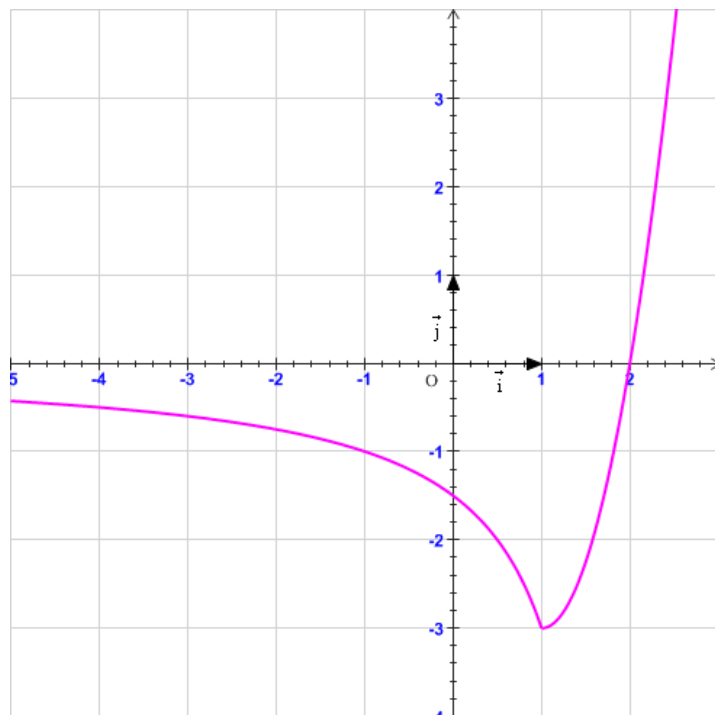


**Exercice n°1 : ©**

La figure ci – contre est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

On note que  $(\zeta_f)$  admet au voisinage de  $-\infty$  une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ , et au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Pour chaque question indiquer la ou les réponses exactes :



1. Soit  $h$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , de même signe que  $f$  et telle que pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) \leq h(x)$ . On a alors :

a)  $\lim_{-\infty} h = -\infty$

b)  $\lim_{-\infty} h = 0$

c)  $\lim_{+\infty} h = +\infty$

2. Soit  $g = \frac{1}{f}$ . On a alors :

a)  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  ; b)  $g$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  ; c)  $\lim_{-\infty} g = -\infty$  ; d)  $\lim_{+\infty} g = -\infty$

e)  $(\zeta_g)$  admet une asymptote verticale.

3. Soit  $k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $k(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$ . On a alors :

a)  $\lim_{+\infty} f \circ k = -3$  ; b)  $\lim_{+\infty} k \circ f = 1$  ; c)  $\lim_{-\infty} f \circ k = -3$  ; d)  $\lim_{0^+} f \circ k = +\infty$  ; e)  $\lim_{0^-} f \circ k = -\infty$

**Exercice n°2 :**

1. Soit  $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, 1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$ .

b) Chercher  $\lim_0 f$ .

c) Chercher  $\lim_{+\infty} f$  et  $\lim_{-\infty} f$ .

2. Soit  $g : x \mapsto \frac{x + \sin x}{2 - \sin x}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

a) Montrer que : 
$$\begin{cases} \forall x > 1, \frac{x-1}{3} \leq g(x) \leq x+1 \\ \forall x < -1, x-1 \leq g(x) \leq \frac{x+1}{3} \end{cases}$$

b) Chercher  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g$

### Exercice n°3 :

A. Montrer que pour tout réel  $a \in [0, 1]$ , on a  $\sqrt{a} \geq a$ .

B. On s'intéresse aux fonctions  $f$  vérifiant les quatre conditions suivantes :

1. La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  ;
2.  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$  ;
3. la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  ;
4. pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $f(x) \leq x$ .

a) Montrer que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 1 - \sqrt{1-x}$  satisfait aux conditions précédentes.

b) En déduire que pour tout  $k \in [0, 1]$ , l'équation  $g(x) = k$  a une unique solution dans  $[0, 1]$ .

c) Résoudre cette équation lorsque  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

d) Cette fonction  $g$  est-elle dérivable en 1 ?

e) Trouver un polynôme du second degré  $P$  vérifiant les quatre conditions précédentes.

*Question subsidiaire :* La fonction  $j$  définie par  $j(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  vérifie-t-elle les quatre conditions ?

### Exercice n°4 : ©

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la fonction  $f_n$  sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  par :  $f_n(x) = \tan x - x - n$ .

1. Soit  $n$  un entier naturel fixé.

a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f_n(x)$ .

b) Etudier le sens de variations de la fonction  $f_n$ .

c) Démontrer que l'équation d'inconnue  $x$ ,  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ . On note  $\alpha_n$  cette solution.

d) Donner, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $f_n(x)$ .

2. La question 1. (c) permet de définir la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

a) Justifier que cette suite est bornée.

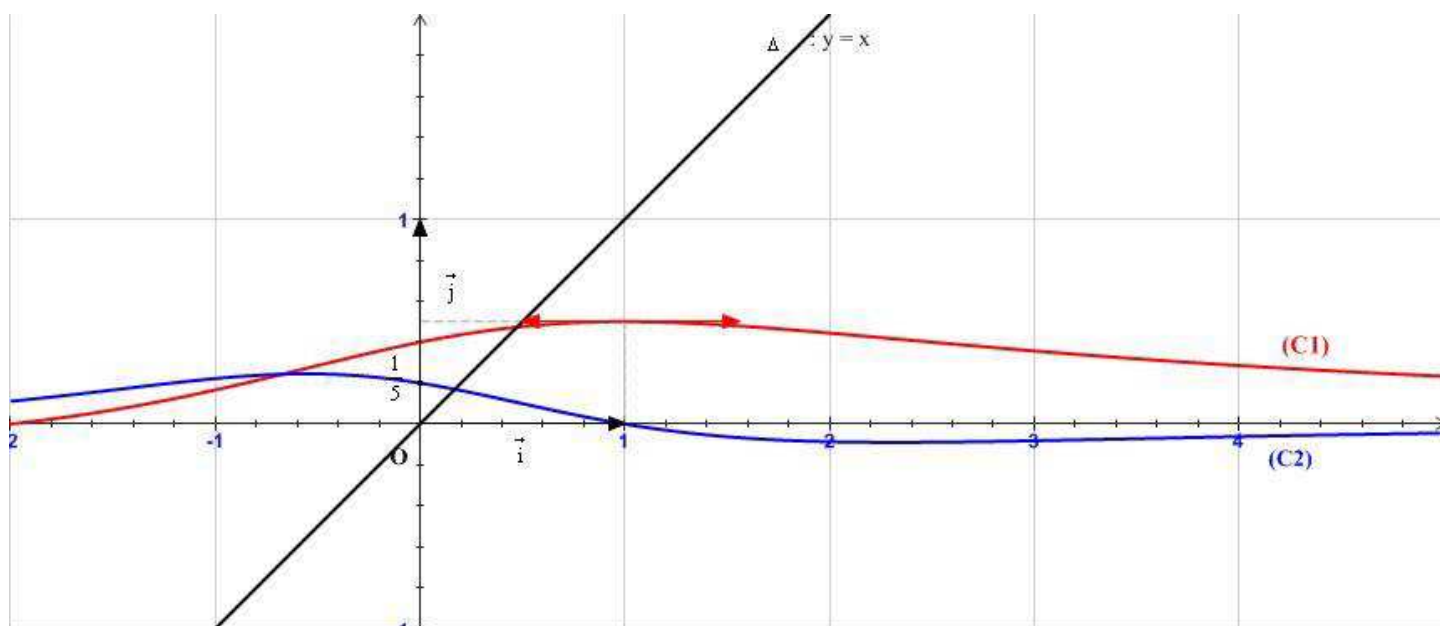
b) Calculer  $f_n(\alpha_{n+1})$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

c) En déduire que la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

d) Déterminer la limite de  $\tan(\alpha_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

e) Prouver que la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Quelle est sa limite ?

### Exercice n°5 :



Dans la figure ci-dessus, on a représenté deux courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  définies et continues sur  $[-2, +\infty[$  ayant toutes les deux la droite d'équation  $y = 0$  comme asymptote au voisinage de  $+\infty$ .

Les deux courbes sont celles d'une fonction  $f$  et sa dérivée  $f'$ .

#### I. Lecture graphique :

En utilisant le graphique, répondre à chacune des questions suivantes :

1) Justifier que  $(C_1)$  est la courbe représentative de  $f$ .

2) a) Déterminer chacune des limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{2x-2}$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2-5f(x)}$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Prouver que l'équation  $f(x) = x$  admet sur  $[0, 1]$  une solution unique  $\alpha$ .

b) Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  appartenant à  $[0, 1]$ , on a :  $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{5}|b - a|$ .

## II. Etude d'une suite :

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 \in [0, 1]$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .

2. Prouver que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|u_n - \alpha|$ .

3. Démontrer alors par récurrence que  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$  ; puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

4. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $n\alpha - \frac{5}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] \leq S_n \leq n\alpha + \frac{5}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$

b) Dédurre  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$ .

## Exercice n°6 : ©

On définit la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, \pi^2]$  par :  $f(x) = \cos \sqrt{x}$

1. a) Vérifier que pour tout réel  $x \in [0, \pi^2]$ ,  $f(x) - 1 = -2 \sin^2 \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right)$

b) Démontrer que  $f$  est dérivable en zéro et donner  $f'(0)$

2. a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $[0, \pi^2]$  et calculer  $f'(x)$ .

b) Etudier le sens de variation de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variation.

3. a) Résoudre dans  $[0, \pi^2]$  l'équation :  $f(x) = 0$ .

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant  $f$  au point d'abscisse  $\frac{\pi^2}{4}$ .

**Exercice n°7:** ©

On considère une fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que :  $h(1) = 0$  et  $h'(x) = \frac{1}{x}$

On pose  $F(x) = h\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ .

- 1- Montrer que  $F$  est définie, dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $F'(x)$ .
- 2- Montrer que  $F$  est une fonction impaire.
- 3- Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+$  ;  $F(x) \leq x$ .

Exercice n°1 :

Reponses	Commentaires
<p>4. Soit <math>h</math> une fonction définie sur <math>\mathbb{R}</math>, de même signe que <math>f</math> et telle que pour tout réel <math>x</math>, on a :</p> <p><math>f(x) \leq h(x)</math>. On a alors :</p> <p><math>\lim_{-\infty} h = 0</math></p> <p><math>\lim_{+\infty} h = +\infty</math></p>	<p><math>\forall x \in ]-\infty, 2]</math>, on a : <math>f(x) \leq h(x) \leq 0</math></p> <p><math>\lim_{-\infty} f = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{-\infty} h = 0}</math></p> <p><math>\forall x \in [2, +\infty[</math>, on a : <math>0 \leq f(x) \leq h(x)</math></p> <p><math>\lim_{+\infty} f = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{+\infty} h = +\infty}</math></p>
<p>5. Soit <math>g = \frac{1}{f}</math>. On a alors :</p> <p><math>g</math> est définie sur <math>\mathbb{R} \setminus \{2\}</math></p> <p><math>\lim_{-\infty} g = -\infty</math></p> <p><math>(\zeta_g)</math> admet une asymptote verticale</p>	<p><math>f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2</math> donc <math>g = \frac{1}{f}</math> est définie sur <math>\mathbb{R} \setminus \{2\}</math></p> <p><math>\lim_{-\infty} f = 0^- \Rightarrow \lim_{-\infty} g = \lim_{-\infty} \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty</math></p> <p><math>\lim_{2^-} g = \lim_{2^-} \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty</math></p> <p><math>\lim_{2^+} g = \lim_{2^+} \frac{1}{f} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> La droite d'équation <math>x = 2</math> est une asymptote verticale à <math>(\zeta_g)</math></p>
<p>6. Soit <math>k</math> la fonction définie sur <math>\mathbb{R}^*</math> par : <math>k(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}</math>. On a alors :</p> <p><math>\lim_{+\infty} f \circ k = -3</math></p> <p><math>\lim_{+\infty} k \circ f = 1</math></p> <p><math>\lim_{0^+} f \circ k = +\infty</math></p>	<p><math>\lim_{+\infty} k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right)}{x} = 1</math></p> <p><math>\lim_{1^-} f = f(1) = -3 \Rightarrow \boxed{\lim_{+\infty} f \circ k = -3}</math></p> <p><math>\lim_{+\infty} f = +\infty</math> et <math>\lim_{+\infty} k = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{+\infty} k \circ f = 1}</math></p> <p><math>\lim_{0^+} k = +\infty</math> et <math>\lim_{+\infty} f = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{0^+} f \circ k = +\infty}</math></p>

### Exercice n°4 :

$$f_n(x) = \tan x - x - n, x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$1. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \underbrace{\tan x}_{+\infty} - \underbrace{x}_{\frac{\pi}{2}} - n = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \underbrace{\tan x}_{-\infty} - \underbrace{x}_{\frac{\pi}{2}} - n = -\infty$$

$$\text{b) } f_n \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \text{ et on a : } f_n'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0, \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

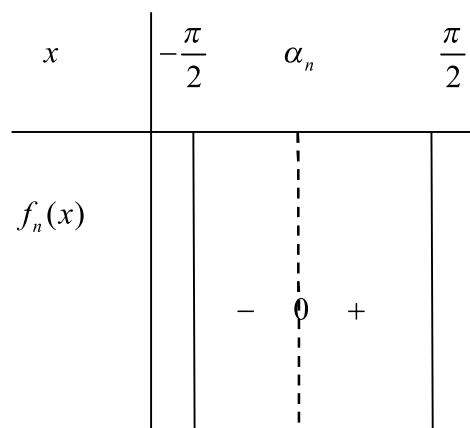
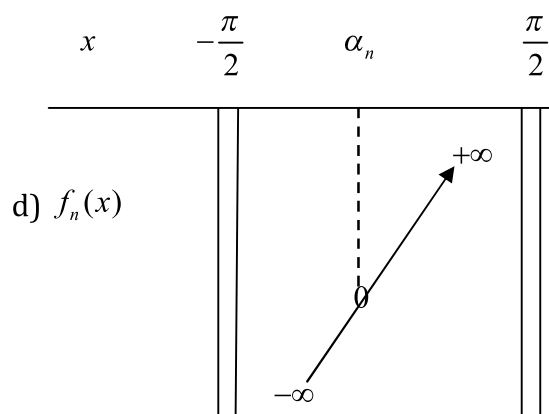
$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f_n \text{ est strictement croissante sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$\text{c) La fonction } f_n \text{ est continue et strictement croissante sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \text{ donc } f_n \text{ réalise une}$$

$$\text{bijection de } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \text{ sur } f_n \left( \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \right) = \left[ \lim_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f_n ; \lim_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f_n \right] = ]-\infty ; +\infty[ = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une solution unique } \alpha_n \text{ dans } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$



2. a)  $\alpha_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow (\alpha_n)$  est bornée.

b)  $f_n(\alpha_{n+1}) = \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - n$

Or  $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - n - 1 = 0 \Rightarrow f_n(\alpha_{n+1}) = \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - n = 1$

c)  $f_n(\alpha_{n+1}) = 1 > 0 \Rightarrow f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n) \xRightarrow{f_n \text{ est strictement croissante}} \alpha_{n+1} > \alpha_n$

$\Rightarrow (\alpha_n)$  est strictement croissante.

**NB:**  $(\alpha_n)$  est strictement croissante et majorée par  $\frac{\pi}{2}$  donc elle est convergente.

d)  $f_n(\alpha_n) = \tan(\alpha_n) - \alpha_n - n = 0 \Rightarrow \tan(\alpha_n) = \alpha_n + n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\alpha_n}_{\text{a une limite finie}} + \underbrace{n}_{+\infty} = +\infty$

e)  $\alpha_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(\alpha_n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}.$

### Exercice n°6 :

$f(x) = \cos \sqrt{x}, \forall x \in [0, \pi^2].$

1. a) Pour tout réel  $x \in [0, \pi^2]$ ,  $f(x) = \cos \sqrt{x} = \cos \left( 2 \frac{\sqrt{x}}{2} \right) = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right) \Rightarrow f(x) - 1 = 2 \sin^2 \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right).$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \times \frac{\sin^2 \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right)}{\left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f$  est dérivable à droite en 0 et on  $f'(0) = -\frac{1}{2}.$

2. a)  $f$  est la composée des fonctions cosinus et racine carrée.

Soit  $U(x) = \sqrt{x}, \forall x \in [0, \pi^2].$

$U$  est dérivable sur  $]0, \pi^2]$

$U([0, \pi^2]) = [0, \pi]$

Cosinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $]0, \pi]$

$\Rightarrow f = \cos \circ U$  est dérivable sur  $]0, \pi^2]$  et on a :



$$f'(x) = U'(x) \times [-\sin(U(x))] = \frac{1}{2\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x}) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \forall x \in ]0, \pi^2]$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in [0, \pi^2], f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]0, \pi^2] \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Si  $x \in ]0, \pi^2]$  alors  $0 < \sqrt{x} \leq \pi \Rightarrow \sin\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in ]0, \pi^2]$ .

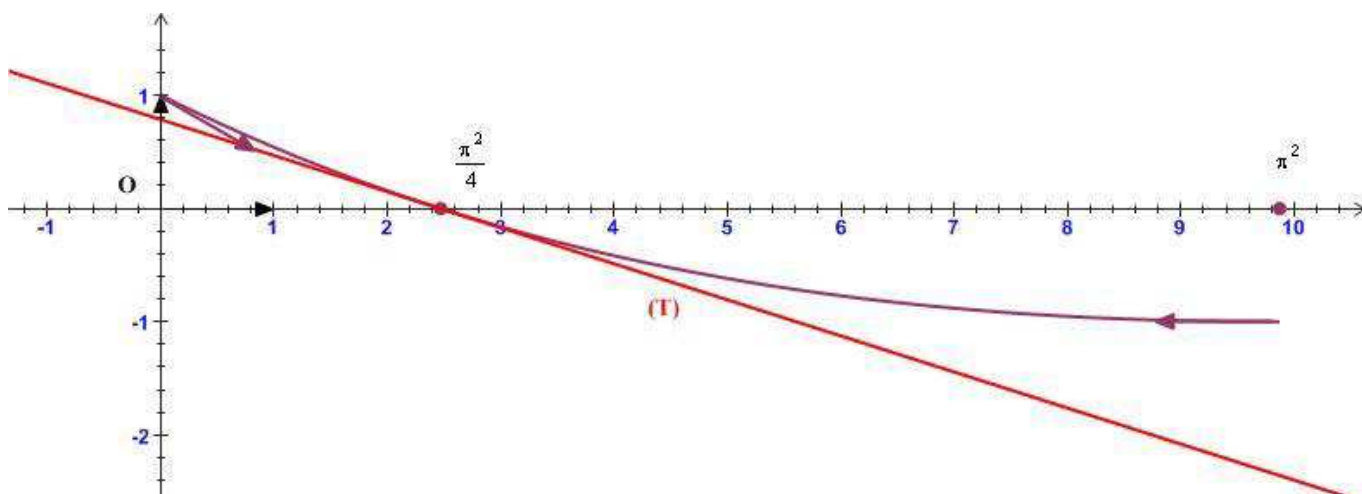
$x$	0		$\pi^2$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	-	0
$f(x)$	1		-1

3. a)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\sqrt{x} = 0$  et  $\sqrt{x} \in [0, \pi] \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi^2}{4}$

b) Soit (T) la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $\frac{\pi^2}{4}$

$$(T) : y = f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right) + f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{1}{\pi}x + \frac{\pi}{4}$$

**Remarque :** La courbe de  $f$  est donnée ci - dessous n'est pas demandée mais peut nous donner une idée sur le travail qu'on a fait.



### Exercice n°7 :

$h$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que :  $h(1) = 0$  et  $h'(x) = \frac{1}{x}$

(C'est une fonction qu'on va l'étudier plus tard appelée fonction logarithme népérien)

On pose  $F(x) = h(x + \sqrt{1+x^2})$ .

#### 1. Domaine de définition de F :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > x^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0$$

Puisque  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow F(x) = h(x + \sqrt{1+x^2})$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

#### Domaine de dérivabilité de F :

$\left( \overset{U}{x \mapsto 1+x^2} \right)$  est dérivable et strictement positive sur  $\mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{U}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \left( x \mapsto x + \sqrt{1+x^2} \right)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$\left. \begin{array}{l} \left( \overset{V}{x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}} \right) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ V(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^* \end{array} \right\} \Rightarrow F = h \circ V \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$

#### Calcul de dérivée de F :

$$F'(x) = V'(x) \times h'(V(x)) = \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) \times \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

#### 2. Parité de F :

Soit  $H(x) = F(x) + F(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$H$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (n'oublier pas de traiter  $F(-x)$  comme composée de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ )

$$H'(x) = F'(x) - F'(-x) = 0 \text{ car } F' \text{ est paire.}$$

$\Rightarrow H$  est une constante

$$\text{Or } H(0) = 2F(0) = 2h(1) = 0 \Rightarrow H(x) = F(x) + F(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(-x) = -F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow F$  est une fonction impaire.

3. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

$$\left. \begin{array}{l} F \text{ est dérivable sur } [0, x] \\ \forall t \in [0, x], F'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow |F(x) - F(0)| \leq |x| \text{ (D'après le théorème des accroissements finis)}$$

$$\Rightarrow |F(x)| \leq x, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

$$\Rightarrow -x \leq F(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Autrement :

On aurait pu démontrer l'inégalité précédente par une étude de fonction.

On pose  $G(x) = F(x) - x, x \in \mathbb{R}_+$

$$G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et on a : } G'(x) = F'(x) - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 < 0$$

$\Rightarrow G$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \text{Si } x \geq 0 \text{ alors } G(x) \leq G(0) \Rightarrow G(x) \leq 0 \Rightarrow F(x) \leq x.$$