Formes indéterminées

Quand on calcule des limites, les formes suivantes sont indéterminées :

Formes indéterminées		
$0 \times \infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$
$+\infty - \infty$		

Indéterminations levées par le cours

Polynômes, fonctions rationnelles

• La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
• La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Nombres dérivés
Les limites suivantes sont fournies dans le cours. Elles fournissent toutes un nombre dérivé.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \text{ ou } \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Théorèmes de croissances comparées

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$. Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et pour tout réel $a > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n} = +\infty$.
• $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$. Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ et pour tout réel $a > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n a^x = 0$.
• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$. Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.
• $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$. Pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n\ln(x) = 0$.

Quelques techniques usuelles pour lever des indéterminations

Mise en facteur du terme prépondérant

Exemple 1. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 - 1 - e^x$.

– On classe les termes **par ordre décroissant de prépondérance** : $-e^x + x^3 - 1$
– On met **le prépondérant en facteur** : $-e^x\left(1 - \dfrac{x^3}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}\right)$
– Puisqu'on a mis le terme prépondérant en facteur, la parenthèse commence par 1 et continue par des termes tendant vers 0 : $\dfrac{x^3}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ldots$ La parenthèse tend donc vers 1 et l'expression vers $-\infty$.

Exemple 2. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}}$.

Limite en $+\infty$. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}} = \dfrac{x^2-1}{e^x+1+e^{-x}} = \dfrac{x^2}{e^x}\times\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+e^{-x}+e^{-2x}} = \dfrac{1}{e^x/x^2}\times\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+e^{-x}+e^{-2x}}$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ et de même $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$. D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+e^{-x}+e^{-2x}} = 1$.
D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x/x^2} = 0$.

Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}} = 0$. La mise en facteur des prépondérants a permis de faire apparaître le face à face $\dfrac{e^x}{x^2}$ en $+\infty$.

Limite en $-\infty$. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}} = \dfrac{x^2-1}{e^{-x}+1+e^x} = \dfrac{x^2}{e^{-x}}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+e^x+e^{2x}} = x^2e^x\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+e^x+e^{2x}}$,

et on trouve $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{1+e^x+e^{-x}} = 0$.

Exemple 3. Trouver $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x}-x$.

On met le prépondérant en facteur dans $\sqrt{4x^2+x}$ pour comprendre que $\sqrt{4x^2+x}$ vaut environ $\sqrt{4x^2}=2x$ quand x est grand et donc que l'expression vaut environ x.

Pour $x>0$, $\sqrt{4x^2+x}-x=\sqrt{4x^2}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-x=2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-x=x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1\right)\dots \lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}-x=+\infty$.

Utilisation d'une quantité conjuguée

Exemple 4. Trouver $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$.

Quand x est grand, $\sqrt{x^2+x}$ vaut environ $\sqrt{x^2}=x$. Aucun des termes $\sqrt{x^2+x}$ et x ne va l'emporter devant l'autre. Il faut maintenant voir plus explicitement le face à face $\sqrt{x^2}-x=x-x$ et pour cela élever au carré $\sqrt{x^2+x}$ et x. C'est le but de la multiplication du numérateur et du dénominateur par la quantité conjuguée.

Pour $x>0$, $\sqrt{x^2+x}-x=\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$.

L'indétermination était $+\infty-\infty$. Elle est maintenant $\frac{\infty}{\infty}$. La mise en facteur des prépondérants au numérateur et au dénominateur permet alors de voir que l'expression vaut environ $\frac{x}{2x}$.

Pour $x>0$, $\dfrac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\dfrac{x}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\dots \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\dfrac{1}{2}$.

Utilisation d'un taux d'accroissement

Exemple 5. Trouver $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x-x^2}$.

L'indétermination est $\frac{0}{0}$ qui est l'indétermination typique dans les calculs de nombre dérivé $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et doit donc éveiller les soupçons. Un certain stock de ces nombres dérivés sont fournis une bonne fois pour toutes en cours. Ici, on utilise $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ qui donne la dérivée de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 (ou la dérivée de $x\mapsto\ln(x)$ en 1).

Pour $x>-1$ et $x\neq 0$ et $x\neq 1$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x-x^2}=\dfrac{\ln(1+x)}{x}\times\dfrac{1}{1-x}\dots \lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x-x^2}=1$.

Exemple 6. Trouver $\lim_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}$.

De nouveau $\frac{0}{0}$. On fait apparaître le taux d'accroissement de la fonction sinus en $\frac{\pi}{6}$.

Pour $x\neq\frac{\pi}{6}$, $\dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{\sin(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$.

Quand x tend vers $\frac{\pi}{6}$, $\dfrac{\sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$ tend vers $\sin'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dots \lim_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.