EXERCICES RÉDIGÉS SUR LA CONTINUITÉ ET LA DÉRIVABILITÉ

Exercice 1 *Quelques résultats théoriques - Règles opératoires sur les fonctions dérivables*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un point à l'intérieur de I.

Démontrer que si f et g sont des fonctions dérivables en a alors :

1. $f + g$ est dérivable en a.
2. fg est dérivable en a
3. Si g est non nulle au voisinage de a alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a.

Exercice 2 *Dérivation d'une composition de fonctions dérivables*

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$.

Démontrer que la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)\, v'(u(x))$$

Exercice 3 *Un exemple de fonction dérivable à dérivée non continue*

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

Montrer que :

1. f est continue en 0.
2. f est dérivable en 0.
3. f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4 *Un petit théorème de point fixe*

Soit f une fonction continue et définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Démontrer que f admet (au moins) un point fixe dans $[0 ; 1]$.

Exercice 5 *Où l'on applique le théorème de bijection à la dérivée*

Démontrer que l'équation

$$x^4 + x^3 - x + 1 = 0$$

n'a pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *Une limite classique*

On rappelle que $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Étudier la limite suivante : $$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$$

Exercice 7 *Étude d'une fonction irrationnelle*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle des asymptotes horizontales ?
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

Exercice 8 *Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$*

Démontrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et préciser leur fonction dérivée.

On rappelle que : $$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Exercice 9 *Une bijection de $\mathbb{R}$ sur]-1 ; 1[*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

1. Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de f.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;\,1[$.

Exercice 10 *On ne peut être dépassé par plus lent que soit.*

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [0\,;\,1]$ telles que : $f(0) = g(0)$ et $f' \leqslant g'$ sur I.

Démontrer que $f \leqslant g$ sur I. (On pourra étudier les variations de $g - f$)

Exercice 11 *Utilisation de l'accroissement moyen pour déterminer une limite*

1. On se propose d'étudier la limite en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par :

   $$f(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} \qquad \text{pour } x \neq \frac{\pi}{2}.$$

   Vérifier que l'on est en présence d'une forme indéterminée.

   En considérant l'accroissement moyen de la fonction cosinus en $\dfrac{\pi}{2}$, déterminer la limite ci-dessus.

2. Par une méthode analogue, étudier les limites de f en a dans les cas suivants :

   $$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad \text{en } a = 0$$

   $$f(x) = \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \text{en } a = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 12 *Deux fonctions continues qui commutent sur un segment ont un point fixe commun*

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $I = [0, 1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'alors, il existe un réel ℓ de $[0, 1]$ tel que $f(\ell) = g(\ell)$.

1. Question préliminaire

Soit φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.

Démontrer qu'il existe un réel $a \in [0, 1]$ tel que :

$$\varphi(a) = 0$$

On a donc $f(a) = a$. On dit que a est un point fixe de f.

Dans la suite du problème (questions 2, 3 et 4),

on suppose qu'il n'existe pas de réel ℓ dans $[0, 1]$ tel que $f(\ell) = g(\ell)$ et on déduit une contradiction.
(Il s'agit d'un raisonnement par l'absurde).

2. On note h la fonction définie sur I par $h = f - g$.
   Démontrer que h est de signe constant.

3. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

   a. Démontrer la suite (u_n) est bornée.
   b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point fixe de f. (C'est à dire : $f(u_n) = u_n$)
   c. En déduire que la suite (u_n) est monotone.
   d. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$. (On ne cherchera pas à calculer ℓ)

4. Dans cette question, nous allons en déduire une contradiction
   a. Démontrer que $f(\ell) = \ell$
   b. Démontrer que $g(\ell) = \ell$
   c. En déduire une contradiction.

5. Conclure.

Exercice 1 *Quelques résultats théoriques - Règles opératoires sur les fonctions dérivables*

Par hypothèse, les accroissements moyens $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$ admettent des limites lorsque h tend vers 0. On note $f'(a)$ et $g'(a)$ ces limites respectives.

1. On a :

$$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

Donc $\dfrac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}$ admet une limite égale à $f'(a)+g'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Ce qui prouve que $f+g$ est dérivable en a (et de plus, $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$).

2. On a :

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h}&=\frac{f(a+h)g(a+h)+f(a)g(a)}{h}\\&=\frac{[f(a+h)-f(a)]g(a+h)+f(a)[g(a+h)-g(a)]}{h}\\&=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a)+f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h}$ admet une limite égale à $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Ce qui prouve que fg est dérivable en a (et de plus, $(fg)'(a)=(f'g+fg')(a)$).

3. Soit V un voisinage de a sur lequel g est non nulle. Pour $h\in V$, on a :

$$\frac{\dfrac{1}{g(a+h)}-\dfrac{1}{g(a)}}{h}=-\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\times\frac{1}{g(a)g(a+h)}$$

Or, g est continue en a puisque dérivable en a, donc $\lim\limits_{h\to 0} g(a+h)=g(a)$.

Donc $\dfrac{\dfrac{1}{g(a+h)}-\dfrac{1}{g(a)}}{h}$ admet une limite égale à $-\dfrac{g'(a)}{[g(a)]^2}$ lorsque h tend vers 0.

Ce qui prouve $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a (et de plus, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a)=-\dfrac{g'(a)}{[g(a)]^2}$)

Exercice 2 *Dérivation d'une composition de fonctions dérivables*

Soit $x_0\in I$.

On écrit :

$$\frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0}=\frac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}\times\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$$

Posons $y_0=u(x_0)$ et $y=u(x)$:

$$\frac{(v\circ u)(x)-(v\circ u)(x_0)}{x-x_0}=\frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0}\times\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$$

Or, v étant dérivable en y_0, on a :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} = v'(y_0)$$

Et u étant dérivable en x_0, on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$$

D'où : $$\lim_{x \to x_0} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) \times v'(y_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

C'est-à-dire : $$(v \text{ o } u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 \in I$, on en déduit la dérivabilité de v o u sur I et

$$(v \text{ o } u)'(x) = u'(x)\ v'(u(x))$$

Exercice 3 *Un exemple de fonction dérivable à dérivée non continue*

1. Nous avons, pour tout réel $x \neq 0$: $$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1$$

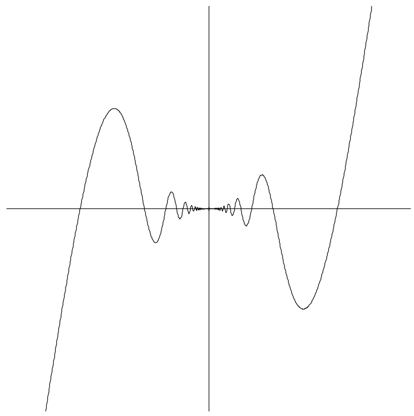
   Donc : $$x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2$$

   D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :

   $$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0 \quad (\text{puisque } \lim_{x \to 0} x^2 = 0)$$

   Donc : $$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

   Donc f est continue en 0.



2. Montrons que f est dérivable en 0 :

   Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons : $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Or : $$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

   (Même type de preuve que ci-dessus. On écrit : $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$)

   Donc : $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

   Ce qui signifie que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

3. Montrons que f' n'est pas continue en 0.

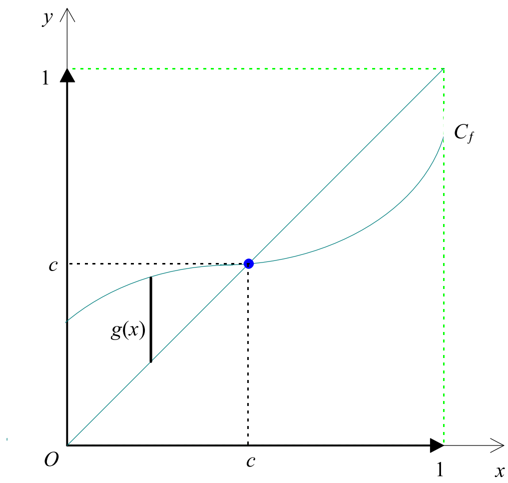
   En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

   $$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Nous savons que $\lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, mais la quantité $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0. (Voir leçon sur la continuité)

   Donc f' n'a pas de limite en 0, ce qui signifie qu'elle n'est pas continue en 0.

Exercice 4 *Un petit théorème de point fixe*



Considérons la fonction g définie par : $g(x) = f(x) - x$

L'équation $f(x) = x$ est ainsi équivalente à $g(x) = 0$.

Cette fonction g est continue sur $[0 ; 1]$ (différence de fonctions continues) et

$$g(0) = f(0) \geqslant 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$$

Le réel $\lambda = 0$ est bien intermédiaire entre $g(0)$ et $g(1)$, donc d'après le théorème du même nom, il existe un réel $c \in [0 ; 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(c) = c$$

Donc f admet (au moins) un point fixe dans $[0 ; 1]$.

Exercice 5 *Où l'on applique le théorème de bijection à la dérivée*

Définissons la fonction f, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x^4 + x^3 - x + 1$$

La fonction étant polynomiale, elle est indéfiniment dérivable et on a :

On dérive deux fois afin de se ramener à une fonction polynôme de degré 2 (on sait étudier son signe)

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x + 1)$$

Nous en déduisons les variations de la fonction f' :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
Signe de f''		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
Variations de f'	$-\infty$	↗	$-\frac{3}{4}$	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

La fonction f' est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $f'(0) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

D'après le théorème de bijection, il existe donc un réel $\alpha \in]0 ; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

On en déduit que f' est négative sur $]-\infty ; \alpha]$ et positive sur $[\alpha ; +\infty[$.

La fonction f admet donc, sur $\mathbb{R}$, un minimum en α. Il nous reste à prouver que $f(\alpha)$ est strictement positif.

Pour cela, encadrons α. On sait que $f'(0) = -1$ et $f'(1) = 6$, donc $\alpha \in]0 ; 1[$. On en déduit :

$$0 < \alpha^4 < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha^3 < 1 \quad \text{et} \quad 0 < -\alpha + 1 < 1$$

En sommant ces trois encadrements : $0 < \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha + 1 < 3$

C'est-à-dire : $0 < f(\alpha) < 3$

Le minimum de f, sur $\mathbb{R}$, est strictement positif, donc f l'est aussi.

Par conséquent f ne s'annule pas. Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *Une limite classique*

Si $n = 0$, alors il est clair que : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)} = 0$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit : $\dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n \times \dfrac{\sin(nt)}{nt} \times \dfrac{t}{\sin(t)}$

On sait que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin(t)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin(nt)}{nt} = 1$ d'où :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)} = n$

Exercice 7 *Étude d'une fonction irrationnelle*

Remarque : $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, la fonction f est effectivement bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. Limite en $-\infty$

   On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

   D'où, par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$

   Finalement : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

   La courbe C_f n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

   Limite en $+\infty$

   Pour lever l'indétermination (du type "$\infty - \infty$"), on utilise la transformation d'écriture suivante :

$$\sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

Dans le dernier quotient, on a encore une indétermination du type "∞/∞". On écrit, pour $x > 0$:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

On en déduit facilement : $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

La courbe C_f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \frac{1}{2}$.

2. On étudie la différence : $$f(x) - y = \sqrt{x^2+x+1} + x + \frac{1}{2}$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, on a une indétermination du type "$\infty - \infty$". On procède comme précédemment :

$$\sqrt{x^2+x+1} + x + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} + \frac{1}{2}$$

Et pour $x < 0$, on obtient (attention $\sqrt{x^2} = -x$ dans ce cas) :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} + \frac{1}{2} = -\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} + \frac{1}{2}$$

D'où : $$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = 0$$

La droite Δ d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est bien asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

Exercice 8 *Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$*

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

D'où, pour $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)(\cos h - 1)+\cos(x)\sin(h)}{h} = \frac{\cos(h)-1}{h}\sin(x) + \frac{\sin(h)}{h}\cos(x)$$

Or, nous savons que : $$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$$

L'accroissement moyen $\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ admet donc une limite lorsque h tend vers 0 et :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x)$$

On a prouvé que la fonction sinus est dérivable en x et que :

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

Ceci étant valable pour tout réel x, on en déduit que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée la fonction cosinus.

On peut en déduire rapidement la dérivabilité de la fonction cosinus. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que :

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

D'après le théorème de dérivation d'une composée, on obtient :

$$\cos'(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$$

Exercice 9 *Une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1 ; 1[$*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1. Il est clair pour tout réel x, on a :

$$0 \leqslant |x| < 1 + |x|$$

En divisant par $1 + |x|$ (qui est strictement positif), on obtient :

$$0 \leqslant |f(x)| < 1$$

Ce qui prouve que f est bornée (par -1 et 1) sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0 (à savoir $\mathbb{R}$) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = \frac{(-x)}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -f(x)$$

Ce qui prouve que la fonction f est impaire.

Sa représentation graphique est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{1+|h|}$

D'où : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1$

La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

4. Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+$, on a :

$$f(y) - f(x) = \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}$$

D'où l'implication suivante : $0 \leqslant x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

<u>Remarque</u> : on pouvait aussi calculer la dérivée f'. Sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

Même conclusion que ci-dessus.

Comme f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle l'est sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (comme quotient u/v de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, v ne s'annulant pas)

Et enfin, on montre facilement que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

Bilan : f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image $]-1 ; 1[$.

Exercice 10 *On ne peut être dépassé par plus lent que soit.*

Calculons la dérivée de la fonction $g - f$: $\quad (g - f)' = g' - f'$

Comme $f' \leqslant g'$ sur I, on a : $g' - f' \geqslant 0$ sur I. La fonction $g - f$ est donc croissante sur I. Ce qui signifie :

$$\text{pour tous réels } u \text{ et } v \text{ de } I : u < v \Rightarrow (g - f)(u) \leqslant (g - f)(v)$$

C'est-à-dire : $\quad$ pour tous réels u et v de I : $u < v \Rightarrow g(u) - f(u) \leqslant g(v) - f(v)$

En particulier avec $u = 0$, on a : $\quad$ pour tout v de I : $g(0) - f(0) \leqslant g(v) - f(v)$

Et comme $f(0) = g(0)$: $\quad$ pour tout v de I : $0 \leqslant g(v) - f(v)$

C'est-à-dire : $\quad$ pour tout v de I : $0 \leqslant g(v) - f(v)$

Ce qui signifie : $\quad f \leqslant g$ sur I

Exercice 11 *Utilisation de l'accroissement moyen pour déterminer une limite*

1. On est en présence d'une forme indéterminée car le numérateur et le dénominateur tendent vers 0.

   On sait que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc elle l'est *a fortiori* en $\frac{\pi}{2}$) de dérivée la fonction $x \mapsto -\sin(x)$

   On a donc : $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

2. On considère la fonction φ définie sur $[-1, +\infty[$ par :

   $$\varphi(x) = \sqrt{1 + x}$$

   La fonction φ est dérivable sur $]-1, +\infty[$, donc elle l'est a fortiori en 0, donc :

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(0)$$

   Or, φ est de la forme $\varphi = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 1 + x$, donc $\varphi' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, ce qui donne :

   $$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}}$$

   Et en particulier : $$\varphi'(0) = \frac{1}{2}$$

   On en déduit : $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

   La fonction tangente est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et : $\quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

   Donc : $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

Exercice 12 *Deux fonctions continues qui commutent sur un segment ont un point fixe commun*

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $I = [0, 1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'alors, il existe un réel ℓ de $[0, 1]$ tel que $f(\ell) = g(\ell)$.

1. Cette fonction φ est continue sur I (différence de fonctions continues) et :

$$\varphi(0) = f(0) > 0$$

$$\varphi(1) = f(1) - 1 < 0$$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $a \in [0 ; 1]$ tel que $\varphi(a) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(a) = a$$

   Donc f admet (au moins) un point fixe a dans $[0 ; 1]$

2. Cette fonction h est continue sur I (différence de fonctions continues).

   Si h n'était pas de signe constant, on pourrait trouver des réels α et β dans $[0, 1]$ tels que :

$$h(\alpha) \leqslant 0 \text{ et } h(\beta) \geqslant 0$$

   Du théorème des valeurs intermédiaires, on déduirait l'existence d'un réel c compris entre α et β tel que :

$$h(c) = 0$$

   Ce qui est contraire à l'hypothèse.

   Donc h est de signe constant.

3. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

   a. Comme $u_0 \in I$ et g est à valeurs dans I, la suite (u_n) est bien définie d'où :

$$u_n \in I, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

   b. Considérons la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : f(u_n) = u_n$$

   - Comme $u_0 = a$ est un point fixe de f, on a $\wp(0)$. La propriété $\wp$ est donc initialisée en 0.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Alors :

$$f(u_{n+1}) = f(g(u_n)) \overset{f\circ g = g\circ f}{=} g(f(u_n)) \overset{\wp(n)}{=} g(u_n) = u_{n+1}$$

     D'où $\wp(n + 1)$.

     La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang n.

   Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $\wp$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \text{ est un point fixe de } f$$

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, examinons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n \overset{3.b.}{=} g(u_n) - f(u_n) = h(u_n)$$

   Or, d'après la question 2., h est de signe constant, donc la suite (u_n) est monotone.

   d. La suite (u_n) est monotone est bornée par 0 et 1. Dans tous les cas, elle converge donc vers un réel $\ell \in I$.

4. a. D'après la question 3.b., on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_n$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$$

Or, f est continue en ℓ donc $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, d'où :

$$f(\ell) = \ell$$

b. Par définition, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} g(u_n)$$

Or, g est continue en ℓ donc $\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = g(\ell)$, d'où :

$$g(\ell) = \ell$$

c. On a donc : $$h(\ell) = f(\ell) - g(\ell) = \ell - \ell = 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse faite avant la question 2.

5. L'hypothèse en question est donc fausse. Par conséquent :

$$\text{il existe un réel } \ell \text{ dans } I \text{ tel que } f(\ell) = g(\ell)$$