Combinaisons. Binôme de Newton

Factorielles

- On pose $0! = 1$ et pour tout entier naturel non nul $n! = 1 \times 2 \times \ldots (n-1) \times n$.
- Pour tout entier naturel n, on a $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Les premières factorielles

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 2 \quad 3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720 \quad 7! = 5040.$$

Combinaisons

Soient n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments. Pour tout entier naturel p, une **combinaison** à p éléments de E est une partie à p éléments de E.

On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments. On a donc $\binom{n}{0} = 1$ et si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

Ensuite, pour n et p entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$, le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n élément est

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-p+1)}^{\text{p facteurs}}}{p!}$$

Propriétés des combinaisons

- Pour tout entier naturel n, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Pour n et p entiers naturels tels que $n \geq 1$ et $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
- Pour n et p entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n-1$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel non nul n,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Ainsi,

- $(a+b)^1 = a + b$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$