SUITES RECURRENTES

Exercice n°1.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel *n*.

1) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de *n*, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice n°2.

On considère la suite *u* définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 3$

2) Montrer que la suite *u* est strictement croissante.

3) Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°3.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1) a) Démontrer que pour tout $n \ge 3$, $u_n \ge 0$.

b) En déduire que pour tout $n \ge 4$, $u_n \ge n - 2$.

c) En déduire la nature de la suite (u_n) .

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) est une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

d) En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de *n*.

Exercice n°4.

Sur une droite *D* munie d'un repère $(O;\vec{i})$, A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives –4 et 3. Pour tout entier naturel *n*, on note : A_{n+1} le barycentre de $(A_n,1)$ et $(B_n,4)$; B_{n+1} le barycentre de $(A_n,3)$ et $(B_n,2)$;

1) Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1

2) Les points A_n et B_n ont pour abscisses respectives a_n et b_n . Ainsi $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$

Démontrer que pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$

3) a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel *n* : $3a_n + 4b_n = 0$

b) En déduire que : $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$

4) a) Exprimer a_n et b_n en fonction de *n*.

b) Déterminer les limites de a_n et b_n quand *n* tend vers $+\infty$

c) Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n .

Exercice n°5.

Soit θ un réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2\cos\theta$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ pour tout entier naturel n

1) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ (On rappelle que, pour tout réel x , on a : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$)

2) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

3) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{\theta}{2^n}$

Déterminer la limite de la suite (v_n)

4) En déduire que (u_n) est convergente ; quelle est sa limite ?