RESUME DU COURS

Définition : La fonction logarithme népérien, noté ln, est la primitive sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1, de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$. On donc, pour tout réel x >0, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Conséquence : ln est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout réel strictement positive on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ de plus ln(1) = 0.

Propriétés algébriques : pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\quad \ln(a^n) = n\ln a \, (n \in \mathbb{Z})$ $\quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln a$ **Limites :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ $\quad \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ Pour tous entiers naturels non nuls n et m, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^n(x)}{x^m} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^m \ln^n(x) = 0$

Equations et inéquations : Pour tous réels x et x' strictement positifs, on a :

$\ln x = \ln x' \Leftrightarrow x = x'$ $\quad \ln x < \ln x' \Leftrightarrow x < x'$ $\quad$ En particulier : $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Dérivée de ln(u) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$, pour tout réel x dans I alors ln(u) est dérivable sur I et in a : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ pour tout réel x dans I

Théorème : Si u est une fonction dérivable pour tout réel x dans I telle que $u(x) \neq 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivables sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Corollaire : Si u est une fonction dérivable pour tout réel x dans I telle que $u(x) \neq 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $\ln(|u|) + c$ où c est une constante réelle.

LES EXERCICES

Exercice N°1 :

Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse :

1. L'ensemble de définition de l'équation : $\ln(x+3) = \ln(x^2-9)$ est :

a. {-3 ;3 } $\quad$ b. $]3,+\infty[$ $\quad$ c.]-3 ;3[$\quad$ d. $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x) =$ $\quad$ a. 0 $\quad$ b. $+\infty$ $\quad$ c. $-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$ $\quad$ a. 0 $\quad$ b. 1 $\quad$ c. $+\infty$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{3x-1}{6x+2}\right) =$ $\quad$ a. -ln2 $\quad$ b. 0 $\quad$ c. $+\infty$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x} =$ $\quad$ a. 1 $\quad$ b. $+\infty$ $\quad$ c. 0

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) =$ $\quad$ a. $+\infty$ $\quad$ b. 0 $\quad$ c. 1

7. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx =$ a. $\frac{1}{2}$ b. 1 c. e

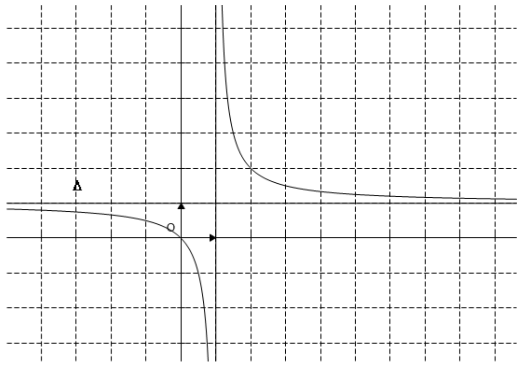
8. $\int_2^3 \frac{t}{t^2-1} dt =$ a. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)$ b. $\frac{3}{2}$ c.1

9. $\int_1^e \frac{1}{x.\ln^3(x)} dx =$ a.1 b. $-\frac{1}{2}$ c.e

10. f est la fonction définie sur IR par $f(x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est une fonction :

a. Paire. b. impaire c. Ni paire, ni impaire.

Exercice N°2 : La courbe ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et Δ la droite d'équation y =1



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. On pose g(x) = ln(f(x)).
   a. Déterminer le domaine de définition de g.
   b. Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation de g et tracer sa courbe.

Exercice N°3 : Soit la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & si\ x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]0,+\infty\right[\\ f(0)=0 \end{cases}$

1. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x)=-\frac{2}{x+2}+\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. Dresser le tableau de variation de φ puis en déduire le signe de φ(x).
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
3. Dresser le tableau de variation de f et construire $\left(\zeta_f\right)$ dans un repère orthonormé.
4. Soit la fonction g définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $g(x)=\begin{cases} x-2\ln(x+2)+\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & si\ x\in\left]0,+\infty\right[\\ g(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à droite en 0. b). Montrer que g est une primitive de f sur $\left[0,+\infty\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

5. Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+1}$

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\ln(u_n)=f(n)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

b) Montrer que la suite (u) est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°4 : Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{\ln x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Montrer que f est continue sur $[1,+\infty[$.

2.a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter géométriquement le résultat trouvé.
 b) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Soit Δ la droite d'équation y = x. Déterminer $(C)\cap\Delta$. b) Tracer (C) et Δ.

4.a)Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0,+\infty[$.

b) Tracer la courbe (C') de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5.On considère la suite (u) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le u_n \le e$.

b) Montrer que la suite (u) est décroissante. c) En déduire (u) est convergente et trouver sa limite.

Exercice N°5 : Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

A- 1) a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Montrer que pour tout entier n ≥ 3, l'équation : $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans l'intervalle [1,e] une seule solution a_n.

c- Prouver que $a_{n+1} < a_n$, en déduire que la suite (a_n) converge.

2) a- Montrer que pour tout x ≥ 0, on a : $x-\dfrac{1}{2}x^2 \le \ln(1+x)$.

b- En déduire que pour tout $x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ on a : $\dfrac{1}{2}x \le \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. c- Montrer alors que pour tout n ≥ 4 on a : $a_n \le 1+\dfrac{2}{n}$

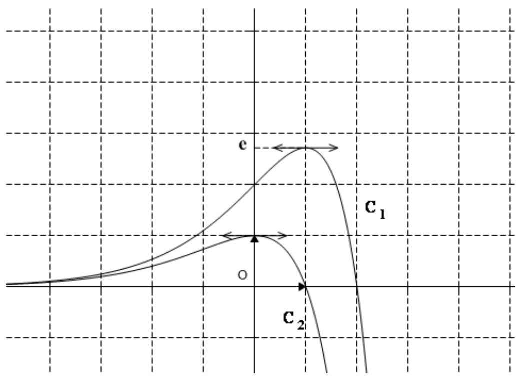
3) Déterminer la limite de la suite (a_n).

B- Soit g la fonction définie par : $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-\ln x} & si\ x \neq 0. \\ g(0)=-1 \end{cases}$

1) Montrer en utilisant les variations de f que le domaine de définition de g est $[0,+\infty[$.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 .
3) Dresser le tableau de variation de g. 4) Construire la courbe g

Exercice N°6 :

On a représenté ci-contre deux courbes représentatives (C_1) et (C_2) d'une fonction f et de sa primitive F définies sur IR.



1. Justifier que (C_2) est celle de la fonction f.

2.Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur [0 ;1]
.Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 2.

3.Soit G la fonction définie par : $G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

a. Etudier le sens de variation de G.

b. Montrer que la représentation graphique Γ de G est l'image de (C_1) par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

4. Soit la fonction h définie par : h(x) = ln(f(x)).

a) Préciser le domaine de définition de h. b) Dresser le tableau de variation de h.

Exercice N°7 : Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\ln^2(x)$.

1. Etudier f et tracer sa courbe.
2. a)Etudier le sens de variation de f'.

b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\frac{\ln(1+x)}{x}\le f(1+x)-f(x)\le\frac{\ln x}{x}$

c) Soit U la suite définie sur IN par : $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\ln k}{k}$. Montrer que pour tout n ≥3 : $Un\ge f(n+1)-f(3)+\frac{\ln 2}{2}$ et en déduire la limite de U.

Exercice N°8 : Soit $h(x)=1-x+x\ln x$ pour tout x > 0.a) Donner le signe de h(x) pour tout x > 0. b) Montrer que pour tout x > 1, on a : $1<\frac{x\ln x}{x-1}<1+\ln x$

1. Déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}^*:1<(k+1)\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)<1+\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)$.
2. Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ $par: U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

a) Montrer que $\forall \mathrm{k}\in\mathbb{N}^*:1<\mathrm{U_n}<1+\ln\left(\frac{1+\mathrm{n}}{\mathrm{n}}\right)$. b) Déduire que la suite U est convergente et donner sa limite.

Exercice N°9 : Pour tout un entier naturel, on pose : $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt$

1. a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout $\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$ et déduire la limite (I_n).

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, on\,a: I_{n+1}+I_n=\frac{1}{1+n}$.
3. a) Montrer que pour tout $\mathrm{k}\in\mathbb{N}^*$, on a : $\int_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k}+1}\frac{1}{\mathrm{t}}\mathrm{dt}\le\frac{1}{\mathrm{k}}$.

b) Déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, on\,a:\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\ge\ln(n+1)$. *Déduire* $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}I_k$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}S_n$.

Exercice N°10 : Pour tout $x\in]1,+\infty[$ on pose $f_n(x)=\ln(x-1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ où n est entier naturel tel que n ≥ 2.

1. Dresser le tableau de variation de f_n .
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution (α_n).
3. a) Montrer que : $\mathrm{f_{n+1}}(\alpha_\mathrm{n})=\frac{(\alpha_\mathrm{n})^{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{n}+1}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (α_n). c) En déduire que la suite (α_n) est convergente

Exercice N°11: Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On notera par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Soit $\varphi(x)=2\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$.

a) Etudier le sens de variation de φ sur $[0,+\infty[$. b) En déduire que pour tout x > 0 on a φ(x) > 0.

2. a) Montrer que f est dérivable à droite en 0. b) Montrer que pour tout x>0 : $f'(x)=x\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. a) Montrer que pour $t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$.

b) Etudier la position de (ζ_f) et la droite (D) d'équation : y = x.

4. a) Vérifier que $t\in[0,+\infty[,\ on\,a : 1-t\leq\dfrac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$.

   b) En déduire que : $x\in[0,+\infty[\ on\,a : x-\dfrac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

   c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

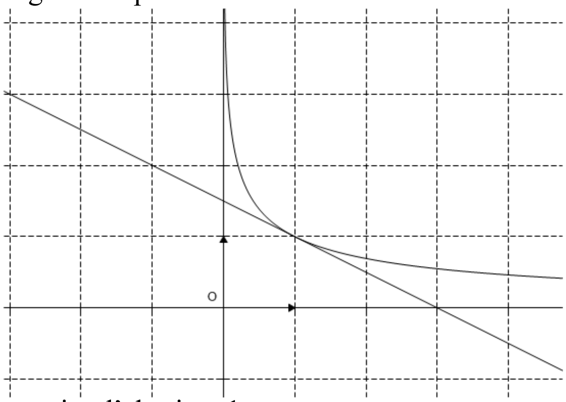
5. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0.\left(on\ posera\ X=\dfrac{1}{x}\right)$. Interpréter le résultat géométriquement.

b) Etudier la position de (ζ_f) et la droite Δ : y = x - $\dfrac{1}{2}$. c) Tracer dans le même repère (ζ_f) et (ζ_f^{-1}).

6. a) Soit $\lambda\in]0,1]$ et A_λ : l'aire de la région du plan limité par (ζ_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = λ et x = 1. Calculer A_λ et $\lim\limits_{\lambda\to0^+}A_\lambda$.

b) En déduire l'aire de la partie limitée par (ζ_f^{-1}), l'axe des ordonnées et la droite d'équation y = 1.

Exercice N°12 :A- La courbe ci contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}}\right)$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.



1. Par lecture graphique :

a) Déterminer les valeurs f(1) et f'(1).

b) Dresser le tableau de variation d f.

2. On admet que $\begin{cases} \mathrm{f}(\mathrm{x})=\dfrac{\mathrm{a}+\ln \mathrm{x}}{\mathrm{b}+\mathrm{x}} & \forall \mathrm{x}\in]0,+\infty[\setminus\{1\} \\ \mathrm{f}(1)=1 \end{cases}$

où a et b sont deux réels. Déterminer l'expression de f.

On prend a =0 et b = -1.

a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathrm{f}\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\mathrm{J}$ à préciser.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T' à C_f^{-1} au point d'abscisse 1.

c) Tracer (C_f^{-1}).

3.Soit D la partie du plan limitée par (C_f) ;(C_f^{-1}) ;[AB] et [AC] où $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;$B\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ et $C\left(f\left(\frac{1}{2}\right),\frac{1}{2}\right)$. Soit A l'aire, en unité d'aire, de D. Montrer que $A=2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx-\frac{3}{4}$

B- 1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}$ où $n\in\mathbb{N}$.

2. Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}\ on\,a: \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx=-\sum_{k=0}^{n}u_k+\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n+1}f(x)dx \quad avec\ u_k=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^k\ln(x)dx$.

3. Calculer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\ on\,a: x^{n+1}\le\frac{x^{n+1}\ln x}{x-1}\le 2\ln 2.x^{n+1}$

5. Déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n+1}f(x)dx\ =0$ 6.En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\sum_{k=0}^{n}u_k\right]=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx$.

<u>Exercice N°13</u> A- Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1.Soit $h\in\,]0,+\infty[$. On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g: x\mapsto\left[\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right]x^2-\ln(1+x)+x$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel : $c\in\,]0,h[$ tel que : $\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}=\frac{-1}{2(c+1)}$.

b) Prouver donc que : $\lim\limits_{h\to0^+}\left(\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right)=\frac{-1}{2}$ c) Prouver enfin que f est dérivable à droite en 0 et que : $f_d'(0)=-\frac{1}{2}$.

2. a) Justifier que : $\forall x\ge0: \int_0^x\frac{dt}{(1+t)^2}\le\int_0^x\frac{dt}{1+t}$ b) Déduire que $\forall x\ge0: \frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\le0$.

c) Donner enfin le signe de f'(x) pour tout x > 0.

3. Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f.

B- Pour tout $a\in\,]0,1]$, on pose : $u_n=\int_0^a t^n f(t)\,dt$.

1.Etudier la monotonie de la suite (u_n). 2. Prouver que (u_n) est convergente.

3.a) Montrer que pour tout x ≥ 0 ; f(x) ≤ 1. b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}, on\,a: u_n\le\frac{a^{n+1}}{n+1}$.

c) Préciser donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

<u>Exercice N°14 :</u>Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $U_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)dx\ et\ V_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+......+\frac{(-1)^n}{n+1}$

1.a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $0\le U_n\le\frac{\ln 2}{n+1}$ puis calculer sa limite.

b) Calculer $\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$ puis calculer U_1.

2. On pose $S_n=1-x+x^2+....+(-1)^n x^n\ avec\ n\in\mathbb{N}^*\ et\ x\in[0;1]$

a) Montrer que : $S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ et que : $V_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

b) En déduire que : $|V_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$ puis calculer la limite de (V_n).

3.a) En utilisant une intégration par parties pour U_n, montrer que : $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}.(\ln 2 - V_n)$

b) En déduire la limite de (Φ_n) définie par : $W_n = (n+1)\,U_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°15 : Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

1. Etudier le sens de variation de f.

2.a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq \frac{\ln(k)}{k^2}$

b) Par une intégration par parties, calculer $\int_a^b \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ avec a > 0 et b > 0.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + ... + \frac{\ln(n)}{n^2}$.

a) Montrer que pour tout, on a : $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$

b) En déduire que : $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln(n)}{n}$

c) Donner un encadrement de S_{100} à 10^{-2} près

Exercice N°16 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

1.a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b) Montrer que la suite (I_n) est convergente et par suite elle est convergente.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

2.a) Par une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ on\,a : I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ on\,a : I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + ... + \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right)$

3. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \frac{\ln 2}{2!} + \frac{(\ln 2)^2}{3!} + ... + \frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!}$.

a) Exprimer (u_n) en fonction de I_n. b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice N°17 : I- Soit la fonction g définie sur]0 ;1] par : $g(x) = 2 - 2x + \ln x$

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Montrer que g(x) = 0 admet dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ une solution unique α et que : $\forall t \in [\alpha, 1]\ on\,a : 2t - 2 \leq \ln t$.

3) Construire la courbe de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$(Unité : 4cm).

4) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et $x = \frac{1}{2}$

II- Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1) Montrer que f est dérivable $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur et que : $F'(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(2x)\ln(x)}$.

2) Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ on a : $\frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$. Déterminer alors : $\lim_{x \to 0^+} F(x)$.

3) Montrer que : $\forall x \in \left[\alpha, \frac{1}{2}\right[$, on a : $F(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$. Déterminer alors : $\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} F(x)$.

4) Dresser le tableau de variation de F.

5) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'équation : 1 + n F(x) = 0 admet dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ une solution α_n.

b- Montrer que (α_n) est une suite décroissante et qu'elle est convergente

. **Exercice N°18 :**Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} [\ln(t)]^n dt$

1-a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b) Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $I_{n+1} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n$. c) En déduire I_2 puis $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}} [\ln(t) - 1]^2 dt$.

2-a) Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{3}{2}$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire que (I_n) est convergente.

3-a)Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{2\sqrt{e}}{2n+3} \leq I_n \leq \frac{2\sqrt{e}}{2n+1}$. b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} (nI_n)$.

Exercice N°19 :I- Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans l'intervalle $]-1, +\infty[$ deux solutions 0 et α et vérifier que 3,8 < α < 4

3) En déduire le signe de g(x) pour tout $x \in]-1, +\infty[$. 4) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :g(x) ≤ 1.

II- Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & si \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$. 2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

3) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

4) Dresser le tableau de variation de f et vérifier que : $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

5) Tracer la courbe (C) de f.

III- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{(3n)!}{n^n(2n)!}$.

1) En utilisant I-4)- montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $\ln(1+x) \geq \dfrac{x-1}{1+x}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .a- Montrer que pour tout $k \in \{1,2,.........,n\}$, on a : $\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right) \geq \dfrac{k}{3n}$.

b- Vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \ln(u_n)$ c- En déduire que : $\ln(u_n) \geq \dfrac{1}{6}(n+1)$

d- Déterminer alors la limite de u_n.

Exercice N°20 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}\ln x \quad si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On désigne par (C) sa courbe représentative de f dan un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe (C).

d) Tracer (C) en précisant la tangente à (C) en A.

2-Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose : $F_p(x) = \displaystyle\int_x^1 \sqrt{t}(\ln(t))^p\, dt \quad où \quad x \in]0;1[$

a) Calculer $F_1(x)$ puis vérifier que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F_1(x) = -\frac{4}{9}$.

b) Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, et que pour tout réel $x \in]0;1[$, on a :

$F_{p+1}(x) = -\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}[\ln(x)]^{p+1} - \dfrac{2}{3}(p+1)F_p(x)$.

c) Montrer par récurrence que $F_p(x)$ admet une limite finie $u_p = (-1)^p(p!)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+1}$ quand $x \to 0^+$.

Exercice N°21: I- Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^3 - 2\ln x$. Etudier les variations de g, calculer g(1) et en déduire le signe de g(x).

II- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + \dfrac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ et dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que (C) admet une asymptote oblique D et étudier la position relative de (C) et D.

3) a- Soient α et ß deux réels tels que : 1 < α < ß, calculer : $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\ln x}{x^2}dx$.

b- Interpréter géométriquement I.

III- Soit $(U_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par : $U_n = \displaystyle\int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx$.

1) Montrer que la suite U est croissante.

2) Vérifier que pour tout n ≥ 2, on a : $U_n = \dfrac{1}{2}(1+\ln 2) - \dfrac{1}{n}(1+\ln(n))$ *calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3) On pose pour tout n ≥ 2 : $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{\ln k}{k^2}$

a- Etudier le sens de variation de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$.

b- Montrer que pour tout k ≥ 2, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2}\,dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$

c- En déduire que pour tout n ≥ 2, on a : $U_n + \frac{\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq U_n + \frac{\ln 2}{2^2}$.

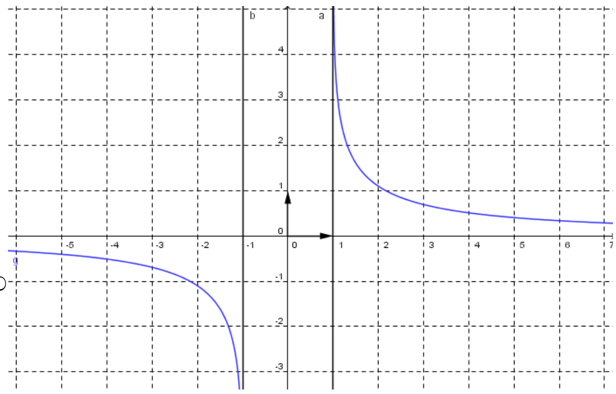
d- Montrer que (S_n est convergente et en déduire un encadrement de sa limite.

Les solutions

Exercice N°1 : 1.b 2.c 3. a 4.a 5.c 6.c 7.a 8.a 9.b 10.b

Exercice N°2 :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		—	||	—	
f(x)	1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1



1.a) $D_g =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

b) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(f(x)) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ / $\lim_{x\to(-1)^-} g(x) = -\infty$ / $\lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty$

c)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'(x)		—	||	//////	||	—	
g(x)	0	↘ $-\infty$	||	//////	|| $+\infty$	↘	0

Exercice N°3 :

1. On a φ est dérivable sur son domaine de définition et $\varphi'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
φ'(x)		+	||	//////	||	—	
φ(x)	0	↗ $+\infty$	||	//////	||	$+\infty$ ↘	0

D'après le tableau de variation : φ(x) > 0 $\forall x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

1.**Continuité à droite en 0 :** $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x\ln(x+2) - x\ln x$

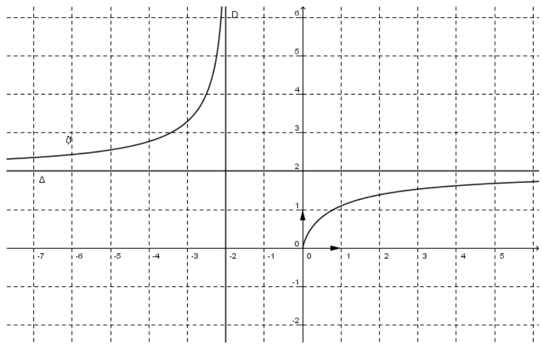
$= 0\ln(2) - 0 = 0 = f(0)$ car $\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$ donc f est continue à droite en 0.

Dérivabilité à droite en 0 : $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x\to0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en 0.

2.a) f'(x) = φ(x) > 0.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		+	||	//////	||	+	
f(x)	2	↗ $+\infty$	||	//////	|| 0	↗	2

$\lim_{+\infty} f = 2$ alors (ζ_f) admet Δ : y=2 comme asymptote horizontale au voisinage de +∞ et $\lim_{-\infty} f = 2$ alors (ζ_f) admet Δ : y=2 comme asymptote horizontale au voisinage de -∞. $\lim\limits_{(-2)^-} f = +\infty$ alors (ζ_f) admet



D : x=-2 comme asymptote verticale au voisinage de -2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ alors (ζ_f) admet une demi tangente

verticale au point O(0 ;0) d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq f(0) = 0 \end{cases}$

b) voir figure :

3.a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - 2\ln(x+2) + \frac{1}{2}x\left(x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right) = 0 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}\times 0 \times 0 = -2\ln 2$ donc g est continue à droite en 0.

b) $\forall x \in]0,+\infty[$ g'(x)= f(x) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x-2\ln(x+2)+2\ln 2}{x}\right) + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(1 - \frac{2\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)}{x} + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}\right) + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1 - 1 + 0 = 0 = f(0)$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ donc g'(0) = f(0) or

$\forall x \in]0,+\infty[$ g'(x)= f(x) donc $\forall x \in [0,+\infty[$ g'(x)= f(x) et par suite g est la primitive de f sur $[0,+\infty[$

4.a) $\ln(u_n) = \ln\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+1}\right] = (n+1)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = f(n) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 2$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$

<u>Exercice N°4 :</u> 1) $x \mapsto x$ est continue sur IR, en particulier sur $[1,+\infty[$ de plus $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in [1,+\infty[$ $on\ a : \ln x \geq 0$ $alors\ x \mapsto \sqrt{\ln x}$ est continue sur $[1,+\infty[$ ainsi f est continue sur $[1,+\infty[$.

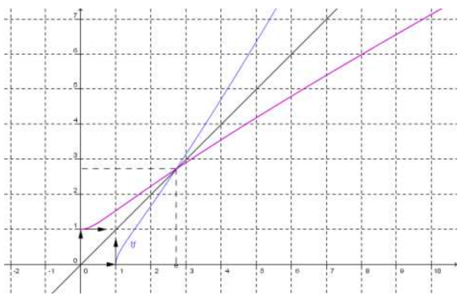
2) a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x\sqrt{\ln x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x\ln x}{(x-1)\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{x}{\sqrt{\ln x}} = +\infty$ ainsi f n'est pas dérivable à droite en 1 d'où (C) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

b) f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a : $f'(x) = \sqrt{\ln x} + x.\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \sqrt{\ln x} + \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} > 0$

x	1		$+\infty$
f'(x)	‖	+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\ln x} = +\infty$

4) a)Soit $x \in [1,+\infty[$. si $M(x,y) \in (C) \cap \Delta$ équivaut à $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$



5) $\Rightarrow f(x) = x$ équivaut à $x\sqrt{\ln x} = x$ or $x \neq 0$ équivaut à $\ln x = 1$

donc x = e. ainsi $(C) \cap \Delta = \{A(e,e)\}$.

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{\ln x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\ln x} = +\infty$

alors (C) admet branche parabolique au voisinage de +∞ de direction $(O, \vec{j})$.

4) a) f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) = [0,+\infty[$. f admet alors une fonction réciproque g définie sur $[0,+\infty[$.

b) $(C') = S_\Delta(C)$

5) a) Pour n = 0, $u_o = 0$. $0 \leq u_o \leq e$ (vérifie).Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $0 \leq u_n \leq e$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq e$. On a $0 \leq u_n \leq e$ et comme f est croissante sur $[1,+\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ d'où $g(0) \leq g(u_n) \leq g(e)$ équivaut à : $1 \leq u_{n+1} \leq e$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq e$.

b) $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$ or (C') est au dessus de Δ sur [0,e] donc $g(x) \geq x \ \forall x \in [0,e]$ et comme $u_n \in [0,e]$ alors $g(u_n) \geq u_n$ *c'est à dire* $u_{n+1} \geq u_n$ alors (u) est une suite croissante.

c) la suite (u) est une suite croissante et majorée par e donc elle est convergente. Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ or $0 \leq u_n \leq e$ donc $0 \leq l \leq e$. On a f est continue sur $[1,+\infty[$ donc g est continue sur $[0,+\infty[$ et en particulier en l d'où $g(l) = l$. Or e est la seule solution de l'équation f(x) = x donc $g(l) = l$ équivaut à $l = e$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$

<u>Exercice N°5:</u> A-1)a- f est définie et continue sur $]0,+\infty[$. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}(1+\ln x)$ et $f'(x) = 0$ équivaut à x = e.

b- Pour tout n ≥3 on a : $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{e}$ et comme f est continue et strictement croissante sur [1,e] donc elle réalise une bijection de [1,e] sur f([1, $\dfrac{1}{e}$]) = [0,e]/ or $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{e}$ alors il existe une unique solution $a_n \in [1,e]$ de l'équation : $f(x) = \dfrac{1}{n}$.

x	0		e		+∞
f'(x)		+	0	−	
f(x)	-∞	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

c- On a $f(a_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$ *et* $f(a_n) = \dfrac{1}{n}$ *alors* $f(a_{n+1}) < f(a_n)$ et f est une fonction croissante sur $[1,e]$ alors $a_{n+1} < a_n$.

Donc a_n est une suite décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

2)a- On pose $h(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$, h est une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$ et $h'(x) = 1 - x - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-x^2}{x+1}$

D'où h'(x) ≤ 0 sur $[0,+\infty[$. D'après le tableau de variation on a h(x)≤ 0 pour tout x ≥ 0.

x	0		+∞
h'(x)		−	
h(x)	0	↘	

b- Montrons que : $(1+x)\dfrac{1}{2}x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 \leq x - \dfrac{1}{2}x^2$?

On a $(1+x)\dfrac{1}{2}x - \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}x^2\right) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2}x^2 = -\dfrac{1}{2}x + x^2 = x\left(-\dfrac{1}{2} + x\right) \leq 0$ car $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Donc : $(1+x)\frac{1}{2}x \le \ln(1+x)$ $or\ 1+x>0\, car\ x>0\, donc\ \frac{1}{2}x \le \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ c- on a $n \ge 4$ alors $\frac{1}{n} \le \frac{1}{4}$ $équivaut\ à\ \frac{2}{n} \le \frac{1}{2}$ $c'est\ à\ dire\ \frac{2}{n} \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$. D'après la question 2)b- on prend $x=\frac{2}{n}$ on aura : $\frac{1}{2}.\frac{2}{n} \le \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}}$ $équivaut\ à\ \frac{1}{n} \le \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}}$ $c'est\ à\ dire\ f(a_n) \le f\left(1+\frac{2}{n}\right)$ or f est une fonction croissante sur [1,e]

donc $a_n \le 1+\frac{2}{n}$ 3) On a $1 \le a_n \le 1+\frac{2}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n}=1$ $donc\ \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

B-1) On a x > 0 : $f(x) \le \frac{1}{e}$ $signifie\ que\ \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e} < 1$ $alors\ \ln x < x\, car\ x>0\ d'où\ \ln(x)-x<0$. Donc g est bien définie sur $[0,+\infty[$.

2) • $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x-\ln x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln x}.\frac{1}{\frac{x}{\ln x}-1} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\frac{x}{\ln x}-1} = \frac{1}{0^- -1} = -1 = g(0)$

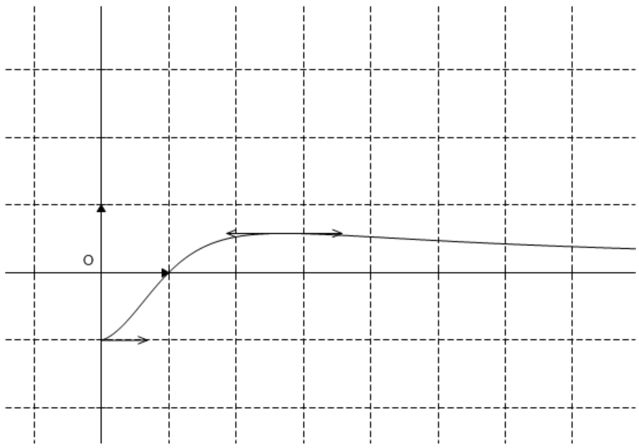
• $\lim_{x\to0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\ln x}{x-\ln x}+1}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)+x-\ln(x)}{x(x-\ln x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x(x-\ln x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x-\ln x} = 0$

3) $g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-\ln x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\frac{\ln x}{x}-\ln x+\frac{\ln x}{x}}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$ le signe de g'(x) est celui de (1-lnx).

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{x}{\ln x}-1} = 0$

x	0		e		+∞
g'(x)	0	+	0	−	
g(x)	-1	↗	$\frac{e}{e-1}$	↘	0

4) Courbe



Exercice N°6:

1.On suppose que (C_1) est celle de la fonction f. On a F'(x) = f(x) et f(2) = 0 donc F'(2) = 0et par suite (C_1) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2. Ceci est impossible d'après le graphe. Donc (C_2) est celle de la fonction f.

2. $\bar{F} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)dt = [F(t)]_0^1 = F(1)-F(0) = e-2$

3. $A = \left(\int_0^2 |f(t)|dt\right)ua = \int_0^1 f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt = F(1)-F(0)-[F(2)-F(1)] = e-2+e-0 = (2e-2)ua$

4.a)f est continue sur $\mathbb{R}$ donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et G'(x) = f(x).

b) G(x) = F(x) – F(0) = F(x) – 2équivaut à G(x) – F(x) = -2. $Soient\ M\ (x, F(x)) \in (C_1) et$ $M'(x, G(x)) \in \Gamma\, où\ x\ est\ réel$ alors : $\overrightarrow{MM'} = -2\vec{j}$ équivaut à $\Gamma = t_{-2\vec{j}}(C_1)$.

x	-∞		1		+∞
G'(x)		+	0	−	
G(x)	-2	↗	e-2	↘	-∞

x	-∞		0		1
h'(x)		+	0	−	‖
h(x)	-∞	↗	0	↘	-∞ ‖

5. $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

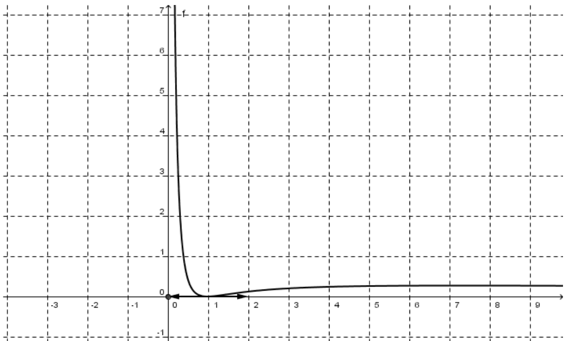
donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$

Exercice N°7 :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

1. $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $\forall x>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln^2(x)}{x}=0$

Donc C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$.



2.a) f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[: f''(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

1 – lnx ≥0 équivaut à 1 ≥ lnx équivaut à 0 < x ≤ e.

x	0		e		$+\infty$
f''(x)		+	0	−	
f'(x)	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

a) f est dérivable sur [e,+∞[et $\forall x\geq e$ *implique* $x+1\geq e$

alors il existe un réel $c\in]x,x+1[$ tel que :

$\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(c)$ $\forall e\leq x\leq c\leq 1+x$ comme f' est strictement décroissante sur [e,+∞[

alors : $f'(1+x)\leq f'(c)\leq f'(x)$ équivaut à $\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}\leq f'(c)\leq\dfrac{\ln x}{x}$ d'où $\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}\leq f(x+1)-f(x)\leq\dfrac{\ln x}{x}$

c) $\sum\limits_{k=3}^{k=n}\dfrac{\ln(1+k)}{1+k}\leq\sum\limits_{k=3}^{k=n}[f(k+1)-f(k)]\leq\sum\limits_{k=3}^{k=n}\dfrac{\ln k}{k}$ or

$\sum\limits_{k=3}^{k=n}[f(k+1)-f(k)]=f(4)-f(3)+f(5)-f(4)+.....+f(n+1)-f(n)=f(n+1)-f(3)$ donc

$f(n+1)-f(3)\leq\dfrac{\ln 3}{3}+\dfrac{\ln 4}{4}+....+\dfrac{\ln(n)}{n}$ alors $f(n+1)-f(3)\leq U_n-\dfrac{\ln 2}{2}$ équivaut à $f(n+1)-f(3)+\dfrac{\ln 2}{2}\leq U_n$ or

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

Exercice N°8 :

1.a) h est dérivable sur $]0,+\infty[$, $h'(x)=\ln x$; d'après le tableau de variation h admet 0 comme minimum absolue sur $]0,+\infty[$ donc h(x) ≥ 0 pour tout x > 0.

x	0		1		$+\infty$
h'(x)		−	0	+	
h(x)		↘	0	↗	

b) $1<\dfrac{x\ln x}{x-1}<1+\ln x$ $\forall x>1\Leftrightarrow x-1<x\ln x<(x-1)(1+\ln x)\forall x>1$

$\Leftrightarrow x-1<x\ln x$ et $x\ln<x+x\ln x-1-\ln x$ $\Leftrightarrow\begin{cases}1-x+x\ln x>0 & (a)\\ x-1-\ln x>0 & (b)\end{cases}\forall x>1$ d'après 1)a- on a

h(x)>0 $\Leftrightarrow 1-x+x\ln x>0$ $\forall x>1$ donc (a) est vraie. On pose $g(x)=x-1-\ln x$ pour $x>1$ g est dérivable $\forall x>1$ et $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}>0$ $\forall x>1$ donc g est strictement croissante $]1,+\infty[$ alors pour tout x > 1, on a g(x) > g(1) = 0 d'où (b) est vraie.

2.On a $1<\dfrac{x\ln x}{x-1}<1+\ln x\ \forall x>1$. En posant $x=1+\dfrac{1}{k}\ \ \forall k\in\mathbb{N}^*$ alors k >1 d'où

$$\forall k\in\mathbb{N}^*:1<\frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\frac{k+1}{k}-1}<1+\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\text{donc}\quad \forall k\in\mathbb{N}^*:1<(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)<1+\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

3.On a $\forall k\in\mathbb{N}^*:1<(k+1)\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)<1+\ln(k+1)-\ln k$ alors :

$$\text{pour } k=1: 1<2\ln 2<1+\ln 2-\ln 1$$
$$\text{pour } k=2: 1<3\ln\frac{3}{2}<1+\ln 3-\ln 2$$
$$\text{pour } k=3: 1<3\ln\frac{4}{3}<1+\ln 4-\ln 3$$
....
$$\text{pour } k=n: 1<(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<1+\ln(n+1)-\ln(n)$$

on somme membre à membre on trouve :

$$n<\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)<n+\ln(n+1)\ \text{équivaut à}$$
$$1<U_n<1+\frac{\ln(1+n)}{n}\ \text{équivaut à}$$
$$\lim_{n\to+\infty}1\leq\lim_{n\to+\infty}U_n\leq\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{\ln(1+n)}{n}\right]$$
$$\text{or }\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+n)}{1+n}\cdot\frac{1+n}{n}=0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

Exercice N°9: 1.a) $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}dt-\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt=\int_0^1\left(\frac{t^{n+1}}{1+t}-\frac{t^n}{1+t}\right)dt=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}(t-1)dt$ or pour tout $t\in[0;1]$ la fonction : $t\mapsto\dfrac{t^n}{1+t}(t-1)$ est continue et négative. Donc $I_{n+1}-I_n\leq 0$.

b) $0\leq t\leq 1\Leftrightarrow 1\leq t+1\leq 2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{t+1}\leq 1\ or\ t>0\ alors\ t^n>0\ donc\ \dfrac{t^n}{2}\leq\dfrac{t^n}{1+t}\leq t^n$ comme les trois fonctions :

$t\mapsto\dfrac{t^n}{2};\ t\mapsto\dfrac{t^n}{1+t}\ et\ t\mapsto t^n$ sont continues sur [0 ; 1] alors $\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{2}dt\leq\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\leq\int_0^1 t^n dt$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}\ \text{ or }\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\ donc\ \lim_{n\to+\infty}I_n=0$$

2. $I_{n+1}+I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}dt+\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt=\int_0^1\left(\frac{t^{n+1}}{1+t}+\frac{t^n}{1+t}\right)dt=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}(t+1)dt=\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$

3.a) $k\leq t\leq k+1\Rightarrow\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{k}\Rightarrow\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dt=\frac{1}{k}$

b) $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\frac{1}{k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{k=n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\sum_{k=1}^{k=n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dt\Rightarrow\int_1^{n+1}\frac{1}{t}\leq\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\underbrace{\int_k^{k+1}dt}_{=1}$

$$\Rightarrow[\ln x]_1^{n+1}\leq\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\Rightarrow\ln(n+1)\leq\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\ or\ \lim_{n\to+\infty}\ln(1+n)=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}=+\infty$$

4) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}I_k$ d'après 1-b) on a : $\dfrac{1}{2(k+1)}\leq I_k\leq\dfrac{1}{k+1}\Rightarrow\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{2(k+1)}\leq\sum_{k=0}^{k=n-1}I_k\leq\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{k+1}$ or d'après 3-a)

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=}^{k=n-1}\frac{1}{k+1}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k}=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty\ .$$

Exercice N°10 : $f_n'(x)=\dfrac{1}{x-1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{kx^k}{k}=\frac{1}{x-1}+1+x+...+x^{n-1}>0$

x	1		+∞
$f_n'(x)$		+	
$f_n(x)$	−∞	↗	+∞

1. f_n est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $f_n(]1,+\infty[)$ et comme $0\in f_n(]1,+\infty[)$ alors il existe un unique $\alpha_n\in]1,+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$.

2.a) $f_{n+1}(x)=\ln(x-1)+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}...+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1}$ d'où $f_{n+1}(\alpha_n)=\underbrace{\ln(\alpha_n-1)+\alpha_n+\frac{\alpha_n{}^2}{2}+\frac{\alpha_n{}^3}{3}...+\frac{\alpha_n{}^n}{n}}_{f_n(\alpha_n)}+\frac{\alpha_n{}^{n+1}}{n+1}$ alors :

$$f_{n+1}(\alpha_n)=f_n(\alpha_n)+\frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}=0+\frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}=\frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}.$$

b) On a $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0$ *et* $f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}>0\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1})\le f_{n+1}(\alpha_n)$, comme f_{n+1} est une fonction croissante sur $]1,+\infty[$ alors $\alpha_{n+1}\le\alpha_n$ donc (α_n) est suite décroissante et elle est minorée par 1 alors (α_n) est une suite convergente.

Exercice N°11: 1.a) φ est dérivable sur $]0,+\infty[$. (somme des fonctions dérivables) on a :

$\forall x\ge 0;\varphi'(x)=2\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}>0$ d'où φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) Comme φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ alors $\forall x>0;\varphi(x)>\varphi(0)=0$

2.a) La fonction $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0;1+\frac{1}{x}>0\Rightarrow$ la fonction $x\mapsto\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus la fonction : $x\mapsto x^2$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc la fonction $f:x\mapsto x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{0^+}f=\lim\limits_{x\to0^+}\left[x^2\ln(x+1)-x.x\ln x\right]=0=f(0)\Rightarrow$ f est continue en 0. **Conclusion** : f est continue sur $[0,+\infty[$.

b) La fonction $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0;1+\frac{1}{x}>0\Rightarrow$ la fonction $x\mapsto\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ De plus la fonction : $x\mapsto x^2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc la fonction $f:x\mapsto x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[x\ln(x+1)-x\ln x\right]=0\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0. **Conclusion** : f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

c) On a : $\forall x\in]0,+\infty[,f'(x)=2x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x^2.\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}\right]=x.\left[2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{x\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+1}\right)\right]=x.\left[2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}\right)\right]=x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\forall x>0$ *on a* $\frac{1}{x}>0$ *alors* $\forall x>0$ *on a* $\varphi(x)>0$ *et par suite* $\forall x>0$ *on a* : $f'(x)=x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)>0$

x	0		+∞
f'(x)	0	+	
f(x)	0	↗	+∞

• $\lim\limits_{+\infty}f=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\overset{\text{pose }X=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{1}{X}.\frac{\ln(1+X)}{X}\right]=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$ Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur f($\mathbb{R}_+$) = $\mathbb{R}_+$.

1.a) Soit $t\in\mathbb{R}_+,\forall x\in[0,t],on\,a:\frac{1}{1+x}\le1\Rightarrow\int_0^t\frac{1}{1+x}dx\le\int_0^t dx\Leftrightarrow\ln(1+t)\le t$

b) Pour tout x > 0, $f(x)-x=x^2\underbrace{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]}_{<0\,d'après\,la\,question\,3-a)}$ donc f(x) – x < 0. **Conclusion** : C_f est au dessous de (D)

2.a) $1-t-\frac{1}{1+t}=\frac{1-t^2-1}{1+t}=\frac{-t^2}{1+t}\le 0$ et on a : $\frac{1}{1+t}-\left(1-t+t^2\right)=\frac{-t^3}{1+t}\le 0\ \forall t\in[0,+\infty[$. Donc
$1-t\le\frac{1}{1+t}\le 1-t+t^2\ \forall t\in[0,+\infty[$.

b) les fonctions : $t\mapsto 1-t;\ t\mapsto\frac{1}{t+1}\ et\ t\mapsto 1-t+t^2$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\in[0,+\infty[$ on a :

$$\int_0^x(1-t)dt\le\int_0^x\frac{1}{1+t}dt\le\int_0^x\left(1-t+t^2\right)dt\Rightarrow x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

c) on a : $\forall x>0\ \ x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ \ \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)-x\le-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

or $x^2>0\Rightarrow-\frac{1}{2}\le\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$ donc: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

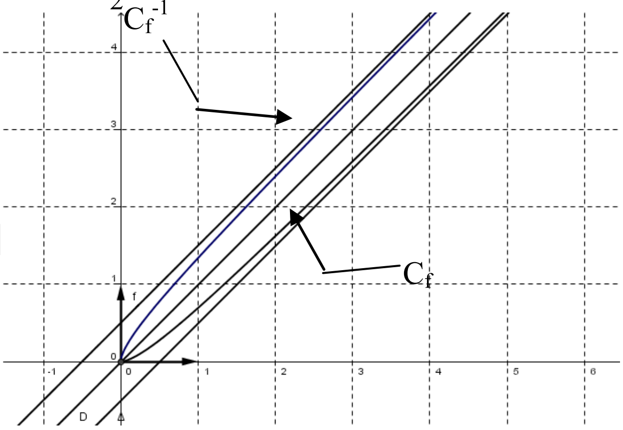
3.a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\underbrace{=}_{\substack{on\ pose\ X=\frac{1}{x}\\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty}X=0^+}}\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(1+X)}{X^2}-\frac{1}{X}+\frac{1}{2}\right]=\lim\limits_{X\to0^+}\underbrace{\frac{\ln(1+X)-X}{X^2}}_{=-\frac{1}{2}\ D'après\ la\ question\ 3-c)}+\frac{1}{2}=0$.

Ce qui interprète que C_f admet la droite Δ : $y=x-\frac{1}{2}$ comme asymptote oblique au voisinage de +∞.

b) $\forall\ x>0;f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{h\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}>0$ avec $h(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ d'après la question 4 – a)

et $f(0)-\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$ d'où C_f est au-dessus de Δ.

b) voir figure.



c)

4.a) $A_\lambda=\int_\lambda^1|f(x)|dx=\int_\lambda^1 f(x)dx\ car\ f(x)>0\ \ \forall x\in[\lambda,1]$

$=\int_\lambda^1 x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx\ \ \left(\begin{array}{l}u'(x)=x^2\Leftarrow u(x)=\frac{1}{3}x^3\\ v(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow v'(x)=\frac{-1}{x(x+1)}\end{array}\right)$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_\lambda^1-\int_\lambda^1\frac{1}{3}x^3.\left(\frac{-1}{x(x+1)}\right)dx=\frac{1}{3}\ln2-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\int_\lambda^1\frac{x^2}{x+1}dx=\frac{1}{3}\ln2-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}[h(x)]_\lambda^1$

(car $h(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt$ est la primitive sur IR\{-1} de la fonction $\left(x\mapsto\frac{x^2}{1+x}\right)$ qui s'annule en 0) donc

$A_\lambda=\frac{1}{3}\ln2-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}[h(1)-h(\lambda)]=\frac{1}{3}\ln2-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}+\ln2-\frac{\lambda^2}{2}+\lambda-\ln(1+\lambda)\right]$

$A_\lambda=\frac{2}{3}\ln2-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{3}\ln(1+\lambda)-\frac{1}{6}\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda$ et

$\lim\limits_{\lambda\to0^+} A_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to0^+}\left[\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{3}\ln(1+\lambda)-\frac{1}{6}\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda\right]=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{6}$ *car* $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda^3\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda f(\lambda)=0$

b) $C_{f^{-1}}=S_D\left(C_f\right);\left(y'Oy=S_D\left[(x'Ox)\right]\right)$ *et* $\left(D_1^{'}:y=1\right)=S_D\left(D_1:x=1\right)$ et comme S_D est une isométrie alors elle conserve les distances par conséquent elle conserve les aires. Donc $Aire(D'')=\lim\limits_{\lambda\to0^+}A_\lambda=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{6}$.

Exercice N°12: A-1 a) $A(1;1)\in C_f$ équivaut à f(1) =1. et on a $A\in T$ *et* $B(3;0)\in T$ *donc* $f'(1)=\frac{0-1}{3-1}=-\frac{1}{2}$

b) voir le tableau :

x	0		+∞
f'(x)		—	
f(x)	+∞	↘	0

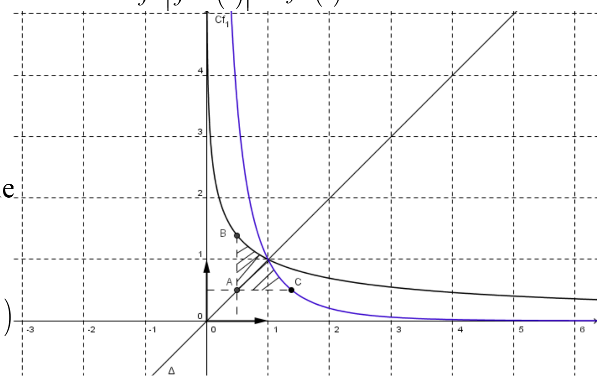
2. on a f(1) = 1 et f est continue en 1 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=1 \Leftrightarrow \frac{a+\ln(1)}{1+b}=1\Leftrightarrow\frac{a+0}{1+b}=1\Leftrightarrow a=1+b$

et $f'(x)=\dfrac{\frac{x+b}{x}-\ln x}{(x+b)^2}$ *alors* $f'(1)=-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow 1+b-a=-\frac{1}{2}(1+b)^2$ donc on

a : $\begin{cases}1+b-a=-\frac{1}{2}(1+b)^2\\ a=1+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+b\\ 1+b-1-b=0=-\frac{1}{2}(1+b)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}$

1.a) f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*\Rightarrow$ f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\mathbb{R}_+^*$ = J.

b) f(1) = 1 et $f'(1)=-\frac{1}{2}\neq0\Rightarrow f^{-1}$ est dérivable en et on a $\left(f^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(1)\right]}=\dfrac{1}{f'(1)}=-2$



d'où $T':y=\left(f^{-1}\right)'(1)(x-1)+f^{-1}(1)=-2x+3$.

c) $C_{f^{-1}}=S_\Delta\left(C_f\right)$ avec S_Δ est la symétrie orthogonale d'axe Δ : y = x (voir figure)

4. $D=D_1\cup D_2$ *et* $D_1\cap D_2=\varnothing$ avec D_1 et D_2 sont les domaine limités respectivement :

$\begin{cases}C_f\\ [AB]\\ [AH]\ avec\ H(1;1)\end{cases}$ *et* $\begin{cases}C_{f^{-1}}\\ [AC]\\ [AH]\ avec\ H(1;1)\end{cases}$ comme $C_{f^{-1}}=S_\Delta\left(C_f\right)$

S_Δ est une isométrie alors l'aire est de D_1 est égale à D_2.d'où Aire(D) = A = 2Aire(D_1) =

$2\left[\int_{\frac12}^{1}\left(f(x)-x\right)dx\right]=2\int_{\frac12}^{1}f(x)dx-\left[x^2\right]_{\frac12}^{1}=2\int_{\frac12}^{1}f(x)dx-\frac{3}{4}$

B- 1. $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ *on a* : $\sum\limits_{k=0}^{k=n}x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+\frac{x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$

2. $\forall n\in\mathbb{N};\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{k=n}x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N};\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a :

$\frac{\ln x}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{k=n}x^k\ln x+\frac{x^{n+1}\ln x}{1-x}\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N};$ on a : $\int_{\frac12}^{1}-\frac{\ln x}{x-1}dx=\int_{\frac12}^{1}\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n}x^k\ln x+\frac{x^{n+1}\ln x}{1-x}\right)dx\ \Rightarrow\forall n\in\mathbb{N};$ on a :

$-\int_{\frac12}^{1}f(x)dx=\sum\limits_{k=0}^{k=n}\int_{\frac12}^{1}x^k\ln x dx+\int_{\frac12}^{1}x^{n+1}f(x)dx\ \Rightarrow\forall n\in\mathbb{N};$ on a : $\int_{\frac12}^{1}f(x)dx=-\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k-\int_{\frac12}^{1}x^{n+1}f(x)dx$

3. $u_n=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^n\ln x\,dx$ $\left[\begin{array}{l}u'(x)=x^n\Leftarrow u(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\\ v(x)=\ln x\Rightarrow v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{array}\right]$ donc : $u_n=\left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\dfrac{1}{n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^n dx$

$=-\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{n+1}.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\dfrac{\ln 2}{n+1}-\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=0\ car\ \dfrac{1}{2}\in]-1,1[$ alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\dfrac{\ln 2}{n+1}-\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=0$

4. $\forall x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ on a : $f(1)\le f(x)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (car f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$) $\Leftrightarrow\forall x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]on\,a:1\le\dfrac{\ln x}{x-1}\le\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}$

$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]on\,a:x^{n+1}\le\dfrac{x^{n+1}\ln x}{x-1}\le 2\ln 2.x^{n+1}$.

5. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]on\,a:x^{n+1}\le\dfrac{x^{n+1}\ln x}{x-1}\le 2\ln 2.x^{n+1}\quad\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,on\,a:$ $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n+1}dx\le\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x^{n+1}\ln x}{x-1}dx\le 2\ln 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n+1}dx$

$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\text{on a}:\left[\dfrac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\le\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n+1}f(x)dx\le 2\ln 2\left[\dfrac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\text{on a}:\dfrac{1}{n+2}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}\right]\le\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n+1}f(x)dx\le\dfrac{2\ln 2}{n+2}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}\right]$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=0$

Donc, d'après un théorème de limite et ordre, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n+1}f(x)dx=0$

6. $\forall n\in\mathbb{N};$on a : $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=-\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k-\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n+1}f(x)dx\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=-\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k-\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{n+1}f(x)dx$ ainsi

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum\limits_{k=0}^{k=n}-u_k\right]=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx$

<u>**Exercice N°13:**</u>A- 1.a) $g:x\mapsto\left[\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right]x^2-\ln(1+x)+x$ est dérivable sur IR_+ (on remarque que la variable de g est x).Ainsi g est continue sur [0,h] et dérivable sur]0,h[. $\overset{\overbrace{TAF}}{\Rightarrow}$ il existe un réel $c\in]0,h[\,tel\,que:g'(c)=\dfrac{g(h)-g(0)}{h-0}$ or g(h) = 0 et g(0) = 0 d'où g'(c) = 0 $\Leftrightarrow\left[\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right]2c-\dfrac{1}{1+c}+1=0\left(car\,g(x)=\left[\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right]2x-\dfrac{1}{x+1}+1\right)$ donc

$g'(c)=0\Leftrightarrow\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}=\dfrac{1}{2c}\left(\dfrac{1}{1+c}-1\right)\Leftrightarrow\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}=\dfrac{-1}{2(1+c)}$.

b) $0<c<h\Leftrightarrow 1<c+1<1+h\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{1+c}>\dfrac{1}{1+h}\Leftrightarrow\dfrac{-1}{2(1+h)}<\dfrac{-1}{2(c+1)}>-\dfrac{1}{2}$ or $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{-1}{2(1+h)}=-\dfrac{1}{2}$ alors

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}=-\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim\limits_{h\to0^+}\left[\dfrac{\dfrac{\ln(1+h)}{h}-1}{h}\right]=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=-\dfrac{1}{2}$. 2.a)Soit $x\geq0$ $\forall t\in[0,x]:1+t\geq1\Leftrightarrow\forall t\in[0,x]:(1+t)^2\geq1+t\Leftrightarrow\forall t\in[0,x]:\dfrac{1}{(1+t)^2}\leq\dfrac{1}{1+t}$ et par suite : $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{(1+t)^2}dt\leq\int_0^x\frac{1}{1+t}dt$.

b) Soit $x\geq0$on a : $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{(1+t)^2}dt\leq\int_0^x\frac{1}{1+t}dt\Leftrightarrow\left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^x\leq\left[\ln(1+t)\right]_0^x\Leftrightarrow-\frac{1}{x+1}+1\leq\ln(1+x)\Leftrightarrow\frac{x}{x+1}\leq\ln(1+x)$

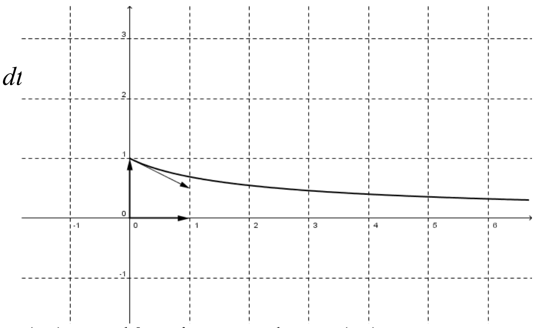
$\Leftrightarrow\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\leq0$.

c) la fonction : $x\mapsto1+x$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Et par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		$+\infty$
f'(x)	0	—	
f(x)	1	$\searrow$	0

$\forall x>0;f'(x)=\dfrac{x.\dfrac{1}{1+x}-1.\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\leq0$ D'après la question A-2-b).

3.Voir tableau de variation et la courbe.



B-1. $\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}-u_n=\displaystyle\int_0^a t^{n+1}f(t)dt-\int_0^a t^nf(t)dt=\int_0^a t^nf(t).(t-1)dt$

Or $\forall t\in[0,a]\subset[0,1]$ on a : $t^n\geq0;f(t)\geq0$ et $t-1\leq0\Rightarrow$

$\forall t\in[0,a]$ *on a* $:t^nf(t)(t-1)\leq0$ et par suite $\displaystyle\int_0^a t^nf(t)(t-1)dt\leq0\Rightarrow$

$u_{n+1}-u_n\leq0$ donc (u_n) est une suite décroissante.

2.a) $\forall n\in\mathbb{N};\forall t\in[0,a]$ on a : $t^n\geq0;f(t)\geq0\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:t^nf(t)\geq0$

$\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:u_n=\displaystyle\int_0^a t^nf(t)dt\geq0$. Donc (u_n) est minorée par 0 de plus (u_n) est décroissante donc (u_n) est convergente.

3.a) f est décroissante sur IR_+ donc : pour tout réel $x\geq0$, $f(x)\leq f(0)=1$.

b) $\forall n\in\mathbb{N};\forall t\in[0,a]:f(t)\leq1\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N};\forall t\in[0,a]:t^nf(t)\leq t^n\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:\displaystyle\int_0^a t^nf(t)dt\leq\int_0^a t^ndt$ $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\leq\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^a$

$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N};u_n\leq\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ c) $\forall n\in\mathbb{N};u_n\leq\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^{n+1}}{n+1}=0$ *car* $a\in]0,1]$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

__**Exercice N°14:**__ 1.a) $0\leq x\leq1$ *alors* $1\leq x+1\leq2$ *donc* $0\leq\ln(x+1)\leq\ln2$ d'où $0\leq x^n\ln(x+1)\leq\ln(2).x^n$

$\Rightarrow\displaystyle\int_0^1 0dx\leq\int_0^1 x^n\ln(1+x)dx\leq\int_0^1 x^n\ln2\,dx\Leftrightarrow0\leq U_n\leq\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln2}{n+1}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$.

b) $\bullet\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^2-1+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\ln2$

$\bullet U_1=\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)dx$ posons : $\left(\begin{array}{l}u(x)=\ln(1+x)\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{1+x}\\ v'(x)=x\Leftarrow v(x)=\dfrac{1}{2}x^2\end{array}\right)$ donc $U_1=\left[\dfrac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=$

$\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}+\ln2\right)=\dfrac{1}{4}$.

2.a) $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}(-x)^k$ est la somme de (n + 1) termes d'une suite géométrique de raison $q=-x\neq 1$. Alors

$S_n=\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}=\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$. D'une part on a : $\int_0^1 S_n dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx+\int_0^1\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx$

$=\left[\ln(1+x)\right]_0^1+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$ d'autre part : $\int_0^1\left(1-x+x^2+.....+(-1)^n x^n\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+....+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{(-1)^n}{n+1}=V_n$ d'où $V_n=\ln 2+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

b) $0\leq x\leq 1$ alors $1\leq x+1\leq 2$ $d'où$ $1\geq\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{2}\Rightarrow x^{n+1}\geq\frac{x^{n+1}}{x+1}\geq\frac{x^{n+1}}{2}$ on aura alors :

$|\mathrm{V_n}-\ln 2|=\left|\int_0^1\frac{\mathrm{x^{n+1}}}{1+\mathrm{x}}\mathrm{dx}\right|\leq\int_0^1\mathrm{x^{n+1}dx}$ comme $\int_0^1 x^{n+1}dx=\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+2}$ d'où $|\mathrm{V_n}-\ln 2|\leq\frac{1}{\mathrm{n}+2}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2}=0$ alors $\lim_{\mathrm{n}\to+\infty}\mathrm{V_n}=\ln 2$.

3.a) $\begin{pmatrix} f'(x)=x^n\Leftarrow f(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ g(x)=\ln(1+x)\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{1+x}\end{pmatrix}$ alors : $U_n=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{n+1}.\frac{x^{n+1}}{1+x}dx=\frac{1}{n+1}\ln 2-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}dx$

comme $\mathrm{V_n}=\ln 2+(-1)^{\mathrm{n}}\int_0^1\frac{\mathrm{x^{n+1}}}{1+\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ alors $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx=\frac{V_n-\ln 2}{(-1)^n}$ Ainsi

$U_n=\frac{1}{n+1}\ln 2-\frac{1}{n+1}\left(\frac{V_n-\ln 2}{(-1)^n}\right)=\frac{\ln 2}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}(\ln 2-V_n)$

b) $\mathrm{W_n}=(\mathrm{n}+1)\mathrm{U_n}=\ln 2+(-1)^{\mathrm{n}}(\ln 2-\mathrm{V_n})\Rightarrow\mathrm{W_n}-\ln 2=(-1)^{\mathrm{n}}(\ln 2-\mathrm{V_n})\Rightarrow|\mathrm{W_n}-\ln 2|=|\ln 2-\mathrm{V_n}|$ comme $\lim_{n\to+\infty}|V_n-\ln 2|=0$ alors $\lim_{n\to+\infty}|W_n-\ln 2|=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}W_n=\ln 2$ donc W est une suite convergente.

Exercice N°15: 1. on a : $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ or : $\forall\mathrm{x}\in\mathbb{R}_+^*$ on a :

$1-2\ln x>0\Leftrightarrow\frac{1}{2}>\ln x\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}}>x$ donc f est strictement croissante sur $\left]0,\sqrt{e}\right[$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{e},+\infty\right[$.

2)a)Comme $\sqrt{e}<2$, la fonction f est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$. On a donc : $k\leq x\leq k+1\Rightarrow$

$f(k+1)\leq f(x)\leq f(k)$ soit : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\frac{\ln(x)}{x^2}\leq\frac{\ln(k)}{k^2}(k\geq 2)$ $\Rightarrow\int_k^{k+1}\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{\ln(k)}{k^2}dx$

soit $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\int_k^{k+1}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}dx\leq\frac{\ln(k)}{k^2}\int_k^{k+1}dx$ ou encore : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}dx\leq\frac{\ln(k)}{k^2}$.

b) $\int_a^b\frac{1}{x^2}\ln x\ dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_a^b-\int_a^b-\frac{1}{x}.\frac{1}{x}\ dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_a^b-\left[\frac{1}{x}\right]_a^b=\left[-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\right]_a^b$.

3) a) En donnant successivement à k les valeurs 2 ;3 ;4 ;….. ; n – 1 on obtient (n – 2) inégalités doubles ; ajoutons-les membre à membre on obtient : $\sum_{k=2}^{k=n-1}\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\sum_{k=2}^{k=n-1}\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}dx\leq\sum_{k=2}^{k=n-1}\frac{\ln(k)}{k^2}$. La première somme s'écrit :

$\frac{\ln 3}{3^2}+\frac{\ln 4}{4^2}+......+\frac{\ln(n)}{n^2}=S_n-\frac{\ln 2}{2^2}$ .Le second membre s'écrit :

$\int_2^3\frac{\ln(x)}{x^2}dx+\int_3^4\frac{\ln(x)}{x^2}dx+....+\int_{n-1}^n\frac{\ln(x)}{x^2}dx=\int_2^n\frac{\ln(x)}{x^2}dx$ La troisième somme s'écrit :

$\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+......+\frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2}=S_n-\frac{\ln(n)}{n^2}$ d'où on a bien l'encadrement : $S_n-\frac{\ln 2}{2^2}\le\int_2^n\frac{\ln(x)}{x^2}dx\le S_n-\frac{\ln(n)}{n^2}$

b) La première inégalité s'écrit : $S_n\le\frac{\ln 2}{2^2}+\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_2^n$ d'après 2.b) soit : $S_n\le\frac{\ln 2}{2^2}-\frac{\ln(n)}{n}-\frac{1}{n}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$ ou encore : $S_n\le\frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(n)}{n}$. La deuxième inégalité s'écrit : $S_n\ge\frac{\ln(n)}{n^2}+\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_2^n$ soit :

$S_n\ge\frac{\ln(n)}{n^2}-\frac{\ln(n)}{n}-\frac{1}{n}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$ ou encore : $S_n\ge\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{n+n\ln(n)-\ln(n)}{n^2}$ d'où on trouve l'encadrement demandé.

c) on a : $\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{100+99\ln(100)}{100^2}\le S_{100}\le\frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(100)}{100}$ on obtient avec la calculatrice : $0,79\le S_{100}\le 0,97$.

<u>Exercice N°16:</u>1.a) $I_1=\frac{1}{1!}\int_1^2\frac{(\ln x)}{x^2}dx=\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx$ soit $\left|\begin{array}{l}u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}\\ v'(x)=\frac{1}{x^2}\Leftarrow v(x)=-\frac{1}{x}\end{array}\right.$

$\Rightarrow I_1=\left[-\frac{1}{x}.\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{\ln 2}{2}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\frac{1}{(n+1)!}\int_1^2\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx-\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx=\frac{1}{n!}\left[\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}\left(\frac{\ln x}{n+1}-1\right)dx\right]$ or on a :

$x\in[1;2]\Rightarrow\ln x\ge 0\ et\ x>0\ \ donc\ \frac{(\ln x)^n}{x^2}\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, d'autre part: $x\le 2<e\Rightarrow\ln x<\ln e=1$ et comme

$\frac{1}{n+1}<1\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\frac{\ln x}{n+1}<1\Rightarrow\frac{\ln x}{n+1}-1<0$ donc $\frac{(\ln x)^n}{x^2}\left(\frac{\ln x}{n+1}-1\right)<0\ et\ par\ suite\ I_{n+1}-I_n\le 0$ alors (I_n) est une suite décroissante. On a $\forall x\in[1;2],\forall n\in\mathbb{N}^*:\frac{(\ln x)^n}{x^2}\ge 0\ \Rightarrow\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\ge 0\Rightarrow(I_n)$ est une suite décroissante et minorée par 0 donc (I_n) est une suite convergente.

c) On a : $\forall x\in[1;2]\Rightarrow 0\le\ln x\le\ln 2\ car\ \ln\nearrow\Rightarrow 0\le(\ln x)^n\le(\ln 2)^n\Rightarrow 0\le\frac{(\ln x)^n}{x^2}\le\frac{(\ln 2)^n}{x^2}$

$\Rightarrow 0\le\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\le\int_1^2\frac{(\ln 2)^n}{x^2}dx$ or : $\int_1^2\frac{(\ln 2)^n}{x^2}dx=(\ln 2)^n\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=(\ln 2)^n\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{(\ln 2)^n}{2}$ donc

$\Rightarrow 0\le\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\le\frac{(\ln 2)^n}{2}\le(\ln 2)^n\Rightarrow 0\le\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\le\frac{(\ln 2)^n}{n!}$ d'où $I_n\le\frac{(\ln 2)^n}{n!}$. Et

comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}\le\lim_{n\to+\infty}(\ln 2)^n=0$ car $(\ln 2)^n$ est une suite géometrique de raison : 0 <ln(2) <1 donc $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

2.a) $I_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_1^2\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx$ On pose : $\left[\begin{array}{l} u(x)=(\ln x)^{n+1}\Rightarrow u'(x)=(n+1)\dfrac{1}{x}.(\ln x)^n \\ v'(x)=\dfrac{1}{x^2}\Leftarrow v(x)=-\dfrac{1}{x}\end{array}\right]$

$$\Rightarrow I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left[\left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{n+1}\right]_1^2-\int_1^2-\frac{1}{x}.\frac{n+1}{x}(\ln x)^n\,dx\right]=\frac{1}{(n+1)!}\left[-\frac{1}{2}(\ln 2)^{n+1}+(n+1)\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\right]$$

$$=-\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!}+\frac{(n+1)}{(n+1)!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx=\underbrace{\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx}_{I_n}-\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!}=I_n-\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!}$$

b) Par récurrence : pour n = 1, $I_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 2}{1!}\right)$ la propriété est vraie. Supposons que :

$I_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 2}{1!}+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}\right)$, montrons que : $I_{n+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 2}{1!}+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}+\dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$. Or on a :

$$I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}\ \Rightarrow I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\frac{(\ln 2)^n}{n!}\right)-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 2}{1!}+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}+\dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$ donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*: I_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 2}{1!}+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}\right)$.

3.a) $u_n=1+\dfrac{\ln 2}{2!}+\dfrac{(\ln 2)^2}{3!}+....+\dfrac{(\ln 2)^{n-1}}{n!}\Leftrightarrow u_n.\ln 2=\dfrac{\ln 2}{1!}+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$ on aura : $I_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}u_n.\ln 2$ donc $u_n=\dfrac{1-2I_n}{\ln 2}$. b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2I_n}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$ *car* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$

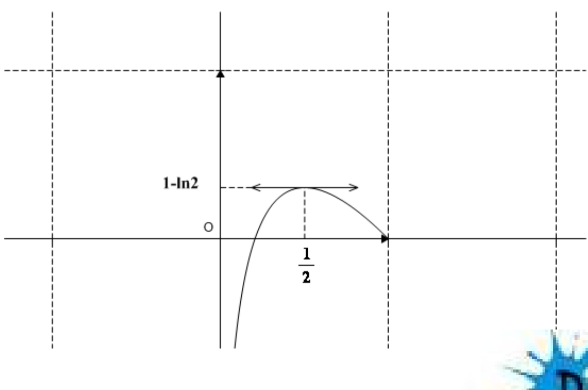
Exercice N°17: I-1) les variations de g sur]0 ; 1]. $g'(x)=-2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2x+1}{x}$. Le signe de g'(x) est celui de (-2 x + 1) car x>0. On a : $g'(x)=0\Rightarrow -2x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}2-2x+\ln x=-\infty$ $\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)=0$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
g'(x)	‖	+	0	−	
g(x)	‖ $-\infty$	↗	1 - ln2	↘	0

2) g est continue et strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$ sur $]-\infty,1-\ln 2]$ comme $0\in]-\infty,1-\ln 2]$ alors g(x) = 0 admet une solution unique α.

Soit $t\in]0,\alpha]$ comme g est croissante alors g(t)≤ g(α) donc g(t) ≤ 0. Si $t\in\left[\alpha,\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow g(\alpha)\le g(t)\Rightarrow g(t)\ge 0$. Sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ g(t) admet 0 comme minimum absolue donc g(t) ≥ 0 pour tout $t\in[\alpha,1]$: g(t) ≥0 $\Rightarrow 2-2t+\ln t\ge 0\Leftrightarrow -\ln t\le 2-2t$.

3) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}g(x)=-\infty$ alors (C_g) admet une asymptote verticale d'équation x = 0. $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ donc (C_g) admet une tangente horizontale en $\left(\dfrac{1}{2},1-\ln 2\right)$.



4) Donc l'aire $A=\left(\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}g(x)dx\right)4^2\,cm^2$

$=\left[2t-t^2+t\ln t-t\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\times 4^2\,cm^2=\left(-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\times 16cm^2$.

II- 1) la fonction : $t\mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur]0 ;1[

donc elle admet au moins une primitive G sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. La fonction $x\mapsto 2x$ est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et

$\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\Rightarrow 2x\in]0;1[\subset]0;1]$. Donc la fonction : $x\mapsto G(2x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ comme composée de deux fonctions.

Alors F est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et on a : $F'(x)=(2x)'G'(2x)-(x)'G'(x)=2.\frac{1}{\ln 2x}-\frac{1}{\ln x}=\frac{2\ln x-\ln 2x}{\ln(2x)\ln(x)}$

$=\frac{\ln\frac{x^2}{2x}}{\ln(2x)\ln(x)}=\frac{\ln\frac{x}{2}}{\ln(2x)\ln(x)}$.

2) $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$. $x\le t\le 2x\Leftrightarrow \ln x\le\ln t\le\ln 2x$ comme 2x < 1 c-à-d ln2x < 0 alors $\frac{1}{\ln 2x}\le\frac{1}{\ln t}\le\frac{1}{\ln x}$. Or les fonctions :

$$\left.\begin{array}{l} t\mapsto\frac{1}{\ln t}\\ t\mapsto\frac{1}{\ln x}\\ t\mapsto\frac{1}{\ln 2x}\end{array}\right\}\textit{sont continues sur}\left]0;\frac{1}{2}\right[$$ on aura : $\int_x^{2x}\frac{1}{\ln 2x}dt\le\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt\le\int_x^{2x}\frac{1}{\ln x}dt\Leftrightarrow\frac{2x-x}{\ln 2x}\le\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt\le\frac{2x-x}{\ln x}$

$\Leftrightarrow\frac{x}{\ln 2x}\le F(x)\le\frac{x}{\ln x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\ln 2x}\le\lim\limits_{x\to0^+}F(x)\le\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\ln x}$ or $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\ln 2x}=\frac{0}{\infty}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{0}{\infty}=0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$.

3) $F(x)\le\int_x^{2x}\frac{dt}{t-1}$. D'après I-1) : 2t -2 ≤ lnt. Les fonctions : $t\mapsto 2t-2$ *et* $t\mapsto\ln t$ sont continues sur $\left[\alpha,\frac{1}{2}\right[$ donc :

$\frac{1}{2t-2}\ge\frac{1}{\ln t}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}\ge\frac{1}{\ln t}\Rightarrow\frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{1}{t-1}dt\ge\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt\Leftrightarrow F(x)\le\frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{1}{t-1}dt\Rightarrow\ F(x)\le\left[\ln(|t-1|)\right]_x^{2x}$

$\Leftrightarrow F(x)\le\frac{1}{2}\left[\ln(|2x-1|)-\ln(|x-1|)\right]$ comme $x\le\frac{1}{2}\Rightarrow x-1<0$ *et* $2x-1<0$ donc : $|x-1|=-x+1$ *et* $|2x-1|=-2x+1$

donc : $F(x)\le\frac{1}{2}\left[\ln(1-2x)-\ln(1-x)\right]$ or : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}1-2x=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\ln(1-2x)=-\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}F(x)=-\infty$.

4) Le tableau de variation de F : $F'(x)=\frac{\ln\frac{x}{2}}{\ln(2x)\ln(x)}\ \forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\Rightarrow\frac{x}{2}\in\left]0,\frac{1}{4}\right[\Rightarrow\ln\frac{x}{2}<0$. $\ln(x)<0; x\in]0;1[$

et $\ln 2x<0$ donc : $F'(x)\le 0\ \forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$

x	0		$\frac{1}{2}$
F'(x)	‖	—	
F(x)	‖ 0	↘	-∞

5) $1+nF(x)=0\Leftrightarrow F(x)=-\frac{1}{n}$ comme F est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ sur $F\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)=]-\infty,0[$ comme $\left(-\frac{1}{n}\right)\in]-\infty,0[$ donc il existe un unique $\alpha_n\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ tel que : $F(\alpha_n)=-\frac{1}{n}$ On a $1+n>n\Leftrightarrow\frac{1}{n}>\frac{1}{1+n}\Leftrightarrow-\frac{1}{1+n}>-\frac{1}{n}\Rightarrow F(\alpha_{n+1})>F(\alpha_n)$.

Comme F est décroissante sur $]0\,;\frac{1}{2}[$ donc $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ alors (α_n) est suite décroissante et comme elle est minorée par 0 donc (α_n) est convergente.

Exercice N°18 : 1-a) On a : $I_1 = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}[\ln(t)]dt$

on pose : $\begin{pmatrix} f(t) = \ln t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t} \\ g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Leftarrow g(t) = 2\sqrt{t} \end{pmatrix}$ alors: $I_1 = \left[2\sqrt{t}.\ln t\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} 2\sqrt{t}\,dt$

$= 2\sqrt{e} - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{e} - 2\left[2\sqrt{t}\right]_1^e = -2\sqrt{e} + 4$

b) $I_{n+1} = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}[\ln(t)]^{n+1}dt$ on pose $\begin{pmatrix} u(t) = [\ln t]^{n+1} \Rightarrow u'(t) = \frac{n+1}{t}(\ln t)^n \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Leftarrow v(t) = 2\sqrt{t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I_{n+1} = \left[(\ln t)^{n+1} 2\sqrt{t}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)[\ln(t)]^n .2\sqrt{t}dt$ $I_{n+1} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)\underbrace{\int_1^e [\ln(t)]^n .\sqrt{t}dt}_{I_n} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n$.

c) $I_2 = 2\sqrt{e} - 2\times 2I_1 = 2\sqrt{e} - 4(4 - 2\sqrt{e}) = 10\sqrt{e} - 16$. $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\ln(t) - 1\right]^2 dt = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}\left[(\ln(t))^2 - 2\ln t + 1\right]dt$

$= \int_1^e \left[\frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{\sqrt{t}}\ln t + \frac{1}{\sqrt{t}}\right]dt = \int_1^e \frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}}dt - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{t}}\ln t\,dt + \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}dt = I_2 - 2I_1 + \left[2\sqrt{t}\right]_1^e$

$= 10\sqrt{e} - 16 - 2(4 - 2\sqrt{e}) + 2\sqrt{e} - 2 = 16\sqrt{e} - 26$

2-a) On a $1 \le t \le e \Leftrightarrow \ln 1 = 0 \le \ln t \le \ln(e) = 1 \Leftrightarrow 0 \le [\ln(t)]^n \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{[\ln(t)]^n}{\sqrt{t}} \le \frac{1}{\sqrt{t}}$

$\Rightarrow 0 \le I_n \le \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}dt \Rightarrow 0 \le I_n \le \left[2\sqrt{t}\right]_1^e \Leftrightarrow 0 \le I_n \le 2\sqrt{e} - 2 < \frac{3}{2}$ *donc* $0 \le I_n \le \frac{3}{2}$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e \left[\frac{1}{\sqrt{t}}(\ln(t))^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{t}}(\ln(t))^n\right]dt = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}(\ln(t))^n\left[\ln(t) - 1\right]dt$ on a :

$\forall\, t \in [1, e] : \frac{1}{\sqrt{t}}[\ln(t)]^n \ge 0$ et $0 \le \ln t \le 1$ d'où $\ln(t) - 1 \le 0$. alors d'où $I_{n+1} - I_n \le 0$ et par suite I_n est décroissante, or I_n est minorée par 0 alors elle est convergente .

3-a) on a I_n est décroissante alors $I_{n+1} \le I_n \Leftrightarrow 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n \le I_n \Leftrightarrow 2\sqrt{e} \le (2n+3)I_n \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{e}}{2n+3} \le I_n$ d'autre part, on a : $I_n \le I_{n-1}$ *et on a* : $I_n = 2\sqrt{e} - 2nI_{n-1} \Leftrightarrow I_{n-1} = \dfrac{2\sqrt{e} - I_n}{2n}$ d'où : $I_n \le \dfrac{2\sqrt{e} - I_n}{2n} \Leftrightarrow$

$I_n + \dfrac{I_n}{2n} \le \dfrac{2\sqrt{e}}{2n} \Leftrightarrow I_n \le \dfrac{2\sqrt{e}}{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}$ donc $I_n \le \dfrac{2\sqrt{e}}{2n+1}$ finalement : $\dfrac{2\sqrt{e}}{2n+3} \le I_n \le \dfrac{2\sqrt{e}}{2n+1}$.

b) $\dfrac{2\sqrt{e}}{2n+3} \le I_n \le \dfrac{2\sqrt{e}}{2n+1} \Leftrightarrow \dfrac{n.2\sqrt{e}}{2n+3} \le n.I_n \le \dfrac{n.2\sqrt{e}}{2n+1}$ *comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n.2\sqrt{e}}{2n+3} = \sqrt{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n.2\sqrt{e}}{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \sqrt{e}$.

<u>Exercice N°19 :</u> I-1) $g'(x) = \dfrac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} - 1 - x}{(1+x)^2} = \dfrac{1-x}{(1+x)^2}$

x	-1		0		1		α		+∞
g'(x)	‖	+	|	+	0	−	|	−	
g(x)	‖ -∞	↗	0	↗	1-ln2	↘	0	↘	-∞

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = \lim\limits_{y\to0^+}\left[\dfrac{2(y-1)}{y} - \ln(y)\right] = \lim\limits_{y\to0^+} \dfrac{1}{y}\left[2y - 2 - y\ln(y)\right] = -\infty$ car si on pose : $y = 1+x$, si $x \to (-1)^+ ; y \to 0^+$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = 2 - \infty = -\infty$

2) d'après le tableau de variation, g s'annule deux fois et on a g(0)= 0-ln(1)=0 et g (3,8) = 0,01 et g(4)= -0,009 comme $g(3{,}8)\times g(4) < 0$ et g continue et strictement décroissante sur]3,8 ; 4[alors l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α tel que : 3,8 < α < 4.

3) $g(x) \le 0$ *sur* $]-1,0]$ / $g(x) \ge 0$ *sur* $[0,\alpha]$ / $g(x) \le 0$ *sur* $[\alpha,+\infty[$.

4) D'après le tableau de variation, g admet un maximum est égale à 1 – ln2 < 1 d'où g(x) ≤ 1.

II- 1) Les fonctions : $\left.\begin{array}{l} x \mapsto x+1 \\ x \mapsto \ln(x+1) \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}\right\}$ sont continues sur]0,+∞[don f est continue sur]0,+∞[.

<u>Continuité de f en 0^+ :</u> $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{x}\ln(1+x)}{x}$. On pose : $y = 1+x,\ x \to 0, y \to 1$

et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{y\to1} \dfrac{\ln(y)}{y-1} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x} \times \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0\times1 = 0 = f(0)$ .Don nc f est continue à droite en 0.

2) **<u>Dérivabilité en 0^+ :</u>** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}.\dfrac{\ln(1+x)}{x} = +\infty\times1 = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite de 0.

3) Les fonctions : $\left.\begin{array}{l} x \mapsto \ln(1+x) \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}\right\}$ sont dérivables sur]0,+∞[d'où f est dérivable sur]0,+∞[. Et

$$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{1+x}.\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+x)}{\sqrt{x}^2} = \dfrac{2x - (1+x).\ln(1+x)}{2\sqrt{x}(1+x)x} = \dfrac{2x - (1+x)\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \left(\dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x)\right).\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}.$$

x	0		α		+∞
g(x)	‖	+	0	−	
f(x)	‖ 0	↗	f(α)	↘	

4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)x\right]}{\sqrt{x}}$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right] = 0$ $f(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$ or $g(\alpha) = 0 = \frac{2\alpha}{1+\alpha} - \ln(1+\alpha) \Leftrightarrow \ln(1+\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$

donc $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

III-1) D'après I-4) on a : $g(x) \le 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x} - \ln(x+1) \le 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x} - 1 \le \ln(x+1) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} \le \ln(x+1)$.

2)a) On a : $\frac{x-1}{x+1} \le \ln(x+1)$ on pose : $x = 1 + \frac{k}{n}$ on aura: $\ln\left(1+1+\frac{k}{n}\right) \ge \frac{1+\frac{k}{n}-1}{1+1+\frac{k}{n}} \Leftrightarrow \ln\left(2+\frac{k}{n}\right) \ge \frac{k}{2n+k}$

or 2n + k ≤ 3n donc $\frac{1}{2n+k} \ge \frac{1}{3n}$ et k est positif $\frac{k}{2n+k} \ge \frac{k}{3n}$ d'où : $\ln\left(2+\frac{k}{n}\right) \ge \frac{k}{3n}$.

c) On a : $\ln\left(2+\frac{k}{n}\right) \ge \frac{k}{3n} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(2+\frac{k}{n}\right) \ge \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{3n} \Leftrightarrow \ln(u_n) \ge \frac{1}{3\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} \Leftrightarrow \ln(u_n) \ge \frac{n+1}{6}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) \ge \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{6} = +\infty$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = +\infty$ *et par suite* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$