha < 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, $\text{Arc tg } n^\alpha$ tend vers 0 et

$$(\text{Arc tg } n^\alpha) x^n \sim n^\alpha x^n.$$

L'application de la règle de d'ALEMBERT montre alors que la série entière de terme général $n^\alpha x^n$ a pour rayon de convergence 1. On en déduit que pour tout nombre réel α , la série proposée a pour rayon de convergence 1.

Étudions la série pour $x = 1$ et $x = -1$. Si $\alpha \geq 0$, le terme général de la série ne tendant pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, dans les deux cas la série est divergente. Si $\alpha < 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, $\text{Arc tg } (n^\alpha) \sim n^\alpha$, donc la série de terme général $\text{Arc tg } (n^\alpha)$ converge si $\alpha < -1$ et diverge si $-1 \leq \alpha < 0$. D'autre part si $\alpha < 0$, le théorème sur les séries alternées (cf. C. E., Ch. 5, § V, n° 104) montre que la série de terme général $(-1)^n \text{Arc tg } (n^\alpha)$ est convergente.

6.30 Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et z un nombre complexe. On pose

$$u_n(z) = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} \right] z^n.$$

Étudier la série entière de terme général $u_n(z)$.

Solution Posons

$$v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Il vient

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = |z| \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, v_n ne tend pas vers 0, $v_{n+1} - v_n$ tend vers 0, par suite v_{n+1}/v_n tend vers 1 et $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right|$ tend vers $|z|$. On en déduit que pour $|z| < 1$, la série étudiée est absolument convergente. Pour $|z| \geq 1$, comme v_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n(z)$ ne tend pas vers 0 et par suite la série est divergente.

La série entière de terme général $u_n(z)$ a pour rayon de convergence 1. Elle est absolument convergente à l'intérieur du disque ouvert $|z| < 1$ et divergente sur le disque $|z| = 1$.

6.31 Pour chaque nombre complexe z on pose

$$u_0(z) = 0 \quad \text{et} \quad u_n(z) = \frac{z^n}{n!} (1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!).$$

Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n(z)$?

Solution On a

$$\begin{aligned} u_n(z) &= \\ &= z^n \left[1 \cdot \frac{1!}{n!} + 2 \cdot \frac{2!}{n!} + \dots + (n-2) \frac{(n-2)!}{n!} + (n-1) \frac{(n-1)!}{n!} + n \frac{n!}{n!} \right] \\ &= z^n \left[1 \cdot \frac{1}{n!} + \dots + \frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{n-1}{n} + n \right]. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout nombre complexe z on a $|u_n(z)| > n |z|^n$. D'autre part

$$1 \cdot \frac{1}{n!} + \dots + \frac{n-2}{n(n-1)}$$

est une somme de $n-2$ termes dont le plus grand est $(n-2)/n(n-1)$. Par suite on a

$$1 \cdot \frac{1}{n!} + \dots + \frac{n-2}{n(n-1)} < (n-2) \frac{(n-2)}{n(n-1)} < 1$$

d'où

$$1 \cdot \frac{1}{n!} + \dots + \frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{n-1}{n} + n < 1 + 1 + n = 2 + n.$$

Il en résulte que pour tout nombre complexe z ,

$$n |z|^n \leq |u_n(z)| \leq (n+2) |z|^n.$$

L'application du critère de d'ALEMBERT montre que les séries entières de termes généraux nz^n et $(n+2)z^n$ ont pour rayon de convergence 1. On en déduit que la série proposée a aussi pour rayon de convergence 1.

6.32

Pour chaque nombre complexe z et chaque entier naturel n posons

$$u_n(z) = \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

1° Calculer le rayon de convergence et déterminer le domaine de convergence D de la série entière de terme général $u_n(z)$.

2° En chaque point z de D on désigne par $S(z)$ la somme de cette série. Quel est le domaine de continuité de la fonction S ?

3° Calculer $S(z)$ en chaque point z de D . En déduire la valeur de la somme de la série de terme général $(-1)^n/(4n^2 - 1)$.

Solution

1° Appliquons le critère de d'ALEMBERT pour trouver le domaine de convergence absolue de la série. On a

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = |z|^2 \frac{2n-1}{2n+3}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, le rapport $(2n-1)/(2n+3)$ tend vers 1 et par suite la série entière de terme général $u_n(z)$ est absolument convergente pour $|z| < 1$ et divergente pour $|z| > 1$. Son rayon de convergence est donc égal à 1. Sur le cercle de convergence on a

$$|z| = 1 \quad \text{et} \quad |u_n(z)| = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}.$$

La série de terme général $\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$ est convergente car elle est de même nature que la série de RIEMANN de terme général $1/n^2$. Il en résulte que la série de terme général $u_n(z)$ a pour domaine D de convergence le disque fermé de rayon 1 centré à l'origine et qu'elle est absolument convergente sur D .

2° Comme la série de terme général $u_n(z)$ converge absolument sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine, elle converge uniformément dans le disque fermé D . Or pour chaque entier naturel p , la somme partielle

$$S_p(z) = \sum_{n=0}^p u_n(z)$$

est une fonction continue, donc $S(z)$ est continue sur le disque fermé D .

3° D'après le théorème de dérivation des séries entières (cf. C. E., Ch. 6, § II, n° 113), on sait qu'à l'intérieur du disque ouvert D' de rayon 1 centré à l'origine, la fonction S est dérivable et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(z) = S'(z).$$

Or

$$u'_n(z) = (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n-1} = z(-1)^n \frac{z^{2n-1}}{2n-1} = z v_n(z)$$

où

$$v_n(z) = (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{2n-1}.$$

La série entière de terme général $v_n(z)$ a pour rayon de convergence 1. On peut donc la dériver terme à terme à l'intérieur du disque D' . Il vient

$$v'_n(z) = (-1)^n z^{2n-2} = -(-z^2)^{n-1}.$$

On reconnaît le terme général d'une série dont la somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v'_n(z) = -\frac{1}{1+z^2}.$$

En intégrant terme à terme dans D' , on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(z) = -\int_0^z \frac{du}{1+u^2}.$$

La série entière de terme général $\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{2n-1}$ a pour rayon de convergence 1 et converge aux points $z = 1$ et $z = -1$. Pour chaque élément z de $D' \cup \{-1, +1\}$ on désigne par $\text{Arc tg } z$ sa somme. Cette fonction possède les mêmes propriétés quant à l'intégration et la dérivation que la fonction Arc tg définie sur \mathbf{R} et prolonge à $D' \cup \{-1, +1\}$ la restriction de la fonction Arc tg au segment $[-1, +1]$. On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(z) = -\text{Arc tg } z$$

et par suite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(z) = -z \text{Arc tg } z.$$

En intégrant à nouveau terme à terme dans le disque ouvert D' , il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z) = -\int_0^z u \text{Arc tg } u \, du$$

et une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^z u \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u \, du &= \frac{1}{2} z^2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z - \frac{1}{2} \int_0^z \frac{u^2 \, du}{1+u^2} \\ &= \frac{z^2}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z - \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z \\ &= \frac{z^2+1}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z - \frac{z}{2}. \end{aligned}$$

Et finalement on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^2+1}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z. \quad (1)$$

Tous les calculs sont valables pour $|z| < 1$, mais comme la fonction S est continue au point $z = 1$, la formule (1) est valable pour $z = 1$ et on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

6.33 En considérant la série entière du terme général $(-1)^n x^n$, déterminer la somme de la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$.

Solution La série entière de terme général $(-1)^n x^n$ a pour rayon de convergence 1. C'est une série géométrique et pour $|x| < 1$ sa somme est $1/(1+x)$. Le théorème sur l'intégration des séries entières (cf. C. E., Ch. 6, § II, n° 113) nous montre donc que la série entière de terme général $(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence 1, et que pour $|x| < 1$, on a

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

De plus il est clair que cette série converge pour $x = 1$. Montrons que la série de terme général $(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$. Soit $R_n(x)$ son reste de rang n . On a

$$R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{p+1}.$$

Le théorème de l'intégration des séries entières nous montre encore que pour $|x| < 1$

$$R_n(x) = \int_0^x \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p t^p dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

Donc si $0 \leq x < 1$, on a

$$|R_n(x)| < \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

Pour chaque entier naturel n , posons

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

et montrons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite 0. Soit ε un nombre réel strictement positif et plus petit que 1. La suite $((1 - (\varepsilon/2))^n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite 0. Il existe donc un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De l'inégalité

$$\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

pour $0 \leq x \leq 1$, on déduit que si $n > N$,

$$\int_0^{1-(\varepsilon/2)} \frac{t^n}{1+t} dt < \int_0^{1-(\varepsilon/2)} t^n dt < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part on a

$$\int_{1-(\varepsilon/2)}^1 \frac{t^n}{1+t} dt < \int_{1-(\varepsilon/2)}^1 dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte que si $n > N$ on a $I_n < \varepsilon$. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a donc pour limite 0. Le théorème sur les séries alternées (cf. C. E., Ch. 5, § V, n° 104) nous montre que la série de terme général $(-1)^n \frac{1}{n+1}$ est convergente donc la suite $(R_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ a aussi pour limite 0. Posons $a_n = \sup(I_{n+1}, R_n(1))$. La suite numérique $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite 0 et on a pour tout élément x de $[0, 1]$, $|R_n(x)| < a_n$. Il en résulte que la série de terme général $(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$. Sa somme est donc continue à gauche de 1 (cf. C. E., Ch. 6, § I, n° 108) et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \text{Log } 2.$$

6.34

Soit S une série entière de terme général $a_n z^n$ et de rayon de convergence 1. Pour chaque élément z du domaine de convergence de la série S , on désigne par $S(z)$ sa somme. Pour tout entier naturel n , on pose

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

et

$$t_n = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1}.$$

1° Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $s_n z^n$ est 1. Calculer sa somme $\sum (z)$ en fonction de $S(z)$ si $|z| < 1$.

2° Trouver le rayon de convergence de la série entière de terme général $t_n z^n$.

Solution

1° La série de terme général $s_n z^n$ est le produit des séries de termes généraux $a_n z^n$ et z^n qui ont toutes deux comme rayon de convergence 1. Il en résulte que le rayon de convergence R de la série de terme général $s_n z^n$ est supérieur ou égal à 1 (cf. C. E., Ch. 6, § II, n° 112).

Par ailleurs on a $a_0 = s_0$ et pour tout entier strictement positif n , on a $a_n = s_n - s_{n-1}$. Il en résulte que si $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (s_n - s_{n-1}) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n - z \left(\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n \right).$$

Si z est un nombre complexe tel que $|z| < R$, on déduit des égalités précédentes que la série S converge et par suite que $R \leq 1$ donc $R = 1$.

La somme de la série de terme général z^n pour $|z| < 1$ est $1/(1-z)$. Si $|z| < 1$ on a donc

$$\sum (z) = \frac{S(z)}{1-z} \quad (\text{cf. C. E., Ch. 6, § II, n° 112}).$$

2° Le rayon de convergence de la série de terme général $t_n z^n$ est le même que celui de la série entière de terme général $t_n z^{n+1} = z(t_n z^n)$ et d'autre part, $t_n z^{n+1}$ est une primitive de $(a_0 + a_1 + \dots + a_n) z^n$. D'après la première question, le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_n) z^n$$

est celui de la série de terme général $a_n z^n$ et la théorie de l'intégration des séries entières (cf. C. E., Ch. 6, § II, n° 111) nous montre que les séries de termes généraux $s_n z^n$ et $t_n z^{n+1}$ ont même rayon de convergence. On en déduit que la série de terme général $t_n z^{n+1}$ a pour rayon de convergence 1 et par suite que la série de terme général $t_n z^n$ a aussi pour rayon de convergence 1.

6.35 Pour chaque nombre réel positif on pose

$$u_0(x) = u_1(x) = 0$$

$$u_n(x) = \frac{nx^n + x^{2n}}{n^2 - 1} \quad \text{si } n \geq 2.$$

Etudier la série $U(x)$ de terme général $u_n(x)$ et calculer sa somme quand elle est convergente.

Solution Si $n \geq 2$ et si x est un nombre réel positif, on a

$$u_n(x) = x^n \frac{n + x^n}{n^2 - 1}.$$

Si $x > 1$, les théorèmes de comparaison des fonctions exponentielle et puissance montrent que $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La série $U(x)$ est par suite divergente.

Pour $x = 1$, on a $u_n(1) = 1/(n-1)$. La série $U(1)$ est donc divergente.

Si $0 \leq x < 1$, on a

$$u_n(x) \leq \frac{x^n}{n-1} \leq x^n.$$

On en déduit que la série $U(x)$ est convergente comme la série géométrique de terme général x^n . Si $0 \leq x < 1$, calculons la somme de la série $U(x)$. Si $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} u_n(x) &= x^n \frac{n}{n^2 - 1} + \frac{x^{2n}}{n^2 - 1} \\ &= \frac{x^n}{2(n-1)} + \frac{x^n}{2(n+1)} + \frac{x^{2n}}{2(n-1)} - \frac{x^{2n}}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Posons

$$v_n(x) = w_n(x) = t_n(x) = z_n(x) = \quad \text{si } n = 0 \quad \text{ou } n = 1$$

et

$$v_n(x) = \frac{x^n}{2(n-1)}, \quad w_n(x) = \frac{x^n}{2(n+1)}, \quad t_n(x) = \frac{x^{2n}}{2(n-1)}$$

et

$$z_n(x) = \frac{x^{2n}}{2(n+1)} \quad \text{si } n \geq 2.$$

Les séries de termes généraux $v_n(x)$, $w_n(x)$, $t_n(x)$, $z_n(x)$ sont convergentes si $0 \leq x < 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \frac{-x}{2} \text{Log}(1-x) \quad (\text{cf. C. E., Ch. 6, § IV, n}^\circ 122)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(x) = \frac{1}{2x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2x} \left[-\text{Log}(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right]$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n(x) = \frac{x^2}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n-1}}{n-1} = -\frac{x^2}{2} \text{Log}(1-x^2)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n(x) = \frac{1}{2x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2x^2} \left[-\text{Log}(1-x^2) - x^2 - \frac{x^4}{2} \right].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) &= \left[-\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right] \text{Log}(1-x) + \\ &\quad + \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right] \text{Log}(1-x^2) - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} \\ &= \left[-\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right] \text{Log}(1-x) + \\ &\quad + \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right] \text{Log}(1+x) - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} \\ &= \left(\frac{-x^3 - x - x^4 + 1}{2x^2} \right) \text{Log}(1-x) + \\ &\quad + \left(\frac{-x^4 + 1}{2x^2} \right) \text{Log}(1+x) + \frac{x^2 - x}{4}. \end{aligned}$$

6.36

Trouver les développements en série entière au voisinage de 0, et indiquer leur rayon de convergence, pour chacune des fonctions

$$f_1(x) = \text{Log} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$f_2(x) = \text{Arc tg} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f_3(x) = e^x \cos x.$$

Solution Si $x \in]-1, +1[$ on a

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} [\operatorname{Log}(1+x) - \operatorname{Log}(1-x)]$$

et par suite le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f_1 est (cf. C. E., Ch. 6, § IV, n° 122)

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le rayon de convergence de la série obtenue est 1.

Calculons la dérivée de la fonction f_2 . Il vient

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2} \cdot \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-2x}{1+x^4}. \end{aligned}$$

Développons f_2' en série entière au voisinage de 0 ; on a

$$f_2'(x) = -2x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^{n+1} x^{4n+1}.$$

Le rayon de convergence de la série obtenue est 1. La théorie de l'intégration des séries entières (cf. C. E., Ch. 6, § II, n° 111) nous permet de trouver le développement en série entière de f_2 au voisinage de 0 et d'affirmer que la série obtenue a pour rayon de convergence 1. On a ainsi

$$f_2(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{4n+2} x^{4n+2}.$$

Comme $\cos x$ est la partie réelle de e^{ix} , $f_3(x)$ est la partie réelle de $e^{x(1+i)}$. Pour tout nombre complexe z , e^z est développable en série entière et on a

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(cf. C. E., Ch. 6, § IV, n° 122). On en déduit que

$$e^{x(1+i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n(1+i)^n}{n!}.$$

La partie réelle de $(1+i)^n$ est $2^{n/2} \cos(n\pi/4)$ et par suite

$$f_3(x) = e^x \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2} \frac{x^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

Le rayon de convergence de la série obtenue est $+\infty$ comme celui de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

6.37 On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R} - \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}.$$

1° Calculer les coefficients a_n ($n \in \mathbf{N}$) du développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0. Etudier la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

2° Quel est le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$?

Solution 1° Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto 1/(1+x)$ sont développables en séries entières au voisinage de 0 et leurs développements sont des séries entières qui ont respectivement pour rayon de convergence $+\infty$ et $+1$ (cf. C. E., Ch. 6, § IV, n° 122). Par suite la fonction f produit des deux fonctions précédentes est développable en série entière au voisinage de 0 (cf. C. E., Ch. 6, § II, n° 112) et la série obtenue a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Soit $a_n x^n$ le terme général de cette série. Si $|x| < 1$ on peut écrire

$$(1+x) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Par suite on a $a_0 = 1$ et pour tout entier n supérieur à 1 on a

$$a_n + a_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

On vérifie donc aisément par récurrence que pour tout entier n on a

$$a_n = (-1)^n \left[1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right].$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $|a_n|$ tend vers e mais la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas convergente.

2° Pour chaque entier naturel n et chaque nombre réel x , posons

$$u_n(x) = a_n x^n.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \frac{|a_n| + \frac{1}{(n+1)!}}{|a_n|} |x| \\ &= \left(1 + \frac{1}{|a_n|(n+1)!}\right) |x|. \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$ tend vers $|x|$ et par suite le critère de d'ALEMBERT montre que la série de terme général $a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1.

6.38 Pour chaque entier naturel n on pose

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1° Trouver une relation entre $f(n)$ et $f(n-1)$. Pour tout entier naturel n , on définit $\varphi(n)$ en posant $f(n) = (n!/e) [e - \varphi(n)]$. Donner explicitement la valeur de $\varphi(n)$ en fonction de n .

2° Montrer que pour chaque entier naturel n , on a

$$\frac{1}{e(n+1)} < f(n) < \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la nature de chacune des séries de termes généraux définis par

$$t_n = f(n),$$

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_n = \frac{f(n)}{n} \quad \text{si} \quad n \geq 1,$$

$$v_0 = v_1 = 0 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{f(n)}{\text{Log } n} \quad \text{si} \quad n \geq 2,$$

$$w_0 = w_1 = 0 \quad \text{et} \quad w_n = \frac{f(n)}{(\text{Log } n)^2} \quad \text{si} \quad n \geq 2.$$

3° Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $f(n) x^n$. Quelle est la nature de cette série pour $x = 1$ et $x = -1$?

Solution 1° En intégrant par parties $\int_0^1 x^n e^{-x} dx$ on obtient

$$f(n) = [-x^n e^{-x}]_0^1 + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx.$$

La relation liant $f(n)$ et $f(n-1)$ est donc

$$f(n) = -\frac{1}{e} + nf(n-1).$$

Cherchons la relation liant $\varphi(n)$ et $\varphi(n-1)$. Il vient

$$\frac{n!}{e} [e - \varphi(n)] = -\frac{1}{e} + n \frac{(n-1)!}{e} [e - \varphi(n-1)]$$

et par suite

$$\varphi(n) = \frac{1}{n!} + \varphi(n-1).$$

Calculons $\varphi(0)$. On a

$$f(0) = \frac{1}{e} [e - \varphi(0)] = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

On en déduit que $\varphi(0) = 1$ et par suite par récurrence on obtient

$$\varphi(n) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

2° Comme

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!},$$

on a

$$f(n) = \frac{n!}{e} \left[\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p!} \right] = \frac{1}{e(n+1)} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+p)!}$$

Comme

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+p)!} = 1 + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+p)!},$$

on a

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+p)!} > 1,$$

et comme

$$\frac{(n+1)!}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+p)} < \frac{1}{1.2\dots(p-1)}$$

on a

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+p)!} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(p-1)!} = e.$$

Il en résulte que

$$\frac{1}{e(n+1)} < f(n) < \frac{1}{(n+1)}.$$

On en déduit que les séries de termes généraux t_n, u_n, v_n, w_n ont respectivement même nature que les séries de termes généraux

$$t'_n = \frac{1}{n+1},$$

$$u'_0 = 0 \quad \text{et} \quad u'_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{si} \quad n \geq 1,$$

$$v'_0 = v'_1 = 0 \quad \text{et} \quad v'_n = \frac{1}{(n+1) \text{Log } n} \quad \text{si} \quad n \geq 2,$$

$$w'_0 = w'_1 = 0 \quad \text{et} \quad w'_n = \frac{1}{(n+1)(\text{Log } n)^2} \quad \text{si} \quad n \geq 2.$$

La série de terme général t'_n est une série de RIEMANN divergente. La série de terme général u'_n est convergente comme la série de RIEMANN de terme général $1/n^2$. D'autre part la comparaison de la série de terme général défini par

$$u''_0 = u''_1 = 0 \quad \text{et} \quad u''_n = \frac{1}{n \text{Log } n} \quad \text{si} \quad n \geq 2$$

$$\left(\text{resp } v''_0 = v''_1 = 0 \quad \text{et} \quad v''_n = \frac{1}{n(\text{Log } n)^2} \quad \text{si} \quad n \geq 2 \right)$$

avec l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \text{Log } x} \quad \left(\text{resp } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\text{Log } x)^2} \right)$$

nous montre que cette série est divergente (resp convergente) (cf. C. E., Ch. 5, § I, n° 85). On en déduit que la série de terme général v_n (resp w_n) est divergente (resp convergente).

3° De l'inégalité

$$\frac{1}{e(n+1)} < f(n) < \frac{1}{n+1},$$

on déduit aussi que le rayon de convergence R de la série entière de terme général $f(n) x^n$ est le même que celui de la série de terme général $x^n/(n+1)$. On a donc $R = 1$. D'autre part si $x = 1$, la série entière est divergente et si $x = -1$, le théorème sur les séries alternées nous montre que la série est convergente car $f(n)$ décroît et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

6.39 1° Montrer que la série de terme général

$$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx ?$$

est convergente. En déduire l'étude de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

2° Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$w_n = x^n \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx ?$$

Solution 1° La série de terme général u_n est une série alternée, les termes d'indice pair étant positifs, les termes d'indice impair négatifs. En effectuant le changement de variable défini par $x^2 = n\pi + y$, on obtient

$$u_n = \int_0^\pi (-1)^n \sin y \frac{2 dy}{\sqrt{n\pi + y}}.$$

Pour tout entier n et tout élément y de $[0, \pi]$, on a

$$\frac{\sin y}{\sqrt{n\pi + y}} \geq \frac{\sin y}{\sqrt{(n+1)\pi + y}}$$

et par suite $|u_n| \geq |u_{n+1}|$. Le terme général de la série proposée décroît donc en valeur absolue. D'autre part, de l'inégalité

$$|u_n| \leq \int_0^\pi \frac{2 dy}{\sqrt{n\pi}} = \frac{2\pi}{\sqrt{n\pi}}$$

on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$. Le théorème sur les séries alternées (cf. C. E., Ch. 5, § V, n° 104) permet donc de conclure que la série proposée est convergente.

Comme \mathbf{R} est archimédien, pour tout nombre a réel positif, il existe un entier n tel que $n \leq a^2/\pi < n+1$ donc tel que $\sqrt{n\pi} \leq a < \sqrt{(n+1)\pi}$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin(x^2) dx &= \int_0^{\sqrt{n\pi}} \sin(x^2) dx + \int_{\sqrt{n\pi}}^a \sin(x^2) dx \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} u_p + \int_{\sqrt{n\pi}}^a \sin x^2 dx. \end{aligned}$$

Comme

$$\left| \int_0^a \sin(x^2) dx \right| \leq |u_n|$$

et comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0,$$

on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \sin(x^2) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

La série de terme général u_n étant convergente, il en résulte que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ est définie.

2° On a $w_n = x^n u_n$, donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} = x \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Nous avons vu que

$$|u_n| = \int_0^\pi \sin y \frac{2 dy}{\sqrt{n\pi + y}}.$$

La formule de la moyenne généralisée montre que pour tout entier n , il existe un élément y_n de $[0, \pi]$ tel que

$$|u_n| = \frac{2}{\sqrt{n\pi + y_n}} \int_0^\pi \sin y dy = \frac{4}{\sqrt{n\pi + y_n}}.$$

Par suite lorsque n tend vers $+\infty$,

$$|u_n| \sim \frac{4}{\sqrt{n\pi}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = |x|.$$

La règle de d'ALEMBERT (cf. C. E., Ch. 5, § II, n° 88) montre donc que le rayon de convergence de la série entière de terme général w_n est 1.

6.40

Déterminer la série de FOURIER de la fonction f périodique de période 2π , égale sur $[-\pi, \pi]$:

1° à la fonction $x \mapsto e^x$;

2° à la fonction $x \mapsto |\sin x|$.

Solution Si f est une fonction intégrable de période 2π , on appelle série de FOURIER de f indifféremment la série de terme général $u_0 = a_0/2$ et $u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ si $n \geq 1$ avec pour chaque entier naturel n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

ou bien la « série » de terme général $\lambda_n e^{inx}$ où n parcourt \mathbf{Z} , avec

$$\lambda_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

(cf. C. E., Ch. 6, § IV, n° 123).

1° En prenant les notations précédentes on a pour chaque entier rationnel n

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^x e^{inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1+in)x}}{1+in} \right]_{-\pi}^{+\pi} \\ &= \frac{e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}}{2\pi(1+in)}. \end{aligned}$$

Comme $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$ il vient

$$\lambda_n = (-1)^n \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \frac{1-in}{1+n^2}$$

et par suite comme f satisfait aux hypothèses du théorème de DIRICHLET (cf. C. E., Ch. VI, § 123), pour tout nombre réel x on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1-in}{1+n^2} e^{-inx} \\ &= \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - n \sin nx}{1+n^2} \right]. \end{aligned}$$

2° Comme la fonction f est paire on a pour tout entier naturel n ,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

On a donc

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin^2 x}{2} \right]_0^{\pi} = 0$$

et si $n \geq 2$, de l'égalité

$$\sin x \cos nx = \frac{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x}{2},$$

on déduit que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

et par suite pour tout nombre réel x on a

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2 - 1} \cos nx.$$

6.41

Soient α, β, γ trois nombres réels, on désigne par f la fonction paire périodique de période 2π qui sur le segment $[0, \pi]$ coïncide avec la fonction

$$x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

1° La fonction f est-elle développable en série de FOURIER pour toute valeur de x et cette série converge-t-elle uniformément sur tout intervalle ?

2° Montrer que l'on peut déterminer α, β, γ de façon que la série de FOURIER de f se réduise à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

3° Dédurre de ce qui précède la somme de la série de terme général $u_0 = 0$ et $u_n = 1/n^2$ si $n \geq 1$.

Solution

1° La fonction f satisfait aux hypothèses du théorème de DIRICHLET car elle n'a que des discontinuités de première espèce en nombre fini sur tout intervalle borné et elle admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc développable en série de FOURIER pour toute valeur de x (cf. C. E., Ch. 6, § IV, n° 123) et on a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

où pour tout entier n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

La fonction f étant paire pour tout entier n on a

$$b_n = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \cos nx \, dx.$$

On a donc

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\alpha \frac{x^3}{3} + \beta \frac{x^2}{2} + \gamma x \right]_0^{\pi} = \alpha \frac{\pi^2}{3} + \beta \frac{\pi}{2} + \gamma.$$

Pour chaque entier n strictement positif cherchons une primitive de la fonction $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \cos nx$. Elle est nécessairement de la forme

$$(Ax^2 + Bx + C) \cos nx + (Dx^2 + Ex + F) \sin nx$$

où A, B, C, D, E, F sont des nombres réels tels que

$$\begin{aligned} [(Ax^2 + Bx + C) \cos nx + (Dx^2 + Ex + F) \sin nx]' &= \\ &= (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \cos nx. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} [(Ax^2 + Bx + C) \cos nx + (Dx^2 + Ex + F) \sin nx]' &= \\ &= [nDx^2 + (nE + 2A)x + nF + B] \cos nx + \\ &\quad + [-Anx^2 + (2D - nB)x + E - nC] \sin nx \end{aligned}$$

et par suite

$$nD = \alpha, \quad nE + 2A = \beta, \quad nF + B = \gamma, \quad nA = 2D - nB = E - nC = 0.$$

Donc une primitive de $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \cos nx$ est

$$\left(\frac{2\alpha}{n^2} x + \frac{\beta}{n^2} \right) \cos nx + \left(\frac{\alpha}{n} x^2 + \frac{\beta}{n} x + \frac{\gamma}{n} - \frac{2\alpha}{n^3} \right) \sin nx.$$

Pour tout entier n strictement positif on a donc :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{2\alpha x}{n^2} + \frac{\beta}{n^2} \right) \cos nx + \left(\frac{\alpha}{n} x^2 + \frac{\beta}{n} x + \frac{\gamma}{n} - \frac{2\alpha}{n^3} \right) \sin nx \right]_0^{\pi}$$

et par suite $a_n = \frac{4\alpha}{n^2}$ si n est pair et $a_n = -\frac{4\alpha}{n^2} - \frac{4\beta}{\pi n^2}$ si n est impair. On en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{\pi^2}{3} + \beta \frac{\pi}{2} + \gamma \right) + \\ &\quad + \sum_{p=1}^{+\infty} 4\alpha \frac{\cos 2px}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-4\alpha - \frac{4\beta}{\pi} \right) \frac{\cos (2p-1)x}{(2p-1)^2}. \end{aligned}$$

Comme pour tout nombre réel x on a

$$\left| 4\alpha \frac{\cos 2px}{(2p)^2} \right| \leq \frac{|\alpha|}{p^2}$$

et

$$\left| \left(-4\alpha - \frac{4\beta}{\pi} \right) \frac{\cos(2p-1)x}{(2p-1)^2} \right| < \frac{\left| 4\alpha + \frac{4\beta}{\pi} \right|}{(2p-1)^2}$$

et comme les séries numériques de termes généraux

$$\frac{|\alpha|}{p^2} \quad \text{et} \quad \frac{\left| 4\alpha + \frac{4\beta}{\pi} \right|}{(2p-1)^2}$$

sont convergentes, la série de FOURIER de f converge normalement donc uniformément sur \mathbf{R} et par suite sur tout intervalle de \mathbf{R} .

2° Pour que la série de FOURIER de f se réduise à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ il faut et il suffit que

$$\frac{1}{2} \left(\alpha \frac{\pi^2}{3} + \beta \frac{\pi}{2} + \gamma \right) = 0$$

$$4\alpha = 1 \quad \text{et} \quad -4\alpha - \frac{4\beta}{\pi} = 1$$

c'est-à-dire que

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = -\frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par suite pour tout élément x de $[0, \pi]$ on a

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

3° En écrivant l'égalité ci-dessus pour $x = 0$ on obtient

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

6.42

Soit f une fonction complexe de variable réelle, continue par morceaux sur tout intervalle borné et de période 2π . Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ la « série » de FOURIER de cette fonction. On pose pour tout entier naturel m

$$f_m(x) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{inx}.$$

1° Démontrer que pour tout entier naturel m on a la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-m}^{+m} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_m(x)|^2 dx.$$

2° En déduire que pour tout entier m on a

$$\sum_{n=0}^m |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

3° En déduire que la famille $(|c_n|^2)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et que sa somme est inférieure ou égale à $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. (Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de BESSEL.)

Solution 1° On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - f_m(x)) \overline{(f(x) - f_m(x))} dx &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{f(x)} dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{f_m(x)} dx - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} f_m(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_m(x) \overline{f_m(x)} dx. \end{aligned}$$

Nous savons que

$$f_m(x) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{inx}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{f_m(x)} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left(\sum_{n=-m}^{+m} \bar{c}_n e^{-inx} \right) dx \\ &= \sum_{n=-m}^{+m} \bar{c}_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n \bar{c}_n. \end{aligned}$$

On montre de même que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} f_m(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f_m(x)} f_m(x) dx = \sum_{n=-m}^{+m} c_n \bar{c}_n.$$

On a donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - f_m(x)) \overline{(f(x) - f_m(x))} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{f(x)} dx - \sum_{n=-m}^{+m} c_n \bar{c}_n$$

et par suite

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_m(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-m}^{+m} |c_n|^2.$$

2° On tire de l'égalité précédente

$$\sum_{n=-m}^{+m} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_m(x)|^2 dx.$$

La deuxième intégrale étant positive on en déduit que

$$\sum_{n=-m}^{+m} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

3° La suite $\left(\sum_{n=-m}^{+m} |c_n|^2 \right)_{m \in \mathbf{N}}$ est croissante et majorée par

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Elle est donc convergente et sa limite est inférieure à $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. Par suite la famille $(|c_n|^2)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

6.43

Soit f une fonction dérivable, de période 2π , dont la dérivée est continue par morceaux sur tout intervalle borné de \mathbf{R} .

1° Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ la « série » de FOURIER de f . Trouver la série de FOURIER de f' et, en utilisant l'inégalité de BESSEL (cf. ex. 6.42) établir que la famille $(|a_n|^2 n^2)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable.

2° Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, $(v_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ deux familles sommables de nombres réels positifs. Montrer que la famille $(u_n v_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable et établir l'inégalité

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n v_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n^2 \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n^2 \right).$$

3° En déduire que la famille $(|a_n|)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable et que la série de FOURIER de f est uniformément convergente sur \mathbf{R} . Énoncer une conclusion.

Solution 1° Les coefficients de FOURIER $(b_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de f' sont définis pour chaque entier rationnel n par

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt.$$

On a donc $b_0 = 0$ et pour $n \neq 0$ une intégration par parties donne

$$b_n = \left[\frac{1}{2\pi} f(t) e^{-int} \right]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Par suite pour tout entier rationnel n , on a $b_n = ina_n$. La fonction f' étant continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$, comme $|b_n| = |n| |a_n|$, l'inégalité de BESSEL montre que la famille $(|a_n|^2 n^2)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable et que

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 n^2 \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

2° On a

$$u_p^2 v_q^2 + u_q^2 v_p^2 - 2u_p v_p u_q v_q = (u_p v_q - u_q v_p)^2 \geq 0$$

et par suite

$$\begin{aligned} 2 \left(\sum_{n=-m}^{+m} u_n v_n \right)^2 &= 2 \sum_{p=-m}^{+m} \sum_{q=-m}^{+m} u_p v_p u_q v_q \leq \sum_{p=-m}^{+m} \sum_{q=-m}^{+m} (u_p^2 v_q^2 + u_q^2 v_p^2) \\ &= 2 \left(\sum_{p=-m}^{+m} u_p^2 \right) \left(\sum_{q=-m}^{+m} v_q^2 \right) \leq 2 \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p^2 \right) \left(\sum_{q=-\infty}^{+\infty} v_q^2 \right). \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $\left(\sum_{n=-m}^{+m} u_n v_n \right)_{m \in \mathbf{N}}$ croissante majorée par

$$\sqrt{\left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p^2 \right) \left(\sum_{q=-\infty}^{+\infty} v_q^2 \right)}$$

est convergente. Autrement dit la famille $(u_n v_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable et on a l'inégalité

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n v_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n^2 \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n^2 \right).$$

3° Posons $u_0 = v_0 = 0$ et pour chaque entier rationnel n non nul

$$u_n = |n| |a_n|, \quad v_n = \frac{1}{|n|}.$$

D'après la question précédente, la famille $(|a_n|)_{n \in \mathbf{Z}^*}$ est sommable et on a

$$\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}^*} |a_n|^2 \right) \leq \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}^*} n^2 |a_n|^2 \right).$$

Comme pour tout entier rationnel n on a $|a_n e^{inx}| = |a_n|$, la famille $(a_n e^{inx})_{n \in \mathbf{Z}}$ a ses termes majorés en module par les termes $(|a_n|)_{n \in \mathbf{Z}}$ d'une famille sommable de nombres réels et par suite la série de FOURIER de f est uniformément convergente sur \mathbf{R} . Le théorème de DIRICHLET (cf. C. E., Ch. 6, § IV, n° 123) montre que pour tout nombre réel x , on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx} = f(x).$$

On peut donc dire que si f est la primitive d'une fonction de période 2π continue par morceaux sur tout intervalle borné de \mathbf{R} , la série de FOURIER converge vers f uniformément sur \mathbf{R} .

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

7.1 Trouver les solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) - 4x_3(t) \\ x_3'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) - 4x_3(t) \end{cases}$$

où x_1, x_2, x_3 sont des fonctions réelles dérivables sur \mathbf{R} .

Solution En posant $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ et $X'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))$ pour chaque nombre réel t , le système proposé s'écrit $X'(t) = A \cdot X(t)$ où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

donc A possède les valeurs propres simples $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$. Les solutions du système se présentent donc (cf. C. E., Ch. 10, § I, n° 178) sous la forme

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t)$$

avec

$$\begin{aligned} X_1(t) &= Y_1 e^t \\ X_2(t) &= Y_2 e^{2t} \\ X_3(t) &= Y_3 e^{-3t} \end{aligned}$$

où Y_1, Y_2, Y_3 sont des vecteurs de \mathbf{R}^3 que nous allons déterminer.

On a

$$e^{-t}[X_1'(t) - A \cdot X_1(t)] = 0 \quad (1)$$

$$e^{-2t}[X_2'(t) - A \cdot X_2(t)] = 0 \quad (2)$$

$$e^{3t}[X_3'(t) - A \cdot X_3(t)] = 0 \quad (3)$$

or

$$X_1'(t) = Y_1 e^t, \quad X_2'(t) = 2 Y_2 e^{2t}, \quad X_3'(t) = -3 Y_3 e^{-3t}$$

donc les relations (1), (2), (3) ci-dessus donnent

$$Y_1 = A \cdot Y_1 \quad (4)$$

$$2 Y_2 = A \cdot Y_2 \quad (5)$$

$$-3 Y_3 = A \cdot Y_3. \quad (6)$$

En posant $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, y_{i3})$ pour $i = 1, 2, 3$ la relation (4) donne

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} y_{12} - y_{13} = 0 \\ 2 y_{11} + 2 y_{12} - 4 y_{13} = 0 \\ 4 y_{11} + y_{12} - 5 y_{13} = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$y_{11} = y_{12} = y_{13}$$

par suite le vecteur Y_1 est de la forme (K_1, K_1, K_1) où K_1 est un nombre réel.

La relation (5) donne

$$\begin{pmatrix} 2 y_{21} \\ 2 y_{22} \\ 2 y_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} -y_{21} + y_{22} - y_{23} = 0 \\ 2 y_{21} + y_{22} - 4 y_{23} = 0 \\ 4 y_{21} + y_{22} - 6 y_{23} = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$y_{21} = y_{23} \quad \text{et} \quad y_{22} = 2 y_{21}$$

par suite le vecteur Y_2 est de la forme $(K_2, 2 K_2, K_2)$ où K_2 est un nombre réel

La relation (6) donne

$$\begin{pmatrix} -3 y_{31} \\ -3 y_{32} \\ -3 y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} 4 y_{31} + y_{32} - y_{33} = 0 \\ 2 y_{31} + 6 y_{32} - 4 y_{33} = 0 \\ 4 y_{31} + y_{32} - y_{33} = 0. \end{cases}$$

on en déduit que

$$y_{32} = 7 y_{31} \quad \text{et} \quad y_{33} = 11 y_{31}$$

par suite le vecteur Y_3 est de la forme $(K_3, 7 K_3, 11 K_3)$ où K_3 est un nombre réel. Les solutions du système sont donc

$$\begin{aligned} x_1(t) &= K_1 e^t + K_2 e^{2t} + K_3 e^{-3t} \\ x_2(t) &= K_1 e^t + 2 K_2 e^{2t} + 7 K_3 e^{-3t} \\ x_3(t) &= K_1 e^t + K_2 e^{2t} + 11 K_3 e^{-3t} \end{aligned}$$

où K_1, K_2, K_3 sont des nombres réels.

7.2 Trouver les solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$$

où x_1, x_2, x_3 sont des fonctions réelles dérivables sur \mathbf{R} .

Solution En posant $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ et $X'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))$ pour chaque nombre réel t , le système proposé s'écrit $X'(t) = A \cdot X(t)$ où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

donc A possède la valeur propre simple $\lambda_1 = 1$ et la valeur propre double $\lambda_2 = -2$. Les solutions du système se présentent donc (cf. C. E., Ch. 10, § I, n° 178) sous la forme

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

avec

$$X_1(t) = Y_1 e^t$$

$$X_2(t) = (Y_2 + Y_3 t) e^{-2t}$$

où Y_1, Y_2, Y_3 sont des vecteurs de \mathbf{R}^3 que nous allons déterminer. On a

$$e^{-t}[X_1'(t) - A \cdot X_1(t)] = 0 \quad (1)$$

$$e^{2t}[X_2'(t) - A \cdot X_2(t)] = 0 \quad (2)$$

or

$$X_1'(t) = Y_1 e^t \quad X_2'(t) = (Y_3 - 2Y_2 - 2Y_3 t) e^{-2t}$$

donc les relations (1) et (2) ci-dessus donnent

$$Y_1 = A \cdot Y_1 \quad (3)$$

$$Y_3 - 2Y_2 = A \cdot Y_2 \quad (4)$$

$$-2Y_3 = A \cdot Y_3. \quad (5)$$

En posant $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, y_{i3})$ pour $i = 1, 2, 3$ la relation (3) donne

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} -2y_{11} + y_{12} + y_{13} = 0 \\ y_{11} - 2y_{12} + y_{13} = 0 \\ y_{11} + y_{12} - 2y_{13} = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$y_{11} = y_{12} = y_{13}$$

par suite le vecteur Y_1 est de la forme (K_1, K_1, K_1) où K_1 est un nombre réel. Les relations (4) et (5) donnent

$$\begin{pmatrix} y_{31} - 2y_{21} \\ y_{32} - 2y_{22} \\ y_{33} - 2y_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} -2 y_{31} \\ -2 y_{32} \\ -2 y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{cases} y_{31} - y_{21} - y_{22} - y_{23} = 0 \\ y_{32} - y_{21} - y_{22} - y_{23} = 0 \\ y_{33} - y_{21} - y_{22} - y_{23} = 0 \end{cases}$$

et

$$y_{31} + y_{32} + y_{33} = 0.$$

Il en résulte que

$$y_{31} = y_{32} = y_{33} = y_{21} + y_{22} + y_{23} = 0$$

par suite le vecteur Y_3 est nul et le vecteur Y_2 est de la forme

$$(K_2, K_3, -(K_2 + K_3))$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels. Les solutions du système sont donc

$$\begin{aligned} x_1(t) &= K_1 e^t + K_2 e^{-2t} \\ x_2(t) &= K_1 e^t + K_3 e^{-2t} \\ x_3(t) &= K_1 e^t - (K_2 + K_3) e^{-2t} \end{aligned}$$

où K_1, K_2, K_3 sont des nombres réels.

7.3

Trouver les solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3 x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -4 x_1(t) - x_2(t) \\ x_3'(t) = 4 x_1(t) - 8 x_2(t) - 2 x_3(t) \end{cases}$$

où x_1, x_2, x_3 sont des fonctions réelles dérivables sur \mathbf{R} .

Solution

En posant $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ et $X'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))$ pour chaque nombre réel t , le système proposé s'écrit $X'(t) = A \cdot X(t)$ où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(2 + \lambda)(\lambda - 1)^2$$

donc A possède la valeur propre simple $\lambda_1 = -2$ et la valeur propre double $\lambda_2 = 1$.

Les solutions du système se présentent donc (cf. C. E., Ch. 10, § I, n° 178) sous la forme

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

avec

$$X_1(t) = Y_1 e^{-2t}$$

$$X_2(t) = (Y_2 + Y_3 t) e^t$$

où Y_1, Y_2, Y_3 sont des vecteurs de \mathbf{R}^3 que nous allons déterminer.

On a

$$e^{2t}[X_1'(t) - A.X_1(t)] = 0 \quad (1)$$

$$e^{-t}[X_2'(t) - A.X_2(t)] = 0 \quad (2)$$

or

$$X_1'(t) = -2 Y_1 e^{-2t} \quad X_2'(t) = (Y_3 + Y_2 + Y_3 t) e^t$$

donc les relations (1) et (2) ci-dessus donnent

$$-2 Y_1 = A.Y_1 \quad (3)$$

$$Y_3 + Y_2 = A.Y_2 \quad (4)$$

$$Y_3 = A.Y_3. \quad (5)$$

En posant $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, y_{i3})$ pour $i = 1, 2, 3$, la relation (4) donne

$$\begin{pmatrix} -2 y_{11} \\ -2 y_{12} \\ -2 y_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} 5 y_{11} + y_{12} = 0 \\ -4 y_{11} + y_{12} = 0 \\ 4 y_{11} - 8 y_{12} = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $y_{11} = y_{12} = 0$, par suite le vecteur Y_1 est de la forme $(0, 0, K_1)$ où K_1 est un nombre réel.

Les relations (4) et (5) donnent

$$\begin{pmatrix} y_{21} + y_{31} \\ y_{22} + y_{32} \\ y_{23} + y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{cases} 2 y_{21} + y_{22} = y_{31} \\ -4 y_{21} - 2 y_{22} = y_{32} \\ 4 y_{21} - 8 y_{22} - 3 y_{23} = y_{33} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 2 y_{31} + y_{32} = 0 \\ -4 y_{31} - 2 y_{32} = 0 \\ 4 y_{31} - 8 y_{32} - 3 y_{33} = 0 \end{cases}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} 3 y_{33} &= -10 y_{32} \\ y_{32} &= -2 y_{31} \\ y_{22} &= y_{31} - 2 y_{21} \\ 3 y_{23} &= y_{32} + y_{33} - 10 y_{22} \end{aligned}$$

donc les vecteurs Y_2 et Y_3 sont de la forme

$$\begin{aligned} Y_2 &= (3 K_2, 9 K_3 - 6 K_2, 20 K_2 - 16 K_3) \\ Y_3 &= (9 K_3, -18 K_3, 60 K_3) \end{aligned}$$

où K_2, K_3 sont des nombres réels. Les solutions du système sont donc

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (3 K_2 + 9 K_3 t) e^t \\ x_2(t) &= (9 K_3 - 6 K_2 - 18 K_3 t) e^t \\ x_3(t) &= K_1 e^{-2t} + (20 K_2 - 16 K_3 + 60 K_3 t) e^t \end{aligned}$$

où K_1, K_2, K_3 sont des nombres réels.

7.4

Trouver les solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} 2 x_1'(t) + x_2'(t) - 3 x_1(t) - x_2(t) = t \\ x_1'(t) + x_2'(t) - 4 x_1(t) - x_2(t) = e^t \end{cases}$$

où x_1 et x_2 sont des fonctions réelles dérivables sur \mathbf{R} .

Solution Le système proposé équivaut au système

$$\begin{cases} x_1'(t) + x_1(t) = t - e^t & (1) \\ x_2'(t) - 5x_1(t) - x_2(t) = -t + 2e^t. & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) est une équation différentielle linéaire que nous pouvons intégrer directement. L'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$x_1'(t) + x_1(t) = 0.$$

Les solutions sont de la forme

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}$$

et en appliquant la méthode de variation des constantes, on obtient

$$C_1'(t) e^{-t} = t - e^t$$

d'où

$$C_1'(t) = t e^t - e^{2t}$$

et

$$C_1(t) = t e^t - e^t - \frac{1}{2} e^{2t} + c_1$$

où c_1 est un nombre réel.

Par suite on a

$$x_1(t) = t - 1 - \frac{1}{2} e^t + c_1 e^{-t}$$

où c_1 est un nombre réel, et en portant ce résultat dans l'équation (2) on obtient

$$x_2'(t) - x_2(t) = 4t - 5 - \frac{1}{2} e^t + 5c_1 e^{-t}. \quad (3)$$

L'équation (3) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à l'équation (3) est

$$x_2'(t) - x_2(t) = 0$$

elle admet les solutions

$$x_2(t) = C_2 e^t$$

et en appliquant la méthode de variation des constantes, on obtient

$$C_2'(t) e^t = 4t - 5 - \frac{1}{2} e^t + 5c_1 e^{-t}$$

d'où

$$C_2'(t) = 4t e^{-t} - 5 e^{-t} - \frac{1}{2} + 5c_1 e^{-2t}$$

et

$$C_2(t) = -4t e^{-t} + e^{-t} - \frac{1}{2} t - \frac{5c_1}{2} e^{-2t} + c_2$$

où c_2 est un nombre réel. Par suite

$$x_2(t) = -4t + 1 - \frac{1}{2}t e^t - \frac{5c_1}{2}e^{-t} + c_2 e^t$$

et les solutions du système sont

$$x_1(t) = c_1 e^{-t} + t - 1 - \frac{1}{2}e^t$$

$$x_2(t) = -\frac{5c_1}{2}e^{-t} + c_2 e^t - 4t + 1 - \frac{1}{2}t e^t$$

où c_1, c_2 sont des nombres réels.

7.5 Trouver les solutions du système d'équations différentielles

$$(S) \begin{cases} x_1'(t) + x_2'(t) - x_2(t) = \sin t \\ x_1'(t) - x_2'(t) + x_1(t) = t \end{cases}$$

où x_1, x_2 sont des fonctions réelles dérivables sur \mathbf{R} .

Solution Le système proposé équivaut au système

$$(S') \begin{cases} x_1'(t) = -\frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) + \frac{1}{2}(t + \sin t) \\ x_2'(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) + \frac{1}{2}(-t + \sin t) \end{cases}$$

Pour chaque nombre réel t , posons

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad X'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$$

et

$$G(t) = \left(\frac{1}{2}(t + \sin t), \frac{1}{2}(-t + \sin t)\right);$$

alors le système (S') s'écrit aussi

$$X'(t) = A \cdot X(t) + G(t)$$

où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{2}$$

donc A possède les valeurs propres simples $\lambda_1 = \sqrt{2}/2$ et $\lambda_2 = -\sqrt{2}/2$. Les solutions du système homogène associé à (S') sont donc (cf. C. E., Ch. 10, § I, n° 178) de la forme

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

avec

$$X_1(t) = Y_1 \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right)$$

$$X_2(t) = Y_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} t\right)$$

où Y_1, Y_2 sont des vecteurs de \mathbf{R}^2 que nous allons déterminer. On a

$$X_1'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} Y_1 \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right)$$

et

$$[X_1'(t) - A.X_1(t)] \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) = 0$$

donc

$$\frac{\sqrt{2}}{2} Y_1 = A.Y_1$$

d'où en posant $Y_1 = (y_{11}, y_{12})$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} y_{11} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2} + 1}{2} y_{11} - \frac{1}{2} y_{12} = 0 \\ -\frac{1}{2} y_{11} + \frac{\sqrt{2} - 1}{2} y_{12} = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$y_{12} = (\sqrt{2} + 1) y_{11}$$

et par suite le vecteur Y_1 est de la forme $(K_1, (\sqrt{2} + 1) K_1)$ où K_1 est un nombre réel. De même on a

$$X_2'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} Y_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} t\right)$$

et

$$[X_2'(t) - A \cdot X_2(t)] \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) = 0$$

d'où

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} Y_2 = A \cdot Y_2$$

et en posant $Y_2 = (y_{21}, y_{22})$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} y_{21} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{cases} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right) y_{21} - \frac{1}{2} y_{22} = 0 \\ -\frac{1}{2} y_{21} - \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right) y_{22} = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$y_{22} = (1 - \sqrt{2}) y_{21}$$

et le vecteur Y_2 est de la forme $(K_2, (1 - \sqrt{2}) K_2)$ où K_2 est un nombre réel.
Cherchons à présent une solution particulière Z du système (S') . Comme

$$G(t) = Ut + V \sin t$$

avec $U = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $V = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nous chercherons $Z(t)$ sous la forme

$$Z(t) = Y_3 t^2 + Y_4 t + Y_5 + Y_6 \sin t + Y_7 \cos t$$

où Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7 sont des vecteurs de \mathbf{R}^2 que nous allons déterminer. On a

$$Z'(t) = 2 Y_3 t + Y_4 + Y_6 \cos t - Y_7 \sin t$$

par suite

$$G(t) = Z'(t) - A \cdot Z(t) = -AY_3 t^2 + (2 Y_3 - A \cdot Y_4) t + (Y_4 - AY_5) + (Y_6 - AY_7) \cos t - (Y_7 + A \cdot Y_6) \sin t$$

donc

$$\begin{cases} A \cdot Y_3 = 0 & (1) \\ 2 Y_3 - A \cdot Y_4 = U & (2) \\ Y_4 - A \cdot Y_5 = 0 & (3) \\ Y_6 - A \cdot Y_7 = 0 & (4) \\ Y_7 + A \cdot Y_6 = -V. & (5) \end{cases}$$

Posons $Y_i = (y_{i1}, y_{i2})$ pour $3 \leq i \leq 7$. L'égalité (1) donne alors

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} y_{31} + \frac{1}{2} y_{32} = 0 \\ \frac{1}{2} y_{31} + \frac{1}{2} y_{32} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$y_{31} = y_{32} = 0$$

et $Y_3 = 0$. En portant ceci dans l'égalité (2), il vient alors

$$\begin{cases} \frac{1}{2} y_{41} - \frac{1}{2} y_{42} = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} y_{41} - \frac{1}{2} y_{42} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où

$$y_{41} = 1 \quad y_{42} = 0$$

et

$$Y_4 = (1, 0).$$

En portant ce résultat dans l'égalité (3), il vient

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} y_{51} + \frac{1}{2} y_{52} = 1 \\ \frac{1}{2} y_{51} + \frac{1}{2} y_{52} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$y_{51} = -1 \quad y_{52} = 1$$

et

$$Y_5 = (-1, 1).$$

Les égalités (4) et (5) donnent

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} y_{71} + \frac{1}{2} y_{72} = y_{61} \\ \frac{1}{2} y_{71} + \frac{1}{2} y_{72} = y_{62} \\ y_{71} - \frac{1}{2} y_{61} + \frac{1}{2} y_{62} = -\frac{1}{2} \\ y_{72} + \frac{1}{2} y_{61} + \frac{1}{2} y_{62} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$y_{71} = y_{72} = -\frac{1}{3} \quad y_{61} = 0 \quad y_{62} = -\frac{1}{3}$$

donc

$$Y_6 = (0, -\frac{1}{3}) \quad \text{et} \quad Y_7 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}).$$

Par suite les solutions du système proposé sont

$$\begin{cases} x_1(t) = K_1 \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) + K_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) + t - 1 - \frac{1}{3} \cos t \\ x_2(t) = (\sqrt{2} + 1) K_1 \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) + (1 - \sqrt{2}) K_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) + \\ + 1 - \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{3} \cos t \end{cases}$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels.

7.6 Trouver les solutions du système d'équations différentielles

$$x_1''(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$x_2''(t) = x_2(t) - x_1(t)$$

où x_1, x_2 sont deux fonctions réelles deux fois dérivables sur \mathbf{R} .

Solution Pour chaque nombre réel t , posons

$$x_3(t) = x_1'(t) \quad x_4(t) = x_2'(t)$$

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) \quad X'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t), x_4'(t)).$$

Alors le système proposé équivaut au système d'équations différentielles linéaires du premier ordre $X'(t) = A \cdot X(t)$ où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda^2 - 2).$$

La matrice A admet donc les valeurs propres simples $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ et la valeur propre double $\lambda_3 = 0$. Les solutions du système $X'(t) = A \cdot X(t)$ sont donc (cf. C. E., Ch. 10, § I, n° 178) de la forme

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t)$$

avec

$$X_1(t) = Y_1 \exp(\sqrt{2} t)$$

$$X_2(t) = Y_2 \exp(-\sqrt{2} t)$$

$$X_3(t) = Y_3 + Y_4 t$$

où Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sont des vecteurs de \mathbf{R}^4 que nous allons déterminer. Posons $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4})$ pour $1 \leq i \leq 4$. On a

$$X_1'(t) = \sqrt{2} Y_1 \exp(\sqrt{2} t)$$

et

$$[X_1'(t) - A \cdot X_1(t)] \exp(-\sqrt{2} t) = 0$$

donc

$$\sqrt{2} Y_1 = A \cdot Y_1$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} y_{11} = y_{13} \\ \sqrt{2} y_{12} = y_{14} \\ \sqrt{2} y_{13} = y_{11} - y_{12} \\ \sqrt{2} y_{14} = -y_{11} + y_{12} \end{array} \right.$$

on en déduit que

$$y_{12} = -y_{11} \quad y_{13} = \sqrt{2} y_{11} \quad y_{14} = -\sqrt{2} y_{11}$$

donc $Y_1 = (K_1, -K_1, \sqrt{2} K_1, -\sqrt{2} K_1)$ où K_1 est un nombre réel.

De même on a

$$X_2'(t) = -\sqrt{2} Y_2 \exp(-\sqrt{2} t)$$

et

$$[X_2'(t) - A \cdot X_2(t)] \exp(\sqrt{2} t) = 0$$

donc

$$-\sqrt{2} Y_2 = A \cdot Y_2$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{2} y_{21} = y_{23} \\ -\sqrt{2} y_{22} = y_{24} \\ -\sqrt{2} y_{23} = y_{21} - y_{22} \\ -\sqrt{2} y_{24} = -y_{21} + y_{22} \end{array} \right.$$

on en déduit que

$$y_{22} = -y_{21} \quad y_{23} = -\sqrt{2} y_{21} \quad y_{24} = \sqrt{2} y_{21}$$

donc $Y_2 = (K_2, -K_2, -\sqrt{2} K_2, \sqrt{2} K_2)$ où K_2 est un nombre réel.

A présent observons que

$$X_3'(t) = Y_4$$

donc

$$AY_3 + AY_4 t = Y_4$$

d'où

$$AY_3 = Y_4 \quad \text{et} \quad AY_4 = 0$$

on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{41} = y_{33} \\ y_{42} = y_{34} \\ y_{43} = y_{31} - y_{32} \\ y_{44} = -y_{31} + y_{32} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y_{43} = 0 \\ y_{44} = 0 \\ y_{41} - y_{42} = 0 \\ -y_{41} + y_{42} = 0 \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{41} = y_{42} = y_{33} = y_{34} \\ y_{43} = y_{44} = 0 \\ y_{31} = y_{32} \end{array} \right.$$

par suite on a

$$Y_3 = (K_3, K_3, K_4, K_4)$$

$$Y_4 = (K_4, K_4, 0, 0)$$

où K_3, K_4 sont deux nombres réels et les solutions du système $X'(t) = A \cdot X(t)$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = K_1 \exp(\sqrt{2} t) + K_2 \exp(-\sqrt{2} t) + K_3 + K_4 t \\ x_2(t) = -K_1 \exp(\sqrt{2} t) - K_2 \exp(-\sqrt{2} t) + K_3 + K_4 t \\ x_3(t) = \sqrt{2} K_1 \exp(\sqrt{2} t) - \sqrt{2} K_2 \exp(-\sqrt{2} t) + K_4 \\ x_4(t) = -\sqrt{2} K_1 \exp(\sqrt{2} t) + \sqrt{2} K_2 \exp(-\sqrt{2} t) + K_4 \end{array} \right.$$

où K_1, K_2, K_3, K_4 sont des nombres réels. On retrouve évidemment sur ces formules le fait que $x_3(t) = x_1'(t)$ et $x_4(t) = x_2'(t)$ et les solutions du système proposé sont

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = K_1 \exp(\sqrt{2} t) + K_2 \exp(-\sqrt{2} t) + K_3 + K_4 t \\ x_2(t) = -K_1 \exp(\sqrt{2} t) - K_2 \exp(-\sqrt{2} t) + K_3 + K_4 t \end{array} \right.$$

où K_1, K_2, K_3, K_4 sont des nombres réels.

7.7

Trouver les solutions du système d'équations différentielles

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x_1''(t) + 4 x_2(t) = 0 \\ x_2''(t) - 4 x_1(t) = 0 \end{array} \right.$$

où x_1, x_2 sont des fonctions à valeurs dans \mathbf{C} , définies et deux fois dérivables sur \mathbf{R} . Parmi les solutions du système (S), quelles sont celles qui prennent leurs valeurs dans \mathbf{R} ?

Solution Pour chaque nombre réel t , posons

$$x_3(t) = x'_1(t) \quad x_4(t) = x'_2(t)$$

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) \quad X'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t), x'_4(t)).$$

Alors le système (S) équivaut au système d'équations différentielles linéaires du premier ordre $X'(t) = A \cdot X(t)$ où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^4 + 16$$

donc A possède les valeurs propres simples

$$\lambda_1 = \sqrt{2}(1 + i) \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}(1 + i)$$

$$\lambda_3 = \sqrt{2}(-1 + i) \quad \lambda_4 = -\sqrt{2}(-1 + i).$$

Les solutions du système $X'(t) = A \cdot X(t)$ sont donc (cf. C. E., Ch. 10, § I, n° 178) de la forme

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) + X_4(t)$$

avec

$$\begin{cases} X_1(t) = Y_1 \exp(\sqrt{2}(1 + i)t) \\ X_2(t) = Y_2 \exp(-\sqrt{2}(1 + i)t) \\ X_3(t) = Y_3 \exp(\sqrt{2}(-1 + i)t) \\ X_4(t) = Y_4 \exp(-\sqrt{2}(-1 + i)t) \end{cases}$$

où Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sont des vecteurs de \mathbf{C}^4 que nous allons déterminer.

Posons $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4})$ pour $1 \leq i \leq 4$. Alors pour $1 \leq i \leq 4$ on a

$$[X'_i(t) - A \cdot X_i(t)] \exp(-\lambda_i t) = 0$$

donc

$$\lambda_i Y_i = A \cdot Y_i$$

soit

$$\begin{cases} \lambda_i y_{i1} = y_{i3} \\ \lambda_i y_{i2} = y_{i4} \\ \lambda_i y_{i3} = -4 y_{i2} \\ \lambda_i y_{i4} = 4 y_{i1} \end{cases}$$

On en déduit que

$$y_{i2} = -\frac{\lambda_i^2}{4} y_{i1} \quad y_{i3} = \lambda_i y_{i1} \quad y_{i4} = \frac{4}{\lambda_i} y_{i1}$$

par suite on a

$$\begin{aligned} Y_1 &= (K_1, -iK_1, \sqrt{2}(1+i)K_1, \sqrt{2}(1-i)K_1) \\ Y_2 &= (K_2, -iK_2, -\sqrt{2}(1+i)K_2, -\sqrt{2}(1-i)K_2) \\ Y_3 &= (K_3, iK_3, \sqrt{2}(-1+i)K_3, -\sqrt{2}(1+i)K_3) \\ Y_4 &= (K_4, iK_4, -\sqrt{2}(-1+i)K_4, \sqrt{2}(1+i)K_4) \end{aligned}$$

où K_1, K_2, K_3, K_4 sont des nombres complexes. Par suite les solutions du système $X'(t) = A \cdot X(t)$ sont

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \\ &= K_1 \exp(\sqrt{2}(1+i)t) + K_2 \exp(-\sqrt{2}(1+i)t) + \\ &\quad + K_3 \exp(\sqrt{2}(-1+i)t) + K_4 \exp(-\sqrt{2}(-1+i)t) \\ x_2(t) &= \\ &= -iK_1 \exp(\sqrt{2}(1+i)t) - iK_2 \exp(-\sqrt{2}(1+i)t) + \\ &\quad + iK_3 \exp(\sqrt{2}(-1+i)t) + iK_4 \exp(-\sqrt{2}(-1+i)t) \\ x_3(t) &= \\ &= \sqrt{2}(1+i)K_1 \exp(\sqrt{2}(1+i)t) - \sqrt{2}(1+i)K_2 \exp(-\sqrt{2}(1+i)t) + \\ &\quad + \sqrt{2}(-1+i)K_3 \exp(\sqrt{2}(-1+i)t) - \sqrt{2}(-1+i)K_4 \exp(-\sqrt{2}(-1+i)t) \\ x_4(t) &= \\ &= \sqrt{2}(1-i)K_1 \exp(\sqrt{2}(1+i)t) - \sqrt{2}(1-i)K_2 \exp(-\sqrt{2}(1+i)t) - \\ &\quad - \sqrt{2}(1+i)K_3 \exp(\sqrt{2}(-1+i)t) + \sqrt{2}(1+i)K_4 \exp(-\sqrt{2}(-1+i)t) \end{aligned}$$

où K_1, K_2, K_3, K_4 sont des nombres complexes. On retrouve sur ces formules le fait que $x_3(t) = x_1'(t)$ et $x_4(t) = x_2'(t)$. Les solutions du système (S) sont donc

$$\left\{ \begin{aligned} x_1(t) &= K_1 \exp(\sqrt{2}(1+i)t) + K_2 \exp(-\sqrt{2}(1+i)t) + \\ &\quad + K_3 \exp(\sqrt{2}(-1+i)t) + K_4 \exp(-\sqrt{2}(-1+i)t) \\ x_2(t) &= -iK_1 \exp(\sqrt{2}(1+i)t) - iK_2 \exp(-\sqrt{2}(1+i)t) + \\ &\quad + iK_3 \exp(\sqrt{2}(-1+i)t) + iK_4 \exp(-\sqrt{2}(-1+i)t) \end{aligned} \right.$$

où K_1, K_2, K_3, K_4 sont des nombres complexes. Celles qui prennent leurs valeurs dans \mathbf{R} s'obtiennent en exprimant le fait que $x_1(t) = \overline{x_1(t)}$ et $x_2(t) = \overline{x_2(t)}$

pour tout nombre réel t . On obtient ainsi les conditions $K_1 = \bar{K}_4$ et $K_2 = \bar{K}_3$, d'où en posant

$$K_1 = L_1 + iM_1 \quad K_2 = L_2 + iM_2$$

où L_1, L_2, M_1, M_2 sont des nombres réels.

$$\begin{cases} x_1(t) = (L_1 \exp(\sqrt{2} t) + L_2 \exp(-\sqrt{2} t)) (\exp(\sqrt{2} it) + \exp(-\sqrt{2} it)) + \\ \quad + (iM_1 \exp(\sqrt{2} t) - iM_2 \exp(-\sqrt{2} t)) (\exp(\sqrt{2} it) - \exp(-\sqrt{2} it)) \\ x_2(t) = (M_1 \exp(\sqrt{2} t) + M_2 \exp(-\sqrt{2} t)) (\exp(\sqrt{2} it) + \exp(-\sqrt{2} it)) + \\ \quad + (iL_2 \exp(-\sqrt{2} t) - iL_1 \exp(\sqrt{2} t)) (\exp(\sqrt{2} it) - \exp(-\sqrt{2} it)) \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} x_1(t) = (2L_1 \exp(\sqrt{2} t) + 2L_2 \exp(-\sqrt{2} t)) \cos \sqrt{2} t + \\ \quad + (2M_2 \exp(-\sqrt{2} t) - 2M_1 \exp(\sqrt{2} t)) \sin \sqrt{2} t \\ x_2(t) = (2M_1 \exp(\sqrt{2} t) + 2M_2 \exp(-\sqrt{2} t)) \cos \sqrt{2} t + \\ \quad + (2L_1 \exp(\sqrt{2} t) - 2L_2 \exp(-\sqrt{2} t)) \sin \sqrt{2} t. \end{cases}$$

Les solutions du système (S) qui prennent leurs valeurs dans \mathbf{R} sont donc de la forme

$$\begin{cases} x_1(t) = (A_1 \exp(\sqrt{2} t) + A_2 \exp(-\sqrt{2} t)) \cos \sqrt{2} t + \\ \quad + (B_2 \exp(-\sqrt{2} t) - B_1 \exp(\sqrt{2} t)) \sin \sqrt{2} t \\ x_2(t) = (B_1 \exp(\sqrt{2} t) + B_2 \exp(-\sqrt{2} t)) \cos \sqrt{2} t + \\ \quad + (A_1 \exp(\sqrt{2} t) - A_2 \exp(-\sqrt{2} t)) \sin \sqrt{2} t \end{cases}$$

où A_1, A_2, B_1, B_2 sont des nombres réels.

7.8 Montrer que l'équation différentielle

$$t^2 x''(t) - tx'(t) + x(t) = 0 \quad (1)$$

admet pour solution la fonction réelle ω définie sur \mathbf{R} en posant $\omega(t) = t$ pour chaque nombre réel t . En déduire toutes ses solutions à valeurs réelles.

Solution Pour tout nombre réel t , on a

$$\omega'(t) = 1 \quad \omega''(t) = 0$$

donc

$$t^2 \omega''(t) = t\omega'(t) - \omega(t) = 0.$$

Cherchons donc les solutions de l'équation (1) sous la forme $x(t) = \omega(t) z(t)$ où z est une fonction à valeurs réelles, deux fois dérivable. On a

$$x'(t) = z(t) + tz'(t)$$

$$x''(t) = tz''(t) + 2z'(t)$$

donc

$$t^2(tz''(t) + 2z'(t)) - t(z(t) + tz'(t)) + tz(t) = 0$$

d'où

$$t^3 z''(t) + t^2 z'(t) = 0.$$

Pour chaque nombre réel t , posons

$$y(t) = z'(t)$$

alors on a

$$t^3 y'(t) + t^2 y(t) = 0$$

donc sur tout intervalle fermé I inclus dans \mathbf{R}_+^* ou \mathbf{R}_-^* on a

$$\text{Log} |y(t)| = \text{Log} \left| \frac{K}{t} \right|$$

où K est un nombre réel, donc

$$y(t) = \frac{K}{t}$$

et par suite

$$z(t) = K \text{Log} |t| + K'$$

où K et K' sont des nombres réels.

Nous voyons donc que dans tout intervalle fermé I inclus dans \mathbf{R}_+^* ou \mathbf{R}_-^* les solutions de l'équation (1) sont

$$x(t) = Kt \text{Log} |t| + K' t$$

où K et K' sont des nombres réels.

7.9

Soit I un intervalle fermé de \mathbf{R} inclus dans \mathbf{R}_+^* ou \mathbf{R}_-^* . On considère les équations différentielles

$$tx''(t) + 2x'(t) - tx(t) = 0 \quad (1)$$

$$tx''(t) + (2-t)x'(t) - x(t) = 0. \quad (2)$$

1° Montrer que la fonction réelle ω définie sur I en posant pour chaque élément t de I

$$\omega(t) = \frac{e^t}{t}$$

est une solution de l'équation (1).

2° En déduire toutes les fonctions réelles définies et deux fois dérivables sur I qui sont solutions de l'équation (1).

3° Montrer que les équations (1) et (2) ont une solution commune sur l'intervalle I .

4° En déduire toutes les fonctions réelles définies et deux fois dérivables sur I qui sont solutions de l'équation (2).

Solution 1° Pour chaque élément t de I on a

$$\omega'(t) = \frac{t e^t - e^t}{t^2}$$

$$\omega''(t) = \frac{t^2 e^t - 2 t e^t + 2 e^t}{t^3}$$

donc

$$t\omega''(t) + 2\omega'(t) - t\omega(t) = \frac{t^2 e^t - 2 t e^t + 2 e^t}{t^2} + \frac{2 t e^t - 2 e^t}{t^2} - e^t = 0.$$

2° Cherchons les solutions de l'équation (1) sous la forme

$$x(t) = \omega(t) z(t)$$

où z est une fonction réelle définie et deux fois dérivable sur I . Pour chaque élément t de I on a

$$x(t) = \frac{e^t}{t} z(t)$$

$$x'(t) = \frac{t e^t - e^t}{t^2} z(t) + \frac{e^t}{t} z'(t)$$

$$x''(t) = \frac{t^2 e^t - 2 t e^t + 2 e^t}{t^3} z(t) + 2 \frac{t e^t - e^t}{t^2} z'(t) + \frac{e^t}{t} z''(t)$$

d'où en portant dans l'équation (1)

$$e^t z''(t) + 2 e^t z'(t) = 0.$$

Pour chaque élément t de I posons

$$y(t) = z'(t)$$

alors y est solution de l'équation

$$y'(t) + 2 y(t) = 0$$

donc

$$y(t) = K e^{-2t}$$

où K est un nombre réel. Il en résulte que pour tout élément t de I on a

$$z(t) = K_1 e^{-2t} + K_2$$

où K_1 et K_2 sont deux nombres réels. Les solutions de l'équation (1) sur l'intervalle I sont donc

$$x(t) = K_1 \frac{e^{-t}}{t} + K_2 \frac{e^t}{t}$$

où K_1 et K_2 sont deux nombres réels.

3° La fonction ω étant celle définie à la question 1 on a

$$\begin{aligned} t\omega''(t) + (2-t)\omega'(t) - \omega(t) &= \\ &= \frac{t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t}{t^2} + \frac{(2-t)(t e^t - e^t)}{t^2} - \frac{t e^t}{t^2} \\ &= \frac{t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t + 2t e^t - 2e^t - t^2 e^t + t e^t - t e^t}{t^2} = 0 \end{aligned}$$

donc ω est aussi solution de l'équation (2) sur l'intervalle I .

4° Cherchons les solutions de l'équation (2) sous la forme

$$x(t) = \omega(t) z(t)$$

où z est une fonction réelle définie et deux fois dérivable sur I . En portant dans l'équation (2) les valeurs de $x'(t)$ et $x''(t)$ calculées à la question 2 on obtient

$$e^t z''(t) + e^t z'(t) = 0.$$

Pour chaque élément t de I posons

$$y(t) = z'(t)$$

alors y est solution de l'équation

$$y'(t) + y(t) = 0$$

donc

$$y(t) = K e^{-t}$$

où K est un nombre réel. Il en résulte que pour tout élément t de I on a

$$z(t) = K_1 e^{-t} + K_2$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels. Les solutions de l'équation (2) sur l'intervalle I sont donc

$$x(t) = \frac{K_1}{t} + K_2 \frac{e^t}{t}$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels.

7.10 Soit $[t_0, t_1]$ un intervalle fermé de \mathbf{R} inclus dans \mathbf{R}_+^* . On considère l'équation différentielle

$$t^2 x''(t) + (1 + \lambda) tx'(t) + x(t) = 0 \quad E(t)$$

où λ est un nombre réel.

1° Si x est une fonction réelle définie et deux fois dérivable sur $[t_0, t_1]$ qui est solution de l'équation $E(t)$, former l'équation différentielle $E'(s)$ à laquelle satisfait la fonction y définie sur $[\text{Log } t_0, \text{Log } t_1]$ en posant pour chaque élément s de cet intervalle

$$y(s) = x(e^s).$$

2° Trouver toutes les fonctions y définies et deux fois dérivables sur $[\text{Log } t_0, \text{Log } t_1]$ qui sont solutions de l'équation $E'(s)$. En déduire toutes les fonctions x définies et deux fois dérivables sur $[t_0, t_1]$ qui sont solutions de l'équation $E(t)$.

3° Trouver toutes les fonctions x définies et deux fois dérivables sur $[t_0, t_1]$ qui sont solutions de l'équation différentielle

$$t^2 x''(t) + 6 tx'(t) + x(t) = t. \quad (G)$$

Solution 1° Pour tout élément s de $[\text{Log } t_0, \text{Log } t_1]$ on a

$$\begin{aligned} y'(s) &= x'(e^s) \cdot e^s \\ y''(s) &= x''(e^s) \cdot e^{2s} + x'(e^s) \cdot e^s \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x'(e^s) &= y'(s) \cdot e^{-s} \\ x''(e^s) &= [y''(s) - y'(s)] e^{-2s} \end{aligned}$$

et en portant ceci dans l'équation $E(t)$ on obtient

$$y''(s) + \lambda y'(s) + y(s) = 0 \quad E'(s).$$

2° L'équation $E'(s)$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est

$$r^2 + \lambda r + 1 = 0$$

et le discriminant de cette équation est $\Delta = \lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 2)$. Nous distinguerons donc plusieurs cas en fonction du signe de Δ .

a) Si λ appartient à $] -\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, alors Δ est strictement positif et l'équation caractéristique de $E'(s)$ admet les racines réelles

$$r_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \quad r_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

Dans ce cas les solutions de $E'(s)$ sont

$$y(s) = K_1 e^{r_1 s} + K_2 e^{r_2 s}$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels et comme on a pour tout élément t de $[t_0, t_1]$

$$x(t) = y(\text{Log } t)$$

les fonctions x définies et deux fois dérivables sur $[t_0, t_1]$ qui sont solutions de l'équation $E(t)$ sont de la forme

$$x(t) = K_1 t^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4})/2} + K_2 t^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4})/2}$$

où K_1 et K_2 sont deux nombres réels.

b) Si $\lambda = 2\varepsilon$ avec $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, alors $\Delta = 0$ et l'équation caractéristique de $E'(s)$ admet la solution double

$$r = -\varepsilon.$$

Dans ce cas les solutions de $E'(s)$ sont

$$y(s) = (K_1 + K_2 s) e^{-\varepsilon s}$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels. Par suite les fonctions x définies et deux fois dérivables sur $[t_0, t_1]$ qui sont solutions de l'équation $E(t)$ sont de la forme

$$x(t) = K_1 t^{-\varepsilon} + K_2 t^{-\varepsilon} \text{Log } t$$

où K_1 et K_2 sont deux nombres réels.

c) Si λ appartient à $] -2, +2[$ alors Δ est strictement négatif et l'équation caractéristique de $E'(s)$ possède les racines complexes

$$r_1 = \frac{-\lambda + i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} \quad r_2 = \frac{-\lambda - i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2}.$$

Dans ce cas les solutions de $E'(s)$ sont

$$y(s) = e^{-(\lambda/2)s} \left(K_1 \cos \frac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} s + K_2 \sin \frac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} s \right)$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels. Par suite les fonctions x définies et deux fois dérivables sur $[t_0, t_1]$ qui sont solutions de l'équation $E(t)$ sont de la forme

$$x(t) = t^{-(\lambda/2)} \left[K_1 \cos \left(\frac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} \text{Log } t \right) + K_2 \sin \left(\frac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} \text{Log } t \right) \right]$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels.

3° L'équation homogène associée à l'équation (G) est du type étudié dans les deux premières questions lorsque $\lambda = 5$. Les solutions sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ sont donc

$$x_1(t) = K_1 t^{(-5 + \sqrt{21})/2} + K_2 t^{(-5 - \sqrt{21})/2}$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels.

Cherchons une solution particulière de l'équation (G) sous forme de fonction polynôme g .

Il est clair que si g est une fonction polynôme qui est solution de l'équation (G) alors g est du premier degré. Posons donc pour tout nombre réel t

$$g(t) = \alpha t + \beta$$

où α et β sont deux nombres réels. Alors on a pour tout nombre réel t

$$g'(t) = \alpha \quad g''(t) = 0$$

donc g est solution de l'équation (G) si et seulement si

$$\alpha = \frac{1}{7} \quad \beta = 0$$

par suite les solutions de l'équation (G) sur $[t_0, t_1]$ sont

$$x(t) = K_1 t^{(-5+\sqrt{21})/2} + K_2 t^{(-5-\sqrt{21})/2} + \frac{1}{7} t$$

où K_1, K_2 sont deux nombres réels.

7.11 On considère l'équation différentielle

$$2tx'(t) + x(t) - 3t \cos(t^{3/2}) = 0 \quad (E).$$

1° Montrer qu'il existe une fonction réelle v définie sur \mathbf{R}_+^* et une seule qui soit développable en série entière en t et qui soit solution de (E).

2° Trouver toutes les fonctions réelles définies et dérivables sur \mathbf{R}_+^* qui sont solution de l'équation (E) et en déduire l'expression de v en termes finis.

Solution 1° Si v est une fonction développable en série entière en t sur \mathbf{R}_+^* qui satisfait à l'équation (E), alors en posant

$$v(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

où $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels, on a

$$v'(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}$$

donc

$$2tv'(t) + v(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (2n + 1) a_n t^n.$$

Or on a pour tout élément t de \mathbf{R}_+^*

$$\cos (t^{3/2}) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^{3n}}{(2n)!}$$

donc

$$3 t \cos (t^{3/2}) = \sum_{n \geq 0} \frac{3(-1)^n t^{3n+1}}{(2n)!}$$

par suite on a

$$a_n = 0 \quad \text{si} \quad n \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{ou} \quad n \equiv 2 \pmod{3}$$

$$a_n = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \quad \text{si} \quad n \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{et} \quad n = 3p + 1$$

et comme le rayon de convergence de la série entière définie par ces coefficients est $+\infty$, la seule fonction v qui réponde à la question est définie pour tout élément t de \mathbf{R}_+^* par

$$v(t) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{t^{3p+1}}{(2p+1)!}$$

2° L'équation homogène associée à l'équation (E) est

$$2 tx'(t) + x(t) = 0$$

elle admet pour solution

$$x(t) = \frac{K}{\sqrt{t}}$$

où K est un nombre réel. En appliquant la méthode de variation des constantes on obtient

$$K'(t) = \frac{3}{2} t^{1/2} \cos (t^{3/2})$$

donc

$$K(t) = \sin (t^{3/2}) + K_1$$

où K_1 est un nombre réel, par suite les solutions de l'équation (E) sur \mathbf{R}_+^* sont de la forme

$$x(t) = \frac{\sin (t^{3/2})}{\sqrt{t}} + \frac{K_1}{\sqrt{t}}$$

où K_1 est un nombre réel.

Pour chaque nombre t on a

$$\sin t = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

donc

$$\sin (t^{3/2}) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{t^{3p+(3/2)}}{(2p+1)!}$$

et

$$\frac{\sin(t^{3/2})}{\sqrt{t}} = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{t^{3p+1}}{(2p+1)!}$$

par suite on a pour tout élément t de \mathbf{R}_+^*

$$v(t) = \frac{\sin(t^{3/2})}{\sqrt{t}}.$$

7.12

On considère l'équation différentielle

$$t^2 x''(t) + 4tx'(t) + (2 - t^2)x(t) - 1 = 0 \quad (E).$$

1° Montrer qu'il existe une fonction réelle v définie sur \mathbf{R}^* et une seule, qui soit développable en série entière en t et qui soit solution de l'équation (E).

2° Montrer que la fonction réelle ω définie sur \mathbf{R}^* en posant pour chaque élément t de \mathbf{R}^*

$$\omega(t) = -\frac{1}{t^2}$$

est solution de l'équation (E). En déduire toutes les fonctions réelles définies et deux fois dérivables sur \mathbf{R}^* qui sont solutions de l'équation (E).

Solution 1° Si v est une fonction réelle développable en série entière sur \mathbf{R}^* qui est solution de l'équation (E), alors en posant

$$v(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

où $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels, on a

$$v'(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}$$

$$v''(t) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

donc

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n t^n + 4 \sum_{n \geq 1} n a_n t^n + (2 - t^2) \sum_{n \geq 0} a_n t^n - 1 = 0$$

soit encore

$$(-1 + 2a_0) + 6a_1 t + \sum_{n \geq 2} [(n(n-1) + 4n + 2)a_n - a_{n-2}] t^n = 0.$$

Il en résulte que

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 0$$

et pour tout entier n supérieur à 2

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} a_{n-2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} a_{n-2}$$

donc

$$a_n = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$$a_n = \frac{1}{(n+2)!} \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

or on voit facilement que ces coefficients définissent une série entière dont rayon de convergence est $+\infty$, donc on a

$$v(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{[2(n+1)]!}$$

par suite

$$t^2 v(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}$$

et

$$t^2 v(t) + 1 = \sum_{p \geq 0} \frac{t^{2p}}{(2p)!}$$

or

$$\sum_{p \geq 0} \frac{t^{2p}}{(2p)!} = \text{ch } t$$

donc

$$t^2 v(t) + 1 = \text{ch } t$$

et pour tout élément t de \mathbb{R}^* on a

$$v(t) = \frac{\text{ch } t - 1}{t^2}.$$

2° Pour tout élément t de \mathbb{R}^* on a

$$\omega'(t) = \frac{2}{t^3} \quad \omega''(t) = -\frac{6}{t^4}$$

donc

$$t^2 \omega''(t) + 4t\omega'(t) + (2 - t^2)\omega(t) - 1 = -\frac{6}{t^2} + \frac{8}{t^2} - (2 - t^2)\frac{1}{t^2} - 1 = 0$$

et ω est solution de l'équation (E).

Comme ω et la fonction v trouvée à la question précédente sont deux solutions de l'équation (E) , la fonction u définie sur \mathbf{R}^* en posant pour chaque élément t de \mathbf{R}^*

$$u(t) = v(t) - \omega(t) = \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}$$

est solution de l'équation homogène

$$t^2 x''(t) + 4 t x'(t) + (2 - t^2) x(t) = 0 \quad (E')$$

associée à l'équation (E) . Dans chacun des intervalles \mathbf{R}_+^* et \mathbf{R}_-^* de \mathbf{R} cherchons les solutions de l'équation (E') sous la forme

$$x(t) = u(t) z(t)$$

où z est une fonction réelle deux fois dérivable. On a

$$x'(t) = \frac{\operatorname{ch} t}{t^2} z'(t) + \frac{t^2 \operatorname{sh} t - 2 t \operatorname{ch} t}{t^4} z(t) = \frac{\operatorname{ch} t}{t^2} z'(t) + \frac{t \operatorname{sh} t - 2 \operatorname{ch} t}{t^3} z(t)$$

$$x''(t) = \frac{\operatorname{ch} t}{t^2} z''(t) + \frac{2 t \operatorname{sh} t - 4 \operatorname{ch} t}{t^3} z'(t) + \frac{t^2 \operatorname{ch} t - 4 t \operatorname{sh} t + 6 \operatorname{ch} t}{t^4} z(t)$$

en portant ceci dans l'équation (E') on obtient

$$\operatorname{ch}(t) z''(t) + 2 \operatorname{sh}(t) z'(t) = 0$$

donc

$$\frac{z''(t)}{z'(t)} = - \frac{2 \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$$

d'où

$$z'(t) = \frac{K}{\operatorname{ch}^2 t}$$

où K est un nombre réel. Il en résulte que

$$z(t) = K \operatorname{th} t + K'$$

où K' est un nombre réel, et les solutions de l'équation (E') sur \mathbf{R}_+^* ou \mathbf{R}_-^* sont de la forme

$$x(t) = \frac{K \operatorname{sh} t + K' \operatorname{ch} t}{t^2}$$

où K et K' sont des nombres réels.

Comme la fonction ω est solution de l'équation (E) , les solutions de l'équation (E) sur chacun des intervalles \mathbf{R}_+^* ou \mathbf{R}_-^* sont de la forme

$$x(t) = \frac{K \operatorname{sh} t + K' \operatorname{ch} t - 1}{t^2}$$

où K et K' sont deux nombres réels.

7.13 Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$x'''(t) - 3x''(t) + 3x'(t) - x(t) = 0 \tag{E}$$

où x est une fonction réelle trois fois dérivable sur \mathbf{R} .

Solution Pour chaque élément t de \mathbf{R} posons

$$x_1(t) = x(t) \quad x_2(t) = x'(t) \quad x_3(t) = x''(t)$$

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad X'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t)).$$

Alors l'équation (E) équivaut au système $X'(t) = AX(t)$ où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^3$$

donc A possède la valeur propre triple $\lambda = 1$. Les solutions du système $X'(t) = AX(t)$ se présentent donc sous la forme

$$X(t) = (Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2) e^t$$

où Y_1, Y_2, Y_3 sont des vecteurs de \mathbf{R}^3 que nous allons déterminer.

Pour chaque élément t de \mathbf{R} on a

$$\begin{aligned} X'(t) &= [(Y_0 + Y_1) + (Y_1 + 2Y_2)t + Y_2 t^2] e^t \\ &= (AY_0 + AY_1 t + AY_2 t^2) e^t \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} AY_2 &= Y_2 \\ AY_1 &= Y_1 + 2Y_2 \\ AY_0 &= Y_0 + Y_1. \end{aligned}$$

Posons $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, y_{i3})$ pour $0 \leq i \leq 2$. Comme $AY_2 = Y_2$ on a

$$\begin{aligned} y_{21} &= y_{22} \\ y_{22} &= y_{23} \\ y_{23} &= y_{21} - 3y_{22} + 3y_{23} \end{aligned}$$

donc

$$y_{21} = y_{22} = y_{23}$$

par suite

$$Y_2 = (K_2, K_2, K_2)$$

où K_2 est un nombre réel. Comme $AY_1 = Y_1 + 2Y_2$ on a

$$\begin{aligned} y_{11} + 2y_{21} &= y_{12} \\ y_{12} + 2y_{22} &= y_{13} \\ y_{13} + 2y_{23} &= y_{11} - 3y_{12} + 3y_{13} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} y_{11} - y_{12} &= -2K_2 \\ y_{12} - y_{13} &= -2K_2 \\ -y_{11} + 3y_{12} - 2y_{13} &= -2K_2 \end{aligned}$$

donc

$$y_{12} = y_{11} + 2K_2 \quad y_{13} = y_{11} + 4K_2$$

par suite

$$Y_1 = (K_1, K_1 + 2K_2, K_1 + 4K_2)$$

où K_1 est un nombre réel. A présent, comme $AY_0 = Y_0 + Y_1$ on a

$$\begin{cases} y_{01} + y_{11} = y_{02} \\ y_{02} + y_{12} = y_{03} \\ y_{03} + y_{13} = y_{01} - 3y_{02} + 3y_{03} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} y_{01} - y_{02} = -K_1 \\ y_{02} - y_{03} = -K_1 - 2K_2 \\ -y_{01} + 3y_{02} - 2y_{03} = -K_1 - 4K_2 \end{cases}$$

donc

$$y_{02} = y_{01} + K_1 \quad y_{03} = y_{01} + 2K_1 + 2K_2$$

par suite

$$Y_0 = (K_0, K_0 + K_1, K_0 + 2K_1 + 2K_2)$$

où K_0 est un nombre réel.

Les solutions du système $X'(t) = AX(t)$ sont donc

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (K_0 + K_1 t + K_2 t^2) e^t \\ x_2(t) &= (K_0 + K_1 + (K_1 + 2K_2)t + K_2 t^2) e^t \\ x_3(t) &= (K_0 + 2K_1 + 2K_2 + (K_1 + 4K_2)t + K_2 t^2) e^t \end{aligned}$$

où K_0, K_1, K_2 sont des nombres réels. On retrouve sur ces formules le fait que pour tout élément t de \mathbb{R} on a $x_2(t) = x_1'(t)$ et $x_3(t) = x_2'(t)$ et les solutions de l'équation (E) sont

$$x(t) = (K_0 + K_1 t + K_2 t^2) e^t$$

où K_0, K_1, K_2 sont des nombres réels.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

8.1

I. Soit f une application continue strictement croissante définie sur \mathbf{R}_+^* à valeurs dans \mathbf{R} . Pour chaque couple (x, y) d'éléments de \mathbf{R}_+^* on pose

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

1° Montrer que d_f est une distance sur \mathbf{R}_+^* .

2° Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathbf{R}_+^* , montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément x de \mathbf{R}_+^* si et seulement si la suite $(d_f(x_n, x))_{n \geq 0}$ converge vers 0.

3° On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathbf{R}_+^* est une f -suite de CAUCHY si pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe un entier n_0 tel que la condition $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$ entraîne $d_f(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

Montrer que la notion de f -suite de CAUCHY dépend de la fonction f choisie. On pourra comparer les cas

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = -\frac{1}{x} \quad f_3(x) = \text{Log } x$$

en considérant une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathbf{R}_+^* qui tend vers 0 ou $+\infty$ au sens ordinaire.

4° Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) la fonction f possède une limite finie lorsque x tend vers 0,
- (b) toute suite de CAUCHY de \mathbf{R}_+^* est une f -suite de CAUCHY.

5° Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (c) la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$,
- (d) toute f -suite de CAUCHY est une suite de CAUCHY.

6° En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que toute f -suite de CAUCHY de \mathbf{R}_+^* converge vers un élément de \mathbf{R}_+^* .

II. Soient f, g deux fonctions réelles définies, dérivables sur \mathbf{R}_+^* dont les dérivées sont strictement positives. On désigne par d_f, d_g les distances associées à f, g comme dans la première partie.

1° Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les distances d_f et d_g soient équivalentes.

2° Montrer que les distances associées aux fonctions f, g définies sur \mathbf{R}_+^* par

$$f(x) = \text{Log}(1 + x)$$

$$g(x) = \text{Arg sh } x$$

sont équivalentes.

3° Comparer deux à deux les distances associées aux fonctions f_1, f_2, f_3 définies à la question I, 3°.

Solution I. 1° Pour tout couple (x, y) d'éléments de \mathbf{R}_+^* on a

$$d_f(x, y) \geq 0$$

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d_f(y, x).$$

Si $x = y$, on a $d_f(x, y) = 0$ et si $d_f(x, y) = 0$, on a $f(x) = f(y)$ et comme l'application f est strictement croissante, elle est injective, par suite on a $x = y$.

De plus si x, y, z sont des éléments de \mathbf{R}_+^* on a

$$d_f(x, z) = |f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|$$

soit

$$d_f(x, z) \leq d_f(x, y) + d_f(y, z)$$

donc d_f est une distance sur \mathbf{R}_+^* .

2° Si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément x de \mathbf{R}_+^* , la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$ car f est continue. Pour tout nombre réel strictement positif ε , il existe un entier n_0 tel que la condition $n \geq n_0$ entraîne

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon$$

soit

$$d_f(x_n, x) \leq \varepsilon$$

donc la suite $(d_f(x_n, x))_{n \geq 0}$ tend vers 0.

Réciproquement soit x un élément de \mathbf{R}_+^* tel que la suite $(d_f(x_n, x))_{n \geq 0}$ converge vers 0. Comme la fonction f est strictement croissante et continue, elle possède une fonction réciproque g qui est définie sur $f(\mathbf{R}_+^*)$ à valeurs dans \mathbf{R}_+^* et qui est strictement croissante et continue. En particulier g est continue au point $f(x)$ donc si ε est un nombre réel strictement positif, il existe un nombre réel η

strictement positif tel que la condition $y \in f(\mathbf{R}_+^*)$ et $|y - f(x)| < \eta$ entraîne $|g(y) - g(f(x))| < \varepsilon$. Comme la suite $(d_f(x_n, x))_{n \geq 0}$ converge vers 0, il existe un entier n_0 tel que la condition $n \geq n_0$ entraîne $d_f(x_n, x) < \eta$ soit

$$|f(x_n) - f(x)| < \eta,$$

par suite, si $n \geq n_0$ on a $|g(f(x_n)) - g(f(x))| < \varepsilon$ soit $|x_n - x| < \varepsilon$ et la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x .

3° Pour tout couple (x, y) d'éléments de \mathbf{R}_+^* , on a

$$d_{f_1}(x, y) = |x - y|$$

donc d_{f_1} est la restriction à \mathbf{R}_+^* de la distance usuelle de \mathbf{R} . Les f_1 -suites de CAUCHY dans \mathbf{R}_+^* sont donc les suites de CAUCHY usuelles. En particulier on observera que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_n = 1/n$ si $n \geq 1$ est une f_1 -suite de CAUCHY dans \mathbf{R}_+^* qui ne converge pas vers un élément de \mathbf{R}_+^* . Pour cette suite, si p, q sont deux entiers naturels supérieurs à 1, on a

$$d_{f_2}(x_p, x_q) = |p - q|$$

$$d_{f_3}(x_p, x_q) = |\text{Log } p - \text{Log } q|.$$

Or les suites $(y_n)_{n \geq 0}, (z_n)_{n \geq 0}$ définies par

$$\begin{cases} y_0 = 1, & y_n = n & \text{si } n \geq 1 \\ z_0 = 1, & z_n = \text{Log } n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

ne sont pas des suites de CAUCHY dans \mathbf{R} , donc pour tout nombre réel ε strictement positif et tout entier n_0 , il existe des entiers r, s, p, q tels que $r \geq n_0, s \geq n_0, p \geq n_0, q \geq n_0$ et

$$|r - s| \geq \varepsilon \quad |\text{Log } p - \text{Log } q| \geq \varepsilon$$

par conséquent la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ n'est ni une f_2 -suite de CAUCHY ni une f_3 -suite de CAUCHY.

Considérons à présent la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_n = n \quad \text{si } n \geq 1.$$

Cette suite n'est pas une suite de CAUCHY donc elle n'est pas une f_1 -suite de CAUCHY. On a

$$f_2(u_0) = -1 \quad f_2(u_n) = -\frac{1}{n}$$

$$f_3(u_0) = 0 \quad f_3(u_n) = \text{Log } n$$

donc la suite $(f_2(u_n))_{n \geq 0}$ est une suite de CAUCHY et la suite $(f_3(u_n))_{n \geq 0}$ n'est pas une suite de CAUCHY. Il en résulte que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une f_2 -suite de CAUCHY et n'est pas une f_3 -suite de CAUCHY.

4° Supposons que f possède une limite finie l lorsque x tend vers 0 et soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de CAUCHY de \mathbf{R}_+^* . Si ε est un nombre réel strictement positif, il existe un nombre réel η strictement positif tel que la condition $|x| < \eta$ entraîne

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0, il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ on ait $|x_n| < \eta$; alors si $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$ on a

$$|f(x_n) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f(x_m) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ soit $d_f(x_n, x_m) < \varepsilon$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ est une f -suite de CAUCHY.

Si la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément x de \mathbf{R}_+^* , nous savons que la suite $(d_f(x_n, x))_{n \geq 0}$ converge vers 0 donc pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe un entier n_0 tel que la condition $n \geq n_0$ entraîne $d_f(x_n, x) < \varepsilon/2$; alors la condition $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$ entraîne

$$d_f(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d_f(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $d_f(x_n, x_m) < \varepsilon$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ est une f -suite de CAUCHY.

La condition (a) entraîne donc la condition (b).

Supposons à présent la condition (b) satisfaite; alors toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de \mathbf{R}_+^* qui converge vers 0 est une suite de CAUCHY donc une f -suite de CAUCHY. Il en résulte que pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ qui tend vers 0, la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est une suite de CAUCHY donc converge dans \mathbf{R} . Soient $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ deux suites de \mathbf{R}_+^* qui convergent vers 0; posons

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n), \quad l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n).$$

Supposons $l \neq l'$ et par exemple $l < l'$. Comme $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ il existe un entier N tel que $f(x_N) < \frac{l + l'}{2}$. Comme $l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$, il existe un entier N_1 tel que pour tout entier n vérifiant $n \geq N_1$ on ait

$$\frac{l + l'}{2} < f(y_n).$$

Comme f est strictement croissante, pour tout entier n tel que $n \geq N_1$ on a alors $y_n \geq x_N$ ce qui est impossible car $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, donc $l = l'$. Ainsi nous

voyons que pour toute suite $(y_n)_{n \geq 0}$ de \mathbf{R}_+^* qui tend vers 0, la suite $(f(y_n))_{n \geq 0}$ converge vers l ; donc (cf. C. E., tome 1, Ch. 4, § II, n° 42) la fonction f possède la limite finie l lorsque x tend vers 0 et les conditions (a) et (b) sont équivalentes.

5° Supposons la condition (c) satisfaite. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de \mathbf{R}_+^* qui est une f -suite de CAUCHY; alors la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est une suite de CAUCHY donc elle est majorée. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est aussi majorée

donc bornée. Supposons que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ ne soit pas une suite de CAUCHY ; alors il existe deux suites $(x_{m_p})_{p \geq 0}$, $(x_{n_q})_{q \geq 0}$ extraites de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ qui convergent et qui ont des limites l_1, l_2 différentes. Posons

$$\alpha = \frac{|f(l_1) - f(l_2)|}{2};$$

comme f est injective, α est strictement positif. Comme f est continue, pour tout entier n_0 , il existe des entiers p, q tels que $p \geq n_0, q \geq n_0$ et

$$|f(x_{m_p}) - f(l_1)| < \frac{\alpha}{2}$$

et

$$|f(x_{n_q}) - f(l_2)| < \frac{\alpha}{2}.$$

Alors on a

$$|f(l_1) - f(l_2)| \leq |f(l_1) - f(x_{m_p})| + |f(x_{m_p}) - f(x_{n_q})| + |f(x_{n_q}) - f(l_2)|$$

donc

$$|f(x_{m_p}) - f(x_{n_q})| \geq \alpha$$

soit

$$d_f(x_{m_p}, x_{n_q}) \geq \alpha.$$

Ceci contredit l'hypothèse que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une f -suite de CAUCHY donc $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de CAUCHY et la condition (c) entraîne la condition (d).

Supposons la condition (d) satisfaite. Comme f est croissante, pour montrer que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, il suffit de montrer que f ne possède pas une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Supposons que f possède une limite finie l lorsque x tend vers $+\infty$ et soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de \mathbf{R}_+^* qui tend vers $+\infty$. Soit ε un nombre réel strictement positif ; alors il existe un nombre réel positif A tel que la condition $x \geq A$ implique $|f(x) - l| < \varepsilon/2$. Par ailleurs il existe un entier m_0 tel que si $n \geq m_0$, on ait $x_n \geq A$. Alors si p, q sont des entiers supérieurs à m_0 , on a

$$|f(x_p) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f(x_q) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$$

soit

$$d_f(x_p, x_q) < \varepsilon$$

donc la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est une f -suite de CAUCHY. Comme la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ n'est pas une suite de CAUCHY, ceci contredit la condition (d), donc f ne possède pas une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et la condition (c) équivaut à la condition (d).

6° Supposons que toute f -suite de CAUCHY de \mathbf{R}_+^* converge vers un élément de \mathbf{R}_+^* . On a vu à la question 4° que si f possède une limite finie lorsque x tend vers 0, alors toute suite de CAUCHY de \mathbf{R}_+^* est une f -suite de CAUCHY. En particulier toute suite de CAUCHY de \mathbf{R}_+^* qui tend vers 0 est alors une f -suite de CAUCHY qui ne converge pas vers un élément de \mathbf{R}_+^* , donc nécessairement

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

De même, on a vu à la question 5° que si f possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, alors toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de \mathbf{R}_+^* qui tend vers $+\infty$ est une f -suite de CAUCHY qui ne converge pas vers un élément de \mathbf{R}_+^* , donc nécessairement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Supposons à présent que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Alors si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une f -suite de CAUCHY de \mathbf{R}_+^* , elle est une suite de CAUCHY d'après la question 5°. Elle converge donc vers un élément x de \mathbf{R}_+ et cet élément n'est pas 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, donc $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément de \mathbf{R}_+^* .

Par suite, pour que toute f -suite de CAUCHY de \mathbf{R}_+^* converge vers un élément de \mathbf{R}_+^* , il faut et il suffit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

II. 1° Si d_f est équivalente à d_g , il existe deux nombres réels α et β strictement positifs, tels que pour tout couple (x, y) d'éléments de \mathbf{R}_+^* tels que $x \neq y$, on ait

$$\alpha |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| \leq \beta |f(x) - f(y)|$$

soit encore

$$\alpha \leq \left| \frac{g(x) - g(y)}{f(x) - f(y)} \right| \leq \beta$$

soit aussi

$$\alpha \leq \left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \cdot \frac{x - y}{f(x) - f(y)} \right| \leq \beta.$$

Il en résulte que pour tout élément x de \mathbf{R}_+^* on a

$$\alpha \leq \left| \frac{g'(x)}{f'(x)} \right| \leq \beta.$$

Réciproquement, s'il existe deux nombres réels α, β strictement positifs tels que l'on ait pour tout élément t de \mathbf{R}_+^*

$$\alpha \leq \left| \frac{g'(t)}{f'(t)} \right| \leq \beta.$$

Le théorème généralisé des accroissements finis (cf. C. E., tome 1, Ch. 5, § II, n° 65) montre que si y, z sont deux éléments de \mathbf{R}_+^* , il existe un élément t de \mathbf{R}_+^* tel que

$$\frac{g(y) - g(z)}{f(y) - f(z)} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

donc on a

$$\alpha \leq \left| \frac{g(y) - g(z)}{f(y) - f(z)} \right| \leq \beta$$

et ceci montre que les distances d_f et d_g sont équivalentes.

Par suite, pour que d_f et d_g soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres réels α, β strictement positifs tels que l'on ait pour tout élément x de \mathbf{R}_+^*

$$\alpha \leq \left| \frac{g'(x)}{f'(x)} \right| \leq \beta.$$

2° Les fonctions f, g sont dérivables sur \mathbf{R}_+^* . Pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^* , on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

donc les dérivées de f et g sont strictement positives. De plus on a pour tout élément x de \mathbf{R}_+^*

$$\left| \frac{g'(x)}{f'(x)} \right| = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

La fonction h définie sur \mathbf{R}_+^* par

$$h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

est dérivable et on a pour tout élément x de \mathbf{R}_+^*

$$h'(x) = \frac{1-x}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

La fonction h possède donc un maximum égal à $\sqrt{2}$ pour $x = 1$. Or

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1,$$

donc pour tout élément x de \mathbf{R}_+^* on a

$$1 \leq \left| \frac{g'(x)}{f'(x)} \right| \leq \sqrt{2}$$

et les distances d_f et d_g sont équivalentes.

3° Les fonctions f_1, f_2, f_3 définies à la question I, 3° sont toutes dérivables et ont des dérivées strictement positives. Si x est un élément de \mathbf{R}_+^* , on a

$$f_1'(x) = 1 \quad f_2'(x) = \frac{1}{x^2} \quad f_3'(x) = \frac{1}{x}$$

donc

$$\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = x^2 \quad \frac{f_1'(x)}{f_3'(x)} = x \quad \frac{f_2'(x)}{f_3'(x)} = \frac{1}{x}.$$

Il en résulte que si $1 \leq i < j \leq 3$, il n'existe aucun couple $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ de nombres réels strictement positifs tel que l'on ait pour tout élément x de \mathbf{R}_+^*

$$\alpha_{ij} \leq \left| \frac{f_i'(x)}{f_j'(x)} \right| \leq \beta_{ij}$$

par suite, si $1 \leq i < j \leq 3$, les distances d_{f_i} et d_{f_j} ne sont pas équivalentes.

8.2

On désigne par E l'espace vectoriel sur \mathbf{R} des fonctions réelles définies sur \mathbf{R}_+^* . Etant donné un élément φ de E , on se propose de chercher dans certains cas des éléments f de E qui vérifient la condition.

$$(\forall x \in \mathbf{R}_+^*) \quad [f(x+1) - f(x) = \varphi(x)]. \quad (C)$$

I. On suppose que φ est décroissante, que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

et on se donne un élément a de \mathbf{R} .

1° a) Montrer qu'il existe au plus une fonction f appartenant à E croissante, vérifiant la condition (C) et telle que $f(1) = a$.

b) Montrer que s'il existe une fonction croissante f appartenant à E qui vérifie la condition (C), on a pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^*

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbf{N}^*}} [f(x+n) - f(x)] = 0.$$

2° Montrer que pour tout élément x de \mathbf{R}_+^* , la série de terme général

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0 \\ u_n(x) &= \varphi(n) - \varphi(n+x) \quad \text{si } n \geq 1 \end{aligned}$$

est convergente.

3° On définit un élément f de E en posant pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^*

$$f(x) = a - \varphi(x) + \sum_{n \geq 0} u_n(x).$$

Montrer que f est une fonction croissante telle que $f(1) = a$, qui vérifie la condition (C).

4° Montrer que si φ est continue, il en est de même de la fonction f définie à la question précédente.

II. On suppose que φ est continûment dérivable sur \mathbf{R}_+^* , que sa dérivée φ' est décroissante et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0.$$

On se donne un élément a de \mathbf{R} .

1° Montrer qu'il existe une fonction dérivable f appartenant à E et une seule, dont la dérivée soit croissante, telle que $f(1) = a$ et que la condition (C) soit satisfaite.

2° En déduire qu'il existe une fonction Γ strictement positive, appartenant à E , dérivable sur \mathbf{R}_+^* et une seule, telle que $\Gamma(1) = 1$, que pour tout élément x de \mathbf{R}_+^* on ait

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

et que la fonction γ définie en posant pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^*

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

soit croissante. Pour chaque entier n strictement positif, calculer $\Gamma(n)$.

olution I. 1° a) Soient f_1, f_2 deux fonctions croissantes de E telles que

$$f_1(1) = f_2(1) = a,$$

qui vérifient la condition (C). Alors, pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^* , on a

$$f_1(x+1) - f_1(x) = \varphi(x) = f_2(x+1) - f_2(x)$$

donc

$$f_1(x+1) - f_2(x+1) = f_1(x) - f_2(x)$$

par suite la fonction $g = f_1 - f_2$ de E admet la période 1. Comme

$$g(1) = f_1(1) - f_2(1) = 0,$$

on a $g(n) = 0$ pour tout entier naturel n strictement positif. Pour démontrer que $f_1 = f_2$, il nous suffira de montrer que pour tout élément x de $]0, 1]$ on a $g(x) = 0$. Soit donc x un élément de $]0, 1]$; pour chaque entier naturel n strictement positif, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x+n) - g(n) \\ &= [f_1(x+n) - f_2(x+n)] - [f_1(n) - f_2(n)] \\ &= [f_1(x+n) - f_1(n)] - [f_2(x+n) - f_2(n)]. \end{aligned}$$

Comme f_1 et f_2 sont croissantes, pour chaque élément n de \mathbf{N}^* , on a

$$0 \leq f_1(x+n) - f_1(n) \leq f_1(n+1) - f_1(n) = \varphi(n)$$

$$0 \leq f_2(x+n) - f_2(n) \leq f_2(n+1) - f_2(n) = \varphi(n)$$

donc

$$-\varphi(n) \leq g(x) \leq \varphi(n)$$

or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

donc

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbf{N}^*}} \varphi(n) = 0$$

et $g(x) = 0$ d'où $f_1 = f_2$.

b) Soit x un élément de \mathbf{R}_+^* et soit k un entier tel que $x < k$. Comme f est croissante, on a

$$0 \leq f(x+n) - f(n) \leq f(k+n) - f(n)$$

or

$$\begin{aligned} f(k+n) - f(n) &= \sum_{t=0}^{k-1} f(t+1+n) - f(t+n) \\ &= \sum_{t=0}^{k-1} \varphi(t+n) \end{aligned}$$

et comme φ est décroissante

$$\sum_{k=0}^{k-1} \varphi(t+n) \leq k\varphi(n)$$

par suite on a

$$0 \leq f(x+n) - f(n) \leq k\varphi(n)$$

or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

donc

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbf{N}^*}} \varphi(n) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} [f(x+n) - f(x)] = 0.$$

2° Soient x un élément de \mathbb{R}_+^* et k un entier tel que $x < k$. Alors pour tout élément n de \mathbb{N}^* , on a

$$0 \leq \varphi(n) - \varphi(n+x) \leq \varphi(n) - \varphi(n+k).$$

Si N est un élément de \mathbb{N}^* tel que $k < N$, on a alors

$$U_N(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x) \leq \sum_{n=1}^N (\varphi(n) - \varphi(n+k))$$

or

$$\sum_{n=1}^N [\varphi(n) - \varphi(n+k)] = \sum_{n=1}^k \varphi(n) - \sum_{n=N+1}^{N+k} \varphi(n)$$

et la fonction φ est positive, donc

$$U_N(x) \leq \sum_{n=1}^k \varphi(n).$$

Il en résulte que la suite de terme général $U_n(x)$ est une suite à termes positifs, majorée donc convergente, c'est-à-dire que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente.

3° Soient x, x' deux éléments de \mathbb{R}_+^* tels que $x < x'$. On a

$$f(x) = a - \varphi(x) + \sum_{n \geq 0} u_n(x)$$

$$f(x') = a - \varphi(x') + \sum_{n \geq 0} u_n(x')$$

donc

$$f(x') - f(x) = \varphi(x) - \varphi(x') + \sum_{n \geq 0} (u_n(x') - u_n(x))$$

or φ est décroissante donc

$$\varphi(x) - \varphi(x') \geq 0$$

de plus

$$u_0(x') - u_0(x) = 0$$

et si $n \geq 1$

$$u_n(x') - u_n(x) = \varphi(n+x) - \varphi(n+x') \geq 0$$

donc

$$f(x') - f(x) \geq 0$$

et f est croissante. On a

$$f(1) = a - \varphi(1) + \sum_{n \geq 0} u_n(1)$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ donc

$$\sum_{n \geq 0} u_n(1) = \varphi(1)$$

par suite $f(1) = a$, de plus pour tout élément x de \mathbf{R}_+^* on a

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x) - \varphi(x+1) + \sum_{n \geq 0} (u_n(x+1) - u_n(x))$$

or $u_0(x+1) = u_0(x) = 0$ et si $n \geq 1$

$$u_n(x+1) - u_n(x) = \varphi(n+x) - \varphi(n+x+1)$$

donc pour chaque entier N tel que $N \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (u_n(x+1) - u_n(x)) &= \sum_{n=1}^N \varphi(n+x) - \varphi(n+x+1) \\ &= \varphi(x+1) - \varphi(N+x+1) \end{aligned}$$

et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$, on a

$$\sum_{n \geq 0} (u_n(x+1) - u_n(x)) = \varphi(x+1)$$

d'où $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$.

4° Pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^* et chaque entier strictement positif N , posons

$$f(x) = f_N(x) + R_N(x)$$

avec

$$f_N(x) = a - \varphi(x) + \sum_{n=0}^N u_n(x)$$

$$R_N(x) = \sum_{n \geq N+1} u_n(x).$$

Si x est un élément de \mathbf{R}_+^* , N un entier strictement positif et k un entier tel que $x < k$, on a

$$0 \leq R_N(x) \leq \sum_{n \geq N+1} (\varphi(n) - \varphi(n+k)) \leq \sum_{n=N+1}^{N+k} \varphi(n) \leq k\varphi(N).$$

Soit à présent x un élément de \mathbf{R}_+^* : nous allons montrer que f est continue au point x . Soient ε un élément de \mathbf{R}_+^* , k un entier tel que $x < k$ et x' un élément de \mathbf{R}_+^* tel que $x' < k$. Pour chaque entier N strictement positif, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leq |f_N(x) - f_N(x')| + |R_N(x) - R_N(x')| \leq \\ &\leq |f_N(x) - f_N(x')| + 2k\varphi(N). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$, il existe un entier N_0 tel que pour tout entier N supérieur à N_0 on ait

$$\varphi(N) < \frac{\varepsilon}{4k}.$$

La fonction f_{N_0} étant continue, il existe un nombre réel η strictement positif, tel que la condition $|x - x'| < \eta$ implique

$$|f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\alpha = \text{Inf}(x, k - x, \eta)$; alors si x' est un élément de \mathbf{R}_+^* tel que $|x - x'| < \alpha$, on a $x' < k$ et $|x - x'| < \eta$ donc

$$|f(x) - f(x')| \leq |f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x')| + 2k\varphi(N_0) < \varepsilon$$

par suite f est continue au point x , donc f est continue sur \mathbf{R}_+^* .

II. 1° Si f est une fonction répondant à la question, comme la condition (C) est satisfaite, pour tout élément x de \mathbf{R}_+^* , on a par dérivation

$$f'(x + 1) - f'(x) = \varphi'(x).$$

Comme φ' est décroissante, continue et telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0$$

pour chaque nombre réel b , il existe une fonction croissante g_b appartenant à E et une seule, telle que $g_b(1) = b$ et que pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^* , on ait

$$g_b(x + 1) - g_b(x) = \varphi'(x)$$

de plus, on a pour tout élément x de \mathbf{R}_+^*

$$g_b(x) = b - \varphi'(x) + U(x)$$

où

$$U(x) = \sum_{n \geq 1} (\varphi'(n) - \varphi'(n + x))$$

et comme φ' est continue, g_b et U sont continues.

Pour chaque nombre réel b , désignons par f_b la primitive de g_b telle que $f_b(1) = a$. La fonction f est nécessairement l'une des fonctions f_b ($b \in \mathbf{R}$). Cherchons donc à quelle condition sur b , la fonction f_b répond à la question. Pour tout élément x de \mathbf{R}_+^* , on a

$$f_b(x) = a + b(x - 1) - (\varphi(x) - \varphi(1)) + \int_1^x U(t) dt$$

et on doit avoir

$$\varphi(x) = f_b(x + 1) - f_b(x) = b - \varphi(x + 1) + \varphi(x) + \int_x^{x+1} U(t) dt$$

c'est-à-dire

$$b = \varphi(x + 1) - \int_x^{x+1} U(t) dt.$$

Or la fonction réelle ψ définie en posant pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^*

$$\psi(x) = \varphi(x + 1) - \int_x^{x+1} U(t) dt$$

est constante car elle est dérivable et pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^* on a

$$\psi'(x) = \varphi'(x + 1) - U(x + 1) + U(x) = 0.$$

Désignons par b_0 l'image de ψ . Il est clair que f_{b_0} satisfait aux conditions de la question II, 1^o, donc f_{b_0} est la seule fonction appartenant à E qui répond à cette question.

2^o Si Γ vérifie les conditions de la question II, 2^o, la fonction composée $\text{Log} \circ \Gamma$ est dérivable sur \mathbf{R}_+^* , sa dérivée est croissante, on a $(\text{Log} \circ \Gamma)(1) = 0$ et pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^*

$$(\text{Log} \circ \Gamma)(x + 1) - (\text{Log} \circ \Gamma)(x) = \text{Log } x.$$

Or la fonction Log est continûment dérivable, sa dérivée est décroissante et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Log})'(x) = 0$$

par suite, il résulte de la question précédente qu'il existe une fonction dérivable f appartenant à E et une seule, telle que $f(1) = 0$, qui possède une dérivée croissante et qui vérifie pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^* la condition

$$f(x + 1) - f(x) = \text{Log } x.$$

La fonction Γ définie pour chaque élément x de \mathbf{R}_+^* par

$$\Gamma(x) = e^{f(x)}$$

est donc la seule fonction qui appartient à E et répond à la question.

On a $\Gamma(1) = 1$ et si n est un entier supérieur à 2, $\Gamma(n) = (n - 1) \Gamma(n - 1)$, donc pour tout élément n de \mathbf{N}^* on a

$$\Gamma(n) = (n - 1) !$$

8.3

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que $a_0 = 0$, que la série de terme général a_n converge et que

$$\sum_{n \geq 1} a_n = 1.$$

On lui associe la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ définie par les relations de récurrence

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k} \quad \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

I. 1° Démontrer que pour tout entier n supérieur à 1, on a $0 \leq b_n \leq 1$.

2° On considère les séries entières A de terme général $a_n z^n$ et B de terme général $b_n z^n$. Si la série A (resp B) converge pour le nombre complexe z , on désignera par $A(z)$ (resp $B(z)$) sa somme.

a) Montrer que les rayons de convergence des séries A et B sont supérieurs à 1.

b) Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, on a

$$B(z) = \frac{A(z)}{1 - A(z)}.$$

c) Montrer que le rayon de convergence de la série B est égal à 1.

Application : Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < 1$. Comment doit-on choisir les coefficients a_n ($n \geq 1$) pour que l'on ait $b_n = \lambda$ pour chaque entier n supérieur à 1 ?

II. Dans cette partie, on se restreint au cas où A est un *polynôme* de degré p . Soient $s_1 = 1, s_2, \dots, s_p$ les racines réelles ou complexes de l'équation $A(z) = 1$.

1° a) Montrer que ces racines ont toutes un module supérieur à 1.

b) Montrer que si $a_1 \neq 0$, l'équation $A(z) = 1$ n'a pas de racine de module égal à 1 autre que $s_1 = 1$ (on pourra raisonner par l'absurde en supposant que l'équation $A(z) = 1$ possède la racine z_0 de module 1, et en observant qu'elle possède alors la racine \bar{z}_0).

2° On suppose de plus que ces racines sont simples et pour chaque entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $\mu_k = A'(s_k)$. En utilisant l'expression de $B(z)$ obtenue plus haut, montrer que pour tout entier n supérieur à 1, on a

$$b_n = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\mu_k (s_k)^{n+1}}.$$

3° En déduire que si $a_1 \neq 0$ et si les racines de l'équation $A(z) = 1$ sont simples, b_n tend vers une limite finie L lorsque n tend vers $+\infty$. Calculer L en fonction de μ_1 .

III. On revient au cas général où A est une série entière et l'on désigne par r_n le reste de rang n de la série de terme général a_n .

1° Soit R la série entière de terme général $r_n z^n$.

a) Démontrer que le rayon de convergence de la série R est supérieur à 1.

b) Pour chaque nombre complexe z tel que $|z| < 1$, on désigne par $R(z)$ la somme de la série R . Exprimer $R(z)$ en fonction de $A(z)$ et z seulement.

2° Pour chaque nombre complexe z tel que $|z| < 1$, trouver une relation entre $R(z)$, $B(z)$ et z . En déduire que pour tout entier n supérieur à 1, on a

$$r_0 b_n + r_1 b_{n-1} + \dots + r_{n-1} b_1 + r_n = 1.$$

3° On suppose les coefficients a_n choisis de telle sorte que b_n tende vers une limite finie L différente de 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Démontrer que la série de terme général r_n converge et que

$$\sum_{n \geq 0} r_n = \frac{1}{L}.$$

On pourra procéder de la façon suivante. Soit p un entier inférieur à n ; on pose

$$\begin{cases} X_{n,p} = r_0 b_n + r_1 b_{n-1} + \dots + r_p b_{n-p} \\ Y_{n,p} = r_{p+1} b_{n-(p+1)} + \dots + r_{n-1} b_1 + r_n. \end{cases}$$

a) Etudier $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n,p} \right)$. En déduire que la série de terme général r_n converge.

b) Etudier $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_{n,p} \right)$. En déduire que

$$\sum_{n \geq 0} r_n = \frac{1}{L}.$$

Solution

1. 1° Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a tous ses termes positifs, il en est de même de la suite $(b_n)_{n \geq 1}$. Comme la série de terme général a_n admet 1 pour somme, toutes ses sommes partielles sont inférieures à 1, donc $a_1 \leq 1$ d'où $b_1 \leq 1$ et si l'on suppose que pour tout entier n on a $0 \leq b_k \leq 1$ pour $1 \leq k \leq n$, alors on a

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k+1} \leq \sum_{p=1}^{n+1} a_p \leq 1$$

donc pour tout entier n supérieur à 1, on a $0 \leq b_n \leq 1$.

2° a) Par hypothèse la série A converge pour $z = 1$. Si z est un nombre complexe tel que $|z| \leq 1$, on a pour chaque entier naturel n

$$|a_n z^n| \leq a_n |z|^n \leq a_n$$

donc la série A converge absolument lorsque $|z| \leq 1$, par suite le rayon de convergence de A est supérieur à 1.

Par ailleurs, pour chaque entier n supérieur à 1, on a

$$|b_n z^n| \leq b_n |z|^n \leq |z|^n$$

et la série de terme général z^n converge pour $|z| < 1$, donc la série B converge pour toute valeur de z telle que $|z| < 1$, par suite le rayon de convergence de B est supérieur à 1.

b) Si z est un nombre complexe tel que $|z| < 1$ on a

$$(1 - A(z)) B(z) = B(z) - A(z) \cdot B(z)$$

$$= \sum_{n \geq 1} b_n z^n - \left(\sum_{n \geq 1} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 1} b_n z^n \right)$$

donc

$$(1 - A(z)) B(z) = \sum_{n \geq 1} \left(b_n - \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k} \right) z^n$$

or pour chaque entier n tel que $n \geq 1$, on a

$$b_n - \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k} = a_n$$

donc

$$(1 - A(z)) B(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n = A(z).$$

De plus, si $|z| < 1$ on a

$$A(z) = z \sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$$

donc

$$|A(z)| \leq |z| \sum_{n \geq 1} a_n |z|^{n-1} \leq |z| \sum_{n \geq 1} a_n \leq |z| < 1$$

par suite $1 - A(z) \neq 0$ et on a

$$B(z) = \frac{A(z)}{1 - A(z)}.$$

c) Si le rayon de convergence de B était strictement supérieur à 1, $B(1)$ aurait une valeur finie. Comme A converge pour $z = 1$, on aurait

$$[(1 - A(1)) \cdot B(1) = A(1)$$

soit

$$0 \cdot B(1) = 1$$

ce qui est impossible. Donc B diverge pour $z = 1$ et le rayon de convergence de B est égal à 1.

APPLICATION. Si $b_n = \lambda$ pour chaque entier n supérieur à 1, on a pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$

$$B(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda z^n = \frac{\lambda z}{1 - z} = \frac{A(z)}{1 - A(z)}$$

donc

$$\lambda z - \lambda z \cdot A(z) = (1 - z) A(z)$$

d'où

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{\lambda z}{1 - (1 - \lambda)z} = \lambda z \sum_{n \geq 0} (1 - \lambda)^n z^n \\ &= \sum_{n \geq 1} \lambda(1 - \lambda)^{n-1} z^n \end{aligned}$$

par suite pour chaque entier n supérieur à 1, on a

$$a_n = \lambda(1 - \lambda)^{n-1}.$$

II. 1^o a) Comme le rayon de convergence de B est égal à 1, l'égalité démontrée à la question I, 1, b, montre que l'équation $A(z) = 1$ ne possède aucune racine z telle que $|z| < 1$.

b) Soit $z_0 = e^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$ une racine de l'équation $A(z) = 1$, de module 1. Comme les coefficients du polynôme $A(z)$ sont réels, l'équation $A(z) = 1$ possède aussi la racine $\bar{z}_0 = e^{-i\theta}$ et on a

$$a_p z_0^p + a_{p-1} z_0^{p-1} + \dots + a_1 z_0 = 1$$

$$a_p \bar{z}_0^p + a_{p-1} \bar{z}_0^{p-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 = 1$$

donc

$$a_p(z_0^p + \bar{z}_0^p) + a_{p-1}(z_0^{p-1} + \bar{z}_0^{p-1}) + \dots + a_1(z_0 + \bar{z}_0) = 2$$

et

$$a_p \cos p\theta + a_{p-1} \cos (p-1)\theta + \dots + a_1 \cos \theta = 1$$

or

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p = 1$$

donc

$$a_p(1 - \cos p\theta) + a_{p-1}(1 - \cos (p-1)\theta) + \dots + a_1(1 - \cos \theta) = 0$$

et comme on a

$$1 - \cos k\theta = 2 \sin^2 \frac{k\theta}{2}$$

pour $1 \leq k \leq p$, on a

$$a_p \sin^2 p \frac{\theta}{2} + a_{p-1} \sin^2 (p-1) \frac{\theta}{2} + \dots + a_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0$$

donc pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on a

$$a_k \sin^2 \frac{k\theta}{2} = 0$$

en particulier

$$a_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0$$

or $a_1 \neq 0$, donc

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = 0$$

et comme $0 \leq \theta < 2\pi$, on a $\theta = 0$ donc $z_0 = 1$.

2° Comme s_1, \dots, s_p sont des racines simples de l'équation $A(z) = 1$, pour chaque entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on a $A'(s_k) \neq 0$. Si z est un nombre complexe tel que $|z| < 1$, on a

$$B(z) = \frac{A(z)}{1 - A(z)} = \frac{-A(z) + 1 - 1}{A(z) - 1} = -1 - \frac{1}{A(z) - 1}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(z) - 1} &= \frac{1}{a_p(z - s_1)(z - s_2) \dots (z - s_p)} \\ &= \frac{c_1}{z - s_1} + \frac{c_2}{z - s_2} + \dots + \frac{c_p}{z - s_p} \end{aligned}$$

avec

$$c_p = \lim_{z \rightarrow s_p} \frac{z - s_p}{A(z) - 1} = \frac{1}{A'(s_p)} = \frac{1}{\mu_p}$$

donc

$$B(z) = -1 - \frac{1}{\mu_1(z - s_1)} - \frac{1}{\mu_2(z - s_2)} - \dots - \frac{1}{\mu_p(z - s_p)}$$

soit

$$B(z) = -1 + \frac{1}{\mu_1 s_1 (1 - z/s_1)} + \dots + \frac{1}{\mu_p s_p (1 - (z/s_p))}$$

or pour chaque entier k tel que $1 \leq k \leq p$ et pour chaque nombre complexe z tel que $|z| < 1$ on a $|z/s_k| \leq |z| < 1$ et

$$\frac{1}{1 - (z/s_k)} = \sum_{m \geq 0} \left(\frac{z}{s_k}\right)^m$$

donc

$$B(z) = -1 + \sum_{k=1}^p \left(\sum_{m \geq 0} \frac{z^m}{\mu_k s_k^{m+1}} \right) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$$

et par identification on obtient

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\mu_k s_k} = 1$$

et pour chaque entier n

$$b_n = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\mu_k s_k^{n+1}}.$$

3° Si les hypothèses de cette question sont satisfaites, on a pour chaque entier n supérieur à 1

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{\mu_k s_k^{n+1}} = \frac{1}{\mu_1 s_1} + \sum_{k=2}^p \frac{1}{\mu_k s_k^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\mu_1} + \sum_{k=2}^p \frac{1}{\mu_k s_k^{n+1}} \end{aligned}$$

or, pour chaque entier k tel que $1 < k \leq p$, on a

$$\left| \frac{1}{s_k} \right| < 1$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{s_k^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{s_k} \right|^n = 0,$$

par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{\mu_1}.$$

III. 1° a) Pour chaque entier naturel n , on a

$$r_n = 1 - \sum_{p=0}^n a_p$$

et

$$0 \leq \sum_{p=0}^n a_p < 1$$

donc

$$0 < r_n \leq 1$$

par suite

$$|r_n z^n| \leq r_n |z|^n \leq |z|^n$$

et comme la série de terme général $|z|^n$ converge pour $|z| < 1$, il en est de même de la série R donc le rayon de convergence de la série R est supérieur à 1.

b) Si z est un nombre complexe tel que $|z| < 1$ on a

$$R(z) = \sum_{n \geq 0} r_n z^n$$

donc

$$\begin{aligned} (1 - z) R(z) &= r_0 + \sum_{n \geq 0} (r_{n+1} - r_n) z^{n+1} \\ &= 1 - \sum_{n \geq 1} a_n z^n = 1 - A(z) \end{aligned}$$

par suite

$$R(z) = \frac{1 - A(z)}{1 - z}.$$

Or on a

$$B(z) = \frac{A(z)}{1 - A(z)}$$

donc

$$1 + B(z) = \frac{1}{1 - A(z)}$$

et

$$R(z) [1 + B(z)] = \frac{1}{1 - z}.$$

Il en résulte que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, on a

$$R(z) [1 + B(z)] = \sum_{n \geq 0} z^n$$

or

$$R(z) (1 + B(z)) = R(z) + R(z) B(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} \left(r_n + \sum_{p=0}^{n-1} r_p b_{n-p} \right) z^n$$

donc, pour tout entier n supérieur à 1, on a

$$r_n + r_{n-1} b_1 + r_{n-2} b_2 + \dots + r_0 b_n = 1.$$

3° a) Pour chaque entier p on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n,p} = (r_0 + r_1 + \dots + r_p) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \right) = (r_0 + r_1 + \dots + r_p) L.$$

D'après la question précédente, si $p < n$ on a

$$X_{n,p} + Y_{n,p} = 1$$

et $X_{n,p}$ et $Y_{n,p}$ sont positifs, donc $X_{n,p} \leq 1$.

Il en résulte que

$$(r_0 + \dots + r_p) L \leq 1$$

donc

$$r_0 + \dots + r_p \leq \frac{1}{L}$$

or $r_k > 0$ pour tout entier k , donc la série de terme général r_n converge et sa somme μ est inférieure à $1/L$. De plus on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_{n,p} \right) = \mu L$$

et $\mu L \leq 1$.

b) Si p, n sont des entiers tels que $p < n$ on a

$$Y_{n,p} = 1 - X_{n,p}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_{n,p} = 1 - (r_0 + \dots + r_p) L.$$

Or pour tout entier k supérieur à 1, on a $0 \leq b_k \leq 1$ donc

$$Y_{n,p} \leq r_{p+1} + \dots + r_n$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_{n,p} \leq \mu - (r_0 + \dots + r_p).$$

Par ailleurs $1 - (r_0 + \dots + r_p) \cdot L$ tend vers $1 - \mu L$ lorsque p tend vers $+\infty$ et $1 - \mu L \geq 0$ donc

$$0 \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_{n,p} \right) = 1 - \mu L \leq \mu - \mu = 0$$

par suite $\mu = 1/L$.

8.4

1. 1° Etudier brièvement l'application f définie sur \mathbf{R} par

$$f(t) = t - t^2$$

et montrer que cette application induit une bijection de \mathbf{R}_-^* sur \mathbf{R}_-^* .

2° On définit par récurrence une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ en posant $x_0 = -1$ et pour chaque entier n supérieur à 1

$$x_n - x_n^2 = x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n < 0.$$

a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante et a pour limite 0.

b) Montrer que la série de terme général $d_n = x_{n+1} - x_n$ est convergente et donner la valeur de sa somme.

c) Montrer que la série de terme général $\text{Log}(1 + d_n)$ est convergente et que la suite de terme général

$$p_n = (1 + d_0)(1 + d_1) \dots (1 + d_n)$$

a une limite comprise entre 1 et e.

3° Soit h une fonction réelle à valeurs positives définie et continue sur l'intervalle $[x_0, x_1]$. On définit par récurrence sur n la fonction f_n sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ en posant

$$f_0(x) = h(x) \quad \text{si} \quad x \in [x_0, x_1]$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x_n) + \int_{x_n}^x f_{n-1}(t - t^2) dt \quad \text{si} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad x \in [x_n, x_{n+1}].$$

a) Montrer qu'il existe une fonction f définie sur $[-1, 0[$ telle que

$$f(x) = f_n(x) \quad \text{si} \quad x \in [x_n, x_{n+1}] .$$

b) Montrer que la fonction f est continue sur $[-1, 0[$ et admet en tout point de $]x_1, 0[$ une dérivée $f'(x)$ égale à $f(x - x^2)$. Quelles hypothèses supplémentaires doit-on faire sur la fonction h pour pouvoir affirmer que la fonction f est dérivable en tout point de $] - 1, 0[$?

4° a) Montrer que dans l'intervalle $[x_1, 0[$ la fonction f est croissante et que, dans l'intervalle $[-1, x_{n+1}]$, elle est majorée par mp_n où m est la borne supérieure de la fonction h et p_n le terme général de la suite étudiée au 2° c).

b) Montrer que la fonction f admet une limite à gauche l au point 0 et que l est un nombre strictement positif si la fonction h n'est pas identiquement nulle. Que devient la limite l si la fonction h est remplacée par Kh où K est un nombre réel positif donné ?

II. On définit par récurrence une suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 0}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ en posant pour chaque élément x de $[0, 1]$,

$$g_0(x) = 1$$

$$g_n(x) = 1 + \int_0^x g_{n-1}(t - t^2) dt \quad \text{si} \quad n \geq 1 .$$

1° Montrer que pour chaque entier n la fonction g_n est une fonction polynôme et que la fonction qui associe à chaque élément x de $[0, 1]$ le nombre réel

$$g_n(x) + g_n(1 - x)$$

est constante.

2° a) Montrer par récurrence sur n que pour tout élément x de $[0, 1]$ on a

$$0 \leq g_n(x) - g_{n-1}(x) \leq \frac{x^n}{n!} .$$

b) En déduire que la suite $(g_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction g continue et dérivable, et que pour tout élément x de $[0, 1]$ on a

$$g'(x) = g(x - x^2) .$$

3° On suppose que φ est une fonction réelle définie et continue sur $[0, 1]$ et que pour tout élément x de $[0, 1]$ on a

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t - t^2) dt .$$

a) Montrer que si

$$M = \sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |\varphi(t)| \quad \text{et si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}]$$

on a

$$|\varphi(x)| \leq \frac{M}{2} .$$

b) En déduire que la fonction φ est nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$ et montrer ensuite que la fonction φ est nulle dans tout l'intervalle $[0, 1]$.

4° Montrer que si ψ est une fonction réelle définie et continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et si pour tout élément x de $]0, 1[$ on a

$$\psi'(x) = \psi(x - x^2)$$

alors la fonction ψ est proportionnelle à la fonction g définie au 2°.

5° Soit h une fonction réelle définie et continue sur $[-1, x_1]$ à valeurs positives. Montrer qu'il existe une fonction F à valeurs réelles et une seule, définie et continue sur $[-1, +1]$ dérivable sur $]x_1, 1[$ qui vérifie les deux conditions

$$\begin{aligned} F'(x) &= F(x - x^2) & \text{si } x \in]x_1, 1[\\ F(x) &= h(x) & \text{si } x \in [-1, x_1]. \end{aligned}$$

Solution I. 1° L'application f est dérivable. Pour tout nombre réel t on a

$$f'(t) = 1 - 2t.$$

Le tableau de variation de f est donc

t	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+	-
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow -\infty$

En particulier on a

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$$

donc f induit une bijection de \mathbf{R}_-^* sur \mathbf{R}_-^* .

2° a) Pour chaque entier n supérieur à 1, on a

$$x_n - x_{n-1} = x_n^2$$

donc

$$x_n - x_{n-1} > 0$$

par suite, $(x_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante ; comme $(x_n)_{n \geq 0}$ est majorée par 0, elle converge. Posons

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Alors $l \leq 0$ et on a $l - l^2 = l$ d'où $l = 0$.

b) Pour chaque entier n , on a

$$\sum_{p=0}^n d_p = x_{n+1} - x_0$$

donc la série de terme général d_n est convergente et sa somme est 1.

c) Comme d_n tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$, on a $\text{Log}(1 + d_n) \sim d_n$ et par suite la série de terme général $\text{Log}(1 + d_n)$ est convergente. Cette série a tous ses termes strictement positifs donc

$$0 < \sum_{n \geq 0} \text{Log}(1 + d_n)$$

de plus, comme d_n est positif pour tout entier n , on a

$$\text{Log}(1 + d_n) \leq d_n$$

donc

$$0 < \sum_{n \geq 0} \text{Log}(1 + d_n) \leq \sum_{n \geq 0} d_n$$

d'où

$$0 < \sum_{n \geq 0} \text{Log}(1 + d_n) \leq 1.$$

Pour chaque entier n , on a

$$\text{Log } p_n = \sum_{k=0}^n \text{Log}(1 + d_k)$$

donc la suite $(\text{Log } p_n)_{n \geq 0}$ a une limite strictement positive, inférieure à 1 et par conséquent la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ a une limite telle que

$$1 < \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n \leq e.$$

3° a) Il suffit évidemment de montrer que pour tout entier n supérieur à 1 on a

$$f_{n-1}(x_n) = f_n(x_n)$$

et ceci résulte immédiatement de la formule de récurrence définissant f_n .

b) La fonction f définie à la question précédente par recollement de fonctions continues est évidemment continue.

Soit x un élément de $]x_1, 0[$. Si x appartient à un intervalle ouvert $]x_n, x_{n+1}[$ on a

$$f(x) = f_n(x) = f_{n-1}(x_n) + \int_{x_n}^x f_{n-1}(t - t^2) dt$$

donc

$$f'(x) = f'_n(x) = f_{n-1}(x - x^2)$$

or

$$x_n - x_n^2 \leq x - x^2 \leq x_{n+1} - x_{n+1}^2$$

donc $(x - x^2)$ appartient à $]x_{n-1}, x_n[$ et $f_{n-1}(x - x^2) = f(x - x^2)$, par suite

$$f'(x) = f(x - x^2)$$

Si x est l'un des x_n ($n \geq 2$) alors f possède une dérivée à droite au point x_n égale à $f_{n-1}(x_n - x_n^2) = f_{n-1}(x_{n-1})$ et une dérivée à gauche au point x_n égale à

$$f_{n-2}(x_n - x_n^2) = f_{n-2}(x_{n-1})$$

or

$$f_{n-1}(x_{n-1}) = f_{n-2}(x_{n-1}) = f(x_n - x_n^2)$$

donc f est dérivable au point x_n et on a

$$f'(x_n) = f(x_n - x_n^2).$$

Pour que f soit dérivable sur $] - 1, 0[$ il faut que h soit dérivable sur $] - 1, x_1[$ et que la dérivée à gauche de h au point x_1 soit égale à la dérivée à droite de f_1 au point x_1 ; cette condition s'écrit

$$h'_g(x_1) = f_0(x_1 - x_1^2) = f_0(-1) = h(-1).$$

4^o a) Comme la fonction h est positive, la fonction f_0 est positive et on voit facilement par récurrence sur n que chaque fonction f_n est positive donc f est positive. Or on a vu à la question précédente que pour tout élément x de $]x_1, 0[$ on a

$$f'(x) = f(x - x^2)$$

donc f est croissante sur $[x_1, 0[$.

Si $m = \sup_{t \in [x_0, x_1]} h(t)$, on a pour tout élément t de $[x_0, x_1]$, $h(t) \leq m$ soit $f(t) \leq m$. Or $p_0 = 1 + d_0 = 1 + x_1 - x_0 = 2 + x_1$ et $-1 < x_1 < 0$ donc $p_0 \geq 1$, par suite pour tout élément t de $[x_0, x_1]$ on a

$$f(t) \leq mp_0.$$

Supposons que pour tout élément t de $[-1, x_{n+1}]$ on ait

$$f(t) \leq mp_n$$

alors si x appartient à $[x_{n+1}, x_{n+2}]$ on a

$$f(x) = f_{n+1}(x) = f_n(x_{n+1}) + \int_{x_{n+1}}^x f_n(t - t^2) dt$$

or $f_n(x_{n+1}) \leq mp_n$ et pour chaque élément t de $[x_{n+1}, x]$ on a $f_n(t - t^2) \leq mp_n$ donc on a

$$f(x) \leq mp_n + mp_n \int_{x_{n+1}}^x dt$$

soit

$$f(x) \leq mp_n(1 + x - x_{n+1}) \leq mp_n(1 + d_{n+1})$$

et comme $p_{n+1} = p_n(1 + d_{n+1})$ on a bien

$$f(x) \leq mp_{n+1}.$$

Comme la suite p_n est croissante, pour tout élément x de $[-1, x_{n+1}]$, on a aussi

$$f(x) \leq mp_{n+1}$$

donc pour tout élément x de $[-1, x_{n+2}]$ on a

$$f(x) \leq mp_{n+1}$$

et la propriété est démontrée par récurrence.

b) Comme la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ converge, elle est majorée donc il en est de même de la fonction f sur $[-1, 0[$; or la fonction f est croissante, par suite elle possède une limite finie l à gauche au point 0 qui est égale à $\sup_{x \in [0, 1[} f(x)$. Si h n'est pas identiquement nulle sur $[x_0, x_1]$, la fonction h donc la fonction f prend une valeur strictement positive en au moins un point de $[x_0, x_1]$ donc l est strictement positive. Si la fonction h est multipliée par un nombre réel positif K , on voit facilement par récurrence sur n que chaque fonction f_n se trouve multipliée par K donc f est multipliée par K et l aussi.

II. 1° La fonction g_0 est une fonction polynôme sur $[0, 1]$. Si pour un entier naturel n , la fonction g_n est une fonction polynôme, il en est de même de la fonction qui associe à chaque élément t de $[0, 1]$ l'élément

$$g_n(t - t^2)$$

et de l'intégrale de cette fonction entre 0 et x . Il en résulte que g_{n+1} est une fonction polynôme sur $[0, 1]$, donc pour tout entier naturel n , la fonction g_n est une fonction polynôme sur $[0, 1]$. Soit x un élément de $[0, 1]$, on a

$$g_0(x) + g_0(1 - x) = 2$$

et si $n \geq 1$

$$g_n(x) + g_n(1 - x) = 2 + \int_0^x g_{n-1}(t - t^2) dt + \int_0^{1-x} g_{n-1}(t - t^2) dt.$$

En faisant le changement de variable $t = 1 - u$ dans la deuxième intégrale on trouve

$$g_n(x) + g_n(1 - x) = 2 + \int_0^x g_{n-1}(t - t^2) dt - \int_1^x g_{n-1}(u - u^2) du$$

donc

$$g_n(x) + g_n(1 - x) = 2 + \int_0^1 g_{n-1}(t - t^2) dt$$

et la fonction qui associe à chaque élément x de $[0, 1]$ le nombre réel

$$g_n(x) + g_n(1 - x)$$

est bien constante.

2° a) Pour chaque élément x de $[0, 1]$ on a

$$g_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad g_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 +$$

donc

$$0 \leq g_1(x) - g_0(x) \leq \frac{x}{1!}.$$

Supposons que pour un entier n supérieur à 1 on ait pour tout élément x de $[0, 1]$

$$0 \leq g_n(x) - g_{n-1}(x) \leq \frac{x^n}{n!}.$$

Alors, pour tout élément x de $[0, 1]$ on a

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = \int_0^x (g_n(t - t^2) - g_{n-1}(t - t^2)) dt$$

donc

$$0 \leq g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq \int_0^x \frac{t^n(1-t)^n}{n!} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt$$

et comme

$$\int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

on a

$$0 \leq g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

d'où par récurrence sur n , la majoration demandée.

b) Désignons par $(e_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique de terme général

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Si p, q sont deux entiers naturels tels que $p \geq q$ on a pour tout élément x de $[0, 1]$

$$0 \leq g_p(x) - g_q(x) \leq e_p - e_q.$$

Or $(e_n)_{n \geq 0}$ est une suite de CAUCHY qui converge vers e , donc pour tout nombre réel strictement positif ε , il existe un entier N tel que la condition $p \geq q \geq N$ entraîne $e_p - e_q < \varepsilon$, donc pour tout élément x de $[0, 1]$

$$0 \leq g_p(x) - g_q(x) < \varepsilon.$$

Il en résulte que pour tout élément x de $[0, 1]$, la suite $(g_n(x))_{n \geq 0}$ converge, donc la suite $(g_n)_{n \geq 0}$ converge. Posons $g = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$, alors on a pour tout élément x de $[0, 1]$ et pour tout entier n

$$g(x) - g_n(x) = \sum_{p \geq n+1} (g_p(x) - g_{p-1}(x))$$

donc

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq e - e_n.$$

Or $(e - e_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la suite $(g_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers g . La fonction g est donc continue. Par ailleurs, pour tout élément x de $[0, 1]$ et tout entier naturel n , on a

$$g'_n(x) = g_n(x - x^2)$$

donc la suite $(g'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément. Il en résulte que la fonction g est dérivable et que

$$g' = \lim_{n \rightarrow +\infty} g'_n$$

donc pour tout élément x de $[0, 1]$, on a

$$g'(x) = g(x - x^2).$$

3° a) Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et si $t \in [0, x]$, on a $(t - t^2) \in [0, \frac{1}{4}]$ donc $|\varphi(t - t^2)| \leq M$. Il en résulte que

$$|\varphi(x)| \leq \int_0^x |\varphi(t - t^2)| dt \leq Mx \leq \frac{M}{2}.$$

b) Comme φ est continue sur l'intervalle compact $[0, \frac{1}{2}]$, il existe un élément x_0 de cet intervalle tel que $|\varphi(x_0)| = M$. Or on a vu que pour tout élément x de $[0, \frac{1}{2}]$, on a $|\varphi(x)| \leq M/2$ donc $M \leq M/2$ et ceci implique $M = 0$ donc φ est nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$. Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, alors pour tout élément t de $[0, x]$ on a

$$(t - t^2) \in [0, \frac{1}{4}]$$

donc

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t - t^2) dt = 0$$

par suite φ est nulle dans tout l'intervalle $[0, 1]$.

4° Posons $\psi(0) = \alpha$ et considérons la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par

$$\varphi = \psi - xg.$$

Pour chaque entier n , on a $g_n(0) = 1$ donc $g(0) = 1$, par suite $\varphi(0) = 0$. Pour chaque élément x de $]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \psi(x - x^2) \\ g'(x) &= g(x - x^2) \end{aligned}$$

donc

$$\varphi'(x) = \varphi(x - x^2)$$

par conséquent pour chaque élément x de $[0, 1]$ on a

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t - t^2) dt.$$

Il résulte de la question précédente que φ est nulle sur $[0, 1]$ donc $\psi = \alpha g$.

5° Soit F une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Pour chaque élément x de $[-1, x_1]$ on a

$$F(x) = h(x) = f_0(x) = f(x)$$

où f est la fonction définie à la question I, 3°, a). Nous allons montrer par récurrence sur n que pour chaque entier n supérieur à 1, la fonction F coïncide avec f sur $[-1, x_n]$. Soit donc n un entier supérieur à 1 tel que pour tout élément x de $[-1, x_n]$, on ait $F(x) = f(x)$; alors si x est un élément de $[x_n, x_{n+1}]$ on a

$$F'(x) = F(x - x^2)$$

or

$$(x - x^2) \in [-1, x_n]$$

donc

$$F(x - x^2) = f(x - x^2) = f_{n-1}(x - x^2)$$

et

$$F'(x) = f_{n-1}(x - x^2)$$

par suite

$$F(x) = f_{n-1}(x_n) + \int_{x_n}^x f_{n-1}(t - t^2) dt = f_n(x) = f(x).$$

Il en résulte que F coïncide avec f sur $[-1, 0[$. Comme F est continue, on a

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Par ailleurs la restriction G de F à $[0, 1]$ est continue, dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout élément x de $]0, 1[$ on a

$$G'(x) = G(x - x^2)$$

donc il résulte de la question II, 4° que G est proportionnelle à la fonction g définie à la question II, 2°, a). On a précisément

$$G = l.g \quad \text{ou} \quad l = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Nous venons ainsi de montrer que s'il existe une fonction F satisfaisant aux conditions de l'énoncé, alors nécessairement

(i) la restriction de F à $[-1, 0[$ est f ,

(ii) $F(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = l$,

(iii) la restriction de F à $[0, 1]$ est $l.g$.

Réciproquement, on vérifie sans difficulté, que la fonction F définie sur $[0, 1]$ par les conditions (i), (ii), (iii) satisfait aux conditions de l'énoncé, donc cette fonction est la seule solution du problème posé.

8.5

I. 1° Pour chaque nombre réel positif k , on définit la fonction réelle f_k sur \mathbf{R}_+ en posant pour tout élément t de \mathbf{R}_+

$$f_k(t) = t^k e^{-t}$$

et on désigne par C_k son graphe.

a) Etudier f_k au voisinage de 0.

b) Etudier les variations de f_k et dessiner sur un même graphique les différents modèles des courbes C_k .

2° Montrer, sans la calculer, que pour tout nombre réel positif k , l'intégrale généralisée

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

est définie.

- 3° a) Trouver une relation de récurrence entre I_k et I_{k+1} .
 b) Calculer I_k en fonction de k lorsque k est entier.

II. On désigne par E_2 l'espace vectoriel réel des fonctions polynômes de degré inférieur à 2.

1° Pour chaque élément p de E_2 , on définit la fonction réelle $\Phi(p)$ en posant pour chaque nombre réel x

$$\Phi(p)(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} p(t) dt.$$

- a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E_2 .
 b) Former la matrice A de Φ par rapport à la base de E_2 formée des fonctions p_0, p_1, p_2 définies pour chaque nombre réel x par

$$p_0(x) = 1 \quad p_1(x) = x \quad p_2(x) = x^2.$$

2° Trouver les valeurs propres de A .

3° Soit s un nombre réel non nul. Quels sont les éléments p de E_2 tels que $\Phi(p) = sp$? On précisera la façon dont cette question se rattache à la précédente et l'on discutera suivant les valeurs de s .

III. On se donne un nombre réel s non nul et une fonction réelle q définie et continue sur \mathbf{R}_+ . On suppose que les intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} q(t) dt \quad \int_0^{+\infty} t e^{-t} q(t) dt \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} q(t) dt$$

sont définies.

On se propose de chercher s'il existe une fonction réelle f possédant les propriétés suivantes.

- (i) f est définie et continue sur \mathbf{R}_+ ,
 (ii) les intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \quad \int_0^{+\infty} t e^{-t} f(t) dt \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} f(t) dt$$

sont définies,

- (iii) pour tout élément x de \mathbf{R}_+ on a

$$f(x) = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} f(t) dt + q(x). \quad (1)$$

S'il existe une fonction f possédant les propriétés (i), (ii), (iii), on dira que f est une solution de l'équation (1).

1° On suppose que q est la fonction constante de valeur 0. Etudier si dans ce cas l'équation (1) admet une solution ; s'il en existe, trouver toutes les solutions.

2° On revient au cas général. On cherchera à résoudre l'équation (1) en posant

$$f = q + g$$

où g est une fonction à déterminer. On montrera que si f est solution de l'équation (1), g appartient à E_2 et les coefficients de g sont les solutions d'un système linéaire dont les seconds membres sont exprimés à l'aide d'intégrales définies.

3° Soit a un nombre réel strictement positif. On prend pour q la fonction définie pour chaque nombre réel positif x par

$$q(x) = e^{(1-a)x}.$$

Calculer les seconds membres du système linéaire précédent. Discuter suivant les valeurs de s et a , l'existence de solutions pour l'équation (1). Expliciter les solutions lorsqu'il y en a.

Solution 1. 1° a) Si $k = 0$, on a $f_0(0) = 1$ et le développement limité à l'ordre 2 de f_0 au voisinage de 0 est

$$f_0(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

La tangente à C_0 au point $(0, 1)$ est parallèle à la seconde bissectrice des axes et C_0 se trouve au-dessus de la tangente.

Si $k > 0$, on a $f_k(0) = 0$; au voisinage de 0, on a

$$f_k(t) = t^k(1 - t + o(t)) = t^k - t^{k+1} + o(t^{k+1}).$$

La tangente à C_k au point $(0, 0)$ est donc l'axe Oy si $0 < k < 1$, l'axe Ox si $k > 1$ et la première bissectrice des axes si $k = 1$. Dans ce dernier cas, la courbe se trouve au-dessous de la tangente.

b) On a pour tout nombre réel positif k

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_k(t) = 0$$

et pour tout nombre réel positif t

$$f_k'(t) = t^{k-1} e^{-t}(k - t)$$

$$f_k''(t) = t^{k-2} e^{-t}(t^2 - 2kt + k^2 - k).$$

Si $k = 0$, pour tout nombre réel positif t , on a $f_0'(t) < 0$ et $f_0''(t) \neq 0$ donc C_0 ne possède aucun point d'inflexion, et le tableau de variation de f_0 est

t	0	$+\infty$
$f_0'(t)$	-	
$f_0(t)$	1	0

Si $k > 0$, la dérivée de f_k s'annule une fois pour $t = k$, elle est négative pour $t > k$ et positive pour $t < k$, donc la fonction f_k possède un maximum pour $t = k$.

Le tableau de variation de f_k est

t	0	k	$+\infty$
$f'_k(t)$	+	0	-
$f_k(t)$	0	$\nearrow \left(\frac{k}{e}\right)^k$	$\searrow 0$

Si $0 < k \leq 1$ la courbe C_k possède un point d'inflexion pour $t = k + \sqrt{k}$; si $k > 1$ la courbe C_k possède deux points d'inflexion pour

$$t = k + \sqrt{k} \quad \text{et} \quad t = k - \sqrt{k}.$$

On a donc les graphes représentés à la page suivante.

2° Pour tout nombre réel positif p on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^p e^{-t} = 0$. En particulier si k est un nombre réel positif, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{k+2} e^{-t} = 0$ donc il existe un nombre réel positif A_k tel que si $t \geq A_k$ on ait $t^k e^{-t} < 1/t^2$. Il en résulte que l'intégrale généralisée

$$\int_{A_k}^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

est définie, donc il en est de même de I_k .

3° a) Une intégration par parties donne

$$I_{k+1} = \int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} [-t^{k+1} e^{-t}]_0^T + (k+1) \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

donc

$$I_{k+1} = (k+1) I_k.$$

b) Comme

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^T = 1$$

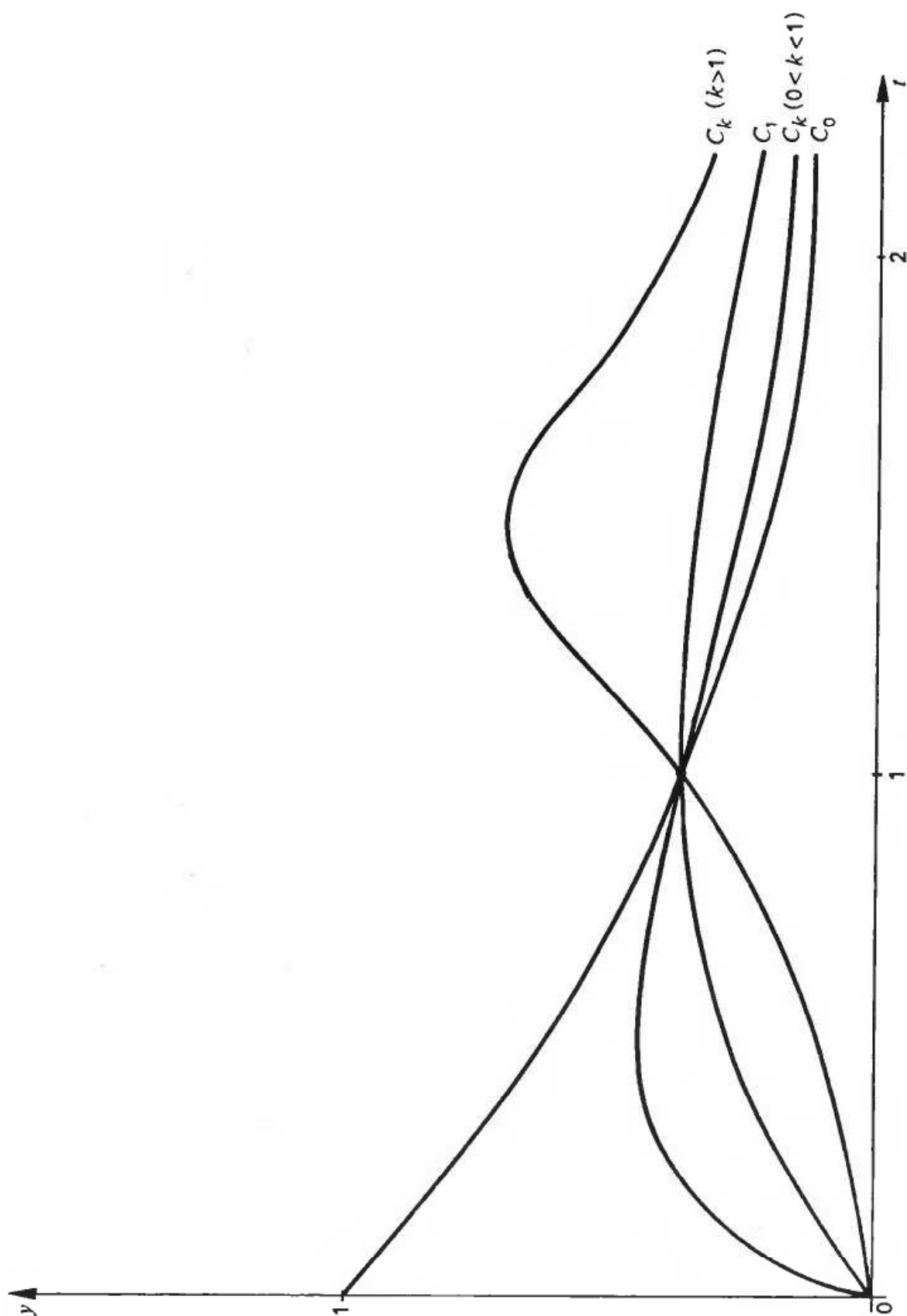
on a

$$I_k = k!$$

pour tout entier naturel k .

II. 1° a) Pour chaque élément p de E_2 et chaque nombre réel x , on a

$$\psi(p)(x) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} p(t) dt - 4x \int_0^{+\infty} t e^{-t} p(t) dt - 2x^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} p(t) dt$$



donc $\Phi(p)$ appartient à E_2 . De plus, si p, q sont deux éléments de E_2 et α, β deux nombres réels on a pour chaque nombre réel x

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha p + \beta q)(x) &= \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) (\alpha p(t) + \beta q(t)) e^{-t} dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) p(t) e^{-t} dt + \\ &\quad + \beta \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) q(t) e^{-t} dt \\ &= \alpha \Phi(p)(x) + \beta \Phi(q)(x) = (\alpha \Phi(p) + \beta \Phi(q))(x) \end{aligned}$$

donc

$$\Phi(\alpha p + \beta q) = \alpha \Phi(p) + \beta \Phi(q)$$

et Φ est linéaire, donc Φ est bien un endomorphisme de E_2 .

b) On a pour chaque nombre réel x

$$\begin{aligned} \Phi(p_0)(x) &= \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} dt = I_2 - 4xI_1 - 2x^2 I_0 \\ &= 2 - 4x - 2x^2 \end{aligned}$$

donc

$$\Phi(p_0) = 2p_0 - 4p_1 - 2p_2$$

de même, on a

$$\begin{aligned} \Phi(p_1)(x) &= \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) t e^{-t} dt = I_3 - 4xI_2 - 2x^2 I_1 \\ &= 6 - 8x - 2x^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(p_1) = 6p_0 - 8p_1 - 2p_2$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(p_2)(x) &= \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) t^2 e^{-t} dt = I_4 - 4xI_3 - 2x^2 I_2 \\ &= 24 - 24x - 4x^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(p_2) = 24p_0 - 24p_1 - 4p_2.$$

Il en résulte que la matrice de Φ par rapport à la base (p_0, p_1, p_2) de E_2 est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

2° Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda + 2)(\lambda + 4)^2.$$

La matrice A possède donc la valeur propre simple $\lambda_1 = -2$ et la valeur propre double $\lambda_2 = -4$.

3° Si $s \neq -2$ et $s \neq -4$, le seul élément p de E_2 tel que $\Phi(p) = s \cdot p$ est la fonction polynôme nulle. Si $s = -2$, les éléments p de E_2 tels que $\Phi(p) = -2p$ sont les vecteurs propres de Φ relatifs à la valeur propre -2 . Leurs coordonnées (a_0, a_1, a_2) par rapport à la base canonique vérifient donc

$$\begin{cases} 4a_0 + 6a_1 + 24a_2 = 0 \\ -4a_0 - 6a_1 - 24a_2 = 0 \\ -2a_0 - 2a_1 - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$a_1 = -\frac{10}{9}a_0 \quad a_2 = \frac{1}{9}a_0$$

par suite les fonctions polynômes p appartenant à E_2 telles que $\Phi(p) = -2p$ sont de la forme

$$p(x) = \lambda(9 - 10x + x^2)$$

où λ est un nombre réel.

Si $s = -4$, les éléments p de E_2 tels que $\Phi(p) = -4p$ sont les vecteurs propres de Φ relatifs à la valeur propre -4 . Leurs coordonnées (a_0, a_1, a_2) par rapport à la base (p_0, p_1, p_2) vérifient donc

$$\begin{cases} 6a_0 + 6a_1 + 24a_2 = 0 \\ -4a_0 - 4a_1 - 24a_2 = 0 \\ -2a_0 - 2a_1 = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$a_1 = -a_0 \quad a_2 = 0$$

par suite les fonctions polynômes p appartenant à E_2 telles que $\Phi(p) = -4p$ sont de la forme

$$p(x) = \mu(x - 1)$$

où μ est un nombre réel.

III. 1° Si f est une solution de l'équation (1) dans ce cas et si l'on pose

$$\alpha = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} f(t) dt \quad \beta = \int_0^{+\infty} t e^{-t} f(t) dt \quad \gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$$

alors pour chaque nombre réel x on a

$$f(x) = \frac{1}{s}(\alpha - 4\beta x + 2\gamma x^2)$$

donc f appartient à E_2 et on a $\Phi(f) = sf$. Chaque élément f de E_2 vérifie les conditions (i) et (ii), donc les solutions de l'équation (1) dans ce cas sont les fonctions polynômes trouvées à la question II, 3^o.

2^o Posons $f = q + g$ et supposons que f soit solution de l'équation (1). Comme les intégrales

$$K_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} q(t) dt \quad K_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} q(t) dt \quad K_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} q(t) dt$$

sont définies, il en est de même des intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t) dt \quad \int_0^{+\infty} t e^{-t} g(t) dt \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} g(t) dt$$

et on a

$$g(x) = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} g(t) dt + \frac{1}{s} [K_2 - 4K_1 x - 2K_0 x^2]$$

donc g appartient à E_2 et pour tout nombre réel x on a

$$sg(x) = \Phi(g)(x) + [K_2 - 4K_1 x - 2K_0 x^2]$$

d'où en désignant par (a_0, a_1, a_2) les coefficients de g par rapport à la base (p_0, p_1, p_2)

$$\begin{cases} sa_0 = 2a_0 + 6a_1 + 24a_2 + K_2 \\ sa_1 = -4a_0 - 8a_1 - 24a_2 - 4K_1 \\ sa_2 = -2a_0 - 2a_1 - 4a_2 - 2K_0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} (2-s)a_0 + 6a_1 + 24a_2 = -K_2 \\ -4a_0 - (8+s)a_1 - 24a_2 = 4K_1 \\ -2a_0 - 2a_1 - (4+s)a_2 = 2K_0 \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients de ce système est $P(s)$ où P est le polynôme caractéristique de A . Par suite ce système possède une solution et une seule lorsque $s \neq -2$ et $s \neq -4$; dans ce cas il existe un seul élément g de E_2 vérifiant pour tout nombre réel x la condition

$$sg(x) = \Phi(g)(x) + (K_2 - 4K_1 x - 2K_0 x^2)$$

et la fonction $f = q + g$ est bien solution de E_2 car elle vérifie bien les trois conditions énoncées au début de la question III.

3^o La fonction réelle q définie sur \mathbf{R}_+ par

$$q(x) = e^{(1-a)x}$$

avec $a \in \mathbf{R}_+^*$ est définie et continue sur \mathbf{R}_+ , de plus les intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} q(t) dt \quad \int_0^{+\infty} t e^{-t} q(t) dt \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} q(t) dt$$

sont définies pour $a > 0$ et on a

$$K_0 = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \left[-\frac{1}{a} e^{-at} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$$

$$K_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-at} dt = \left[-e^{-at} \left(\frac{t}{a} + \frac{1}{a^2} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a^2}$$

$$K_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-at} dt = \left[-e^{-at} \left(\frac{t^2}{a} + \frac{2t}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{a^3}.$$

Le système qui définit les coefficients a_0, a_1, a_2 de g sur la base (p_0, p_1, p_2) est alors

$$(I) \begin{cases} (2-s)a_0 + 6a_1 + 24a_2 = -\frac{2}{a^3} \\ -4a_0 - (8+s)a_1 - 24a_2 = \frac{4}{a^2} \\ -2a_0 - 2a_1 - (4+s)a_2 = \frac{2}{a} \end{cases}$$

Si $s \neq -2$ et $s \neq -4$, ce système est de CRAMER et il admet l'unique solution

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\begin{vmatrix} -2/a^3 & 6 & 24 \\ 4/a^2 & -(8+s) & -24 \\ 2/a & -2 & -(4+s) \end{vmatrix}}{-(s+2)(s+4)^2} \\ &= \frac{2s^2 - 24(2a^2 + a - 1)s - 32(3a^2 - 3a + 1)}{a^3(s+2)(s+4)^2} \\ a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 2-s & -2/a^3 & 24 \\ -4 & 4/a^2 & -24 \\ -2 & 2/a & -(4+s) \end{vmatrix}}{-(s+2)(s+4)^2} \\ &= \frac{-4as^2 + 8(6a^2 - a - 1)s - 32(3a^2 - 5a - 2)}{a^3(s+2)(s+4)^2} \\ a_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2-s & 6 & -2/a^3 \\ -4 & -(8+s) & 4/a^2 \\ -2 & -2 & 2/a \end{vmatrix}}{-(s+2)(s+4)^2} \\ &= \frac{-2a^2s^2 - 4(3a^2 - 2a + 1)s - 16(a^2 - 2a + 1)}{a^3(s+2)(s+4)^2} \end{aligned}$$

Dans ce cas on a pour tout élément x de \mathbf{R}

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

où a_0, a_1, a_2 ont les valeurs trouvées ci-dessus, et l'unique solution de l'équation (I) est la fonction f définie sur \mathbf{R}_+ par

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + e^{(1-a)x}$$

Si $s = -2$, le système (I) devient

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} 4 a_0 + 6 a_1 + 24 a_2 = -\frac{2}{a^3} \\ -4 a_0 - 6 a_1 - 24 a_2 = \frac{4}{a^2} \\ -2 a_0 - 2 a_1 - 2 a_2 = \frac{2}{a} \end{array} \right.$$

Pour que les deux premières équations soient compatibles, il faut que

$$\frac{4}{a^2} - \frac{2}{a^3} = 0 \quad \text{soit} \quad a = \frac{1}{2}.$$

Si $a \neq \frac{1}{2}$, le système (II) n'admet pas de solution et l'équation (I) n'en possède pas non plus. Si $a = \frac{1}{2}$, le système II est indéterminé et on a

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 a_0 + 3 a_1 + 12 a_2 = -8 \\ a_0 + a_1 + a_2 = -2 \end{array} \right.$$

d'où

$$a_1 = -10 a_2 - 4 \quad a_0 = 9 a_2 + 2$$

par suite $g(x)$ est de la forme

$$g(x) = \lambda(x^2 - 10x + 9) - 4x + 2$$

où λ est un nombre réel et les solutions de l'équation (I) sont les fonctions f de la forme

$$f(x) = e^{x/2} + \lambda(x^2 - 10x + 9) - 4x + 2.$$

Si $s = -4$, le système (I) devient

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} 6 a_0 + 6 a_1 + 24 a_2 = -\frac{2}{a^3} \\ -4 a_0 - 4 a_1 - 24 a_2 = \frac{4}{a^2} \\ -2 a_0 - 2 a_1 = \frac{2}{a} \end{array} \right.$$

Ces équations sont compatibles si

$$-\frac{2}{a^3} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a} = 0.$$

Or $a > 0$, donc cette condition est satisfaite si et seulement si $a = -1 + \sqrt{2}$.

Si $a \neq -1 + \sqrt{2}$, le système III ne possède pas de solution et l'équation (1) n'en possède pas non plus. Si $a = -1 + \sqrt{2}$, le système III donne

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{2 + \sqrt{2}}{6} \\ a_0 + a_1 = -(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

par suite $g(x)$ est de la forme

$$g(x) = -\frac{2 + \sqrt{2}}{6}x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \mu(1 - x)$$

où μ est un nombre réel et les solutions de l'équation (1) sont les fonctions f de la forme

$$f(x) = e^{(2 - \sqrt{2})x} - \frac{2 + \sqrt{2}}{6}x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \mu(1 - x)$$

où μ est un nombre réel.

8.6

I. On désigne par Φ l'ensemble des fonctions complexes de variable complexe définies dans tout le plan complexe et représentables par une série entière de rayon de convergence infini.

1° Prouver que relativement aux opérations d'addition et de multiplication habituelles, Φ est un anneau commutatif.

2° Pour chaque élément f de Φ tel que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

et pour chaque élément r de \mathbf{R}_+ on pose

$$M_f(r) = \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n.$$

Montrer que la fonction M_f est définie, croissante et indéfiniment dérivable sur \mathbf{R}^+ . Quand est-elle strictement croissante ?

3° Soient f, g deux éléments de Φ . Montrer que pour chaque élément r de \mathbf{R}_+ on a

$$M_{f+g}(r) \leq M_f(r) + M_g(r)$$

$$M_{fg}(r) \leq M_f(r) M_g(r).$$

- 4° Montrer que si M_f est une fonction bornée, la fonction f est constante.
 5° Déterminer les fonctions M_{f_i} ($1 \leq i \leq 3$) associées aux fonctions f_i ($1 \leq i \leq 3$) définies par

$$f_1(z) = e^{-z} \quad f_2(z) = \sin z \quad f_3(z) = \operatorname{ch} z .$$

II. On appelle G l'ensemble des fonctions f appartenant à Φ telles que, pour chacune d'elles, il existe un nombre réel α vérifiant pour tout élément r de \mathbf{R}_+

$$M_f(r) \leq e^{\alpha r} . \tag{1}$$

Si f est un élément non nul de G , on pose

$$v(f) = \sup_{r>0} \frac{\operatorname{Log} M_f(r)}{r} .$$

1° Soit f un élément non nul de G .

a) Démontrer que l'ensemble E des éléments α de \mathbf{R} vérifiant (1) possède un plus petit élément égal à $v(f)$.

b) Montrer que $|f(0)| \leq 1$, que $v(f) \geq 0$ et que la condition $|f(0)| = 1$ entraîne $v(f) \geq |f'(0)|$.

c) Caractériser les fonctions non nulles f de G telles que $v(f) = 0$.

2° a) Calculer $v(g_i)$ ($1 \leq i \leq 4$) pour chacune des fonctions g_i ($1 \leq i \leq 4$) définies par $g_1(z) = e^{-z}$, $g_2(z) = \operatorname{ch} z$, $g_3(z) = 1 + z$ et $g_4(z) = a_p z^p$ où p est un entier naturel et où $a_p \neq 0$.

b) Soit φ_0 la fonction définie par

$$\varphi_0(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{z}{n}\right)^n .$$

Montrer que $v(\varphi_0) = 1$.

3° Soient f, g deux éléments non nuls de G . Démontrer que leur produit appartient à G et que

$$v(fg) \leq v(f) + v(g) .$$

III. Soit f un élément non nul de G . Pour chaque nombre complexe z , on pose

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n .$$

1° a) En remarquant que pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel positif r , on a

$$|a_n| r^n \leq M_f(r)$$

démontrer que pour tout entier n supérieur à 1 on a

$$\frac{n}{e} |a_n|^{1/n} \leq v(f) .$$

b) On pose alors

$$w(f) = \frac{1}{e} \sup_{n \geq 1} n |a_n|^{1/n}$$

démontrer que

$$w(f) \leq v(f) \leq ew(f).$$

2° a) Montrer que pour tout couple (a, b) de nombres réels positifs et tout entier n supérieur à 1 on a

$$\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

b) En déduire que si f, g sont deux éléments non nuls de G , pour que $f + g$ appartienne à G , il faut et il suffit que

$$|f(0) + g(0)| \leq 1.$$

De plus si $f + g$ n'est pas la fonction nulle, montrer que

$$v(f + g) \leq e[v(f) + v(g)].$$

Solution

I. 1° On sait (cf. C. E., Ch. 6, § II, n° 112) que la différence et le produit de deux séries entières de rayon de convergence infini sont des séries entières de rayon de convergence infini, donc Φ est un sous-anneau de l'anneau des fonctions complexes de variable complexe définies dans tout le plan complexe. Par suite Φ est un anneau commutatif.

2° Comme f converge absolument dans tout le plan complexe, la série de terme général $|a_n| r^n$ converge uniformément pour r dans \mathbf{R}_+ . Sa somme $M_f(r)$ est donc définie et la fonction M_f est indéfiniment dérivable dans \mathbf{R}_+ . Si r, r' sont deux éléments de \mathbf{R}_+ tels que $r \leq r'$ alors, pour tout entier naturel n , on a

$$|a_n| r^n \leq |a_n| r'^n$$

donc

$$M_f(r) \leq M_f(r')$$

et M_f est croissante. La dérivée de M_f est donnée (cf. C. E., Ch. 6, § II, n° 113) par

$$M'_f(r) = \sum_{n \geq 1} n |a_n| r^{n-1}.$$

Pour qu'elle soit strictement positive pour $r > 0$, il faut et il suffit qu'il existe un entier k supérieur à 1 tel que $a_k \neq 0$. Par suite pour que M_f soit strictement croissante, il faut et il suffit qu'il existe un entier k supérieur à 1 tel que $a_k \neq 0$.

3° Pour chaque nombre complexe z posons

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$$

alors on a

$$(f + g)(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n \quad (fg)(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

avec pour chaque entier n

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

donc pour chaque nombre réel positif r , on a

$$M_{f+g}(r) = \sum_{n \geq 0} |a_n + b_n| r^n \quad M_f(r) + M_g(r) = \sum_{n \geq 0} (|a_n| + |b_n|) r^n$$

$$M_{fg}(r) = \sum_{n \geq 0} |c_n| r^n \quad M_f(r) M_g(r) = \sum_{n \geq 0} d_n r^n$$

avec pour chaque entier n

$$d_n = \sum_{p+q=n} |a_p| |b_q|$$

or, pour tout entier n on a

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$$

$$|c_n| \leq \sum_{p+q=n} |a_p| |b_q| = d_n$$

donc pour chaque nombre réel r , on a

$$M_{f+g}(r) \leq M_f(r) + M_g(r)$$

$$M_{fg}(r) \leq M_f(r) M_g(r).$$

4° Posons pour chaque nombre complexe z

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

et supposons que M_f possède un majorant A . Alors on a pour tout nombre réel positif

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n \leq A$$

donc

$$|a_0| \leq A$$

et pour tout entier n supérieur à 1 et tout nombre réel positif r

$$|a_n| \leq \frac{A}{r^n}$$

par suite $|a_n| = 0$ si $n \geq 1$ donc $a_n = 0$ si $n \geq 1$ et f est la fonction constante de valeur a_0 .

5° Pour chaque nombre complexe z , on a

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$$

donc pour chaque nombre réel positif r , on a

$$M_{f_1}(r) = \sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!} = e^r.$$

Pour chaque nombre complexe z , on a

$$f_2(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

donc pour chaque nombre réel positif r , on a

$$M_{f_2}(r) = \sum_{n \geq 0} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} r.$$

Pour chaque nombre complexe z , on a

$$f_3(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

donc pour chaque nombre réel positif r , on a

$$M_{f_3}(r) = \sum_{n \geq 0} \frac{r^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} r.$$

II. 1° a) Soit α un élément de E . Alors pour tout nombre réel r strictement positif on a

$$\frac{\operatorname{Log} M_f(r)}{r} \leq \alpha$$

donc l'ensemble

$$\left\{ \frac{\operatorname{Log} M_f(r)}{r} \mid r > 0 \right\}$$

est majoré, par suite il possède une borne supérieure ; $v(f)$ est bien défini et $v(f) \leq \alpha$.

A présent observons que pour tout nombre réel r strictement positif on a

$$\frac{\operatorname{Log} M_f(r)}{r} \leq v(f)$$

donc

$$\operatorname{Log} M_f(r) \leq rv(f)$$

et

$$M_f(r) \leq e^{rv(f)}.$$

Or les fonctions M_f et exponentielle sont continues donc pour tout nombre réel positif on a

$$M_f(r) \leq e^{rv(f)}$$

si bien que $v(f)$ vérifie la condition (1). Par suite $v(f)$ appartient à E donc $v(f)$ est le plus petit élément de E .

b) On a

$$0 \leq M_f(0) \leq e^{0v(f)}$$

donc

$$M_f(0) \leq 1$$

soit

$$|f(0)| \leq 1.$$

Supposons que $v(f) < 0$. Alors pour tout nombre réel positif r , on a

$$0 \leq M_f(r) \leq e^{v(f)r}$$

et

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} e^{v(f)r} = 0$$

donc

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} M_f(r) = 0$$

or M_f est une fonction croissante, donc M_f est la fonction nulle. Il en résulte que f est aussi la fonction nulle, ce qui n'est pas, donc $v(f) \geq 0$.

Si $|f(0)| = 1$, on a pour chaque nombre réel positif r ,

$$M_f(r) = 1 + |a_1| r + \sum_{n \geq 2} |a_n| r^n$$

donc

$$1 + |a_1| r \leq M_f(r)$$

par suite

$$\text{Log } M_f(r) \geq \text{Log } (1 + |a_1| r)$$

et si $r > 0$

$$\frac{\text{Log } M_f(r)}{r} \geq \frac{\text{Log } (1 + |a_1| r)}{r}$$

donc pour tout élément r de \mathbf{R}_+^*

$$v(f) \geq \frac{\text{Log } (1 + |a_1| r)}{r}.$$

On en déduit que

$$v(f) \geq \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \frac{\text{Log } (1 + |a_1| r)}{r}$$

et comme

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \frac{\text{Log } (1 + |a_1| r)}{r} = |a_1|,$$

on a

$$v(f) \geq |f'(0)|.$$

c) Si f est un élément de G tel que $v(f) = 0$, on a pour tout nombre réel r strictement positif

$$\frac{\text{Log } M_f(r)}{r} \leq 0$$

donc

$$\text{Log } M_f(r) \leq 0$$

et

$$M_f(r) \leq 1$$

par suite f est une fonction constante d'après la question I, 4^o.

Réciproquement, si f est une fonction constante de valeur a_0 avec $a_0 \neq 0$, on a pour tout nombre réel r

$$M_f(r) = |a_0| \leq e^{0r}$$

donc $v(f) = 0$.

2^o a) On sait que pour tout nombre réel positif r

$$M_{g_1}(r) = e^r$$

donc si $r > 0$, on a

$$\frac{\text{Log } M_{g_1}(r)}{r} = 1$$

par suite, $v(g_1) = 1$.

On a vu plus haut que pour tout nombre réel positif r , on a

$$M_{g_2}(r) = \text{ch } r$$

donc

$$v(g_2) = \sup_{r>0} \frac{\text{Log ch } r}{r}.$$

La fonction g définie sur \mathbf{R}_+^* par

$$g(r) = \frac{\text{Log ch } r}{r}$$

est dérivable et on a

$$g'(r) = \frac{r \text{ th } r - \text{Log ch } r}{r^2}.$$

La fonction h définie sur \mathbf{R}_+ par

$$h(r) = r \text{ th } r - \text{Log ch } r$$

est dérivable et on a

$$h'(r) = \frac{r}{\text{sh}^2 r}$$

donc h est croissante. Or $h(0) = 0$, donc $h(r) \geq 0$ si $r > 0$, il en résulte que g est croissante sur \mathbf{R}_+^* donc

$$v(g_2) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log ch } r}{r}.$$

Si $r > 0$, on a

$$\frac{\text{Log ch } r}{r} = \frac{\text{Log}(e^r + e^{-r}) - \text{Log } 2}{r} = 1 + \frac{\text{Log}(1 + e^{-2r})}{r} - \frac{\text{Log } 2}{r}.$$

Or

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}(1 + e^{-2r})}{r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } 2}{r} = 0$$

donc

$$v(g_2) = 1.$$

Pour chaque nombre réel positif r , on a

$$M_{g_3}(r) = 1 + r$$

donc

$$v(g_3) = \sup_{r > 0} \frac{\text{Log}(1 + r)}{r}.$$

La fonction s définie sur \mathbf{R}_+^* par

$$s(r) = \frac{\text{Log}(1 + r)}{r}$$

est dérivable et on a

$$s'(r) = \frac{\frac{r}{1+r} - \text{Log}(r+1)}{r^2}.$$

La fonction t définie sur \mathbf{R}_+ par

$$t(r) = \frac{r}{1+r} - \text{Log}(1+r)$$

est dérivable et on a

$$t'(r) = \frac{1}{(1+r)^2} - \frac{1}{1+r} = \frac{-r}{(1+r)^2}$$

donc t est décroissante. Or $t(0) = 0$ donc $t(r) \leq 0$ si $r > 0$; il en résulte que s est décroissante sur \mathbf{R}_+^* donc

$$v(g_3) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \frac{\text{Log}(1+r)}{r} = 1.$$

Pour chaque nombre réel positif r , on a

$$M_{g_4}(r) = |a_p| r^p$$

donc

$$v(g_4) = \sup_{r>0} \frac{\text{Log} |a_p| r^p}{r}.$$

La fonction ω définie sur \mathbf{R}_+^* par

$$\omega(r) = \frac{\text{Log} |a_p| r^p}{r}$$

est dérivable et on a

$$\omega'(r) = \frac{p - \text{Log} |a_p| r^p}{r^2}.$$

Il en résulte que ω possède un maximum au point $r = e |a_p|^{-1/p}$; ce maximum est

$$v(g_4) = \frac{p}{e} |a_p|^{1/p}.$$

b) La série entière de terme général z^n/n^n pour $n \geq 1$ a un rayon de convergence infini donc φ_0 appartient à Φ . Si r est un nombre réel positif, on a

$$M_{\varphi_0}(r) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{r^n}{n^n}.$$

Or pour chaque entier n supérieur à 1, on a

$$n^n \geq n!$$

donc

$$M_{\varphi_0}(r) \leq \sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$$

soit

$$M_{\varphi_0}(r) \leq e^r$$

par suite φ_0 appartient à G et on a $v(\varphi_0) \leq 1$. Comme $|\varphi_0(0)| = 1$, on a $v(\varphi_0) \geq |\varphi_0'(0)|$ donc $v(\varphi_0) \geq 1$ d'après la question II, 1^o, d'où

$$v(\varphi_0) = 1.$$

3^o Si f, g sont deux éléments non nuls de G , on sait que fg appartient à Φ et que pour tout nombre réel positif r

$$M_{fg}(r) \leq M_f(r) M_g(r)$$

or

$$M_f(r) \leq e^{v(f)r} \quad M_g(r) \leq e^{v(g)r}$$

donc

$$M_{fg}(r) \leq e^{(v(f)+v(g))r}$$

par suite fg appartient à G et

$$v(fg) \leq v(f) + v(g).$$

III. 1^o a) Soit n un entier supérieur à 1 et soit g la fonction complexe définie sur \mathbb{C} par

$$g(z) = a_n z^n$$

alors nous savons d'après la question II, 2^o que

$$v(g) = \frac{n}{e} |a_n|^{1/n}.$$

Pour chaque nombre réel positif r , on a

$$M_g(r) = |a_n| r^n$$

donc

$$M_g(r) \leq M_f(r)$$

par suite pour chaque nombre réel strictement positif r , on a

$$\frac{\text{Log } M_g(r)}{r} \leq \frac{\text{Log } M_f(r)}{r}$$

d'où

$$v(g) \leq v(f)$$

soit

$$\frac{n}{e} |a_n|^{1/n} \leq v(f).$$

b) Pour chaque entier n supérieur à 1, on a

$$\frac{n}{e} |a_n|^{1/n} \leq v(f)$$

donc

$$w(f) \leq v(f)$$

par ailleurs

$$e^{e w(f) r} = \sum_{n \geq 0} \frac{e^n (w(f))^n r^n}{n!} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{e^n (w(f))^n r^n}{n!}.$$

Pour chaque entier n supérieur à 1, on a

$$\frac{1}{e} n |a_n|^{1/n} \leq w(f)$$

donc

$$\frac{1}{e^n} n^n |a_n| \leq (w(f))^n$$

et

$$e^{ew(f)r} \geq 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{n^n |a_n| r^n}{n!}.$$

Comme pour chaque entier n supérieur à 1, on a

$$\frac{n^n}{n!} \geq 1,$$

on en déduit que pour chaque nombre réel positif

$$e^{ew(f)r} \geq 1 + \sum_{n \geq 1} |a_n| r^n \geq \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$$

car $|a_0| \leq 1$, donc

$$M_f(r) \leq e^{ew(f)r}$$

d'où

$$v(f) \leq ew(f).$$

2° a) Comme a, b sont positifs, pour chaque entier n supérieur à 1, l'inégalité

$$\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

équivalent à

$$a+b \leq (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n$$

et cette inégalité est satisfaite, comme on le voit en développant son second membre au moyen de la formule du binôme.

b) Si $f+g$ appartient à G , on a d'après la question II, 1° b)

$$|f(0) + g(0)| \leq 1.$$

Réciproquement, supposons que $|f(0) + g(0)| \leq 1$. Pour chaque entier n supérieur à 1, on a

$$|a_n + b_n|^{1/n} \leq |a_n|^{1/n} + |b_n|^{1/n}$$

donc

$$\frac{n}{e} |a_n + b_n|^{1/n} \leq \frac{n}{e} |a_n|^{1/n} + \frac{n}{e} |b_n|^{1/n} \leq w(f) + w(g)$$

par suite l'ensemble

$$\left\{ \frac{n}{e} |a_n + b_n|^{1/n} \mid n \geq 1 \right\}$$

possède une borne supérieure $w(f+g)$ et on a pour tout nombre réel positif r ,

$$e^{ew(f)r} = \sum_{n \geq 0} \frac{e^n (w(f+g))^n r^n}{n!} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{e^n (w(f+g))^n r^n}{n!}.$$

Comme on a pour chaque entier n supérieur à 1

$$(w(f + g))^n \geq \frac{n^n}{e^n} |a_n + b_n|$$

et

$$\frac{n^n}{n!} \geq 1$$

on a pour tout nombre réel positif r

$$e^{e w(f+g)r} \geq 1 + \sum_{n \geq 1} |a_n + b_n| r^n$$

or

$$|a_0 + b_0| \leq 1$$

donc

$$e^{e w(f+g)r} \geq \sum_{n \geq 0} |a_n + b_n| r^n$$

soit

$$e^{e w(f+g)r} \geq M_{f+g}(r)$$

par suite $f + g$ appartient à G et on a

$$v(f + g) \leq e w(f + g) \leq e(w(f) + w(g))$$

et comme

$$w(f) \leq v(f) \quad w(g) \leq v(g)$$

on a

$$v(f + g) \leq e(v(f) + v(g)).$$

8.7

On dit qu'une fonction u de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} est *harmonique* dans un domaine D de \mathbf{R}^2 , si elle admet des dérivées partielles du deuxième ordre continues et si pour tout élément (x, y) de D , on a

$$(\Delta u)(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

I. 1° Soit (a, b) un élément de \mathbf{R}^2 . Montrer que la fonction g définie pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(a, b)\}$ par

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \text{Log} [(x - a)^2 + (y - b)^2]$$

est harmonique dans tout domaine de \mathbf{R}^2 ne contenant pas le point (a, b) .

2° Pour tout nombre réel r strictement positif, soit (Γ_r) le cercle de rayon r et

de centre $A = (a, b)$, et soit u une fonction continue définie sur un domaine dont l'intérieur contient A . Montrer que

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_r^+} u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right).$$

3° a) Soient u et v deux fonctions admettant des dérivées partielles du deuxième ordre continues dans un domaine E dont la frontière F est formée d'une ou plusieurs courbes (le domaine E est un domaine « usuel » au sens de C. E., Ch. 8, § III, n° 147). Montrer, en utilisant la formule de GREEN-RIEMANN, que

$$\begin{aligned} \int_E [u(x, y) \Delta v(x, y) - v(x, y) \Delta u(x, y)] dx dy = \\ = \int_F \left[u(x, y) \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dx \right) - \right. \\ \left. - v(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] \quad (1) \end{aligned}$$

où F est muni d'une orientation que l'on précisera.

b) Montrer que si u est harmonique dans E , on a

$$\int_F \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) = 0. \quad (2)$$

4° Soit D un domaine simplement connexe (cf. C. E., Ch. 8, § II, n° 144) de \mathbf{R}^2 de frontière C et soit $A = (a, b)$ un point de D .

a) Soient u une fonction harmonique dans D et r un nombre réel positif tel que le cercle Γ_r de rayon r et de centre A soit contenu dans D . En appliquant la formule (1) montrer que

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) - \right. \\ \left. - g(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] = \\ = \int_{\Gamma_r^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) - \right. \\ \left. - g(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

b) En déduire que

$$\begin{aligned} u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) - \right. \\ \left. - g(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

5° On se restreint maintenant au cas où D est le disque de centre O , de rayon R , et l'on pose $a = \rho \cos \omega$ et $b = \rho \sin \omega$ ou $0 < \rho < R$ et $0 \leq \omega < 2\pi$.
 Montrer que la fonction h définie pour tout élément (x, y) de D par

$$h(x, y) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\rho^2}{R^2} \left[\left(x - \frac{aR^2}{\rho^2} \right)^2 + \left(y - \frac{bR^2}{\rho^2} \right)^2 \right]$$

est harmonique dans D et vérifie $h(x, y) = g(x, y)$ en tout point (x, y) de C .
 On pose $G = g - h$. Montrer, en utilisant (1) et (4) que

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) dx \right) \right]$$

puis que

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[u(R \cos \theta, R \sin \theta) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\theta - \omega)} d\theta \right]. \quad (5)$$

II. Soient D un domaine usuel de \mathbf{R}^2 , C sa frontière et φ une fonction continue de C dans \mathbf{R}^2 . On se propose de résoudre dans certains cas le problème de DIRICHLET qui consiste à trouver une fonction u harmonique dans D et coïncidant avec φ sur C .

1° Montrer que si u est une fonction harmonique dans D , on a

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] &= \\ &= \int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

En déduire que le problème de DIRICHLET admet au plus une solution. Résoudre ce problème dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= 1 & \varphi_3(x, y) &= y \\ \varphi_2(x, y) &= x & \varphi_4(x, y) &= xy. \end{aligned}$$

2° Calculer la solution dans le cas où D est le disque de centre O et de rayon R et φ est définie pour tout élément (x, y) de C par $\varphi(x, y) = x^2$.
 Montrer que

$$u(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) = \frac{2R^2(R^2 - \rho^2)}{\pi} \int_0^{+\infty} X(t) dt$$

avec

$$X(t) = \frac{(t^2 - 1)^2 \cos^2 \omega + 4t^2 \sin^2 \omega}{(t^2 + 1)^2 [(R - \rho)^2 + (R + \rho)^2 t^2]}.$$

Montrer qu'il existe des constantes K, L, M telles que

$$X(t) = \frac{K}{(t^2 + 1)^2} + \frac{L}{(t^2 + 1)} + \frac{M}{(R - \rho)^2 + (R + \rho)^2 t^2}.$$

En déduire qu'on a

$$u(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) = \frac{R^2}{R^2 + \rho^2} [(R^2 - \rho^2) \sin^2 \omega + 2 \rho^2 M].$$

Déterminer M et en déduire l'expression de la solution $u(x, y)$.

Solution I. 1° En tout point $(x, y) \neq (a, b)$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{(y - b)^2 - (x - a)^2}{[(x - a)^2 + (y - b)^2]^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{(x - a)^2 - (y - b)^2}{[(x - a)^2 + (y - b)^2]^2}$$

$$\Delta g(x, y) = 0.$$

Par suite la fonction g est harmonique dans tout domaine ne contenant pas (a, b) .

2° Il existe un nombre réel strictement positif r tel que Γ_r soit contenu dans le domaine de définition de u . Le cercle Γ_r admet la représentation paramétrique.

$$\begin{aligned} x &= a + r \cos \theta \\ y &= b + r \sin \theta \end{aligned} \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

on a alors

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\sin \theta}{r}$$

$$dx = -r \sin \theta d\theta$$

$$dy = r \cos \theta d\theta.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r^+} u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) &= \\ &= \int_0^{2\pi} u(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. La fonction u étant continue au point (a, b) , il existe un nombre réel strictement positif η tel que pour tout élément (x, y) de \mathbb{R}^2 qui vérifie $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \eta$, on ait

$$|u(x, y) - u(a, b)| < \varepsilon.$$

Soit r un nombre réel tel que $0 < r < \eta$. On a

$$\sqrt{(a + r \cos \theta - a)^2 + (b + r \sin \theta - b)^2} < \eta$$

et par suite $|u(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) - u(a, b)| < \varepsilon$. On obtient donc

$$\begin{aligned} & \left| \left[\frac{1}{2\pi} \int_{r^+} u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] - u(a, b) \right| = \\ & = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [u(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) - u(a, b)] d\theta \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) - u(a, b)| d\theta \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{r^+} u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) = u(a, b).$$

3° a) On sait (cf. C. E., Ch. 8, § III, n° 147) qu'il existe une orientation notée E^+ , telle qu'en tout point où il est défini, le vecteur normal soit dirigé vers l'extérieur de E . D'après la formule de GREEN-RIEMANN on a

$$\begin{aligned} & \int_{r^+} \left(v(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - u(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right) dx + \\ & \quad + \left(u(x, y) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - v(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right) dy = \\ & = \int_E \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, y) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - v(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(v(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - u(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \right] \\ & = \int_E \left(u(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) - v(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \right. \\ & \quad \left. - v(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + u(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) \right) dx dy \\ & = \int_E (u(x, y) \Delta v(x, y) - v(x, y) \Delta u(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

d'où la formule (1).

b) Soient u une fonction harmonique dans D , et v la fonction constante de valeur -1 . On a alors

$$\Delta u = \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

et la formule (1) devient

$$\int_F \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) = 0.$$

4° Soit E le complémentaire dans D du disque de rayon r et de centre A . Les fonctions g et u sont harmoniques dans E ; on a alors

$$\int_E (u(x, y) \Delta g(x, y) - g(x, y) \Delta u(x, y)) dx dy = 0.$$

La frontière F de E est la réunion de C et de Γ_r ; en orientant F comme à la question 3° a) et en appliquant la formule (1), on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{F^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) - \right. \\ &\quad \left. - g(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] \\ &= \int_{C^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) - \right. \\ &\quad \left. - g(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] - \\ &\quad - \int_{\Gamma_r^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) - \right. \\ &\quad \left. - g(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] \end{aligned}$$

d'où la formule (3).

b) Pour tout nombre réel positif r tel que Γ_r soit contenu dans D , on a d'après la formule (2)

$$\int_{\Gamma_r^+} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) = 0.$$

La fonction g est constante sur Γ_r , donc

$$\int_{\Gamma_r^+} g(x, y) \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right] = 0.$$

La formule (3) devient

$$\begin{aligned} \int_{r_r^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] = \\ = \int_{c^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) - \right. \\ \left. - g(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right]. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} u(a, b) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{r_r^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{c^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx \right) - \right. \\ \left. - g(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right]. \end{aligned}$$

5° Le point $\left(\frac{aR^2}{\rho^2}, \frac{bR^2}{\rho^2} \right)$ n'appartenant pas à D , la fonction h est définie, continue et différentiable dans D . Pour tout élément (x, y) de D , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= \frac{\frac{\rho^2}{R^2} \left(x - \frac{aR^2}{\rho^2} \right)}{\left(x - \frac{aR^2}{\rho^2} \right)^2 + \left(y - \frac{bR^2}{\rho^2} \right)^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\frac{\rho^2}{R^2} \left[\left(y - \frac{bR^2}{\rho^2} \right)^2 - \left(x - \frac{aR^2}{\rho^2} \right)^2 \right]}{\left[\left(x - \frac{aR^2}{\rho^2} \right)^2 + \left(y - \frac{bR^2}{\rho^2} \right)^2 \right]^2} \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= \frac{\frac{\rho^2}{R^2} \left(y - \frac{bR^2}{\rho^2} \right)}{\left(x - \frac{aR^2}{\rho^2} \right)^2 + \left(y - \frac{bR^2}{\rho^2} \right)^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\frac{\rho^2}{R^2} \left[\left(x - \frac{aR^2}{\rho^2} \right) - \left(y - \frac{bR^2}{\rho^2} \right)^2 \right]}{\left[\left(x - \frac{aR^2}{\rho^2} \right)^2 + \left(y - \frac{bR^2}{\rho^2} \right)^2 \right]^2} \end{aligned}$$

et par suite

$$\Delta h(x, y) = 0.$$

Si (x, y) est un point de C , il existe un nombre réel θ tel que $x = R \cos \theta$ et $y = R \sin \theta$. On a alors

$$g(x, y) = h(x, y) = \frac{1}{2} \text{Log} (R^2 + \rho^2 - 2 \rho R \cos (\theta - \omega))$$

donc g et h coïncident sur C .

D'après la formule (4) on a

$$\begin{aligned} u(a, b) = & \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} u(x, y) \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) dx \right) - \\ & - G(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} u(x, y) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) dx \right) - \\ & - h(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right). \end{aligned}$$

Comme u et h sont harmoniques, on a d'après la formule (1)

$$\begin{aligned} & \int_{C^+} u(x, y) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) dx \right) - \\ & - h(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) = \\ & = \int_D (u(x, y) \Delta h(x, y) - h(x, y) \Delta u(x, y)) dx dy = 0. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que G est nulle sur C , on obtient

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) dx \right) \right].$$

En utilisant la représentation paramétrique de C

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta \end{aligned} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

on obtient

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R \cos \theta, R \sin \theta) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2 \rho R \cos (\theta - \omega)} d\theta.$$

II. 1° En appliquant la formule de GREEN-RIEMANN, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \left[u(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx \right) \right] &= \\ &= \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right)(x, y) \right] dx dy \\ &= \int_D \left[u(x, y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right] dx dy \\ &= \int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right] dx dy \end{aligned}$$

Soient u et v deux solutions du problème de DIRICHLET. La fonction $u - v$ étant nulle sur C , on a

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial(u - v)}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial(u - v)}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right] dx dy = 0$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

On a alors $du = dv$ et par suite $u = v + K$ où K appartient à \mathbf{R} .

La fonction u_1 définie pour tout élément (x, y) de D par $u_1(x, y) = 1$, est une fonction harmonique qui coïncide avec φ_1 sur C . Elle est donc la seule solution du problème. De même, les fonctions u_2, u_3, u_4 définies pour tout élément (x, y) de D par

$$u_2(x, y) = x \quad u_3(x, y) = y \quad u_4(x, y) = xy$$

sont harmoniques et coïncident respectivement avec $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sur C . Elles sont donc les seules solutions du problème de DIRICHLET correspondant.

2° D'après la question I, 5°, s'il existe une solution u , on a nécessairement pour tout élément $(x, y) = (\rho \cos \omega, \rho \sin \omega)$ tel que $0 \leq \rho < R$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(R \cos \theta, R \sin \theta) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\theta - \omega)} d\theta.$$

Soit donc u la fonction définie par cette formule pour les éléments

$$(x, y) = (\rho \cos \omega, \rho \sin \omega)$$

tel que $\rho < R$ et par $u(R \cos \omega, R \sin \omega) = \varphi(R \cos \omega, R \sin \omega)$. Nous allons

expliciter cette fonction et vérifier qu'elle satisfait aux conditions imposées. En effectuant le changement de variable

$$\theta = \omega + \alpha$$

on trouve

$$\begin{aligned} u(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega-\pi}^{\omega+\pi} \frac{R^2(R^2 - \rho^2) \cos^2 \theta}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\theta - \omega)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R^2(R^2 - \rho^2) \cos^2(\omega + \alpha)}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha} d\alpha \\ &= \frac{R^2(R^2 - \rho^2)}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos^2 \omega \cos^2 \alpha + \sin^2 \omega \sin^2 \alpha}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha} d\alpha - \\ &\quad - \frac{R^2(R^2 - \rho^2) \cos \omega \sin \omega}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos \alpha \sin \alpha d\alpha}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha} d\alpha = - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos \alpha d(\cos \alpha)}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha}.$$

Si F est une primitive de la fonction $\frac{u}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha}$, on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos \alpha d(\cos \alpha)}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha} = F(\cos \pi) - F(\cos(-\pi)) = 0.$$

Par suite

$$u(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) = \frac{R^2(R^2 - \rho^2)}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos^2 \omega \cos^2 \alpha + \sin^2 \omega \sin^2 \alpha}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha} d\alpha.$$

En effectuant le changement de variable $t = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ on trouve

$$\begin{aligned} u(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) &= \\ &= \frac{R^2(R^2 - \rho^2)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 \omega \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \sin^2 \omega \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2 dt}{1+t^2} \\ &= \frac{2R^2(R^2 - \rho^2)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 - 1)^2 \cos^2 \omega + 4t^2 \sin^2 \omega}{(t^2 + 1)^2 [(R - \rho)^2 + (R + \rho)^2 t^2]} dt. \end{aligned}$$

D'après la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, il existe des nombres réels K, L, M, N tels que

$$X(t) = \frac{K}{(t^2 + 1)^2} + \frac{L}{t^2 + 1} + \frac{M + Nt}{(R - \rho)^2 + (R + \rho)^2 t^2}.$$

La fonction X étant paire, on a $N = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} X(t) dt &= \int_0^{+\infty} \frac{K dt}{(t^2 + 1)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{L dt}{t^2 + 1} + \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \frac{M dt}{(R - \rho)^2 + (R + \rho)^2 t^2} \\ &= \left[\frac{Kt}{2(t^2 + 1)} + \frac{K}{2} \text{Arc tg } t \right]_0^{+\infty} + [L \text{Arc tg } t]_0^{+\infty} + \\ &\quad + \left[\frac{M}{R^2 - \rho^2} \text{Arc tg } \frac{R + \rho}{R - \rho} t \right]_0^{+\infty} \\ &= K \frac{\pi}{4} + L \frac{\pi}{2} + \frac{M\pi}{2(R^2 - \rho^2)} \end{aligned}$$

et par suite

$$u(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) = R^2(R^2 - \rho^2) \left(\frac{K}{2} + L + \frac{M}{R^2 - \rho^2} \right).$$

On a

$$X(1) = \frac{4 \sin^2 \omega}{4[(R - \rho)^2 + (R + \rho)^2]} = \frac{K}{4} + \frac{L}{2} + \frac{M}{(R - \rho)^2 + (R + \rho)^2}$$

d'où

$$\frac{K}{2} + L = 2 \left[\frac{\sin^2 \omega}{2(\rho^2 + R^2)} - \frac{M}{2(\rho^2 + R^2)} \right] = \frac{\sin^2 \omega - M}{(\rho^2 + R^2)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} u(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) &= R^2(R^2 - \rho^2) \left[\frac{\sin^2 \omega - M}{(\rho^2 + R^2)} + \frac{M}{R^2 - \rho^2} \right] \\ &= \frac{R^2}{R^2 + \rho^2} [(R^2 - \rho^2) \sin^2 \omega + 2 \rho^2 M]. \end{aligned}$$

Pour déterminer M multiplions $X(t)$ par $(R - \rho)^2 + (R + \rho)^2 t^2$ et donnons à t la valeur $i \frac{R - \rho}{R + \rho}$. On trouve

$$M = \frac{\left(-\frac{(R - \rho)^2}{(R + \rho)^2} - 1\right)^2 \cos^2 \omega - 4\left(\frac{R - \rho}{R + \rho}\right)^2 \sin^2 \omega}{\left(-\left(\frac{R - \rho}{R + \rho}\right)^2 + 1\right)^2}$$

$$= \frac{4(R^2 + \rho^2)^2 \cos^2 \omega - 4(R^2 - \rho^2)^2 \sin^2 \omega}{16 R^2 \rho^2}$$

On a alors

$$u(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega) =$$

$$= \frac{R^2}{R^2 + \rho^2} \left[(R^2 - \rho^2) \sin^2 \omega + \frac{(R^2 + \rho^2)^2 \cos^2 \omega - (R^2 - \rho^2)^2 \sin^2 \omega}{2 R^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [(R^2 - \rho^2) \sin^2 \omega + (R^2 + \rho^2) \cos^2 \omega]$$

$$= \frac{1}{2} [R^2 + \rho^2(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega)].$$

On obtient finalement pour tout élément (x, y) intérieur à D

$$u(x, y) = \frac{R^2 + x^2 - y^2}{2}.$$

Si (x, y) appartient à C on pose

$$u(x, y) = x^2.$$

La fonction ainsi obtenue est continue car si $x^2 + y^2 = R^2$, on a

$$\frac{1}{2}(R^2 + x^2 - y^2) = x^2$$

et on vérifie aisément qu'elle est harmonique dans D . Par suite, elle est l'unique solution du problème de DIRICHLET dans ce cas.