Mathématiques aux élèves www.devoir.tn	*Test N°2 (Suites réelles et Fonctions exponentielles)*		
Mr :Chortani Atef	*Samedi 23-04-2011*	*2heures*	*4 ème inf2*

Exercice 1

On considère la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = x + 1 - e^{x-1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) a) Montrer que la droite D : y = x +1 est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Déterminer les positions relatives de (C) et D.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter le résultat et Tracer la courbe (C) et la droite D .

3) Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq U_n < 1$

b) Montrer que, la suite (U_n) est croissante .

c)En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie sur IN par :$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{6U_n}{1+U_n}$.

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq U_n < 5$.

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .

c)En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2) On considère la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \frac{-5+U_n}{U_n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer V_n puis en déduire U_n en fonction de n . Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

c)Calculer en fonction de n ,la somme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} V_k$. calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) a- Résoudre dans IR l'inéquation : $-2e^{-x} + 1 > 0$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans IR exactement deux solutions dont l'une est nulle ; on notera α l'autre solution et on vérifiera que : $1,5 < \alpha < 1,6$

3) a- Montrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $(+\infty)$

b- Préciser la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage $(-\infty)$

4) Tracer Δ et (C).

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$ et h^{-1} la fonction réciproque de h.

a- Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

b- Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives

$x = \alpha$, $x = 0$ et $y = 0$. Montrer que $A = (16\alpha - 8\alpha^2)$ cm^2.