

CALCUL INTEGRAL

I°/ Définition :

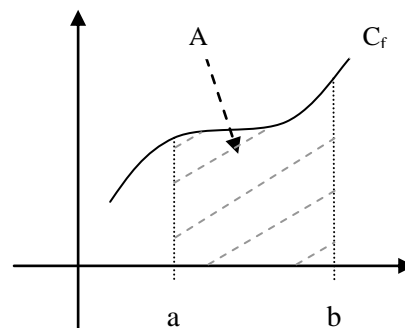
On a démontré qu'une fonction f continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives (c'est-à-dire des fonctions admettant pour dérivé f sur I .)

Si l'une des primitives est F , toutes les primitives de f sur I s'écrivent G telles que $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante quelconque.

Le nombre $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$) est donc indépendant de k , ce note $[F(t)]_a^b$ ou encore $\int_a^b f(t) dt$ et s'appelle l'intégrale, de a à b , de la fonction continue f (t est la variable sur $[a; b]$.)

II°/ Interprétation géométrique d'une intégrale :

Le nombre $\int_a^b f(t) dt$ représente l'aire algébrique de la courbe C_f située dans le domaine délimité par les deux droites d'équations $x = a$, $x = b$, C_f sur $[a; b]$ et l'axe des abscisses.



III°/ Propriétés immédiates :

1°/ Relation de Chasles :

Soit c dans $[a; b]$ et f une fonction continue sur $[a; b]$ alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

$A \qquad = \qquad A_1 \quad + \quad A_2$

2°/ Nullité d'une intégrale :

$$\int_a^a f(t) dt = 0$$

Conséquence :

$$\int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt = 0$$

donc

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

3°/ Linéarité :

Soient f et g deux fonctions continues sur [a ; b] et λ et μ deux réels quelconques alors :

$$\int_a^b \lambda.f(t) + \mu.g(t) dt = \lambda. \int_a^b f(t) dt + \mu. \int_a^b g(t) dt$$

Démonstration :



4°/ Inégalité :

Pour toutes fonctions f et g continues sur [a ; b] :

- si $f \geq 0$ sur [a ; b] alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$
- si $f \leq 0$ sur [a ; b] alors $\int_a^b f(t) dt \leq 0$
- si $f \geq g$ sur [a ; b] alors $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$

5°/ Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur [a ; b]

Soient m et M deux réels tels que :

$$\forall t \in [a ; b] \text{ si } m \leq f(t) \leq M \text{ alors } m.(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M.(b-a)$$

Ou encore :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t) dt \leq M$$

Vocabulaire :

La valeur $\frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t) dt$ s'appelle la valeur moyenne de f sur [a ; b]

Démonstration :



IV°/ Intégration par parties :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions admettant des dérivées continues sur $[a ; b]$ (f et g sont dites de classe C^1).
Et f' et g' les dérivées respectives de f et g sur $[a ; b]$.

$$\int_a^b f(t).g'(t) dt = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t).g(t) dt$$

V°/ Exercices :

Calculs d'intégrales simples :

$$\bullet I = \int_{-1}^4 x^3 + 3.x^2 - 1 dx$$

$$\bullet I = \int_0^{\pi} \cos x dx$$

$$\bullet I = \int_1^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt$$

$$\bullet I = \int_{-1}^{\ln 2} 1 - 5.e^x dx$$

Intégration par parties :

$$\bullet I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} x.e^x dx$$

$$\bullet I = \int_{-1}^0 (-2.x + 1).e^x dx$$

$$\bullet I = \int_e^{2e} x . \ln x^3 dx$$

$$\bullet I = \int_0^1 x^2 . e^x dx$$

$$\bullet I = \int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\bullet I = \int_{-1}^0 (x+1)^2 . e^{-x} dx$$