Mathématiques aux élèves www.devoir.tn	Arithmétiques	
	Exercices	4ème inf

Exercice 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par : $\begin{cases} a = n^3 + 2n^2 - 3n \\ b = 2n^2 - n - 1 \end{cases}$.

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4. a. On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

Exercice 2

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$. On note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les cas suivants : n=1, n=11, n=15.

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. a. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

b. Déterminer les entiers naturels n et k' tels que $5n + 2 = 7k'$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7. Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Exercice 3

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(bc - a ; b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3).$$

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels *n* tels que $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

Exercice 4

Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a=n^3-n^2-12n$ et $b=2n^2-7n-4$.

1. Montrer, après factorisation, que *a* et *b* sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2. On pose $\alpha=2n+1$ et $\beta=n+3$. On note *d* le PGCD de α et β.

a. Calculer $\beta-2\alpha$

b. Démontrer que *d* est un diviseur de 5.

c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.

3. Montrer que $2n+1$ et *n* sont premiers entre eux.

4. a. Déterminer, suivant les valeurs de *n* et en fonction de *n*, le PGCD de *a* et *b*.

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 5

1. On considère l'équation (E) : $8x+5y=1$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit *N* un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\ ;\ b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$.

a. Montrer que le couple $(a\ ;\ b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de *N* par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x+5y=100$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIII$^{\text{ème}}$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?